TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika instituut
Füüsika magistriõppekava

Roald Heinrich Ivask

Kerri aegruumi energia üldises teleparalleelses relatiivsusteoorias

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja(d): Laur Järv, PhD
Tomi Sebastian Koivisto, PhD

Tartu 2025

Kerri aegruumi energia üldises teleparalleelses relatiivsusteoorias

Lühikokkuvõte:

Töö käsitleb Kerri aegruumi energia arvutamist üldise teleparalleelse üldrelatiivsusteooria ekvivalendi raames. Alternatiivina üldrelatiivsusteooriale, kasutatakse klassikalise Riemanni geomeetria asemel teleparalleelset geomeetriat, kus kõverus on null ning oluline roll on väändel ja mittemeetrilisusel. Kerri meetrika võimaldab erinevalt Schwarzschildi meetrikast kirjeldada tsentraalse objekti impulsimomenti. Töös antakse ülevaade käsitletud teooria geomeetrilistele ning füüsikalistele alustele, Kerri meetrikale, SymPy tarkvarale ja arvutuskäikudele. Töö eesmärk on arvutada aegruumi energia Kerri meetrika jaoks, kasutades sümbolmatemaatika tarkvara SymPy. Primaarne hüpotees on, et SymPy-s arvutatud Kerri aegruumi energia üldises teleparalleelses üldrelatiivsusteooria raamistikus on võrdeline massiga. Sekundaarne hüpotees on, et Kerri-Schildi koordinaatides kanoonilise energia tensor on võrdne nulliga juhul kui afiinne seostus on samuti võrdne nulliga.

Võtmesõnad:

Üldrelatiivsusteooria, Üldine teleparalleelne üldrelatiivsusteooria ekvivalent, Kerri meetrika, SymPy, Sümbolmatemaatika, Afiinne seostus.

CERCS: P190 - Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

Kerr’s spacetime energy in general teleparallel theory of relativity

Abstract:
This thesis addresses the calculation of the Kerr spacetime energy within the framework of the general teleparallel equivalent of general relativity. As an alternative to general relativity, teleparallel geometry is used instead of classical Riemannian geometry, where curvature is zero while torsion and non-metricity play an important role. Unlike the Schwarzschild metric, the Kerr metric allows for the description of the angular momentum of a central object. The thesis provides an overview of the geometric and physical foundations of the theory in question, the Kerr metric, the SymPy software, and the computational procedures used. The aim of the work is to calculate the energy of spacetime for the Kerr metric using the symbolic mathematics software SymPy. The primary hypothesis is that the energy of Kerr spacetime, calculated in SymPy within the framework of the general teleparallel equivalent of general relativity, is proportional to the mass. The secondary hypothesis is that, in Kerr-Schild coordinates, the canonical energy-momentum tensor vanishes if the affine connection is also equal to zero.

Keywords:
General relativity, General teleparallel equivalent of general relativity, Kerr metric, SymPy, Symbol mathematics, Affine connection.

CERCS: P190 - Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Sisukord

1 Sissejuhatus

Albert Einstein formuleeris 1915. aastal üldrelatiivsusteooria [1], mis on üks kaasaegse füüsika olulisemaid saavutusi. Teooria kirjeldab gravitatsiooni mitte kui jõudu, vaid kui aegruumi kõveruse tagajärge, mis tuleneb energia ja massi olemasolust. Viimase sajandi jooksul on üldrelatiivsusteooria leidnud kinnitust läbi mitmete eksperimentide, kirjeldades astrofüüsikalisi ning kosmoloogilisi nähtusi ja sündmusi – alates Merkuuri periheeli nihkest [2] kuni gravitatsioonilainete vahetu tuvastamiseni [3, 4].

Einstein formuleeris üldrelatiivsusteooria kasutades meetrilist tensorit mingis fundamentaalses gravitatsiooniväljas, mis kirjeldab gravitatsiooni läbi Levi-Civita seostuse ning selle kõveruse [5]. Hoolimata edust on üldrelatiivsusteoorial mitmeid kontseptuaalseid ja tehnilisi probleeme, mis nõuavad lahendamiseks olemasoleva teooria laiendamist. Problemaatiliseks on kujunenud näiteks kvantgravitatsiooni teooria arendamine ja singulaarsuste ning tumeenergia kirjeldamine [6]. Juba Einsteinile oli selge, et üldrelatiivsusteooria ei võimalda lokaalselt ja üheselt defineerida aegruumi energiat [7].

Üks klass alternatiivseid teooriaid kasutavad gravitatsioonivälja kirjeldamiseks sõltumatut ehk afiinset seostust, mida käsitletakse fundamentaalse suurusena meetrilise tensori kõrval [8]. Selliseid teooriaid nimetatakse meetrilis-afiinseteks gravitatsiooniteooriateks [9]. Üldist afiinset seostust iseloomustavad kolm geomeetrilist suurust: kõverus, vääne ehk torsioon ja mittemeetrilisus [10]. Üheks väljapakutud lähenemiseks on teleparalleelne üldrelatiivsusteooria ekvivalent (TEGR - *Teleparallel Equivalent of General Relativity*), kus aegruumi kõverus on universaalselt null ning gravitatsiooni käsitletakse vaid väände kaudu [5]. TEGR säilitab üldrelatiivsusteooriaga füüsikalise ekvivalentsuse andes samad liikumisvõrrandid, kuid pakub teistsugust matemaatilist struktuuri, mis võimaldab eristada gravitatsioonilist ja inertsiaalset mõju objektile. Käesoleva töö raames käsitletakse aga TEGRi üldisemat kuju ehk üldist teleparalleelset üldrelatiivsusteooria ekvivalenti (GTEGR - *General Teleparallel Equivalent of General Relativity*), mis lisaks väändele võimaldab aegruumi geomeetriat kirjeldada mittemeetrilisusega [11]. Hiljutistes publikatsioonides on pakutud välja skeem GTEGRi raamistikus aegruumi energia leidmiseks [12].

Antud magistritöö seisneb väljavõrrandite lahendamises ning gravitatsioonienergia arvutamises kasutades programmeerimiskeele Pythoni teegi SymPy arvutusalgebra süsteemi. Tegemist on arvuti algebra süsteemiga, mis on täielikult programmeeritud Pythonis [13]. SymPy on tasuta avatud lähtekoodiga tarkvara, mille arendas algselt välja Ondřej Čertík 2005 aastal. Teek on laialdane ja võrdlemisi kasutajasõbralik, mis on üks suurimaid SymPy eeliseid teiste sümbolmatemaatika tarkvarade ees. Sellest lähtuvalt on SymPy-d lihtne laiendada, siduda teiste teaduslike teekidega ning mõista.

Käesolevas töös uuritakse Kerri meetrikast tulenevate võrrandite kehtivust GTEGRi raamistikus. Kerri meetrika avastas Roy P. Kerr 1963. aastal oma artiklis „Pöörleva massi gravitatsiooniväli kui näide algebraliselt erilistest meetrikatest“ [14]. Meetrika on oma olemuselt laiendus ligikaudu 48 aastat varem avastatud Schwarzschildi Einsteini võrrandite lahendile ehk Schwarzschildi meetrikale [15]. Kerri meetrika võimaldab erinevalt Schwarzschildi meetrikast kirjeldada ka tsentraalse keha pöördeimpulssi ehk impulsimomenti [16]. Keeruliste ja pikkade avaldiste tõttu on Kerri meetrikal põhinevad arvutuskäigud olnud käsitsi äärmiselt tülikad. Kasutades aga vastavat tarkvara, on kaasaegne tehnoloogia teinud vastavate arvutuskäikude käsitlemise tähelepanuväärselt lihtsamaks, mistõttu on selles valdkonnas toimunud areng [17]. GTEGRi raames on arvutatud energia Schwarzschildi aegruumi jaoks artiklites [18, 19].

Käesoleva magistritöö eesmärk on arvutada aegruumi energia Kerri meetrika jaoks. Töös on arendatud vastav SymPy tööleht [20]. Töö hüpotees on, et SymPy-s arvutatud Kerri aegruumi energia üldises teleparalleelses üldrelatiivsusteooria ekvivalendi raamistikus on kooskõlas varasemalt publitseeritud tulemustega [21]. Sekundaarne hüpotees on, et Kerri-Schildi koordinaatides kanoonilise energia tensor on võrdne nulliga juhul kui arvutatud üldine afiinne seostus on samuti võrdne nulliga.

Töö esimeses osas antakse ülevaade üldrelatiivsusteooria geomeetrilisele ja füüsikalisele taustale, üldisele teleparalleelsele üldrelatiivsusteooria ekvivalendile, SymPy tarkvarale ning Schwarzschildi ja Kerri meetrikale. Teises osas demonstreeritakse avaldiste õigsust ning kirjeldatakse avaldiste defineerimist kasutades SymPy tarkvara Schwarzschildi meetrika alusel. Vastava demonstratsiooni eesmärk on lugejale anda ülevaade SymPy süntaksist, definitsioonide iseärasustest ning otsitavatest tulemustest. Viimases osas viiakse läbi sarnane protseduur Kerri meetrika põhjal, mille tulemus vastab järgnevalt esitatud hüpoteesidele.

Käesolevas töös on vaikimisi eeldatud meetrika signatuuri $(-,+,+,+)$. Kasutatud konstandid on järgnevad: valguse kiirus $c = 1$ ja gravitatsioonikonstant $G = 1$. Tensoreid on tähistatud kaldkirjas ning tensortihedusi on tähistatud kalligraafilises kaldkirjas. Levi-Civita seostusest arvutatud suuruseid on tähistatud väikese ringikesega sümboli kohal. Kreeka ja ladina tähestikus olevad indeksid viitavad vastavalt aegruumi indeksitele ja $GL(\mathbb{R},4)$ rühma indeksitele.

2 Töö matemaatiline ja füüsikaline taust

Käesolevas peatükis antakse lühike sissejuhatus üldrelatiivsusteooria teleparalleelsele ekvivalendile. See hõlmab endas geomeetrilisi aluseid, füüsikalisi aluseid ja laengu jäävuse avaldist ning selle tagamaad. Alapeatükkides 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 ja 2.2.2 on toetatud artiklitele [22], [5], [11] ja [12] vastavalt.

2.1 Geomeetrilised alused

2.1.1 Riemanni geomeetria

Meetriline tensor $g_{\mu\nu}$ määrab infinitesimaalsed kaugused kahe punkti vahel kujul

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1}$$

Samuti on sarnasel viisil määratud vektorite pikkused ja vektorite vahelised nurgad läbi vektorite U ja V skalaarkorrutise

$$U \cdot V = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu. \tag{2}$$

Üldisel koordinaatteisendusel $\xi^\lambda \to x^{\lambda'}$

$$x^{\lambda'} = x^{\lambda'}(\xi^\lambda) \tag{3}$$

teiseneb meetriline tensor avaldisega

$$g_{\mu'\nu'}(x^{\lambda'}) = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}(\xi^\lambda). \tag{4}$$

Diferentsiaalgeomeetrias räägitakse teisest olulisest suurusest, mis defineerib tuletised muutkonna puutuja vektoritel. Tegemist on kovariantse tuletisega, mis on defineeritud vektorvälja V^μ jaoks kujul

$$\nabla_\rho V^\mu := \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} + V^\nu \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}. \tag{5}$$

Nabla operaator ∇_ρ defineerib ka paralleelnihke üle sileda muutkonna. Täheldame, et kovariantne tuletis on defineeritud $\Gamma^\mu{}_{\rho\nu}$ ehk seostuse kaudu. Seostus on üldise koordinaatteisenduse (3) korral defineeritud kui

$$\Gamma^{\rho'}{}_{\mu'\nu'}(x^{\lambda'}) = \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(\xi^\lambda) + \frac{\partial x^{\rho'}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}}. \tag{6}$$

Üldrelatiivsusteoorias on kasutusel Levi-Civita seostus, mis on defineeritud avaldisega

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right). \tag{7}$$

Riemanni kõverustensor on defineeritud kasutades Levi-Civita seostust kujul

$$\mathring{R}^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\lambda\mu} + \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu} - \mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\nu}. \tag{8}$$

Edaspidi on valemite defineerimisel kasutatud väikest ringikest sümboli kohal, mis viitab asjaolule, et vastava sümboliga tähistatud suurus on arvutatud Levi-Civita seostusega. Kõverustensorit ahendades saab tuletada Ricci tensori

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu} \tag{9}$$

ning seeläbi ka Ricci skalaari ehk kõverusskalaari

$$\mathring{R} = g^{\mu\nu}\mathring{R}_{\mu\nu}. \tag{10}$$

Manipuleerides Riemanni tensori diferentsiaalset Bianchi identsust ning kasutades meetrilise ühilduvuse omadust saab defineerida Einsteini tensori läbi Ricci tensori ja skalaari avaldisega

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathring{R} \tag{11}$$

nii, et $\mathring{\nabla}_\mu \mathring{G}^{\mu\nu} = 0$.

