

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND
Füüsika instituut

Olga Tihhonova

GALAKTIKATE STELLAARDÜNAAMIKA
MODELLEERIMINE ANDROMEEDA
NÄITEL

Magistritöö

Juhendaja:
PhD Elmo Tempel

Tartu 2014

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Stellaardünaamikat kirjeldava mudeli loomine	5
1.1 Galaktika kui pörkevaba süsteem	5
1.2 Pörkevaba Boltzmanni võrrand	6
1.3 Kiiruste dispersioon ja kiiruste ellipsoid	7
1.4 Liikumisintegraalid	7
1.5 Jeans'i võrrandid	11
1.6 Jeans'i võrrandite sulgemine	12
1.6.1 Tihedusjaotus ja potentsiaal	13
1.6.2 Pöörlemiskõver	15
1.6.3 Dispersioonide suhted	15
1.6.4 Orientatsiooni parameeter	16
1.7 Dispersioonide kooskõlastamine	17
1.8 MultiNest - Bayesi tööriist	19
1.9 Vaadeldavate suuruste projekteerimine	20
2 Dünaamilise mudeli rakendamine Andromeeda galaktikale	23
2.1 Lähteandmed Andromeeda struktuuri kirjeldamiseks	23
2.2 Testarvutused	24
2.3 Lõplik mudel	30
2.4 Kinemaatika vaatlusandmed	30
2.5 Tulemused	31
Kokkuvõte	35
Kasutatud kirjandus	37
Summary	42

Sissejuhatus

Galaktika on massiivne isegraviteeruv süsteem, mis koosneb tähtedest, tähtede vahelisest keskkonnast, milleks on gaas ja tolmu, ning tumeainest. Galaktika täpne morfoloogia kujuneb välja protogalaktika kokku tõmbumise ning tähtede edasise evolutsiooni käigus, aga ka galaktikate omavaheliste põrgete toimel. Sõltuvalt vanusest moodustavad tähed galaktikas mitmeid populatsioone, mis erinevad ruumilise jaotuse, keemilise koostise ning dünaamiliste omaduste poolest. Uurides neid populatsioone on võimalik saada informatsiooni galaktika tekkimise, evolutsiooni ja struktuuri kohta (Tenjes, 1994). Parim viis selleks on mudelite koostamine. Loomulik, et mudelid peavad arvesse võtma kätte saadavat informatsiooni galaktika kohta ning koosnema mitmetest komponentidest.

Mudelite tegemisel on tähtis galaktika struktuuri arvestamine. Sõltuvalt galaktika morfoloogilisest tüübist, võib selle jagada mitmeks komponendiks. Üks võimalik struktuur oleks järgmine. Galaktika tsentris asub hele kompaktne tuum, mis on dünaamiliselt praktiliselt sõltumatu ülejäänud galaktikast ning mille keskel asub massiivne must auk. Selle ümber on vanadest tähtedest koosnev sferoidaalne mõhn. Järgmiseks sferoidaalseks komponendiks on vanadest tähtedest ja kerasparvedest koosnev ulatuslik täheline halo. Spiraalsetes galaktikates eristatakse lisaks ka ketast ja noortest tähtedest koosnevat spiraalstruktuuri. Viimaseks komponendiks on kaugetele küündiv tumeaine halo ehk kroon. Missuguste komponentidega galaktikat lähendada, sõltub mudeli tüübist ja soovitatavast täpsusest, aga ka modelleerimise eesmärgist. Tihtipeale spiraalgalaktikaid, näiteks, lähendatakse koosnevana kolmest komponendist, milleks on mõhn, ketas ja tumeaine halo (Barnes et al., 2004).

Kaks põhilist informatsiooni allikat astronoomias on fotomeetria, mis annab galaktika pindheleduse jaotust, ning spektroskoopia, mis võimaldab hinnata tähepopulatsioonide metallilisust ning annab tähtede ja gaasi kiiruseid ning kiiruste dispersioone. Täheline dispersioon on väga oluline galaktikat kirjeldav parameeter: see annab hinnangut dünaamilisele massile ning on seotud nii tähelise kui ka kogumassiga (van Uiter et al., 2013). Viimased on olulised mõistmaks tumeaine halo mõju galaktika tekkele ja seega ka selle nähtamatu komponendi olemust. Dispersioon galaktika keskel on seotud tsentraalse musta augu massiga ning on

abiks selle tekkimise ja kasvu ajaloo kindlaks tegemisel (Stickley ja Canalizo, 2014). Samuti annab täheline dispersioon ülevaate protsessidest, mis realiseeruvad galaktikate kokkupõrke tagajärjel ja mõjutavad seega tähtede liikumist.

Galaktika tähtede dispersioone kirjeldavad tähtede hüdrodünaamika võrrandid. Selleks otstarbeks võttis need esimesena kasutusele inglise astronoom, füüsik ja matemaatik Sir James Hopwood Jeans (Jeans, 1919), sellepärast nimetatakse need sageli ka Jeans'i võrranditeks. Üldiselt on võrrandites sisalduvaid tundmatuid rohkem kui võrrandeid ning lahendamise protsess pole seega triviaalne ja nõuab ridu lisaeldusi ja lihtsustusi.

Antud töö eesmärk on leida kooskõlaline lahend Jeans'i võrranditele ja selle baasil luua galaktika dispersioone ja pöörlemiskiirust kirjeldav dünaamiline mudel. Saadud mudelit on plaanis rakendada ja testida Andromeeda galaktikal.

Töö esimeses osas on toodud ülevaade teoreetilisest taustast, mis on vajalik dünaamilise mudeli loomiseks. On kirjeldatud eeldused ja lihtsustused, mis puudutavad galaktikate iseloomustamist. Räägitakse mudeli koostamiseks vajalikest tehnilistest lahendustest.

Töö teises osas on juttu dünaamilise mudeli rakendamisest Andromeeda galaktikale. Kirjeldatakse läbiviidud testarvutused, mis näitavad eri parameetrite mõju lõplikule mudelile. Tuuakse arvutatud dispersioonide ja pöörlemiskiiruse võrdlus vaatlusandmetega ning analüüsitakse tulemust.

1 Stellaardünaamikat kirjeldava mudeli loomine

1.1 Galaktika kui pörkevaba süsteem

Enamus galaktika tähti asub ellipsoidaalsetes alamsüsteemides, millel puudub sfääriline sümmeetria. See tähendab, et tähtede tihedus väheneb ühes suunas kiiremini kui teises, ja igale tähele rakendub seega mingi nullist erinev resultantjõud, mis sõltub galaktika struktuurist suurtel skaaladel. See jõud ei muutu hüppeliselt, ning täht saab ühtlase kiirenduse liikudes jõuväljas, mis on tekitatud galaktika kui terviku poolt. Teiste sõnadega, saab vaadata tähele mõjuvat gravitatsioonijõudu kui jõudu, mis tuleneb ühtlasest tihedusjaotusest, mitte üksikute punktmasside kogumi omast. See aga võimaldab lähendada galaktikat pörkevaba süsteemina. Samuti räägib selle väite poolt asjaolu, et tähed paiknevad teineteisest võrdlemisi kaugel ning nende kokkupõrked on harvad. Tumeainet võib siin lugeda samuti pörkevabana, kuna selle osakeste omavahelised gravitatsioonilised interaktsioonid on galaktika kontekstis kaduvväikesed (Binney ja Tremaine, 2008).

Kvantitatiivselt on võimalik olukorda hinnata kasutades relaksatsiooni aja t_r mõistet. Relaksatsiooni aeg näitab, kui hästi süsteem mäletab oma minevikku ehk mis aja pärast kumulatiivsed kokkupõrked naabertähtedega on muutnud tähe orbiiti piisavalt palju võrreldes orbiidiga, mida see omaks, olles ühtlases gravitatsiooniväljas. See avaldub järgnevalt:

$$t_r \simeq \frac{0.1N}{\ln N} t_l, \quad (1)$$

kus N on tähtede arv galaktikas ja t_l on ülelennuaeg, mis näitab, kui palju aega kulub keskmisel tähel galaktika läbimiseks.

Valemist (1) on näha, et relaksatsiooni aeg saab suuremaks ülelennuaegast kui $N \geq 40$. Tüüpilise galaktika jaoks $N = 10^{11}$ ning $t_l = 10^8$ a, seega galaktika eluea (10^{10} a) vältel saab põrgetest tulenevaid efekte ignoreerida ja pidada galaktikat pörkevabaks süsteemiks.

1.2 Põrkevaba Boltzmanni võrrand

Modelleerides galaktika kui põrkevaba süsteemi dünaamikat ei ole mõistlik jälgida eraldi tähtede orbiite, mida on miljardeid. Selle asemel vaadatakse tõenäosust leida mingi täht kiirusega \vec{v} kohal \vec{x} kuuemõõtmelises faasiruumi elemendis $d^3\vec{v}d^3\vec{x}$. Selleks tuuakse sisse jaotusfunktsioon ehk faasitihedus f nii, et $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{v}d^3\vec{x}$ on tõenäosus, et hetkelt t omab vabalt valitud täht faasiruumi koordinaate antud vahemikus. Kuna galaktikas kõik tähed on võrdsed (ei ole põhjust eelistada üht teisele), see tõenäosus on sama kõikide tähtede jaoks. Kui eeldada, et tähed on lisaks ka sõltumatud ning jäävad, annab f süsteemi täieliku kirjelduse, vastasel juhul peaks arvesse võtma omavahelised interaktsioonid ja eluea lõplikkust. Definitsiooni järgi kehtib normeering

$$\int f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{v}d^3\vec{x} = 1, \quad (2)$$

kus integreeritakse üle terve faasiruumi. Kui integreerimine toimub ainult üle kiiruste ruumi, saadakse tähtede tavaline tihedusjaotus ρ .

Kuna galaktikas tähed liiguvad faasiruumis ringi, hakkab nende leidmise tõenäosus sõltuma ajast. Ent kuna definitsiooni järgi tõenäosus peab olema jääv, siis f jaoks kehtib jäävusseadus, mis on identne massi jäävusega ja avaldub kujul:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = 0. \quad (3)$$

Arvestades, et kehtib $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \vec{v}$ ja $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla\Phi$, kus Φ on gravitatsiooni potentsiaal, saame võrrandi, mis kirjeldab põrkevaba süsteemi dünaamikat:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right) = 0. \quad (4)$$

Võrrand (4) oli saadud austria füüsiku Ludwig Eduard Boltzmanni poolt (Boltzmann, 1872) ning on tuntud kui põrkevaba Boltzmanni võrrand.

1.3 Kiiruste dispersioon ja kiiruste ellipsoid

Tähtede liikumine on iseloomustatav dispersiooni tensoriga, mis avaldub kujul

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \overline{v_i v_j} - \bar{v}_i \bar{v}_j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad (5)$$

kus v on tähe kiirus, \bar{v} on keskmine kiirus. Kasutades faasitiheduse f definitsiooni, silindrilistes koordinaatides on keskmistamine defineeritud järgnevalt:

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\rho} \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) v_i dv_R dv_z dv_\theta, \quad (6)$$

kus $\rho = \int f(\vec{x}, \vec{v}, t) dv_R dv_z dv_\theta$. Sama kehtib ka kõrgemate astmete jaoks. Silindrilised koordinaadid tuuakse sisse, kuna antud töö huviobjektideks on galaktikad, mida telgsümmeetrilises lähendis on kõige loomulikum kirjeldada just selles koordinaadistikus.

Nagu näha valemist (5), on dispersiooni tensor sümmeetriline, seega sobiva koordinaat teisendusega on võimalik seda diagonaliseerida. Ellipsoidi, mille teljed paiknevad nende koordinaattelgedes sihis ning mille pikkusteks on diagonaliseeritud dispersiooni tensori elemendid σ_{ii} , nimetatakse kiiruste ellipsoidiks. Kiiruste ellipsoid on oluline karakteristik galaktika dünaamika iseloomustamisel.

