TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 54 1954

Л. К. НАРЕЦ

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МАШИННЫМИ МЕТОДАМИ

ЭСТОНСКОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИН 1954

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Серия А № 54 1954

Л. К. НАРЕЦ

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МАШИННЫМИ МЕТОДАМИ

ЭСТОНСКОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТАЛЛИН 1954

нам указывали (1948—51 г.) не только специалисты строительной механики, но и многих других технических дисциплин [10].

Приемы изложения мы выбрали самые простые [1], но сохранили терминологию теории матриц, для того чтобы не затруднить дальнейшее изучение машинных методов по другим источникам. В качестве основного алгоритма мы применили «Карандашное правило», применявшееся под этим и другими названиями для вычисления определителей Лейбницем, Кио́, Банахевичем. В изложении методов машинного счета мы многое почерпнули у П. А. Некрасова, использовав его работу 1892 г. [I]. Большое внимание уделено методу Жордана и его развитию. Поводом к составлению данной работы послужили результаты польского астронома Т. Банахевича, знакомые нам по статье Р. Цурмюля, но мы сохранили матрицу Гаусса. [3], [4], [5].

По указанным причинам, изложение вопроса получилось оригинальным, и, естественно, мы не могли не сделать несколько личных предложений. Двухлетний опыт преподавания в 1952—54 г. в Таллинском политехническом институте на двух факультетах подтверждает хорошую усвояемость студентами машинных методов и практическую эффективность этих методов. Рассчитывались рамы на три случая нагрузки с количеством неизвестных до десяти (и включительно). По нашему совету нижеописанные методы применены в кандидатских диссертациях [13], [14].

---

[1] В начале изложения методическим вопросам уделено бо́льшее внимание, чем принято в научной работе.

1. КАРАНДАШНОЕ ПРАВИЛО [1]

Для упрощения записи будем считать, что нам задана система линейных алгебраических уравнений, содержащая только четыре неизвестных. Общность полученных результатов от этого не изменится, запись же формул и их понимание упростятся.

Имеем систему линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15}\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25}\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35}\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

у которой все коэффициенты и правые части — известные числа.

Из первого уравнения системы (1) легко определить x_1:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 + a_{15}\right)$$

Подставляя это значение x_1 во второе, третье и четвертое уравнения системы (1), исключим x_1 из этих уравнений и, после приведения подобных членов, получим «новую систему», вполне эквивалентную «старой системе» (1), но содержащую x_1 только в первом уравнении. Запишем полученную систему, отчеркнув «карандашом» первую строку и первый столбец, в который поместим необходимые вспомогательные коэффициенты. [2]

Продумывая указанный процесс исключения x_1 и сделанную запись, мы замечаем, что все вычисляемые коэффициенты системы (2) определяются однообразно и притом по весьма простому правилу:

«Коэффициент новой системы (2) равен ему соответствующему в старой системе (1) минус произведение отчеркнутых коэффициентов, стоящих в той же стро-

---

[1] См. [2] стр. 70.

[2] См. (2) на стр. 6.

$$
\begin{array}{c|l}
a_{11}x_1 & + \quad a_{12}x_2 \quad + \quad a_{13}x_3 \quad + \quad a_{14}x_4 = \quad a_{15} \\
\hline
\frac{a_{21}}{a_{11}} & \left(a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\,a_{12}\right)x_2+\left(a_{23}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\,a_{13}\right)x_3+\left(a_{24}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\,a_{14}\right)x_4=\left(a_{25}-\frac{a_{21}}{a_{11}}\,a_{15}\right) \\
\frac{a_{31}}{a_{11}} & \left(a_{32}-\frac{a_{31}}{a_{11}}\,a_{12}\right)x_2+\left(a_{33}-\frac{a_{31}}{a_{11}}\,a_{13}\right)x_3+\left(a_{34}-\frac{a_{31}}{a_{11}}\,a_{14}\right)x_4=\left(a_{35}-\frac{a_{31}}{a_{11}}\,a_{15}\right) \\
\frac{a_{41}}{a_{11}} & \left(a_{42}-\frac{a_{41}}{a_{11}}\,a_{12}\right)x_2+\left(a_{43}-\frac{a_{41}}{a_{11}}\,a_{13}\right)x_3+\left(a_{44}-\frac{a_{41}}{a_{11}}\,a_{14}\right)x_4=\left(a_{45}-\frac{a_{41}}{a_{11}}a_{15}\right)
\end{array}
\tag{2}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2 & + \quad a_{13}x_3 \quad + \quad a_{14}x_4 = \quad a_{15} \\
b_{22}x_2 & + \quad b_{23}x_3 \quad + \quad b_{24}x_4 = \quad b_{25} \\
\hline
\frac{b_{32}}{b_{22}} & \left(b_{33}-\frac{b_{32}}{b_{22}}\,b_{23}\right)x_3+\left(b_{34}-\frac{b_{32}}{b_{22}}\,b_{24}\right)x_4=\left(b_{35}-\frac{b_{32}}{b_{22}}\,b_{25}\right) \\
\frac{b_{42}}{b_{22}} & \left(b_{43}-\frac{b_{42}}{b_{22}}\,b_{23}\right)x_3+\left(b_{44}-\frac{b_{42}}{b_{22}}\,b_{24}\right)x_4=\left(b_{45}-\frac{b_{42}}{b_{22}}\,b_{25}\right)
\end{array}
\tag{4}
$$

ке и в том же столбце, что и вычисляемый коэффициент».

Вычисление коэффициентов правой части производится без каких-либо изменений. Оно может быть сделано одновременно с вычислением левой части и отдельно, когда левая часть уже вычислена. По этой причине, когда систему уравнений (1) надо решить при нескольких значениях правых частей (одну раму на несколько случаев нагрузки), можно вычисления правых частей производить после всех преобразований левой части.

Очевидно, что карандашное правило без всякого изменения можно применить и к системе (2), которую запишем сейчас короче:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15} \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_{25} \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 &= b_{35} \\ b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 &= b_{45} \end{aligned} \tag{3}$$

В этой системе оставим первое уравнение без изменений, а из второго уравнения, как и ранее, определим x_2:

$$x_2 = \frac{1}{b_{22}}(-b_{23}x_3 - b_{24}x_4 + b_{25})$$

Подставив это выражение в третье и четвертое уравнение системы (3), получим следующую по порядку «новую систему». При записи отчеркнем первые две строки и два столбца. Во второй столбец впишем следующие по порядку вспомогательные коэффициенты: [1]

Обнаруживаем, что характер выкладок не изменился и что коэффициенты системы (4) вычисляются по отчеркнутым коэффициентам второй строки и второго столбца точно так же, как вычислялись коэффициенты системы (2) по отчеркнутым коэффициентам первой строки и первого столбца. Перепишем систему (4), обозначив через c следующие коэффициенты, подлежащие вычислению.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15} \\ b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_{25} \\ c_{33}x_3 + c_{34}x_4 &= c_{35} \\ c_{43}x_3 + c_{44}x_4 &= c_{45} \end{aligned} \tag{5}$$

[1] См. (4) на стр. 6.

Применив еще раз карандашное правило, придем к системе уравнений, в которой последнее уравнение содержит только одно неизвестное x_4.

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & & + \; a_{14}x_4 = a_{15} \\
b_{22}x_2 + b_{23}x_3 & & + \; b_{24}x_4 = b_{25} \\
c_{33}x_3 & \Big| & + \; c_{34}x_4 = c_{35} \\
\hline
\dfrac{c_{43}}{c_{33}} & \Big| & \left(c_{44} - \dfrac{c_{43}}{c_{33}}\,c_{34}\right)x_4 = \left(c_{45} - \dfrac{c_{43}}{c_{33}}\,c_{35}\right)
\end{array} \tag{6}
$$

В результате последовательного применения карандашного правила приходим к треугольной системе:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15} \\
b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= b_{25} \\
c_{33}x_3 + c_{34}x_4 &= c_{35} \\
d_{44}x_4 &= d_{45}
\end{aligned} \tag{7}
$$

из которой обратным ходом, т. е. начиная с последнего уравнения и кончая первым, последовательно определим неизвестные x_4, x_3, x_2, x_1.

Из изложенного видно, что карандашное правило является своеобразно сформулированным правилом исключения неизвестных, при применении которого сокращается запись, но при этом сами выкладки точно соответствуют выкладкам при обычном исключении неизвестных.

Назовем коэффициент, отчеркнутый два раза (горизонтально и вертикально), «основным коэффициентом». Горизонтальная черта, как мы видели, соответствует тому уравнению, с помощью которого производится исключение, а вертикальная черта соответствует тому неизвестному, которое исключается. Следовательно, выбрав основной коэффициент и проведя соответственно ему горизонтальную и вертикальную черту, мы можем с помощью карандашного правила посредством любого уравнения исключать любое неизвестное.

Целесообразный выбор основного коэффициента при применении карандашного правила может быть основан на различных соображениях, каждое из которых будет определять тот или иной, иногда независимый от других, вычислительный метод.

1. Сокращение вычислений при наличии в системе уравнений нулевых коэффициентов.

Если система уравнений содержит большое число нулевых коэффициентов, то при каждом исключении целесообразно за основной коэффициент выбирать тот, в строке и столбце которого содержится наибольшее число нулей. В этом случае (при исключении) коэффициенты строк и столбцов «новой системы», соответствующие отчеркнутым нулям, непосредственно переписываются из предыдущей (по ходу исключения) системы.

2. Повышение точности вычислений.

Если при последовательных вычислениях каждый раз выбирать за основной наибольший (по абсолютной величине) коэффициент, то в этом случае повышается точность вычислений. На этом принципе основан известный метод главных коэффициентов.

3. Исключение операции «обратного хода» для вычисления неизвестных. Метод Жордана.

По Жордану из системы уравнений (3) с помощью второго уравнения исключается неизвестное x_2 не только из третьего и четвертого, но также и из первого уравнения. Поступая аналогично, можно в системе (5) исключить x_3 из первого, второго и четвертого уравнений и таким же путем исключить x_4 в системе (7) из первого, второго и третьего уравнения. В результате такого исключения [1] мы приходим к диагональной системе

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= d_{15} \\
b_{22}x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= d_{25} \\
c_{33}x_3 \qquad\qquad &= d_{35} \\
d_{44}x_4 &= d_{45}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

для решения которой «обратный ход» не нужен. Пример применения карандашного правила при исключении по Жордану приведен ниже.

4. Организация однообразного вычислительного процесса с однообразной записью, пригодного для применения методов машинного счета.

Последнему вопросу посвящено все последующее содержание данной работы.

Но прежде чем перейти к соответствующим вступительным примерам, отметим, что карандашное правило и, соответственно, все сказанное о выборе основного коэффи-

---

[1] Карандашное правило сохраняется.

циента непосредственно обобщается на групповое одновременное исключение неизвестных, т. е. для исключения неизвестных с применением клеточных матриц. [1]

Пример 1

Для приобретения навыков в пользовании карандашным правилом приведем пример решения системы уравнений, коэффициенты которой специально подобраны так, чтобы все решение проходило в целых и малых числах. Итак, дана система уравнений:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2\\
4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 9\\
-2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1\\
2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Переписываем первую строку без изменения, проводим карандашные линии, вычисляем и вписываем в отчеркнутый столбец вспомогательные коэффициенты. Далее по карандашному правилу вычисляем коэффициенты первой новой системы. Имеем:

$$
\begin{array}{r|lr}
2x_1 & - x_2 + 2x_3 - x_4 = & 2\\
\hline
2 & +3x_2 + x_3 - x_4 = & 5\\
-1 & -3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = & 3\\
1 & +6x_2 + 6x_3 - 8x_4 = & -2
\end{array}
$$

Переписываем первое и второе уравнение без изменений, проводим карандашные линии. Вписываем затем вспомогательные коэффициенты, вычисляем по порядку следующую новую систему:

$$
\begin{array}{rr|lr}
2x_1 & - x_2 & + 2x_3 - x_4 = & 2\\
 & 3x_2 & + x_3 - x_4 = & 5\\
\hline
 & -1 & +4x_3 - x_4 = & 8\\
 & 2 & +4x_3 - 6x_4 = & -12
\end{array}
$$

---

[1] О возможностях и перспективах такого исключения неизвестных при решении задач строительной механики мы докладывали 15 декабря 1950 г. на семинаре Института механики АН СССР. См. список литературы 10.

Поступая далее аналогично, получим:

$$
\begin{array}{r|l}
2x_1 - x_2 + 2x_3 & - x_4 = 2 \\
3x_2 + x_3 & - x_4 = 5 \\
4x_3 & - x_4 = 8 \\
\hline
1 & - 5x_4 = -20
\end{array}
$$

Откуда: $x_4 = 4$; $x_3 = 3$; $x_2 = 2$; $x_1 = 1$.