2.1.2 Meetrilis-afiinne geomeetria

Üldisel juhul afiinne seostus on meetrikast sõltumatu. Sellisel juhul räägitakse meetrilis-afiinsest geomeetriast. Levi-Civita seostus seevastu on erijuht afiinsest seostusest, mis vastab Riemanni muutkondadele ning selle tagajärjena jätab meetrika muutumatuks.

Sellest tulenevalt saab defineerida üldise afiinse seostuse, mis koosneb kolmest komponendist (Levi-Civita, väände ja mittemeetrilisuse komponentidest)

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} + M^{\mu}{}_{\nu\rho} = \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} + K^{\mu}{}_{\nu\rho} + L^{\mu}{}_{\nu\rho}, \tag{12}$$

kus $M^{\mu}{}_{\nu\rho}$ väljendab niinimetatud moonutust. Kontorsioon on defineeritud kui

$$K^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(T_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} + T_{\rho}{}^{\mu}{}_{\nu} - T^{\mu}{}_{\nu\rho}\right), \tag{13}$$

kus suurust $T^{\mu}{}_{\nu\rho}$ nimetatakse väände tensoriks. Seevastu disformatsiooni tensor on defineeritud kui

$$L^{\mu}{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(Q^{\mu}{}_{\nu\rho} - Q_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} - Q_{\rho}{}^{\mu}{}_{\nu}\right), \tag{14}$$

mille puhul $Q^{\mu}{}_{\nu\rho}$ on mittemeetrilisuse tensor. Järgnevalt saab kirja panna väände ja mittemeetrilisuse tensorid kujul

$$T^{\alpha}{}_{\mu\beta} = 2\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu\beta]} \tag{15}$$

ning

$$Q_{\rho\mu\nu} = \nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\mu\rho} g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\rho} g_{\mu\beta} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - 2\Gamma^{\beta}{}_{(\mu|\rho|} g_{\nu)\beta}. \tag{16}$$

Pidades silmas indeksstruktuuri sümmeetria omadusi on ilmne, et $T^{\alpha}{}_{\mu\beta} = -T^{\alpha}{}_{\beta\mu}$ ja $Q_{\alpha\beta\gamma} = Q_{\alpha\gamma\beta}$. Antud avaldiste ahendamisel saab defineerida vektorid:

$$T_{\mu} = T^{\alpha}{}_{\mu\alpha}, \quad Q_{\mu} = Q_{\mu\alpha}{}^{\alpha} \quad \text{ja} \quad \bar{Q}_{\mu} = Q^{\alpha}{}_{\alpha\mu}. \tag{17}$$

Saab näidata, et Ricci skalaari üldise afiinse seostuse korral saab avaldada kujul

$$R = \mathring{R} + \mathring{\mathbb{G}} + \mathring{\nabla}_{\mu}(Q^{\mu} - \bar{Q}^{\mu} + 2T^{\mu}) = \mathring{R} + \mathring{\mathbb{G}} + \mathring{\nabla}_{\mu}(V^{\mu}), \tag{18}$$

kus $\mathring{R}$ on Levi-Civita Ricci skalaar ja $\mathring{\nabla}_{\mu}$ on Levi-Civita seostuse kovariantne tuletis. Siinkohal on defineeritud lihtsustus

$$V^{\mu} = Q^{\mu} - \bar{Q}^{\mu} + 2T^{\mu}. \tag{19}$$

Gravitatsioonitensor $\mathring{\mathbb{G}}$ on defineeritud väände ja mittemeetrilisuse kaudu kujul

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbb{G}} =& \frac{1}{4} T_{\mu\nu\rho} T^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu\rho} T^{\rho\mu\nu} - T_{\mu} T^{\mu} + Q_{\mu\nu\rho} T^{\rho\mu\nu} - Q_{\mu} T^{\mu} + \bar{Q}_{\mu} T^{\mu} \\ &+ \frac{1}{4} Q_{\mu\nu\rho} Q^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2} Q_{\mu\nu\rho} Q^{\nu\mu\rho} - \frac{1}{4} Q_{\mu} Q^{\mu} + \frac{1}{2} Q_{\mu} \bar{Q}^{\mu}. \end{aligned} \tag{20}$$

2.1.3 Teleparalleelne geomeetria

Üldine kõverusetensor on defineeritud analoogselt Levi-Civita kõverustensorile (8) kujul

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu]\beta} + 2\Gamma^{\alpha}{}_{[\mu|\lambda|} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu]\beta} \\ &= \partial_{\mu} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} - \partial_{\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\beta}. \end{aligned} \tag{21}$$

Kui igas aegruumi punktis kehtib seos

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0 \tag{22}$$

siis öeldakse, et tegemist on teleparalleelse geomeetriaga. Seost (22) võib nimetada ka teleparalleelsuse tingimuseks. On võimalik veenduda, et kui afiinne seostus on kujul

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{a} \partial_{\mu} \Lambda^{a}{}_{\beta} \tag{23}$$

siis teleparalleelsuse tingimus (22) on automaatselt täidetud. Suurused $\Lambda^a{}_\beta$ on rühma $GL(\mathbb{R},4)$ maatriksid, mis sisaldavad 16 sõltumatut komponenti. Võime defineerida raamiteisendused, mis on antud avaldisega

$$\Lambda^{a'}{}_\mu = \xi^{a'}{}_b \Lambda^b{}_\mu, \tag{24}$$

kus $\xi^{a'}{}_b \in GL(\mathbb{R},4)$. Sellisel moel teisendatud maatriksite $\Lambda^{a'}{}_\mu$ puhul jääb kehtima teleparalleelsuse tingimus (22). Nii maatriksid $\Lambda^b{}_\mu$ kui ka $\xi^{a'}{}_b$ võib üldjuhul võtta sõltuvaks aegruumi koordinaatidest. Minnes koordinaatsüsteemist x^μ koordinaatsüsteemi $x^{\mu'}$ teisenevad need maatriksid eeskirja

$$\Lambda^a{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \Lambda^a{}_\mu \tag{25}$$

kohaselt.

Täheldame, et raamimaatriks $\Lambda^a{}_\mu$ ei ole määratud üheselt. Sellest lähtuvalt võib raamivalikuga seostus (23) muutuda, aga teleparalleelsuse tingimus (22) peab kehtima jääma. Samuti täheldame, et kreeka tähestikus olevad indeksid viitavad aegruumi indeksitele - ladina tähestikus olevad indeksid viitavad $GL(\mathbb{R},4)$ rühma indeksitele. On oluline arvestada, et raamiteisendus (24) ei muuda koordinaate ega meetrilist tensorit, küll aga võib muutuda seostus ja seda sisaldavad suurused nagu näiteks väände ja mittemeetrilisuse tensor. Seevastu koordinaatteisendustel, nagu näiteks (4) ja (6), teisenevad kõik suurused. Hiljem näeme, et raamiteisendust saab tõlgendada kalibratsiooniteisendusena, sest osakeste liikumisvõrrandid ei muutu teisenduse käigus.

Teleparalleelse geomeetria vääne ja mittemeetrilisus on antud vastavalt kujudega

$$T^\alpha{}_{\mu\beta} = 2\Gamma^\alpha{}_{[\mu\beta]} = 2(\Lambda^{-1})^\alpha{}_a \partial_{[\mu} \Lambda^a{}_{\beta]}, \tag{26}$$

ja

$$Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - 2(\Lambda^{-1})^\lambda{}_a \partial_\alpha \Lambda^a{}_{(\mu} g_{\nu)\lambda}. \tag{27}$$

Üldise teleparalleelse geomeetria raames saame alamjuhtudena kenasti eristada meetrilist teleparalleelset ja sümmeetrilist teleparalleelset geomeetriat, kus vastavalt mittemeetrilisus ja vääne on nullid. Need ilmnevad sobivalt valitud raamimaatriksitega.

2.2 Füüsikalised alused

2.2.1 Üldrelatiivsusteooria

Üldrelatiivsusteoorias on Ricci skalaar kõige lihtsam suurus, mis sobiks lagranžiaaniks ning vastav Einstein-Hilberti mõjufunktsionaal on kirjutatud kujul

$$S_H = \int d^4x\sqrt{-g}\mathring{R}. \tag{28}$$

Vastavat mõjufunktsionaali varieerides saab defineerida Einsteini võrrandid vaakumis

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g_{\mu\nu} = 0. \tag{29}$$

Täheldame, et tegemist on Einsteini võrrandite vaakumlahendusega, sest arvesse võeti ainult lagranžiaani gravitatsioonilist osa. Üldisema, koos mateeriaga, lahenduse leidmiseks peab mõjufunktsionaal võtma kuju

$$S = \frac{1}{16\pi}S_H + S_M. \tag{30}$$

Siinkohal mõjufunktsionaal S_M tähistab avaldises mateeriat kirjeldavat osa. Seega kasutades samasugust varieerimise protseduuri (29) saab tuletada võrrandi

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi}\left(\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \tag{31}$$

Energia-impulsi tensori saab järelikult kirja panna kujul

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{32}$$

Kasutades saadud võrrandeid, saab defineerida täielikud Einsteini võrrandid kujul

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \tag{33}$$

kus suurust $\mathring{G}_{\mu\nu}$ nimetatakse Einsteini tensoriks.

2.2.2 Üldrelatiivsusteooria üldine teleparalleelne ekvivalent

Olgu gravitatsiooniteooria, mida kirjeldab mõju

$$S = \int d^4x\mathcal{L} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{8\pi}L_g + L_m\right), \tag{34}$$

kusjuures $L_g = L(g^{\mu\nu},\, Q_\alpha{}^{\mu\nu},\, T^\alpha{}_{\mu\nu})$ on gravitatsiooni lagranžiaan ja $L_m = L(g^{\mu\nu},\, \chi_m)$ on mateeriat kirjeldav lagranžiaan. Järgnevalt on vajalik defineerida gravitatsioonitensor kõige lihtsamal kujul. Alustuseks tuleb defineerida üldine teleparalleelse geomeetria lagranžiaan [12]

$$L_g = -\frac{1}{2}\mathring{\mathbb{G}} = \frac{1}{2}\left(Q_\alpha{}^{\mu\nu}P^\alpha{}_{\mu\nu} + T^\alpha{}_{\mu\nu}S_\alpha{}^{\mu\nu}\right), \tag{35}$$

kus $\mathring{\mathbb{G}}$ on sama, mis valemis (20). Eelneva definitsiooni lahtikirjutamiseks tõime sisse väände ja mittemeetrilisuse konjugaadid, mis on vastavalt

$$\begin{aligned} P^\alpha{}_{\mu\nu} &= \frac{\partial L_g}{\partial Q_\alpha{}^{\mu\nu}} \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}Q^\alpha{}_{\mu\nu} + Q_{(\mu\nu)}{}^\alpha + \frac{1}{2}Q^\alpha g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\tilde{Q}^\alpha g_{\mu\nu} + \delta^\alpha{}_{(\mu}Q_{\nu)}\right)\right. \\ &\qquad \left. + T_{(\mu\nu)}{}^\alpha + T^\alpha g_{\mu\nu} - \delta^\alpha{}_{(\mu}T_{\nu)}\right] \end{aligned} \tag{36}$$

ja

$$\begin{aligned} S_\alpha{}^{\mu\nu} &= \frac{\partial L_g}{\partial T^\alpha{}_{\mu\nu}} \\ &= -\frac{1}{4}T_\alpha{}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}T_\alpha{}^{[\mu\nu]} - \delta^{[\mu}{}_\alpha T^{\nu]} - \frac{1}{2}Q^{\mu\nu}{}_\alpha - \frac{1}{2}\delta^{[\mu}{}_\alpha Q^{\nu]} + \frac{1}{2}\delta^{[\mu}{}_\alpha \tilde{Q}^{\nu]}. \end{aligned} \tag{37}$$

Eelnevat arvesse võttes saab tuletada ka osatuletise lagranžiaanist (35) meetrilise tensori järgi

$$\frac{\partial L_g}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}Q_{(\nu}{}^{\alpha\beta}P_{\mu)\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta(\mu}P^{\alpha\beta}{}_{\nu)} - \frac{1}{2}T_{(\mu|\alpha\beta}S_{|\nu)}{}^{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta(\nu}S^{\alpha\beta}{}_{\mu)}. \tag{38}$$

Kasutades eelnevalt defineeritud suurusi saame tuletada võrrandid meetrika ja teleparalleelse seostuse jaoks vastavalt artiklile [12]

$$2\left(\nabla_\alpha + T_\alpha + \frac{1}{2}Q_\alpha\right)P^\alpha{}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}L_g - 2\frac{\partial L_g}{\partial g^{\mu\nu}} + 4\pi T_{\mu\nu} \tag{39}$$

$$\left(\nabla_\mu + T_\mu + \frac{1}{2}Q_\mu\right)\left(S_\alpha{}^{\mu\nu} - P^{\mu\nu}{}_\alpha\right) = 0. \tag{40}$$

Suurus $T_{\mu\nu}$ on energia-impulsi tensor, mis on defineeritud valemis (32). Täheldame, et esimene võrrand on ekvivalentne üldrelatiivsusteooria Einsteini võrranditega (33) ning teine võrrand kirjeldab geomeetrilist samasust.