1.4 Liikumisintegraalid

Põrkevaba Boltzmanni võrrandi (4) kui osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendi leidmine taandub karakteristiklike võrrandite lahendamisele, mis on kujul

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{-(\partial\Phi/\partial x)} = \frac{dv_y}{-(\partial\Phi/\partial y)} = \frac{dv_z}{-(\partial\Phi/\partial z)}. \quad (7)$$

Nende võrrandite lahendiks on kuus lineaarselt sõltumata liikumiskonstanti ehk funktsiooni, mis sõltuvad faasiruumi koordinaatidest ja ajast ning on konstantsed mööda tähe orbiiti:

$$I_i(\vec{x}, \vec{v}, t) = \text{const}, \quad i \in \{1, \dots, 6\}. \quad (8)$$

Seega saame, et otsitav faasitihedus on kujul $f = f(I_1, \dots, I_6)$, kusjuures, et omada füüsikalist sisu, peab see olema ühene ja mittenegatiivne. Faasitihedus on aja funktsioon, ent läbi selle sõltuvad ajast ka tihedus ja potentsiaal. Selle töö raames, aga ka paljudes muudes rakendustes, saab eeldada, et galaktikad on kas statsionaarsed (ajast sõltuvust pole) või kvaasistatsionaarsed (sõltuvus ajast on väga aeglane) süsteemid (Wilkinson ja James, 1982; Spreckels ja Thielheim, 1982; Lin, 1983; Fjällborg et al., 2006; Gu, 2008; Marinacci et al., 2010). Mõlema juhu korral kaob Boltzmanni võrrandis f ajaline tuletis ära ning saame kuue asemel viis karakteristikku võrrandit kujul

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{-(\partial\Phi/\partial x)} = \frac{dv_y}{-(\partial\Phi/\partial y)} = \frac{dv_z}{-(\partial\Phi/\partial z)}. \quad (9)$$

Sõltumata liikumiskonstante on nüüd viis ning need ei sõltu enam ajast:

$$I_i(\vec{x}, \vec{v}) = const, \quad i \in \{1, \dots, 5\}. \quad (10)$$

Sellisel juhul nimetatakse neid liikumisintegraalideks ja faasitihedus avaldub nüüd nende kaudu kujul $f = f(I_1, \dots, I_5)$ (endiselt kehtib ühesuse ja mittenegatiivsuse tingimus). See tulemus on tuntud Jeans'i teoreemina (Jeans, 1915; Lynden-Bell, 1962). Kuna liikumisintegraalide kombinatsioon on samuti liikumisintegraal (sama kehtib tegelikult ka liikumiskonstantide kohta), on soovitatav kasutada selliseid kombinatsioone, mis omaksid füüsikalist sisu, nagu näiteks koguenergia või impulssmoment.

Statsionaarse potentsiaali puhul peab iga täht liikuma mööda sama muutumatut faasiruumitrajektoori. Sõltuvalt potentsiaali kujust võib see trajektoor nii tava- kui ka faasiruumis olla kas suletud või mitte. Galaktikates realiseerub üldiselt teine juhtum ning tähe trajektoor täidab oma keerdudega kahe- või kolmemõõtmelist pinda tavalises ruumis ning kahe- või rohkem mõõtmelist hüperpinda faasiruumis. Suletud trajektoori puhul on selle üheseks kirjeldamiseks vaja viis liikumisintegraali – joone kuju on määratud nendele vastavate faasiruumi hüperpindade lõikumisega. Mitte suletud juhu puhul aga alla viie – hüperpindade lõikumine määrab pinna, mis on täidetud tähe orbiiti keerdudega. Neid liikumisintegraale nimetatakse

ühesteks või isoleerivateks integraalideks. Ent karakteristiklike võrrandite (9) lahendiks on alati viis liikumisintegraali. Teised integraalid, mille väärtusest tähe orbiidi kuju enam ei sõltu, kuna on juba eelnevalt paigas, on lõpmata mitmesed ehk faasitrajektoori määramiseks on ükskõik, mis väärtused neile anda. Nendest ei tohi sõltuda ka faasitihedus, muidu muutuksid nii tihedus kui ka potentsiaal mitmesteks ja seega mittefüüsikalisteks. Seega täpsem Jeans'i teoreemi sõnastus on

$$f = f(I_1, \dots, I_n), \quad n \leq 5, \quad (11)$$

kus võrdus realiseerub suletud ja võrratus mitte suletud orbiitide puhul.

Nagu varem mainitud, sõltub tähe orbiidi kuju ja seega ka isoleerivate integraalide arv potentsiaali kujust – mida üldisem on potentsiaal ehk mida vähem on sellele pandud piiranguid, seda vähem üheseid liikumisintegraale esineb faasitiheduse avaldises. See aga omakorda vähendab faasitiheduse ja seega ka ruumtiheduse üldisust. Samas ruumtihedus ja potentsiaal on seotud omavahel Poissoni võrrandi abil:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (12)$$

kus G on gravitatsiooni konstant. Seega väga suur potentsiaali või faasitiheduse üldisus lähevad teine teise vastu. See tähendab, et statsionaarseid tähesüsteeme, mille potentsiaal lubab viite või ainult ühte isoleerivat integraali, ei saa eksisteerida; kahe, kolme või nelja integraaliga süsteemid on aga lubatud.

Kõige üldisemal juhul saab galaktika potentsiaal omada telgsümmeetriat. See on üks potentsiaalidest, mis esineb looduses kõige tihedamini, ning mida omavad lisaks ka tähed ja planeedid (Agekian et al., 1995). Kui arvestada lisaks statsionaarsuse tingimust, on üheseid integraale kaks: süsteemi koguenergia ja impulssmoment sümmeetria telje ümber, mis silindrilistes koordinaatides avalduvad kujul

$$I_1 = v_R^2 + v_\theta^2 + v_z^2 - 2\Phi, \quad (13)$$

$$I_2 = Rv_\theta. \quad (14)$$

Faasitihedus on vastavalt kujul $f = f(I_1, I_2)$. Kasutades lisaks valemeid (5) ja (6) on näha, et kiiruste ellipsoid on sümmeetriline v_θ telje suhtes, kuna kiirused R ja z suundades esinevad faasitiheduse avaldises ühtemoodi. Selline ellipsoidi kuju on aga vastuolus vaatlustega, mis näitavad, et sellist sümmeetriat ei tohiks olla ning et kiiruste ellipsoid on enamikel juhtudel kolmeteljeline (Ollongren, 1962; van Wijk et al., 1966; Graham, 1967; Woolley, 1978).

See kehtib nii sfääriliste, kui ka kettakujuliste galaktika alamsüsteemide jaoks. Et seda vastuolu lahendada, on vaja üldistada teooriat ning tuua sisse kolmas liikumisintegraal, mis oleks kahest eelnevast sõltumatu. Tihti nimetatakse seda integraali mitteklassikaliseks integraaliks, kuna mõnede tähe orbiitide jaoks seda siiski ei eksisteeri (Martinet ja Hayli, 1971; Manabe, 1979). Üks võimalik kolmanda integraali kuju oli pakutud eesti astrofüüsiku Grigori Kuzmini poolt (Kuzmin, 1952), ning silindrilistes koordinaatides avaldub see järgnevalt:

$$I_3 = (Rv_z - zv_R)^2 + z^2v_\theta^2 + z_0^2(v_z^2 - 2\Phi^*), \quad (15)$$

kus Φ^* on funktsioon, mis omab potentsiaali dimensiooni ning on leitav võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial R} = z^2 \frac{\partial \Phi}{\partial R} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ z_0^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = (R^2 + z_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - Rz \frac{\partial \Phi}{\partial R}. \end{cases} \quad (16)$$

Integraal I_3 koosneb kahest osast: kaks esimest liiget on impulssmomentide ruudud kahe risti oleva telje ümber, mis asuvad $z = 0$ tasandis; viimane liige on energia mööda z -telge korrutatuna vaba parameetriga z_0^2 .

Et näha, kuidas kolmas integraal lahendab kiiruste ellipsoidi kuju probleemi, tehakse selline koordinaatteisendus, et I_3 avaldises kiiruste ruutude vahe asemele tuleks ruutude summa. See on teostatav v_R ja v_z telgede pööramisega, ning R, z, θ asemel on uuteks koordinaatideks x_1, x_2, θ . Nendes koordinaatides on dispersiooni tensor diagonaalne. Kolmanda integraali kuju tuleb siis

$$I_3 = x_1^2 v_1^2 + x_2^2 v_2^2 + x_1 x_2 v_\theta^2 - 2z_0^2 \Phi^*. \quad (17)$$

x_1 ja x_2 on konfokaalsed elliptilised koordinaadid, mis on antud võrrandiga

$$\frac{R^2}{x^2 - z_0^2} + \frac{z^2}{x^2} = 1, \quad (18)$$

kus

$$x^2 = \begin{cases} x_1^2 \geq z_0^2 \\ x_2^2 \leq z_0^2. \end{cases} \quad (19)$$

Sellisenä defineeritult vastavad x_1 ellipsoididele ja x_2 hüperboloididele, z_0 aga nende ühisele fookusele. v_1 ja v_2 on kiirused uutes koordinaatides, ning nurk α (vaata joonis 1) nende ja galaktika tasandi vahel (ühtlasi on see ka koordinaattelgede pööramise nurk) avaldub järgnevalt:

$$\frac{1}{2} \tan 2\alpha = \frac{Rz}{R^2 + z_0^2 - z^2} \equiv \gamma. \quad (20)$$

Faasitihedus on nüüd kujul $f = f(I_1, I_2, I_3)$ ning selle sõltuvus kõikidest kiirustest on erinev. Kasutades jällegi valemeid (5) ja (6) on näha, et kiiruste ellipsoid on kolmeteljeline. Selle üks telg asub piki v_θ -telge, kaks teist on paralleelsed v_1 ja v_2 telgedega.

1.5 Jeans'i võrrandid

Võrrand (4) annab pörkevaba süsteemi dünaamilise kirjelduse. Selleks, et mudelit saaks vaatlustega võrrelda, peavad aga selles esinema vaadeldavad suurused, nagu näiteks keskmine kiirus või dispersioon. Selleks võrrandit (4) teisendatakse sobivamale kujule:

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (21)$$

Võrrandites summeeritakse üle korduva indeksi i , ρ tähistab tihedusjaotust, \bar{v} – keskmist kiirust, σ_{ij} – dispersiooni tensorit.

Tulemust (21) nimetatakse tähtede hüdrodünaamika võrrandiks, kuna see on analoogiline Euleri vedeliku voolamise võrrandiga

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (22)$$

kus p tähistab rõhu tensorit. Erinevus seisneb selles, et voolu kiiruse asemel on keskmine tähekiirus ning liige $\rho\sigma_{ij}^2$ kirjeldab anisotroopset rõhku. Stellaardünaamikas kasutas neid võrrandeid esimesena inglise füüsik, matemaatik ja astronoom Sir James Hopwood Jeans (Jeans, 1919), sellepärast nimetatakse neid tihti ka Jeans'i võrranditeks.

Üldiselt pole süsteem (21) suletud, kuna sobiva koordinaatsüsteemi valiku puhul sisaldab kaheksa tundmatut suurust ρ , Φ , \bar{v}_i , σ_{ii} (mõnedes koordinaatsüsteemides pole dispersiooni tensor diagonaalne ning tundmatuid on rohkem), ent koos Poissoni võrrandiga (12) ainult neli võrrandit. Süsteemi sulgemiseks on vaja teha lihtsustavaid eeldusi, mis võimaldaksid tundmatute arvu vähendada.

1.6 Jeans'i võrrandite sulgemine

Kuna galaktika potentsiaal omab telgsümmeetriat, on mõttekas teisendada Jeans'i võrrandid (21) silindrilistesse koordinaatidesse. Nendes koordinaatides on $\bar{v}_R = \bar{v}_z = 0$ ehk keskmistatuna esineb ainult liikumine θ -telje sihis. Mugavuse mõttes tähistatakse $\bar{v}_\theta \equiv V_\theta$. Sümmeetriast tulenevalt on kõik osatuletised θ järgi võrdsed nulliga. Kuna lisaks eeldatakse, et galaktikad on statsionaarsed süsteemid, kaovad ka osatuletised aja järgi. Dispersiooni tensori segakomponendid avalduvad aga järgnevalt (Tempel ja Tenjes, 2006):

$$\begin{aligned}\sigma_{Rz}^2 &= \gamma(\sigma_R^2 - \sigma_z^2), \\ \sigma_{R\theta}^2 &= \sigma_{z\theta}^2 = 0,\end{aligned}\tag{23}$$

kus $\sigma_z^2 \equiv \sigma_{zz}^2$, $\sigma_R^2 \equiv \sigma_{RR}^2$ (analoogiliselt hiljem $\sigma_\theta^2 \equiv \sigma_{\theta\theta}^2$) ning γ on orientatsiooni parameeter, mis on leitav võrrandist (20). Nendest eeldustest lähtuvalt tuleb, et teine Jeans'i võrrand muutub identsuseks ning kaks ülejäänut avalduvad kujul

$$\frac{\partial(\rho\sigma_R^2)}{\partial R} + \left(\frac{1 - k_\theta}{R} + \frac{\partial\kappa}{\partial z}\right)\rho\sigma_R^2 + \kappa\frac{\partial(\rho\sigma_R^2)}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial R} - \frac{V_\theta^2}{R}\right),\tag{24}$$

$$\frac{\partial(\rho\sigma_z^2)}{\partial z} + \left(\frac{\xi}{R} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\rho\sigma_z^2 + \xi\frac{\partial(\rho\sigma_z^2)}{\partial R} = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z},\tag{25}$$

kus loetavuse mõttes on tähistatud

$$k_z \equiv \frac{\sigma_z^2}{\sigma_R^2}, \quad k_\theta \equiv \frac{\sigma_\theta^2}{\sigma_R^2}, \quad (26)$$

$$\kappa \equiv \gamma(1 - k_z), \quad \xi \equiv \frac{\kappa}{k_z}. \quad (27)$$

Töö üheks eesmärgiks on luua galaktika tähtede kiiruste dispersioone kirjeldav mudel, järelikult otsitavateks suurusteks on σ_R^2 , σ_z^2 , σ_θ^2 . Kuna vaatlustest on teada, et kiiruste ellipsoid on kolmeteljeline, ei saa nende kohta mingeid lihtsustavaid eeldusi teha. Jeans'i võrrandite (24) ja (25) kuju on selline, et nende lahendamine süsteemina on võimatu. Seega võrrand (24) lahendatakse σ_R^2 ning võrrand (25) σ_z^2 suhtes ja saadud funktsioonid viiakse kooskõlalisele kujule. Dispersioonisuhetest (26) avaldatakse σ_θ^2 , mis on ühtlasi ka kooskõlalisuse kontrolliks. See eeldab aga ülejäänute tundmatute suuruste sõltumatut määramist, milleks on tihedusjaotus ρ , potentsiaal Φ , pöörlemiskiirus V_θ , dispersioonide suhted k_z ja k_θ ning orientatsiooni parameeter γ .