Пример 2

Решим эту же систему с помощью карандашного правила по Жордану. Система уравнений не подобрана так, чтобы и по Жордану она решалась в целых числах. Имеем систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 9 \\
-2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 9x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Первый этап вычислений проходит без изменений.

$$
\begin{array}{r|l}
2x_1 & - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\
\hline
2 & + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
-1 & - 3x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 3 \\
1 & + 6x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -2
\end{array}
$$

На втором этапе производится также и исключение неизвестного x_2 из первого уравнения.

$$
\begin{array}{r|l}
2x_1 \quad -\frac{1}{3} & + \frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4 = \frac{11}{3} \\
3x_2 & + x_3 - x_4 = 5 \\
\hline
-1 & + 4x_3 - x_4 = 8 \\
2 & + 4x_3 - 6x_4 = -12
\end{array}
$$

На третьем этапе производится исключение x_3 из всех уравнений, кроме третьего.

$$
\begin{array}{rrr|l}
2x_1 & & \frac{7}{12} & -\frac{3}{4}x_4 = -1 \\
 & 3x_2 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4}x_4 = 3 \\
 & & 4x_3 & -x_4 = 8 \\
\hline
 & & 1 & -5x_4 = -20
\end{array}
$$

На четвертом этапе производится исключение x_4 из первых трех уравнений.

$$
\begin{array}{rrrr|r}
2x_1 & & & \frac{3}{20} & = 2 \\
 & 3x_2 & & \frac{3}{20} & = 6 \\
 & & 4x_3 & \frac{1}{5} & = 12 \\
 & & & -5x_4 & = -20 \\
\hline
\end{array}
$$

В итоге всех выкладок получаем диагональную систему уравнений, которую выпишем еще раз.

$$
\begin{array}{rrrrr}
2x_1 & & & & = 2 \\
 & 3x_2 & & & = 6 \\
 & & 4x_3 & & = 12 \\
 & & & -5x_4 & = -20,
\end{array}
$$

с ранее полученными решениями: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Пример 3

Рассмотрим случай, когда диагональный коэффициент в процессе исключения становится равным нулю. Имеем систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 8x_4 &= -28 \\
4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 14 \\
-4x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 10x_4 &= -62 \\
-16x_1 - 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 68
\end{aligned}
$$

Как и ранее, исключаем x_1 из второго, третьего и четвертого уравнения.

$$\begin{array}{r|l}
8x_1 & +4x_2-2x_3-8x_4=-28 \\
\hline
0{,}5 & +0x_2+4x_3+2x_4=28 \\
-0{,}5 & +8x_2-4x_3+6x_4=-76 \\
-2{,}0 & +4x_2+6x_3+4x_4=12
\end{array}$$

При исключении второй диагональный коэффициент оказался равным нулю. Поэтому в практическом расчете [1] (ради однообразия выкладок) мы, не приступая к дальнейшим вычислениям, должны при обнаружении нулевого диагонального коэффициента сразу же произвести перестановку уравнений и вести вычисления по такой схеме:

$$\begin{array}{r|l}
8x_1 & +4x_2-2x_3-8x_4=-28 \\
\hline
-0{,}5 & +8x_2-4x_3+6x_4=-76 \\
0{,}5 & +0x_2+4x_3+2x_4=28 \\
-2{,}0 & +4x_2+6x_3+4x_4=12
\end{array}$$

Следующие этапы исключений проводятся без каких-либо особенностей, поэтому мы их приводим без пояснений.

$$8x_1+4x_2-2x_3-8x_4=-28$$

$$\begin{array}{r|l}
8x_2 & -4x_3+6x_4=-76 \\
\hline
0{,}0 & +4x_3+2x_4=28 \\
0{,}5 & +8x_3+x_4=50
\end{array}$$

$$8x_1+4x_2-2x_3-8x_4=-28$$

$$8x_2-4x_3+6x_4=-76$$

$$\begin{array}{r|l}
4x_3 & +2x_4=28 \\
\hline
2{,}0 & -3x_4=-6
\end{array}$$

$x_4=2,\ x_3=6,\ x_2=-8,\ x_1=4.$

2. ОБОБЩЕННОЕ КАРАНДАШНОЕ ПРАВИЛО. ОБЪЕДИНЕНИЕ ВЫКЛАДОК ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕХАНИЗМА НАКОПЛЕНИЯ АРИФМОМЕТРА ОТНОСИТЕЛЬНО СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Продумывая решение приведеннных примеров, обнаруживаем существенные недостатки. Для вычисления зна-

[1] Когда желательно основной коэффициент иметь на главной диагонали (что вообще не обязательно).

чений всех неизвестных нам нужна только система (7), однако, для ее получения мы много раз переписывали вспомогательные «новые» системы уравнений, утомляя внимание и память записью многих в конечном счете ненужных чисел. Выясним, имеется ли возможность получить систему (7) непосредственно по коэффициентам системы (1) с минимальным выписыванием вспомогательных коэффициентов.

Непосредственно видно, что для получения всех коэффициентов системы (3), обозначенных буквой b, надо использовать только коэффициенты первой строки и первого столбца системы (1), так как вспомогательные коэффициенты первого столбца в системе (2) получаются делением на основной коэффициент соответствующих коэффициентов первого столбца системы (1). Покажем теперь, что для вычисления коэффициентов c системы (7) достаточно знать только коэффициенты двух первых отчеркнутых строк и столбцов. В самом деле, возьмем для примера коэффициент c_{34}. По (4) коэффициент

$$c_{34} = b_{34} - \frac{b_{32}}{b_{22}} b_{24}$$

Но по (2) коэффициент

$$b_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{14}$$

Объединяя эти два написанных равенства, мы получим значение c_{34}, в которое, действительно, войдут только коэффициенты двух отчеркнутых строк и столбцов.

$$c_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{14} - \frac{b_{32}}{b_{22}} b_{24}.$$

Выполнив указанное, например, для c_{35}, получим аналогичное выражение:

$$c_{35} = a_{35} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{15} - \frac{b_{32}}{b_{22}} b_{25},$$

в которое опять войдут только коэффициенты двух отчеркнутых строк и столбцов. Становится ясным, что и для всех других вычисляемых коэффициентов мы получим подобные выражения и что для получения (7) в каждой новой системе надо вычислять только коэффициенты одной новой отчеркнутой строки и столбца. Указанным путем мы можем вычислить все коэффициенты треугольной системы (7) по заданной системе (1) и вспомогательным коэффициентам. Вспомогательные коэффициенты равны коэффициентам столбца «новой» системы, поделенным на основной коэффициент.

Выражения вида

$$S = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e$$

вычисляется на арифмометре одним приемом без записывания и гашения промежуточных результатов, причем входящие сюда числа могут быть и положительными и отрицательными. В вычислительной таблице, к описанию которой мы сейчас и приступаем, множимые будут записаны в строке, множители — в столбце. Условимся поэтому под словами «умножим строку на столбец» понимать следующее:

$$\left\| \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \right\| = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e = S \qquad (9)$$

Приведенная терминология соответствует терминологии матричного исчисления.

Для того чтобы сформулировать обобщенное карандашное правило, припишем к системе (7) вспомогательные коэффициенты, стоящие в отчеркнутых столбцах систем (2), (4), (6), отчеркнув ступенчатой линией приписываемые столбцы.

Имеем:

$$\begin{array}{cccl}
\underline{a_{11}x_1} & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 & + a_{14}x_4 = a_{15} \\
\frac{a_{21}}{a_{11}} & \multicolumn{1}{|c}{b_{22}x_2} & + b_{23}x_3 & + b_{24}x_4 = b_{25} \\
\frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{b_{32}}{b_{22}} & \multicolumn{1}{|c}{c_{33}x_3} & + c_{34}x_4 = c_{35} \\
\frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{b_{42}}{b_{22}} & \frac{c_{43}}{c_{33}} & \multicolumn{1}{|l}{d_{44}x_4 = d_{45}}
\end{array} \qquad (10)$$

Рассмотрим вышенаписанную формулу для получения коэффициента c_{34}:

$$c_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{14} - \frac{b_{32}}{b_{22}} b_{24}$$

В этой формуле на первом месте находится коэффициент a_{34}, стоящий на том же месте, что и вычисляемый коэффициент c_{34}. Из коэффициента a_{34} вычитается вспомогательный коэффициент первого отчеркнутого столбца, стоящий в той же строке, что и вычисляемый коэффициент, умноженный на коэффициент первой отчеркнутой строки, стоящий в том же столбце, что и вычисляемый коэффициент. Далее вычитается произведение коэффициента второго столбца на коэффициент второй строки. Итак, для вычисления коэффициента c_{34} надо из коэффициента a_{34} вычесть произведение отчеркнутой третьей строки на отчеркнутый четвертый столбец, а именно:

$$c_{34} = a_{34} - \left\| \frac{a_{31}}{a_{11}} \ \frac{b_{32}}{b_{22}} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_{14} \\ b_{24} \end{matrix} \right\|$$

Для большей ясности проследим, что и коэффициент c_{35} вычисляется аналогичным образом.

$$c_{35} = a_{35} - \left\| \frac{a_{31}}{a_{11}} \ \frac{b_{32}}{b_{22}} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_{15} \\ b_{25} \end{matrix} \right\|$$

Приведенные формулы, как легко показать, являются вполне общими. Поэтому обобщенное карандашное правило для одновременного исключения нескольких неизвестных сформулируется так:

«Новый коэффициент, стоящий в i-той строке и в $к$-том столбце, равен ему соответствующему в старой системе минус произведение строки i вспомогательных коэффициентов и столбца $к$ коэффициентов треугольной системы уравнений».

По этому правилу коэффициенты d_{44} и d_{45} определяются так [см. (10)]:

$$d_{44} = a_{44} - \left\| \frac{a_{41}}{a_{11}} \ \frac{b_{42}}{b_{22}} \ \frac{c_{43}}{c_{33}} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a_{14} \\ b_{24} \\ c_{34} \end{matrix} \right\| = a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{14} - \frac{b_{42}}{b_{22}} b_{24} - \frac{c_{43}}{c_{33}} c_{34}$$

$$d_{45}=a_{45}-\left\|\frac{a_{41}}{a_{11}}\frac{b_{42}}{b_{22}}\frac{c_{43}}{c_{33}}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}a_{15}\\ b_{25}\\ c_{35}\end{matrix}\right\|=a_{45}-\frac{a_{41}}{a_{11}}a_{15}-\frac{b_{42}}{b_{22}}b_{25}-\frac{c_{43}}{c_{33}}c_{35}$$

Аналогично будут определяться вспомогательные коэффициенты, например:

$$\frac{c_{43}}{c_{33}}=\frac{1}{c_{33}}\left\{a_{43}-\left\|\frac{a_{41}}{a_{11}}\ \frac{b_{42}}{b_{22}}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}a_{13}\\ b_{23}\end{matrix}\right\|\right\}=\frac{1}{c_{33}}\left\{a_{43}-\frac{a_{41}}{a_{11}}a_{13}-\frac{b_{42}}{b_{22}}b_{23}\right\}$$

Замечание.

Процесс исключения неизвестных по обобщенному карандашному правилу можно прервать на исключении любого неизвестного. В этом случае, если система уравнений имеет n неизвестных, а нам по каким-либо соображениям надо исключить только первые m неизвестных, то мы прерываем исключение на m-этапе и далее вычисляем все коэффициенты оставшейся системы, содержащей n-m неизвестных. Так надо поступать, если при вычислениях у некоторых коэффициентов происходит потеря значащих цифр, и мы, не зная общих свойств данной системы уравнений, не знаем, как наиболее целесообразно переменить порядок написания уравнений и неизвестных, чтобы потеря точности вычислений не происходила. Для неполного исключения неизвестных, конечно, могут быть причины и другого характера.

Пример 4

Решим по обобщенному карандашному правилу систему уравнений, приведенную в примере 2. Для полной ясности будем поэтапно заполнять вычислительную таблицу.

$$\begin{aligned}2x_1-\ x_2+2x_3-\ x_4&=2\\ 4x_1+\ x_2+5x_3-3x_4&=9\\ -2x_1-2x_2+\ x_3+\ x_4&=1\\ 2x_1+5x_2+8x_3-9x_4&=0\end{aligned}$$

Переписываем первую строку без изменения и вычисляем вспомогательные коэффициенты, деля коэффициенты первого столбца на первый основной коэффициент, равный 2. Имеем:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\
\hline
2{,}0 & \\
-1{,}0 & \\
1{,}0 &
\end{array}
$$

Вычисляем коэффициенты второго уравнения треугольной системы:

$$
\begin{aligned}
b_{22} &= 1{,}0 - 2\cdot(-1) = 3 \\
b_{32} &= 5{,}0 - 2\cdot 2 = 1 \\
b_{24} &= -3{,}0 - 2\cdot(-1) = -1 \\
b_{25} &= 9{,}0 - 2\cdot 2 = 5
\end{aligned}
$$

Вычисляем вспомогательные коэффициенты:

$$
\frac{b_{32}}{b_{22}} = \frac{1}{3}\Big[-2 - (-1)\,.\,(-1)\Big] = -1{,}0
$$

$$
\frac{b_{42}}{b_{22}} = \frac{1}{3}\Big[5 - 1\,.\,(-1)\Big] = 2{,}0
$$

Вписываем полученные числа в таблицу, которая на данном этапе вычислений будет иметь такой вид:

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\
2{,}0 & 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
-1{,}0 & -1{,}0 \\
1{,}0 & 2{,}0
\end{array}
$$

После вычисления коэффициентов третьей строки треугольной системы и третьего столбца вспомогательных коэффициентов придем к такому результату:

$$
\begin{array}{rrr}
 & & 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\
2{,}0 & & 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
-1{,}0 & -1{,}0 & 4x_3 - x_4 = 8 \\
1{,}0 & 2{,}0 & 1{,}0
\end{array}
$$

Приведение системы уравнений к треугольному виду заканчивается на вычислении коэффициентов четвертой строки.

$$
\begin{array}{rrrl}
2x_1 - & x_2 + & 2x_3 - & x_4 = 2 \\
\overline{2{,}0}\,| & 3x_2 + & x_3 - & x_4 = 5 \\
-1{,}0 & \overline{-1{,}0}\,| & 4x_3 - & x_4 = 8 \\
1{,}0 & 2{,}0 & \overline{1{,}0}\,| & -5x_4 = -20
\end{array}
$$

Вычисление неизвестных проводится обратным ходом.

$$x_4 = \frac{-20}{5} = 4$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\,(8 + 1{,}4) = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\,(5 - 1{,}3 + 1 \cdot 4) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\,(2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = 1.$$

В данном примере мы записывали поэтапно все выкладки для определения коэффициентов треугольной системы уравнений, вспомогательных коэффициентов и для вычисления неизвестных. Это мы сделали для пояснения и приобретения навыка в применении карандашного правила. При практических вычислениях, когда вычисления производятся на арифмометре, приведенные выкладки не записываются. Отметим, что и при обратном ходе для вычисления неизвестных выкладки имеют тот же характер, что и при исключении неизвестных. Опять и тут встречается операция вычисления произведения строки на столбец, являющаяся основной для всех машинных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

3. УПРОЩЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Канонические уравнения строительной механики метода сил и метода деформаций, а также нормальные уравнения метода наименьших квадратов обладают свойством симметрии. Коэффициенты, симметрично расположенные относительно главной диагонали системы уравнений, друг другу равны, т. е.

$$a_{ik} = a_{ki}$$

Сопоставляя заданную систему уравнений (1) со всеми новыми системами (2), (3), (4), (5), непосредственно замечаем, что при симметричности системы (1) будут также симметричны и прямоугольные части новых систем, лежащие направо вниз от отчеркнутых строк и столбцов. В системе (3) симметричными будут коэффициенты [что видно из (2)]

$$b_{23} = b_{32}, \quad b_{42} = b_{24}, \; b_{43} = b_{34},$$

в системе (5) — коэффициенты [что видно из (4)]

$$c_{43} = c_{34}.$$

Поэтому вычисление вспомогательных коэффициентов симметричных систем будет сильно упрощаться. Вычислив какой-либо коэффициент строки новой системы, записав его в таблицу, не сбрасывая этого коэффициента со счетчика арифмометра, сразу же приступают к делению, после чего полученный коэффициент вписывают на свое место. Во всем другом решение симметричных систем от решения несимметричных систем ничем не отличается.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ В РАСЧЕРЧЕННОЙ ТАБЛИЦЕ. ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОВЕРОК НА ОСНОВНЫХ ЭТАПАХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

При большом числе неизвестных возрастает вероятность ошибок вычислителя. Поэтому расчерчиваемая вычислительная таблица должна быть снабжена графами контроля вычислений. Проверку вычислений надо организовать на каждом важном этапе вычислений. В этом случае мы сводим вероятность ошибки оператора (вычислителя) почти к нулю и, затрачивая сравнительно небольшое время, гарантируем себя от повторения всего или части расчета при несвоевременно обнаруженной ошибке.