2.3 Laengute jäävus ja aegruumi energia

GTEGRi puhul on matemaatiliselt sarnasus klassikalisest elektrodünaamikast tuntud Maxwelli võrranditega, sest mõlemaid saab käsitleda klassikaliste väljateooriatena. Sedapuhku on võimalik luua ka GTEGRi jaoks seosed, nagu näiteks gravitatsiooniline „vool“. Järgnevates peatükkides on seda käsitletud.

2.3.1 Analoog Maxwelli võrrandite näol

Tuntud elektrodünaamika Maxwelli võrrandid on [23] alusel järgnevad (Gaussi ühikute süsteemis):

$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = 4\pi \mathbf{J} \tag{41a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{41b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \tag{41c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{41d}$$

$\mathbf{E}$ ja $\mathbf{B}$ on elektri- ja magnetväljatugevuse 3-vektorid, $\mathbf{J}$ on vooluvektor ja ρ on laengutihedus. Täheldame, et Gaussi seadusest (41b) lähtuvalt saab divergentsi teoreemi kasutades leida suletud ruumis oleva laengu kujul

$$4\pi Q = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \oint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS, \tag{42}$$

kus Q on laeng, dV on ruumalaelement, dS on ruumala ümbritsev pindalaelement ja $\vec{n}$ on väljapoole suunatud normaalivektor. Kui tuua sisse elektromagnetvälja väljatugevuse tensor kujul

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu} \tag{43}$$

ja voolu 4-vektor $J^\nu = (\rho, \mathbf{J})$, siis saab Maxwelli võrrandid (41) kokku võtta indeksnotatsioonis valemiga

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = 4\pi J^\nu. \tag{44}$$

Täheldame, et kogulaengu arvutus (42) vastab võrrandile (41b), juhul kui võrrandis (44) olev indeks $\nu = 0$. Jäävate suuruste otsimisega seoses saab gravitatsioonivälja võrrandid (39) ja (40) viia sarnasele kujule, millest lähtuvalt saab võrrandis (42) kasutatud meetodiga sarnast meetodit rakendada ka aegruumi energia leidmisel analoogselt elektrodünaamikaga. Seda arutatakse järgnevas alapeatükis.

2.3.2 Üldise teleparalleelse üldrelatiivsusteooria ekvivalendi laengud

Aegruumi energia leidmiseks on vajalik meetrilise ja kanoonilise energia tensori avaldiste sissetoomine vastavalt kujudega [12]

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} L_g - 2\frac{\partial L_g}{\partial g^{\mu\nu}} - 2Q_{\alpha\beta\mu} P^{\alpha\beta}{}_{\nu} \tag{45}$$

$$t_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - T_{\mu\alpha\beta} S_{\nu}{}^{\alpha\beta}. \tag{46}$$

Üldist teleparalleelset geomeetrilist lagrangžiaani (35) silmas pidades saab need lahti kirjutada

$$\begin{aligned} G^{\mu}{}_{\nu} &= \delta^{\mu}{}_{\nu} L_g - Q_{\nu}{}^{\alpha\beta} P^{\mu}{}_{\alpha\beta} + T^{\mu}{}_{\alpha\beta} S_{\nu}{}^{\alpha\beta} - 2T_{\alpha\beta\nu} S^{\alpha\beta\mu} \\ &= \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} Q_{\alpha}{}^{\mu\nu} P^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} T^{\alpha}{}_{\mu\nu} S_{\alpha}{}^{\mu\nu} - Q_{\nu}{}^{\alpha\beta} P^{\mu}{}_{\alpha\beta} + T^{\mu}{}_{\alpha\beta} S_{\nu}{}^{\alpha\beta} - 2T_{\alpha\beta\nu} S^{\alpha\beta\mu} \end{aligned} \tag{47}$$

ja

$$\begin{aligned} t^{\mu}{}_{\nu} &= \delta^{\mu}{}_{\nu} L_g - Q_{\nu}{}^{\alpha\beta} P^{\mu}{}_{\alpha\beta} - 2T_{\alpha\beta\nu} S^{\alpha\beta\mu} \\ &= \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} Q_{\alpha}{}^{\mu\nu} P^{\alpha}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu} T^{\alpha}{}_{\mu\nu} S_{\alpha}{}^{\mu\nu} - Q_{\nu}{}^{\alpha\beta} P^{\mu}{}_{\alpha\beta} - 2T_{\alpha\beta\nu} S^{\alpha\beta\mu}. \end{aligned} \tag{48}$$

Eelmainitud definitsioone kasutades saab Võrrandeid (39) ja (40) kombineerida nii, et [12]

$$2\left(\nabla_{\alpha} + T_{\alpha}\right)\sqrt{-g} S_{\nu}{}^{\alpha\mu} - T^{\mu}{}_{\alpha\beta} S_{\nu}{}^{\alpha\beta} = 4\pi\sqrt{-g} T^{\mu}{}_{\nu} + \sqrt{-g} t^{\mu}{}_{\nu}. \tag{49}$$

Eelnevat avaldist ahendades raamimaatriksiga $(\Lambda_a{}^{\nu})^{-1}$ ja avades avaldise vasaku poole sulud saame võrrandi

$$\partial_{\alpha} \mathcal{F}_a{}^{\mu\alpha} = 4\pi \mathcal{J}_a{}^{\mu} + \sqrt{-g} t^{\mu}{}_{\nu} (\Lambda_a{}^{\nu})^{-1}, \tag{50}$$

kus

$$\mathcal{F}_a{}^{\mu\alpha} = -2\sqrt{-g} S_{\nu}{}^{\alpha\mu} (\Lambda_a{}^{\nu})^{-1} \tag{51}$$

kujutab nelja välja ergastust ja voolu

$$\mathcal{J}_a{}^{\mu} = \sqrt{-g} T^{\mu}{}_{\nu} (\Lambda_a{}^{\nu})^{-1} \tag{52}$$

saab tuletada projekteerides energia-impulsi tensori kanoonilistele vektoritele. Vastava võrrandi puhul võib märgata analoogi eelnevas peatükis kirjeldatud võrrandiga (44), siis kui oleme kanoonilises raamis, mille puhul

$$t^{\mu}{}_{\nu} = 0. \tag{53}$$

Nii saab defineerida lähtudes töö sekundaarsest hüpoteesist energia jäävusseaduse analoogselt elektrodünaamikaga kujul

$$\partial_\alpha \mathcal{F}_a{}^{\mu\alpha} = 4\pi \mathcal{J}_a{}^{\mu}, \tag{54}$$

Täheldame, et tegemist on valemi (44) analoogiga, kusjuures $\mathcal{F}_a{}^{\mu\alpha}$ ja $\mathcal{J}_a{}^{\mu}$ sisaldavad niinimetatud aegruumi kaalu $\sqrt{-g}$. Sellest lähtuvalt, $\mathcal{J}_a{}^{\mu}$ valemis (54) esindab 4 lokaalset energia-impulsi voolu, mille jäävused $\mathcal{J}_a{}^{\mu}$ on valemi (54) otsesed tagajärjed.

Valemi (54) vasak pool annab kanooniliste Noetheri voolude avaldise teleparalleelse gravitatsiooni jaoks [24], mis on identselt jäävad. Selle tulemusena ja analoogiat (42) kasutades, saab avaldada 4 laengut kvaasi-lokaalse integraaliga kujul

$$4\pi C_a = \oint \mathcal{F}_a{}^{0\mu} n_\mu dS, \tag{55}$$

kus n_μ on ühik normaali vektor läbi suletud pinna. Laengute jäävus $\dot{C}_a = 0$ oleneb piirtingimustest. Tuleb arvestada, et aegruumi energia sõltub väljatugevuse tensori ajalisest komponendist ehk komponendist mille indeks $a = 0$. Sellest lähtuvalt näeb lõplik energia avaldis välja kui

$$4\pi C_0 = \oint \mathcal{F}_0{}^{0\mu} n_\mu dS. \tag{56}$$

2.4 Kerri meetrika

Albert Einstein arendas üldrelatiivsusteooria lõpliku kuju välja 1915. aasta novembris ning järgneva kahe kuu vältel lahendas Karl Schwarzschild väljavõrrandid, mis kirjeldavad täpselt mittepöörleva punktmassi aegruumi geomeetriat [17]. Võrdlemisi kiirelt jõuti arusaamiseni, et aegruumi geomeetria vaakumis väljaspool lokaalselt sfäärilist sümmeetrilist allikat on ekvivalentne Schwarzschildi geomeetriaga teatud määrani. Sügavama arusaamani, et Schwarzschildi lahendid kirjeldavad mittepöörlevat musta auku, jõuti hiljem. Schwarzschildi geomeetriat ehk meetrikat kirjeldab joonelement

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{57}$$

mille puhul parameeter m väljendab keskel oleva objekti füüsikalist massi ning r kaugust sellest objektist, kusjuures r, θ ja ϕ tähistavad sfäärilisi koordinaate.

Astrofüüsikast on aga teada, et tähed pöörlevad ehk omavad mingisugust impulsimomenti. Nii saab Schwarzschildi meetrika ümber arendada ka selliste pöörlevate kehade jaoks

$$\begin{aligned} ds^2 = &- \left[1 - \frac{2m}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] dt^2 - \left[\frac{4J\sin^2\theta}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] d\phi dt \\ &+ \left[1 + \frac{2m}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right] \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right]. \end{aligned} \tag{58}$$

Selline meetrika on mõistlik peaaegu kõikide tähesüsteemide kirjeldamiseks üldrelatiivsusteoorias, kuid probleemid tekivad teatud „tugevate väljade" puhul, nagu näiteks gravitatsiooniline kollaps. Kui pöörlev täht läbib gravitatsioonilise kollapsi, siis eeldatavasti jääb järele jäävale objektile mingi osa tähe algsest impulsimomendist. Selline situatsioon annab füüsikalise aluse Schwarzschildi geomeetria laiendusele, mis hõlmaks endas ka tsentraalse keha impulsimomenti.

Lahenduse leidis Roy P. Kerr 1963. aastal [14]. Kerr leidis oma enda originaalses koordinaatsüsteemis järgneva meetrika

$$\begin{aligned} ds^2 =& (r^2 + a^2\cos^2\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + 2(du + a\sin^2\theta d\phi)(dr + a\sin^2\theta d\phi) \\ &- \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)(du + a\sin^2\theta d\phi)^2, \end{aligned} \tag{59}$$

kus parameeter a kirjeldab tsentraalse objekti impulsimomendi J ja massi m suhet. Artiklis teisendati meetrika ka käesolevas töös huvipakkuvasse Kerri-Schildi „pseudo-Cartesiuse" koordinaatsüsteemi ning see näeb välja järgnev:

$$\begin{aligned} ds^2 =& -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &+ \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2}\left[dt + \frac{r(xdx + ydy)}{a^2 + r^2} + \frac{a(ydx - xdy)}{a^2 + r^2} + \frac{z}{r}dz\right]^2. \end{aligned} \tag{60}$$

Selline koordinaatsüsteem pakub huvi, sest see võimaldab võrrandid defineerida selgel ja arusaadaval viisil nii, et ka töö raames kirjutatud programm seda arvutaks. Meetrika defineerimisel töölehel on mõistlik kasutada järgnevaid valemeid

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f(x)\ell_\mu\ell_\nu \tag{61}$$

ja

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - f(x)\ell^\mu\ell^\nu. \tag{62}$$

See valem võimaldab universaalselt kirja panna meetrika avaldis nii, et meetrika valik sõltub meetrikale omasest funktsioonist $f(x)$ ning niinimetatud ℓ-vektoritest, mis samuti on meetrikale omased, kusjuures $\eta_{\mu\nu}$ on Minkowski meetrika [25]. Kerri meetrikale iseloomulik funktsioon ja ℓ-vektor on vastavalt

$$f(x) = \frac{2m\rho^3}{2(\rho^4 + a^2z^2)} \tag{63}$$

ja

$$\ell = dt + \frac{z}{\rho}dz + \frac{\rho}{\rho^2 + a^2}(xdx + ydy) - \frac{a}{\rho^2 + a^2}(xdy - ydx). \tag{64}$$

Täheldame, et Kerri meetrikas muutuja ρ on lahtikirjutatuna

$$\rho=\frac{\sqrt{2}\sqrt{-a^2+x^2+y^2+z^2+\sqrt{a^4-2a^2x^2-2a^2y^2+2a^2z^2+x^4+2x^2y^2+2x^2z^2+y^4+2y^2z^2+z^4}}}{2} \tag{65}$$

ning kui parameeter $a = 0$, siis jääb alles Schwarzschildi meetrika.