1.6.1 Tihedusjaotus ja potentsiaal

Et saada paindlikku ja kooskõlalist mudelit, lähendatakse galaktikat sõltumatute täheline komponentide superpositsiooniga, lisades sfääriline tumeaine halo. Iga täheline komponent on esitatav pöörlemistelje suhtes sümmeetrilise ellipsoidiga, millel on konstantne telgede suhe. Selle tihedusjaotus on antud Einasto profiiliga (Einasto, 1965), mis silindrilistes koordinaatides avaldub kujul

$$\rho(a) = \rho_0 \exp \left[- \left(\frac{a}{ka_0} \right)^{1/N} \right], \quad (28)$$

kus $\rho_0 = hM/(4\pi qa_0^3)$ on ruumtihedus keskpunktis, M on komponendi kogumass, q on ellipsoidi telgede suhe, a_0 on harmooniline raadius, mis on heaks komponendi ulatuse iseloomustajaks, ning $a = \sqrt{R^2 + z^2/q^2}$. h ja k on normeerimiskoeffitsiendid, mis on seotud struktuuri parameetriga N (Tenjes et al., 1994; Tamm et al., 2012). Galaktika kui terviku tihedusjaotus on siis tema komponentide superpositsioon.

Tihedusjaotus pole otseselt vaadeldav suurus, ent seda saab määrata kaudselt. Üks võimalus on kasutada fotomeetrilisi andmeid galaktika täheliste komponentide heledusjaotuste defineerimiseks, mille kuju saab võtta matemaatiliselt identseks Einasto profiiliga (28), ning siis korrutada saadud jaotused mass-heledus suhtega, mida saab omakorda kindlaks teha spektroskoopiliste vaatluste abil. Tumeaine halo tihedusjaotus on määratav galaktika pöörlemiskõverast.

Gravitatsioonipotentsiaal on saadav galaktika tihedusjaotusest Poissoni võrrandi (12) kaudu. Jeans'i võrrandites (24) ja (25) esinevad potentsiaali tuletused avalduvad kujul (Tenjes et al., 2001)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = R \frac{GhM}{(ea_0)^3} \int_0^{\arcsin e} \rho^*(a) \sin^2(x) dx, \quad (29)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = z \frac{GhM}{(ea_0)^3} \int_0^{\arcsin e} \rho^*(a) \tan^2(x) dx, \quad (30)$$

kus $e = \sqrt{1 - q^2}$ on ekstsentrilisus ning

$$\rho^*(a) = \exp \left[- \left(\frac{a}{ka_0} \right)^{1/N} \right], \quad (31)$$

$$a^2 = \frac{\sin^2(x)}{e^2} \left(R^2 + \frac{z^2}{\cos^2(x)} \right). \quad (32)$$

Juhul kui tegu on sfääriliselt sümmeetrilise potentsiaaliga ehk $q = 1$ (tumeaine halo puhul), võrrand (28) kehtib endiselt, potentsiaali tuletised on aga kujul

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R} = R \frac{GhM}{a_0^3} \int_0^1 \rho^*(a) x^2 dx, \quad (33)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = z \frac{GhM}{a_0^3} \int_0^1 \rho^*(a) x^2 dx, \quad (34)$$

kus $a^2 = x^2(R^2 + z^2)$.

1.6.2 Pöörlemiskõver

Nagu varem mainitud, telgsümmeetria eeldusel ainuke keskmistatud tähtede liikumine galaktikas toimub θ -telje sihis. Seda liikumist kirjeldab pöörlemiskiirus V_θ , mida saab lähendada kujule (Binney ja Tremaine, 2008)

$$V_\theta^2 = \beta^2 v_c^2 = \beta^2 R \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \quad (35)$$

kus v_c on ringkiirus ning β on võrdetegur, kusjuures $\beta \leq 1$. Üldiselt on β koordinaatide funktsioon, antud töös lisaandmete puudumise tõttu lähendatakse seda konstandiga.

Galaktika tähtede pöörlemiskiirus on otse vaadeldav suurus ning spektroskoopiliste andmete abiga saab seda kindlaks määrata.

1.6.3 Dispersioonide suhted

Kui eeldada, et kolmas liikumisintegraal on kujul (17), siis selleks, et saavutada kolmeteljelist kiiruste jaotust, mis on kooskõlaline vaatlustega, peab faasitihedus sõltuma esimesest (13) ja kolmandast (17) liikumisintegraalist lineaarselt ja teisest (14) ruutpolünoomina (Einasto, 1970):

$$f = a_1 I_1 + a_2 I_2 - 2 \frac{b_1}{z_0} I_2 + \frac{b_2}{z_0^2} I_2^2, \quad (36)$$

kus a_1 , a_2 , b_1 ja b_2 on vabad konstandid. Siis avalduvad dispersioonide suhted elliptilistes koordinaatides järgnevalt:

$$k_{12} \equiv \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{11}^2} = \frac{a_1 z_0^2 + a_2 x_2^2}{a_1 z_0^2 + a_2 x_1^2}, \quad (37)$$

$$k_{13} \equiv \frac{\sigma_{33}^2}{\sigma_{11}^2} = \frac{a_1 z_0^2 + a_2 x_2^2}{a_1 z_0^2 + a_2 z^2 + b_2 R^2}. \quad (38)$$

Võrrandist (18) tuleb, et x_1^2 ja x_2^2 avalduvad silindrilistes koordinaatides kujul

$$x_1^2 = \frac{1}{2} [\Omega + (\Omega^2 - 4z^2 z_0^2)^{1/2}], \quad (39)$$

$$x_2^2 = \frac{1}{2}[\Omega - (\Omega^2 - 4z^2 z_0^2)^{1/2}], \quad (40)$$

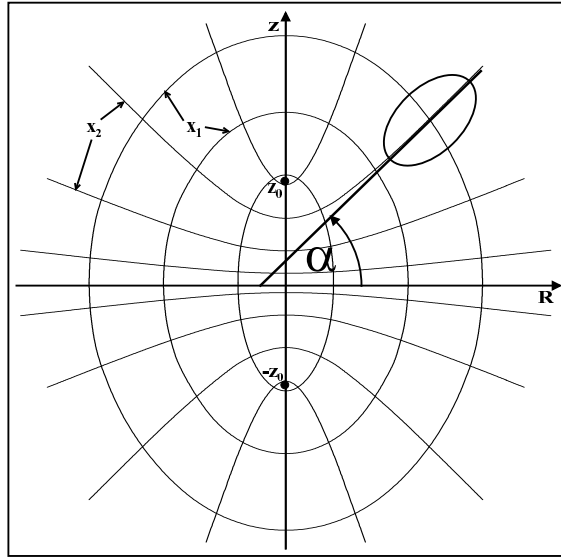
kus $\Omega = R^2 + z_0^2 + z^2$. Kasutades neid üleminekuseid ning võrrandit (20), saab näidata, et otsitavad dispersioonide suhted on kujul

$$k_z = \frac{\sin^2 \alpha + k_{12} \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + k_{12} \sin^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + k_{12}}{1 + k_{12} \tan^2 \alpha}, \quad (41)$$

$$k_\theta = \frac{k_{13}}{\cos^2 \alpha + k_{12} \sin^2 \alpha} = \frac{k_{13}(1 + \tan^2 \alpha)}{1 + k_{12} \tan^2 \alpha}. \quad (42)$$

Siinkohal tuleb pidada meeles, et kuigi vajalikud avaldised on tuletatud, nendes esineb kolm tundmata konstanti, mis vajavad määramist.

1.6.4 Orientatsiooni parameeter



Joonis 1: Elliptiliste (x_1, x_2) ja silindriliste (R, z) koordinaatide omavaheline suhe. α tähistab nurka kiiruste ellipsoidi ja galaktilise tasandi vahel. Joonis: Tempel ja Tenjes (2006).

Orientatsiooni parameeter γ kirjeldab kiiruste ellipsoidi positsiooni Rz -tasandis (selle geometriline tähendus nurga α kaudu on toodud joonisel 1) ning võrrandi (20) järgi avaldub järgnevalt:

$$\gamma \equiv \frac{1}{2} \tan 2\alpha = \frac{Rz}{R^2 + z_0^2 - z^2}, \quad (43)$$

kus z_0 määrab elliptiliste koordinaatide kuju ning on üldiselt R ja z funktsioon. Selle täpne avaldis on teada ainult galaktika tasandi jaoks, sellest väljapool on võimalik lähendada seda polünoomiga. See aga toob kaasa vabu konstante, mis pole füüsikalistest kaalutlustest määratavad ning tõstavad mudeli mitteühesust. Sellest tulenevat antud töö raames vaadatakse z_0 konstantse funktsioonina.

1.7 Dispersioonide kooskõlastamine

Matemaatilisest analüüsist tuleneb, et otsitavad dispersioonid σ_R^2 ja σ_z^2 avalduvad Jeans'i võrranditest (24) ja (25) kujul:

$$\sigma_R^2(R, z) = \frac{1 - \beta^2}{\rho} \int_R^\infty \rho(r, z) \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \left[\exp \int_R^r p(r^*, z) dr^* \right] dr \quad (44)$$

$$\sigma_z^2(R, z) = \frac{1}{\rho} \int_z^\infty \rho(R, z') \frac{\partial \Phi(R, z')}{\partial z'} \left[\exp \int_z^{z'} g(R, z^*) dz^* \right] dz', \quad (45)$$

kus selguse mõttes on tähistatud

$$p = \frac{1 - k_\theta}{R} + \frac{\partial \kappa}{\partial z} \quad (46)$$

$$g = \frac{\xi}{R} + \frac{\partial \xi}{\partial R}. \quad (47)$$

Samal ajal moodustavad võrrandid (24) ja (25) süsteemi ning nende lahendid on seotud omavahel funktsiooniga k_z (26), (41). Kokku esineb avaldistes viis vaba paremeetrit z_0 , a_1 , a_2 , b_2 , β , mida antud töös ei määrata vaatlustest, vaid kasutatakse mudeli kooskõlastatuse tagamiseks. Nimelt toimitakse järgnevalt. Lahendatakse võrrand (45), ning kasutades saadud tulemust võrranditest (26) ja (41) avaldatakse $\tilde{\sigma}_R^2$ (selline tähistus on toodud sisse, et eristada seda dispersioonist, mis on saadud otse Jeans'i võrrandist (24)):

$$\tilde{\sigma}_R^2 = \frac{\sigma_z^2}{k_z} = \frac{\sigma_z^2(1 + k_{12} \tan^2 \alpha)}{\tan^2 \alpha + k_{12}}. \quad (48)$$

Järgnevalt lahendatakse võrrand (44) ning saadud dispersioon võrreldakse võrrandi (48) omaga. Võrdlus teostatakse kujul

$$\chi^2 = \sum_{ij} (\sigma_{R,ij}^2 - \tilde{\sigma}_{R,ij}^2), \quad (49)$$

kus i, j on pikslite koordinaadid ehk summeerimine toimub üle kahemõõtmelise dispersiooni pildi. Täielikult kooskõlaliste lahendite puhul peab χ^2 võrduma nulliga, tegelikkuses pole see aga saavutatav. Selleks on mitu põhjust. Esiteks, tihedusjaotuse kuju tõttu pole võrrandite (44) ja (45) lahendamine võimalik analüütilisel kujul, numbrilise lahendamisega kaasnevad aga alati arvutusvead. Teiseks, dispersioonide suhe avaldis (41) on tuletatud tuginedes kolmanda integraali teooriale ning on ainult lähendiks reaalsele olukorrale. Ent mudel on seda kooskõnalisem, mida väiksem on χ^2 . Seega eesmärgi saavutamiseks avaldis (49) minimeeritakse, muutes vabade parameetrite väärtusi. Seda teostatakse programmi MultiNest abiga, mille kirjeldus on toodud hiljem samanimelises peatükis.