В нижеприведенном образце расчетной таблицы имеется столбец «сумм», служащий для проверок вычислений. В верхней половине столбца сумм помещены алгебраические суммы всех коэффициентов данной строки. В нижней части столбца сумм помещены алгебраические суммы коэффициентов строки, лежащих справа от ступенчатой линии, т. е. суммы коэффициентов строк треугольной системы уравнений.

№№	1	2	3	4	Суммы	Пр. часть	Зн. x
1	1	2	3	4	10	30	
2	1	4	1	2	8	20	
3	3	7	12	10	32	93	
4	2	4	10	2	18	48	
1	1	2	3	4	10	30	1
2	1	2	—2	—2	—2	—10	2
3	3	0,5	4	—1	3	8	3
4	2	0,0	1	—5	—5	—20	4

Проверка правильности вычислений состоит в том, что, оперируя с коэффициентами столбца сумм таким же образом, как и с коэффициентами столбца свободных членов, мы должны получать числа, равные вычисленным суммам коэффициентов строк. При вычислении на арифмометре с округлением последних десятичных знаков оба числа могут отличаться в двух последних значащих цифрах. Смысл указанной проверки очень простой. Так как все коэффициенты каждой из строк множатся на

Пример 5

№ №	1	2	3	4	Суммы	Пр. ч.	x
1	4	16	—8	4	16	8	
2	10	42	—24	16	44	6	
3	—4	—11	—7	36	14	—23	
4	6	30	—20	8	24	—34	
1	4	16	—8	4	16	8	—3
2	2,5	2	—4	6	4	—14	6
3	—1,0	2,5	—5	25	20	20	11
4	1,5	3,0	—0,8	4	4	12	3

один и тот же вспомогательный коэффициент, что и сумма коэффициентов данной строки, то и должно соблюдаться указанное равенство. Проверка выявляет только ошибки оператора (мало вероятный случай двух ошибок, взаимно компенсирующихся, мы не предполагаем). От потери точности вычислений из-за потери значащих цифр и от накопления погрешностей округления указанная проверка не гарантирует. Приведем еще пример без пояснений (см. стр. 21. Пр. 5).

5. МАШИННЫЙ СЧЕТ, МАШИННЫЕ МЕТОДЫ

Машинным счетом мы будем называть вычисления, проводимые на арифмометре с учетом всех его возможностей. Машинным методом мы будем называть вычислительный алгоритм, составленный для решения определенной задачи с учетом особенностей машинного счета и особенностей решаемой задачи. Не все вычисления, проводимые на арифмометре, по этому определению, будут машинными, так как весьма часто выполняют вычисления на арифмометре, не используя всех его возможностей. И далеко не всякий вычислительный метод, хотя в нем для проведения вычислений и применяется арифмометр, по сделанному определению, является машинным. Так, например, алгоритм Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений не является машинным методом, хотя при вычислениях по этому алгоритму и рекомендуется применять арифмометр. Алгоритм Гаусса является рациональным приемом для «счета в уме с пером». При создании этого вычислительного алгоритма не учитывались особенности машинного счета. Поэтому непосредственное применение арифмометра в этом алгоритме не дает полного эффекта. К сожалению, книг и научных работ по машинному счету и машинным методам сравнительно мало. Большинство руководств по вычислениям на арифмометре предназначено и составлено для статистиков или счетно-финансовых работников, в результате чего машинные методы неизвестны широким кругам инженеров. Так как арифмометр является очень простой вычислительной машиной, многие лица без всяких руководств усваивают некоторые приемы вычислений на нем, и у них создается впечатление о достижении некоторого «потолка» в возможностях вычислений, проводимых на арифмометре. Создается необходимость описать некоторые приемы машинного счета, связанные с излагаемым машинным методом решения систем уравнений. Предполагаем, что читатель уже работал на арифмометре.

На арифмометре точно выполняются все операции над целыми положительными и отрицательными числами. На установочном механизме можно установить только абсолютное значение числа. На результатный (главный) счетчик положительные числа переносятся вращением рукоятки вперед, отрицательные — назад. Направление вращения рукоятки определяет знак переносимого числа. На результатном счетчике положительное число отмечается тем, что слева от значащих цифр стоят нули, а отрицательное число — тем, что слева от значащих цифр стоят девятки. Звонок арифмометра отмечает переход от положительных чисел к отрицательным и обратно. Переход от отрицательного числа к положительному может быть выполнен двумя способами.

1) В уме дополняют каждую цифру до девяти, а последнюю до десяти и получают искомое число.

2) На установочном механизме рычагами устанавливают указанное дополнение и вращают рукоятку вперед. При правильном дополнении на результатном счетчике должны появляться нули. Вторичным вращением рукоятки вперед отрицательное число можно получить на результатном счетчике, но оно будет уже показано как положительное число.

Операция сложения и операция вычитания всегда производится как операция сложения положительных и отрицательных чисел. Перенос чисел на результатный счетчик, сообразно знаку, выполняется вращением рукоятки вперед или назад. Практикующийся прием, когда отдельно складываются положительные и отдельно отрицательные числа, не является приемом машинного счета. При применении такого приема возрастает вероятность ошибки, затрачивается лишнее время.

При умножении множимое на установочном механизме может быть установлено только без знака, поэтому положительное произведение набирается вращением рукоятки вперед, отрицательное — назад. При положительном произведении множитель на поразрядном счетчике оборотов будет отмечен белыми цифрами, при отрицательном — красными цифрами.

Вычисление произведения строки на столбец

$$S = \alpha a + \beta b + \gamma c \ldots = \Sigma \alpha_i \; a_i,$$

проводится так: вычислив первое произведение со своим знаком, не гася результата, вычисляют второе произведение (со своим знаком) и т. д. Операция сложения, таким образом, будет выполняться автоматически. Никаких записей промежуточных результатов при этом не требуется. При указанном приеме вычисления произведения строки на столбец это произведение постепенно (путем сложения) накапливается на результатном счетчике. Поэтому вычисления такого рода называют вычислениями с «накоплением».

При делении делимое устанавливается на результатном счетчике, поэтому оно может быть установлено со своим знаком. Деление на арифмометре осуществляется для положительного числа поразрядным вычитанием, для отрицательных чисел — поразрядным сложением. При делении положительного числа, при исчерпывании разряда, слева на результатном счетчике появляются девятки, которые перед переходом в следующий разряд устраняются обратным вращением рукоятки. При делении отрицательного числа, при исчерпывании разряда, слева на результатном счетчике появляются нули, которые при переходе в следующий разряд также надо устранить. Частное, получаемое при делении положительного числа, отмечается на счетчике оборотов красными цифрами, при делении отрицательного числа — белыми.

Итак, относительно основных операций обыкновенный арифмометр обладает такими положительными качествами:

1) однотипностью операций с положительными и отрицательными числами;

2) свойством накопления относительно сложения;

3) свойством накопления относительно вычисления одного или нескольких произведений строки на столбец.

Эти качества и позволяют сильно упростить решение систем уравнений и тем самым упростить расчет статически неопределимых систем.

Операции с десятичными дробями выполняются на арифмометре с сохранением для всех чисел одного и того же числа знаков после запятой.

Напомним правила округления положительных чисел и сообщим правила округления отрицательных чисел, стоящих на результатном счетчике.

Если отбрасываемое число меньше половины единицы сохраняемого разряда, то оно считается за нуль. Если отбрасываемое число больше половины единицы сохраняемого разряда, то оно принимается за единицу сохраняемого разряда. Если отбрасываемое число точно равно половине единицы сохраняемого разряда, то, если цифра в сохраняемом разряде четная, она оставляется без изменения, если нечетная, то она увеличивается до следующей четной.

При округлении отрицательного числа, стоящего на результатном счетчике, нас интересует его абсолютное значение. Вспомним, что абсолютное значение целого отрицательного числа, установленного на результатном счетчике, мы получали, дополняя последнюю цифру справа до десяти, а все остальные до девяти. Учитывая это и правила округления положительных чисел, получаем следующее правило округления отрицательных чисел: цифру последнего удерживаемого разряда дополняют до девяти, если отбрасываемое число (рассматриваемое как положительное) больше половины единицы сохраняемого знака, и до десяти, если оно меньше. Если отбрасываемое число точно равно половине единицы сохраняемого знака, дополнение производят до десяти при четной и до девяти при нечетной дополняемой последней цифре.

При вычислениях с десятичными дробями используются «запятые» арифмометра. Предположим, что мы ведем вычисления с пятью знаками после запятой. В этом случае на установочном механизме запятая ставится между пятым и шестым разрядами. Так же устанавливается запятая и на счетчике оборотов. На результатном счетчике имеется две запятых: они ставятся между пятым и шестым, десятым и одиннадцатым разрядами. Целые числа на всех счетчиках будут находиться слева от запятой (первой на результатном счетчике). При правильно установленных запятых и правильной установке всех чисел мы при всех дальнейших вычислениях будем получать целые числа слева от запятой на всех счетчиках. На результатном счетчике число, стоящее после второй запятой, при записи следует отбросить; поэтому последняя цифра сохраняемого разряда должна быть округлена по вышеприведенным правилам округления положительных и отрицательных чисел.[1]

При вычислении «новых систем» приходится вычислять выражения

$$d_{45} = a_{45} - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot a_{15} - \frac{b_{42}}{b_{22}} \cdot b_{25} - \frac{c_{43}}{c_{33}} \cdot c_{35}.$$

Следует иметь в виду, что при вычислениях в десятичных дробях второй и следующие члены будут получаться на результатном счетчике с десятью знаками после запятой (предполагаем, как и выше, что вычисления ведем с пятью знаками после запятой). Поэтому, чтобы не происходило ошибки в разрядах складываемых чисел, необходимо первый член набирать на результатном счетчике, ставя указатель подвижной каретки арифмометра на разряд целых единиц.

Если решаемая система уравнений принадлежит к малоизученным классам систем уравнений, довольно трудно указать вперед, с каким числом знаков после запятой необходимо выполнять ее решение. В этом случае следует попробовать ее решить с относительно малым числом знаков после запятой, а потом, убедившись в процессе решения, что изменение порядка следования уравнений и неизвестных не помогает, следует при повторном решении этой системы увеличить число знаков после запятой. При расчете рам по методу деформаций вышеприведенных затруднений не происходит. Поэтому, при практических расчетах канонические системы уравнений метода деформаций можно решать, удерживая только три знака после запятой. Метод сил, в зависимости от того, какие силы приняты за лишние неизвестные, может дать и хорошо, и плохо обусловленные системы уравнений. Поэтому, если выбор «лишних неизвестных» удачен, можно ограничиться тремя-пятью знаками после запятой. Если в процессе решения системы уравнений изменение порядка следования уравнений и неизвестных не помогает, то, пожалуй, лучше всего пересоставить канонические уравнения, выбрав другие неизвестные.

В процессе исключения неизвестных и при обратном ходе для определения неизвестных неизбежно накапливаются погрешности округлений. Поэтому цифра в последнем сохраняемом разряде, обыкновенно, бывает неверной.

---

[1] При машинном счете исключается ошибка в разряде результата.

По указанной причине все вычисления проводятся с дополнительными (запасными) одним, двумя знаками.

6. РАСЧЕТ РАМ

Машинный метод решения систем канонических уравнений и машинный метод определения эпюр изгибающих моментов (о чем скажем ниже) ничего принципиально нового не вносят в методы расчета рам. Все классические методы остаются в полной силе. Но при применении машинного метода ощутительно сокращаются все вычисления и коренным образом меняется соотношение различных этапов расчета рам по их трудоемкости. В выборе наиболее подходящего для данной рамы метода решения количество неизвестных уже не имеет решающего значения, так как при машинном методе небольшое увеличение или уменьшение числа неизвестных мало сказывается на затрате времени при решении канонической системы уравнений. На первое место выдвигаются другие вопросы, ранее бывшие второстепенными:

1) трудоемкость составления канонических уравнений,

2) трудоемкость вычисления эпюр изгибающих моментов.

При машинном счете становится нерациональным общеизвестный прием разложения нагрузки на прямо и косо симметричную, так как в этом случае гораздо проще рассчитать раму один раз на полное число неизвестных, чем решать ее два раза на половинное число неизвестных. При изменении трудоемкости отдельных этапов расчета рам многие приемы и методы, считавшиеся хорошими, должны быть пересмотрены. По иному теперь следует оценивать метод фокусов и метод релаксации. Методу деформаций, по указанным причинам, надо отдать особое предпочтение по сравнению с другими методами. Метод деформаций иногда требует решения канонической системы с бо́льшим числом неизвестных, чем метод сил. Но увеличение счетной работы с большим избытком компенсируется уменьшением вычислении (по сравнению с методом сил) на других этапах расчета — при вычислении коэффициентов канонической системы, построении эпюр изгибающих моментов.

7. ПРИМЕР РАСЧЕТА РАМЫ МАШИННЫМ МЕТОДОМ

При применении машинного метода все выкладки проводятся в вычислительной таблице. Никаких записей вне расчетной таблицы производить не требуется. Образец расчетной таблицы дан на вкладном листе № 1. Верхняя часть таблицы, где проводится решение системы канонических уравнений метода деформаций, нам уже знакома, и здесь никаких пояснений не требуется. Заметим лишь, что следует оставлять несколько свободных граф для правых частей, так как в практике расчета рам не всегда точно известно, на сколько случаев нагрузки будет рассчитываться данная рама.

