

TARTU ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND  
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite õppetool

Evely Leetma  
**Silumisülesanded**  
Magistritöö

Juhendaja: dots. P. Oja

Tartu 2005

# Sissejuhatus

Eksperimentaalsel teel saadud informatsioon sisaldab alati kas meetodist või mõõteseadmetest tulenevaid ebatäpsusi. Informatsiooni töötlemisel võivad ebatäpsused algandmetes viia suurte kõrvalekalleteni tulemustes. Kui algandmete töötlemise käigus eemaldatakse väga suured kõrvalekalded, räägitakse silumisest. Kõige enam kasutatakse silumisel splaine. Esmalt mõisteti splainide all vastava astme polünoomi tükkidest koosnevaid funktsioone, mis on mingi arv kordi pidevalt diferentseeruvad. Hiljem ei koosnenud splainid enam ainult polünoomi tükkidest, vaid kindlate diferentsiaalvõrrandite lahenditest. Esimesena vaadeldi sellisel kujul trigonomeetrilisi splaine. Laialdast kasutust on leidnud veel B-splainid ja naturaalsplainid. Termin naturaalne viitab sellele, et vaadeldavad splainid osutuvad spetsiaalsel kujul oleva variatsioonülesande lahendiks. Ühe muutuja splainide kohta saab rohkem informatsiooni raamatutest [11] ja [13], mitme muutuja splaine käsitleb raamat [14]. Head diferentseeruvus- ja aproksimatsiooni omadused, algoritmilisus ja lihtsus muudavad splainid universaalseks vahendiks informatsiooni töötlemisel. Splainide abil saab diskreetse eksperimentaalse informatsiooni kujundada pidevaks funktsiooni kujul esitatavaks informatsiooniks, mis ligikaudu peegeldab reaalselt toimuvat protsessi. Teisest küljest, iga pidevat funktsiooni saab kuitahes täpselt lähendada splainidega.

Esimesena pakkus splainidega silumise idee välja I. J. Schoenberg oma 1946 aasta töös [7]. Tähtis roll splainidega silumisülesannete käsitlemise arengus on J. C. Holladay töö [4] aastast 1957, mis käsitles kuupsplainidega interpoleerimist. Ta formuleeris ülesande järgmiselt: leida funktsioon  $\varphi \in C^2[a, b]$ , mis interpoleeriks algandmeid ning minimiseeriks funktsionaali

$$\int_a^b |\varphi''(x)|^2 dx.$$

Ülesande lahendiks on kuupsplaine  $S(x)$  n.n. loomulike rajatingimustega  $S''(a) = 0$  ja  $S''(b) = 0$ . See tulemus üldistati hiljem kõigi paaritu astme splainide jaoks.

Tuginedes E. T. Whittakeri formuleeringule aastast 1923, sõnastas I. J. Schoenberg oma 1964 aasta töös [8] silumisülesande järgmiselt: leida funktsioon  $\varphi \in L_2^{(r)}[a, b]$ , mis minimiseeriks kumera funktsionaali

$$\alpha \int_a^b \left| \frac{d^r}{dx^r} \varphi(x) \right|^2 dx + \sum_{i=0}^N (\varphi(x_i) - z_i^0)^2,$$

kus  $\alpha > 0$  ning  $z_i^0$ ,  $i = 0, \dots, N$ , on silutavad väärtused sõlmedes  $x_i$ . Ta näitas, et lahendiks on  $2r - 1$  astme splaine loomulike rajatingimustega ning lahend on ühene. Aastal 1967 tõestas C. H. Reinsch oma töös [6], et kuupsplainide korral saab silumisülesande taandada viiediagonaalse süsteemi lahendamisele.

Teine lähenemine silumisülesannetele on seotud funktsionaali

$$\int_a^b \left| \frac{d^r}{dx^r} \varphi(x) \right|^2 dx$$

minimiseerimisega nii, et on täidetud tõkketingimused

$$|\varphi(x_i) - z_i^0| \leq \varepsilon_i, \quad i = 0, \dots, N,$$

kus  $\varepsilon_i \geq 0$ ,  $i = 0, \dots, N$ , on antud arvud. Ülesande lahendiks Sobolevi ruumis  $W_2^r[a, b]$  on jällegi splainid. Esimesena vaatles sellisel kujul olevat silumisülesannet M. Atteia oma töös [2] aastast 1967.

Mitme muutuja splainide korral on kõige paremini välja arendatud teooria naturaalsplainide kohta. Olgu ruumis  $\mathbb{R}^n$  antud lõplik arv suvaliselt asetsevaid punkte  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ning kõigis punktides väärtused  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Interpolatsiooniülesande lahendina otsitakse võimalikult siledat funktsiooni  $S(X)$  nii, et on täidetud tingimused

$$S(X_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Siledus tähendab antud juhul ühetasasust või sujuvust, teisisõnu, interpolatsiooniülesande lahendina otsitakse funktsiooni  $g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ , mis rahuldaks interpolatsioonitingimusi ja minimeeriks funktsionaali

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha g)^2 dX,$$

kus  $D^\alpha g$  on  $r$  järku osatuletis funktsioonist  $g$ .

Mitme muutuja splainide rakendustes on kõige levinum juhtum, kus  $r = n = 2$ . Siis minimeeritakse funktsionaali

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\Delta g)^2 dX.$$

Selliseid splaine kasutatakse geoloogias maakoore kihtide kindlaksmääramisel, hüdroloogias ja meteoroloogias kaartide joonestamisel, toetuspunktidega elastsete plaatide kaju kindlakstegemisel ja paljudel muudel juhtudel, kui on vaja aproksimeerida pindasid või uurida ruumilisi muutusi. Näitena võib tuua veel  $n = 1$  korral elastse tala, millele mõjuvad punktilised koormused. Selliste talade kaju uurimisega tegeles juba Leonardo da Vinci.

Käesoleva magistritöö põhieesmärgiks on uurida tõketega silumisülesande lahendamist. Töö esimeses peatükis esitatakse rida abitulemusi, mida kasutatakse hiljem põhitulemuste tõestustes. Teises peatükis esitatakse üldine teooria naturaalsplainide kohta. Kolmandas peatükis formuleeritakse kaaludega ja tõketega silumisülesanne, esitatakse tarvilikud ja piisavad tingimused ühese lahendi olemasoluks. Neljandas peatükis vaadeldakse üht võimalikku algoritmi tõketega silumisülesande lahendamiseks. Mõningatel lisaeldustel on tõestatud ka algoritmi lõplikkus, kuid üldjuhul on algoritmi lõplikkus veel lahendamata probleem. Viimases peatükis ja töö lisades on esitatud paketi Mathcad abil teostatud illustreerivad näited. Kuna vaadeldava algoritmi igal sammul on vaja lahendada interpolatsiooniülesanne, on esmalt uuritud just seda. Vaadeldud on ühe muutuja kuupsplainidega interpoleerimist neljal erineval juhul: esimeste momentide, teiste momentide, B-splainide ja naturaalsplainide kaudu. Praktiliste näidete lõpetuseks on toodud programm, mis lahendab ühe muutuja tõketega silumisülesandeid sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritmi abil.

# 1. Abitulemused

## 1.1. Võrratused polünoomide hindamiseks

Selles punktis esitame tulemuse mitme muutuja polünoomide hindamise kohta.

**Lause 1.1.** Olgu  $x, y \geq 0$ . Kehtib hinnang

$$x^p y^q \leq \frac{p}{p+q} x^{p+q} + \frac{q}{p+q} y^{p+q} \quad (1.1)$$

suvaliste reaalarvude  $p, q \geq 1$  korral.

Tõestus. Kui  $x = 0$  või  $y = 0$ , siis kehtib seos (1.1) triviaalselt. Olgu nüüd  $x, y > 0$ . Jagame võrratuse (1.1) mõlemad pooled positiivse suurusega  $x^p y^q$ , saame

$$1 \leq \frac{p}{p+q} \left(\frac{x}{y}\right)^q + \frac{q}{p+q} \left(\frac{y}{x}\right)^p,$$

mis on samaväärne võrratusega (1.1). Tähistame  $z = \frac{x}{y}$  ning vaatleme funktsiooni

$$h(z) = \frac{p}{p+q} z^q + \frac{q}{p+q} z^{-p}, \quad z > 0.$$

Kuna

$$h'(z) = \frac{pq}{p+q} z^{q-1} - \frac{pq}{p+q} z^{-p-1} = \frac{pq}{p+q} (z^{q-1} - z^{-p-1}),$$

siis funktsiooni  $h(z)$  ainsaks statsionaarseks punktiks on  $z = 1$ . Uurime funktsiooni  $h(z)$  käitumist punkti  $z = 1$  ümbruses. Kuna  $q - 1 \geq 0$  ja  $-p - 1 \leq -2$ , siis  $z > 1$  korral  $h'(z) > 0$  ning  $0 < z < 1$  korral  $h'(z) < 0$ . Seega punktis  $z = 1$  on funktsioonil  $h(z)$  globaalne miinimum. Et  $h(1) = 1$ , siis  $h(z) \geq 1$  iga  $z > 0$  korral.

Lause on tõestatud.

Üldistame nüüd lause rohkem kui kahe muutuja juhule.

**Järeldus 1.2.** Olgu  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Kehtib hinnang

$$x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \leq \frac{p_1}{p_1 + \dots + p_n} x_1^{p_1 + \dots + p_n} + \dots + \frac{p_n}{p_1 + \dots + p_n} x_n^{p_1 + \dots + p_n}$$

suvaliste reaalarvude  $p_i \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , korral.

Tõestus. Kehtigu valem  $n = k - 1$  korral. Näitame, et ta kehtib ka  $n = k$  korral. Kuna lause 1.1 põhjal

$$\begin{aligned} x_i^{p_1 + \dots + p_{k-1}} x_k^{p_k} &\leq \frac{p_1 + \dots + p_{k-1}}{p_1 + \dots + p_{k-1} + p_k} x_i^{p_1 + \dots + p_{k-1} + p_k} + \\ &+ \frac{p_k}{p_1 + \dots + p_{k-1} + p_k} x_k^{p_1 + \dots + p_{k-1} + p_k}, \quad i = 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

siis on tõene järgmine võrratuste ahel

$$\begin{aligned}
& x_1^{p_1} \dots x_k^{p_k} \leq \\
& \leq \left( \frac{p_1}{p_1 + \dots + p_{k-1}} x_1^{p_1 + \dots + p_{k-1}} + \dots + \frac{p_{k-1}}{p_1 + \dots + p_{k-1}} x_{k-1}^{p_1 + \dots + p_{k-1}} \right) x_k^{p_k} \leq \\
& \leq \frac{p_1}{p_1 + \dots + p_{k-1}} \frac{p_1 + \dots + p_{k-1}}{p_1 + \dots + p_k} x_1^{p_1 + \dots + p_k} + \dots + \\
& + \frac{p_{k-1}}{p_1 + \dots + p_{k-1}} \frac{p_1 + \dots + p_{k-1}}{p_1 + \dots + p_k} x_{k-1}^{p_1 + \dots + p_k} + \\
& + \left( \frac{p_1}{p_1 + \dots + p_{k-1}} + \dots + \frac{p_{k-1}}{p_1 + \dots + p_{k-1}} \right) \frac{p_k}{p_1 + \dots + p_k} x_k^{p_1 + \dots + p_k} = \\
& = \frac{p_1}{p_1 + \dots + p_k} x_1^{p_1 + \dots + p_k} + \dots + \frac{p_k}{p_1 + \dots + p_k} x_k^{p_1 + \dots + p_k}.
\end{aligned}$$

Sellega on järeldus tõestatud.

## 1.2. Minimiseerimisülesande lahendi iseloomustusteoreem

Olgu antud vektorruum  $V$  ja Hilberti ruum  $H$ . Ruumis  $V$  on defineeritud elementide (vektorite) liitmine ja skalaariga korrutamine, ruumis  $H$  peale selle veel skalaarkorrutis  $\langle h_1, h_2 \rangle$ ,  $h_1, h_2 \in H$ , ja norm  $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$ ,  $h \in H$ . Olgu antud lineaarne operaator  $T : V \rightarrow H$  ja lineaarsed funktsionaalid  $l_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Vaatleme minimiseerimisülesannet

$$\min_{f \in M} \|Tf\|^2, \quad (1.2)$$

kus  $M = \{f \in V \mid l_i(f) = z_i, i = 1, \dots, m\}$ ,  $z_i$  on fikseeritud arvud. Eeldame, et hulk  $M$  on mittetühi.

Tähistame  $Lf = (l_1(f), \dots, l_m(f))$ . Vaatleme  $V$  alamruumi

$$N(L) = \{h \in V \mid Lh = 0\}.$$

Võrdus  $Lh = 0$  tähendab seda, et  $l_i(h) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Fikseerime ühe elemendi  $f_0 \in M$ . Siis

$$M = \{f = f_0 + h \mid h \in N(L)\}$$

ja ülesanne (1.2) on kujul

$$\min_{h \in N(L)} \|Tf_0 + Th\|^2.$$

**Teoreem 1.3.** Olgu  $\sigma \in M$ . Selleks, et  $\sigma$  oleks ülesande (1.2) lahend, on tarvilik ja piisav, et oleks rahuldatud ortogonaalsuse tingimus

$$\langle T\sigma, Th \rangle = 0 \quad \forall h \in N(L). \quad (1.3)$$

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu  $\sigma$  lahend ja  $h \in N(L)$  suvaline element. On selge, et  $\sigma + \alpha h \in M$  iga  $\alpha \in \mathbb{R}$  korral. Seega funktsioon  $\varphi(\alpha) = \|T\sigma + \alpha Th\|^2$  saavutab miinimumi punktis  $\alpha = 0$ . Et aga

$$\varphi(\alpha) = \langle T\sigma, T\sigma \rangle + 2\alpha \langle T\sigma, Th \rangle + \alpha^2 \langle Th, Th \rangle,$$

siis  $\varphi'(0) = 2\langle T\sigma, Th \rangle = 0$ .

Piisavus. Võtame suvalise elemendi  $f \in M$ . Tema saab esitada kujul  $f = \sigma + h$ , kus  $h \in N(L)$ . Võrduse (1.3) põhjal

$$\|Tf\|^2 = \|T\sigma + Th\|^2 = \|T\sigma\|^2 + \|Th\|^2 \geq \|T\sigma\|^2.$$

Siit järeldub, et  $\sigma$  on ülesande (1.2) lahend.

Teoreem on tõestatud.

Tähistame  $N(T) = \{h \in V \mid Th = 0\}$ .

**Järeldus 1.4.** Kui

$$N(T) \cap N(L) = \{0\},$$

siis ülesande (1.2) lahend on ühene.

Tõestus. Olgu meil kaks lahendit  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$ . Siis  $l_i(\sigma_1) = l_i(\sigma_2) = z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ja  $h := \sigma_1 - \sigma_2 \in N(L)$ . Optimaalsuseks tarviliku tingimuse (1.3) põhjal

$$\langle T\sigma_1, Th \rangle = 0, \quad \langle T\sigma_2, Th \rangle = 0.$$

Lahutades esimesest võrdusest teise, saame  $\langle Th, Th \rangle = 0$ , seega  $h \in N(T)$ . Eelduse kohaselt  $h = 0$  ning seepärast on lahend ühene.

### 1.3. Farkaši lemma

Olgu  $V$  reaalne vektorruum ning  $H$  reaalne Hilberti ruum.

**Definitsioon.** Hulka  $K \subset V$  nimetatakse koonuseks, kui iga  $x \in K$  ja iga  $\lambda \geq 0$  korral  $\lambda x \in K$ .

**Definitsioon.** Olgu  $G \subset H$  suvaline osahulk. Hulga  $G$  poolt moodustatud koonuseks nimetame hulka

$$\Gamma(G) = \{x \in H \mid \langle x, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in G\}.$$

Erijuhul  $G = \{h_1, \dots, h_m\}$  kirjutame

$$\Gamma(h_1, \dots, h_m) = \{x \in H \mid \langle x, h_i \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

**Definitsioon.** Olgu  $K \subset H$  koonus. Koonuse  $K$  kaaskoonuseks  $K^+$  nimetame hulka

$$K^+ = \{x \in H \mid \langle x, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K\}.$$

Seega  $K^+ = \Gamma(K)$  eelmise definitsiooni mõttes.

**Definitsioon.** Olgu  $G \subset V$  suvaline osahulk. Hulga  $G$  kooniliseks katteks nimetame hulka

$$C(G) = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i \mid x_i \in G, \lambda_i \geq 0, r \in \mathbb{N} \right\}.$$

Erijuhul, kui  $G = \{h_1, \dots, h_m\}$  on lõplik hulk, kirjutame

$$C(h_1, \dots, h_m) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

Kuigi hulga kooniline kate on defineeritud vektorruumi osahulga jaoks, vaatleme meie edaspidi ainult Hilberti ruumi osahulkade koonilisi katteid.

**Lause 1.5 (Farkaši lemma).** Kehtib võrdus

$$\Gamma(h_1, \dots, h_m)^+ = C(h_1, \dots, h_m)$$

ehk lõpliku hulga poolt moodustatud koonuse kaaskoonus on võrdne sellesama hulga koonilise kattega.

Enne Farkaši lemma tõestuse juurde asumist tõestame rea abitulemusi.

**Lause 1.6.** Kehtib võrdus

$$C(h_1, \dots, h_m)^+ = \Gamma(h_1, \dots, h_m).$$

Tõestus. Valime suvaliselt  $x \in C(h_1, \dots, h_m)^+$  ja näitame, et  $x \in \Gamma(h_1, \dots, h_m)$ . Kuna  $x \in C(h_1, \dots, h_m)^+$ , siis iga  $v \in C(h_1, \dots, h_m)$  korral  $\langle x, v \rangle \geq 0$ . Et suvaliste  $\lambda_i \geq 0$  korral  $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \in C(h_1, \dots, h_m)$ , siis

$$\langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, h_i \rangle \geq 0.$$

Valime mingi  $\lambda_i = 1$  ning kõikide  $j \neq i$  korral  $\lambda_j = 0$ , siis saame, et  $\langle x, h_i \rangle \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Viimane tähendab aga seda, et  $x \in \Gamma(h_1, \dots, h_m)$ .

Valime nüüd  $x \in \Gamma(h_1, \dots, h_m)$  ja näitame, et  $x \in C(h_1, \dots, h_m)^+$ . Kuna kehtib  $\langle x, h_i \rangle \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , siis ka suvaliste  $\lambda_i \geq 0$  korral

$$\langle x, \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, h_i \rangle \geq 0.$$

Sellega oleme näidanud, et iga  $v \in C(h_1, \dots, h_m)$  korral  $\langle x, v \rangle \geq 0$  ehk teisisõnu  $x \in C(h_1, \dots, h_m)^+$ .

Lause on tõestatud.

**Lemma 1.7.** Olgu  $G \subset V$  suvaline osahulk. Iga  $x \in C(G)$ ,  $x \neq 0$ , on esitatav kujul  $x = \sum_{i=1}^r \mu_i x_i$ , kus  $\mu_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , ning  $x_1, \dots, x_r \in G$  on lineaarselt sõltumatud.

Tõestus. Olgu  $x \in C(G)$ ,  $x \neq 0$ , siis  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ , kus  $\lambda_i \geq 0$  ja  $x_i \in G$ . Võime eeldada, et  $\lambda_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Valime kõikide esituste  $x = \sum_{i=1}^r \mu_i x_i$ ,  $\mu_i > 0$ ,  $x_i \in G$ , hulgast sellise, kus  $r$  on minimaalne ja näitame, et siis  $x_1, \dots, x_r$  on lineaarselt sõltumatud. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  nii, et  $\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i = 0$  aga  $\sum_{i=1}^r |\alpha_i| > 0$ . Võime eeldada, et leidub  $\alpha_i > 0$ . Tähistame

$$\varepsilon = \min_{\alpha_i > 0} \frac{\mu_i}{\alpha_i},$$

siis  $\varepsilon > 0$ . Defineerime  $\bar{\mu}_i = \mu_i - \varepsilon \alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Seega

$$\bar{\mu}_i = \mu_i - \varepsilon \alpha_i = \begin{cases} \mu_i + \varepsilon |\alpha_i| > 0, & \text{kui } \alpha_i \leq 0, \\ \mu_i - \varepsilon \alpha_i \geq \mu_i - \frac{\mu_i}{\alpha_i} \alpha_i = 0, & \text{kui } \alpha_i > 0, \end{cases}$$

ehk  $\bar{\mu}_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , ning leidub  $\bar{\mu}_i = 0$ . Oleme saanud, et

$$x = \sum_{i=1}^r \mu_i x_i = \sum_{i=1}^r \mu_i x_i - \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i}_{=0} = \sum_{i=1}^r (\mu_i - \varepsilon \alpha_i) x_i = \sum_{i=1}^r \bar{\mu}_i x_i.$$

Viimases esituses on vähem kui  $r$  nullist erinevat kordajat  $\bar{\mu}_i$ , mis on vastuolus  $r$  minimaalsusega. Järelikult  $x_1, \dots, x_r$  on lineaarselt sõltumatud.

Lemma on tõestatud.

**Lause 1.8.** Olgu  $h_1, \dots, h_m \in H$ , siis  $C(h_1, \dots, h_m)$  on kinnine kumer koonus.

Tõestus. Näitame esmalt, et  $C(h_1, \dots, h_m)$  on koonus. Selleks valime suvaliselt  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \in C(h_1, \dots, h_m)$ . Kuna  $\lambda_i \geq 0$  ja iga  $\lambda \geq 0$  korral ka  $\lambda \lambda_i \geq 0$ , siis  $\lambda x = \sum_{i=1}^m \lambda \lambda_i h_i \in C(h_1, \dots, h_m)$  ning  $C(h_1, \dots, h_m)$  on koonus.