Lõpuks, kasutades saadud vabade parameetrite väärtused ja algusest ühest ja siis teisest Jeans'i võrrandist leitud dispersioone, dispersiooni suhetest (26), (41), (42) avaldatakse kahel erineval viisil σ_θ^2 :

$$\sigma_\theta^2 = k_\theta \sigma_R^2, \quad \sigma_\theta^2 = \frac{\sigma_z^2 k_\theta}{k_z}. \quad (50)$$

Saadud dispersioone saab kasutada, et kontrollida kui hästi on õnnestunud tulemused kooskõlastada. Kuna kooskõlastamise tulemusena saadakse parameeter β , mis esineb V_θ avaldises (35), annab mudel ka galaktika tähtede pöörlemiskiirused. Kui on saavutatud rahuldav tulemus, dispersioonid ja pöörlemiskiirused viiakse sellisele kujule, et neid oleks võimalik võrrelda vaatlustega, ehk projekteeritakse vaatesihile. Oluline on märkida, et vaatlustega võrdlemine seisneb siin väärtuste visuaalses võrdlemises, mitte mudeli lähendamises vaatlusandmetega, kuna siis, kui lahendid on kooskõlastatud, annavad nad kohe otsitavad dispersiooni ja pöörlemiskiiruse väärtused.

1.8 MultiNest - Bayesi tööriist

MultiNest (Feroz ja Hobson, 2008; Feroz et al., 2009, 2013) on Bayesi statistilisel analüüsil põhinev tööriist, mis võimaldab määrata mingit nähtust kirjeldava mudeli parameetrid ja valida erinevate mudelite vahel (teha eelistust ühele mudelile teise ees). Bayesi meetodikat kasutatakse paljude astrofüüsikat ja kosmoloogiat, aga ka osakeste füüsikat puudutavate probleemide lahendamiseks.

Bayesi statistika põhitunnuseks on, et statistiliste otsuste tegemiseks kasutatakse vaatlusandmete kõrval ka eelinfot (aprioorselt infot) ehk eeldust, et sündmuse toimumise tõenäosust saab määrata, hinnates selle sündmuse toimumise tõenäosust minevikus. Matemaatiliselt väljendub see Bayesi teoreemis, mis võimaldab hinnata hüpoteesi (mudeli) H parameetrite hulga $\boldsymbol{\theta}$ väärtusi etteantud andmemassiivi \mathbf{D} jaoks:

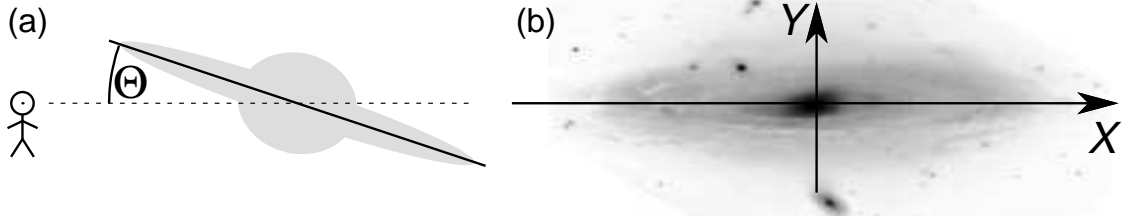
$$\Pr(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}, H) = \frac{\Pr(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta}, H)\Pr(\boldsymbol{\theta}|H)}{\Pr(\mathbf{D}|H)}, \quad (51)$$

kus $\Pr(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}, H) \equiv \mathcal{P}(\boldsymbol{\theta})$ on parameetrite aposterioorne jaotus (järeljaotus), $\Pr(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta}, H) \equiv \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$ on tõepärafunktsioon, $\Pr(\boldsymbol{\theta}|H) \equiv \pi(\boldsymbol{\theta})$ on parameetrite aprioorne jaotus (eeljaotus), $\Pr(\mathbf{D}|H) \equiv \mathcal{Z}$ on marginaalne tihedusfunktsioon. \mathcal{Z} on sisuliselt normering, mis pole oluline parameetrite määramisel, kuna ei sõltu $\boldsymbol{\theta}$ -st, ent on vajalik mudelite eristamisel. See on mitmedimensiooniline integraal üle kogu parameetriruumi ($\mathcal{Z} = \int \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$), mille numbriline arvutamine on reaalse füüsikaliste probleemide korral keeruline ja aeganõudev, ning mille efektiivseks leidmiseks loodigi MultiNest kui alternatiiv olemas olevatele tehnikatele (nagu näiteks Monte Carlo diskreetimine Markovi ahelatega (Novak ja Rudolf, 2013; Audren et al., 2013) või termodünaamiline integreerimine (Slosar et al., 2003; Bridges et al., 2006)).

MultiNest kasutab ellipsoidaalse mahutatud diskreetimise algoritmi (*ellipsoidal nested sampling*), et läbida parameetrite ruumi $\boldsymbol{\theta}$ ning maksimeerides tõepärafunktsiooni \mathcal{L} leida marginaalne tihedusfunktsioon \mathcal{Z} . Seejuures tõepärasusfunktsiooni maksimumile vastavad parameetrid ongi otsitavad mudeli parameetrid. Mudelit ennast saab hinnata \mathcal{Z} väärtuste abil.

Antud töö raames galaktika tähtede dünaamikat kirjeldava mudeli loomiseks tõepärafunktsiooniks võetakse võrrand (49), ent miinus märgiga, kuna MultiNest maksimeerib \mathcal{L} , kooskõlalise lahendi leidmiseks on vaja aga funktsiooni (49) minimeerida. Parameetrite ruum on määratud a_1 , a_2 , b_2 , z_0 ja β poolt, millele omistatakse konstantsed aprioorsed jaotused.

1.9 Vaadeldavate suuruste projekteerimine



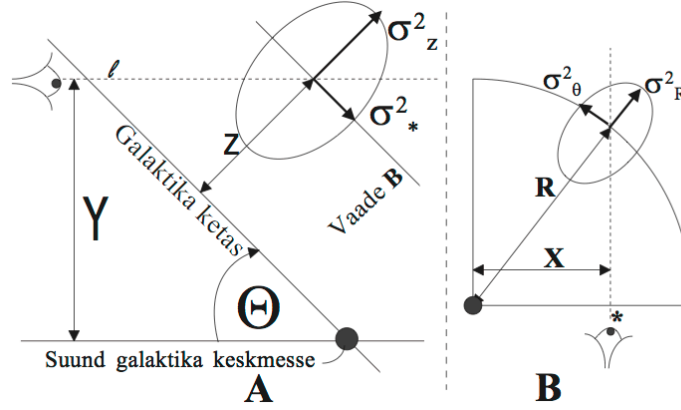
Joonis 2: Joonisel (a) on kujutatud nurk vaatesihi ja galaktikatasandi vahel. Joonisel (b) on näidatud tevatasandi koordinaadid X ja Y . Joonis: Tempel et al. (2007).

Jeansi võrranditest saadud dispersioonid σ_R^2 , σ_z^2 , σ_θ^2 pole sellisel kujul vaatlusandmetega võrreldatavad, kuna teleskoobiga vaadeldes mõõdetakse taevatasandile projekteeritud suurusi. Projekteerimine tähendab, et üldjuhul vaadeldakse superpositsiooni kõikide koordinaattelgede sihis olevatest dispersioonidest (sõltuvalt galaktika orientatsioonist võib vaadeldavas dispersioonis mitte kajastuda σ_z^2 või kajastuda ainult σ_z^2). Vaadeldavat dispersiooni leitakse järgnevalt. Olgu X ja Y taevatasandi koordinaadid, mille alguspunkt langeb kokku galaktika tsentriga, ning Θ – nurk vaatesihi ja galaktikatasandi vahel (vaata joonis 2). Alguses tehakse σ_R^2 ja σ_θ^2 projektsioon galaktika kettaga risti olevasse tasandisse, mis läbib vaatejoont (vaata joonis 3):

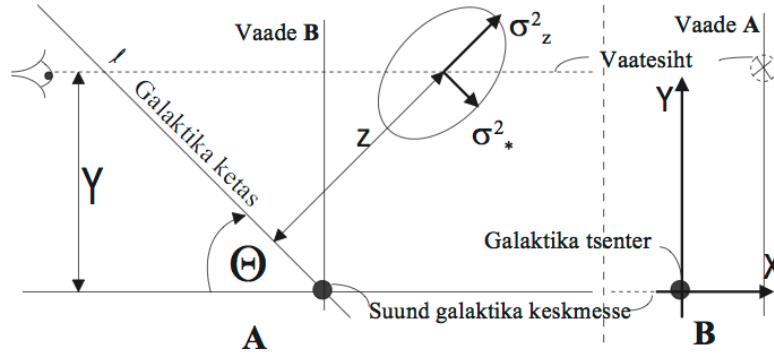
$$\sigma_*^2 = \sigma_\theta^2 \frac{X^2}{R^2} + \sigma_R^2 \left(1 - \frac{X^2}{R^2}\right). \quad (52)$$

Siis tehakse σ_*^2 ja σ_z^2 projektsioon vaatejoonele (vaata joonis 4):

$$\sigma_{\text{los}}^2 = \sigma_*^2 \cos \Theta + \sigma_z^2 \sin \Theta. \quad (53)$$



Joonis 3: σ_R^2 ja σ_θ^2 projektsioon galaktika kettaga risti olevasse tasandisse, mis läbib vaatesihti. Joonis: Tempel ja Tenjes (2006).



Joonis 4: σ_*^2 ja σ_z^2 projektsioon vaatejoonele. Joonis: Tempel ja Tenjes (2006).

Võrrand (53) kirjeldab projekteeritud dispersiooni ühes punktiks, vaadeldav suurus on aga summaarne mööda vaatejoont. Selleks avaldis σ_{1os}^2 integreeritakse, ning tulemus avaldub kujul

$$\sigma_{int}^2(X, Y) = \frac{1}{\varrho(X, Y)} \int_X^\infty \frac{\sum_{i=1}^2 [\rho(R, z_i) \sigma_{1os}^2(R, z_i)]}{\cos \Theta \sqrt{R^2 - X^2}} R dR, \quad (54)$$

kus

$$z_{1,2} = \left(\frac{Y}{\sin \Theta} \pm \sqrt{R^2 - X^2} \right) \tan \Theta \quad (55)$$

ning ϱ on üle vaatejoone integreeritud tihedusjaotus, mida kasutatakse normeerimiseks:

$$\varrho(X, Y) = \int_X^\infty \frac{\sum_{i=1}^2 \rho(R, z_i)}{\cos \Theta \sqrt{R^2 - X^2}} R dR. \quad (56)$$

σ_{int}^2 (54) kirjeldab ühe galaktika komponendi vaadeldavat dispersiooni. Kuna üldjuhul galaktikat lähendatakse mitme komponendi superpositsioonina, siis lõplik avaldis vaadeldava dispersiooni jaoks on

$$\sigma_{\text{obs}}^2(X, Y) = \frac{\sum_i \varrho_i(X, Y) [\sigma_{\text{int}}^2(X, Y)]_i}{\sum_i \varrho_i(X, Y)}, \quad (57)$$

kus i loetleb galaktika komponente.

Kuna tuletatud dispersioonide mudelist on otse saadav pöörlemiskõver, siis tuuakse vastav seos ka V_θ vaatlustega võrdlemiseks:

$$V_{\text{obs}}(X, Y) = \frac{\sum_i \varrho_i(X, Y) [V_{\text{los}}(X, Y)]_i}{\sum_i \varrho_i(X, Y)}, \quad (58)$$

kus

$$V_{\text{los}} = V_\theta \frac{X}{R}. \quad (59)$$

Juhul kui dispersioone või pöörlemiskiirust mõõdetakse mööda galaktika peatelge, kehtib $Y = 0$ ja $X = R$, ning avaldised lihtsustuvad.

2 Dünaamilise mudeli rakendamine Andromeeda galaktikale

Saadud dünaamilise mudeli illustreerimiseks ja testimiseks rakendati seda Andromeeda galaktikale. Andromeeda galaktika on huvipakkuv eelkõige selle pärast, et see on Linnuteele kõige lähemal asuv suur spiraalgalaktika, mis koos Galaktikaga moodustab enamiku Kohaliku Grupi massist (Li ja White, 2008). Selle uurimine võimaldab selgeks teha need morfoloogia ja dünaamika detailid, mis on kaugematel galaktikatel raskemini märgatavad või üldse nähtamatud. Andromeeda on oma ehituse poolest sarnane meie Galaktikale, kuigi veidi massiivsem (Klypin et al., 2002), ning selle uurimine sageli täiendab meie Galaktika uurimist, aga ka vastupidi (Kutuzov ja Einasto, 1968).

Dünaamilise mudeli loomiseks alguses suleti Jeans'i võrrandid (24) ja (25) lähtudes Andromeeda galaktika ülesehitusest ja omadustest. Seejärel kooskõlastati võrranditest (44) ja (45) saadud dispersioonid vabade parameetrite sobilike väärtuste valikuga. Lõpuks projekteeriti tulemused vaatesihile. Kuna esimese etapi käigus saadi Andromeeda potentsiaal ja teises etapis parameeter β , kirjeldab mudel ka galaktika pöörlemiskiirusi (35). See annab mudelile lisaväärtuse ning on ühtlasi ka selle headuse kontrolliks. Sellega sai tehtud Andromeeda dünaamikat kirjeldav mudel, mis annab galaktika tähtede dispersioone ja pöörlemiskiiruseid ilma vajaduseta neid vaatlustega lähendada. Et aga teada saada, kui hästi on mudeli loomine õnnestunud, võrreldi seda vaatlusandmetega. Illustreerimiseks nii dispersioonid kui ka pöörlemiskiirus arvutati mööda galaktika peatelge, ent mudel on rakendatav ka mujal.