Kerri meetrika jaoks tuleb järgnevalt leida ka vastav energia suletud süsteemis. G. W. Gibbons, M. J. Perry ja C. N. Pope said 2010. aastal avaldatud artiklis Kerr–anti-de Sitteri lahendi jaoks aegruumi globaalse energia tulemuseks $E = \frac{m}{\Xi^2}$ [21], kusjuures $\Xi \equiv 1 - a^2 l^{-2}$. Parameeter l kirjeldab siinkohal kosmoloogilise konstandi Λ pöördväärtust ehk $\Lambda = l^{-1}$. Anti-de Sitteri ruum on matemaatilises füüsikas maksimaalselt sümmeetriline aegruum koos negatiivse kosmoloogilise konstandiga. Magistritöös on arvestatud Minkowski ruumiga, mille korral $\Lambda = 0$. Sellest lähtuvalt peab suurust Ξ arvutades arvestama Minkowski piirjuhuga, mille tulemusena $l \to \infty$. Nii jääb alles suurus $\Xi = 1$, mistõttu $E = m$. Käesoleva töö arvutused näitavad, et saadud tulemus kehtib ka kvaasi-lokaalsel juhul ning ei sõltu integreeritavast ruumalast.

3 Avaldiste defineerimine töölehel ja arvutuskäigu kontroll kasutades Schwarzschildi meetrikat

Käesolevas peatükis keskendutakse töölehel [20] läbiviidud arvutuste selgitamisele ning SymPy alamteegi `sympy.tensor` tutvustamisele. Eeldatakse, et lugeja on kursis Pythoni programmeerimiskeele ja SymPy teegi tööpõhimõttega. SymPy teek töötab sümbolite põhise matemaatikaga, mis tähendab, et alustuseks tuleb defineerida iga valemis kasutusel oleva suuruse jaoks eraldi sümbol. Sellest lähtuvalt on esmalt vaja defineerida aegruumi ja $GL(4)$ koordinaatide tensorindeksid.

```
ST = st.TensorIndexType('SpaceTime', dummy_name='\\iota', dim=4,
    metric_symmetry=1)
GL = st.TensorIndexType('GL', dummy_name='i', dim=4,
    metric_symmetry=1)
```

Seejärel, kasutades eelnevalt defineeritud koordinaate, on vaja defineerida kõik vajaminevad suurused ehk niinimetatud tensorite „pead“. Mõned sellised suurused on näiteks meetrika, raamimaatriks, väände tensor ning kovariantne tuletis mittemeetrilisuse konjugaadist vastavalt

```
g = st.TensorHead('g', [ST]*2, sym2)
Lmatrix = st.TensorHead('L', [GL,ST])
Torsion = st.TensorHead('T', [ST]*3)
NablaNonmetricityConjugate = st.TensorHead('\\nabla P', [ST]*4)
```

Siinkohal näiteks raamimaatriksi tensori pea, üldise nimega `Lmatrix`, on defineeritud sümboliga `'L'` ning suuruse esimene indeks on $GL(4)$ hulka kuuluv ja teine on aegruumi indeksite hulka kuuluv. Niimoodi käsitleb programm erinevat tüüpi indekseid erinevalt, mistõttu vastavad indeksid arvutuste käigus ei segune. Sellisel kujul defineeritud tensori päid saab kasutada võrrandite defineerimisel kindlatele võrrandi komponentidele viitamiseks. Nii saame SymPy teegile arusaadavas koodkirjas defineerida näiteks lagranžiaani (35) järgnevalt:

```
LagrangianG = Rational(1,2)*(Nonmetricity(-rho,mu,nu)*
    NonmetricityConjugate(rho,-mu,-nu)+Torsion(rho,-mu,-nu)*
    TorsionConjugate(-rho,mu,nu))
```

Täheldame, et funktsioon `Rational(1,2)` viitab ratsionaalarvule $1/2$ ning funktsioonid `Nonmetricity(-rho,mu,nu)`, `NonmetricityConjugate(rho,-mu,-nu)`, `Torsion(rho,-mu,-nu)` ja `TorsionConjugate(-rho,mu,nu)` viitavad vastavalt mittemeetrilisuse tensori, mittemeetrilisuse konjugaadi, väände tensori ja väände konjugaadi tensorite peadele. Kasutatud on indeksstruktuuri defineerimise konventsiooni, kus miinusmärk indeksi ees viitab alumisele indeksile ning miinuseta indeks viitab ülemisele. Arvutades välja vastavad suurused huvipakkuva meetrika jaoks saame need tensorite peade vahendusel sisse asendada. Seda protsessi on kirjeldatud täpsemalt järgnevas peatükis. Programmi põhimõtte selgitamiseks ning kirjutatud koodi kontrolliks viiakse läbi arvutused meetrilise ja teleparalleelse seostuse võrrandite jaoks ehk võrrandite (39) ja (40) jaoks vastavalt.

3.1 Schwarzschildi meetrilise tensori ja raami defineerimine

On teada, et Schwarzschildi geomeetria puhul saab lihtsustamiseks ja vajamineva mälu kokkuhoidmiseks kasutada lihtsat seost raadiuse ja ruumikoordinaatide vahel: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Samuti lähtume indeksite tähistamise konventsioonist: alumised indeksid on muutuja nimes tähistatud tähega `l` ning ülemised tähega `u`. Alustuseks defineeritakse lihtsustuse avaldis ning vajaminevad sümbolid. Demonstratsiooni huvides kuvatakse käesolevalt $g_{\mu\nu}$ tuletuskäiku

```
coord_Cart= [t,x,y,z]
rr=sqrt(x**2+y**2+z**2)
r=Symbol('r', positive=True)

ellvector = st.TensorHead('\\ell', [ST])
etatensor = st.TensorHead('\\eta', [ST]*2)

ellvector_l=ellvector(-mu)
ellvector_Sch_l=ImmutableDenseNDimArray([1,x/rr,y/rr,z/rr])

eta_Sch_ll = ImmutableDenseNDimArray(Matrix([[-1, 0, 0,
    0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]]))

g_ll = g(-mu,-nu)+m/rr*ellvector(-mu)*ellvector(-nu)

g_Sch_ll=g_ll.replace_with_arrays({g(-s0,-s1):eta_Sch_ll, ellvector(-
    s0):ellvector_Sch_l}).applyfunc(lambda item:item.subs(x**2+y**2+z
    **2,r**2))

display(Math('g_{\\mu \\nu}' + '=' + latex(g_Sch_ll)))
```

Siinkohal on defineeritud üldine meetrika valem $g_{\mu\nu}$ muutuja `g_ll` näol tensorite peadega. Muutuja `g_Sch_ll` määrab Schwarzschildi meetrikale vastava meetrilise tensor. Selle jaoks vajaminevaid suurusi saab valemisse tensorite peadele asendada funktsiooniga `replace_with_arrays`. Funktsioon `ImmutableDenseNDimArray` võimaldab defineerida konkreetse tensori kuju andmemassiivina. Täheldame, et funktsioon `.applyfunc()` on kasutusel selleks, et vastavat lihtsustust avaldada kõikidele avaldise suuruses olevatele komponentidele. Selleks läheb vaja võtmekäsku `lambda`, mis kohandab vastava lihtsustava $x^2+y^2+z^2 \to r^2$ asenduse funktsiooniga `.subs()` kõikidele avaldise komponentidele ükshaaval. Viimaks funktsioon `display` kuvab tulemuse. Antud juhul tulemuseks on

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{m}{r} - 1 & \frac{mx}{r^2} & \frac{my}{r^2} & \frac{mz}{r^2} \\ \frac{mx}{r^2} & \frac{mx^2}{r^3} + 1 & \frac{mxy}{r^3} & \frac{mxz}{r^3} \\ \frac{my}{r^2} & \frac{mxy}{r^3} & \frac{my^2}{r^3} + 1 & \frac{myz}{r^3} \\ \frac{mz}{r^2} & \frac{mxz}{r^3} & \frac{myz}{r^3} & \frac{mz^2}{r^3} + 1 \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Järgmise sammuna on tarvis defineerida üldine seostus (23). Selle tarbeks on vaja langetada valik raamimaatriksite osas ning defineerida ka selle osatuletis. Käesoleva töö raames on valitud ühikmaatriks, sest see on kõige lihtsam sobilik maatriks. Vastavad muutujad on defineeritud järgnevalt

```
Lmatrixinv_Sch_Lu = ImmutableDenseNDimArray(Matrix
    ([[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]]))
Lmatrix_Sch_lU = ImmutableDenseNDimArray(Lmatrixinv_Sch_Lu.tomatrix()
    .inv())
Lmatrix_Sch_Ul = permutedims(Lmatrix_Sch_lU,(1,0))

dLmatrix_Ull=PartialDerivative(Lmatrix(a,-nu),coord(mu))
dLmatrix_Sch_Ull=dLmatrix_Ull.replace_with_arrays({Lmatrix(a0,-s0):
    Lmatrix_Sch_Ul, coord(mu):coord_Cart})

Set_indices3 = st.TensorHead('', [ST]*3)
empty_set=ImmutableSparseNDimArray({},(4,4,4))
set_indices3=ImmutableDenseNDimArray(empty_set,(4,4,4))

Gamma_ull=-Set_indices3(rho,-mu,-nu)+Lmatrixinv(-a,rho)*dLmatrix(a,-
    nu,-mu)

Gamma_Sch_ull=Gamma_ull.replace_with_arrays({Set_indices3(s0,-s1,-s2)
    :set_indices3, Lmatrixinv(-a0,s0):Lmatrixinv_Sch_Lu, dLmatrix(a0,-
    s0,-s1):dLmatrix_Sch_Ull})
```

Siinkohal muutuja nimes olevad suured tähed `L` ja `U` viitavad, vastavalt alumistele ja ülemistele, $GL(4)$ hulka kuuluvatele indeksitele. Käsk `tomatrix()` muudab tensorstruktuuri maatriksstruktuuriks ning käsk `inv()` pöörab selle. Funktsioon `permutedims` võimaldab defineeritud maatriksit transponeerida selleks, et saavutada korrektne indeksite järjekord. Tensori pead `Set_indices3(rho,-mu,-nu)` kasutatakse võrrandi indeksstruktuuri määramiseks nii, et järjestus oleks ${}^{\rho}{}_{\mu\nu}$. Hiljem asendatakse see nullidest koosneva massiiviga `set_indices3`, mis arvutustulemusi ei mõjuta. SymPy võtab võrrandi tulemuse indeksstruktuuriks alati teegi omase tähestiku järgi esimese liikme indeksstruktuuri, mis võib vahetevahel erineda soovitust. Seda silmas pidades on nüüd defineeritud üldine afiinne seostus ning tulemus on nii nagu oodatud

$$\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{67}$$

Nüüd saab välja arvutada ka kõverustensori (21). Selle tarbeks tuleb esmalt arvutada osatuletis üldisest seostusest ning seejärel defineerida kõverustensori avaldis. Seda teeme järgneva koodiga

```
dGamma_ulll=PartialDerivative(Gamma(rho,-mu,-nu),coord(kappa))
dGamma_Sch_ulll=dGamma_ulll.replace_with_arrays({Gamma(s0,-s1,-s2):
    Gamma_Sch_ull, coord(s0):coord_Cart})

Curvature_ulll=-Set_indices4(rho,-kappa,-mu,-nu)+dGamma(rho,-nu,-
    kappa,-mu)-dGamma(rho,-mu,-kappa,-nu)+Gamma(rho,-mu,-alpha)*Gamma(
    alpha,-nu,-kappa)-Gamma(rho,-nu,-alpha)*Gamma(alpha,-mu,-kappa)
Curvature_Sch_ulll=Curvature_ulll.replace_with_arrays({Set_indices4(
    s0,-s1,-s2,-s3):set_indices4, dGamma(s0,-s1,-s2,-s3):
    dGamma_Sch_ulll, Gamma(s0,-s1,-s2):Gamma_Sch_ull})
```

Tulemused on kaduvad ehk $\partial_\kappa \Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ ja $R^{\rho}{}_{\kappa\mu\nu}$ kõik komponendid võrduvad nulliga. Sellega on tekkinud veendumus, et raamivalik sobib käesolevate arvutuste jaoks.