Сосредоточим свое внимание на таблице B, которую, придерживаясь математической терминологии, будем называть матрицей B (слова «матрица» и «таблица» на разных языках имеют одинаковый смысл). Слева от матрицы B помещен столбец с обозначением изгибающих моментов по концам стержней. Индексы при букве «M» являются номерами узлов. Индексы «01» обозначают момент в стержне 01 на конце «0» (в узле 0). Аналогично индексы «10» обозначают момент на конце «1» стержня «01». Таким же образом обозначаются и другие моменты по концам стержней. Когда для заданных нагрузок вычислены все углы поворотов и все смещения, то моменты по концам стержней определяются по общеизвестным формулам:

$$M_{ip} = K_{i1}\,\varphi_1 + K_{i2}\varphi_2 + K_{i3}\,\varphi_3 + \dots K_{im}\,\Delta_m + \dots K_{in}\,\Delta_n + M^{\circ}{}_{ip},$$

где при углах поворота φ и при смещениях $\triangle$ стоят коэффициенты для перехода от деформаций к моментам по концам стержней. Через $M^{\circ}{}_{ip}$ обозначен момент на данном конце стержня в основной системе. Переходные коэффициенты вычисляются по погонным жесткостям рамы и вписываются в матрицу B одновременно с вписыванием коэффициентов канонических уравнений. Между указанными коэффициентами имеется общеизвестная связь, поэтому при одновременном вписывании этих коэффициентов вычислительная работа и проверки упрощаются. Проследим на примере, как заполняются строки матрицы B. Предположим, что для рамы нашего примера вы-

φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	Δ_5	Δ_6	$\bar{\Sigma}$	$-\bar{R}_1$	$-\bar{R}_2$	$-\bar{R}_3$
36,00000	12,00000			-3,00000		45,00000	10,00000		
12,00000	48,00000	6,00000		3,00000	-6,00000	63,00000	-10,00000		-1,00000
	6,00000	36,00000	12,00000	6,00000	-6,00000	54,00000			
		12,00000	78,00000		-9,00000	81,00000		6,75000	
-3,00000	3,00000	6,00000		6,00000	-4,00000	8,00000			1,00000
	-6,00000	-6,00000	-9,00000	-4,00000	6,00000	-19,00000		-4,50000	
Матрица L				Матрица G		$\bar{\Sigma}^*$	$\bar{R}_1^*$	$\bar{R}_2^*$	$\bar{R}_3^*$
36,00000	12,00000			-3,00000		45,00000	10,00000		
+0,33333	44,00004	6,00000		3,99999	-6,00000	48,00003	-13,33330		-1,00000
	+0,13636	35,18184	12,00000	5,45456	-5,18184	47,45456	1,81813		0,13636
		+0,34108	73,90704	-1,86044	-7,23258	64,81402	-0,62013	6,75000	-0,04651
-0,08333	+0,09091	+0,15504	-0,02517	4,49387	-2,83320	1,66067	1,74794	0,16990	1,06860
	-0,13636	-0,14729	-0,09786	-0,63046	1,92461	1,92461	-0,50903	-3,73233	0,55288

$\bar{M}$	B						1 случай нагрузки			2 случай нагрузки			3 случай нагрузки		
	1	2	3	4	5	6	$\bar{X}_1$	$\bar{M}_1^o$	$\bar{M}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{M}_2^o$	$\bar{M}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{M}_3^o$	$\bar{M}_3$
M_{01}	6				-3		0,41552		1,826	-0,04913		3,260	0,04068		-1,013
M_{10}	12				-3		-0,35767		4,320	-0,14880		2,965	-0,01731		-0,768
M_{12}	24	12					-0,01195	-10	-4,320	-0,05819		-2,965	-0,03173		0,768
M_{21}	12	24					-0,02868	10	6,402	-0,12827		-4,161	0,03803		0,073
M_{26}		12			-3		0,22221		-4,959	-1,18482		1,769	0,41890	1,0	-0,465
M_{62}		6			-3		-0,26448		-2,813	-1,93927		2,662	0,28727	1,0	-0,360
M_{23}		12	6		6	-6			-1,444			2,392			0,392
M_{32}		6	12		6	-6			0,631			2,936			0,305
M_{34}			24	12					-0,631			-2,936			-0,305
M_{43}			12	24					-0,832			-3,777			0,532
M_{45}				54		-9			0,832		-6,75	3,777			-0,532
M_{54}				27		-9			1,606		6,75	20,740			-1,559
$\bar{M}$	54	72	54	117	0	-30	0,619	0	0,619	26,662	0	26,662	-4,932	2,0	-2,932
	$\bar{\sigma}_B$						$\bar{\sigma}_B \cdot \bar{X}_1$	$S_{M_1^o}$	S_{M_1}	$\bar{\sigma}_B \cdot \bar{X}_2$	$S_{M_2^o}$	S_{M_2}	$\bar{\sigma}_B \cdot \bar{X}_3$	$S_{M_3^o}$	S_{M_3}

Проверка для $\bar{M}$: $\bar{\sigma}_B \cdot \bar{X} + S_{M^o} = S_M$

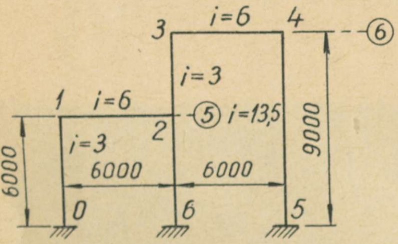
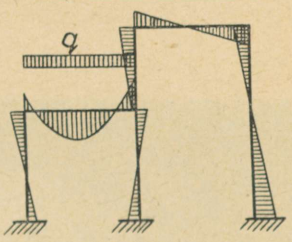
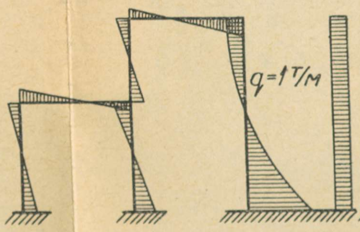


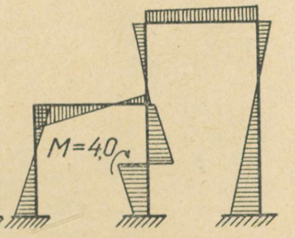
Схема рамы



1 случай нагрузки



2 случай нагрузки



3 случай нагрузки

Примечания: 1. Выкладки для составления уравнений и B-таблицы не приведены.
2. Все остальные выкладки произведены по таблице.
3. Новый случай нагрузки требует вычисления столбцев – R_1, R_1^*, $\bar{X}_1$, M^o и M.
4. Заштрихованы нулевые клетки, сохраняющиеся в матрицах L и G.
5. При практических вычислениях после запятой достаточно удержат три знака.

числяется момент M_{23}, и что изгибающий момент на этом конце от внешних нагрузок в основной системе отсутствует. Тогда при вычисленных погонных жесткостях искомый момент выразится так:

$$M_{23} = 12\varphi_2 + 6\varphi_3 + 6\Delta_5 - 6\Delta_6.$$

Указанное выражение представляет собой произведение строки переходных коэффициентов на столбец вычисленных деформаций. Вычисленные деформации (бывшие неизвестными в канонической системе уравнений) при машинном методе записываются в столбце, следовательно, переходные коэффициенты в матрице B должны быть записаны в строке. Каждая строка матрицы B служит для определения одного момента. Поэтому число строк матрицы B равно числу вычисляемых моментов. Переходные коэффициенты не зависят от нагрузок, поэтому одна матрица B будет пригодной для вычисления моментов при любом числе нагрузок. В каждом узле сумма моментов по концам стержней должна быть равной нулю. Желательно поэтому для удобства проверок так размещать строки матрицы B, чтобы эти проверки легко выполнялись. Итак, матрица B, операции умножения строки на столбец осуществляют переход от деформаций к моментам по концам стержней.

Если в основной системе на концах стержней возникают моменты от внешней нагрузки, то эти моменты записываются в столбец, следующий за столбцом вычисленных неизвестных. Эти моменты учитываются при вычислении моментов по концам стержней, записываемых в третьем столбце справа от столбца вычисленных деформаций. При вычислении момента M_{12}, необходимо выполнить такие выкладки:

$$M_{12} = 24\varphi_1 + 12\varphi_2 - 10; \; (M^{\circ}_{12} = -10).$$

Здесь к произведению строки на столбец еще добавляется момент в основной системе. Чтобы не было ошибки в разряде складываемых чисел, момент в основной системе набирают на результатном счетчике, установив указатель положения подвижной каретки арифмометра на разряд целых единиц. Вычисленные моменты следует округлить, отбрасывая, как неточный, последний знак.

Округления чисел, стоящих на результатном счетчике, производятся по вышеизложенным правилам округления положительных и отрицательных чисел.

Матричная проверка правильности вычисленных моментов по концам стержней основана на следующем: так как коэффициенты всех строк матрицы B, стоящие в произвольном столбце m, множатся на один и тот же коэффициент столбца вычисленных неизвестных, стоящий в строке m, то произведение строки сумм коэффициентов матрицы B на столбец вычисленных неизвестных должно быть равным сумме произведений отдельных строк матрицы B на столбец вычисленных неизвестных. При выполнении этой проверки надо учесть наличие моментов в основной системе. С учетом этого, правило для проверки вычисления моментов может быть сформулировано так:

«Произведение строки сумм матрицы B на столбец вычисленных неизвестных вместе с суммой коэффициентов столбца моментов в основной системе должно быть равно сумме моментов по концам стержней».

Указанная проверка гарантирует правильность вычисленных моментов, конечно, при условии правильности всех предыдущих результатов.

Знаки моментов при машинном методе учитываются автоматически, и потому особых проверок не требуют.

8. МАШИННЫЙ МЕТОД ПРИ РАСЧЕТЕ РАМ ПО МЕТОДУ СИЛ

При расчете рам по методу сил все вычисления проводятся аналогично. Небольшие пояснения требуются лишь по поводу вычисления моментов по концам стержней. В строки матрицы B вписываются коэффициенты, равные изгибающим моментам по концам стержней от единичных сил. Эти моменты непосредственно снимаются с эпюр от единичных сил. Столбец моментов в основной системе заполняется коэффициентами, равными моментам по концам стержней от внешних нагрузок. Все прочее, включая и проверки, остается без всякого изменения.

9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ [1]

Решим теперь в общем виде систему линейных алгебраических уравнений, т. е. так, чтобы при заданных правых частях мы непосредственно и независимо друг от друга могли бы вычислить значение любого неизвестного. Чтобы отметить поставленное новое условие, будем в правой части (1) писать, вместо буквы a, букву y. Для простоты записи, как и раньше, будем считать, что имеем систему уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= y_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= y_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= y_3\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= y_4
\end{aligned} \qquad (11)$$

Так как система уравнений (11) линейная, значения неизвестных будут также линейно зависеть от заданных правых частей, а потому решение (11) будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{43}y_3 + \alpha_{14}y_4 &= x_1\\
\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{33}y_3 + \alpha_{24}y_4 &= x_2\\
\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{13}y_3 + \alpha_{34}y_4 &= x_3\\
\alpha_{41}y_1 + \alpha_{42}y_2 + \alpha_{23}y_3 + \alpha_{44}y_4 &= x_4\,,
\end{aligned} \qquad (12)$$

где коэффициенты α подлежат вычислению, а искомые неизвестные, по причинам, которые выяснятся в дальнейшем, записаны в правой части.

Условия ортогональности. Первый метод вычисления обратной матрицы

Если (12), действительно, является решением (11), то подстановка этих значений в любое из уравнений (11) должна дать тождество. Выполним, опуская подробности,

---

[1] Применяющийся в строительной механике прием расчета статистически неопределимых систем с помощью чисел влияния приводит к вычислению обратной матрицы. Числа влияния суть элементы обратной матрицы. См. А. А. Уманский. Специальный курс строительной механики, 1935, стр. 149.

такую подстановку, подставив (12), например, в первое уравнение (11):

$$\begin{aligned}&(a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{21}+a_{13}\alpha_{31}+a_{14}\alpha_{41})y_1+\\+&(a_{11}\alpha_{12}+a_{12}\alpha_{22}+a_{13}\alpha_{32}+a_{14}\alpha_{42})y_2+\\+&(a_{11}\alpha_{13}+a_{12}\alpha_{23}+a_{13}\alpha_{33}+a_{14}\alpha_{43})y_3+\\+&(a_{11}\alpha_{14}+a_{12}\alpha_{24}+a_{13}\alpha_{34}+a_{14}\alpha_{44})y_4\equiv y_1\end{aligned}\qquad(13)$$

Но для того, чтобы (13) удовлетворялось тождественно, необходимо выполнение таких условий:

$$\begin{aligned}a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{21}+a_{13}\alpha_{31}+a_{14}\alpha_{41}&=1\\a_{11}\alpha_{12}+a_{12}\alpha_{22}+a_{13}\alpha_{32}+a_{14}\alpha_{42}&=0\\a_{11}\alpha_{13}+a_{12}\alpha_{23}+a_{13}\alpha_{33}+a_{14}\alpha_{43}&=0\\a_{11}\alpha_{14}+a_{12}\alpha_{24}+a_{13}\alpha_{34}+a_{14}\alpha_{44}&=0\end{aligned}\qquad(14)$$

Условия (14) будем называть условиями ортогональности. Условия ортогональности для произведенной подстановки выражаются через произведение строки коэффициентов первого уравнения (11) на первый, второй, третий и четвертый столбец коэффициентов (12). Понятие произведения строки на столбец нам известно, и мы знаем машинный метод вычисления такого рода произведений. Продумывая (14), замечаем, что произведение первой строки на первый столбец (одинаковый номер строки и столбца) равно единице, а произведение первой строки (11) на все остальные столбцы (12) (разные номера строк и столбцов) равно нулю. Мы можем выполнить подобную же подстановку, подставив (12) во второе уравнение (11), в третье и четвертое. В этом случае, повторяя аналогичные рассуждения, мы опять придем к выводу, что, для того чтобы (12) было решением (11), другие сочетания строк и столбцов также должны удовлетворять условиям ортогональности. При этом всегда, если (12) является решением (11), произведение строки (11) и столбца (12) с одинаковыми номерами должно быть равным единице, с разными номерами строк и столбцов — нулю. Мы можем найти еще одну серию ортогональных зависимостей между строками и столбцами (11) и (12). Подставим в (12) значения правых частей (11), выраженные через x_1, x_2, x_3, x_4.