Järgnevalt näitame, et  $C(h_1, \dots, h_m)$  on kumer. Valime  $x, y \in C(h_1, \dots, h_m)$ , siis  $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i$  ja  $y = \sum_{i=1}^m \mu_i h_i$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\mu_i \geq 0$ . Näitame, et iga  $\lambda \in (0, 1)$  korral  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C(h_1, \dots, h_m)$ . Viimane sisalduvus on aga ilmne, sest

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\lambda \lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i)}_{\geq 0} h_i.$$

Lõpuks on tarvis veel näidata, et  $C(h_1, \dots, h_m)$  on kinnine. Vaatleme koonduvat jada  $x_n \in C(h_1, \dots, h_m)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \rightarrow x \in H$ . Näitame, et  $x \in C(h_1, \dots, h_m)$ .



Esitame lemma 1.7 põhjal

$$x_n = \sum_{i \in M_n} \lambda_{ni} h_i, \quad M_n \subset \{1, \dots, m\},$$

kus  $\lambda_{ni} \geq 0$  ning  $\{h_i\}_{i \in M_n}$  on lineaarselt sõltumatud. Kuna osahulki  $M_n$  on lõplik arv, siis mingi neist hakkab korduma ehk leidub osajada  $N' \subset \mathbb{N}$  nii, et  $M_n = M$ ,  $n \in N'$ . Vaatleme osajada

$$x_n = \sum_{i \in M} \lambda_{ni} h_i, \quad n \in N', \quad (1.4)$$

kus  $\lambda_{ni} \geq 0$  ning  $\{h_i\}_{i \in M}$  on lineaarselt sõltumatud. Tõestame, et iga  $i \in M$  korral on jada  $\lambda_{ni}$ ,  $n \in N'$ , tõkestatud. Oletame vastuväiteliselt, et leidub osajada  $N'' \subset N'$  nii, et

$$\sum_{i \in M} |\lambda_{ni}| \rightarrow \infty, \quad n \in N''.$$

Esitusest (1.4) saame, et

$$\frac{x_n}{\sum_{j \in M} |\lambda_{nj}|} = \sum_{i \in M} \frac{\lambda_{ni}}{\sum_{j \in M} |\lambda_{nj}|} h_i = \sum_{i \in M} \lambda'_{ni} h_i, \quad n \in N'', \quad (1.5)$$

kus  $\lambda'_{ni} = \frac{\lambda_{ni}}{\sum_{j \in M} |\lambda_{nj}|}$ . Siis  $\lambda'_{ni} \geq 0$  ning

$$\sum_{i \in M} |\lambda'_{ni}| = \frac{\sum_{i \in M} |\lambda_{ni}|}{\sum_{j \in M} |\lambda_{nj}|} = 1, \quad n \in N''.$$

Kuna  $\lambda'_{ni}$ ,  $n \in N''$ , on tõkestatud, seega ka kompaktne, saame eraldada osajada  $N''' \subset N''$ , nii, et  $\lambda'_{ni} \rightarrow \lambda_i$ ,  $n \in N'''$ ,  $i \in M$ . Minnes seoses (1.5) piirile saame

$$\sum_{i \in M} \lambda'_{ni} h_i \rightarrow \sum_{i \in M} \lambda_i h_i, \quad n \in N'''.$$

Et aga

$$\frac{x_n}{\sum_{j \in M} |\lambda_{nj}|} \rightarrow 0 \quad n \in N'',$$

siis  $\sum_{i \in M} \lambda_i h_i = 0$ . Arvestades veel asjaolu  $\sum_{i \in M} |\lambda_i| = 1$ , oleme saanud vastuolu  $\{h_i\}_{i \in M}$  lineaarse sõltumatusega. Seega iga  $i \in M$  korral on jada  $\lambda_{ni}$ ,  $n \in N'$ , tõkestatud. Eraldame  $\bar{N}'' \subset N'$  nii, et  $\lambda_{ni} \rightarrow \bar{\lambda}_i$ , kui  $n \in \bar{N}''$ ,  $i \in M$ . On selge, et  $\bar{\lambda}_i \geq 0$ ,  $i \in M$ . Esitusest (1.4) saame, et

$$x_n = \sum_{i \in M} \lambda_{ni} h_i \rightarrow \sum_{i \in M} \bar{\lambda}_i h_i, \quad n \in \bar{N}'',$$

seega  $x = \sum_{i \in M} \bar{\lambda}_i h_i \in C(h_1, \dots, h_m)$ .

Lause on tõestatud.

**Lemma 1.9.** Olgu  $\Omega \subset H$  kinnine kumer osahulk. Siis leidub parajasti üks element  $x^* \in \Omega$  nii, et

$$\langle x, x^* \rangle \geq \langle x^*, x^* \rangle$$

iga  $x \in \Omega$  korral.

Tõestus. Tähistame  $f(x) = \langle x, x \rangle$ ,  $x \in \Omega$ , ning  $d = \inf_{x \in \Omega} f(x)$ . Valime jada  $x_n \in \Omega$  nii, et  $f(x_n) \rightarrow d$ , siis  $\langle x_n, x_n \rangle = \|x_n\|^2 = d + \varepsilon_n$ , kus  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Näitame, et  $x_n$  on fundamentaaljada. Selleks peame näitama, et  $\|x_n - x_m\|^2 \rightarrow 0$ , kui  $n, m \rightarrow \infty$ . Kasutades  $\Omega$  kumerust, võib öelda, et  $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in \Omega$  ning  $\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\|^2 \geq d$ . Nüüd saame, et

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x_m \rangle + \|x_m\|^2 = \\ &= 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \|x_n + x_m\|^2 = \\ &= 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\|\frac{1}{2}(x_n + x_m)\|^2 \leq \\ &\leq 2(d + \varepsilon_n + d + \varepsilon_m) - 4d = 2(\varepsilon_n + \varepsilon_m) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Seega  $x_n$  on fundamentaalne ehk koonduv mingiks elemendiks  $x^*$ . Hulga  $\Omega$  kinnisuse tõttu  $x^* \in \Omega$ . Skalaarkorrutise pidevuse tõttu  $f(x_n) \rightarrow f(x^*) = d$ . Seega leidub  $x^* \in \Omega$  nii, et  $f(x^*) = \min_{x \in \Omega} f(x)$ . Lisaks oleme tõestanud, et

$$\langle x, x \rangle \geq \langle x^*, x^* \rangle \tag{1.6}$$

iga  $x \in \Omega$  korral.

Tõestame nüüd, et  $\langle x, x^* \rangle \geq \langle x^*, x^* \rangle$  iga  $x \in \Omega$  korral. Et  $\Omega$  on kumer, siis iga  $\lambda \in (0, 1)$  ja iga  $x \in \Omega$  korral ka  $\lambda x + (1 - \lambda)x^* = x^* + \lambda(x - x^*) \in \Omega$  ning (1.6) põhjal

$$\langle x^* + \lambda(x - x^*), x^* + \lambda(x - x^*) \rangle \geq \langle x^*, x^* \rangle.$$

Teisendades viimast võrratust, saame

$$2\lambda\langle x - x^*, x^* \rangle + \lambda^2\langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq 0$$

ehk

$$2\langle x - x^*, x^* \rangle + \lambda\langle x - x^*, x - x^* \rangle \geq 0.$$

Protsessis  $\lambda \rightarrow 0$  saame  $\langle x - x^*, x^* \rangle \geq 0$  ehk  $\langle x, x^* \rangle \geq \langle x^*, x^* \rangle$  iga  $x \in \Omega$  korral.

Leidugu elemendid  $x^*, x^{**} \in \Omega$  nii, et  $\langle x, x^* \rangle \geq \langle x^*, x^* \rangle$  ja  $\langle x, x^{**} \rangle \geq \langle x^{**}, x^{**} \rangle$  iga  $x \in \Omega$  korral. Siis kehtivad ka võrratused

$$\langle x^{**}, x^* \rangle \geq \langle x^*, x^* \rangle \quad \text{ja} \quad \langle x^*, x^{**} \rangle \geq \langle x^{**}, x^{**} \rangle$$

ehk

$$\langle x^{**} - x^*, x^* \rangle \geq 0 \quad \text{ja} \quad \langle x^{**} - x^*, -x^{**} \rangle \geq 0.$$

Liites viimased võrratused saame  $\langle x^{**} - x^*, x^* - x^{**} \rangle \geq 0$  ehk  $\langle x^* - x^{**}, x^* - x^{**} \rangle \leq 0$ . Viimane tähendab aga seda, et  $\|x^* - x^{**}\|^2 \leq 0$ , millest saame  $x^* = x^{**}$ .

Lemma on tõestatud.

Märgime, et lemma 1.9 tõestuses näitasime ühtlasi ülesande  $\min_{x \in \Omega} \langle x, x \rangle$  lahendi olemasolu ja ühesust. Võrratust (1.6) rahuldav  $x^* \in \Omega$  on selle miinimumülesande

lahendiks. Kui leidub veel teinegi element  $x^{**} \in \Omega$ , mis rahuldab võrratust (1.6), siis, nagu tõestasime  $x^*$  jaoks, saame, et  $\langle x, x^{**} \rangle \geq \langle x^{**}, x^{**} \rangle$  iga  $x \in \Omega$  korral. Kuid sel juhul  $x^{**} = x^*$ .

**Lause 1.10.** Olgu  $\Gamma \subset H$  kinnine kumer koonus. Siis  $\Gamma^{++} = \Gamma$ .

Tõestus. Olgu  $x \in \Gamma$ . Siis iga  $v \in \Gamma^+$  korral  $\langle v, x \rangle \geq 0$ . Sellest, et  $\langle x, v \rangle \geq 0$  iga  $v \in \Gamma^+$  korral järeldub, et  $x \in \Gamma^{++}$ . Oleme tõestanud, et  $\Gamma \subset \Gamma^{++}$ .

Näitame nüüd, et  $\Gamma^{++} \subset \Gamma$ . Oletame vastuväiteliselt, et leidub  $x_0 \in \Gamma^{++}$  nii, et  $x_0 \notin \Gamma$ . Vaatleme hulka  $\Omega = \Gamma - x_0$ . Hulk  $\Omega$  kui kinnise kumera hulga nihe on samuti kinnine ja kumer. Seejuures  $0 \notin \Omega$ , sest  $x_0 \notin \Gamma$ . Lemma 1.9 põhjal leidub  $v_0 \in \Omega$  nii, et

$$\langle x, x \rangle \geq \langle v_0, v_0 \rangle \quad \forall x \in \Omega \quad (1.7)$$

ja

$$\langle x, v_0 \rangle \geq \langle v_0, v_0 \rangle \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.8)$$

Et  $v_0 \in \Omega$ , siis leidub  $w_0 \in \Gamma$  nii, et  $v_0 = w_0 - x_0$ .

Tõestame, et  $\langle w_0, v_0 \rangle = 0$ . Kuna  $w_0 \in \Gamma$  ning  $\Gamma$  on koonus, siis iga  $\lambda > 0$  korral  $\lambda w_0 \in \Gamma$  ja  $v_\lambda = \lambda w_0 - x_0 \in \Omega$  ehk  $v_\lambda = \lambda w_0 - (w_0 - v_0) = (\lambda - 1)w_0 + v_0 \in \Omega$ . Leiame skalaarkorrutise

$$\langle v_\lambda, v_\lambda \rangle = (\lambda - 1)((\lambda - 1)\langle w_0, w_0 \rangle + 2\langle w_0, v_0 \rangle) + \langle v_0, v_0 \rangle.$$

Oletame vastuväiteliselt, et  $\langle w_0, v_0 \rangle \neq 0$ . Kui  $\langle w_0, v_0 \rangle < 0$ , siis leidub  $\lambda > 1$  nii, et  $(\lambda - 1)((\lambda - 1)\langle w_0, w_0 \rangle + 2\langle w_0, v_0 \rangle) < 0$ , teisisõnu, liidetava  $(\lambda - 1)\langle w_0, w_0 \rangle$  saab teha nii väikeseks, et ta ei mõjuta enam avaldise  $(\lambda - 1)\langle w_0, w_0 \rangle + 2\langle w_0, v_0 \rangle$  märki. Nüüd  $\langle v_\lambda, v_\lambda \rangle < \langle v_0, v_0 \rangle$ , mis on vastuolus võrdusega (1.7). Kui aga  $\langle w_0, v_0 \rangle > 0$ , siis leidub  $\lambda \in (0, 1)$  nii, et  $(\lambda - 1)((\lambda - 1)\langle w_0, w_0 \rangle + 2\langle w_0, v_0 \rangle) < 0$ , mis on jällegi vastuolus võrdusega (1.7). Seega  $\langle w_0, v_0 \rangle = 0$ .

Asetame võrratusse (1.8) elemendi  $x$  asemele  $w - x_0$ , kus  $w \in \Gamma$  on suvaline. Saame

$$\langle w - x_0, v_0 \rangle \geq \langle v_0, v_0 \rangle = \langle v_0, w_0 - x_0 \rangle = \langle v_0, w_0 \rangle - \langle v_0, x_0 \rangle = -\langle v_0, x_0 \rangle,$$

seepärast  $\langle w, v_0 \rangle \geq 0$ , mis tähendab, et  $v_0 \in \Gamma^+$ . Et aga  $\langle v_0, v_0 \rangle = -\langle v_0, x_0 \rangle$  ning  $v_0 \neq 0$ , siis peab kehtima  $\langle v_0, x_0 \rangle < 0$ .

Oleme leidnud  $v_0 \in \Gamma^+$  nii, et  $\langle v_0, x_0 \rangle < 0$ . See on aga vastuolus eeldusega  $x_0 \in \Gamma^{++}$ . Järelikult  $\Gamma^{++} \subset \Gamma$ .

Lause on tõestatud.

**Farkaši lemma tõestus.** Näitame, et

$$\Gamma(h_1, \dots, h_m)^+ = C(h_1, \dots, h_m).$$

Lause 1.6 põhjal  $C(h_1, \dots, h_m)^+ = \Gamma(h_1, \dots, h_m)$ . Minnes üle kaaskoonusele, saame  $C(h_1, \dots, h_m)^{++} = \Gamma(h_1, \dots, h_m)^+$ . Kuna lause 1.8 põhjal on  $C(h_1, \dots, h_m)$  kinnine kumer koonus, siis lause 1.10 põhjal  $C(h_1, \dots, h_m)^{++} = C(h_1, \dots, h_m)$ .

Farkaši lemma on tõestatud.

## 1.4. Tarvilik ja piisav tingimus ekstreemumülesande lahenduvuseks

Käesoleva punkti tulemuste esitusel lähtume raamatu [12] käsitlusest. Olgu antud lineaarne sihifunktsioon

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

ja lubatav hulk

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i \in M_1, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in M_2, \quad x_i \geq 0, i \in N_1 \right\},$$

kus  $a_{ij}, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  on antud arvud,  $M_1$  ja  $M_2$  on lõplikud mittelõikuvad indeksite hulgad ning  $N_1 \subset \{1, \dots, n\}$ . Kasutame veel tähistusi  $M = M_1 \cup M_2$ ,  $N = \{1, \dots, n\}$  ja  $N_2 = N \setminus N_1$ . Hulgas  $M$  olevate indeksite arv olgu  $m$ .

Vaatleme lineaarse planeerimise ülesannet üldkujul

$$\min_{x \in \Omega} \langle c, x \rangle \tag{1.9}$$

ning kanoonilisel kujul

$$\min_{x \in \Omega_0} \langle c, x \rangle,$$

kus

$$\Omega_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j \in N} a_{ij} x_j = b_i, i \in M, \quad x_i \geq 0, i \in N \right\}.$$

**Lause 1.11.** Iga lineaarse planeerimise ülesande kujul (1.9) saab viia temaga ekvivalentseks kanoonilisel kujul olevaks ülesandeks.

Tõestus. Valime suvaliselt  $x \in \Omega$ . Kõikide indeksite  $i \in N_2$  korral tähistame  $y_i = \max\{x_i, 0\}$  ja  $z_i = \max\{-x_i, 0\}$ . Sellisel juhul  $x_i = y_i - z_i$ , kus  $y_i \geq 0$ ,  $z_i \geq 0$ ,  $i \in N_2$ . Kõikide indeksite  $i \in M_1$  korral olgu  $w_i = \sum_{j \in N} a_{ij} x_j - b_i$ . Kehtivad järgmised tingimused

$$\sum_{j \in N_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in N_2} a_{ij} (y_j - z_j) - w_i = b_i, \quad i \in M_1,$$

$$\sum_{j \in N_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in N_2} a_{ij} (y_j - z_j) = b_i, \quad i \in M_2,$$

$$x_i \geq 0, i \in N_1, \quad y_i, z_i \geq 0, i \in N_2, \quad w_i \geq 0, i \in M_1.$$

Vaatleme ülesannet

$$\begin{aligned} & \min_{v \in \bar{\Omega}} \langle \bar{c}, v \rangle, \\ \bar{\Omega} &= \{v \mid \bar{A}v = b, v \geq 0\}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

kus vektorid  $\bar{c}$ ,  $v$  ja  $b$  ning maatriks  $\bar{A}$  on moodustatud järgmisel viisil

$$v = (\{x_i\}_{i \in N_1}, \{y_i\}_{i \in N_2}, \{z_i\}_{i \in N_2}, \{w_i\}_{i \in M_1})^T,$$

$$\bar{c} = (\{c_i\}_{i \in N_1}, \{c_i\}_{i \in N_2}, \{-c_i\}_{i \in N_2}, \{0\}_{i \in M_1})^T,$$

$$b = (\{b_i\}_{i \in M_1}, \{b_i\}_{i \in M_2})^T,$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} (a_{ij})_{i \in M_1, j \in N_1} & (a_{ij})_{i \in M_1, j \in N_2} & (-a_{ij})_{i \in M_1, j \in N_2} & -\mathbf{I}_{i, j \in M_1} \\ (a_{ij})_{i \in M_2, j \in N_1} & (a_{ij})_{i \in M_2, j \in N_2} & (-a_{ij})_{i \in M_2, j \in N_2} & 0 \end{pmatrix},$$

milles  $\mathbf{I}$  on ühikmaatriks.

Paneme tähele, et

$$\langle \bar{c}, v \rangle = \sum_{i \in N_1} c_i x_i + \sum_{i \in N_2} c_i (y_i - z_i) = \sum_{i \in N} c_i x_i = \langle c, x \rangle.$$

Peale selle on ülesanded (1.9) ja (1.10) samaaegselt kas lahenduvad või mitte-lahenduvad, sest ülesande (1.9) lahendi  $x$  abil moodustatud  $v$  on ülesande (1.10) lahend ning ülesande (1.10) lahendi  $v$  komponentidest  $\{x_i\}_{i \in N_1}, \{y_i\}_{i \in N_2}, \{z_i\}_{i \in N_2}$  moodustatakse võrdusega  $x_i = y_i - z_i$ ,  $i \in N_2$ , ülesande (1.9) lahend  $x$ .

Lause on tõestatud.

Olgu  $A = (a_{ij})$   $m \times n$ -maatriks veergudega  $a^j \in \mathbb{R}^m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Peale selle olgu antud vektor  $b \in \mathbb{R}^m$ . Vaatleme võrrandisüsteemi  $Ax = b$ , kus  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lause 1.12.** Süsteemil  $Ax = b$  on lahend  $x \geq 0$  parajasti siis, kui iga  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $uA \geq 0$ , korral  $\langle b, u \rangle \geq 0$ .

Tõestus. Koosnegu hulk  $G$  maatriksi  $A$  veergudest

$$G = \{a^j \in \mathbb{R}^m \mid a^j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})^T, j = 1, \dots, n\}.$$

Moodustame hulgale  $G$  koonilise katte

$$C(G) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \mid y = \sum_{j=1}^n \lambda_j a^j, \lambda_j \geq 0 \right\}.$$

Kuna süsteemi  $Ax = b$  võib ümber kirjutada kui  $\sum_{j=1}^n x_j a^j = b$ , siis võrrandisüsteemil  $Ax = b$  on lahend  $x \geq 0$  parajasti siis, kui  $b \in C(G)$ . Moodustame hulga  $G$  abil koonuse

$$\Gamma(G) = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \langle u, a^j \rangle \geq 0, j = 1, \dots, n\},$$

siis Farkaši lemma põhjal  $\Gamma(G)^+ = C(G)$ . Seega ülesanne  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ , on lahenduv parajasti siis, kui  $b \in \Gamma(G)^+$ . Viimane aga tähendab seda, et  $\langle b, u \rangle \geq 0$  iga  $u \in \Gamma(G)$  korral ehk  $\langle b, u \rangle \geq 0$  iga  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $uA \geq 0$ , korral.

Lause on tõestatud.

**Lause 1.13.** Olgu ülesanne

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &= \mu, \\ Ax &= b, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1.11}$$

lahenduv. Kui kirjutada  $\mu$  asemele  $\mu - \lambda$ , siis ärgu olgu saadav ülesanne ühegi  $\lambda > 0$  korral lahenduv. Neil eeldustel on lahenduv järgmine ülesanne

$$uA \leq c, \quad \langle b, u \rangle = \mu. \tag{1.12}$$

Tõestus. Näitame esmalt, et ülesanne

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle - t\mu &= -1 \\ Ax - tb &= 0 \\ x \geq 0, \quad t &\geq 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

ei ole lahenduv. Oletame vastuväiteliselt, et leidub paar  $\{t_0, x_0\}$ , mis rahuldab võrrandeid ja võrratusi (1.13).