3.2 Geomeetria defineerimine Schwarzschildi meetrika näitel

Järgnevalt on vajalik defineerida mittemeetrilisuse ja väände tensorid, võrrandid (16) ja (15) vastavalt, ning neist koostatud avaldatavad vektorid. Selle tarbeks tuleb esmalt defineerida ja arvutada osatuletis meetrikast

```
dg_lll=PartialDerivative(g(-mu,-nu),coord(rho))
dg_Sch_lll=dg_lll.replace_with_arrays({g(-s0,-s1): g_Sch_rless_ll,
    coord(rho): coord_Cart}).applyfunc(lambda item:item.subs(x**2+y
    **2+z**2,r**2).factor())
```

Lihtsustav funktsioon `factor()` võimaldab avaldises esinevad polünoomid faktoriseerida. Sellist lihtsustusskeemi on kasutatud ka edaspidiselt enamike avaldiste puhul. Järgnevalt on programmis defineeritud väände ja mittemeetrilisuse tensorid, valemid (26) ja (27) vastavalt, ning lisaks ka neist tuletatud vektorid. Demonstreerimise huvides kuvame ühe indeksstruktuuri jaoks vastavad definitsioonid nimetatud suuruste jaoks

```
Nonmetricity_lll = -Set_indices3(-rho,-mu,-nu) + dg(-mu,-nu,-rho)-
    Gamma(s0,-rho,-mu)*g(-s0,-nu)-Gamma(s0,-rho,-nu)*g(-mu,-s0)
Nonmetricityvector_l=g(beta,gamma)*Nonmetricity(-mu,-beta,-gamma)
Nonmetricitybarvector_l=Nonmetricity(alpha,-mu,-alpha)
```

```
Torsion_ull=-Set_indices3(rho,-mu,-nu)+Gamma(rho,-mu,-nu)-Gamma(rho,-
    nu,-mu)
Torsionvector_l=Torsion(alpha,-mu,-alpha)
Vvector_l=Nonmetricityvector(-nu)-Nonmetricitybarvector(-nu)+2*
    Torsionvector(-nu)

Nonmetricity_Sch_lll=Nonmetricity_lll.replace_with_arrays({
    Set_indices3(-s0,-s1,-s2):set_indices3, dg(-s0,-s1,-s2):dg_Sch_lll
    , Gamma(s0,-s1,-s2):Gamma_Sch_ull, g(-s0,-s1):g_Sch_ll}).applyfunc
    (lambda item:item.subs(r**2,x**2+y**2+z**2).factor().subs(x**2+y
    **2+z**2,r**2))
Torsion_Sch_ull=Torsion_ull.replace_with_arrays({Set_indices3(s0,-s1
    ,-s2):set_indices3, Gamma(s0,-s1,-s2):Gamma_Sch_ull})
Nonmetricityvector_Sch_l=Nonmetricityvector_l.replace_with_arrays({g(
    s0,s1):g_Sch_uu, Nonmetricity(-s0,-s1,-s2):Nonmetricity_Sch_lll}).
    applyfunc(lambda item:item.subs(r**2,x**2+y**2+z**2).factor().subs
    (x**2+y**2+z**2,r**2))
Nonmetricitybarvector_Sch_l=Nonmetricitybarvector_l.
    replace_with_arrays({Nonmetricity(s0,-s1,-s2):Nonmetricity_Sch_ull
    }).applyfunc(lambda item:item.subs(r**2,x**2+y**2+z**2).factor().
    subs(x**2+y**2+z**2,r**2))
Torsionvector_Sch_l=Torsionvector_l.replace_with_arrays({Torsion(s0,-
    s1,-s2):Torsion_Sch_ull}).applyfunc(lambda item:item.subs(r**2,x
    **2+y**2+z**2).factor().subs(x**2+y**2+z**2,r**2))
Vvector_Sch_l=Vvector_l.replace_with_arrays({Nonmetricityvector(-s0):
    Nonmetricityvector_Sch_l, Nonmetricitybarvector(-s0):
    Nonmetricitybarvector_Sch_l, Torsionvector(-s0):
    Torsionvector_Sch_l}).applyfunc(lambda item:item.subs(r**2,x**2+y
    **2+z**2).factor().subs(x**2+y**2+z**2,r**2))
```

Kuvatud lihtsustusskeem, järjestuses r^2 lahtikirjutamine, faktoriseerimine ja r^2 uuesti kokkuvõtmine, võimaldab hoida avaldiste pikkused praktilistena ning see töötab Schwarzschildi meetrika puhul hästi iga suuruse jaoks. Hiljem näeme, et Kerri meetrika puhul sellist lihtsustusskeemi ei leitud käesoleva töö vältel. Täheldame, et kuvatud avaldiste süsteemi kasutades saab suuruste indeksstruktuure muuta ehk indekseid tõsta või langetada, kui uues avaldises defineerida meetrika korrutis juba välja arvutatud suurusega.

Tulemuseks on saadud

$$Q_{\rho\mu\nu} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{mx}{r^3} & -\frac{m\left(x^2-y^2-z^2\right)}{r^4} & -\frac{2mxy}{r^4} & -\frac{2mxz}{r^4} \\ -\frac{m\left(x^2-y^2-z^2\right)}{r^4} & -\frac{mx\left(x^2-2y^2-2z^2\right)}{r^5} & -\frac{my\left(2x^2-y^2-z^2\right)}{r^5} & -\frac{mz\left(2x^2-y^2-z^2\right)}{r^5} \\ -\frac{2mxy}{r^4} & -\frac{my\left(2x^2-y^2-z^2\right)}{r^5} & -\frac{3mxy^2}{r^5} & -\frac{3mxyz}{r^5} \\ -\frac{2mxz}{r^4} & -\frac{mz\left(2x^2-y^2-z^2\right)}{r^5} & -\frac{3mxyz}{r^5} & -\frac{3mxz^2}{r^5} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{my}{r^3} & -\frac{2mxy}{r^4} & \frac{m\left(x^2-y^2+z^2\right)}{r^4} & -\frac{2myz}{r^4} \\ -\frac{2mxy}{r^4} & -\frac{3mx^2y}{r^5} & \frac{mx\left(x^2-2y^2+z^2\right)}{r^5} & -\frac{3mxyz}{r^5} \\ \frac{m\left(x^2-y^2+z^2\right)}{r^4} & \frac{mx\left(x^2-2y^2+z^2\right)}{r^5} & \frac{my\left(2x^2-y^2+2z^2\right)}{r^5} & \frac{mz\left(x^2-2y^2+z^2\right)}{r^5} \\ -\frac{2myz}{r^4} & -\frac{3mxyz}{r^5} & \frac{mz\left(x^2-2y^2+z^2\right)}{r^5} & -\frac{3myz^2}{r^5} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{mz}{r^3} & -\frac{2mxz}{r^4} & -\frac{2myz}{r^4} & \frac{m\left(x^2+y^2-z^2\right)}{r^4} \\ -\frac{2mxz}{r^4} & -\frac{3mx^2z}{r^5} & -\frac{3mxyz}{r^5} & \frac{mx\left(x^2+y^2-2z^2\right)}{r^5} \\ -\frac{2myz}{r^4} & -\frac{3mxyz}{r^5} & -\frac{3my^2z}{r^5} & \frac{my\left(x^2+y^2-2z^2\right)}{r^5} \\ \frac{m\left(x^2+y^2-z^2\right)}{r^4} & \frac{mx\left(x^2+y^2-2z^2\right)}{r^5} & \frac{my\left(x^2+y^2-2z^2\right)}{r^5} & \frac{mz\left(2x^2+2y^2-z^2\right)}{r^5} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \tag{68}$$

$$T^{\rho}{}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \tag{69}$$

$$Q_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_\nu = \begin{bmatrix} \frac{m}{r^2} & \frac{mx}{r^3} & \frac{my}{r^3} & \frac{mz}{r^3} \end{bmatrix}, \tag{70}$$

$$T_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad V_\nu = \begin{bmatrix} -\frac{m}{r^2} & -\frac{mx}{r^3} & -\frac{my}{r^3} & -\frac{mz}{r^3} \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Märkimisväärne on nende tulemuste puhul asjaolu, et väände tensor on võrdne nulliga, mis ongi eeldatud tulemus, sest see sõltub puhtalt üldisest afiinsest seostusest.

Järgnevalt on vajalik defineerida mittemeetrilisuse ja väände konjugaadid, valemid (36) ja (37), ning kovariantsed tuletised neist. Kovariantsed tuletised sisaldavad osatuletisi konjugaatidest, mistõttu tuleb need ka defineerida. Vastavad avaldised mittemeetrilise konjugaadi puhul on defineeritud järgnevalt

```
NonmetricityConjugatePart1_ull=(-Nonmetricity(rho,-mu,-nu)-Rational
    (1,2)*Kronecker(rho,-mu)*Nonmetricityvector(-nu)-Rational(1,2)*
    Kronecker(rho,-nu)*Nonmetricityvector(-mu)-Kronecker(rho,-mu)*
    Torsionvector(-nu)-Kronecker(rho,-nu)*Torsionvector(-mu))
NonmetricityConjugatePart2_ull=-Set_indices3(rho,-mu,-nu)+(+
    Nonmetricity(-mu,-nu,rho)+Nonmetricity(-nu,-mu,rho)+g(-mu,-nu)*
    Vvector(rho)+Torsion(-mu,-nu,rho)+Torsion(-nu,-mu,rho))
NonmetricityConjugate_ull=Rational(1,4)*(NonmetricityConjugatePart1(
    rho,-mu,-nu)+NonmetricityConjugatePart2(rho,-mu,-nu))
dNonmetricityConjugate_ulll=PartialDerivative(NonmetricityConjugate(
    alpha, -mu, -nu),coord(sigma))
NablaNonmetricityConjugate_ulll = dNonmetricityConjugate_4(alpha, -
    mu, -nu, -alpha)+Gamma(alpha,-alpha,-rho)*NonmetricityConjugate(
    rho, -mu, -nu)-Gamma(rho,-alpha,-mu)*NonmetricityConjugate(alpha,
    -rho, -nu)-Gamma(rho,-alpha,-nu)*NonmetricityConjugate(alpha, -mu,
     -rho)
```

Konjugaatide näol on tegemist pikkade valemitega, mida on mitmes osas lihtsam hoomata ning vajadusel tõlgendada. Tulemus on mittemeetrilisuse konjugaadiga seonduva suuruse jaoks järgnev:

$$\nabla_\alpha P^{\alpha\mu}{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{72}$$

Väände konjugaat ning sellega seonduvad suurused on defineeritud järgnevalt

```
TorsionConjugatePart1_luu=-Set_indices3(-rho,mu,nu)+(Nonmetricity(mu,
    nu,-rho)-Nonmetricity(nu,mu,-rho)-Torsion(mu,nu,-rho)+Torsion(nu,
    mu,-rho))
TorsionConjugatePart2_luu=-Set_indices3(-rho,mu,nu)+(Kronecker(mu,-
    rho)*Vvector(nu)-Kronecker(nu,-rho)*Vvector(mu)+Torsion(-rho,mu,nu
    ))
TorsionConjugate_luu=-Set_indices3(-rho,mu,nu)-Rational(1,4)*(
    TorsionConjugatePart1(-rho,mu,nu)+TorsionConjugatePart2(-rho,mu,nu
    ))
dTorsionConjugate_luul=PartialDerivative(TorsionConjugate(-alpha, mu,
     nu),coord(sigma))
NablaTorsionConjugate_luul = dTorsionConjugate_4(-alpha, mu, nu, -mu
    )-Gamma(rho,-mu,-alpha)*TorsionConjugate(-rho, mu, nu)+Gamma(mu,-
    mu,-rho)*TorsionConjugate(-alpha, rho, nu)+Gamma(nu,-mu,-rho)*
    TorsionConjugate(-alpha, mu, rho)
```

ning tulemused on

$$S_{\rho}{}^{\mu\nu} = \left[\begin{bmatrix} 0 & \frac{mx}{2r^3} & \frac{my}{2r^3} & \frac{mz}{2r^3} \\ -\frac{mx}{2r^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{my}{2r^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mz}{2r^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{mx^2}{2r^4} & \frac{mxy}{2r^4} & \frac{mxz}{2r^4} \\ -\frac{mx^2}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mxy}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mxz}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{mxy}{2r^4} & \frac{my^2}{2r^4} & \frac{myz}{2r^4} \\ -\frac{mxy}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{my^2}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{myz}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{mxz}{2r^4} & \frac{myz}{2r^4} & \frac{mz^2}{2r^4} \\ -\frac{mxz}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{myz}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mz^2}{2r^4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right] \tag{73}$$

ja

$$\nabla_{\mu} S_{\alpha}{}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{74}$$

Sellega on saadud arvutuslikud tulemused konjugaatidele ning nendega seonduvatele suurustele.