Чтобы (11) удовлетворяло (12), необходимо на этот раз, чтобы произведения строк коэффициентов (12) на столбец коэффициентов (11) также удовлетворяли бы условиям ортогональности. При этом опять произведения одноименных строк и столбцов должны быть равными единице, разноименных строк и столбцов — нулю.

Мы предполагали, что система (11) является заданной и что (12) является ее общим решением. Поскольку (11) и (12) имеют совершенно один и тот же вид, то при соблюдении условий ортогональности мы можем равноправно считать, что (12) будет решением (11), и, наоборот, что (11) будет решением (12). Системы взаимно обратны. Условимся, если задана система (11), матрицу ее коэффициентов называть заданной матрицей и обозначать A, а матрицу коэффициентов общего решения (12) называть обратной и обозначать A^{-1}. Итак, получение общего решения системы уравнений (11) непосредственно связано с вычислением обратной матрицы.

Если в заданной системе уравнений (11) положить в правой части, что $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, то в левой части (12) останется один столбец. Стало быть, коэффициенты первого столбца обратной матрицы являются решением (11) при указанной правой части. Положив в (11), что $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, получим, что коэффициенты второго столбца обратной матрицы являются решением системы (11) для второго значения правых частей. Становится ясным, что, для того чтобы вычислить все коэффициенты обратной матрицы, надо решить систему уравнений (11) при таких заданных правых частях:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= 1,\ 0,\ 0,\ 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= 0,\ 1,\ 0,\ 0 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= 0,\ 0,\ 1,\ 0 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= 0,\ 0,\ 0,\ 1.
\end{aligned} \tag{15}$$

В правой части (15) на главной диагонали стоят единицы. Все остальные коэффициенты равны нулю. Матрица такого вида носит название единичной и обозначается буквой E_n с индексом, указывающим число строк и столбцов. Матрицу правой части (15) можно коротко записать E_4. Число неизвестных может быть любым, но указанный метод получения обратной матрицы будет общим. Вычисление обратной матрицы по (15) является трудоемкой работой. Но знание обратной матрицы предоставляет нам хорошие вычислительные возможности. Из (12) следует, что путем умножения строки обратной матрицы на столбец правой части (11) мы можем в любом порядке найти любое неизвестное. При вычислениях, проводимых на арифмометре, вычисление каждого из неизвестных будет проводиться одним приемом без записи промежуточных результатов. В правых частях могут стоять не числа, а функции. Поэтому при вычисленной обратной матрице легко установить функциональную зависимость неизвестных от независимых переменных функций правой части. В строительной механике такая задача возникает при вычислении ординат линий влияния в расчете статически неопределимых систем на подвижную нагрузку. При этой задаче с помощью матрицы B можно всегда установить и функциональную зависимость изгибающих моментов и других величин от параметра движения. Знание некоторых специальных обратных матриц чрезвычайно упрощает многие вычислительные процессы, например: при получении интерполяционного полинома высоких степеней, при вычислении интерполяционного полинома, при приближении функций по методу наименьших квадратов, и т. д.

Теорема Кио. Второй метод вычисления обратной матрицы.

Применив к (15) обобщенное карандашное правило, исключим на этот раз только несколько первых неизвестных. Оборвем процесс исключения, например, на исключении первых двух неизвестных. Получим:

$$
\begin{array}{l|l|r|ll}
\multicolumn{3}{l}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 1 \;\; 0} & 0 & 0 \\
\cline{1-1}
\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & \multicolumn{2}{r|}{b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 = k_{21} \;\; 1} & 0 & 0 \\
\cline{2-2} \cline{3-5}
\dfrac{a_{31}}{a_{11}} & \dfrac{b_{32}}{b_{22}} & c_{33}x_3 + c_{34}x_4 = k_{31}\; k_{32} & 1 & 0 \\
\dfrac{a_{41}}{a_{11}} & \dfrac{b_{42}}{b_{22}} & c_{43}x_3 + c_{44}x_4 = k_{41}\; k_{42} & 0 & 1.
\end{array}
\qquad (16)
$$

Заметим, что если бы мы захотели получить обратную матрицу для укороченной системы, содержащей только одни коэффициенты «c», то мы должны были бы ее решить, положив, что в правой части стоит матрица E_2, т. е. решить

$$
\begin{aligned}
c_{33}x_3 + c_{34}x_4 &= 1 \;\; 0 \\
c_{43}x_3 + c_{44}x_4 &= 0 \;\; 1.
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

Но система (17) получена из системы (15) путем исключения, а правые части в третьем и четвертом столбцах в (16) и (17) совпадают. Следовательно, коэффициенты обратной матрицы для (17) совпадают с коэффициентами обратной матрицы для (16), стоящими на тех же самых местах. Подобные рассуждения можно провести для системы уравнений любого порядка и при исключении любых и в любом порядке неизвестных. При этом окажется:

«*Коэффициенты обратной матрицы для укороченной системы уравнений, полученной в результате исключения нескольких неизвестных, всегда равны стоящим на тех же местах коэффициентам обратной матрицы для исходной системы уравнений*».

Это предложеие и носит название теоремы Кио́. Теорема Кио́ и условия ортогональности позволяют вычислить обратную матрицу непосредственно по коэффициентам треугольной матрицы и по вспомогательным коэффициентам, которые получаются в результате применения карандашного правила. Выпишем теперь уже известную нам таблицу. Ни правых частей, ни неизвестных мы не записываем, так как при применении условий ортогональности этого не требуется.

$$\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
\frac{a_{21}}{a_{11}} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\
\frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{b_{32}}{b_{22}} & c_{33} & c_{34} \\
\frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{b_{42}}{b_{22}} & \frac{c_{43}}{c_{33}} & d_{44}.
\end{array} \tag{18}$$

Покажем теперь, в каком порядке вычисляются коэффициенты обратной матрицы. По теореме Кио́ и условию ортогональности

$$d_{44} \cdot \alpha_{44} = 1, \quad \alpha_{44} = \frac{1}{d_{44}} \cdot$$

И далее по тому же:

$$\alpha_{43} c_{33} + \alpha_{44} c_{43} = 0, \quad \alpha_{43} = -\alpha_{44} \cdot \frac{c_{43}}{c_{33}} \cdot$$

Так как вспомогательный коэффициент $\frac{c_{43}}{c_{33}}$ уже вычислен, для вычисления коэффициента α_{43} не пришлось выполнять деления. Ниже мы увидим, что при вычислении всех коэффициентов α, лежащих ниже ступенчатой линии, также не придется выполнять операции деления. Далее вычисляем α_{33} из условия ортогональности третьей строки треугольной матрицы и третьего столбца обратной матрицы

$$c_{33}\,\alpha_{33} + c_{34}\alpha_{43} = 1, \quad \alpha_{33} = \frac{1 - c_{34}\alpha_{43}}{c_{33}}.$$

И по тому же:

$$c_{33}\alpha_{34} + c_{34}\alpha_{44} = 0, \quad \alpha_{34} = -\alpha_{44}\frac{c_{34}}{c_{33}}.$$

Чтобы лучше ориентироваться в порядке проведения вычислений, выпишем полученные коэффициенты и наметим точками те коэффициенты, которые на следующем этапе подлежат вычислению

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \bullet & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{matrix}$$

Выпишем уже без пояснений формулы для вычисления коэффициентов, указанных точками.

$$b_{22}\alpha_{24} + b_{23}\alpha_{34} + b_{24}\alpha_{44} = 0, \quad \alpha_{24} = \frac{-b_{23}\alpha_{34} - b_{24}\alpha_{44}}{b_{22}}.$$

$$b_{22}\alpha_{23} + b_{23}\alpha_{33} + b_{24}\alpha_{43} = 0, \quad \alpha_{23} = \frac{-b_{23}\alpha_{33} - b_{24}\alpha_{43}}{b_{22}}$$

$$\alpha_{42}b_{22} + \alpha_{43}b_{32} + \alpha_{44}b_{42} = 0, \quad \alpha_{42} = -\alpha_{43}\frac{b_{32}}{b_{22}} - \alpha_{44}\frac{b_{42}}{b_{22}}$$

$$\alpha_{32}b_{22} + \alpha_{33}b_{32} + \alpha_{34}b_{42} = 0, \quad \alpha_{32} = -\alpha_{33}\frac{b_{32}}{b_{22}} - \alpha_{34}\frac{b_{42}}{b_{22}}$$

$$b_{22}\alpha_{22} + b_{23}\alpha_{32} + b_{24}\alpha_{42} = 1, \quad \alpha_{22} = \frac{1 - b_{23}\alpha_{32} - b_{24}\alpha_{42}}{b_{22}}$$

Приведенный порядок вычисления коэффициентов обратной матрицы не является единственно возможным. Ортогональных зависимостей очень много, и поэтому вы-

Так как вспомогательный коэффициент $\frac{c_{43}}{c_{33}}$ уже вычислен, для вычисления коэффициента a_{43} не пришлось выполнять деления. Ниже мы увидим, что при вычислении всех коэффициентов a, лежащих ниже ступенчатой линии, также не придется выполнять операции деления. Далее вычисляем a_{33} из условия ортогональности третьей строки треугольной матрицы и третьего столбца обратной матрицы

$$c_{33}\,a_{33}+c_{34}a_{43}=1,\quad a_{33}=\frac{1-c_{34}a_{43}}{c_{33}}.$$

И по тому же:

$$c_{33}a_{34}+c_{34}a_{44}=0,\quad a_{34}=-a_{44}\frac{c_{34}}{c_{33}}.$$

Чтобы лучше ориентироваться в порядке проведения вычислений, выпишем полученные коэффициенты и наметим точками те коэффициенты, которые на следующем этапе подлежат вычислению

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & a_{33} & a_{34} \\ \bullet & a_{43} & a_{44} \end{array}$$

Выпишем уже без пояснений формулы для вычисления коэффициентов, указанных точками.

$$b_{22}a_{24}+b_{23}a_{34}+b_{24}a_{44}=0,\quad a_{24}=\frac{-b_{23}a_{34}-b_{24}a_{44}}{b_{22}}.$$

$$b_{22}a_{23}+b_{23}a_{33}+b_{24}a_{43}=0,\quad a_{23}=\frac{-b_{23}a_{33}-b_{24}a_{43}}{b_{22}}$$

$$a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32}+a_{44}b_{42}=0,\quad a_{42}=-a_{43}\frac{b_{32}}{b_{22}}-a_{44}\frac{b_{42}}{b_{22}}$$

$$a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}=0,\quad a_{32}=-a_{33}\frac{b_{32}}{b_{22}}-a_{34}\frac{b_{42}}{b_{22}}$$

$$b_{22}a_{22}+b_{23}a_{32}+b_{24}a_{42}=1,\quad a_{22}=\frac{1-b_{23}a_{32}-b_{24}a_{42}}{b_{22}}.$$

Приведенный порядок вычисления коэффициентов обратной матрицы не является единственно возможным. Ортогональных зависимостей очень много, и поэтому вы-

К примеру 6.

Заданная матрица A				$\bar{\Sigma}_A$
8,00000	1,00000	-2,00000	0,50000	7,50000
1,00000	10,00000	0,20000	0,40000	11,60000
-2,00000	0,20000	20,00000	2,00000	20,20000
0,50000	0,40000	2,00000	14,00000	16,90000
Матрица L		Матрица G		$\bar{\Sigma}_G$
8,00000	1,00000	-2,00000	0,50000	7,50000
0,12500	9,87500	0,45000	0,33750	10,66250
-0,25000	0,04557	19,47949	2,10962	21,58911
0,06250	0,03418	0,10830	13,72874	13,72874
Обратная матрица A^{-1}				$\bar{\Sigma}_{A^{-1}}$
0,13047	-0,01307	0,01380	-0,00625	0,12495
-0,01307	0,10144	-0,00211	-0,00213	0,08413
0,01380	-0,00211	0,05219	-0,00789	0,05599
-0,00625	-0,00213	-0,00789	0,07284	0,05657
0,12495	0,08413	0,05599	0,05657	$\bar{\sigma}_{A^{-1}}$

Примечание: $\bar{\Sigma}$ — сумма коэф. по строкам
$\bar{\sigma}$ — —"— —"— -"- столбцам

Проверка: $\bar{\sigma}_{A^{-1}} \cdot \bar{\Sigma}_A = \bar{\sigma}_A \cdot \bar{\Sigma}_{A^{-1}} = n$
n — порядок матрицы

В примере $\bar{\sigma}_{A^{-1}} \cdot \bar{\Sigma}_A = 4{,}00006 \approx 4{,}00000, \quad \Delta = 0{,}00006$

К примеру 7.

Заданная матрица A				$\bar{\Sigma}_A$	$\bar{b}$
2	-1	2	-1	2	2
4	1	5	-3	7	9
-2	-2	1	1	-2	1
2	5	8	-9	6	0
Матрица L		Матрица G		$\bar{\Sigma}_G$	$\bar{y}$
2	-1	2	-1	2	2
2	3	1	-1	3	5
-1	-1	4	-1	3	8
1	2	1	-5	-5	-20
			Матрица G^{-1}	$\bar{\Sigma}_{G^{-1}}$	$\bar{x}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{24}$	$-\frac{3}{40}$	$\frac{3}{10}$	1
0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	2
0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	3
0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\bar{\sigma}_{G^{-1}}$	

Примечание: $\bar{\Sigma}$ — сумма по строкам
$\bar{\sigma}$ — —"— -"- столбцам

Проверка: $\bar{\sigma}_{G^{-1}} \cdot \bar{\Sigma}_G = \bar{\sigma}_G \cdot \bar{\Sigma}_{G^{-1}} = n$
n — порядок матрицы

В примере $\bar{\sigma}_{G^{-1}} \cdot \bar{\Sigma}_G = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{3}{8} \cdot 5 = 4$

числителю предоставляется широко варьировать порядок вычисления коэффициентов обратной матрицы. Так например, можно вычислить сначала все коэффициенты главной диагонали и все коэффициенты по одну или по другую сторону от главной диагонали.

Вычисление обратной матрицы для симметричных систем по первому и второму методу

Вычисление обратной матрицы для симметричных систем проходит значительно проще. Известно, что если заданная матрица симметрична, то и обратная матрица также будет симметричной, т. е. если

$$a_{ki} = a_{ik}, \text{ то и } \alpha_{ki} = \alpha_{ik}.$$

В этом можно также убедиться, просматривая вышенаписанные условия ортогональности. По условию симметрии достаточно вычислить указанным выше приемом только диагональные коэффициенты и коэффициенты ниже диагонали, так как при их вычислении не требуется производить деления. После этого коэффициенты, лежащие выше главной диагонали, просто выписываются по закону симметрии.