Vaatleme kahte juhtu. Kui  $t_0 = 0$ , siis

$$\langle c, x_0 \rangle = -1, \quad Ax_0 = 0, \quad x_0 \geq 0.$$

Kui  $y_0$  on üks ülesande (1.11) lahenditest, siis  $x_1 = y_0 + x_0$  rahuldab võrrandeid

$$\langle c, x_1 \rangle = \langle c, y_0 \rangle + \langle c, x_0 \rangle = \mu - 1, \quad Ax_1 = Ay_0 + Ax_0 = b, \quad x_1 \geq 0,$$

mis on vastuolus lemma eeldustega. Kui  $t_0 > 0$ , siis  $x_1 = \frac{x_0}{t_0}$  rahuldab võrrandeid

$$\langle c, x_1 \rangle = \frac{1}{t_0} \langle c, x_0 \rangle = \mu - \frac{1}{t_0}, \quad Ax_1 = \frac{1}{t_0} Ax_0 = b, \quad x_1 \geq 0,$$

mis on samuti vastuolus lemma eeldustega. Seega ülesanne (1.13) pole lahenduv.

Esitame võrrandid ja võrratused (1.13) maatrikskujul  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}$ ,  $\tilde{x} \geq 0$ , kus

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n & -\mu \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & -b_m \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n, t)^T,$$

$$\tilde{y} = (-1, \underbrace{0, \dots, 0}_m)^T.$$

Kuna ülesanne  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{y}$ ,  $\tilde{x} \geq 0$  pole lahenduv, siis lause 1.12 põhjal leidub vektor  $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$  nii, et  $\tilde{u}\tilde{A} \geq 0$ , kuid  $\langle \tilde{y}, \tilde{u} \rangle < 0$ . Kasutades tähistusi  $\tilde{u} = (\gamma_0, u_1^0, \dots, u_m^0)$  ja  $u^0 = (u_1^0, \dots, u_m^0)$  oleme saanud, et leidub paar  $\{\gamma_0, u^0\}$  nii, et

$$\gamma_0 c + u^0 A \geq 0,$$

$$-\mu\gamma_0 - \langle b, u^0 \rangle \geq 0,$$

$$-\gamma_0 < 0.$$

Esitame ülesande (1.11) maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \geq 0.$$

Kuna viimane ülesanne on lahenduv ning kehtib  $\gamma_0 c + u^0 A \geq 0$ , siis lause 1.12 põhjal  $\mu\gamma_0 + \langle b, u^0 \rangle \geq 0$ . Kokkuvõttes  $\mu\gamma_0 + \langle b, u^0 \rangle = 0$ . Nüüd on näha, et vektor  $u_* = -\frac{u^0}{\gamma_0}$  rahuldab seoseid (1.12), sest

$$u_* A = -\frac{1}{\gamma_0} u^0 A \leq c$$

ja

$$\langle b, u_* \rangle = -\frac{1}{\gamma_0} \langle b, u^0 \rangle = -\frac{1}{\gamma_0} (-\mu\gamma_0) = \mu.$$

Lause on tõestatud.

**Teoreem 1.14.** Selleks, et  $x^* \in \Omega$  oleks ülesande  $\min_{x \in \Omega} \langle c, x \rangle$  lahend, on tarvilik ja piisav, et leidub vektor  $u^* \in \mathbb{R}^m$  nii, et

$$\begin{aligned} \langle b, u^* \rangle &= \langle c, x^* \rangle, \\ \sum_{i \in M} u_i^* a_{ij} &\leq c_j, \quad j \in N_1, \\ \sum_{i \in M} u_i^* a_{ij} &= c_j, \quad j \in N_2, \\ u_i^* &\geq 0, \quad i \in M_1. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Tõestus. Tarvilikkus. Lause 1.11 põhjal on ülesanne  $\min_{x \in \Omega} \langle c, x \rangle$  ekvivalentne kanoonilisel kujul oleva ülesandega (1.10)

$$\begin{aligned} \min_{v \in \bar{\Omega}} \langle \bar{c}, v \rangle, \\ \bar{\Omega} = \{v \mid \bar{A}v = b, v \geq 0\}. \end{aligned}$$

Olgu  $x^*$  ülesande  $\min_{x \in \Omega} \langle c, x \rangle$  lahend. Siis leidub  $v^*$ , mis on ülesande (1.10) lahend, kusjuures  $\langle c, x^* \rangle = \langle \bar{c}, v^* \rangle$ . Tähistame  $\mu = \min_{v \in \bar{\Omega}} \langle \bar{c}, v \rangle = \langle \bar{c}, v^* \rangle$ . Siis ülesanne

$$\begin{aligned} \langle \bar{c}, v \rangle &= \mu, \\ \bar{A}v &= b, \quad v \geq 0, \end{aligned}$$

on lahenduv. Kuid kui kirjutada  $\mu$  asemele  $\mu - \lambda$ , siis ühegi  $\lambda > 0$  korral pole saadav ülesanne lahenduv. Lause 1.13 põhjal leidub  $u^* \in \mathbb{R}^m$  nii, et

$$u^* \bar{A} \leq \bar{c}, \quad \langle b, u^* \rangle = \mu. \tag{1.15}$$

On vahetu kontrollida, et (1.15) ja (1.14) on samaväärsed.

Piisavus. Valime suvaliselt  $x \in \Omega$ . Seoste (1.14) põhjal saame

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &= \sum_{j \in N_1} c_j x_j + \sum_{j \in N_2} c_j x_j \geq \sum_{j \in N_1} \left( \sum_{i \in M} u_i^* a_{ij} \right) x_j + \sum_{j \in N_2} \left( \sum_{i \in M} u_i^* a_{ij} \right) x_j = \\ &= \sum_{i \in M} u_i^* \left( \sum_{j \in N_1} a_{ij} x_j + \sum_{j \in N_2} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i \in M} u_i^* \sum_{j \in N} a_{ij} x_j \geq \\ &\geq \sum_{i \in M_1} u_i^* b_i + \sum_{i \in M_2} u_i^* b_i = \langle u^*, b \rangle = \langle c, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Seega on  $x^*$  ülesande  $\min_{x \in \Omega} \langle c, x \rangle$  lahend.

Teoreem on tõestatud.

Vaatleme nüüd üldisemat sihifunktsiooni. Olgu  $Q \subset \mathbb{R}^n$  lahtine hulk. Eeldame, et funktsioon  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  on diferentseeruv. Siis iga  $x \in Q$  korral

$$f(x+h) = f(x) + \langle f'(x), h \rangle + \alpha(x; h). \quad (1.16)$$

kus  $\alpha(x; h) = o(\|h\|)$  ja  $f'(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)_{j \in N}$ .

Tõestame kõigepealt ühe üldise tulemuse diferentseeruvate funktsioonide kumeruse kohta.

**Lemma 1.15.** Olgu  $Q \subset \mathbb{R}^n$  lahtine kumer hulk ja  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  diferentseeruv. Selleks, et  $f$  oleks kumer hulgal  $Q$ , on tarvilik ja piisav, et iga  $x_0, x_1 \in Q$  korral

$$f(x_1) - f(x_0) \geq \langle f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle. \quad (1.17)$$

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu  $f$  kumer hulgal  $Q$ , st. iga  $x_0, x_1 \in Q$  ja  $t \in (0, 1)$  korral

$$f(tx_1 + (1-t)x_0) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0) \quad (1.18)$$

ehk

$$f(x_0 + t(x_1 - x_0)) \leq f(x_0) + t(f(x_1) - f(x_0)). \quad (1.19)$$

Kui  $x_0 = x_1$ , siis võrratus (1.17) kehtib. Eeldame, et  $x_0 \neq x_1$ . Siis  $t \in (0, 1)$  korral saab võrratuse (1.19) viia kujule

$$f(x_1) - f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + t(x_1 - x_0)) - f(x_0)}{t}.$$

Võrduse (1.16) põhjal saame, et

$$f(x_1) - f(x_0) \geq \langle f'(x_0), x_1 - x_0 \rangle + \frac{\alpha(x_0; t(x_1 - x_0))}{t}.$$

Võrratuse (1.17) saamiseks piisab nüüd minna piirile  $t \rightarrow 0$ .

Piisavus. Fikseerime  $x_0, x_1 \in Q$ . Olgu  $t \in (0, 1)$  korral  $x_t = tx_1 + (1-t)x_0$ . Kuna  $Q$  on kumer, siis  $x_t \in Q$  ja (1.17) põhjal

$$f(x_1) - f(x_t) \geq \langle f'(x_t), x_1 - x_t \rangle,$$

$$f(x_0) - f(x_t) \geq \langle f'(x_t), x_0 - x_t \rangle.$$



Korrutades esimest võrratust arvuga  $t$ , teist arvuga  $(1 - t)$  ja seejärel neid liites, saame

$$tf(x_1) + (1 - t)f(x_0) - f(x_t) \geq \langle f'(x_t), tx_1 + (1 - t)x_0 - x_t \rangle = 0,$$

mis on samaväärne kumeruse tingimusega (1.18).

Lemma on tõestatud.

Sisaldagu  $Q$  kumerat hulka

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, i \in M_1, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i \in M_2, \quad x_i \geq 0, i \in N_1 \right\}.$$

Olgu  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  diferentseeruv ning kumer hulgal  $\Omega$ .

Vaatleme ülesannet

$$\min_{x \in \Omega} f(x). \quad (1.20)$$

**Lemma 1.16.** Kui  $x^*$  on ülesande (1.20) lahend, siis  $\langle f'(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$  iga  $x \in \Omega$  korral.

Tõestus. Kui  $x = x^*$ , siis  $\langle f'(x^*), x - x^* \rangle = 0$  ja väide kehtib. Olgu  $x \neq x^*$ . Kuna  $\Omega$  on kumer, siis iga  $t \in (0, 1)$  korral  $tx + (1 - t)x^* = x^* + t(x - x^*) \in \Omega$ . Arvestades  $x^*$  optimaalsust ja tingimust (1.16), saame

$$0 \leq f(x^* + t(x - x^*)) - f(x^*) = \langle f'(x^*), t(x - x^*) \rangle + \alpha(x^*; t(x - x^*)),$$

millest järeldub, et

$$\langle f'(x^*), x - x^* \rangle + \|x - x^*\| \frac{\alpha(x^*; t(x - x^*))}{\|t(x - x^*)\|} \geq 0.$$

Minnes viimases võrratuses piirile  $t \rightarrow 0$  saamegi lemma väite.

**Teoreem 1.17.** Selleks, et  $x^* \in \Omega$  oleks ülesande (1.20) lahend, on tarvilik ja piisav, et leidub  $u^* \in \mathbb{R}^m$  nii, et

$$\begin{aligned} \langle b, u^* \rangle &= \langle f'(x^*), x^* \rangle, \\ \sum_{i \in M} u^*_i a_{ij} &\leq f'(x^*)_j, \quad j \in N_1, \\ \sum_{i \in M} u^*_i a_{ij} &= f'(x^*)_j, \quad j \in N_2, \\ u^*_i &\geq 0, \quad i \in M_1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu  $x^* \in \Omega$  ülesande (1.20) lahend. Lemma 1.16 põhjal  $\langle f'(x^*), x^* \rangle \leq \langle f'(x^*), x \rangle$  iga  $x \in \Omega$  korral, seega on  $x^*$  ka lineaarse sihifunktsiooniga ülesande

$$\min_{x \in \Omega} \langle f'(x^*), x \rangle$$

lahend. Teoreemist 1.14 järeldub nüüd vektori  $u^*$  olemasolu, sest (1.14) ja (1.21) on antud juhul ühtivad.

Piisavus. Valime suvalise elemendi  $x \in \Omega$ . Seoste (1.17) ja (1.21) põhjal

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x^*) &\geq \langle f'(x^*), x - x^* \rangle = \\
&= \langle f'(x^*), x \rangle - \langle f'(x^*), x^* \rangle = \\
&= \langle f'(x^*), x \rangle - \langle b, u^* \rangle \geq \\
&\geq \langle u^* A, x \rangle - \langle u^*, b \rangle = \\
&= \langle u^*, Ax - b \rangle = \\
&= \sum_{i \in M_1} \underbrace{u_i^*}_{\geq 0} \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)}_{\geq 0} + \sum_{i \in M_2} u_i^* \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)}_{=0} \geq 0.
\end{aligned}$$

Seega  $f(x) \geq f(x^*)$ .

Teoreem on tõestatud.

**Teoreem 1.18.** Selleks, et  $x^* \in \Omega_1$  oleks ülesande  $\min_{x \in \Omega_1} f(x)$  lahend, kus

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i \in M_1, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in M_2 \right\},$$

on tarvilik ja piisav, et leiduks  $u^* \in \mathbb{R}^m$  nii, et

$$\begin{aligned}
f'(x^*) &= u^* A, \\
u_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) &= 0, \quad i \in M_1, \\
u_i^* &\geq 0, \quad i \in M_1.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Tõestus. Tarvilikkus. Hulk  $\Omega_1$  ühtib hulgaga  $\Omega$ , milles  $N_1 = \emptyset$  ning võrdused (1.21) on kujul

$$\begin{aligned}
\langle b, u^* \rangle &= \langle f'(x^*), x^* \rangle, \\
\sum_{i \in M} u_i^* a_{ij} &= f'(x^*)_j, \quad j \in N, \\
u_i^* &\geq 0, \quad i \in M_1.
\end{aligned}$$

Neist keskmine tähendab seda, et  $f'(x^*) = u^* A$ . Seepärast on vaja tõestada veel, et  $u_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = 0$ ,  $i \in M_1$ . Kuna  $\langle u^*, b \rangle = \langle f'(x^*), x^* \rangle = \langle u^* A, x^* \rangle = \langle u^*, Ax^* \rangle$ , siis  $\langle u^*, b - Ax^* \rangle = 0$  ehk

$$\sum_{i \in M} u_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = \sum_{i \in M_1} \underbrace{u_i^*}_{\geq 0} \underbrace{\left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right)}_{\leq 0} + \sum_{i \in M_2} u_i^* \underbrace{\left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right)}_{=0} = 0,$$

millest järeljub, et  $u_i^* \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* \right) = 0$ ,  $i \in M_1$ .

Piisavus. Valime suvalise elemendi  $x \in \Omega$ . Seoste (1.17) ja (1.22) põhjal

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(x^*) &\geq \langle f'(x^*), x - x^* \rangle = \\
 &= \langle u^* A, x - x^* \rangle = \\
 &= \langle u^*, Ax - b + b - Ax^* \rangle = \\
 &= \sum_{i \in M_1} \underbrace{u_i^*}_{\geq 0} \left( \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i}_{\geq 0} \right) + \sum_{i \in M_2} u_i^* \left( \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i}_{=0} \right) + \\
 &+ \sum_{i \in M_1} u_i^* \left( \underbrace{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*}_{=0} \right) + \sum_{i \in M_2} u_i^* \left( \underbrace{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*}_{=0} \right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Seega  $f(x) \geq f(x^*)$ .

Teoreem on tõestatud.

## 2. Naturaalsplainid

Olgu antud naturaalarvud  $r$  ja  $n$  nii, et  $2r > n \geq 1$ . Tähistame

$$L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha f \in L_2(\mathbb{R}^n), |\alpha| = r\},$$

kus  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  on multiindeks,  $\alpha_i \geq 0$  ja  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Ruumi  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  nimetatakse ka Beppo-Levi ruumiks.

Olgu  $\mathcal{P}_{r-1}$  maksimaalselt  $r - 1$  astme  $n$  muutuja polünoomide hulk. Naturaalsplainideks nimetatakse funktsioone kujul

$$S(X) = Q_0(X) + \sum_{i=1}^m d_i G(X - X_i), \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

kus  $X_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q_0 \in \mathcal{P}_{r-1}$  ja  $\sum_{i=1}^m d_i Q(X_i) = 0$  iga  $Q \in \mathcal{P}_{r-1}$  korral. Funktsioon  $G$  on võrrandi  $\Delta^r G(X) = \delta(X)$  lahend, kus  $\Delta$  on  $n$ -mõõtmeline Laplace'i operaator, ja  $\delta$  deltafunktsioon. Viimane võrdus tähendab seda, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(X) \Delta^r \varphi(X) dX = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Siin  $C_0^\infty$  on lõpmatult diferentseeruvate finiiitsete funktsioonide hulk. On teada, et paarituarvulise  $n$  korral

$$G(X) = c_{rn} \|X\|^{2r-n}$$

ja paarisarvulise  $n$  korral

$$G(X) = c_{rn} \|X\|^{2r-n} \ln \|X\|,$$

kus  $c_{rn}$  on mingid konstandid ja  $\|X\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ .

**Lause 2.1.** Naturaalsplain kujul (2.1) on ruumist  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ .

Tõestus. Peame näitama, et  $|\alpha| = r$  korral  $D^\alpha S(X) = \sum_{i=1}^m d_i D^\alpha G(X - X_i)$  on ruumist  $L_2(\mathbb{R}^n)$ .

Näitame esmalt, et  $|\beta| = k = 0, 1, 2, \dots$  korral avalduvad funktsiooni  $G(X)$  tuletised kujul

$$D^\beta G(X) = Q_k(X) \|X\|^{2r-n-2k}, \quad (2.2)$$

kui  $n$  on paaritu ja

$$D^\beta G(X) = P_{2r-n-k}(X) \ln \|X\| + \frac{Q_{2r-n+k}(X)}{\|X\|^{2k}}, \quad (2.3)$$

kui  $n$  on paaris. Siin  $P_i, Q_i$  on  $i$ -astme homogeenised polünoomid

$$P_i(X) = \sum_{|\alpha|=i} p_\alpha X^\alpha, \quad Q_i(X) = \sum_{|\alpha|=i} q_\alpha X^\alpha,$$

kusjuures  $P_i = 0$ , kui  $i < 0$ . Tõestame võrdused (2.2) ja (2.3) matemaatilise indukt-  
siooni abil. Olgu  $k = 0$ , siis (2.2) on kujul

$$G(X) = Q_0(X) \|X\|^{2r-n}$$

ja (2.3) on kujul

$$G(X) = P_{2r-n}(X) \ln \|X\| + Q_{2r-n}(X).$$

Näeme, et võrdused kehtivad, kui valida  $Q_0(X) = c_{rn}$ ,  $P_{2r-n}(X) = c_{rn} \|X\|^{2r-n}$  ja  $Q_{2r-n}(X) = 0$ . Eeldame nüüd, et valemid (2.2) ja (2.3) kehtivad  $|\beta| = k$  korral ning vaatleme juhtu  $|\gamma| = k + 1$ . Üleminek  $k \rightarrow k + 1$  tähendab diferentseerimist ühe muutuja  $x_i$  järgi. Olgu  $n$  paaritu, siis

$$\begin{aligned} D^\gamma G(X) &= D_i D^\beta G(X) = D_i \left( Q_k(X) \|X\|^{2r-n-2k} \right) = \\ &= (D_i Q_k(X)) \|X\|^{2r-n-2k} + Q_k(X) D_i \|X\|^{2r-n-2k} = \\ &= (D_i Q_k(X)) \|X\|^{2r-n-2k} + Q_k(X) (2r-n-2k) \|X\|^{2r-n-2k-1} \cdot \frac{x_i}{\|X\|} = \\ &= \left( \underbrace{D_i Q_k(X)}_{0 \text{ või } Q_{k-1}} \|X\|^2 + (2r-n-2k) x_i Q_k(X) \right) \|X\|^{2r-n-2(k+1)} = \\ &= Q_{k+1}(X) \|X\|^{2r-n-2(k+1)}. \end{aligned}$$

Olgu  $n$  paaris, siis

$$\begin{aligned} D^\gamma G(X) &= D_i D^\beta G(X) = D_i \left( P_{2r-n-k}(X) \ln \|X\| + \frac{Q_{2r-n+k}(X)}{\|X\|^{2k}} \right) = \\ &= (D_i P_{2r-n-k}(X)) \ln \|X\| + P_{2r-n-k}(X) D_i \ln \|X\| + \\ &+ \frac{(D_i Q_{2r-n+k}(X)) \|X\|^{2k} - Q_{2r-n+k}(X) D_i \|X\|^{2k}}{\|X\|^{4k}} = \\ &= (D_i P_{2r-n-k}(X)) \ln \|X\| + P_{2r-n-k}(X) \frac{1}{\|X\|} \cdot \frac{x_i}{\|X\|} + \\ &+ \frac{D_i Q_{2r-n+k}(X)}{\|X\|^{2k}} - \frac{Q_{2r-n+k}(X) \cdot 2k \|X\|^{2k-1} \frac{x_i}{\|X\|}}{\|X\|^{4k}} = \\ &= (D_i P_{2r-n-k}(X)) \ln \|X\| + \frac{x_i P_{2r-n-k}(X)}{\|X\|^2} + \\ &+ \frac{(D_i Q_{2r-n+k}(X)) \|X\|^2}{\|X\|^{2(k+1)}} - \frac{2k x_i Q_{2r-n+k}(X)}{\|X\|^{2(k+1)}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (D_i P_{2r-n-k}(X)) \ln \|X\| + \\
&+ \frac{x_i P_{2r-n-k}(X) \|X\|^{2k} + (D_i Q_{2r-n+k}(X)) \|X\|^2 - 2k x_i Q_{2r-n+k}(X)}{\|X\|^{2(k+1)}} = \\
&= P_{2r-n-(k+1)}(X) \ln \|X\| + \frac{Q_{2r-n+(k+1)}(X)}{\|X\|^{2(k+1)}}.
\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et võrdused (2.2) ja (2.3) kehtivad.