3.3 Lagranžiaani ja liikumisvõrrandite defineerimine Schwarzschildi meetrikas

Järgnevalt on tarvis defineerida lagranžiaan ning osatuletis sellest meetrika järgi ehk valemid (35) ja (100) vastavalt. Definitsioonide avaldised näevad programmis välja järgnevalt

```
LagrangianG = Rational(1,2)*(Nonmetricity(-rho,mu,nu)*
    NonmetricityConjugate(rho,-mu,-nu)+Torsion(rho,-mu,-nu)*
    TorsionConjugate(-rho,mu,nu))
LagrangianGg_ll = Rational(1,2)*(Nonmetricity(-rho,mu,nu)*
    NonmetricityConjugate(rho,-mu,-nu)*g(-mu,-nu)+Torsion(rho,-mu,-nu)
    *TorsionConjugate(-rho,mu,nu)*g(-mu,-nu))
```

```
d_g_uu_LagrangianG_Part1=Rational(1,4)*Nonmetricity(-nu, alpha, beta)
    *NonmetricityConjugate(-mu, -alpha, -beta)+Rational(1,4)*
    Nonmetricity(-mu, alpha, beta)*NonmetricityConjugate(-nu, -alpha,
    -beta)-Rational(1,4)*Torsion(-mu, -alpha, -beta)*TorsionConjugate
    (-nu, alpha, beta)-Rational(1,4)*Torsion(-nu, -alpha, -beta)*
    TorsionConjugate(-mu, alpha, beta)
d_g_uu_LagrangianG_Part2=-Rational(1,2)*Nonmetricity(-alpha, -beta, -
    mu)*NonmetricityConjugate(alpha, beta, -nu)-Rational(1,2)*
    Nonmetricity(-alpha, -beta, -nu)*NonmetricityConjugate(alpha, beta
    , -mu)+Rational(1,2)*Torsion(alpha, -beta, -nu)*TorsionConjugate(-
    alpha, beta, -mu)+Rational(1,2)*Torsion(alpha, -beta, -mu)*
    TorsionConjugate(-alpha, beta, -nu)
d_g_uu_LagrangianG = dgLagrangianGPart1(-mu,-nu)+dgLagrangianGPart2(-
    mu,-nu)
```

Asendades eelnevalt välja arvutatud suurused avaldistesse saab oodatud tulemused

$$L_G = 0, \tag{75}$$

$$L_G g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{76}$$

ja

$$\frac{\partial L_G}{\partial g^{\mu\nu}} = \begin{bmatrix} -\frac{m^2}{2r^4} & -\frac{m^2 x}{2r^5} & -\frac{m^2 y}{2r^5} & -\frac{m^2 z}{2r^5} \\ -\frac{m^2 x}{2r^5} & -\frac{m^2 x^2}{2r^6} & -\frac{m^2 xy}{2r^6} & -\frac{m^2 xz}{2r^6} \\ -\frac{m^2 y}{2r^5} & -\frac{m^2 xy}{2r^6} & -\frac{m^2 y^2}{2r^6} & -\frac{m^2 yz}{2r^6} \\ -\frac{m^2 z}{2r^5} & -\frac{m^2 xz}{2r^6} & -\frac{m^2 yz}{2r^6} & -\frac{m^2 z^2}{2r^6} \end{bmatrix}. \tag{77}$$

Lagranžiaaniga seotud suurusi kasutades saab välja arvutada meetrilise ja kanoonilise energia tensorid ehk valemid (47) ja (48). Programmis on need defineeritud kujul

```
MetricEnergy_ul=InertialEnergy_ul+Torsion(mu,-alpha,-beta)*
    TorsionConjugate(-nu,alpha,beta)
InertialEnergy_ul=-Set_indices2(mu,-nu)+Kronecker(mu,-nu)*LagrangianG
    -Nonmetricity(-nu,alpha,beta)*NonmetricityConjugate(mu,-alpha,-
    beta)-2*Torsion(alpha,-beta,-nu)*TorsionConjugate(-alpha,beta,mu)
```

ning tulemused on

$${G^\mu}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{78}$$

ja

$$t^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{79}$$

Sellega on näidatud, et Schwarzschildi meetrikas defineeritud üldine afiinne seostus on kanooniline. Järgmise sammuna on vajalik kontrollida võrrandite (39) ja (40) kehtivust. Selleks on defineeritud vastavate võrrandite põhjal avaldised

$$E_M = 2\left(\nabla_\alpha + T_\alpha + \frac{1}{2}Q_\alpha\right) P^{\alpha}{}_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}L + 2\frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} \tag{80}$$

ja

$$E_C = \left(\nabla_\mu + T_\mu + \frac{1}{2}Q_\mu\right)\left(S_\alpha{}^{\mu\nu} - P^{\mu\nu}{}_\alpha\right). \tag{81}$$

Avaldised on programmis defineeritud järgnevalt

```
MetricEq_ll=-Set_indices2(-mu,-nu)+2*NablaNonmetricityConjugate_2(-mu
    ,-nu)+2*NonmetricityConjugate(alpha, -mu, -nu)*Torsionvector(-
    alpha)+NonmetricityConjugate(alpha, -mu, -nu)*Nonmetricityvector(-
    alpha)-LGg(-mu,-nu)+2*dgLagrangianG(-mu,-nu)
ConnectionEq_ul=NablaTorsionConjugate_2(-alpha,nu)-
    NablaNonmetricityConjugate_2(nu,-alpha)+(TorsionConjugate(-alpha,
    mu, nu)-NonmetricityConjugate(mu, nu, -alpha))*Torsionvector(-mu)+
    Rational(1,2)*(TorsionConjugate(-alpha, mu, nu)-
    NonmetricityConjugate(mu, nu, -alpha))*Nonmetricityvector(-mu)
```

ning võrrandite (80) ja (81) tulemused on

$$E_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{82}$$

ja

$$E_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{83}$$

On näha, et Schwarzschildi meetrika puhul tulemused tõepoolest sobivad, mistõttu saab väita, et kirjutatud programm on korrektne. Täheldame, et defineeritud võrrand (80) ei sisalda energia-impulsi tensorit. Sellest lähtuvalt peab vastav võrrand valemi (39) näol andma tulemuseks energia-impulsi tensori. See aga kehtib, sest saadud lagranžiaan on samuti võrdne nulliga.

3.4 Suletud ruumala energia avaldamine Schwarzschildi meetrikas

Viimase sammuna on tarvis välja arvutada laengud kvaasi-lokaalse integraaliga (56). Selle avaldamiseks on vaja esmalt arvutada väljatugevusetensor. Seda saab teha järgnevate definitsioonidega

```
FieldTensor_luu = -Set_indices3a(-a,alpha, mu)+2*TorsionConjugate(-nu
    , alpha, mu)*Lmatrixinv(-a, nu)
FieldTensorVector_u = Fvector(mu)
FieldTensor_Sch_luu=FieldTensor_luu.replace_with_arrays({
    Set_indices3a(-a0,s1, s2):set_indices3, TorsionConjugate(-nu,
    alpha, mu):TorsionConjugate_Sch_luu, Lmatrixinv(-a, nu):
    Lmatrixinv_Sch_Lu})
FieldTensorVector_Sch_u = FieldTensorVector_u.replace_with_arrays({
    Fvector(mu):FieldTensor_Sch_luu[0,0,:]})
FieldScalarComp = FieldvectorComp*unit_normal_scalar
```

Täheldame, et $\sqrt{-g} = 1$ käesoleva arvutuskäigu vältel, mistõttu jäeti see avaldisest ära. Tulemusteks on

$$F_a{}^{0\mu} = \left[\begin{bmatrix} 0 & \frac{mx}{r^3} & \frac{my}{r^3} & \frac{mz}{r^3} \\ -\frac{mx}{r^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{my}{r^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mz}{r^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{mx^2}{r^4} & \frac{mxy}{r^4} & \frac{mxz}{r^4} \\ -\frac{mx^2}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mxy}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mxz}{r^4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{mxy}{r^4} & \frac{my^2}{r^4} & \frac{myz}{r^4} \\ -\frac{mxy}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{my^2}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{myz}{r^4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{mxz}{r^4} & \frac{myz}{r^4} & \frac{mz^2}{r^4} \\ -\frac{mxz}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{myz}{r^4} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{mz^2}{r^4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right], \tag{84}$$

ning tuletatud vektorid arvutatud tensorist on järgnevad

$$F_0{}^{0\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{mx}{r^3} & \frac{my}{r^3} & \frac{mz}{r^3} \end{bmatrix}, \tag{85}$$

$$F_1{}^{0\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{mx^2}{r^4} & \frac{mxy}{r^4} & \frac{mxz}{r^4} \end{bmatrix}, \tag{86}$$

$$F_2{}^{0\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{mxy}{r^4} & \frac{my^2}{r^4} & \frac{myz}{r^4} \end{bmatrix} \tag{87}$$

ja

$$F_3{}^{0\mu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{mxz}{r^4} & \frac{myz}{r^4} & \frac{mz^2}{r^4} \end{bmatrix}. \tag{88}$$

Siinkohal tuleb arvestada, et oleme Cartesiuse koordinaatsüsteemis, mis tähendab, et on võimalik integreerimisel kasutada kolmemõõtmelise kuubi analoogi. Olgu massiga objekt kuubi keskel. Sellisel juhul saab vastavad laengud tuletada integreerides üle kuue kuubi tahu ehk saab defineerida kuus vastavat pindintegraali. Siinkohal on kasutusele võetud SciPy teegi funktsioon `dblquad`, mis võimaldab integraalile läheneda numbrilise meetodiga. Probleemiks osutub aga asjaolu, et SciPy ei suuda tõlgendada SymPy raames defineeritud funktsioone. Lahendus sellele probleemile peitub SymPy teegile sisse ehitatud funktsioonis `lambdify`, mis võimaldab interpreteerida SymPy funktsioone teistes süntaksites. Nii saab kasutades mooduli nimetust `'scipy'` lambdify funktsioonis defineeritud võrrandit lahendada kasutades SciPy süntaksit ning sellega seotud funktsioone. Samuti on tarvis defineerida kuus erinevat ühiknormaalvektorit, millest igaüks vastab ühele kuubiku tahule. Programmi koodina näeb kirjeldatud protseduur ja vastavad funktsioonid välja järgnevad

```
n1 = ImmutableDenseNDimArray([0,1,0,0])
n2 = ImmutableDenseNDimArray([0,-1,0,0])
n3 = ImmutableDenseNDimArray([0,0,1,0])
n4 = ImmutableDenseNDimArray([0,0,-1,0])
n5 = ImmutableDenseNDimArray([0,0,0,1])
n6 = ImmutableDenseNDimArray([0,0,0,-1])
def UnitNormalSch(FTV, n1, n2, n3, n4, n5, n6, length):
  FieldScalar_Sch_1 = FieldScalarComp.subs([(FieldvectorComp, FTV[1])
      ,(unit_normal_scalar,n1[1])]).subs(r**2,x**2+y**2+z**2).subs(x,
      length)
  FieldScalar_Sch_2 = FieldScalarComp.subs([(FieldvectorComp, FTV[1])
      ,(unit_normal_scalar,n2[1])]).subs(r**2,x**2+y**2+z**2).subs(x,-
      length)
  FieldScalar_Sch_3 = FieldScalarComp.subs([(FieldvectorComp, FTV[2])
      ,(unit_normal_scalar,n3[2])]).subs(r**2,x**2+y**2+z**2).subs(y,
      length)
  FieldScalar_Sch_4 = FieldScalarComp.subs([(FieldvectorComp, FTV[2])
      ,(unit_normal_scalar,n4[2])]).subs(r**2,x**2+y**2+z**2).subs(y,-
      length)
  FieldScalar_Sch_5 = FieldScalarComp.subs([(FieldvectorComp, FTV[3])
      ,(unit_normal_scalar,n5[3])]).subs(r**2,x**2+y**2+z**2).subs(z,
      length)
  FieldScalar_Sch_6 = FieldScalarComp.subs([(FieldvectorComp, FTV[3])
      ,(unit_normal_scalar,n6[3])]).subs(r**2,x**2+y**2+z**2).subs(z,-
      length)
  FieldScalarInt_Sch1_int1 = Integral(FieldScalar_Sch_1, (y, -length,
       length), (z, -length, length))
```

```
  FieldScalarInt_Sch2_int1 = Integral(FieldScalar_Sch_2, (y, -length,
      length), (z, -length, length))
  FieldScalarInt_Sch3_int1 = Integral(FieldScalar_Sch_3, (x, -length,
      length), (z, -length, length))
  FieldScalarInt_Sch4_int1 = Integral(FieldScalar_Sch_4, (x, -length,
      length), (z, -length, length))
  FieldScalarInt_Sch5_int1 = Integral(FieldScalar_Sch_5, (x, -length,
      length), (y, -length, length))
  FieldScalarInt_Sch6_int1 = Integral(FieldScalar_Sch_6, (x, -length,
      length), (y, -length, length))
  return FieldScalar_Sch_1, FieldScalar_Sch_2, FieldScalar_Sch_3,
     FieldScalar_Sch_4, FieldScalar_Sch_5, FieldScalar_Sch_6
ChargeIntegralSch = UnitNormalSch(FieldTensorVector_Sch_u0, n1, n2,
   n3, n4, n5, n6, length)
f_num1 = lambdify((y, z), ChargeIntegralSch[0].subs(m,1), 'numpy')
f_num2 = lambdify((y, z), ChargeIntegralSch[1].subs(m,1), 'numpy')
f_num3 = lambdify((x, z), ChargeIntegralSch[2].subs(m,1), 'numpy')
f_num4 = lambdify((x, z), ChargeIntegralSch[3].subs(m,1), 'numpy')
f_num5 = lambdify((x, y), ChargeIntegralSch[4].subs(m,1), 'numpy')
f_num6 = lambdify((x, y), ChargeIntegralSch[5].subs(m,1), 'numpy')
x_lower, x_upper = -float(length), float(length)
y_lower, y_upper = -float(length), float(length)
result1, error1 = dblquad(f_num1, x_lower, x_upper, lambda y: y_lower
    , lambda y: y_upper)
result2, error2 = dblquad(f_num2, x_lower, x_upper, lambda y: y_lower
    , lambda y: y_upper)
result3, error3 = dblquad(f_num3, x_lower, x_upper, lambda y: y_lower
    , lambda y: y_upper)
result4, error4 = dblquad(f_num4, x_lower, x_upper, lambda y: y_lower
    , lambda y: y_upper)
result5, error5 = dblquad(f_num5, x_lower, x_upper, lambda y: y_lower
    , lambda y: y_upper)
result6, error6 = dblquad(f_num6, x_lower, x_upper, lambda y: y_lower
    , lambda y: y_upper)
resultsum = result1+result2+result3+result4+result5+result6
```