2.1 Lähteandmed Andromeeda struktuuri kirjeldamiseks

Andromeeda on Hubble'i klassifikatsiooni järgi SA(s)b tüüpi galaktika (de Vaucouleurs et al., 1991), mis tähendab, et see on ilma varbstruktuurita s-kujuline spiraalgalaktika, millel on tuhm mõhn ja kinnisemad spiraalharud. Mudeli tegemisel lähendati seda koosnevana mõhnast, kettast ja tumeaine halost, jättes välja tuuma, spiraalharud ja gaasiketta, kuna antud

töö raames pole nende panus oluline. Huvipakkuvaid komponente iseloomustavad parameetrid, mis on vajalikud Jeans'i võrrandite (24) ja (25) sulgemiseks, olid võetud artiklist Tamm et al. (2012) (maksimaalse tähelise mudeli lähendist). Nende abil on määratavad galaktika tihedusjaotus (28) ja potentsiaal (12). Parameetrite väärtused on toodud tabelis 1.

Komponent	a_0 (kpc)	q	N	d_N	ρ_0 ($M_\odot \text{pc}^{-3}$)	M ($10^{10} M_\odot$)
Mõhn	0.87	0.73	4.0	11.67	25741.82	4.9
Ketas	8.50	0.10	1.0	2.67	0.25	4.8
Tumeaine halo	113.37	1.00	6.0	17.67	65.95	364.3

Tabel 1: Andromeeda komponente iseloomustavad parameetrid.

2.2 Testarvutused

Dispersiooni mudeli loomiseks on vaja leida vabade parameetrite a_1 , a_2 , b_2 , z_0 ja β väärtused, mis annavad kooskõlalise lahendi Jeans'i võrranditele (44) ja (45). Kuna Andromeedat lähendati koosnevana kahest tähelisest komponendist (mõhn ja ketas), siis vabade parameetrite komplekte on samuti kaks – dispersioon arvutatakse eraldi iga komponendi jaoks. Kooskõlastamist teostati programmiga MultiNest, mis aga vajab aprioorseid jaotusi parameetrite jaoks ehk piirkondi, kust sobivaid väärtusi otsida. Nende piirkondade leidmiseks, aga ka tulemuse stabiilsuse kontrollimiseks, tehti testarvutused, kus vaadati, kuidas iga parameetri väärtuse muutus mõjutab lahendeid. Et teha otsimist võimalikult optimaalseks ja efektiivseks, muudeti ühe parameetri väärtus 10 korda, teised aga jäeti fikseerituks. Parameetrite väärtused võrdsustati alguses ühega ning eeldatakse, et need on mõlema komponendi jaoks samad. Nii toimiti kõikide parameetrite puhul, välja arvatud β , mida fikseeriti väärtustele $\beta_{\text{mõhn}} = 0.2$ ja $\beta_{\text{ketas}} = 0.9$. Kuna definitsiooni järgi kehtib $0 \leq \beta \leq 1$, seda võeti otsitavaks piirkonnaks ning testarvutusi ei tehtud.

Lõpptulemuse huvides võrreldi omavahel projekteeritud dispersioonid (57) mööda galaktika peatelge ($z = 0$), kus sisend dispersioonid (σ_r^2 , σ_z^2 , σ_θ^2) arvutati lähtudes alguses ühest

ja siis teisest Jeans'i võrrandist, kasutades selleks dispersioonide suhete avaldise (26), (41), (42). Tulemused on toodud graafikutel 5, 6, 7 ja 8. Nii toimiti ainult testarvutuste puhul, reaalsel kooskõlastamist viidi läbi iga tähelise komponendi jaoks eraldi nagu kirjeldatud peatükis 1.7, et vältida kõdumist kahe parameetrite komplekti vahel. Dispersioonide arvutamisel vajalik võrrandite (44) ja (45) adaptiivne numbriline integreerimine teostati *GNU Scientific Library*¹ abiga.

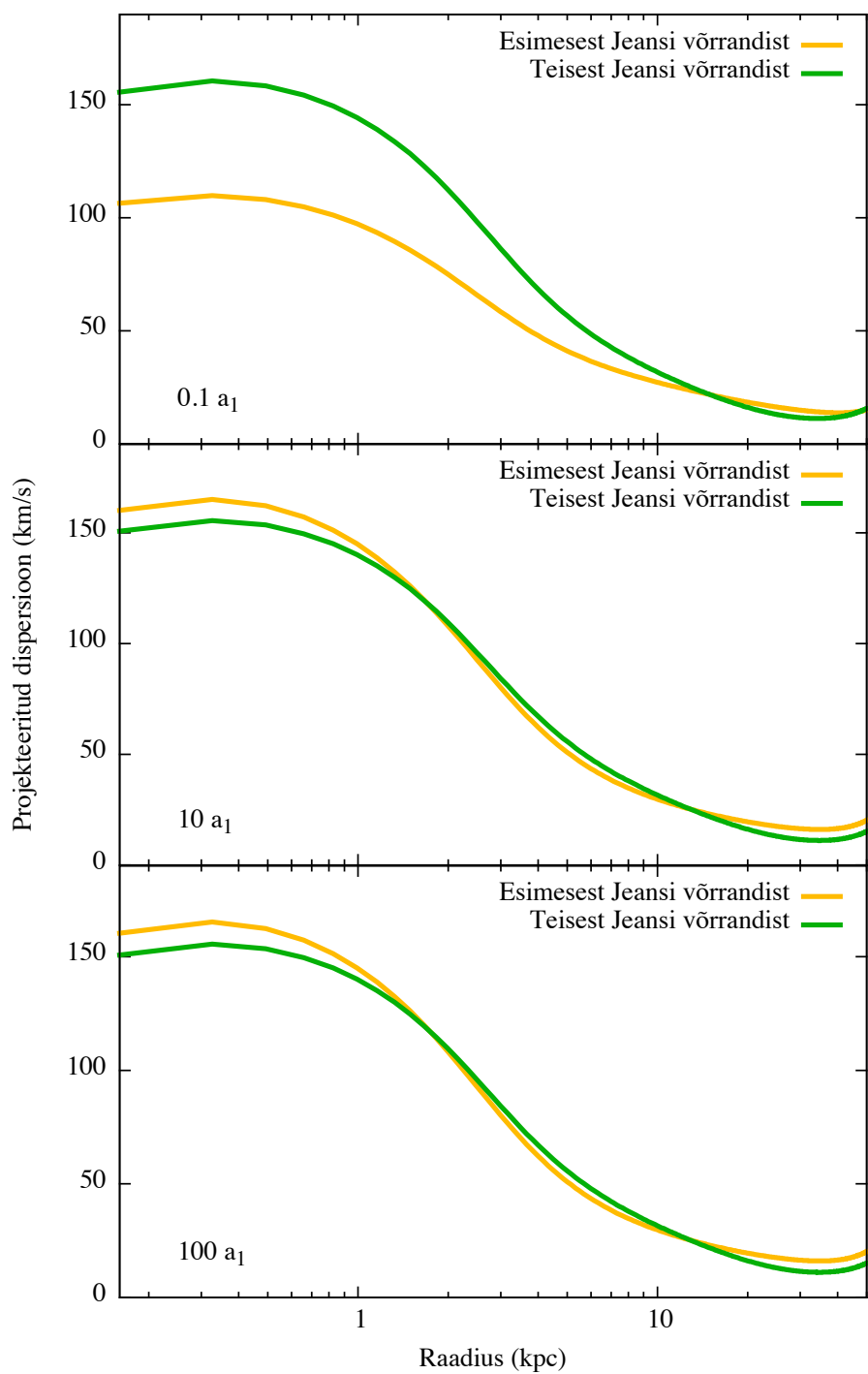
Graafikul 5 on näha, et parameetri a_1 muutus mõjutab suuremal määral teisest Jeans'i võrrandist tuletatud projekteeritud dispersiooni. Kooskõla läheb paremaks a_1 suurenedes, ent mingist väärtusest alates olulist muutust enam ei toimu.

Graafikust 6 tuleb, et ka parameetri a_2 muutus mõjutab oluliselt rohkem teisest Jeans'i võrrandist tuletatud projekteeritud dispersiooni. Kooskõla läheb paremaks aga a_2 vähenedes, ent jällegi mingist väärtusest alates olulist muutust enam ei esine.

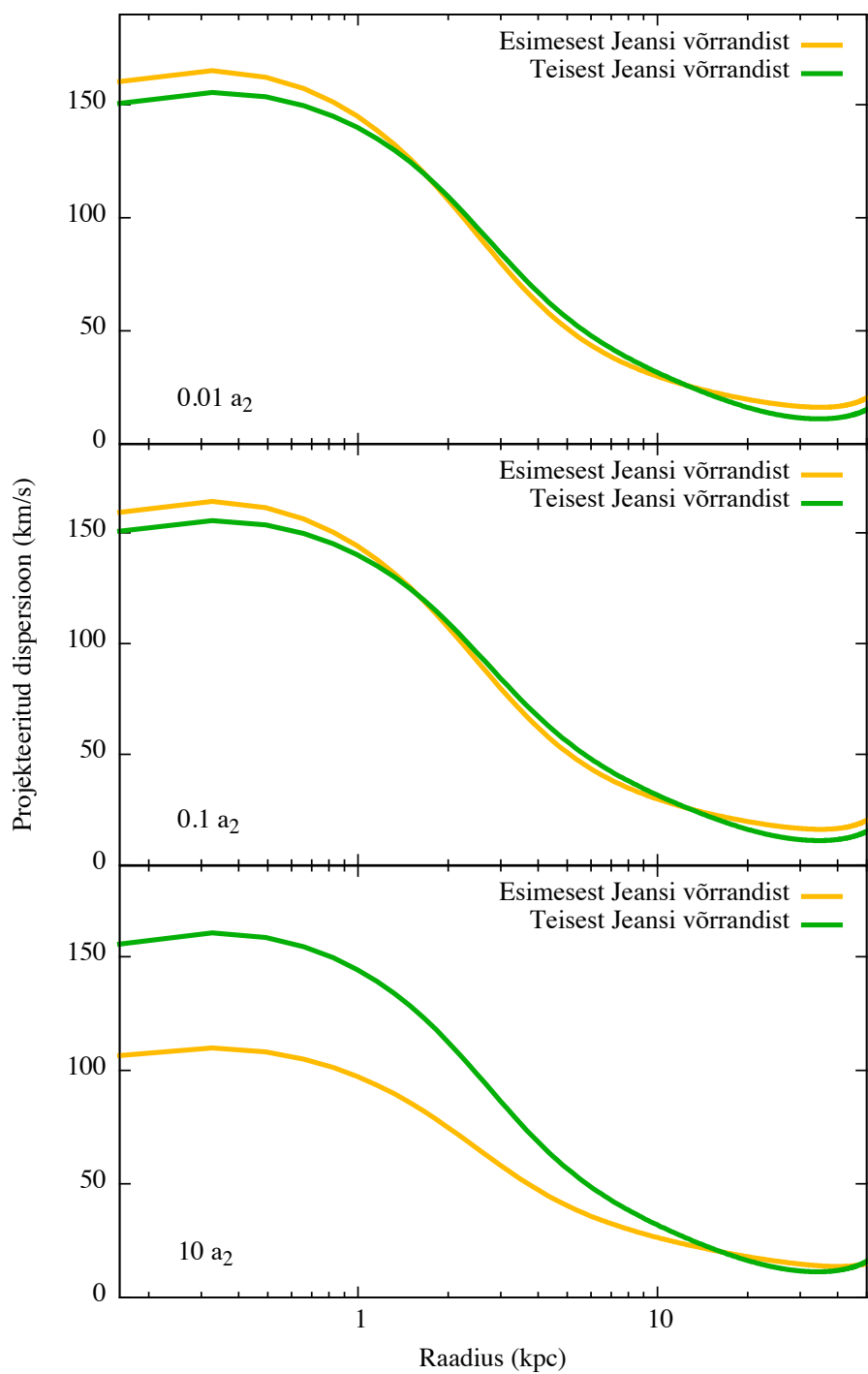
Graafiku 7 järgi parameetri b_2 muutus mõjutab mõlemad projekteeritud dispersioonid üsna vähesel määral. Kooskõla on küll veidi parem väiksemate b_2 väärtuste puhul.

Graafikul 8 on näha, et parameetri z_0 muutus mõjutab esimesest Jeans'i võrrandist tuletatud projekteeritud dispersiooni kaugemat otsa. Kooskõla läheb üldiselt paremaks z_0 suurenedes, ent liiga suurte väärtuste puhul kaob jälle ära.