Järgnevalt näitame, et homogeense polünoomi  $Q_r$  korral  $Q_r(X) = O(\|X\|^r)$ . Hindame polünoomi

$$|Q_r(X)| = \left| \sum_{|\alpha|=r} q_\alpha X^\alpha \right| \leq \sum_{|\alpha|=r} |q_\alpha| |X^\alpha| = \sum_{|\alpha|=r} |q_\alpha| |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n}.$$

Järelduse 1.2 põhjal

$$|x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} \leq \text{const} \sum_{i=1}^n |x_i|^r.$$

Näitame veel, et  $\sum_{i=1}^n |x_i|^r \leq \text{const} \|X\|^r$ . Kui  $r = 1$ , siis

$$|x_1| + \dots + |x_n| \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq n \cdot \|X\|,$$

sest  $|x_i| \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} = \|X\|$  iga  $i = 1, \dots, n$  korral. Kui  $r = 2$ , siis

$$|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = \|X\|^2.$$

Kui  $r \geq 3$ , siis

$$|x_1|^r + \dots + |x_n|^r \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^{r-2} (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2) \leq \|X\|^{r-2} \cdot \|X\|^2 = \|X\|^r.$$

Kokkuvõttes

$$|Q_r(X)| \leq \sum_{|\alpha|=r} |q_\alpha| |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} \leq \text{const} \sum_{i=1}^n |x_i|^r \leq \text{const} \|X\|^r$$

ehk  $Q_r(X) = O(\|X\|^r)$ .

Lause tõestuseks peame näitama, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha S(X)|^2 dX < \infty.$$

Olgu  $R \in \mathbb{R}$  nii suur, et kera  $B(0, R/2) \subset \mathbb{R}^n$  sisaldab kõik splaini sõlmed  $X_1, \dots, X_m$ . Jaotame integreerimispiirkonna kaheks ning näitame, et

$$\int_{B(0,R)} |D^\alpha S(X)|^2 dX < \infty \quad \text{ja} \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |D^\alpha S(X)|^2 dX < \infty.$$

Vaatleme kõigepealt integraali üle kera  $B(0, R)$ . Kuna kehtib võrratus

$$(a_1 + \dots + a_m)^2 \leq m(a_1^2 + \dots + a_m^2),$$

siis

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |D^\alpha S(X)|^2 dX &= \int_{B(0,R)} \left| \sum_{i=1}^m d_i D^\alpha G(X - X_i) \right|^2 dX \leq \\ &\leq \int_{B(0,R)} m \sum_{i=1}^m |d_i D^\alpha G(X - X_i)|^2 dX = \\ &= m \sum_{i=1}^m d_i^2 \int_{B(0,R)} |D^\alpha G(X - X_i)|^2 dX \leq \\ &\leq m \sum_{i=1}^m d_i^2 \int_{B(X_i, 2R)} |D^\alpha G(X - X_i)|^2 dX = \\ &= m \sum_{i=1}^m d_i^2 \int_{B(0, 2R)} |D^\alpha G(X)|^2 dX. \end{aligned}$$

Protsessis  $\|X\| \rightarrow 0$  paaritu  $n$  korral

$$D^\alpha G(X) = Q_r(X) \|X\|^{-n} = O(\|X\|^{r-n})$$

ja paaris  $n$  korral

$$\begin{aligned} D^\alpha G(X) &= P_{r-n}(X) \ln \|X\| + \frac{Q_{3r-n}(X)}{\|X\|^{2r}} = \\ &= O(\|X\|^{r-n} \ln \|X\|) + O(\|X\|^{r-n}). \end{aligned}$$

Näitame, et

$$\int_{B(0, 2R)} \|X\|^{2r-2n} dX < \infty$$

ja

$$\int_{B(0, 2R)} \|X\|^{2r-2n} \ln^2 \|X\| dX < \infty.$$

Kuna tegemist on funktsioonidega, mis sfääril keskpunktiga 0 on konstantsed, võime integraali arvutada järgmiselt

$$\int_{B(0, 2R)} \|X\|^{2r-2n} dX = \int_0^{2R} \rho^{2r-2n} |S_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, \rho)| d\rho,$$

kus  $|S_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, \rho)|$  on  $n-1$  mõõtmelise sfääri  $S_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, \rho)$ , keskpunktiga 0, pindala. On teada, et  $|S_{\mathbb{R}}(0, \rho)| = 2\pi\rho$ ,  $|S_{\mathbb{R}^2}(0, \rho)| = 4\pi\rho^2$  ning üldiselt  $|S_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, \rho)| = \text{const } \rho^{n-1}$  (vt. [16], lk. 394). Seega, kui  $2r - n > 0$ , siis

$$\int_{B(0, 2R)} \|X\|^{2r-2n} dX = \text{const} \int_0^{2R} \rho^{2r-n-1} d\rho = \frac{\text{const}}{2r-n} \rho^{2r-n} \Big|_0^{2R} \in \mathbb{R}.$$

Analoogiliselt

$$\begin{aligned} \int_{B(0,2R)} \|X\|^{2r-2n} \ln^2 \|X\| dX &= \int_0^{2R} \rho^{2r-2n} \ln^2 \rho |S_{\mathbb{R}^{n-1}}(0, \rho)| d\rho = \\ &= \text{const} \int_0^{2R} \rho^{2r-n-1} \ln^2 \rho d\rho. \end{aligned}$$

Leiame kõigepealt ositi integreerides integraali

$$\begin{aligned} \int \rho^{2r-n-1} \ln^2 \rho d\rho &= \frac{\rho^{2r-n}}{2r-n} \ln^2 \rho - \frac{2}{2r-n} \int \rho^{2r-n-1} \ln \rho d\rho = \\ &= \frac{\rho^{2r-n}}{2r-n} \ln^2 \rho - \frac{2\rho^{2r-n}}{(2r-n)^2} \ln \rho + \frac{2}{(2r-n)^2} \int \rho^{2r-n-1} d\rho = \\ &= \frac{\rho^{2r-n}}{2r-n} \ln^2 \rho - \frac{2\rho^{2r-n}}{(2r-n)^2} \ln \rho + \frac{2\rho^{2r-n}}{(2r-n)^3}. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \int_{B(0,2R)} \|X\|^{2r-2n} \ln^2 \|X\| dX &= \text{const} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{2R} \rho^{2r-n-1} \ln^2 \rho d\rho = \\ &= \text{const} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \left( \frac{\rho^{2r-n}}{2r-n} \ln^2 \rho - \frac{2\rho^{2r-n}}{(2r-n)^2} \ln \rho + \frac{2\rho^{2r-n}}{(2r-n)^3} \right) \Big|_{\varepsilon}^{2R} \right] \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

sest  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{2r-n} \ln^2 \varepsilon = 0$  ja  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^{2r-n} \ln \varepsilon = 0$ , kui  $2r-n > 0$ . Oleme näidanud, et

$$\int_{B(0,R)} |D^\alpha S(X)|^2 dX < \infty.$$

Näitame nüüd, et

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |D^\alpha S(X)|^2 dX = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \left| \sum_{i=1}^m d_i D^\alpha G(X - X_i) \right|^2 dX < \infty.$$

Defineerime funktsioonid

$$v(X) = D^\alpha G(X) \quad \text{ja} \quad \Phi(t) = v(X - tX_i).$$

Kasutades Taylori valemit jääkliikmega integraalsel kujul, võime kirjutada

$$\Phi(1) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \Phi^{(r)}(t) dt.$$

Kasutades tähistusi

$$Q(X; X_i) = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!}$$

ja

$$\omega(X; X_i) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \Phi^{(r)}(t) dt,$$



võime öelda, et

$$D^\alpha G(X - X_i) = \Phi(1) = Q(X; X_i) + \omega(X; X_i).$$

Näitame, et  $Q(X; X_i)$  on  $r - 1$  astme polünoom  $X_i$  suhtes ehk

$$Q(X; X_i) = \sum_{|\beta| \leq r-1} q_\beta(X) X_i^\beta.$$

Vaatame, kuidas avalduvad funktsiooni  $\Phi(t) = v(x_1 - tx_1^{(i)}, \dots, x_n - tx_n^{(i)})$  tuletised. Kuna

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial(x_k - tx_k^{(i)})} \cdot \frac{\partial(x_k - tx_k^{(i)})}{\partial x_k} = \frac{\partial v}{\partial(x_k - tx_k^{(i)})}, \quad k = 1, \dots, n,$$

siis

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \frac{\partial v}{\partial x_1}(X - tX_i)(-x_1^{(i)}) + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n}(X - tX_i)(-x_n^{(i)}), \\ \Phi''(t) &= \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_j}(X - tX_i)(-x_k^{(i)})(-x_j^{(i)}), \end{aligned}$$

jne. Üldiselt  $k = 1, \dots, r - 1$  korral

$$\Phi^{(k)}(t) = \sum_{|\beta|=k} D^\beta v(X - tX_i)(-X_i)^\beta.$$

Seega võime kirjutada

$$\Phi^{(k)}(0) = \sum_{|\beta|=k} D^\beta v(X)(-X_i)^\beta = \sum_{|\beta|=k} D^\beta D^\alpha G(X)(-X_i)^\beta$$

ning

$$\begin{aligned} Q(X; X_i) &= \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k!} \sum_{|\beta|=k} D^\beta D^\alpha G(X)(-X_i)^\beta = \\ &= \sum_{|\beta|=k \leq r-1} \frac{(-1)^k}{k!} D^\beta D^\alpha G(X) X_i^\beta = \sum_{|\beta| \leq r-1} q_\beta(X) X_i^\beta, \end{aligned}$$

kus kasutasime tähistust

$$q_\beta(X) = \frac{(-1)^k}{k!} D^\beta D^\alpha G(X), \quad k = |\beta|.$$

Seega tõesti  $Q(X; X_i)$  on  $r - 1$  astme polünoom  $X_i$  suhtes.

Järgnevalt uurime elementi

$$\omega(X; X_i) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \Phi^{(r)}(t) dt.$$

Kuna

$$\Phi^{(r)}(t) = \sum_{|\beta|=r} D^\beta D^\alpha G(X - tX_i)(-X_i)^\beta$$

ning (2.2) põhjal, arvestades, et  $|\alpha + \beta| = 2r$ ,

$$D^{\alpha+\beta}G(X - tX_i) = Q_{2r}(X - tX_i)\|X - tX_i\|^{-2r-n} = O(\|X - tX_i\|^{-n})$$

ja (2.3) põhjal

$$D^{\alpha+\beta}G(X - tX_i) = \underbrace{P_{-n}(X - tX_i)}_{=0} \ln \|X - tX_i\| + \frac{Q_{4r-n}(X - tX_i)}{\|X - tX_i\|^{4r}} = O(\|X - tX_i\|^{-n}),$$

siis  $\Phi^{(r)}(t) = O(\|X - tX_i\|^{-n})$ . Näitame, et meie vaadeldavas protsessis  $\|X\| \rightarrow \infty$   $\Phi^{(r)}(t) = O(\|X\|^{-n})$ . Kuna  $X_i \in B(0, R/2)$ , siis  $t \in [0, 1]$  korral ka  $tX_i \in B(0, R/2)$ . Eelduse kohaselt aga  $X \notin B(0, R)$ . Seega

$$\frac{\|tX_i\|}{\|X\|} \leq \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}.$$

Nüüd

$$\frac{\|X - tX_i\|}{\|X\|} \geq \frac{\|X\| - \|tX_i\|}{\|X\|} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ning

$$\begin{aligned} \|X - tX_i\|^{-n} &= \left( \frac{\|X - tX_i\|}{\|X\|} \right)^{-n} \|X\|^{-n} = \frac{1}{\left( \frac{\|X - tX_i\|}{\|X\|} \right)^n} \|X\|^{-n} \leq \\ &\leq \frac{1}{\left( \frac{1}{2} \right)^n} \|X\|^{-n} = 2^n \|X\|^{-n} = O(\|X\|^{-n}). \end{aligned}$$

Oleme saanud, et

$$\begin{aligned} \omega(X; X_i) &= \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} \Phi^{(r)}(t) dt \leq \\ &\leq \frac{\text{const } \|X\|^{-n}}{(r-1)!} \int_0^1 (1-t)^{r-1} dt = \\ &= \frac{\text{const } \|X\|^{-n}}{r!} = O(\|X\|^{-n}). \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} D^\alpha S(X) &= \sum_{i=1}^m d_i D^\alpha G(X - X_i) = \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^m d_i Q(X; X_i)}_{=0, \text{ sest } Q(X; X_i) \in \mathcal{P}_{r-1}} + \sum_{i=1}^m d_i \omega(X; X_i) = O(\|X\|^{-n}). \end{aligned}$$

Näitame nüüd, et

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |D^\alpha S(X)|^2 dX \leq \text{const} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \|X\|^{-2n} dX < \infty.$$

Arvestades, et  $n \geq 1$ , saame

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \|X\|^{-2n} dX &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_R^x \rho^{-2n} \text{const} \rho^{n-1} d\rho = \\ &= \text{const} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_R^x \rho^{-n-1} d\rho = \\ &= \text{const} \lim_{x \rightarrow \infty} \left. \frac{\rho^{-n}}{-n} \right|_R^x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lause on tõestatud.

Defineerime operaatori  $T : L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L_2(\mathbb{R}^n)$  võrdusega

$$Tf = \left\{ \sqrt{\frac{r!}{\alpha!}} D^\alpha f \mid |\alpha| = r \right\},$$

kus  $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$  ning kujutisruumis  $L_2(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L_2(\mathbb{R}^n)$  on elemente täpselt niipalju kui on  $r$  järku osatuletisi. Näiteks  $n = 2$  ja  $r = 2$  korral

$$Tf = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \sqrt{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right).$$

Nüüd saame defineerida poolskalaarkorrutise

$$\langle f, g \rangle_{L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)} = \langle Tf, Tg \rangle = \sum_{|\alpha|=r} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f D^\alpha g dX$$

ning vastava poolnormi

$$\|Tf\| = \sqrt{\langle Tf, Tf \rangle}.$$

Olgu naturaalsplaini esituses (2.1)  $m \geq p = \dim \mathcal{P}_{r-1}$ . Kõrvalmärkusena võib mainida, et  $\dim \mathcal{P}_{r-1} = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$ . Punktides  $X_1, \dots, X_p$  olgu interpolatsiooni-ülesanne polünoomide ruumis  $\mathcal{P}_{r-1}$  üheselt lahenduv. Viimane tähendab seda, et kui  $Q \in \mathcal{P}_{r-1}$ ,  $Q(X_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , siis  $Q = 0$ . Ruumis  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  võib defineerida skalaarkorrutise

$$\langle f, g \rangle_r = \langle Tf, Tg \rangle + \sum_{i=1}^p f(X_i)g(X_i)$$

ja normi

$$\|f\|_r = \sqrt{\langle f, f \rangle_r},$$

mille suhtes  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  on Hilberti ruum.

**Lause 2.2.** Iga naturaalsplaini  $S$  ja funktsiooni  $g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  korral

$$\langle TS, Tg \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i g(X_i). \quad (2.4)$$

Tõestus. Kasutame kahte alljärgnevat tulemust [3]:

( $\alpha$ ) Elemendid ruumist  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  kuuluvad ruumi  $C^{r-[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$  ja kui  $k \rightarrow \infty$  korral  $\|f_k\|_r \rightarrow 0$ , siis  $f_k \rightarrow 0$  ruumis  $C^{r-[n/2]-1}(\mathbb{R}^n)$ .

( $\beta$ ) Otsesumma  $C_0^\infty + \mathcal{P}_{r-1}$  on tihe ruumis  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ , s.t. iga  $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  korral leiduvad  $\varphi_k \in C_0^\infty$  ja  $Q_k \in \mathcal{P}_{r-1}$  nii, et  $k \rightarrow \infty$  korral  $\|f - (\varphi_k + Q_k)\|_r \rightarrow 0$ .

Valime  $g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ . Abitulemuse ( $\beta$ ) põhjal leiduvad elemendid  $\varphi_k \in C_0^\infty$  ja  $Q_k \in \mathcal{P}_{r-1}$  nii, et  $k \rightarrow \infty$  korral  $\|g - (\varphi_k + Q_k)\|_r \rightarrow 0$  ning abitulemuse ( $\alpha$ ) põhjal  $\varphi_k(X_i) + Q_k(X_i) \rightarrow g(X_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Seega

$$\langle T(g - \varphi_k - Q_k), T(g - \varphi_k - Q_k) \rangle + \sum_{i=1}^p (g - \varphi_k - Q_k)^2(X_i) \rightarrow 0$$

ning

$$(g - \varphi_k - Q_k)(X_i) \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, p.$$

Kuna  $TQ = 0$  iga  $Q \in \mathcal{P}_{r-1}$  korral, siis

$$\langle T(g - \varphi_k - Q_k), T(g - \varphi_k - Q_k) \rangle = \langle T(g - \varphi_k), T(g - \varphi_k) \rangle \rightarrow 0.$$

Cauchy-Bunjakovski-Schwartzi võrratuse põhjal

$$|\langle TS, T(g - \varphi_k) \rangle| \leq \sqrt{\langle TS, TS \rangle} \sqrt{\langle T(g - \varphi_k), T(g - \varphi_k) \rangle} \rightarrow 0,$$

seega

$$\langle TS, T(g - \varphi_k) \rangle \rightarrow 0 \quad \text{ehk} \quad \langle TS, T\varphi_k \rangle \rightarrow \langle TS, Tg \rangle.$$

Definitsiooni kohaselt

$$\begin{aligned} \langle TS, T\varphi_k \rangle &= \sum_{|\alpha|=r} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha S(X) D^\alpha \varphi_k(X) dX = \\ &= \sum_{|\alpha|=r} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{r!}{\alpha!} \left( \sum_{i=1}^m d_i D^\alpha G(X - X_i) \right) D^\alpha \varphi_k(X) dX = \\ &= \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \sum_{i=1}^m d_i \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha G(X - X_i) D^\alpha \varphi_k(X) dX = \\ &= \sum_{i=1}^m d_i \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha G(X - X_i) D^\alpha \varphi_k(X) dX. \end{aligned}$$

Distributsiooni tuletise definitsiooni põhjal (vt. [9], lk. 64)

$$D^\alpha G(X - X_i) D^\alpha \varphi_k(X) = (-1)^r G(X - X_i) D^{2\alpha} \varphi_k(X),$$

seega

$$\langle TS, T\varphi_k \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} G(X - X_i) D^{2\alpha} \varphi_k(X) dX.$$

Näitame, et kehtib võrdus

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^{2\alpha} = \Delta^r. \quad (2.5)$$

Kui  $n = 1$ , siis

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^{2\alpha} = \frac{\partial^{2r}}{\partial x_1^{2r}}$$

ja

$$\Delta^r = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right)^r.$$

Kui  $n = 2$ , siis  $\alpha \in \{(r, 0), (r-1, 1), \dots, (0, r)\}$ , ning

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^{2\alpha} = \binom{r}{0} \frac{\partial^{2r}}{\partial x_1^{2r}} + \binom{r}{1} \frac{\partial^{2r}}{\partial x_1^{2(r-1)} x_2^2} + \dots + \binom{r}{r} \frac{\partial^{2r}}{\partial x_2^{2r}}.$$

Laplace'i operaator avaldub kujul

$$\Delta^r = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^r = \binom{r}{0} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right)^r + \binom{r}{1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right)^{r-1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \binom{r}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^r.$$

Kehtigu

$$\sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^{2\alpha} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^r,$$

kus  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Tähistame

$$\Theta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

siis

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \right)^r &= \left( \Theta + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \right)^r = \\ &= \binom{r}{0} \Theta^r + \binom{r}{1} \Theta^{r-1} \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} + \binom{r}{2} \Theta^{r-2} \frac{\partial^4}{\partial x_{n+1}^4} + \dots + \\ &+ \binom{r}{r-1} \Theta \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \right)^{r-1} + \binom{r}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \right)^r = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{r}{0} \sum_{|\alpha|=r} \frac{r!}{\alpha!} D^{2\alpha} + \binom{r}{1} \sum_{|\alpha|=r-1} \frac{(r-1)!}{\alpha!} D^{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} + \\
&+ \binom{r}{2} \sum_{|\alpha|=r-2} \frac{(r-2)!}{\alpha!} D^{2\alpha} \frac{\partial^4}{\partial x_{n+1}^4} + \dots + \\
&+ \binom{r}{r-1} \sum_{|\alpha|=1} \frac{1!}{\alpha!} D^{2\alpha} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \right)^{r-1} + \binom{r}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2} \right)^r = \sum_{|\beta|=r} \frac{r!}{\beta!} D^{2\beta},
\end{aligned}$$

kus  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$ .

Võrduse (2.5) põhjal

$$\langle TS, T\varphi_k \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i \int_{\mathbb{R}^n} G(X - X_i) \Delta^r \varphi_k(X) dX = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i \varphi_k(X_i).$$

Kuna  $\sum_{i=1}^m d_i Q_k(X_i) = 0$ , siis

$$\langle TS, T\varphi_k \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i [\varphi_k(X_i) + Q_k(X_i)] \rightarrow (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i g(X_i).$$

Piirväärtuse ühesuse tõttu

$$\langle TS, Tg \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i g(X_i).$$

Lause on tõestatud.

Võrdusest (2.4) järelduvad põhilised väited naturaalsplainide kohta.

Vaatleme naturaalsplainidega interpoleerimise ülesannet. Fikseerime ruumis  $\mathcal{P}_{r-1}$  baasi  $Q_1, \dots, Q_p$ . Olgu vaja leida splain

$$S(X) = \sum_{k=1}^p c_k Q_k(X) + \sum_{i=1}^m d_i G(X - X_i) \quad (2.6)$$

nii, et

$$S(X_i) = f(X_i), \quad i = 1, \dots, m.$$

Lisades tingimused

$$\sum_{i=1}^m d_i Q_k(X_i) = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (2.7)$$

saame  $m + p$  võrrandist koosneva lineaarse süsteemi tundmatute  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ja  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , leidmiseks.