Kuus normaalvektorit on defineeritud selleks, et katta iga kuubiku tahu suund Cartesiuse koordinaatsüsteemis. Nii saab kolm integraalavaldist, mille puhul igas tuleb fikseerida vastava koordinaattelje väärtus olenevalt kuubi külje pikkusest p. Oletades, et tsentraalne mass asub koordinaatide algpunktis siis järelikult tuleb vastavate koordinaattelgede väärtused fikseerida punktides $+p/2$ ja $-p/2$ nii, et pindintegraal oleks vastava teljepunktiga risti. Kolm integraali on järgnevad

$$C_{0x} = \frac{1}{4\pi} \iint_{-p/2}^{p/2} \frac{pm}{(y^2 + z^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dydz \tag{89}$$

$$C_{0y} = \frac{1}{4\pi} \iint_{-p/2}^{p/2} \frac{pm}{(x^2 + z^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dxdz \tag{90}$$

$$C_{0z} = \frac{1}{4\pi} \iint_{-p/2}^{p/2} \frac{pm}{(x^2 + y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy. \tag{91}$$

Liites kõik kuus pindintegraali tulemust kokku saab tulemuseks juhul kui $p = 1$

$$C_0 = 0.9999999999999999m \approx E. \tag{92}$$

Teiste küljepikkuste juures näevad tulemused välja järgnevad

p	C_0/m
2	0.9999999999999999
3	0.9999999999999996
4	1.0000000000000002
5	1.0000000000000002

Täheldame, et arvutustulemuste viimane komakoht näitab numbrilise integreerimise funktsiooni `dblquad` arvutustäpsust. Tulemus on jääv erinevate kuubi külje pikkuste juures. See tähendab, et tulemus on korrektne ehk kuubis olev energia on ekvivalentne kuubis oleva massiga $E = m$.

4 Arvutused ja tulemused Kerri meetrika jaoks

Käesolevas peatükis üldistame eelnevas peatükis kasutatud koodi, kuid seda uuesti ei trükita.

4.1 Kerri meetrika geomeetrilised tulemused

Olgu Kerri meetriline tensor, mis on defineeritud valemiga (61). Meetriline tensor näeb välja järgnev

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} f-1 & f\ell_x & f\ell_y & f\ell_z \\ f\ell_x & f\ell_x^2+1 & f\ell_x\ell_y & f\ell_x\ell_z \\ f\ell_y & f\ell_x\ell_y & f\ell_y^2+1 & f\ell_y\ell_z \\ f\ell_z & f\ell_x\ell_z & f\ell_y\ell_z & f\ell_z^2+1 \end{bmatrix}. \tag{93}$$

Täheldame, et tensor on arvutuste lihtsustamiseks defineeritud läbi $f(x,y,z)$ (63) funktsioonide ning ℓ-vektori (64) komponentide. Kerri meetrika ℓ-vektorid on defineeritud kujul

$$\ell_\mu = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho x+ay}{\rho^2+a^2} & \frac{\rho y-ax}{\rho^2+a^2} & \frac{z}{\rho} \end{bmatrix} \tag{94}$$

ja

$$\ell^\mu = \begin{bmatrix} -1 & \frac{\rho x+ay}{\rho^2+a^2} & \frac{\rho y-ax}{\rho^2+a^2} & \frac{z}{\rho} \end{bmatrix}. \tag{95}$$

Raamivalik ei muutu, sest võrrandite kehtivus leidis kinnitust, mistõttu ühikmaatriks raamina toimib nii Schwarzschildi kui ka Kerri meetrika korral. Samuti veenduti, et üldine afiinne seostus (67) ja kõverustensor (21) oleksid võrdelised nulliga. Mittemeetrilisuse tensori $Q_{\rho\mu\nu}$ arvutustulemus Kerri meetrika puhul on pikk avaldiste kombinatsioon ℓ-vektori komponentidest, $f(x,y,z)$ funktsioonist ning nende osatuletistest. Täheldame, et mittemeetrilisuse tensori tulemus on antud juhul ekvivalentne osatuletisega meetrikast. Tulemus on järgnev:

$$Q_{\rho\mu\nu} = \left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}\right]\\ \left[\begin{matrix}f_{,x} & f\ell_{x,x} + f_{,x}\ell_x & f\ell_{y,x} + f_{,x}\ell_y & f\ell_{z,x} + f_{,x}\ell_z\\ f\ell_{x,x} + f_{,x}\ell_x & 2f\ell_x\ell_{x,x} + f_{,x}\ell_x^2 & f\ell_x\ell_{y,x} + f\ell_y\ell_{x,x} + f_{,x}\ell_x\ell_y & f\ell_x\ell_{z,x} + f\ell_z\ell_{x,x} + f_{,x}\ell_x\ell_z\\ f\ell_{y,x} + f_{,x}\ell_y & f\ell_x\ell_{y,x} + f\ell_y\ell_{x,x} + f_{,x}\ell_x\ell_y & 2f\ell_y\ell_{y,x} + f_{,x}\ell_y^2 & f\ell_y\ell_{z,x} + f\ell_z\ell_{y,x} + f_{,x}\ell_y\ell_z\\ f\ell_{z,x} + f_{,x}\ell_z & f\ell_x\ell_{z,x} + f\ell_z\ell_{x,x} + f_{,x}\ell_x\ell_z & f\ell_y\ell_{z,x} + f\ell_z\ell_{y,x} + f_{,x}\ell_y\ell_z & 2f\ell_z\ell_{z,x} + f_{,x}\ell_z^2\end{matrix}\right]\\ \left[\begin{matrix}f_{,y} & f\ell_{x,y} + f_{,y}\ell_x & f\ell_{y,y} + f_{,y}\ell_y & f\ell_{z,y} + f_{,y}\ell_z\\ f\ell_{x,y} + f_{,y}\ell_x & 2f\ell_x\ell_{x,y} + f_{,y}\ell_x^2 & f\ell_x\ell_{y,y} + f\ell_y\ell_{x,y} + f_{,y}\ell_x\ell_y & f\ell_x\ell_{z,y} + f\ell_z\ell_{x,y} + f_{,y}\ell_x\ell_z\\ f\ell_{y,y} + f_{,y}\ell_y & f\ell_x\ell_{y,y} + f\ell_y\ell_{x,y} + f_{,y}\ell_x\ell_y & 2f\ell_y\ell_{y,y} + f_{,y}\ell_y^2 & f\ell_y\ell_{z,y} + f\ell_z\ell_{y,y} + f_{,y}\ell_y\ell_z\\ f\ell_{z,y} + f_{,y}\ell_z & f\ell_x\ell_{z,y} + f\ell_z\ell_{x,y} + f_{,y}\ell_x\ell_z & f\ell_y\ell_{z,y} + f\ell_z\ell_{y,y} + f_{,y}\ell_y\ell_z & 2f\ell_z\ell_{z,y} + f_{,y}\ell_z^2\end{matrix}\right]\\ \left[\begin{matrix}f_{,z} & f\ell_{x,z} + f_{,z}\ell_x & f\ell_{y,z} + f_{,z}\ell_y & f\ell_{z,z} + f_{,z}\ell_z\\ f\ell_{x,z} + f_{,z}\ell_x & 2f\ell_x\ell_{x,z} + f_{,z}\ell_x^2 & f\ell_x\ell_{y,z} + f\ell_y\ell_{x,z} + f_{,z}\ell_x\ell_y & f\ell_x\ell_{z,z} + f\ell_z\ell_{x,z} + f_{,z}\ell_x\ell_z\\ f\ell_{y,z} + f_{,z}\ell_y & f\ell_x\ell_{y,z} + f\ell_y\ell_{x,z} + f_{,z}\ell_x\ell_y & 2f\ell_y\ell_{y,z} + f_{,z}\ell_y^2 & f\ell_y\ell_{z,z} + f\ell_z\ell_{y,z} + f_{,z}\ell_y\ell_z\\ f\ell_{z,z} + f_{,z}\ell_z & f\ell_x\ell_{z,z} + f\ell_z\ell_{x,z} + f_{,z}\ell_x\ell_z & f\ell_y\ell_{z,z} + f\ell_z\ell_{y,z} + f_{,z}\ell_y\ell_z & 2f\ell_z\ell_{z,z} + f_{,z}\ell_z^2\end{matrix}\right]\end{matrix}\right]. \tag{96}$$

Koordinaadi tähise ees olev koma väljendab vastava koordinaadi järgi võetud osatuletist.Väände tensor $T^{\rho}{}_{\mu\nu}$ on arvutuslikult jällegi võrdne nulliga nii nagu oodatud. Vastavate vektorite arvutustulemused on samuti kombinatsioon eelnimetatud liikmetest. Siinkohal tuleb aga arvestada, et saadud avaldised on pikad ning suhteliselt keerulised, mistõttu muutub tulemuste analüütiline arvutamine praktiliselt keeruliseks ning väga ajamahukaks. Sellest lähtuvalt jäetakse konjugaatide, vastavalt võrrandite (36) ja (37), tulemused kuvamata. Antud probleeme võimaldab lahendada numbriliste lahenduste meetod. Seda saab teha andes kasutusel olevatele parameetritele x, y, z, a ja m suvalised väärtused, asendades vastavad väärtused avaldisse ning lõpuks kasutades SymPy funktsiooni `evalf()`, mis võimaldab programmil hinnata avaldise kui funktsiooni arvulist väärtust. Kui avaldise väärtus on ujukomaarv arvutustäpsuse piires väga väike siis võib tulemuse lugeda nulliks. Tähelepanu tuleb pöörata asjaolule, et osatuletiste hindamiseks on vaja analüütilisi suurusi. Sellest lähtuvalt on väände ja mittemeetrilisuse konjugaadi kovariantsed tuletised numbriliselt järgnevad

$$\nabla_\mu S_\alpha{}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{97}$$

ja

$$
\nabla_\alpha P^{\alpha\mu}{}_\nu \approx \begin{bmatrix} -2.1684\cdot 10^{-19} & -1.0842\cdot 10^{-19} & 5.421\cdot 10^{-20} & -5.3463\cdot 10^{-20} \\ -5.421\cdot 10^{-20} & 6.7763\cdot 10^{-21} & -1.6263\cdot 10^{-19} & 2.3039\cdot 10^{-19} \\ 1.0842\cdot 10^{-19} & 1.0842\cdot 10^{-19} & 8.8091\cdot 10^{-20} & 1.0842\cdot 10^{-19} \\ 2.7515\cdot 10^{-20} & 1.7618\cdot 10^{-19} & -1.3553\cdot 10^{-19} & 8.1315\cdot 10^{-20} \end{bmatrix}
$$

$$
\approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{98}
$$

4.2 Energiatensorid Kerri meetrikas

Järgmise sammuna saab eelnevatest suurustest moodustada lagranžiaani ja sellega seonduvad suurused. Numbrilised tulemused lagranžiaanile ja osatuletis lagranžiaanist meetrilise tensori järgi on

$$
L_G \approx -2.7105\cdot 10^{-20} \approx 0, \tag{99}
$$

ja

$$
\frac{\partial L_G}{\partial g^{\mu\nu}} \approx \begin{bmatrix} 0.0001 & 8.0179\cdot 10^{-5} & 1.1141\cdot 10^{-5} & 0.0001 \\ 8.0179\cdot 10^{-5} & 4.749\cdot 10^{-5} & 6.599\cdot 10^{-6} & 6.4262\cdot 10^{-5} \\ 1.1141\cdot 10^{-5} & 6.599\cdot 10^{-6} & 9.1693\cdot 10^{-7} & 8.9292\cdot 10^{-6} \\ 0.0001 & 6.4262\cdot 10^{-5} & 8.9292\cdot 10^{-6} & 8.6953\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}. \tag{100}
$$

Pöörame tähelepanu asjaolule, et tulemus (100) ei ole võrdne nulliga. Lagranžiaaniga seotud suurusi kasutades saab välja arvutada meetrilise ja kanoonilise energia tensori ehk valemid (47) ja (48) vastavalt

$$
G^\mu{}_\nu \approx \begin{bmatrix} -2.4252\cdot 10^{-21} & 8.5238\cdot 10^{-20} & -1.4851\cdot 10^{-19} & 6.8307\cdot 10^{-20} \\ 0 & -5.1222\cdot 10^{-21} & 1.2824\cdot 10^{-19} & 5.597\cdot 10^{-21} \\ 0 & 7.1847\cdot 10^{-20} & 8.7449\cdot 10^{-20} & 2.1579\cdot 10^{-19} \\ 0 & -1.697\cdot 10^{-19} & -2.1856\cdot 10^{-20} & 9.8365\cdot 10^{-20} \end{bmatrix}
$$

$$
\approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{101}
$$

ja

$$t^{\mu}{}_{\nu} \approx \begin{bmatrix} -2.4252\cdot 10^{-21} & 8.5238\cdot 10^{-20} & -1.4851\cdot 10^{-19} & 6.8307\cdot 10^{-20} \\ 0 & -5.1222\cdot 10^{-21} & 1.2824\cdot 10^{-19} & 5.597\cdot 10^{-21} \\ 0 & 7.1847\cdot 10^{-20} & 8.7449\cdot 10^{-20} & 2.1579\cdot 10^{-19} \\ 0 & -1.697\cdot 10^{-19} & -2.1856\cdot 10^{-20} & 9.8365\cdot 10^{-20} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{102}$$

Tõepoolest, ka Kerri meetrika on Kerri-Schildi koordinaatides käesoleva arvutuskäigu raames kanooniline (53). Sellega on magistritöö sekundaarne hüpotees, et Kerri-Schildi koordinaatides kanoonilise energia tensor on võrdne nulliga juhul kui arvutatud üldine afiinne seostus on samuti võrdne nulliga, kinnitust leidnud.