Пример 6

На вкладном листе № 2 дан образец расчетной таблицы для определения обратной матрицы. Заданная матрица симметрична. Все записи проводились только в таблице. Для проверки правильности вычислений с успехом могут служить неиспользованные условия ортогональности.[1]

Как видим, вычисление обратной матрицы проходит весьма лаконично. Расчетная таблица состоит из трех малых таблиц, из которых верхняя является «заданием», нижняя — «ответом» и только средняя, по количеству записей одинаковая с «заданием» и «ответом», представляет собой «запись решения».

---

[1] Для проверки можно использовать и другие зависимости (см. пункт 11 стр. 40 и след.).

10. МАШИННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ОБРАТНОГО ХОДА

Мы уже видели, что при исключении неизвестных по Жордану (п. 1. Пример 2) не требуется применять прием обратного хода, так как значения неизвестных получаются одновременно и, что особенно важно, независимо друг от друга. В силу этого, неизбежное при обратном ходе накопление ошибок в правой части из-за погрешностей округлений полностью устраняется. Айткен [1] предложил матричный вариант метода Жордана под названием «метод перекрестного умножения». Однако, принятая методика расчета и рекомендуемая расчетная таблица не совсем удачны. При решении системы уравнений по перекрестному методу приходится много раз переписывать «новые системы», что может послужить причиной ошибки, на что затрачивается лишний труд и что отнюдь не вызывается действительной необходимостью. Дадим другой вариант метода Жордана, который назовем «машинным методом без обратного хода».

Предположим, что с помощью обобщенного карандашного правила система уравнений приведена к верхнетреугольному виду. Запишем эту систему с сохранением нулей в матрице ее коэффициентов.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= z_1 \\ 0\cdot x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 &= z_2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + c_{33}x_3 + c_{34}x_4 &= z_3 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + d_{44}x_4 &= z_4, \end{aligned} \tag{19}$$

где через z_1, z_2, z_3, z_4 обозначены соответствующие правые части. Мысленно применяя прием обратного хода, легко установить, что матрица общего решения (19) также будет верхнетреугольной матрицей точно такого же вида. Запишем и эту матрицу с сохранением нулевых коэффициентов (матрица G^{-1})

$$\begin{aligned} \gamma_{11}z_1 + \gamma_{12}z_2 + \gamma_{13}z_3 + \gamma_{14}z_4 &= x_1 \\ 0\cdot z_1 + \gamma_{22}z_2 + \gamma_{23}x_3 + \gamma_{24}x_4 &= x_2 \\ 0\cdot z_1 + 0\cdot z_2 + \gamma_{33}z_3 + \gamma_{34}z_4 &= x_3 \\ 0\cdot z_1 + 0\cdot z_2 + 0\cdot z_3 + \gamma_{44}z_4 &= x_4. \end{aligned} \tag{20}$$

---

[1] См. [6], [7], [8], [9]

Системы (19) и (20) являются частными случаями ранее рассмотренных систем (11) и (12), и поэтому к ним приложимо все, что было сказано о последних. Справедливы поэтому и теорема Кио́, и соотношения ортогональности между строками и столбцами заданной и обратной матрицы. Применим также и второй метод вычисления обратной матрицы; ввиду особой простоты (19) и (20) можно ожидать упрощений.

Раздумывая о том, как следует применить условия ортогональности к (19) и (20), сразу замечаем, что все коэффициенты произвольной строки (20) можно вычислить независимо от коэффициентов других строк, умножая последовательно эту строку на столбцы коэффициентов (19). Порядок вычисления строк при этом произволен. Видим, что вычисление обратной матрицы по отношению к треугольной, помимо простоты выкладок, обладает и особенностью — меньшим накоплением ошибок, чем при вычислении обратной матрицы к квадратной матрице. Приведем пример вычисления коэффициентов первой строки (20). Умножая последовательно первую строку коэффициентов (20) на первый, второй и т. д. столбец (19), определим коэффициенты γ первой строки (20).

$$\gamma_{11}a_{11} = 1, \qquad \gamma_{11} = \frac{1}{a_{11}}$$

$$\gamma_{11}a_{12} + \gamma_{12}b_{22} = 0, \qquad \gamma_{12} = \frac{1}{b_{22}}(\gamma_{11}a_{12})$$

$$\gamma_{11}a_{13} + \gamma_{12}b_{23} + \gamma_{13}c_{33} = 0, \qquad \gamma_{13} = \frac{1}{c_{33}}(\gamma_{11}a_{13} + \gamma_{12}b_{23})$$

$$\gamma_{11}a_{14} + \gamma_{12}b_{24} + \gamma_{13}c_{34} + \gamma_{14}d_{44} = 0, \quad \gamma_{14} = \frac{1}{d_{44}}(\gamma_{11}a_{14} + \gamma_{12}b_{24} + \gamma_{13}c_{34}).$$

Аналогично мы можем вычислить коэффициенты других строк. Приведенные выкладки легко осуществляются уже хорошо известным нам приемом машинного счета. Понятно, что после приобретения некоторого навыка приведенные и им аналогичные простые формулы выписывать не требуется. Проверкой правильности вычислений могут служить неиспользованные условия ортогональности. Но можно применить и другую проверку. Суммируя по вертикали коэффициенты (20), получим строку сумм. Произведение строки сумм на столбец сумм (19) (суммирование по строкам) должно быть равным порядку матрицы (в данном случае при четырех неизвестных — четырем). Доказательство этого предложения можно провести таким же путем, как то было сделано при обосновании проверки правильности вычисления моментов по концам стержней с помощью матрицы B.

Вычислительная таблица для машинного метода без обратного хода состоит из трех частей. В верхней части выписывается матрица заданной системы (A), в средней части проводятся без изменения обычные выкладки по приведению заданной системы к треугольному виду (G). Все это нам уже хорошо известно. В нижней части таблицы вписываются коэффициенты обратной матрицы к треугольной (G^{-1}).

Вычисление неизвестных проводится умножением строки (20) на столбец правой части (19).

Пример 7

Решение примера дано на вкладном листе 2. Эту систему уравнений мы уже решали другими методами. Рекомендуем для упражнения решить пример, приведенный в статье [7]. Здесь решение системы уравнений проведено методом перекрестного умножения.

11. МАШИННЫЙ МЕТОД С ПРИМЕНЕНИЕМ ДВУХ ОБРАТНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

По этому методу вычисление значений неизвестных проводится по обратной матрице, которая применяется в виде произведения двух треугольных матриц, получаемых относительно легко. При вычислении неизвестных по двум треугольным матрицам количество выкладок такое, как и при вычислении по квадратной (обратной) матрице. Поэтому для практических вычислений нет надобности (хотя и возможно) производить относительно трудоемкую операцию по умножению матриц. Метод двух обратных матриц (будем так его сокращенно называть) преследует ту же цель, что и метод перекрестного умножения и его изложенный выше вариант — уменьшить накопление ошибок (при вычислениях, проводимых в правой части), упростить вычисления в правой части. Эта цель в методе двух обратных матриц реализуется с лучшим результатом, чем в машинном методе без обратного хода, но за счет небольшого увеличения числа выкладок. Метод двух обратных матриц, по указанной причине, следует применять в двух случаях:

1) при большом числе неизвестных,

2) при большом числе заданных значений правых частей.

Метод двух обратных матриц с особым успехом может быть применен для решения симметричных систем уравнений. По сравнению с несимметричными системами, количество выкладок сокращается приблизительно вдвое. В литературе, сколько мы знаем, метод двух обратных матриц не описан.

Во всех изложенных выше методах вспомогательные коэффициенты основной вычислительной таблицы играли пассивную роль. Выясним возможности более активного вовлечения их в вычислительный процесс. Вспомним, как по обобщенному карандашному правилу вычисляется правая часть в треугольной системе (10) по коэффициентам заданной системы (1).

$$a_{15} = a_{15}$$

$$b_{25} = a_{25} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{15}$$

$$c_{35} = a_{35} - \frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{15} - \frac{b_{32}}{b_{22}} \cdot b_{25}$$

$$d_{45} = a_{45} - \frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot a_{15} - \frac{b_{42}}{b_{22}} \cdot b_{25} - \frac{c_{43}}{c_{33}} \cdot c_{35} \cdot$$

Перегруппируем входящие в систему этих равенств члены и для ясности введем нулевые коэффициенты.

$$\begin{aligned}
1 \cdot a_{15} + 0 \cdot b_{25} + 0 \cdot c_{35} + 0 \cdot d_{45} &= a_{15} \\
\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{15} + 1 \cdot b_{25} + 0 \cdot c_{35} + 0 \cdot d_{45} &= a_{25} \\
\frac{a_{31}}{a_{11}} \cdot a_{15} + \frac{b_{32}}{b_{22}} \cdot b_{25} + 1 \cdot c_{35} + 0 \cdot d_{45} &= a_{35} \\
\frac{a_{41}}{a_{11}} \cdot a_{15} + \frac{b_{42}}{b_{22}} \cdot b_{25} + \frac{c_{43}}{c_{33}} \cdot c_{35} + 1 \cdot d_{45} &= a_{45}.
\end{aligned} \qquad (21)$$

Написанную систему линейных равенств (21) можно рассматривать, как систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными $a_{15}, b_{25}, c_{35}, d_{45}$ при одинаковой правой части с заданной системой уравнений (1). Определитель этой треугольной системы уравнений с нижнетреугольной матрицей коэффициентов равен единице, решение возможно, и мы с помощью карандашного правила можем установить, что общее решение (21) будет иметь нижнетреугольную матрицу коэффициентов.

$$
\begin{aligned}
a_{15} &= 1 \cdot a_{15} + 0 \cdot a_{25} + 0 \cdot a_{35} + 0 \cdot a_{45} \\
b_{25} &= \lambda_{21} \cdot a_{15} + 1 \cdot a_{25} + 0 \cdot a_{35} + 0 \cdot a_{45} \\
c_{35} &= \lambda_{31} \cdot a_{15} + \lambda_{32} \cdot a_{25} + 1 \cdot a_{35} + 0 \cdot a_{45} \\
d_{45} &= \lambda_{41} \cdot a_{15} + \lambda_{42} \cdot a_{25} + \lambda_{43} \cdot a_{35} + 1 \cdot a_{45}.
\end{aligned} \qquad (22)
$$

Если (22) является решением (21), то, как мы знаем, должны быть соблюдены условия ортогональности, так что написанные коэффициенты λ матрицы (22), обратной по отношению к матрице (21), будут легко определяться по условиям ортогональности. По (22) при известных λ приемом умножения строки на столбец мы можем вычислить все коэффициенты правой части (10) непосредственно по коэффициентам правой части заданной системы уравнений (1). Вычисление коэффициентов λ проходит независимо и может быть проведено в любом порядке. При изложенном методе вычисление правой части (10) происходит с минимумом накопления ошибок.

Числовое решение системы уравнений по методу двух обратных матриц должно производиться так. Описанным ранее приемом по обобщенному карандашному правилу, применяя знакомую вычислительную таблицу, проводят исключение неизвестных, оперируя только с левой частью. Для верхнетреугольной матрицы коэффициентов (обозначим G) вычисляют ей обратную (обозначим G^{-1}). До этого этапа все вычисления совпадают с машинным методом без обратного хода. Нижнетреугольная матрица вспомогательных коэффициентов (обозначим L) не переписывается, так как легко запомнить, что у нас на главной диагонали всегда стоят единицы. Помня это, производят вычисление обратной к ней матрицы (обозначим L^{-1}). При вычислении неизвестных выполняют две операции умножения матрицы на столбец. Сначала каждую строку матрицы L^{-1} умножают на столбец правой части (1), что символически запишем так: $L^{-1} \cdot \bar{a}_5$. В результате этого умножения получим столбец правой части

(10). Этот столбец чисел записывается справа от матрицы G. Затем каждую строку матрицы G^{-1} множим на записанный столбец и получаем столбец неизвестных без операции деления. Проведенные операции запишем символически так: $G^{-1} \cdot L^{-1} \cdot \bar{a}_5$.

Мы применили здесь символические матричные обозначения, смысл которых состоит в том, что заданный комплекс чисел, над которым выполняются определенные алгебраические операции (сложные по своему характеру), обозначается одной буквой. Для обозначения этих операций, лишь отдаленно напоминающих обыкновенные операции, применяются символы и термины основных операций над обычными числами. Примерами таких сложных операций могут служить операция умножения строки на столбец, матрицы на столбец и др. Даже исключение неизвестных по обобщенному карандашному правилу можно рассматривать, как своего рода операцию, впрочем, не столь уж сложную, как «умножение заданной матрицы A слева на матрицу L^{-1}». Мы все время в этой работе проводили матричные операции, только не говорили об этом, т. к. придерживались элементарного изложения. Теперь, после опыта проведения таких операций, матричная символика уже не может служить препятствием для понимания сущности вопроса. Мы уже видели, что матричные операции выполняются машинным счетом, что весьма важно для техники вычислений. Следовательно, теория матриц должна привлечь внимание лиц, занимающихся вопросами строительной механики. Чтобы подчеркнуть это, мы и сделали короткое отступление от темы.

Проверки

Для метода двух обратных матриц все ранее приведенные проверки остаются в силе. Для проверок матриц L^{-1}, G^{-1} удобно использовать ранее приведенную зависимость: «произведение строки сумм коэффициентов заданной матрицы на столбец сумм коэффициентов обратной (или строки сумм обратной на столбец сумм заданной матрицы) должно быть равно числу, равному порядку матрицы (числу уравнений)».

Замечание 1

В процессе исключения неизвестных надо внимательно следить за числовым значением диагонального коэффициента матрицы G. Если происходит потеря значащих цифр, надо немедленно сделать перестановку строк или столбцов, или то и другое вместе. Проведенная до перестановки вычислительная работа не пропадает. При навыке во многих случаях удается избежать переписывания вычислительной таблицы. Случаи потери значащих цифр в канонических системах уравнений строительной механики вообще редки. Иногда это бывает при расчете по методу сил, при нехорошем выборе «лишних неизвестных». При выполнении сделанного замечания метод двух обратных матриц не уступает в смысле точности наилучшим в этом отношении методам — «главных коэффициентов» и «перекрестного умножения». Полное совпадение по точности будет происходить тогда, когда диагональные коэффициенты по абсолютной величине во время процесса исключения будут больше недиагональных.