**Lause 2.3.** On olemas parajasti üks interpoleeriv naturaalsplain.

Tõestus. Piisab näidata, et kui naturaalsplain (2.6) rahuldab tingimusi  $S(X_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , siis  $d_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ja  $Q_0 = \sum_{k=1}^p c_k Q_k(X) = 0$ , s.t. vastav homogeenne süsteem on üheselt lahenduv.

Kasutades seost (2.4) saame

$$\langle TS, TS \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i S(X_i) = 0.$$

Seega kõik  $r$  järku üldistatud tuletised funktsioonist  $S$  on võrdsed nulliga. Näitame, et siis  $S \in \mathcal{P}_{r-1}$ .

Kui  $\frac{\partial S}{\partial x_i} = 0$ , siis  $S$  ei sõltu muutujast  $x_i$  (vt [17], lk. 77). Seega kui esimest järku tuletised on nullid, siis  $S$  on konstant. Vaatleme juhtu, kus kõik teist järku tuletised on nullid. Elliptilise võrrandi  $\Delta S = 0$  korral distributsioonide mõttes lahend on nõrk lahend (vt. [10], lk. 147) ning iga nõrk lahend on tugev lahend (vt. [10], lk. 146). Seega  $S \in C^2(\mathbb{R}^n)$ , millest saame, et  $S$  on esimese astme polünoom. Kui  $D^\alpha S = 0$  iga  $|\alpha| = r$  korral,  $r \geq 2$ , siis  $D^\beta(D^\gamma S) = 0$  iga  $|\beta| = 2$  ja  $|\gamma| = r - 2$  korral. Seega ka  $\Delta(D^\gamma S) = 0$  iga  $|\gamma| = r - 2$  korral ning  $D^\gamma S$  on tavaline funktsioon. Integreerides saame, et  $S$  on  $r - 1$  astme polünoom. Oleme näidanud, et  $S \in \mathcal{P}_{r-1}$ .

Võtame funktsioonist  $S$   $2r$  järku tuletise näiteks muutuja  $x_1$  järgi, saame

$$D_1^{2r} S(X) = \sum_{i=1}^m d_i D_1^{2r} G(X - X_i) = 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{X_1, \dots, X_m\}.$$

Kui  $n$  on paaritu, siis (2.2) põhjal

$$D_1^{2r} G(X - X_i) = Q_{2r}(X - X_i) \|X - X_i\|^{-2r-n} = \frac{Q_{2r}(X - X_i)}{\|X - X_i\|^{2r+n}}.$$

Kui  $n$  on paaris, siis (2.3) põhjal

$$D_1^{2r} G(X - X_i) = \frac{Q_{4r-n}(X - X_i)}{\|X - X_i\|^{4r}}.$$

Kui  $X \rightarrow X_i$ , siis mõlemas avaldises nimetaja läheneb kiiremini nullile, seega

$$\lim_{X \rightarrow X_i} |D_1^{2r} G(X - X_i)| = \infty$$

ning järelikult  $d_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Nüüd  $S(X_i) = Q_0(X_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Eelduse kohaselt on interpolatsiooniuksanne punktides  $X_1, \dots, X_p$  polünoomide ruumil  $\mathcal{P}_{r-1}$  üheselt lahenduv, seega  $Q_0 = 0$ .

Lause on tõestatud.

Tähistame edaspidi ainsat interpoleerivat naturaalsplaini sümboliga  $S(f)$ .

**Lause 2.4.** Splain  $S(f)$  on ülesande

$$\min_{g \in \Omega} \|Tg\|^2,$$
$$\Omega = \{g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid g(X_i) = f(X_i), i = 1, \dots, m\},$$

ainus lahend.

Tõestus. Defineerime

$$N(L) = \{h \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid h(X_i) = 0, i = 1, \dots, m\}$$

ja

$$N(T) = \{h \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid Th = 0\}.$$

Teoreemi 1.3 põhjal peab kontrollima ortogonaalsuse tingimust

$$\langle TS(f), Th \rangle = 0, \forall h \in N(L).$$

Seose (2.4) põhjal

$$\langle TS(f), Th \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i h(X_i) = 0, \forall h \in N(L).$$

Kuna

$$N(T) \cap N(L) = \mathcal{P}_{r-1} \cap N(L) = \{0\},$$

siis järelduse 1.4 põhjal on lahend ühene.

Lause on tõestatud.



### 3. Silumisülesannete püstitused

#### 3.1. Kaaludega silumisülesanne

Olgu antud lõplikud indeksite hulgad  $I$ ,  $I_0 \subset I$  ja  $I_1 = I \setminus I_0$ . Peale selle olgu veel antud algandmed  $X_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $z_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , ning kaalud  $w_i > 0$ ,  $i \in I_1$ . Vaatleme ülesannet

$$\min_{g \in \Omega_w} \left( \|Tg\|^2 + \sum_{i \in I_1} \frac{|g(X_i) - z_i|^2}{w_i} \right), \quad (3.1)$$

kus

$$\Omega_w = \{g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid g(X_i) = z_i, i \in I_0\}.$$

Ülesannet (3.1) nimetatakse kaaludega silumisülesandeks.

**Lause 3.1.** Olgu polünoomidega interpoleerimise ülesanne kõigil sõlmedel  $X_i$ ,  $i \in I$ , üheselt lahenduv. Siis eksisteerib parajasti üks naturaalsplain  $S$ , mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} (-1)^r d_i w_i + S(X_i) &= z_i, & i \in I_1, \\ S(X_i) &= z_i, & i \in I_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

ning splain  $S$  on kaaludega silumisülesande (3.1) ainus lahend.

Tõestus. Olgu hulgas  $I$  olevate indeksite arv  $m$ . Naturaalsplaini (2.6) leidmiseks on vaja määrata  $m + p$  kordajat. Võrdused (3.2) koos lisatingimustega (2.7) annavad  $m + p$  lineaarset võrrandit. Näitame, et vastaval homogeesel süsteemil on ainult triviaalne lahend. Olgu  $S_0$  naturaalsplain kordajatega  $d_i^0$  selline, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} (-1)^r d_i^0 w_i + S_0(X_i) &= 0, & i \in I_1, \\ S_0(X_i) &= 0, & i \in I_0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Võrduste (2.4) ja (3.3) põhjal

$$0 \leq \langle TS_0, TS_0 \rangle = (-1)^r \sum_{i \in I} d_i^0 S_0(X_i) = (-1)^r \sum_{i \in I_1} d_i^0 S_0(X_i) = -(-1)^{2r} \sum_{i \in I_1} w_i (d_i^0)^2.$$

Seega  $d_i^0 = 0$ ,  $i \in I_1$ . Võrduste (3.3) põhjal  $S_0(X_i) = 0$ ,  $i \in I$ . Lause 2.3 põhjal  $d_i^0 = 0$ ,  $i \in I$ . Kasutades eeldust, et polünoomidega interpoleerimise ülesanne kõigil sõlmedel  $X_i$ ,  $i \in I$ , on üheselt lahenduv, saame  $S_0 = 0$ .

Olgu  $S$  naturaalsplain, mis rahuldab tingimusi (3.2). Siis hulga  $\Omega_w$  saab kirja panna kujul

$$\Omega_w = \{S + h \mid h \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n), h(X_i) = 0, i \in I_0\}.$$

Olgu  $F$  silumisülesandes esinev funktsionaal, mida minimiseeritakse, siis

$$F(S + h) = \|T(S + h)\|^2 + \sum_{i \in I_1} \frac{|S(X_i) + h(X_i) - z_i|^2}{w_i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \|TS\|^2 + 2\langle TS, Th \rangle + \|Th\|^2 + \\
&+ \sum_{i \in I_1} \frac{|S(X_i) - z_i|^2}{w_i} + 2 \sum_{i \in I_1} \frac{(S(X_i) - z_i) h(X_i)}{w_i} + \sum_{i \in I_1} \frac{|h(X_i)|^2}{w_i}.
\end{aligned}$$

Arvestades võrdust (2.4) ning seda, et  $h(X_i) = 0$ ,  $i \in I_0$ , saame

$$F(S + h) = F(S) + 2 \sum_{i \in I_1} \left( (-1)^r d_i + \frac{S(X_i) - z_i}{w_i} \right) h(X_i) + \|Th\|^2 + \sum_{i \in I_1} \frac{|h(X_i)|^2}{w_i}.$$

Võrduste (3.2) põhjal

$$F(S + h) = F(S) + \|Th\|^2 + \sum_{i \in I_1} \frac{|h(X_i)|^2}{w_i}.$$

Näeme, et  $F(S + h) \geq F(S)$  ning  $F(S + h) = F(S)$  parajasti siis, kui  $\|Th\| = 0$  ja  $h(X_i) = 0$ ,  $i \in I_1$ . Kuna  $\|Th\| = 0$ , siis  $h \in \mathcal{P}_{r-1}$ . Arvestades veel, et  $h(X_i) = 0$ ,  $i \in I_0$ , saame  $h = 0$ .

Lause on tõestatud.

### 3.2. Tõketega silumisülesanne

Olgu antud  $X_i, z_i, i \in I$ , ning arvud  $\varepsilon_i, i \in I_1 \subset I$ . Vaatleme ülesannet

$$\min_{g \in \Omega_\varepsilon} \|Tg\|^2, \quad (3.4)$$

kus

$$\Omega_\varepsilon = \{g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid g(X_i) = z_i, i \in I_0, |g(X_i) - z_i| \leq \varepsilon_i, i \in I_1\}$$

ja  $I_0 = I \setminus I_1$ . Vaatleme ka ülesannet

$$\min_{g \in \Omega_{\alpha\beta}} \|Tg\|^2, \quad (3.5)$$

kus

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid g(X_i) = z_i, i \in I_0, \alpha_i \leq g(X_i) \leq \beta_i, i \in I_1\}$$

ja  $\alpha_i < \beta_i$ . On lubatud, et  $\alpha_i = -\infty$  või  $\beta_i = \infty$ , kuid siis iga  $i \in I_1$  korral kas  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  või  $\beta_i \in \mathbb{R}$ . Ülesandeid (3.4) ja (3.5) nimetatakse tõketega silumisülesanneteks.

Ülesanne (3.4) on ülesande (3.5) erijuht, kus  $\alpha_i = z_i - \varepsilon_i$  ja  $\beta_i = z_i + \varepsilon_i$ ,  $i \in I_1$ . Vastupidi, ülesande (3.5) lahendi  $S$  põhjal saab konstrueerida ülesande kujul (3.4), mille lahendiks on samuti funktsioon  $S$ . Selleks valime  $i \in I_0$  korral  $z_i = S(X_i)$  ja  $i \in I_1$  korral  $z_i = (\alpha_i + \beta_i)/2$ ,  $\varepsilon_i = (\beta_i - \alpha_i)/2$ . Kui näiteks  $\beta_i = \infty$ , siis olgu  $\varepsilon_i > 0$  nii suur, et  $S(X_i) \leq \alpha_i + 2\varepsilon_i$ . Sel juhul valime  $z_i = \alpha_i + \varepsilon_i$ . Seega on mõlemad tõketega silumisülesanded ekvivalentsed.

Vaatleme tõketega silumisülesannet (3.5), kus hulk  $\Omega_{\alpha\beta}$  koosneb kõikidest funktsioonidest  $g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ , mille korral on täidetud interpolatsiooni- ja tõkкетинimused

$$\begin{aligned} g(X_i) &= z_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \alpha_i &\leq g(X_i) \leq \beta_i, \quad i = m + 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Sellega konkretiseeritakse indeksite hulgad  $I_0 = \{1, \dots, m\}$  ja  $I_1 = \{m + 1, \dots, N\}$ .

Eeldame, et  $m \geq p$  ja polünoomidega interpolatsiooniülesanne  $p$  esimeses sõlmes  $X_1, \dots, X_p$  on üheselt lahenduv. Näitame järgnevas, et siis on ülesande (3.5) lahendiks naturaalsplain kujul

$$S(X) = Q_0(X) + \sum_{i=1}^N d_i G(X - X_i),$$

kus  $Q_0 \in \mathcal{P}_{r-1}$  ja

$$\sum_{i=1}^N d_i Q(X_i) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{r-1}. \quad (3.6)$$

Olgu  $D$  selliste vektorite  $d = (d_1, \dots, d_N)$  hulk, mille korral on täidetud tingimus (3.6) ehk

$$D = \left\{ d \in \mathbb{R}^N \left| \sum_{i=1}^N d_i Q(X_i) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{r-1} \right. \right\}.$$

Defineerime  $d^1, d^2 \in D$  korral funktsiooni

$$\Phi(d^1, d^2) = \frac{1}{2} \langle TS_{d^1}, TS_{d^2} \rangle,$$

kus  $S_{d^1}$  ja  $S_{d^2}$  on vastavalt naturaalsplainid kordajatega  $d^1$  ja  $d^2$ . Olgu

$$\Phi(d) = \Phi(d, d).$$

On selge, et  $\Phi(d) \geq 0$ . Kui  $\Phi(d) = 0$ , siis lause 2.3 tõestuse põhjal  $d = (0, \dots, 0)$ . Peale selle on  $\Phi$  kommutatiivne, sest

$$\Phi(d^1, d^2) = \frac{1}{2} \langle TS_{d^1}, TS_{d^2} \rangle = \frac{1}{2} \langle TS_{d^2}, TS_{d^1} \rangle = \Phi(d^2, d^1),$$

aditiivne 1. teguri suhtes

$$\begin{aligned} \Phi(d^1 + d^2, d^3) &= \frac{1}{2} \langle TS_{d^1+d^2}, TS_{d^3} \rangle = \frac{1}{2} \langle T(S_{d^1} + S_{d^2}), TS_{d^3} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle TS_{d^1} + TS_{d^2}, TS_{d^3} \rangle = \Phi(d^1, d^3) + \Phi(d^2, d^3), \end{aligned}$$

ja homogeenne 1. teguri suhtes

$$\Phi(\lambda d^1, d^2) = \frac{1}{2} \langle TS_{\lambda d^1}, TS_{d^2} \rangle = \frac{1}{2} \langle \lambda TS_{d^1}, TS_{d^2} \rangle = \lambda \Phi(d^1, d^2).$$

Seega  $\Phi(d^1, d^2)$  on skalaarkorrutis ruumi  $\mathbb{R}^N$  vektoralamruumis  $D$  ning  $\sqrt{\Phi(d)}$  on skalaarkorrutise poolt indutseeritud norm.

Vaatleme ülesannet (3.5) naturaalsplainidel. See on ekvivalentne ülesandega

$$\min_{(d,c) \in K} \Phi(d), \quad (3.7)$$

kus

$$\begin{aligned} K &= \{(d, c) \in \mathbb{R}^{N+p} \mid d = (d_1, \dots, d_N) \in D, c = (c_1, \dots, c_p), \\ &S(X_i) = z_i, i = 1, \dots, m, \alpha_i \leq S(X_i) \leq \beta_i, i = m + 1, \dots, N, \\ &S(X) = \sum_{k=1}^p c_k Q_k(X) + \sum_{i=1}^N d_i G(X - X_i)\}, \end{aligned}$$

ja polünoomid  $Q_1, \dots, Q_p$  moodustavad fikseeritud baasi ruumis  $\mathcal{P}_{r-1}$ . Otsitavateks on  $c = (c_1, \dots, c_p)$  ja  $d = (d_1, \dots, d_N)$ .

Hulk  $K$  on lõpliku arvu poolruumide ühisosa, seega polüeedriline hulk. Polüeedriline hulk on kumer ja kinnine (vt. [5], lk. 25). Polüeedrilise hulga esitusteoreemi kohaselt (vt. [15], lk. 188 või [5], lk. 47) on  $K$  polüeedriline hulk ruumis  $\mathbb{R}^{N+p}$  parajasti siis, kui leiduvad vektorid  $x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^{N+p}$  nii, et

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i + \sum_{i=s+1}^q \mu_i x_i \mid \lambda_i, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \right\}.$$

Olgu  $P : \mathbb{R}^{N+p} \rightarrow \mathbb{R}^N$  projektor ruumi  $\mathbb{R}^{N+p}$  esimesele  $N$  koordinaadile ning  $K_N$  hulga  $K$  vastav projektsioon. Siis  $(d, c) \in K$  korral  $P(d, c) = d \in K_N$ . Kuna  $P$  on lineaarne, siis

$$K_N = PK = \left\{ \sum_{i=1}^s \lambda_i P x_i + \sum_{i=s+1}^q \mu_i P x_i \mid \lambda_i, \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, P x_i \in \mathbb{R}^N \right\}$$

on polüeedriline hulk vastavalt polüeedrilise hulga esitusteoreemile. Seetõttu on  $K_N$  kumer ja kinnine ruumis  $\mathbb{R}^N$ . Lemma 1.9 tõestuse põhjal on ülesanne  $\min_{d \in K_N} \Phi(d)$  üheselt lahenduv. Olgu lahendiks  $d^* \in \mathbb{R}^N$ . Siis ülesande (3.7) lahendiks on iga elemendi  $d^*$  originaal hulgas  $K$ . Olgu  $(d^*, c^1), (d^*, c^2) \in K$  elemendi  $d^*$  originaalid ning  $S_1$  ja  $S_2$  vastavad naturaalsplainid. Siis  $S_1 - S_2 \in P_{r-1}$  ning  $(S_1 - S_2)(X_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Interpolatsiooniülesande ühese lahenduvuse tõttu  $p$  esimeses sõlmes  $c^1 = c^2$ . Seega ülesandel (3.7) leidub ühene lahend.

Leiame optimaalsuse kriteeriumi ülesande (3.7) lahenduvuseks. Kasutame järgnevas tähistusi

$$\begin{aligned} A_i &= (G(X_i - X_1), \dots, G(X_i - X_N), Q_1(X_i), \dots, Q_p(X_i)), \quad i = 1, \dots, N, \\ V_k &= (Q_k(X_1), \dots, Q_k(X_N), \underbrace{0, \dots, 0}_p), \quad k = 1, \dots, p, \\ h &= (d_1, \dots, d_N, c_1, \dots, c_p). \end{aligned}$$

Ülesande (3.7) lisatingimused saab esitada kujul

$$\begin{aligned}\langle A_i, h \rangle &= z_i, & i &= 1, \dots, m, \\ \langle A_i, h \rangle &\geq \alpha_i, & i &= m+1, \dots, N, \\ -\langle A_i, h \rangle &\geq -\beta_i, & i &= m+1, \dots, N, \\ \langle V_k, h \rangle &= 0, & k &= 1, \dots, p.\end{aligned}$$

Teoreemi 1.18 põhjal on  $h^*$  ülesande (3.7) lahendiks parajasti siis, kui leiduvad arvud  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $u'_i, u''_i$ ,  $i = m+1, \dots, N$ , ja  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , nii, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned}\Phi'(h^*) &= \sum_{i=1}^m u_i A_i + \sum_{i=m+1}^N (u'_i - u''_i) A_i + \sum_{k=1}^p \lambda_k V_k, \\ u'_i &\geq 0, \quad u''_i \geq 0, \quad i = m+1, \dots, N,\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$u'_i(\langle A_i, h^* \rangle - \alpha_i) = 0, \quad u''_i(\beta_i - \langle A_i, h^* \rangle) = 0, \quad i = m+1, \dots, N.$$

Esmalt peaksime kontrollima funktsiooni  $\Phi$  kumerust. Näitame, et iga  $d, d' \in K_N$  ja  $\lambda \in (0, 1)$  korral

$$\Phi(\lambda d + (1 - \lambda)d') \leq \lambda\Phi(d) + (1 - \lambda)\Phi(d').$$

Kuna  $\Phi$  on mingi normi ruut, siis kolmnurga võrratuse põhjal

$$\Phi(\lambda d + (1 - \lambda)d') \leq \Phi(\lambda d) + \Phi((1 - \lambda)d') + 2\sqrt{\Phi(\lambda d)}\sqrt{\Phi((1 - \lambda)d')}.$$

Homogeensuse aksiooni põhjal  $\Phi(\lambda d) = \lambda^2\Phi(d)$  ja  $\Phi((1 - \lambda)d') = (1 - \lambda)^2\Phi(d')$ . Seetõttu

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda d + (1 - \lambda)d') &\leq \lambda^2\Phi(d) + (1 - \lambda)^2\Phi(d') + 2\lambda(1 - \lambda)\sqrt{\Phi(d)}\sqrt{\Phi(d')} \leq \\ &\leq \lambda^2\Phi(d) + (1 - \lambda)^2\Phi(d') + \lambda(1 - \lambda)(\Phi(d) + \Phi(d')) = \\ &= \lambda\Phi(d) + (1 - \lambda)\Phi(d')\end{aligned}$$

ning sellega on  $\Phi$  kumerus näidatud.