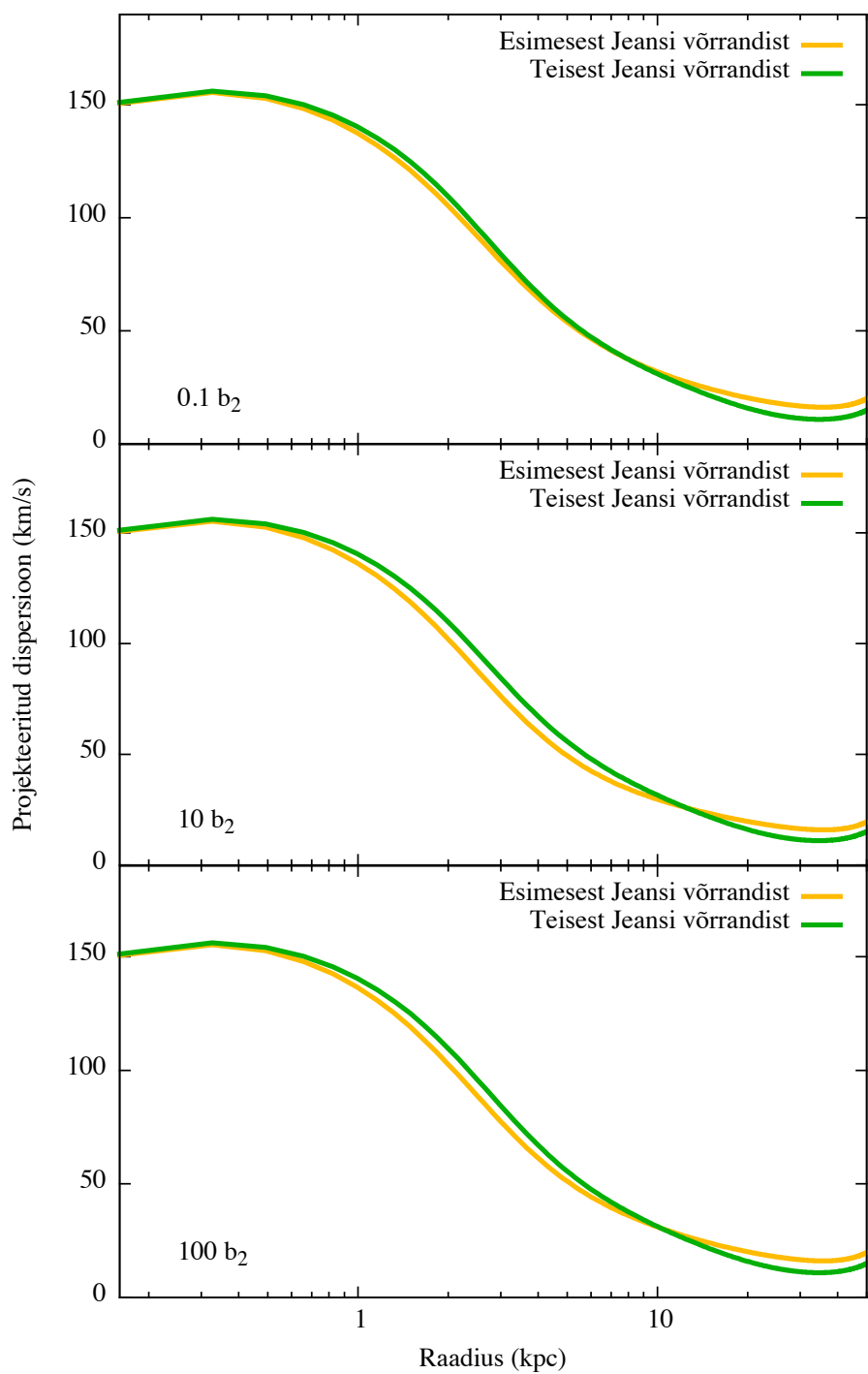
¹<http://www.gnu.org/software/gsl>



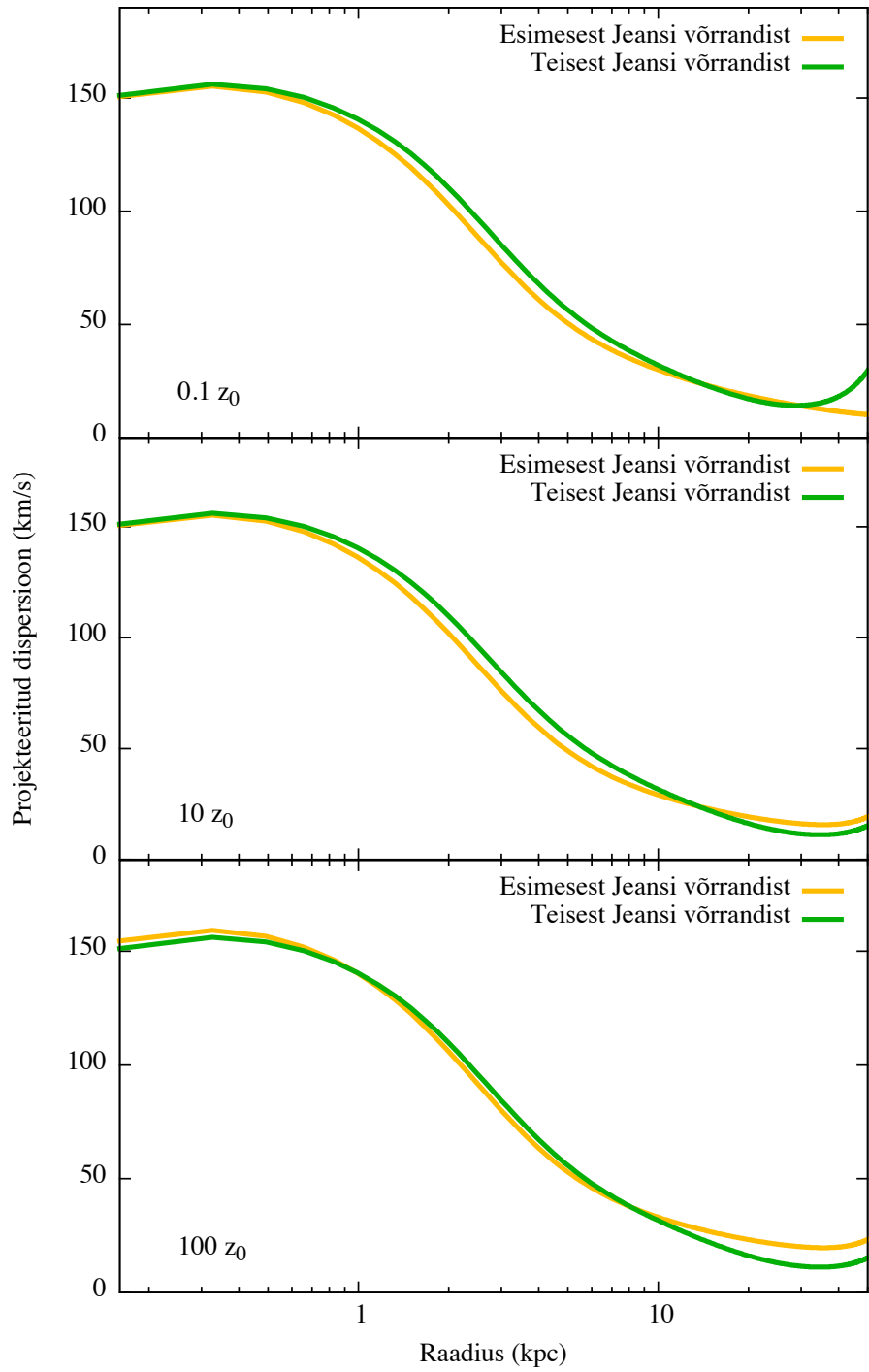
Joonis 5: Parameetri a_1 mõju projekteeritud dispersioonidele.



Joonis 6: Parameetri a_2 mõju projekteeritud dispersioonidele.



Joonis 7: Parameetri b_2 mõju projekteeritud dispersioonidele.



Joonis 8: Parameetri z_0 mõju projekteeritud dispersioonidele.

2.3 Lõplik mudel

Tuginedes testarvutustele, teostati funktsiooni (49) minimiseerimine, mis andis lõpliku dispersioonide mudeli. Parameetrite a_1 , a_2 , b_2 , z_0 ja β väärtused mõlema tähelise komponendi jaoks, mis koostatud mudeli raames andsid kõige parema kooskõla Jeans'i võrranditele, on toodud tabelis 2. Mudel loodi sõltumata kinemaatika vaatlusandmetest, ent selle headuse ja kooskõla kontrolliks võrreldi seda vaatlustest saadud Andromeeda galaktika pöörlemiskiiruste ja dispersioonidega.

Komponent	a_1	a_2	b_2	z_0	β
Mõhn	9.92	0.01	0.01	79.19	0.95
Ketas	3.72	0.01	7.83	166.64	0.42

Tabel 2: Kooskõlastamise parameetrid mõhna ja ketta jaoks.

2.4 Kinemaatika vaatlusandmed

Andromeedast on tehtud arvukad kõrge lahutusega fotomeetrilised ja spektroskoopilised vaatlused. Viimased on antud töö jaoks olulise tähtsusega, kuna annavad informatsiooni pöörlemiskõvera ja dispersiooni kohta. Et mudelit saaks rakendada võimalikult kaugete galaktika tsentrist, kombineeriti spektroskoopilised vaatlused kahest eritüüpi sihtobjektist: galaktika tähtede vaatlused ning galaktika ümber olevate planetaarsete udukogude vaatlused. Esimesed annavad andmed galaktika siseosa, teised aga välisosa kohta. Viited antud töö raames kasutatud andmetele koos nende ruumilise ulatusega on toodud tabelis 3. Määramatusteks võeti kombinatsioon *bootstrap*-meetodiga leitud statistilistest ja vaatlusvigadest (Tempel et al., 2007) ning tähtede vaatlused keskmistati omavahel.

Vaatluste sihtobjekt	Viide	R_{\max} (kpc)
Tähed	McElroy (1983)	2.263
	Kormendy (1988)	0.185
	van der Marel et al. (1994)	0.185
	Kormendy ja Bender (1999)	0.185
Planetaarsed udukogud	Merrett et al. (2006)	19.907
	Halliday et al. (2006)	10.689

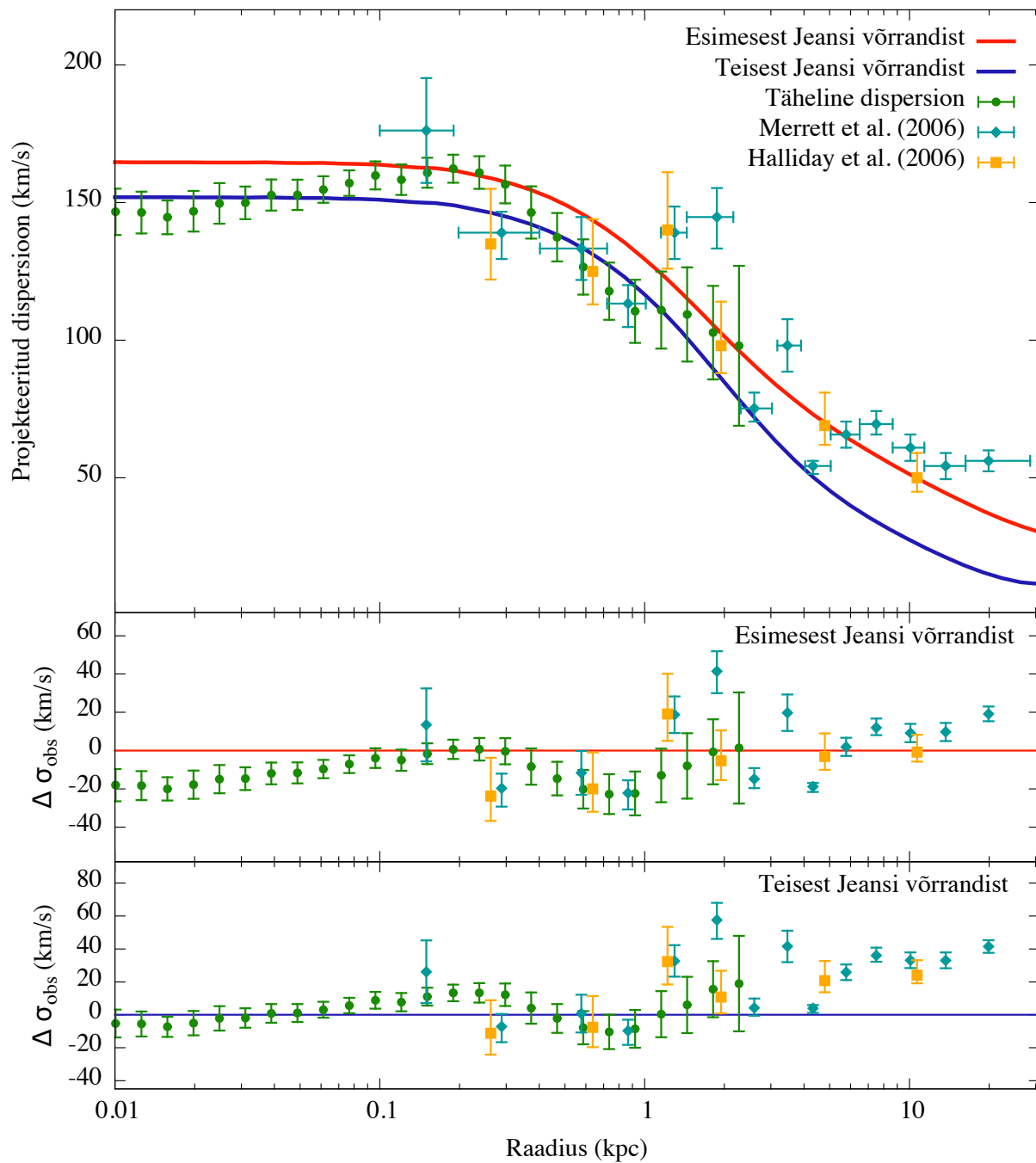
Tabel 3: Vaatlusandmed Andromeeda galaktika tähtede ja planetaarsete udukogude kiiruste ja dispersioonide kohta koos nende ruumilise ulatusega mööda galaktika peatelge.