Замечание 2

Умножая матрицу G^{-1} на матрицу L^{-1} (строка на столбец), мы получим с минимумом накопления ошибок обратную к A матрицу. И в этом отношении метод двух обратных матриц не уступает методу главных коэффициентов и методу перекрестного умножения, намного превосходя их лаконичностью записи и удобством вычислений [7].

Симметричные системы уравнений

При решении симметричных систем возможны упрощения. Коэффициенты матрицы G всегда равны симметрично расположенным коэффициентам матрицы L, умноженным на диагональный коэффициент их столбца. В силу симметрии, коэффициенты обратной к G матрицы (G^{-1}) будут равны симметрично расположенным коэффициентам матрицы L^{-1} с тем отличием, что они должны быть поделены на диагональный коэффициент, лежащий в их строке. Поэтому после вычисления и записи какого-либо коэффициента матрицы L^{-1}, лежащего в i-той строке, его сразу делят на диагональный коэффициент в i-той строке и полученный результат записывают на свое место в i-том столбце матрицы G^{-1}. Диагональные коэффициенты матрицы G^{-1}, по отношеию к диагональным коэффициентам

Пример 8.

NNур.	A				$\bar{\Sigma}_A$	$\bar{б}$
1	2	−1	2	−1	2	2
2	4	1	5	−3	7	9
3	−2	−2	1	1	−2	1
4	2	5	8	−9	6	0
	L			G		
$\bar{\sigma}_G$	2	2	7	−8	$\bar{\Sigma}_G$	$\bar{y}$
1	2	−1	2	−1	2	2
3	2	3	1	−1	3	5
−1	−1	−1	4	−1	3	8
5	1	2	1	−5	−5	−20
$\bar{\Sigma}_L$	3	2	2	1	$\bar{\sigma}_L$	
	L^{-1}			G^{-1}		
$\bar{\sigma}_{G^{-1}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\bar{\Sigma}_{G^{-1}}$	$\bar{x}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{24}$	$-\frac{3}{40}$	$\frac{3}{10}$	1
−1	−2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	2
1	−1	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	3
1	4	−3	−1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	4
$\bar{\Sigma}_{L^{-1}}$	2	−1	0	1	$\bar{\sigma}_{L^{-1}}$	

Пример 9.

NN ур.	A				$\bar{\Sigma}_A$	$\bar{б}$
1	2	2	−10	10	4	16
2	2	5	−16	19	10	40
3	−10	−16	63	−69	−32	−129
4	10	19	−69	80	40	161
	L			G		
$\bar{\sigma}_G$	2	5	−15	20	$\bar{\Sigma}_G$	
1	2	2	−10	10	4	16
2	1	3	−6	9	6	24
−6	−5	−2	1	−1	0	−1
8	5	3	−1	2	2	8
$\bar{\Sigma}_L$	2	2	0	1	$\bar{\sigma}_L$	
	L^{-1}			G^{-1}		
$\bar{\sigma}_{G^{-1}}$	$\frac{1}{2}$	0	6	1	$\bar{\Sigma}_{G^{-1}}$	
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{3}$	
0	−1	$\frac{1}{3}$	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}$	
6	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	
2	1	−1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\bar{\Sigma}_{L^{-1}}$	4	2	2	1	$\bar{\sigma}_{L^{-1}}$	

матрицы G, являются обратными числами. Во всем остальном при решении симметричных систем уравнений поступают так же, как и при решении несимметричных систем.

$$\left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, - \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{matrix} \right\| = 1 + \frac{3}{2} - \frac{3}{8} + \frac{15}{8} = 4;$$

$$\left\| 2, 2, 7, -8 \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{matrix} \right\| = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} = 4.$$

Пример 8

На простом примере трудно показать процесс накопления погрешностей округления при вычислениях в правой части. Но легко выяснить, что при вычисленных матрицах L^{-1} и G^{-1} вычисление коэффициентов правой части проходит без «цепочки» рекуррентных (последовательных, связанных) вычислений, служащей источником накопления ошибок. На вкладном листе № 3 приведен пример решения несимметричной системы уравнений. На этом примере легко сопоставить два возможных хода решения: 1) с цепочкой рекуррентных вычислений при исключении неизвестных и при обратном ходе, 2) без цепочки рекуррентных вычислений по вычисленным матрицам L^{-1} и G^{-1}. В этом примере мы особо выделили проверки матриц L^{-1} и G^{-1}. В практике можно ограничиться выполнением только части их. Проверки производятся умножением строк и столбцов сумм коэффициентов исходной и обратной к ней матриц. Эти произведения, как указывалось выше, равны порядку матрицы (числу уравнений). Строки сумм (суммирование коэффициентов матрицы выполняется по вертикали) обозначим буквой Σ. Букве Σ припишем внизу индекс, обозначающий, к какой матрице относится эта строка сумм. Для обозначения столбца сумм (суммирование коэффициентов матрицы выполняется по горизонтали) применена буква $\varSigma$ с индексом отмеченного выше значения. При вычислении сумм коэффициентов матриц L и L^{-1} надо помнить, что единицы, стоящие на главной диагонали этих матриц, в таблице не записаны и что их надо учесть при суммировании. Проверим, например, правильность вычисления матрицы G^{-1}; это можно выполнить двумя путями: умножая строку сумм G^{-1} на столбец сумм G или умножая строку сумм G на столбец сумм G^{-1}. В обоих случаях (при системе из четырех уравнений) мы должны получить число четыре (см. стр. 45).

Использованные нами инвариантные отношения между строками сумм и столбцами сумм коэффициентов заданной и обратной матриц в литературе не встречаются.

Пример 9

На вкладном листе № 3 дано решение симметричной системы уравнений. Этот пример, как и предыдущий, является иллюстративным[1]. Решение симметричной системы отличается от решения несимметричной только в вычислении коэффициентов матрицы G^{-1}. Вычислив в нашем примере какой-либо коэффициент матрицы L^{-1}, допустим

$$\lambda_{41} = 1,$$

сейчас же следует вычислить соответствующий коэффициент матрицы G^{-1}:

$$\gamma_{14} = \frac{\lambda_{41}}{d_{44}} = \frac{1}{2};$$

или вычислив λ_{32}, одновременно вычисляем и γ_{23}:

$$\lambda_{32} = 2,\ \gamma_{23} = \frac{\lambda_{32}}{c_{33}} = 2 \ldots\ (c_{33} = 1).$$

12. РАСЧЕТ РАМ БЕЗ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕИЗВЕСТНЫХ[2]

Поскольку основной целью расчета является получение значений изгибающих моментов по концам стержней, образующих раму, желательно иметь алгоритм прямого по-

---

[1] Для того чтобы решение проходило без сложных вычислений, мы составили этот пример, идя «от ответа», т. е. задались значением неизвестных и произвольно задались матрицей L^{-1}, выбрав коэффициентами малые целые числа.

[2] См. [9] стр. 94.

лучения этих величин, минуя процесс вычисления неизвестных. Изгибающие моменты по концам стержней, независимо от примененного статического метода расчета, всегда являются линейными функциями неизвестных. Напишем наряду с канонической системой уравнений (23) и эти линейные зависимости (24).

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15},\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25},\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35},\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45},
\end{aligned} \qquad (23)$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 + M_1^{(0)},\\
M_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 + M_2^{(0)},\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
M_k &= \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \alpha_{k3}x_3 + \alpha_{k4}x_4 + M_k^{(0)}.
\end{aligned} \qquad (24)$$

В левой части (24) буквами $M_1, M_2 \ldots M_k$ обозначены искомые изгибающие моменты по концам стержней. В правой части (24) через α_{il} обозначены переходные коэффициенты, $M_i^{(0)}$ — моменты в основной системе. Последовательно исключая $x_1, x_2, \ldots x_n$ из (23) и одновременно из (24) (что всегда возможно сделать приемом, описанным выше), мы приведем (23) к треугольному виду и преобразуем (24). При этом в (24) изменятся переходные коэффициенты, а на места неизвестных соответственно станут свободные члены треугольной системы (25).

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\underline{a_{11}x_1} & + a_{12}x_2 & + a_{13}x_3 & + a_{14}x_4 = a_{15},\\
\frac{a_{21}}{a_{11}} & \underline{b_{22}x_2} & + b_{23}x_3 & + b_{24}x_4 = b_{25},\\
\frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{b_{32}}{b_{22}} & \underline{c_{33}x_3} & + c_{34}x_4 = c_{35},\\
\frac{a_{41}}{a_{11}} & \frac{b_{42}}{b_{22}} & \frac{c_{43}}{c_{33}} & \underline{d_{44}x_4 = d_{45},}
\end{array} \qquad (25)$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{\alpha_{11}}{a_{11}}a_{15} + \frac{\beta_{12}}{b_{22}}b_{25} + \frac{\gamma_{13}}{c_{33}}c_{35} + \frac{\delta_{14}}{d_{44}}d_{45} + \Big|\, M_1^{(0)},\\
M_2 &= \frac{\alpha_{21}}{a_{11}}a_{15} + \frac{\beta_{22}}{b_{22}}b_{25} + \frac{\gamma_{23}}{c_{33}}c_{35} + \frac{\delta_{24}}{d_{44}}d_{45} + \Big|\, M_2^{(0)},\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
M_k &= \frac{\alpha_{k1}}{a_{11}}a_{15} + \frac{\beta_{k2}}{b_{22}}b_{25} + \frac{\gamma_{k3}}{c_{33}}c_{35} + \frac{\delta_{k4}}{d_{44}}d_{45} + \Big|\, M_k^{(0)}.
\end{aligned} \qquad (26)$$

Легко проследить, что при исключении неизвестных коэффициенты $\frac{\alpha_{11}}{a_{11}}, \frac{\beta_{12}}{b_{22}}, \ldots \frac{\delta_{k4}}{d_{44}}$ в (26), стоящие при свободных членах (25), вычисляются по обобщенному карандашному правилу, аналогично вычислению коэффициентов $\frac{a_{21}}{a_{11}}, \frac{a_{31}}{a_{11}}, \frac{b_{32}}{b_{22}}, \ldots \frac{c_{43}}{c_{33}}$ в (25) без каких-либо изменений. Эти коэффициенты могут быть вычислены независимо от правых частей (от нагрузок). При известных коэффициентах (26) вычисление изгибающих моментов сводится к удобно выполнимой на арифмометре операции умножения строки на столбец. К этому произведению добавляется момент в основной системе.

Количество операций деления, необходимых для расчета рамы по схеме (25) (26), можно в некоторых случаях сократить, если треугольную систему (25) записывать не в обычно принятой форме (по Гауссу), а в форме Т. Банахевича. Для этого нужно каждую строку (25) поделить на свой диагональный коэффициент. Обобщенное карандашное правило при этом сохранится, изменится только лишь числовое значение коэффициентов.

$$\begin{array}{llll}
x_1 & +\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\frac{a_{14}}{a_{11}}x_4=\frac{a_{15}}{a_{11}}, & & \\
a_{21} & \quad x_2+\frac{b_{23}}{b_{22}}x_3+\frac{b_{24}}{b_{22}}x_4=\frac{b_{25}}{b_{22}}, & & \\
a_{31} & b_{32} & x_3+\frac{c_{34}}{c_{33}}x_4=\frac{c_{35}}{c_{33}}, & \\
a_{41} & b_{42} & c_{43} & x_4=\frac{d_{45}}{d_{44}},
\end{array} \qquad (27)$$

$$\begin{aligned}
M_1 &= \alpha_{11}\frac{a_{15}}{a_{11}}+\beta_{12}\frac{b_{25}}{b_{22}}+\gamma_{13}\frac{c_{35}}{c_{33}}+\delta_{14}\frac{d_{45}}{d_{44}}+ M_1^{(0)},\\
M_2 &= \alpha_{21}\frac{a_{15}}{a_{11}}+\beta_{22}\frac{b_{25}}{b_{22}}+\gamma_{23}\frac{c_{35}}{c_{33}}+\delta_{24}\frac{d_{45}}{d_{44}}+ M_2^{(0)},\\
&\vdots\\
M_k &= \alpha_{k1}\frac{a_{15}}{a_{11}}+\beta_{k2}\frac{b_{25}}{b_{22}}+\gamma_{k3}\frac{c_{35}}{c_{33}}+\delta_{k4}\frac{d_{45}}{d_{44}}+ M_k^{(0)}.
\end{aligned} \qquad (28)$$

И первый, и второй вариант метода прямого вычисления искомых величин, поскольку в них исключаются операции по вычислению неизвестных (операция обратного хода), обладают бесспорным преимуществом — отсутствием накопления погрешностей вычислений при обратном ходе. При различном соотношении числа столбцов свободных членов (числа нагрузок) и числа строк (для

Вкладной лист 4.