Arvestades vektorite  $A_i$  ja  $V_k$  esitusi, avalduvad võrduse (3.8) põhjal vektori  $\Phi'(h^*)$  esimesed  $N$  komponenti kujul

$$[\Phi'(h^*)]_j = \sum_{i=1}^m u_i G(X_i - X_j) + \sum_{i=m+1}^N (u'_i - u''_i) G(X_i - X_j) + \sum_{k=1}^p \lambda_k Q_k(X_j)$$

ning viimased  $p$  komponenti kujul

$$[\Phi'(h^*)]_{j+N} = \sum_{i=1}^m u_i Q_j(X_i) + \sum_{i=m+1}^N (u'_i - u''_i) Q_j(X_i).$$

Seoste (2.4) ja (3.6) põhjal

$$\begin{aligned}\Phi(d) &= \frac{(-1)^r}{2} \sum_{i=1}^N d_i S(X_i) = \frac{(-1)^r}{2} \sum_{i=1}^N d_i \left[ Q_0(X_i) + \sum_{k=1}^N d_k G(X_i - X_k) \right] = \\ &= \frac{(-1)^r}{2} \sum_{i,k=1}^N d_i d_k G(X_i - X_k).\end{aligned}\quad (3.9)$$

Arvutades võrduse (3.9) põhjal  $\Phi'(h^*)$ , saame

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_j}(h^*) = (-1)^r \sum_{i=1}^N d_i^* G(X_i - X_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

ning

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_j}(h^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Seetõttu

$$\begin{aligned}u_i &= (-1)^r d_i^*, \quad i = 1, \dots, m, \\ u'_i - u''_i &= (-1)^r d_i^*, \quad i = m+1, \dots, N, \\ \lambda_k &= 0, \quad k = 1, \dots, p.\end{aligned}\quad (3.10)$$

**Lause 3.2.** Rahuldagu naturaalsplain  $S_*$  kordajatega  $h^* = \{d^*, c^*\}$  tingimusi

$$\begin{aligned}S_*(X_i) &= z_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \alpha_i &\leq S_*(X_i) \leq \beta_i, \quad i = m+1, \dots, N.\end{aligned}$$

Selleks, et  $h^*$  oleks ülesande (3.7) lahend, on tarvilik ja piisav, et iga  $i = m+1, \dots, N$  korral

$$\begin{aligned}d_i^* &= 0, \text{ kui } \alpha_i < S_*(X_i) < \beta_i, \\ (-1)^r d_i^* &\geq 0, \text{ kui } S_*(X_i) = \alpha_i, \\ (-1)^r d_i^* &\leq 0, \text{ kui } S_*(X_i) = \beta_i.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu  $h^*$  ülesande (3.7) lahend. Siis kehtivad tingimused (3.8) ja (3.10).

Kui  $\alpha_i < S_*(X_i) < \beta_i$ , siis  $\langle A_i, h^* \rangle - \alpha_i > 0$  ja  $\beta_i - \langle A_i, h^* \rangle > 0$  ning (3.8) põhjal  $u'_i = u''_i = 0$ . Arvestades seoseid (3.10) saame, et  $d_i^* = 0$ .

Kui  $S_*(X_i) = \alpha_i$ , siis  $\langle A_i, h^* \rangle - \alpha_i = 0$  ja  $\beta_i - \langle A_i, h^* \rangle > 0$  ning (3.8) põhjal  $u'_i \geq 0$  ja  $u''_i = 0$ . Kasutades jälle seoseid (3.10) saame  $u'_i - u''_i = (-1)^r d_i^* \geq 0$ .

Analoogiliselt, kui  $S_*(X_i) = \beta_i$ , siis  $\langle A_i, h^* \rangle - \alpha_i > 0$  ja  $\beta_i - \langle A_i, h^* \rangle = 0$  ning (3.8) põhjal  $u'_i = 0$  ja  $u''_i \geq 0$ . Lõpetuseks veel (3.10) põhjal  $u'_i - u''_i = (-1)^r d_i^* \leq 0$ .

Piisavus. Näitame, et suvalise funktsiooni  $g \in \Omega_{\alpha\beta}$  korral  $\|Tg\|^2 \geq \|TS_*\|^2$ . Kasutades võrdust

$$\|TS_* - Tg\|^2 = \langle TS_* - Tg, TS_* - Tg \rangle = \|TS_*\|^2 - 2\langle TS_*, Tg \rangle + \|Tg\|^2$$

näeme, et

$$\begin{aligned}\|Tg\|^2 - \|TS_*\|^2 &= \|TS_* - Tg\|^2 + 2\langle TS_*, Tg \rangle - 2\|TS_*\|^2 = \\ &= \|TS_* - Tg\|^2 + 2\langle TS_*, Tg - TS_* \rangle.\end{aligned}$$

Kasutades seost (2.4) ja võrdusi  $g(X_i) = S_*(X_i) = z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , saame

$$\begin{aligned}\|Tg\|^2 - \|TS_*\|^2 &= \|TS_* - Tg\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N (-1)^r d_i^* [g(X_i) - S_*(X_i)] = \\ &= \|TS_* - Tg\|^2 + 2 \sum_{i=m+1}^N (-1)^r d_i^* [g(X_i) - S_*(X_i)].\end{aligned}$$

Defineerime indeksite hulgad  $M_1$  ja  $M_2$  järgnevalt

$$\begin{aligned}M_1 &= \{i \mid i = m+1, \dots, N, S_*(X_i) = \alpha_i\}, \\ M_2 &= \{i \mid i = m+1, \dots, N, S_*(X_i) = \beta_i\}.\end{aligned}$$

Kui  $i \in \{m+1, \dots, N\} \setminus (M_1 \cup M_2)$ , siis  $\alpha_i < S_*(X_i) < \beta_i$  ning  $d_i^* = 0$ . Kui  $i \in M_1$ , siis  $(-1)^r d_i^* \geq 0$  ning  $i \in M_2$  korral  $(-1)^r d_i^* \leq 0$ . Seega

$$\begin{aligned}\|Tg\|^2 - \|TS_*\|^2 &= \|TS_* - Tg\|^2 + 2 \sum_{i \in M_1} \underbrace{(-1)^r d_i^*}_{\geq 0} \underbrace{[g(X_i) - \alpha_i]}_{\geq 0} + \\ &+ 2 \sum_{i \in M_2} \underbrace{(-1)^r d_i^*}_{\leq 0} \underbrace{[g(X_i) - \beta_i]}_{\leq 0} \geq 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Niisiis, spline  $S_*$  kordajatega  $h^*$  minimiseerib funktsionaali  $\|Tg\|^2$  üle kõikide  $g \in \Omega_{\alpha\beta}$ , seepärast on  $h^*$  ka ülesande (3.7) lahend.

Lause on tõestatud.

**Lause 3.3.** Olgu  $h^*$  ülesande (3.7) lahend ja  $S_*$  naturaalspline kordajatega  $h^*$ . Siis  $S_*$  on ülesande (3.5) ainus lahend.

Tõestus. Lause 3.2 tõestuses näitasime, et suvalise funktsiooni  $g \in \Omega_{\alpha\beta}$  korral  $\|Tg\|^2 \geq \|TS_*\|^2$ . Seega  $S_*$  on ülesande (3.5) lahend. Selleks et näidata lahendi ühesust, kasutame eeldust, et  $m \geq p = \dim \mathcal{P}_{r-1}$  ning punktides  $X_1, \dots, X_p$  on interpolatsiooniülesanne polünoomide ruumil  $\mathcal{P}_{r-1}$  üheselt lahenduv. Viimane tähendab aga seda, et kui  $Q(X_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $Q \in \mathcal{P}_{r-1}$ , siis  $Q = 0$ .

Kui  $\|Tg\|^2 = \|TS_*\|^2$ , siis (3.12) põhjal  $\|TS_* - Tg\|^2 = 0$ . Kui kõik  $r$  järku tuletised funktsioonist  $S_* - g$  on võrdsed nulliga, siis  $S_* - g \in \mathcal{P}_{r-1}$ . Arvestades, et  $g(X_i) = S_*(X_i)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , saame  $g = S_*$ .

Lause on tõestatud.

Kaaludega ja tõketega silumisülesannete ekvivalentsust ja ühelt teisele ülemineku võimalusi on analüüsitud töös [1].

## 4. Tõketega silumisülesande lahendamine

### 4.1. Sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritm

Punktis 3.2 nägime, et tõketega silumisülesande

$$\min_{g \in \Omega_{\alpha\beta}} \|Tg\|^2,$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{g \in L_2^{(r)}\mathbb{R}^n \mid g(X_i) = z_i, i = 1, \dots, m, \alpha_i \leq g(X_i) \leq \beta_i, i = m + 1, \dots, N\},$$

lahendamiseks piisab lahendada ülesanne (3.7) naturaalsplainidel

$$\Phi(d) = \frac{(-1)^r}{2} \sum_{i,k=1}^N d_i d_k G(X_i - X_k) \rightarrow \min,$$

$$S(X_i) = z_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\alpha_i \leq S(X_i) \leq \beta_i, \quad i = m + 1, \dots, N,$$

$$d \in D.$$

Esitame järgnevas ühe võimaliku algoritmi ülesande (3.7) lahendamiseks. Igas algoritmi sammus konstrueerime interpoleeriva naturaalsplaini ja kontrollime optimaalsuse tingimusi (3.11).

**1. etapp.** Olgu  $Q_1, \dots, Q_p$  fikseeritud baas ruumis  $\mathcal{P}_{r-1}$ . Konstrueerime naturaalsplaini

$$S_0(X) = \sum_{s=1}^p c_s^0 Q_s(X) + \sum_{i=1}^m d_i^0 G(X - X_i),$$

mis interpoleeriks sõlmi  $S_0(X_j) = z_j, j = 1, \dots, m$ . Selleks on vaja lahendada lineaarne võrrandisüsteem

$$\sum_{s=1}^p c_s^0 Q_s(X_j) + \sum_{k=1}^m d_k^0 G(X_j - X_k) = z_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m d_i^0 Q_s(X_i) = 0, \quad s = 1, \dots, p,$$

tundmatute  $d_1^0, \dots, d_m^0, c_1^0, \dots, c_p^0$  leidmiseks. Kui  $\{1, \dots, m\} = \emptyset$ , võib võtta splainiks  $S_0$  suvalise polünoomi ruumist  $\mathcal{P}_{r-1}$ . Kontrollime tingimusi

$$\alpha_i \leq S_0(X_i) \leq \beta_i, \quad i = m + 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Kui (4.1) on täidetud, siis lause 3.2 põhjal  $S_0$  on ülesande (3.7) lahend, sest  $d_i = 0, i = m + 1, \dots, N$ . Vastasel korral, s.t. kui (4.1) pole täidetud, määrame hulga  $M_0^\alpha = \emptyset$  ja  $M_0^\beta = \emptyset$ , võtame  $k = 1$  ning läheme etappi 2.



**2. etapp (sõlmede lisamise etapp).** Siin on algoritmi täitmisel antud indeksite hulgad  $M_{k-1}^\alpha, M_{k-1}^\beta \subset \{m+1, \dots, N\}$ . Lisaks on leitud naturaalsplain  $S_{k-1}$ , mis on ülesande

$$\begin{aligned} S_{k-1}(X_i) &= z_i, & i &= 1, \dots, m, \\ S_{k-1}(X_i) &= \alpha_i, & i &\in M_{k-1}^\alpha, \\ S_{k-1}(X_i) &= \beta_i, & i &\in M_{k-1}^\beta, \end{aligned}$$

lahend, kusjuures  $i \in M_{k-1}^\alpha$  korral  $(-1)^r d_i^{k-1} > 0$  ja  $i \in M_{k-1}^\beta$  korral  $(-1)^r d_i^{k-1} < 0$ . Lause 3.2 põhjal on  $S_{k-1}$  ülesande

$$\min_{g \in \Omega_{k-1}} \|Tg\|^2$$

lahend, kus

$$\Omega_{k-1} = \{g \in L_2^{(r)} \mathbb{R}^n \mid g(X_i) = z_i, i = 1, \dots, m, \alpha_i \leq g(X_i) \leq \beta_i, i \in M_{k-1}^\alpha \cup M_{k-1}^\beta\}.$$

Paneme tähele, et  $\Omega_{\alpha\beta} \subset \Omega_{k-1}$  ning seepärast

$$\min_{g \in \Omega_{k-1}} \|Tg\|^2 \leq \min_{g \in \Omega_{\alpha\beta}} \|Tg\|^2.$$

Eraldame välja indeksid, mille korral tõkketingimused (4.1) pole täidetud. Olgu  $N_{k-1}^\alpha, N_{k-1}^\beta \subset \{m+1, \dots, N\}$  sellised, et

$$i \in N_{k-1}^\alpha, \text{ kui } S_{k-1}(X_i) < \alpha_i,$$

ja

$$i \in N_{k-1}^\beta, \text{ kui } S_{k-1}(X_i) > \beta_i.$$

Kui  $N_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\beta = \emptyset$ , siis  $S_{k-1}$  on ülesande (3.7) lahend ning algoritmi töö on lõppenud. Vastasel korral leiame naturaalsplaini

$$S_k^0(X) = \sum_{s=1}^p c_s^{k,0} Q_s(X) + \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, m\} \cup \\ \cup M_{k-1}^\alpha \cup M_{k-1}^\beta \cup \\ \cup N_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\beta}} d_i^{k,0} G(X - X_i)$$

nii, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} S_k^0(X_i) &= z_i, & i &= 1, \dots, m, \\ S_k^0(X_i) &= \alpha_i, & i &\in M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha, \\ S_k^0(X_i) &= \beta_i, & i &\in M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta. \end{aligned}$$

Kui kehtivad võrratused

$$\begin{aligned} (-1)^r d_i^{k,0} &> 0, & i &\in M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha, \\ (-1)^r d_i^{k,0} &< 0, & i &\in M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta, \end{aligned} \tag{4.2}$$

siis võetakse  $M_k^\alpha = M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha$ ,  $M_k^\beta = M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta$  ja  $S_k = S_k^0$ . Splainiga  $S_k$  alustatakse uuesti etappi 2. Kui tingimused (4.2) pole täidetud, siis tähistatakse  $L_{k,0}^\alpha = \emptyset$ ,  $L_{k,0}^\beta = \emptyset$  ning splainiga  $S_k^0$  minnakse 3. etappi.

**3. etapp (sõlmede eemaldamise etapp).** Olgu leitud splain  $S_k^{j-1}$ . Defineerime  $j \geq 1$  korral

$$\begin{aligned} L_{k,j}^\alpha &= \{i \in M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha \mid (-1)^r d_i^{k,j-1} \leq 0\}, \\ L_{k,j}^\beta &= \{i \in M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta \mid (-1)^r d_i^{k,j-1} \geq 0\}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et juba eemaldatud sõlmede  $X_i$  korral  $d_i^{k,j-1} = 0$ , seetõttu kehtivad sõlmede hulkade vahel sisalduvused  $L_{k,j-1}^\alpha \subset L_{k,j}^\alpha$  ja  $L_{k,j-1}^\beta \subset L_{k,j}^\beta$ . Lahendame interpolatsiooniülesande

$$\begin{aligned} S_k^j(X_i) &= z_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ S_k^j(X_i) &= \alpha_i, \quad i \in (M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha) \setminus L_{k,j}^\alpha, \\ S_k^j(X_i) &= \beta_i, \quad i \in (M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta) \setminus L_{k,j}^\beta, \end{aligned}$$

ja kontrollime tingimusi

$$\begin{aligned} (-1)^r d_i^{k,j} &> 0, \quad i \in (M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha) \setminus L_{k,j}^\alpha, \\ (-1)^r d_i^{k,j} &< 0, \quad i \in (M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta) \setminus L_{k,j}^\beta. \end{aligned}$$

Kui viimased võrratused kehtivad, siis tähistatakse  $M_k^\alpha = (M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha) \setminus L_{k,j}^\alpha$ ,  $M_k^\beta = (M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta) \setminus L_{k,j}^\beta$  ja  $S_k = S_k^j$ . Splainiga  $S_k$  alustatakse uuesti etappi 2. Kui viimased võrratused ei kehti, siis minnakse uuesti 3. etapi algusesse ja eemaldatakse veel sõlmi. Paneme tähele, et 3. etapp ehk üleminek  $S_k^0 \rightarrow S_k^1 \rightarrow \dots \rightarrow S_k^j = S_k$  koosneb alati lõplikust arvust sammudest.

## 4.2. Näiteid algoritmi realiseerimise kohta

Selles punktis vaatleme näiteid linearsplainide kohta.

Olgu  $r = n = 1$ , siis

$$L_2^{(1)}(\mathbb{R}) = \{f \mid f' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Valime  $G(x) = x_+$  (vt. [13] lk. 16-17), kus

$$x_+ = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0, \\ 0, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

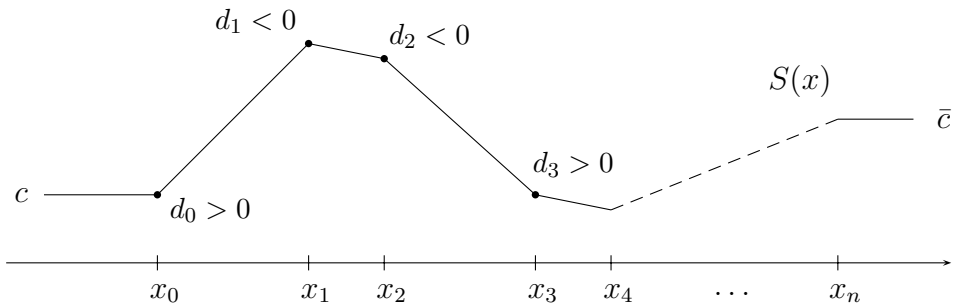
Naturaalsplainid sõlmedega  $x_0, \dots, x_n$  avalduvad kujul

$$S(x) = c + \sum_{i=0}^n d_i (x - x_i)_+,$$

lisatingimuseks on

$$\sum_{i=0}^n d_i = 0.$$

Esmalt uurime, kuidas graafiku abil kindlaks teha interpoleeriva naturaalsplaini kordajate  $d_i$  märgid. Selleks vaatleme järgmist näidet:



Kui  $x \leq x_0$ , siis  $S(x) = c$ . Kui  $x \geq x_n$ , siis

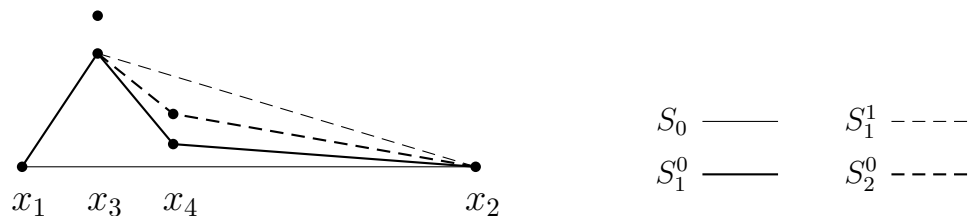
$$S(x) = c + \sum_{i=0}^n d_i(x - x_i) = c + \underbrace{\left( \sum_{i=0}^n d_i \right)}_{=0} x - \sum_{i=0}^n d_i x_i = \bar{c}.$$

Seega väljaspool lõiku  $[x_0, x_n]$  on splain konstantne. Arvutame splaini väärtused sõlmedes  $x_0, \dots, x_3$ , saame

$$\begin{aligned} S(x_0) &= c, \\ S(x_1) &= c + d_0(x_1 - x_0) = S(x_0) + d_0(x_1 - x_0), \\ S(x_2) &= c + d_0(x_2 - x_0) + d_1(x_2 - x_1) = S(x_1) + (d_0 + d_1)(x_2 - x_1), \\ S(x_3) &= S(x_2) + (d_0 + d_1 + d_2)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Tähistades  $A_i = (x_i, S(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, n$ , näeme, et  $d_0$  on lõigu  $A_0A_1$  tõus,  $d_0 + d_1$  on lõigu  $A_1A_2$  tõus jne. Vaadeldes kahest lõigust koosnevat murdjoont  $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ , saame määrata  $d_i$  märgi järgmiselt: kui  $A_{i-1}A_i$  tõus on suurem kui  $A_iA_{i+1}$  tõus, siis  $d_i < 0$ , kui  $A_{i-1}A_i$  tõus on väiksem kui  $A_iA_{i+1}$  tõus, siis  $d_i > 0$ .

**Näide 4.1.** Olgu  $I_0 = \{1, 2\}$  ja  $I_1 = \{3, 4\}$ . Interpolatsiooni- ja tõkkeningimused on antud järgmisel joonisel.



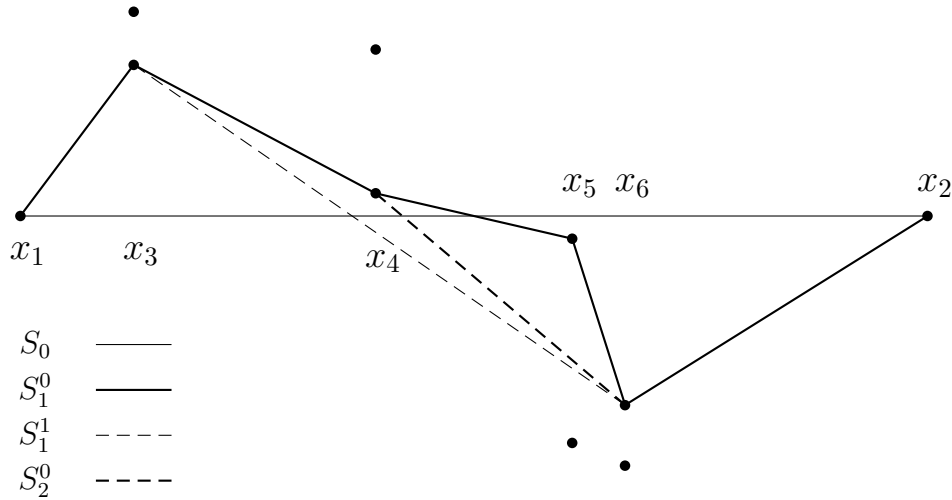
Esimeses etapis kasutatakse sõlmi  $x_1$  ja  $x_2$ . Konstrueeritakse splain  $S_0$ . Teises etapis lisatakse hulka  $N_0^\alpha$  indeksid 3 ja 4. Konstrueeritakse splain  $S_1^0$ . Tingimused

(4.2) on  $r = 1$  korral kujul

$$\begin{aligned} d_i < 0, & \quad \text{kui } S(x_i) = \alpha_i, \\ d_i > 0, & \quad \text{kui } S(x_i) = \beta_i. \end{aligned}$$

Kuna  $d_4^{1,0} > 0$ , siis kolmandas etapis eemaldatakse sõlm  $x_4$  ja moodustatakse splain  $S_1^1$ . Et aga  $S_1^1(x_4) > \beta_4$ , siis minnakse uuesti etappi 2. Tähistatakse  $N_1^\beta = \{4\}$  ning konstrueeritakse splain  $S_2^0 = S_2$ , mis ongi ülesande lahendiks.