2.5 Tulemused

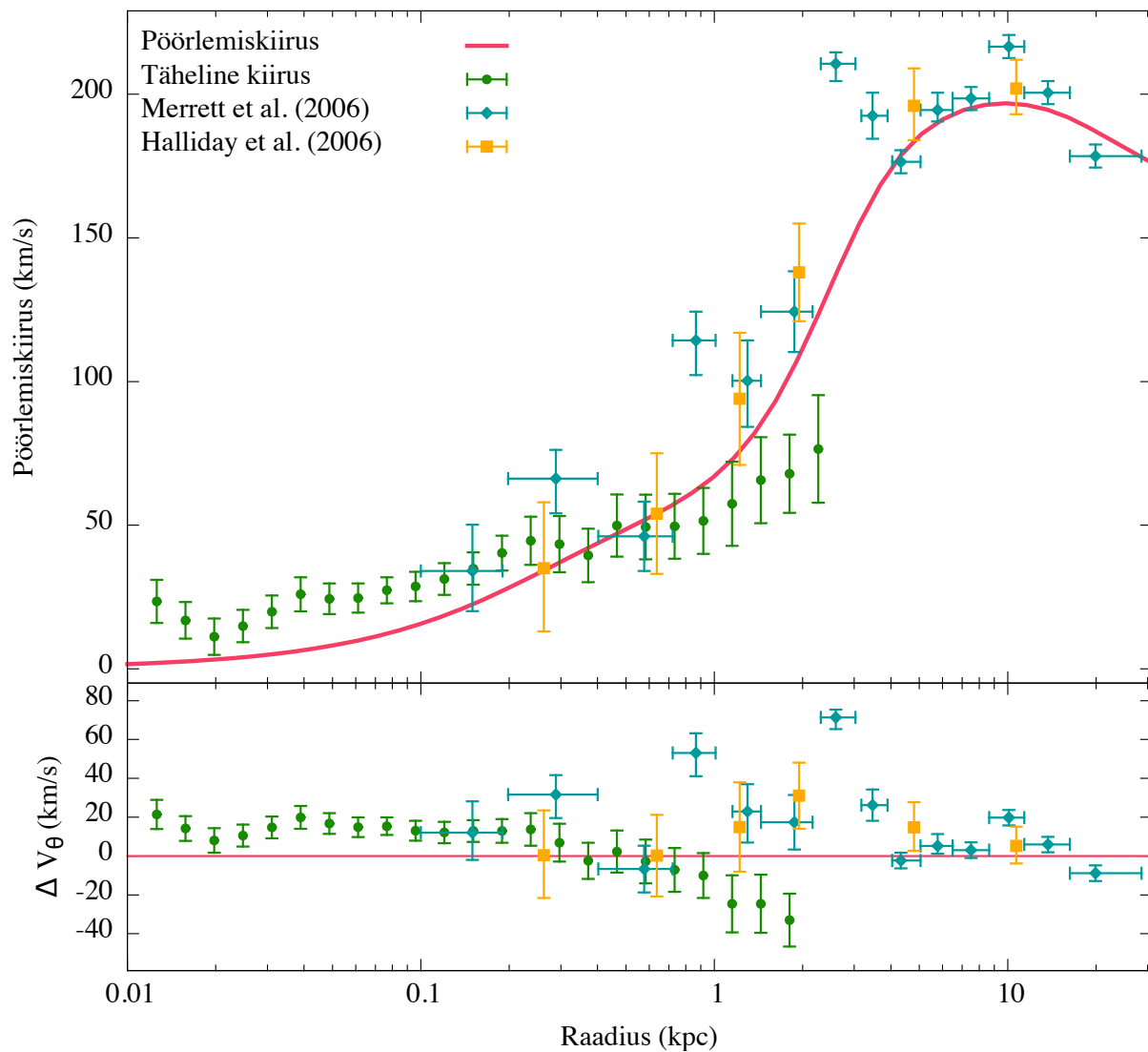
Saadud mudelist leiti dispersioonid ja pöörlemiskiirus mööda galaktika peatelge. Galaktika keskosa lähiümbrust ei vaadatud, kuna selles piirkonnas pole teoreetilised väärtused Jeans'i võrranditest (44) ja (45) arvutatavad. Et näidata, kui hästi on õnnestunud kooskõlastamine, dispersioonid arvutati tuginedes alguses ühele ja siis teisele Jeans'i võrrandile. Jaotuste võrdlus vaatlustega on toodud graafikutel 9 ja 10, kus parema ülevaate jaoks on toodud ka vaatluste ja mudeli vahe.

Graafikust 9 on näha, et kahe Jeans'i võrrandi lahendi vahel on saavutatud hea kooskõla. Mudelprofiilide omavaheline lahknevus on samas suurusjärgus kui vaatluspunktide määramatus, ning kumbagi ei saa eelistada vaatlusandmete kirjeldamisel. Samas on näha, et esimese Jeans'i võrrandi baasil leitud profiil ülehindab dispersioonide väärtusi galaktika siseosades, teise võrrandi baasil leitud profiil aga alahindab väärtusi galaktika välisosades. Graafikust 10 aga omakorda tuleb, et mudelist saadud pöörlemiskiiruse profiil alahindab tegelikke väärtusi galaktika mõhna piirkonnas. Selle ja ka dispersiooniprofiilide mittetäielikku kokkulangemise põhjuseid võib olla mitu. Esiteks, kooskõlastamisel eeldati konstansteid vabade parameetrite a_1 , a_2 , b_2 , z_0 , β väärtusi, üldjuhul on aga z_0 ja β silindriliste koordinaatide R ja z funktsioonid. Teiseks, Andromeeda morfoloogia ja ülesehitus on tegelikkuses keerulisemad kui seda

lähendamisel arvesse võeti. Mudeli komponentide arvu suurendamine (näiteks tuuma, gaasi ketta ja tähelise halo lisamine) võib tõsta tulemuste täpsust. Kolmandaks, eeldati galaktikate statsionaarsust ja pörkevaba olekut, mis ei vasta reaalsele olukorrale. Samuti, kuna arvutused tehti numbriliselt (analüütiline integreerimine pole funktsioonide kuju tõtta võimalik), esinevad arvutusvead võisid mõjutada tulemust. Teiselt poolt, dispersioonide ja pöörlemiskiiruste andmetes võivad esineda süstemaatilised vead, mis ei olnud arvesse võetud ning ei kajastu seega vaatluspunktide määramatustes.



Joonis 9: Projekteeritud dispersioon mööda Andromeeda galaktika peatelge. Täidetud ringid näitavad tähtede dispersioone, ruudud ja rombid aga planetaarsete udukogude dispersioone. Mudel on kujutatud pidevate joontega ülemisel joonisel. Keskmine ja alumine joonis näitavad vaatluslikke ning vastavalt esimese ja teise Jeans'i võrrandi abil saadud dispersioonide vahet.



Joonis 10: Pöörlemiskiirus mööda Andromeeda galaktika peatelge. Täidetud ringid näitavad tähelist pöörlemiskiirust, ruudud ja rombid aga planetaarsete udukogude pöörlemiskiirust. Mudel on kujutatud pideva joonega ülemisel joonisel. Alumine joonis näitab vaatluste ja mudeli vahet.

Kokkuvõte

Tähtede dispersioon ja pöörlemiskiirus on olulised parameetrid galaktika iseloomustamisel, mis annavad ülevaate selle tähelisest ja kogumassist. Nad võimaldavad mõista ja hinnata selliseid galaktika struktuuri komponente nagu tumeaine halo ja tsentraalne must auk. Dispersioone kirjeldavad Jeans'i võrrandid, mis on aluseks galaktikate hüdrodünaamilistele mudelitele. Üldiselt moodustavad võrrandid süsteemi, mis pole suletud ning mille lahendamine pole seega ilmne.

Töö raames leiti kooskõlaline lahend Jeans'i võrranditele, mille baasil tehti galaktikate tähtede dispersioone ja pöörlemiskiirust kirjeldav dünaamiline mudel. Lahendi leidmisel lähtuti sellistest eeldustest galaktikate kohta nagu pörkevaba olek, telgsümmeetrilisus ja stationaarsus. See lubab kirjeldada suurt galaktikate spektri, ent välistab, näiteks, irregulaarseid või kokkupõrkamist läbielavaid galaktikaid. Võrrandite sulgemisel kasutati kolmanda liikumisintegraali teooriat, mis võimaldab määrata dispersioonide suhete avaldised ning annab informatsiooni dispersiooni tensori kohta. Kuna Jeans'i võrrandid oma matemaatilise keerukuse tõttu pole lahendatavad süsteemina, käsitleti neid eraldi ning saadud lahendid kooskõlastati vabade parameetrite muutmiseks. Jeans'i võrrandite kooskõlastatud lahend andis galaktika tähtede dispersioone, üks vabadest parameetritest koos potentsiaali tuletisega võimaldas määrata pöörlemiskiirused.

Saadud dünaamilist mudelit rakendati Andromeeda galaktikale. See on oma ehituse poolest sarnane Linnuteele, mistõttu täiendab selle uurimine meie Galaktika uurimist. Andromeeda lähendati koosnevana mõhnast, kettast ja tumeaine halost. Neid komponente iseloomustavad parameetrid, mis on vajalikud Jeans'i võrrandite sulgemiseks, võeti artiklist Tamm et al. (2012). Jeans'i võrrandite kooskõlastamiseks huvipakkuv vabade parameetrite muutumispikkond pandi paika testarvutuste põhjal. Kooskõlastamine teostati programmi MultiNest abil, dispersioonide ja pöörlemiskiiruse leidmiseks vajalik adaptiivne numbriline integreerimine tehti *GNU Scientific Library* abil (vastav kood kirjutati programmeerimiskeeles Fortran). Dispersioonid ja pöörlemiskiirused projekteeriti vaatesihile.

Lõpliku mudeli kontrollimiseks võrreldi tulemused vaatlusandmetega. Võrdlemist teostati visuaalselt, mitte läbi lähendamise. Tänu asukohale on Andromeedast tehtud arvukad kõrge lahutusega spektroskoopilised vaatlused. Antud töös kasutati andmed tähtede ja galaktika ümber olevate planetaarsete udukogude kohta, et võrrelda mudelit võimalikult kaugel galaktika tsentrast. Illustreerimiseks vaadati väärtused mööda galaktika peatelge. Et näha, kuidas on õnnestunud kooskõlastamise, projekteeritud dispersioonid arvutati lähtudes alguses ühest ja siis teisest Jeans'i võrrandist. Üldiselt olid dünaamilisest mudelist saadud dispersioonide ja pöörlemiskiiruse jaotused heas vastavuses vaatlusandmetega, kuigi kohati mudel ala- või ülehindas tegelikke väärtusi. See võis tuleneda töö käigus tehtud eeldustest kooskõlastamise parameetrite, dispersioonide suhete kuju või Andromeeda ehituse kohta. Võisid esineda ka mitte arvesse võetud süstemaatilised vead vaatlusandmetes.

Antud töö oluliseks tulemuseks on uue meetodi väljatöötamine Jeans'i võrrandite lähendamiseks. Selle baasil tehtud dünaamiline mudel Andromeeda galaktikast on üllatavalt heaks lähendiks reaalsele olukorrale ning Jeans'i võrranditest arvutatud dispersioonid on omavahel heas kooskõlas. Tulevikuplaanideks on parendada loodud mudel: lisada komponente Andromeeda mudelile, lähendada kooskõlastamise parameetreid koordinaatidest sõltuvate funktsioonidega, mitte lihtsalt konstantidega ning uurida dispersioonide ja pöörlemiskiiruste käitumist väljaspool galaktika suurt pooltelge.

Südamlikult tänan oma juhendajat Elmo Tempelit selle tee eest teadusmaailma, mida ta on mulle avanud ning millel mind aidanud. Avaldan tänu Tartu Observatooriumi inimestele meeldiva seltskonna, motiveerimise ja innustamise eest. Tänan õppejõude Tartu Ülikoolist, kes jagasid teadmisi ja armastust füüsikamaailma kohta.