Задание:

	A					
NN	φ_1	φ_2	Δ	$\bar{\bar{\Sigma}}_G$	1. случ. нагр. $\bar{R}_1$	2. случ. нагр. $\bar{R}_2$
1	3,833	1,250	−0,667	4,416	16,000	0,000
2	1,250	3,833	−0,667	4,416	−16,000	0,000
3	−0,667	−0,667	0,889	−0,445	0,000	1,000
$\bar{M}$	B				$\bar{M}_1^0$	$\bar{M}_2^0$
M_{01}	0,667		−0,667		0,000	0,000
M_{10}	1,333		−0,667		0,000	0,000
M_{12}	2,500	1,250			−16,000	0,000
M_{21}	1,250	2,500			16,000	0,000
M_{23}		1,333	−0,667		0,000	0,000
M_{32}		0,667	−0,667		0,000	0,000
$\bar{\sigma}_B$	5,750	5,750	−2,668		0,000	0,000

Решение и ответ:

NN	L \ G			$\bar{\bar{\Sigma}}_G$	1. случ. нагр. $\bar{R}_1^*$	2. случ. нагр. $\bar{R}_2^*$
1	3,833	1,250	−0,667	4,416	16,000	0,000
2	0,326	3,427	−0,450	2,977	−21,216	0,000
3	−0,174	−0,131	0,714	0,714	0,000	1,000
$\bar{M}$	C				$\bar{M}_1$	$\bar{M}_2$
M_{01}	0,174	−0,064	−0,812		4,13	−0,81
M_{10}	0,348	−0,127	−0,689		8,26	−0,69
M_{12}	0,652	0,127	0,689		−8,26	0,69
M_{21}	0,326	0,611	0,689		8,26	0,69
M_{23}		0,389	−0,689		−8,26	−0,69
M_{32}		0,195	−0,812		−4,13	−0,81
$\bar{\sigma}_C$	1,500	1,131	−1,624		0,00	0,00

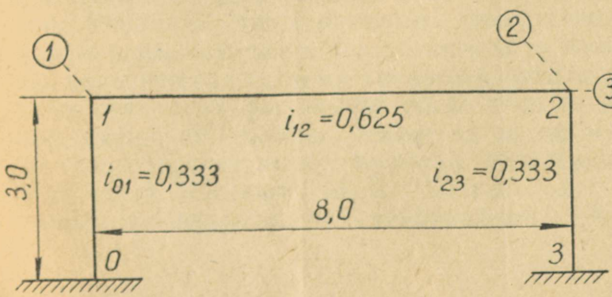
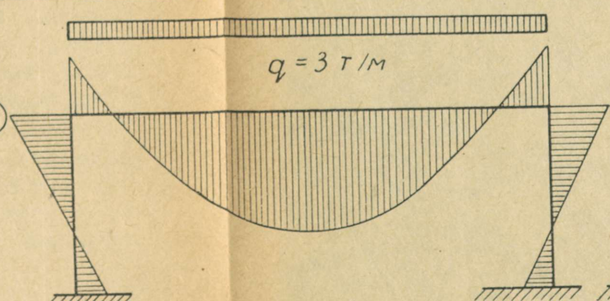
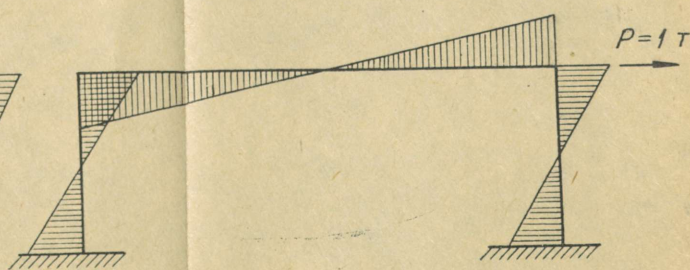


Схема рамы



Эпюра изг. мом. 1. случ. нагрузки



Эпюра изг. мом. 2. случ. нагрузки

определения изгибающих моментов по концам стержней) может оказаться выгодным либо первый, либо второй вариант метода прямого вычисления искомых величин. Следует отметить, что в этом методе количество необходимых вычислений несколько больше, чем в ранее описанных методах. Поэтому его следует применять, когда имеются в виду специальные цели практического или теоретического характера. В теоретическом отношении описываемый метод чрезвычайно интересен: во-первых, в этом методе подчеркивается то обстоятельство, что «неизвестные», вводимые при расчете рам, играют пассивную роль, — их даже не требуется вычислять; во-вторых, с его помощью можно легко проанализировать и оценить применяющиеся специальные методы строительной механики:

1. Метод взаимно-нулевых эпюр (групповые неизвестные). Метод переноса сил в упругий центр (о чем скажем ниже).
2. Варианты метода релаксации.

Выше мы решали системы канонических уравнений только алгебраическим путем — последовательно исключая неизвестные. В тех случаях, когда система канонических уравнений допускает решение методом последовательных приближений (метод итераций), можно, конечно, к совместному решению (23) и (24) применить и этот метод. Если, например, предположить, что система (23) написана для рамы с несмещающимися узлами, решаемой по методу деформаций, то легко установить, что, поделив коэффициенты α_{ik} (24) на соответствующие коэффициенты главной диагонали, мы получим коэффициенты распределения моментов первоначальных вариантов релаксационного метода. Решая одновременно (23) и (24) итеративным методом Зейделя, используя метод «поправок», можно легко и на прочном основании построить теорию первоначальных вариантов метода релаксации. Учитывая, что с помощью карандашного правила можно исключить часть неизвестных, и то обстоятельство, что каноническая система уравнений метода деформаций часто становится регулярной после исключения неизвестных смещений, можно также на прочном основании построить последующие варианты релаксационного метода (С. А. Рогицкий, Ш. Е. Гофман). Для этого надо только проанализировать коэффициенты (26) после исключения смещений и применить, решая совместно (25) и (26), итеративный метод Гертвига. При этом все вопросы сходимости релаксационного метода станут совершенно ясными.

Пример 10

На вкладном листе № 4 дан пример расчета рамы методом деформаций с применением первого варианта метода прямого вычисления искомых величин. В таблице «Задание» выписаны коэффициенты канонической системы и соответствующие переходные коэффициенты. В таблице «Решение и ответ» проведен расчет рамы на два случая нагрузки. Отметим интересный факт, что в смысле метода релаксации первый столбец матрицы C дает значение моментов по концам стержней от единичного неуравновешенного момента, при освобожденном узле 1 и при закрепленном узле 2, от поворота и смещения (коэффициенты распределения). Коэффициенты второго столбца матрицы C можно рассматривать как обобщенные коэффициенты распределения, так как этот столбец дает значение моментов по канцам стержней от неуравновешенного единичного момента в узле 2 при «свободном» узле 1. Аналогично третий столбец матрицы C дает значение моментов в раме от единичной силы при устранении всех наложенных связей.

Пример 11

На вкладном листе № 5 дан пример расчета простейшей рамы по методу сил. В таблице «Задание» выписаны коэффициенты канонической системы уравнений. В таблице «Решение» исключение неизвестных производилось по второму варианту. Единицы на главной диагонали опущены. Ниже ступенчатой линии в таблицу вписаны основные коэффициенты и вспомогательные коэффициенты, полученные по карандашному правилу, но в этом варианте вычисленные без деления на основной коэффициент. Ввиду того, что применена треугольная система Т. Банахевича, поверочные столбцы сумм заменены поверочными строками сумм. В остальном методика проверок (включая и проверки моментов по концам стержней) не меняется.

В нижней части левой таблицы вписаны переходные коэффициенты. В методе сил они равны изгибающим

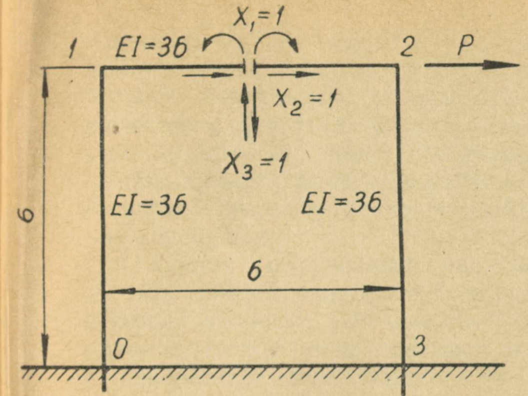
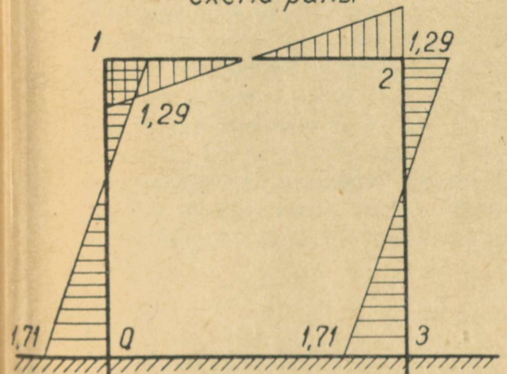


Схема рамы



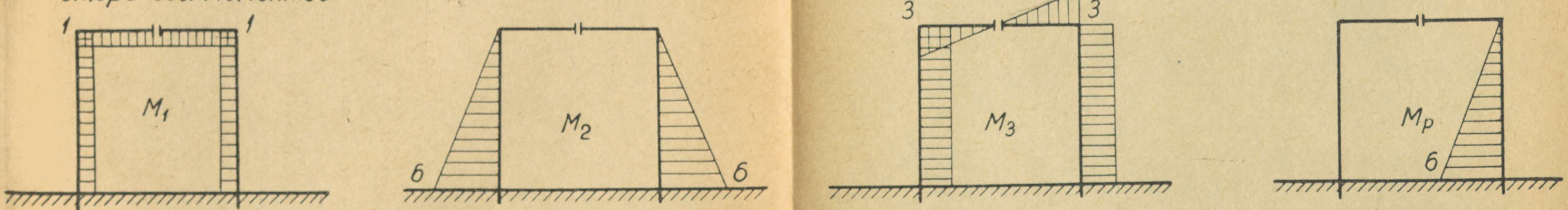
Эпюра изг. моментов

Задание:

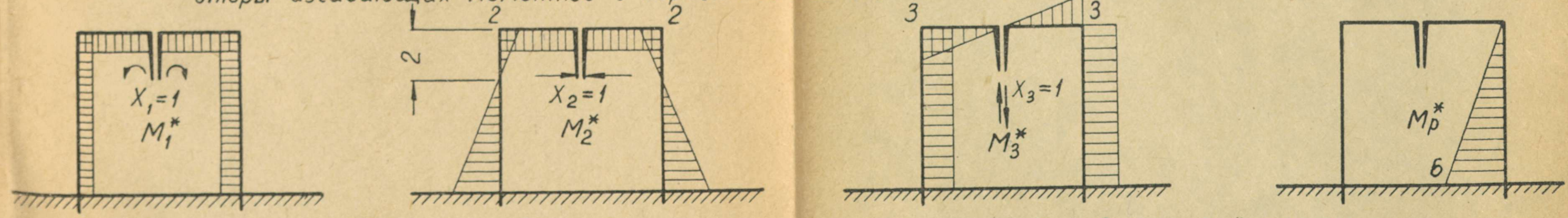
NN	X_1	X_2	X_3	$-\bar{\Delta}_P$
1	18	−36	0	−18
2	−36	144	0	72
3	0	0	126	54
$\bar{\Sigma}$	−18	108	126	
$\bar{M}$		B		$\bar{M}^{(0)}$
M_{01}	1	−6	3	0
M_{10}	1	0	3	0
M_{12}	1	0	3	0
M_{21}	1	0	−3	0
M_{23}	1	0	−3	0
M_{32}	1	−6	−3	6
$\bar{\sigma}$	6	−12	0	6

Решение:

NN	1	2	3	$-\bar{\Delta}_P^*$
1	18	−2	0	−1,000
2	−36	72	0	0,500
3	0	0	126	0,429
Σ^*	−18	72	126	
$\bar{M}$		B^*		$\bar{M}$
M_{01}	1	−4	3	−1,713
M_{10}	1	2	3	1,287
M_{12}	1	2	3	1,287
M_{21}	1	2	−3	−1,287
M_{23}	1	2	−3	−1,287
M_{32}	1	−4	−3	1,713
$\bar{\sigma}$	6	0	0	0



Эпюры изгибающих моментов в первоначальной (основной) системе



Эпюры изгибающих моментов после (ортогонализации) переноса сил в упругий центр

моментам по концам стержней от единичных сил. По нижней части правой таблицы легко проследить, что процесс исключения неизвестных по методу прямого вычисления искомых величин автоматически приводит к взаимно ортогональным (взаимно-нулевым) эпюрам. В данном примере процесс ортогонализации свелся к переносу сил в упругий центр, что иллюстрируется приведенными эпюрами.

Обобщая полученные частные результаты, можно сделать общий вывод, что метод прямого вычисления искомых величин, примененный к методу сил, является математической интерпретацией таких методов строительной механики: метод переноса сил в упругий центр, метод групповых неизвестных, метод взаимно нулевых эпюр. При применении этого метода процесс ортогонализации эпюр проходит автоматически, без вычерчивания эпюр, а выкладки проще обычно применяемых.

Как видим, метод прямого вычисления искомых величин, в математическом смысле близкий к методам Жордана и Айткена, создает положительные предпосылки для развития методов строительной механики и убедительно показывает, что в этой дисциплине не следует пренебрегать математическими приемами решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрасов Н. А. К вопросу о решении линейной системы уравнений с большим числом неизвестных посредством последовательных приближений. Приложение к т. XIX «Записки Академии наук» 1892.
2. Уиттекер, Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. ОНТИ. 1935, стр. 70. См. правило Кио́, теорема Кио́.
3. Th. Banachiewicz. La règle de Chio cracovien et matrices. Acad. de science de Pologne, 1938, p. 405—412, ser. A.
4. Th. Banachiewicz. Méthode de résolutions numériques des équations linéaires, du calcul des determinants et des inverses et de réduction des formes quadratiques. Bull intern. Acad. de science de Pologne, 1938, p. 393—404, ser. A.
5. R. Zurmül. Zur numerischen Auflösung linearer Gleichungssysteme nach den Matrizen-Verfahren von Banachiewicz. ZAMM. Bd. 29, № 3, März 1949.
6. Фрезер, Дункан, Коллар. Теория матриц и ее приложения. И. Л. 1950 г.
7. Фокс, Хаски, Вилькинсон. Заметки о решении систем совместных линейных алгебраических уравнений. Успехи математических наук. Т. V, выпуск 3/37, стр. 60 и след.
8. Гросманн Д. П. К задаче численного решения систем совместных линейных алгебраических уравнений. Успехи математических наук. Т. V, выпуск 3/37, 1950 г., стр. 87 и сл.
9. Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. ГИТЛ 1950 г. Стр. 80, 89, 94.
10. Нарец Л. К. Доклад на семинаре Института механики АН СССР. 15 дек. 1950 г.
11. Нарец Л. К. Расчет рам по Г-М методу. «Сборник исследований по строительной механике» № 6, 1954 г., стр. 246.
12. Нарец Л. К., Каширский Ю. А. Упрощение решения восьмичленных уравений при расчете цилиндрических оболочек по методу В. З. Власова. Труды Уральского политехнического института. Сборник 44, стр. 45—57. Гос. Изд. Лит. по строительству и архитектуре. Москва 1953.

Авторефераты диссертаций по строительной механике

13. Чуватов В. В. Расчет рам и плит на упругом основании. Свердловск, 1953 г. УПИ.
14. Оллик К. К. Расчет балочных конструкци на упругом основании. Таллин, 1953. ТПИ.

Цена 2 руб. 10 к.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
23	15-я снизу	производится	производятся	Типографии
Вкладной лист 1.	1-я снизу	удержат	удержать	Редактора
	3-я снизу	столбцев	столбцов	Автора
45	4-я сверху	$\left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, - \right\|$	$\left\| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8} \right\|$	Редактора
50	20-я сверху	канцам	концам	Типографии

Зак. 1111.