**Näide 4.2.** Olgu  $I_0 = \{1, 2\}$  ja  $I_1 = \{3, 4, 5, 6\}$ . Interpolatsiooni- ja tõkketingimused on antud järgmisel joonisel.



Esimeses etapis konstrueerime splaini  $S_0$ , mis kasutab sõlmi  $x_1$  ja  $x_2$ .

Teises etapis eraldame välja indeksid, mille korral tõkketingimused pole täidetud:  $N_0^\alpha = \{3, 4\}$  ja  $N_0^\beta = \{5, 6\}$ , ning leiame splaini  $S_1^0$  nii, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} S_1^0(x_i) &= z_i, & i \in \{1, 2\} &= I_0, \\ S_1^0(x_i) &= \alpha_i, & i \in \{3, 4\} &= N_0^\alpha, \\ S_1^0(x_i) &= \beta_i, & i \in \{5, 6\} &= N_0^\beta. \end{aligned}$$

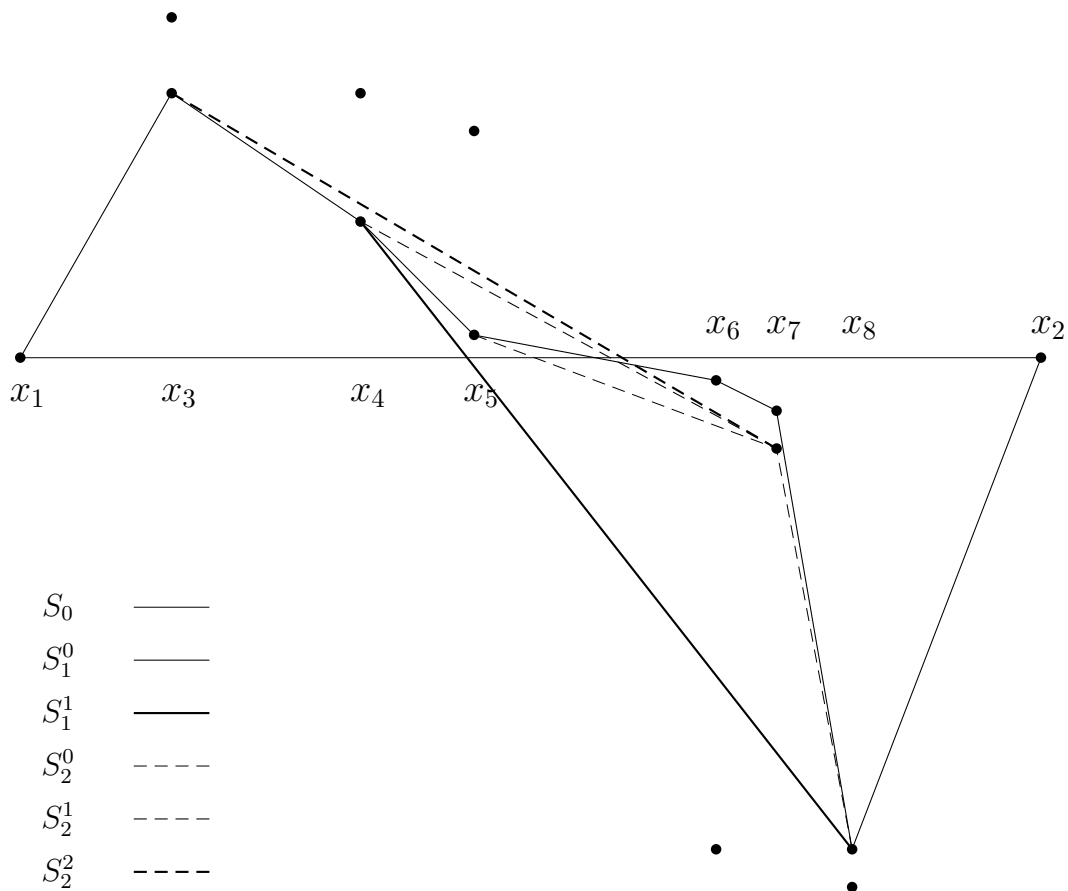
Jooniselt näeme, et  $d_3^{1,0} < 0$ ,  $d_4^{1,0} > 0$ ,  $d_5^{1,0} < 0$  ja  $d_6^{1,0} > 0$ . Tingimused (4.2) pole täidetud  $i = 4$  ja  $i = 5$  korral.

Kolmandas etapis tähistame  $L_{1,1}^\alpha = \{4\}$  ja  $L_{1,1}^\beta = \{5\}$ . Leiame splaini  $S_1^1$  nii, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} S_1^1(x_i) &= z_i, & i \in \{1, 2\} &= I_0, \\ S_1^1(x_3) &= \alpha_3, \\ S_1^1(x_6) &= \beta_6. \end{aligned}$$

Kuna  $S_1^1(x_4) < \alpha_4$ , läheme uuesti etappi 2 ja lisame sõlme  $x_4$ . Splain  $S_2^0 = S_2$  on ülesande lahendiks.

**Näide 4.3.** Olgu  $I_0 = \{1, 2\}$  ja  $I_1 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Interpolatsiooni- ja tõkkestingimused on antud järgmisel joonisel.



Esimeses etapis konstrueerime splaini  $S_0$ , mis kasutab sõlmi  $x_1$  ja  $x_2$ .

Teises etapis eraldame välja indeksid, mille korral tõkkestingimused pole täidetud:  $N_0^\alpha = \{3, 4, 5\}$  ja  $N_0^\beta = \{6, 7, 8\}$ , ning leiame splaini  $S_1^0$  nii, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} S_1^0(x_i) &= z_i, & i \in \{1, 2\} &= I_0, \\ S_1^0(x_i) &= \alpha_i, & i \in \{3, 4, 5\} &= N_0^\alpha, \\ S_1^0(x_i) &= \beta_i, & i \in \{6, 7, 8\} &= N_0^\beta. \end{aligned}$$

Jooniselt näeme, et tingimused (4.2) pole täidetud  $i = 5$ ,  $i = 6$  ja  $i = 7$  korral.

Kolmandas etapis tähistame  $L_{1,1}^\alpha = \{5\}$  ja  $L_{1,1}^\beta = \{6, 7\}$ . Leiame splaini  $S_1^1$  nii, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} S_1^1(x_i) &= z_i, & i \in \{1, 2\} &= I_0, \\ S_1^1(x_i) &= \alpha_i & i \in \{3, 4\} &= N_0^\alpha \setminus L_{1,1}^\alpha, \\ S_1^1(x_i) &= \beta_i & i \in \{8\} &= N_0^\beta \setminus L_{1,1}^\beta. \end{aligned}$$

Märkus:  $S_1^1(x_5) < \alpha_5$ .

Tähistame  $S_1 = S_1^1$ ,  $M_1^\alpha = \{3, 4\}$  ja  $M_1^\beta = \{7\}$  ning läheme etappi 2. Tõkkestingimused on antud järgmisel joonisel.

tingimusi rikutakse sõlmedes  $x_5$  ja  $x_7$ , seega  $N_1^\alpha = \{5, 7\}$ ,  $N_1^\beta = \emptyset$ . Leiame splaini  $S_2^0$  nii, et on täidetud tingimused

$$\begin{aligned} S_2^0(x_i) &= z_i, & i \in \{1, 2\} &= I_0, \\ S_2^0(x_i) &= \alpha_i, & i \in \{3, 4, 5, 7\} &= M_1^\alpha \cup N_1^\alpha, \\ S_2^0(x_i) &= \beta_i, & i \in \{8\} &= M_1^\beta \cup N_1^\beta. \end{aligned}$$

Kuna  $S_2^0$  korral ei rahulda  $d_5^{2,0}$  tingimusi (4.2), siis kolmandas etapis eemaldatakse sõlm  $x_5$ . Defineerime  $L_{2,1}^\alpha = \{5\}$ ,  $L_{2,1}^\beta = \emptyset$  ning lahendame ülesande

$$\begin{aligned} S_2^1(x_i) &= z_i, & i \in \{1, 2\} &= I_0, \\ S_2^1(x_i) &= \alpha_i, & i \in \{3, 4, 7\} &= (M_1^\alpha \cup N_1^\alpha) \setminus L_{2,1}^\alpha, \\ S_2^1(x_i) &= \beta_i, & i \in \{8\} &= (M_1^\beta \cup N_1^\beta) \setminus L_{2,1}^\beta. \end{aligned}$$

Kuna  $d_4^{2,1} > 0$ , siis tuleb eemaldada ka sõlm  $x_4$ . Tähistame  $L_{2,2}^\alpha = \{4, 5\}$ ,  $L_{2,2}^\beta = \emptyset$  ning lahendame ülesande

$$\begin{aligned} S_2^2(x_i) &= z_i, & i \in \{1, 2\} &= I_0, \\ S_2^2(x_i) &= \alpha_i, & i \in \{3, 7\} &= (M_1^\alpha \cup N_1^\alpha) \setminus L_{2,2}^\alpha, \\ S_2^2(x_i) &= \beta_i, & i \in \{8\} &= (M_1^\beta \cup N_1^\beta) \setminus L_{2,2}^\beta. \end{aligned}$$

Olgu nüüd  $S_2 = S_2^2$ ,  $M_2^\alpha = \{3, 7\}$  ja  $M_2^\beta = \{8\}$ . Kuna splaini  $S_2$  korral on kõik tõkketingimused täidetud, on  $S_2$  ülesande lahendiks.

Märkus:  $M_1^\alpha \not\subset M_2^\alpha$ .

### 4.3. Algoritmi lõplikkus

Selles punktis näitame, et monograafias [14] lk. 71 toodud tõestus algoritmi lõplikkuse kohta on vigane. Nimelt ei kehti järgmine (Lemma 10.3 töös [14])

**Lemma.** Olgu  $S_0$  naturaalsplain, mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} S_0(X_i) &= z_i, & i \in I_0, \\ S_0(X_i) &= \alpha_i, & i \in M^\alpha \subset I_1, \\ S_0(X_i) &= \beta_i, & i \in M^\beta \subset I_1, \\ M^\alpha \cap M^\beta &= \emptyset. \end{aligned}$$

Mõned splaini  $S_0$  kordajatest  $d_i$  ärgu rahuldagu optimaalsuse tingimusi. Tähistame  $L^\alpha = \{i \in M^\alpha \mid (-1)^r d_i < 0\}$  ja  $L^\beta = \{i \in M^\beta \mid (-1)^r d_i > 0\}$ . Olgu  $S$  splain, mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} S(X_i) &= z_i, & i \in I_0, \\ S(X_i) &= \alpha_i, & i \in M^\alpha \setminus L^\alpha, \\ S(X_i) &= \beta_i, & i \in M^\beta \setminus L^\beta. \end{aligned}$$

Siis kehtivad järgmised võrratused

$$\begin{aligned} S(X_i) &\geq \alpha_i, & \text{kui } i \in L^\alpha, \\ S(X_i) &\leq \beta_i, & \text{kui } i \in L^\beta. \end{aligned}$$

Tõestus. Lemma mittekehtivuse tõestab näide 4.2. Eemaldades sõlmed  $x_4$  ja  $x_5$  näeme, et  $S_1^1(x_4) < \alpha_4$ . Ka näites 4.3 tekib kontranäide lemmale:  $S_1^1(x_5) < \alpha_5$ .

Olgu  $S_k$  naturaalsplain, mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} S_k(X_i) &= z_i, & i \in I_0, \\ S_k(X_i) &= \alpha_i, & i \in M_k^\alpha, \\ S_k(X_i) &= \beta_i, & i \in M_k^\beta, \end{aligned}$$

ning  $S_{k-1}$  naturaalsplain, mis rahuldab tingimusi

$$\begin{aligned} S_{k-1}(X_i) &= z_i, & i \in I_0, \\ S_{k-1}(X_i) &= \alpha_i, & i \in M_{k-1}^\alpha, \\ S_{k-1}(X_i) &= \beta_i, & i \in M_{k-1}^\beta. \end{aligned}$$

Mõlema splaini kordajad  $d_i$  olgu kõik nullist erinevad.

**Lause 4.1.** Kui  $S_k$  ja  $S_{k-1}$  on sellised naturaalsplainid, et kehtivad sisalduvused  $M_{k-1}^\alpha \subset M_k^\alpha$  ja  $M_{k-1}^\beta \subset M_k^\beta$ , siis  $\|TS_k\| \geq \|TS_{k-1}\|$ .

Tõestus. Analoogiliselt lause 3.2 tõestusele

$$\|TS_k\|^2 - \|TS_{k-1}\|^2 = \|TS_k - TS_{k-1}\|^2 + 2\langle TS_{k-1}, TS_k - TS_{k-1} \rangle.$$

Võrduse (2.4) põhjal

$$\langle TS_{k-1}, TS_k - TS_{k-1} \rangle = \sum_{\substack{i \in I_0 \cup \\ \cup M_{k-1}^\alpha \cup M_{k-1}^\beta}} (-1)^r d_i^{k-1} \underbrace{(S_k(X_i) - S_{k-1}(X_i))}_{=0} = 0.$$

Seega  $\|TS_k\|^2 - \|TS_{k-1}\|^2 = \|TS_k - TS_{k-1}\|^2 \geq 0$ , järelikult  $\|TS_k\| \geq \|TS_{k-1}\|$ .

Lause on tõestatud.

**Lause 4.2.** Kui  $S_k$  ja  $S_{k-1}$  on sellised naturaalsplainid, et sõlmede indeksite hulkade vahel kehtivad sisalduvused  $M_{k-1}^\alpha \subset M_k^\alpha$  ja  $M_{k-1}^\beta \subset M_k^\beta$ , kusjuures kas  $M_k^\alpha \setminus M_{k-1}^\alpha \neq \emptyset$  või  $M_k^\beta \setminus M_{k-1}^\beta \neq \emptyset$ , siis  $\|TS_k\| > \|TS_{k-1}\|$ .

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et  $\|TS_k\| = \|TS_{k-1}\|$ , siis lause 4.1 põhjal  $\|TS_k - TS_{k-1}\| = 0$  ehk  $\|T(S_k - S_{k-1})\| = 0$ . Kuna  $S_k - S_{k-1} \in \mathcal{P}_{r-1}$  ning  $i \in I_0$  korral  $S_k(X_i) - S_{k-1}(X_i) = 0$ , siis interpolatsiooniuülesande ühese lahenduvuse tõttu polünoomide ruumil  $\mathcal{P}_{r-1}$  saame  $S_k = S_{k-1}$ . Saime vastuolu eeldusega.

Lause on tõestatud.

**Lause 4.3.** Kui sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritmi käigus iga  $k$  korral  $M_{k-1}^\alpha \subset M_k^\alpha$  ja  $M_{k-1}^\beta \subset M_k^\beta$ , siis algoritm on lõplik.

Tõestus. Näitame, et tehtud eeldustel iga  $k$  korral  $M_{k-1}^\alpha \neq M_k^\alpha$  või  $M_{k-1}^\beta \neq M_k^\beta$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $M_{k-1}^\alpha = M_k^\alpha$  ja  $M_{k-1}^\beta = M_k^\beta$ , siis  $S_{k-1} = S_k = S_k^j$ . Vaatleme sõlmede eemaldamise etapi viimast sammu, üleminekut  $S_k^{j-1} \rightarrow S_k^j$ . Splaini  $S_k^{j-1}$  sõlmede indeksid on hulgast  $(I_0 \cup M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha \cup M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta) \setminus (L_{k,j-1}^\alpha \cup L_{k,j-1}^\beta)$ , splaini  $S_k^j$  sõlmede indeksid on hulgast  $(I_0 \cup M_{k-1}^\alpha \cup N_{k-1}^\alpha \cup M_{k-1}^\beta \cup N_{k-1}^\beta) \setminus (L_{k,j}^\alpha \cup L_{k,j}^\beta)$ . Splainil  $S_k^{j-1}$  on rohkem sõlmi kui splainil  $S_k^j$ . Üleminekul  $S_k^{j-1} \rightarrow S_k^j$  eemaldati sõlmed indeksitega  $(L_{k,j}^\alpha \cup L_{k,j}^\beta) \setminus (L_{k,j-1}^\alpha \cup L_{k,j-1}^\beta)$ . Vaatleme poolskalaarkorrutist

$$\begin{aligned} \|TS_k^{j-1} - TS_k^j\|^2 &= \|TS_k^{j-1} - TS_{k-1}\|^2 = \\ &= \langle TS_k^{j-1}, TS_k^{j-1} - TS_{k-1} \rangle - \langle TS_{k-1}, TS_k^{j-1} - TS_{k-1} \rangle. \end{aligned}$$

Kuna splainil  $S_k^{j-1}$  on rohkem sõlmi kui splainil  $S_{k-1}$  ning kõigi splaini  $S_{k-1}$  sõlmede  $X_i$  korral  $S_k^{j-1}(X_i) = S_{k-1}(X_i)$ , siis võrduse (2.4) põhjal

$$\langle TS_k^{j-1}, TS_k^{j-1} - TS_{k-1} \rangle = \sum_{\substack{i \in (L_{k,j}^\alpha \cup L_{k,j}^\beta) \setminus \\ (L_{k,j-1}^\alpha \cup L_{k,j-1}^\beta)}} (-1)^r d_i^{k,j-1} (S_k^{j-1}(X_i) - S_{k-1}(X_i))$$

ja

$$\langle TS_{k-1}, TS_k^{j-1} - TS_{k-1} \rangle = 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} \|TS_k^{j-1} - TS_{k-1}\|^2 &= \sum_{i \in L_{k,j}^\alpha \setminus L_{k,j-1}^\alpha} \underbrace{(-1)^r d_i^{k,j-1}}_{\leq 0} \underbrace{(S_k^{j-1}(X_i) - S_{k-1}(X_i))}_{> 0} + \\ &+ \sum_{i \in L_{k,j}^\beta \setminus L_{k,j-1}^\beta} \underbrace{(-1)^r d_i^{k,j-1}}_{\geq 0} \underbrace{(S_k^{j-1}(X_i) - S_{k-1}(X_i))}_{< 0}. \end{aligned}$$

Kui  $i \in L_{k,j}^\alpha \setminus L_{k,j-1}^\alpha$ , siis sõlmede eemaldamise tõttu üleminekul  $S_k^{j-1} \rightarrow S_k^j$  saame  $(-1)^r d_i^{k,j-1} \leq 0$  ja  $S_k^{j-1}(X_i) = \alpha_i$ . Kuna splainile  $S_{k-1}$  on sõlmed indeksitega hulgast  $L_{k,j}^\alpha \setminus L_{k,j-1}^\alpha$  juurde lisatud, siis  $S_{k-1}(X_i) < \alpha_i$ . Analoogiliselt  $i \in L_{k,j}^\beta \setminus L_{k,j-1}^\beta$  korral  $(-1)^r d_i^{k,j-1} \geq 0$ ,  $S_k^{j-1}(X_i) = \beta_i$  ja  $S_{k-1}(X_i) > \beta_i$ . Seega  $\|TS_k^{j-1} - TS_{k-1}\|^2 \leq 0$ , mistõttu  $\|TS_k^{j-1} - TS_{k-1}\|^2 = 0$ . See on aga vastuolus eeldusega  $S_k^{j-1} \neq S_{k-1}$ . Oleme näidanud, et iga  $k$  korral  $M_{k-1}^\alpha \neq M_k^\alpha$  või  $M_{k-1}^\beta \neq M_k^\beta$ . Seepärast lause 4.2 põhjal

$$\|TS_k\| > \|TS_{k-1}\|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

mis sõlmede arvu lõplikkuse tõttu tagab algoritmi lõplikkuse.

Lause on tõestatud.

Üldiselt säärased sisalduvusi sõlmede hulkade vahel ei esine. Tõestuseks piisab vaadelda näidet 4.3, kus  $M_1^\alpha \not\subset M_2^\alpha$ . Seega üldjuhul on algoritmi lõplikkuse küsimus lahendamata probleem.



## 5. Paketi Mathcad abil realiseeritud näited

### 5.1. Interpoleerimisülesande lahendamine

Kuna sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritmi igal sammul tuleb lahendada interpolaatsiooniülesanne, siis selles punktis on uuritud vigade levikut kuupsplainidega interpoleerimisel.

Interpoleeritud on funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

väärtusi ja lähisväärtusi lõigul  $[-1, 1]$ .

Kasutatud on ebahühtlast võrku sõlmedega  $t_0, \dots, t_N$ ,  $N = 8, 16, 32, \dots$ , mis on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} t_0 &= -1, & t_N &= 1, & t_{\frac{N}{2}} &= \frac{t_N - t_0}{2}, \\ t_{\frac{N}{2}-1} &= t_{\frac{N}{2}} - \delta_1, & t_{\frac{N}{2}-2} &= t_{\frac{N}{2}} - \delta_1 - \delta_2, \\ t_{\frac{N}{2}+1} &= t_{\frac{N}{2}} + \delta, & t_{\frac{N}{2}+2} &= t_{\frac{N}{2}} + \delta + \delta_1, & t_{\frac{N}{2}+3} &= t_{\frac{N}{2}} + \delta + \delta_1 + \delta_2, \end{aligned}$$

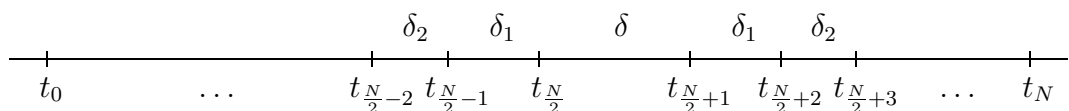
kus

$$\delta = \frac{t_N - t_0}{N/2}, \quad \delta_1 = \delta_1(\delta) \quad \text{ja} \quad \delta_2 = \delta_2(\delta);$$

lõikudes  $[t_0, t_{\frac{N}{2}-2}]$  ja  $[t_{\frac{N}{2}+3}, t_N]$  on sõlmed jaotatud ühtlaselt. Konstandid

$$\delta_1, \delta_2 \in \left\{ \frac{\delta}{N/2}, \frac{\delta}{(N/2)^2}, \frac{\delta}{(N/2)^4}, \dots \right\}$$

fikseeritakse igas katses eraldi. Seega ebahühtlasus asetseb lõigu keskpunkti vahetus läheduses. Sõlmede paiknemist iseloomustab järgmine joonis:



Mitmes katses muudame vea lisamisega mõnes sõlmes funktsiooni väärtust ja uurime selle mõju.