Kasutatud kirjandus

- Agekian, T. A., Nikiforov, I. I., Orlov, V. V. ja Pitjev, N. P. (1995), ‘The third integral of motion’, *Astr. Astrph. Trans.* **7**, 243–245.
- Audren, B., Lesgourgues, J., Bird, S., Haehnelt, M. G. ja Viel, M. (2013), ‘Neutrino masses and cosmological parameters from a Euclid-like survey: Markov Chain Monte Carlo forecasts including theoretical errors’, *J. Cosmology Astropart. Phys.* **1**, 26.
- Barnes, E. I., Sellwood, J. A. ja Kosowsky, A. (2004), ‘Mass Models for Spiral Galaxies from Two-dimensional Velocity Maps’, *AJ* **128**, 2724–2742.
- Binney, J. ja Tremaine, S. (2008), *Galactic Dynamics: Second Edition*, Princeton University Press.
- Boltzmann, L. (1872), ‘Further Studies on the Thermal Equilibrium of Gas Molecules’, *SAW* **66**, 275–370.
- Bridges, M., Lasenby, A. N. ja Hobson, M. P. (2006), ‘A Bayesian analysis of the primordial power spectrum’, *MNRAS* **369**, 1123–1130.
- de Vaucouleurs, G., de Vaucouleurs, A., Corwin, Jr., H. G., Buta, R. J., Paturel, G. ja Fouqué, P. (1991), *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies. Volume I: Explanations and references. Volume II: Data for galaxies between 0^h and 12^h. Volume III: Data for galaxies between 12^h and 24^h.*
- Einasto, J. (1965), ‘On the Construction of a Composite Model for the Galaxy and on the Determination of the System of Galactic Parameters’, *TrAlm* **5**, 87–100.
- Einasto, J. (1970), ‘The Andromeda galaxy M31. II. Hydrodynamical model. Theory.’, *Astrofizika* **6**, 149–163.
- Feroz, F., Hobson, M. P., Cameron, E. ja Pettitt, A. N. (2013), ‘Importance Nested Sampling and the MultiNest Algorithm’, *ArXiv e-prints* .

-
- Feroz, F., Hobson, M. P. ja Bridges, M. (2009), ‘MULTINEST: an efficient and robust Bayesian inference tool for cosmology and particle physics’, MNRAS **398**, 1601–1614.
- Feroz, F. ja Hobson, M. P. (2008), ‘Multimodal nested sampling: an efficient and robust alternative to Markov Chain Monte Carlo methods for astronomical data analyses’, MNRAS **384**, 449–463.
- Fjällborg, M., Heinzle, J. M. ja Uggla, C. (2006), ‘Self-gravitating stationary spherically symmetric systems in relativistic galactic dynamics’, ArXiv GRQC e-prints .
- Graham, R. (1967), ‘On types of velocity distribution and stability of disc galaxies’, MNRAS **137**, 25.
- Gu, Y.-Q. (2008), ‘Stationary Spiral Structure and Collective Motion of the Stars in a Spiral Galaxy’, ArXiv e-prints .
- Halliday, C., Carter, D., Bridges, T. J., Jackson, Z. C., Wilkinson, M. I., Quinn, D. P., Evans, N. W., Douglas, N. G., Merrett, H. R., Merrifield, M. R., Romanowsky, A. J., Kuijken, K. ja Irwin, M. J. (2006), ‘Planetary nebula velocities in the disc and bulge of M31’, MNRAS **369**, 97–119.
- Jeans, J. H. (1915), ‘On the theory of star-streaming and the structure of the universe’, MNRAS **76**, 70–84.
- Jeans, J. H. (1919), ‘Bakerian Lecture, 1917: The Configurations of Rotating Compressible Masses’, RSLPT. Ser. A **218**, 157–210.
- Klypin, A., Zhao, H. ja Somerville, R.Š. (2002), ‘ Λ CDM-based Models for the Milky Way and M31. I. Dynamical Models’, ApJ **573**, 597–613.
- Kormendy, J. (1988), ‘Evidence for a supermassive black hole in the nucleus of M31’, ApJ **325**, 128–141.
- Kormendy, J. ja Bender, R. (1999), ‘The Double Nucleus and Central Black Hole of M31’, ApJ **522**, 772–792.

-
- Kutuzov, S. A. ja Einasto, J. (1968), ‘On constructing models of stellar systems. I. On the classification of the models.’, *PTAO* **36**, 341–356.
- Kuzmin, G. G. (1952), ‘Tretij integral dvizheniya zvezd i dinamika stacionarnoj Galaktiki. Chast’ 1. Third integral movement of the stars and dynamics of the stationary Galaxy. Part 1.’, *PTAO* **32**, 332–368.
- Li, Y.-S. ja White, S. D. M. (2008), ‘Masses for the Local Group and the Milky Way’, *MNRAS* **384**, 1459–1468.
- Lin, C. C. (1983), Quasi-stationary spiral structure in galaxies, *in* E. Athanassoula, ed., ‘Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies’, Vol. 100 of *IAU Symposium*, p. 117.
- Lynden-Bell, D. (1962), ‘Stellar dynamics. Only isolating integrals should be used in Jeans theorem’, *MNRAS* **124**, 1.
- Manabe, S. (1979), ‘Applicability of Approximate Third Integral of Motion for Stellar Orbits in the Galaxy’, *PASJ* **31**, 369–394.
- Marinacci, F., Fraternali, F., Ciotti, L. ja Nipoti, C. (2010), ‘Stationary models for the extraplanar gas in disc galaxies’, *MNRAS* **401**, 2451–2462.
- Martinet, L. ja Hayli, A. (1971), ‘Galactic Orbits and Integrals of Motion for ‘High-Velocity’ Stars. I’, *A&A* **14**, 103.
- McElroy, D. B. (1983), ‘Dynamics of the stellar component of the bulge of M31’, *ApJ* **270**, 485–506.
- Merrett, H. R., Merrifield, M. R., Douglas, N. G., Kuijken, K., Romanowsky, A. J., Napolitano, N. R., Arnaboldi, M., Capaccioli, M., Freeman, K. C., Gerhard, O., Cocato, L., Carter, D., Evans, N. W., Wilkinson, M. I., Halliday, C. ja Bridges, T. J. (2006), ‘A deep kinematic survey of planetary nebulae in the Andromeda galaxy using the Planetary Nebula Spectrograph’, *MNRAS* **369**, 120–142.

-
- Novak, E. ja Rudolf, D. (2013), ‘Computation of expectations by Markov chain Monte Carlo methods’, ArXiv e-prints .
- Ollongren, A. (1962), ‘Three-Dimensional Galactic Stellar Orbits’, *Ann. Obs. Lund.* **18**, 5–63.
- Slosar, A., Carreira, P., Cleary, K., Davies, R. D., Davis, R. J., Dickinson, C., Genova-Santos, R., Grainge, K., Gutiérrez, C. M., Hafez, Y. A., Hobson, M. P., Jones, M. E., Kneissl, R., Lancaster, K., Lasenby, A., Leahy, J. P., Maisinger, K., Marshall, P. J., Pooley, G. G., Rebolo, R., Rubiño-Martin, J. A., Rusholme, B., Saunders, R. D. E., Savage, R., Scott, P. F., Sosa Molina, P. J., Taylor, A. C., Titterington, D., Waldrum, E., Watson, R. A. ja Wilkinson, A. (2003), ‘Cosmological parameter estimation and Bayesian model comparison using Very Small Array data’, *MNRAS* **341**, L29–L34.
- Spreckels, H. ja Thielheim, K.Ö. (1982), ‘Plane galactic orbits in stationary and time-dependent rotating bars’, *A&A* **108**, 206–212.
- Stickley, N. R. ja Canalizo, G. (2014), ‘Stellar Velocity Dispersion in Dissipative Galaxy Mergers with Star Formation’, *ApJ* **786**, 12.
- Tamm, A., Tempel, E., Tenjes, P., Tihhonova, O. ja Tuvikene, T. (2012), ‘Stellar mass map and dark matter distribution in M 31’, *A&A* **546**, A4.
- Tempel, E. ja Tenjes, P. (2006), ‘Line-of-sight velocity dispersions and a mass-distribution model of the Sa galaxy NGC 4594’, *MNRAS* **371**, 1269–1279.
- Tempel, E., Tamm, A. ja Tenjes, P. (2007), ‘Visible and dark matter in M 31 - II. A dynamical model and dark matter density distribution’, ArXiv e-prints .
- Tenjes, P. (1994), ‘The mass-to-light ratio of the visible matter’, *Balt. Astr.* **3**, 180–190.
- Tenjes, P., Einasto, J., Maitzen, H. M. ja Zinnecker, H. (2001), ‘Origin and possible birthplace of the extreme runaway star HIP 60350’, *A&A* **369**, 530–536.
- Tenjes, P., Haud, U. ja Einasto, J. (1994), ‘Galactic models with massive coronae IV. The Andromeda galaxy, M 31’, *A&A* **286**, 753–767.

-
- van der Marel, R. P., Rix, H. W., Carter, D., Franx, M., White, S. D. M. ja de Zeeuw, T. (1994), ‘Velocity Profiles of Galaxies with Claimed Black-Holes - Part One - Observations of M31 M32 NGC3115 and NGC4594’, MNRAS **268**, 521.
- van Uitert, E., Hoekstra, H., Franx, M., Gilbank, D. G., Gladders, M. D. ja Yee, H. K. C. (2013), ‘Stellar mass versus velocity dispersion as tracers of the lensing signal around bulge-dominated galaxies’, A&A **549**, A7.
- van Wijk, U., Smith, B. F. ja Daniels, W. E. (1966), ‘On the Velocity Distribution of Low-Velocity Stars in the Solar Neighborhood.’, AJ **71**, 401.
- Wilkinson, A. ja James, R. A. (1982), ‘A stationary and a slowly rotating model of a triaxial elliptical galaxy’, MNRAS **199**, 171–196.
- Woolley, R. (1978), ‘The velocity ellipsoid of RR Lyrae variable stars’, MNRAS **184**, 311–317.

Modelling Galaxy Stellar Dynamics on the Base of Andromeda

Olga Tihhonova

Summary

Stellar dispersions and rotational velocity are important parameters while describing a galaxy, as they give overview of its stellar and total mass. They provide insight into properties of such galaxy structural components as dark matter halo and black hole. Dispersions are described by Jeans equations, which serve as a base while constructing hydrodynamical models of galaxies. In general, these equations form a system, which is not closed, so their solving is not straightforward.

In the working process, a self-consistent solution of Jeans equations was found, which was used as a base for making a dynamic model describing dispersions and rotational velocity of stars in the galaxies. In order to obtain the solution, galaxies were assumed to be collisionless, stationary and have axial symmetry. This permits to describe a wide range of galaxies, but excludes, for example, irregular and colliding ones. To close the system of equations, the theory of the third integral was used, which permits to establish the form for dispersion relations and gives information about the dispersion tensor. As Jeans equations can not be solved as a system due to their mathematical complexity, they were regarded separately and the solutions were made self-consistent with the change of free parameters. The solution of these equations gave stellar dispersions, one of free parameters in combination with potential derivative permitted to compute rotational velocities.

Dynamical model obtained in that way was applied to Andromeda galaxy. It is similar in construction to Milky Way, so its study supplements exploration of our Galaxy. Andromeda was approximated as consisting of bulge, disc and dark matter halo. The parameters, which describe those components and are necessary for closing Jeans equations, were taken from the article Tamm et al. (2012). Test computations were made in order to establish the

bounds for free parameters necessary to make the solutions self-consistent. The final values of these parameters were established with programm called MultiNest, adaptive numerical integration for computing dispersions and rotational velocities was done with the help of GNU Scientific Library (code for this was written in Fortran programming language). Dispersions and rotational velocities were projected along the line of sight.

To verify the final model, results were compared with the observations. Here, the comparison means visual confrontation, not model fitting. Thanks to the proximity in position, there are various high resolution spectroscopic data of Andromeda. In this work data about stars and planetary nebulaes was used, in order to extend the model as far form the center of the galaxy as possible. For illustration values along galaxy semi-major axis were taken. To see how well the concordance between the equations was done, projected dipersions were computed based on each Jeans equation separately. In general, dispersions and rotational velocity obtained from the dynamic model were in good agreement with observations, though in some galaxy parts values were under- or overestimated. The discrepancy could come from the suppositions about concordance parameters, form of dispersion relations or Andromeda structure approximation made during the work. Possibly, some systematics were not taken into account while estimating data point errors.

The important result of this work is the development of the alternative solution of the Jeans equations. Andromeda dynamic model based on that solution is in a surprisingly good agreement with observational data, and dispersions computed separately from Jeans equations are in concordance with each other. Future plans include refining of the built model: adding more components to the Andromeda model, fitting concordance parameters with functions of coordinates, not just constants, and analysing behaviour of stellar dispersions and rotational velocity outside galaxy semi-major axis.

I cordially thank my supervisor Elmo Tempel for the road to the scientific wolrd that he has opened to me and where he helped me. I thank Tartu Observatory staff for pleasant atmosphere, motivation and inspiration. I thank professors from Tartu University for shearing knowledge and love about world of physics.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, _____ *Olga Tihhonova* _____,
(*autori nimi*)

annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

_____ "*Galaktikate stellaardünaamika modelleerimine Andromeeda näitel*" _____

(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on _____ *Elmo Tempel* _____,
(*juhendaja nimi*)

1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **29.05.2014**