Järgmise sammuna on vajalik kontrollida ka võrrandite (39) ja (40) kehtivust Kerri meetrikas ning selleks arvutame taaskord numbrilised tulemused võrranditele (80) ja (81). Tulemused on

$$E_M \approx \begin{bmatrix} 5.15\cdot 10^{-19} & 3.2526\cdot 10^{-19} & -2.0668\cdot 10^{-19} & 2.7105\cdot 10^{-20} \\ 3.2526\cdot 10^{-19} & -1.3553\cdot 10^{-20} & -9.3174\cdot 10^{-20} & 1.2197\cdot 10^{-19} \\ -2.0668\cdot 10^{-19} & -9.3174\cdot 10^{-20} & 1.0588\cdot 10^{-21} & -1.0503\cdot 10^{-19} \\ 2.7105\cdot 10^{-20} & 1.2197\cdot 10^{-19} & -1.0503\cdot 10^{-19} & 5.9631\cdot 10^{-19} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{103}$$

ja

$$E_C \approx \begin{bmatrix} 1.0683\cdot 10^{-19} & 1.5351\cdot 10^{-19} & -6.6124\cdot 10^{-20} & -6.0746\cdot 10^{-20} \\ -3.806\cdot 10^{-20} & -8.3631\cdot 10^{-21} & 7.1428\cdot 10^{-20} & -3.3258\cdot 10^{-19} \\ -1.0709\cdot 10^{-19} & -1.9601\cdot 10^{-19} & 2.057\cdot 10^{-20} & 4.0693\cdot 10^{-21} \\ 8.0534\cdot 10^{-20} & -1.6609\cdot 10^{-19} & 9.1859\cdot 10^{-20} & -2.0497\cdot 10^{-19} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{104}$$

Sellega on tekkinud veendumus, et võrrandid (80) ja (81) kehtivad ka Kerri meetrika korral.

Viimase sammuna arvutatakse välja energia valemi (56) põhjal järgides alapeatükis 3.4 kasutatud metoodikat. Tähelepanu nõuab teadmine, et numbrilise integreerimise tarbeks on vaja säilitada koordinaadid analüütiliselt, mistõttu arvutustes kasutatud suurusi ei tohi numbriliselt hinnata. Vastav arvutus on läbi viidud parameeter a väärtustega vahemikus $a \in 0 \ldots 5$. Erinevate parameeter a väärtustega on tulemused järgnevad:

a	C_0/m
0	1.000000000000002
1	1.0000000000000018
2	1.0
3	1.0000000000000009
4	1.000000000000001
5	1.000000000000001

Tõepoolest on Kerri meetrika puhul kvaasi-lokaalse arvutuskäigu tulemuseks iga parameeter a väärtuse juures $C_0 = E = m$. Tabelis nähaolevad kõrvalekalded tulenevad jällegi ujukomaarvu arvutusveast numbrilisel integreerimisel. Täheldame, et kuubi küljepikkuse muutmisel tulemus muutub samuti arvutusvea piires. Sellega on varasemalt publitseeritud globaalse integraali tulemus [21] kooskõlas käesolevas töös tehtud arvutusega. Sellest lähtuvalt on magistritöö primaarne hüpotees leidnud kinnitust.

5 Kokkuvõte

Käesoleva magistritöö raames on arendatud välja Pythoni teegil SymPy põhinev tööleht [20], mis võimaldab läbi viia tensorarvutusi üldise teleparalleelse üldrelatiivsusteooria ekvivalendi raamistikus. Töös kirjeldati üldrelatiivsusteooria ning teleparallelismi geomeetrilist tausta, mille käigus defineeriti meetriline tensor, üldine afiinne seostus, afiinse seostuse komponendid ning kõverustensor. Seejuures märkimisväärne on teleparallelismi tingimus, millega on vaja arvestada teleparalleelse geomeetria defineerimisel. Järgnevalt tutvustati teooria füüsikalist tausta, mille raames alustati vastava mõjufunktsionaaliga. Seejärel defineeriti lagranžiaan, väände ja mittemeetrilisuse konjugaadid ning väljavõrrandid. Defineeritud suurusi kasutades avaldati meetrilise ja kanoonilise energia tensorid, mis kinnitavad teooria korrektset käsitlust. Seejärel on kirjeldatud aegruumi energia saamiseks vajamineva integraali tuletuskäiku. Lõpuks tutvustati Kerri meetrika avastuslugu ning joonelemendi avaldist.

Pärast töös vajamineva tausta tutvustamist asuti võrrandite kontrolliks ja lugejale selgitamiseks Schwarzschildi meetrika põhjal avaldiste defineerimise juurde. Selle juures tutvustati SymPy alamteegi `sympy.tensor` süntaksit ning erinevaid vajaminevaid funktsioone. Samuti kuvati arvutuste tulemused avaldiste korrektsuse kontrollimiseks. Järgnevalt viidi läbi samad arvutused ka Kerri meetrika jaoks ning kuvati tulemused.

Nii Schwarzschildi kui ka Kerri meetrika puhul tuli Kerri-Schildi koordinaatides ja nullile vastavas afiinse seostuse raamis kanoonilise energia tensori väärtuseks null, mis võimaldab uurida aegruumi energiat nii, et inertsi mõju on neutraliseeritud, mistõttu väljavõrrandid lähevad lihtsale kujule (54). Sellega on töö sekundaarne hüpotees leidnud kinnitust. Integreerides valemi (54) vasakut poolt ja kasutades divergentsi teoreemi, saadi aegruumi energia tulemuseks mõlema meetrika puhul tulemuseks $E = m$ sõltumata kuubilise integreerimisruumala küljepikkusest ning impulsimomendi parameetrist a. Antud tulemus on kooskõlas varasemalt publitseeritud globaalse tulemusega [21], mistõttu võib ka töö primaarse hüpoteesi lugeda kinnitatuks. Seega käesolevas töös saadud tulemus üldistab varasemalt publitseeritud tulemust. Tulemuse kontrolliks tuleks töö jätkamisel arvutada massi ümbritsevat integraali ka teiste integreerimisruumala geomeetriate korral. Samuti on vajalik kontrollida, et juhul, kui mass asub defineeritud integraali piirkonnast väljaspool, siis tulemuseks tuleb null. Seejärel saab töö tulemused vormistada teadusartiklis. Pikemas perspektiivis oleks huvitav sama meetodiga uurida ka teisi aegruumi geomeetriaid, nagu näiteks Universumit tervikuna, gravitatsioonilaineid ja mitmesuguseid eksootilisi lahendeid.

Ühtlasi annavad töös läbiviidud arvutused ka kinnituse SymPy kui võimsa matemaatilise tööriista võimekuse osas. Töös käsitletud temaatika ning arendatud tarkvara on tuleviku suhtes perspektiivikad. SymPy on tasuta avatud lähtekoodiga tarkvara ning koos vastava töös demonstreeritud võimekusega võib tarkvara leida tulevikus laialdasemat kasutust teoreetilises füüsikas.

Tänuavaldused

Magistritöö autor soovib tänada oma juhendajaid professionaalse ja vastutuleliku juhendamise eest. Autor soovib tänada ka pereliikmeid, kes elasid kaasa ning motiveerisid töö valmimisel.

Viidatud kirjandus

[1] A. Einstein, "The Field Equations of Gravitation," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1915** (1915) 844–847.

[2] A. A. Vankov, "General relativity problem of mercury's perihelion advance revisited." 2010. `https://arxiv.org/abs/1008.1811`.

[3] **LIGO Scientific & Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger," *Phys. Rev. Lett.* **116** no. 6, (2016) 061102, `arXiv:1602.03837 [gr-qc]`.

[4] **LIGO Scientific & Virgo** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, "Gwtc-1: A gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs," *Phys. Rev. X* **9** (Sep, 2019) 031040. `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.9.031040`.

[5] M. Hohmann, "Teleparallel Gravity," *Lect. Notes Phys.* **1017** (2023) 145–198, `arXiv:2207.06438 [gr-qc]`.

[6] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, "Modified Gravity and Cosmology," *Phys. Rept.* **513** (2012) 1–189, `arXiv:1106.2476 [astro-ph.CO]`.

[7] A. Einstein, "Der energiesatz in der allgemeinen relativitätstheorie," *Albert Einstein: Akademie-Vorträge: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1914–1932* (2005) 154–166.

[8] J. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997. `https://books.google.ee/books?id=ZRQgH7FQafgC`.

[9] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne'eman, "Metric affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance," *Phys. Rept.* **258** (1995) 1–171, `arXiv:gr-qc/9402012`.

[10] T. Ortin, *Gravity and Strings*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2nd ed. ed., 7, 2015.

[11] J. Beltrán Jiménez, L. Heisenberg, D. Iosifidis, A. Jiménez-Cano, and T. S. Koivisto, "General teleparallel quadratic gravity," *Phys. Lett. B* **805** (2020) 135422, `arXiv:1909.09045 [gr-qc]`.

[12] D. A. Gomes, J. Beltrán Jiménez, and T. S. Koivisto, "General parallel cosmology," *JCAP* **12** (2023) 010, `arXiv:2309.08554 [gr-qc]`.

[13] A. Meurer *et al.*, "SymPy: symbolic computing in Python," *PeerJ Comput. Sci.* **3** (2017) e103.

[14] R. P. Kerr, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 237–238.

[15] L. Bel, "Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstenschen Theorie," arXiv:0709.2257 [gr-qc].

[16] S. A. Teukolsky, "The Kerr Metric," *Class. Quant. Grav.* **32** no. 12, (2015) 124006, arXiv:1410.2130 [gr-qc].

[17] M. Visser, "The Kerr spacetime: A Brief introduction," in *Kerr Fest: Black Holes in Astrophysics, General Relativity and Quantum Gravity*. 6, 2007. arXiv:0706.0622 [gr-qc].

[18] J. Beltrán Jiménez and T. S. Koivisto, "Euclidean teleparallel relativity and black hole partition functions," arXiv:2412.13946 [gr-qc].

[19] D. A. Gomes, J. Beltrán Jiménez, and T. S. Koivisto, "Energy and entropy in the geometrical trinity of gravity," *Phys. Rev. D* **107** no. 2, (2023) 024044, arXiv:2205.09716 [gr-qc].

[20] R. H. Ivask and L. Järv, "GTEGR in canonical Kerr frame," https://colab.research.google.com/drive/1d9IJWntCTTzzF5dSnHSwzjbKnioGklL6?usp=sharing, 2025.

[21] G. W. Gibbons, M. J. Perry, and C. N. Pope, "The First law of thermodynamics for Kerr-anti-de Sitter black holes," *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) 1503–1526, arXiv:hep-th/0408217.

[22] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.

[23] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 7, 2019.

[24] J. Beltrán Jiménez and T. S. Koivisto, "Noether charges in the geometrical trinity of gravity," *Phys. Rev. D* **105** no. 2, (2022) L021502, arXiv:2111.04716 [gr-qc].

[25] T. Chow, *Gravity, Black Holes, and the Very Early Universe: An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Springer New York, 2007. https://books.google.ee/books?id=fp9wrkMYHvMC.

Lisad

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Roald Heinrich Ivask**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   Kerri aegruumi energia üldises teleparalleelses relatiivsusteoorias,

   mille juhendaja(d) on Laur Järv ja Tomi Sebastian Koivisto,

   reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Roald Heinrich Ivask
01.06.2025