Interpoleerimisel on kasutatud kuupsplainide esitust esimeste momentide kaudu (vt. [13], lk. 97-98), teiste momentide kaudu (vt. [13], lk. 99-100), kuup-B-splaine (vt. [13], lk. 18-22) ja naturaalsplaine. Kahel esimesel juhul on kasutatud nn. loomulikke rajatingimusi  $S''(t_0) = S''(t_N) = 0$ . Naturaalsplainide korral tekib lineaarne võrrandisüsteem, mille lahendamisel on kasutatud Mathcad'i sisemist funktsiooni *lsolve*. Ülejäänud juhtudel tekib kolmediagonaalne võrrandisüsteem, mille lahendamisel on kasutatud elimineerimismeetodit. Esimeste ja teiste momentide kasutamisel tekkivates võrrandisüsteemides on igasuguse sõlmede asetuse korral süsteemi maatriksi domineeriva peadiagonaaliga ning elimineerimismeetod on stabiilne. Ebahühtlasel võrgul B-splaine kasutamisel tekkiv süsteem ei pruugi olla domineeriva peadiagonaaliga, seega B-splaine korral on elimineerimismeetodi stabiilsus ümardamisvi-

gade suhtes lahtine. Splainide alases kirjanduses esineb selle juhu kohta erinevaid seisukohti.

Järgmistes katsetes kasutame esimeste momentide abil konstrueeritud kuupsplaini jaoks tähistust  $S(m_i)$ , teiste momentide abil konstrueeritud kuupsplaini jaoks tähistust  $S(M_i)$ , kuup-B-splaini jaoks tähistust  $S(B)$  ja naturaalsplaini jaoks tähistust  $S(G)$ .

Tabelites on toodud suurim erinevus konstrueeritud splaini ja funktsiooni  $f$  vahel kümme korda tihedama võrgu sõlmedes.

**Katse 1.** Olgu  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta}{N/2}$ .

$N$	8	16	32	64	128
$S(m_i)$	$4,111441 \cdot 10^{-3}$	$6,114412 \cdot 10^{-4}$	$1,216216 \cdot 10^{-4}$	$2,70316 \cdot 10^{-5}$	$6,361792 \cdot 10^{-6}$
$S(M_i)$	$4,111441 \cdot 10^{-3}$	$6,114412 \cdot 10^{-4}$	$1,216216 \cdot 10^{-4}$	$2,70316 \cdot 10^{-5}$	$6,361792 \cdot 10^{-6}$
$S(B)$	$4,111441 \cdot 10^{-3}$	$6,114412 \cdot 10^{-4}$	$1,216216 \cdot 10^{-4}$	$2,70316 \cdot 10^{-5}$	$6,361792 \cdot 10^{-6}$
$S(G)$	$4,111441 \cdot 10^{-3}$	$6,114412 \cdot 10^{-4}$	$1,216216 \cdot 10^{-4}$	$2,70316 \cdot 10^{-5}$	$6,361792 \cdot 10^{-6}$

**Katse 2.** Olgu  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta}{N/2}$ . Lisame punktis  $t_{\frac{N}{2}}$  algandmetesse vea, võttes  $S(t_{\frac{N}{2}}) = f(t_{\frac{N}{2}}) + 10^{-4}$ .

$N$	16	32	64	128	1024
$S(m_i)$	$6,114127 \cdot 10^{-4}$	$3,449512 \cdot 10^{-4}$	$6,499513 \cdot 10^{-4}$	$1,238597 \cdot 10^{-3}$	$9,47062 \cdot 10^{-3}$
$S(M_i)$	$6,114127 \cdot 10^{-4}$	$3,449512 \cdot 10^{-4}$	$6,499513 \cdot 10^{-4}$	$1,238597 \cdot 10^{-3}$	$9,47062 \cdot 10^{-3}$
$S(B)$	$6,114127 \cdot 10^{-4}$	$3,449512 \cdot 10^{-4}$	$6,499513 \cdot 10^{-4}$	$1,238597 \cdot 10^{-3}$	$9,47062 \cdot 10^{-3}$
$S(G)$	$6,114127 \cdot 10^{-4}$	$3,449512 \cdot 10^{-4}$	$6,499513 \cdot 10^{-4}$	$1,238597 \cdot 10^{-3}$	$9,470695 \cdot 10^{-3}$

**Katse 3.** Olgu  $\delta_1 = \delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^2}$ . Lisame punktis  $t_{\frac{N}{2}}$  algandmetesse vea, võttes  $S(t_{\frac{N}{2}}) = f(t_{\frac{N}{2}}) + 10^{-4}$ .

$N$	8	16	32	64	128
$S(m_i)$	$8,156287 \cdot 10^{-3}$	$1,096382 \cdot 10^{-3}$	$4,756233 \cdot 10^{-3}$	$1,887789 \cdot 10^{-2}$	$7,532654 \cdot 10^{-2}$
$S(M_i)$	$8,156287 \cdot 10^{-3}$	$1,096382 \cdot 10^{-3}$	$4,756233 \cdot 10^{-3}$	$1,887789 \cdot 10^{-2}$	$7,532654 \cdot 10^{-2}$
$S(B)$	$8,156287 \cdot 10^{-3}$	$1,096382 \cdot 10^{-3}$	$4,756233 \cdot 10^{-3}$	$1,887789 \cdot 10^{-2}$	$7,532654 \cdot 10^{-2}$
$S(G)$	$8,156287 \cdot 10^{-3}$	$1,096382 \cdot 10^{-3}$	$4,756233 \cdot 10^{-3}$	$1,887812 \cdot 10^{-2}$	$7,559817 \cdot 10^{-2}$

**Katse 4.** Olgu  $\delta_1 = \frac{\delta}{N/2}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^2}$ .

$N$	8	16	32	64	128
$S(m_i)$	$5,781383 \cdot 10^{-3}$	$6,485046 \cdot 10^{-4}$	$1,234461 \cdot 10^{-4}$	$2,713448 \cdot 10^{-5}$	$6,367916 \cdot 10^{-6}$
$S(M_i)$	$5,781383 \cdot 10^{-3}$	$6,485046 \cdot 10^{-4}$	$1,234461 \cdot 10^{-4}$	$2,713448 \cdot 10^{-5}$	$6,367916 \cdot 10^{-6}$
$S(B)$	$5,781383 \cdot 10^{-3}$	$6,485046 \cdot 10^{-4}$	$1,234461 \cdot 10^{-4}$	$2,713448 \cdot 10^{-5}$	$6,367916 \cdot 10^{-6}$
$S(G)$	$5,781383 \cdot 10^{-3}$	$6,485046 \cdot 10^{-4}$	$1,234461 \cdot 10^{-4}$	$2,713448 \cdot 10^{-5}$	$6,367916 \cdot 10^{-6}$

**Katse 5.** Olgu  $\delta_1 = \frac{\delta}{N/2}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^2}$ . Lisame punktis  $t_{\frac{N}{2}}$  algandmetesse vea, võttes  $S(t_{\frac{N}{2}}) = f(t_{\frac{N}{2}}) + 10^{-4}$ .

$N$	8	16	32	64	128
$S(m_i)$	$5,779552 \cdot 10^{-3}$	$6,484968 \cdot 10^{-4}$	$3,956743 \cdot 10^{-4}$	$7,590108 \cdot 10^{-4}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$
$S(M_i)$	$5,779552 \cdot 10^{-3}$	$6,484968 \cdot 10^{-4}$	$3,956743 \cdot 10^{-4}$	$7,590108 \cdot 10^{-4}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$
$S(B)$	$5,779552 \cdot 10^{-3}$	$6,484968 \cdot 10^{-4}$	$3,956743 \cdot 10^{-4}$	$7,590108 \cdot 10^{-4}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$
$S(G)$	$5,779552 \cdot 10^{-3}$	$6,484968 \cdot 10^{-4}$	$3,956743 \cdot 10^{-4}$	$7,590108 \cdot 10^{-4}$	$1,465083 \cdot 10^{-3}$

**Katse 6.** Olgu  $N = 128$ ,  $\delta_1 = \frac{\delta}{N/2}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^2}$ . Lisame algandmetesse keskpunkti lähedusse vea, võttes  $S(t_i) = f(t_i) + 10^{-4}$ . Esimeses seerias on viga võetud punktis  $t_{\frac{N}{2}-3}$ , teises seerias punktis  $t_{\frac{N}{2}-2}$  jne.

$t_i$	$t_{\frac{N}{2}-3}$	$t_{\frac{N}{2}-2}$	$t_{\frac{N}{2}-1}$	$t_{\frac{N}{2}}$	$t_{\frac{N}{2}+1}$	$t_{\frac{N}{2}+2}$
$S(m_i)$	$10^{-4}$	$3,619286 \cdot 10^{-2}$	$3,612474 \cdot 10^{-2}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$	$3,556867 \cdot 10^{-2}$
$S(M_i)$	$10^{-4}$	$3,619286 \cdot 10^{-2}$	$3,612474 \cdot 10^{-2}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$	$3,556867 \cdot 10^{-2}$
$S(B)$	$10^{-4}$	$3,619286 \cdot 10^{-2}$	$3,612474 \cdot 10^{-2}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$	$1,465082 \cdot 10^{-3}$	$3,556867 \cdot 10^{-2}$
$S(G)$	$10^{-4}$	$3,619295 \cdot 10^{-2}$	$3,612483 \cdot 10^{-2}$	$1,465083 \cdot 10^{-3}$	$1,465065 \cdot 10^{-3}$	$3,556735 \cdot 10^{-2}$

**Katse 7.** Olgu  $\delta_1 = \frac{\delta}{(N/2)^2}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^4}$ .

$N$	8	16	32	64	128
$S(m_i)$	$9,064313 \cdot 10^{-3}$	$6,922176 \cdot 10^{-4}$	$1,25407 \cdot 10^{-4}$	$2,724089 \cdot 10^{-5}$	$6,374141 \cdot 10^{-6}$
$S(M_i)$	$9,064313 \cdot 10^{-3}$	$6,922176 \cdot 10^{-4}$	$1,25407 \cdot 10^{-4}$	$2,724089 \cdot 10^{-5}$	$6,374141 \cdot 10^{-6}$
$S(B)$	$9,064313 \cdot 10^{-3}$	$6,922176 \cdot 10^{-4}$	$1,25407 \cdot 10^{-4}$	$2,724089 \cdot 10^{-5}$	$6,374141 \cdot 10^{-6}$
$S(G)$	$9,064313 \cdot 10^{-3}$	$6,922176 \cdot 10^{-4}$	$1,25407 \cdot 10^{-4}$	—	—

**Katse 8.** Olgu  $\delta_1 = \frac{\delta}{(N/2)^4}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^8}$ .

$N$	8	16	64	128	256
$S(m_i)$	$1,017002 \cdot 10^{-2}$	$6,978006 \cdot 10^{-4}$	$2,724422 \cdot 10^{-5}$	$1,681302 \cdot 10^{-4}$	$4,174719 \cdot 10^{-5}$
$S(M_i)$	$1,017002 \cdot 10^{-2}$	$6,978006 \cdot 10^{-4}$	$2,724422 \cdot 10^{-5}$	$1,681302 \cdot 10^{-4}$	$4,174719 \cdot 10^{-5}$
$S(B)$	$1,017002 \cdot 10^{-2}$	$6,978006 \cdot 10^{-4}$	$2,724422 \cdot 10^{-5}$	$1,769658 \cdot 10^{-3}$	0,5090033
$S(G)$	$1,017002 \cdot 10^{-2}$	—	—	—	—

**Katse 9.** Olgu  $N = 128$ ,  $\delta_1 = \frac{\delta}{(N/2)^4}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^8}$ . Lisame algandmetesse keskpunkti lähedusse vea, võttes  $S(t_i) = f(t_i) + 10^{-4}$ . Esimeses seerias on viga võetud punktis  $t_{\frac{N}{2}-3}$ , teises seerias punktis  $t_{\frac{N}{2}-2}$  jne.

$t_i$	$t_{\frac{N}{2}-3}$	$t_{\frac{N}{2}-2}$	$t_{\frac{N}{2}-1}$	$t_{\frac{N}{2}}$	$t_{\frac{N}{2}+1}$
$S(m_i)$	$1,681302 \cdot 10^{-4}$	$2,465694 \cdot 10^9$	$2,465694 \cdot 10^9$	$3,699377 \cdot 10^2$	$3,699378 \cdot 10^2$
$S(M_i)$	$1,681302 \cdot 10^{-4}$	$2,465694 \cdot 10^9$	$2,465694 \cdot 10^9$	$3,699377 \cdot 10^2$	$3,699378 \cdot 10^2$
$S(B)$	$1,769658 \cdot 10^{-3}$	$2,465694 \cdot 10^9$	$2,465694 \cdot 10^9$	$3,69937 \cdot 10^2$	$3,699362 \cdot 10^2$

**Katse 10.** Olgu  $N = 128$ ,  $\delta_1 = \frac{\delta}{(N/2)^4}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^8}$ . Lisame algandmetesse keskpunkti lähedusse kahte kõrvuti asetsevasse punkti vead, võttes  $S(t_i) = f(t_i) + 10^{-4}$  ja  $S(t_{i+1}) = f(t_{i+1}) - 10^{-4}$ .

$t_i$	$t_{\frac{N}{2}-2}$	$t_{\frac{N}{2}-1}$	$t_{\frac{N}{2}}$	$t_{\frac{N}{2}+1}$	$t_{\frac{N}{2}+2}$
$S(m_i)$	$4,931387 \cdot 10^9$	$2,465694 \cdot 10^9$	$2,41592 \cdot 10^2$	$2,427799 \cdot 10^9$	$4,855597 \cdot 10^9$
$S(M_i)$	$4,931387 \cdot 10^9$	$2,465694 \cdot 10^9$	$2,41592 \cdot 10^2$	$2,427799 \cdot 10^9$	$4,855597 \cdot 10^9$
$S(B)$	$4,931387 \cdot 10^9$	$2,465694 \cdot 10^9$	$2,41592 \cdot 10^2$	$2,427799 \cdot 10^9$	$4,855597 \cdot 10^9$

**Katse 11.** Olgu  $\delta_1 = \frac{\delta}{(N/2)^8}$  ja  $\delta_2 = \frac{\delta}{(N/2)^{16}}$ .

$N$	8	16	32	64	128
$S(m_i)$	$1,024361 \cdot 10^{-2}$	$1,456008 \cdot 10^{-3}$	$2,767841 \cdot 10^{-3}$	$6,804567 \cdot 10^{-4}$	$2,865913 \cdot 10^{-4}$
$S(M_i)$	$1,024361 \cdot 10^{-2}$	$1,456008 \cdot 10^{-3}$	$2,767841 \cdot 10^{-3}$	$6,804567 \cdot 10^{-4}$	$2,865913 \cdot 10^{-4}$
$S(B)$	$1,024361 \cdot 10^{-2}$	$3,327954 \cdot 10^{-3}$	$1,093433 \cdot 10^9$	$2,799188 \cdot 10^{11}$	—

Nagu näha, käituvad üldiselt ka B-splainid võrrelduna esimeste ja teiste momentidega hästi. Vaid katsetes 8 ja 11 väga ebaühtlase võrgu korral hakkab ümardamisviigade mõju oluliselt kiiremini kasvama. Väga spetsiifilise võrgu ning suure sõlmede arvu korral pole naturaalsplainid kasutatavad, kuna Mathcad ei ole võimeline tekkivat võrrandisüsteemi lahendama.

Vastavad Mathcad'i programmid on toodud lisades 1-4.

## 5.2. Tõketega silumisülesande lahendamine

Juhul  $n = 1$ ,  $r = 2$  esituvad naturaalsplainid sõlmedega  $x_0, \dots, x_N$  kujul

$$S(x) = c_0 + c_1x + \sum_{i=0}^N d_i |x - x_i|^3.$$

Fikseerides ruumis  $\mathcal{P}_1$  baasi  $\{1, x\}$ , esituvad lisatingimused kujul

$$\sum_{i=0}^N d_i = 0, \quad \sum_{i=0}^N d_i x_i = 0.$$

Seega, tähistades aktiivsete sõlmede hulga  $I$ , tuleb algoritmi igal sammul lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 x_j + \sum_{i \in I} d_i |x_j - x_i|^3 &= z_i, \quad j \in I, \\ \sum_{i \in I} d_i &= 0, \\ \sum_{i \in I} d_i x_i &= 0, \end{aligned}$$

kordajate  $c_0$ ,  $c_1$  ja  $d_i$ ,  $i \in I$ , leidmiseks.

Kuna süsteemi lahendamiseks on kasutatud Mathcad'i funktsiooni *lsolve*, on ette antud ka viga  $\varepsilon = 10^{-12}$ , mille võrra splaini väärtused võivad tõkkekoridoridest välja ulatuda. Programmi lõpus on uuritud tegelikku viga, mille võrra splaini väärtused erinevad interpolatsiooni- ja tõkketingimustest.

Programm tõketega silumisülesande lahendamiseks ühedimensionaalsel juhul sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritmi abil on toodud lisas 5.

Teostatud arvutustes osutus sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritm lõplikuks.

## Kasutatud kirjandus

1. Asmuss S., Budkina N., Oja P. On smoothing problems with weights and obstacles. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 1997, 46, 262-272.
2. Atteia M. Fonctions "spline" avec contraintes linéaires de type inégalité. Actes du 6<sup>e</sup> congrès de l'AFIRO, Nancy, 1967. Assoc. Franc. d'Inform. et de Rech. Operat., Paris, 1967, 42-54.
3. Goodman T. N., Lee S. L. Cardinal interpolation by  $D^m$ -splines. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1983, A94, 149-161.
4. Holladay J. C. Smoothest curve approximation. Math. Tables Aids Computation, 1957, 11, 233-243.
5. Kaasik Ü., Kivistik L. Operatsioonianalüüs. Tallinn, 1982.
6. Reinsch C. H. Smoothing by spline functions. Numer. Math., 1967, 10, 177-183.
7. Schoenberg I. J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quart. Appl. Math., 1946, 4, 45-99.
8. Schoenberg I. J. Spline functions and the problem of graduation. Proc. Nat. Acad. Sci., 1964, 52, 947-950.
9. Tamme E., Vainikko G. Matemaatilise füüsika võrrandid I. Tartu, 1973.
10. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. Москва, Мир, 1966.
11. Вершинин В. В., Завьялов Ю. С., Павлов Н. Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск, Наука, 1988.
12. Гавурин М. К., Малоземов В. Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та, 1984.
13. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. Москва, Наука, 1980.
14. Игнатов М. И., Певный А. Б. Натуральные сплайны многих переменных. Ленинград, Наука, 1991.
15. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва, Мир, 1973.
16. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. Москва, Наука, 1966.
17. Хёлмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными т. I. Москва, Мир, 1986.

## Lisa 1.

### Interpoleerimisülesande lahendamine kasutades kuupsplainide esitust esimeste momentide kaudu

Algandmed:

Lõigu otspunktid:

$a := -1$      $b := 1$

Interpoleeritav funktsioon:

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

Osalõikude arv:

$N := 256$

Programm:

Sõlmpunktid:

```
t :=
  n ← N/2
  δ ← (b - a) / n
  t₀ ← a
  t_{n-2} ← (a+b)/2 - 2·δ
  t_{n-1} ← (a+b)/2 - δ
  t_n ← (a+b)/2
  t_{n+1} ← (a+b)/2 + δ
  t_{n+2} ← (a+b)/2 + δ + δ
  t_{n+3} ← (a+b)/2 + δ + 2·δ
  t_N ← b
  for i ∈ 1..n-3
    t_i ← t_{i-1} + (t_{n-2} - t₀) / (n-2)
  for i ∈ n+4..N-1 if N > 8
    t_i ← t_{i-1} + (t_N - t_{n+3}) / (n-3)
t
```

Osalõigud:

```
h :=
  for i ∈ 1..N
    h_i ← t_i - t_{i-1}
  h
```

Splaini väärtused sõlmedes:

```
y :=
  for i ∈ 0..N
    y_i ← f(t_i)
  y
```

Kolmediagonaalse süsteemi kordajad:

```
m :=
  m₀ ← 1
  for i ∈ 1..N-1
    m_i ← h_i / (h_i + h_{i+1})
  m
```

```
l :=
  for i ∈ 0..N
    l_i ← 2
  l
```

```
k :=
  for i ∈ 1..N-1
    k_i ← 1 - m_i
  k_N ← 1
  k
```

```
z :=
  z₀ ← (3·(y₁ - y₀)) / h₁
  for i ∈ 1..N-1
    z_i ← (3·m_i·(y_{i+1} - y_i)) / h_{i+1} + (3·k_i·(y_i - y_{i-1})) / h_i
  z_N ← (3·(y_N - y_{N-1})) / h_N
  z
```

Kolmediagonaalse süsteemi lahendamine:

```

A :=
| A0,0 ←  $\frac{m_0}{l_0}$ 
| A0,1 ←  $\frac{z_0}{l_0}$ 
| i ← 1
| while i < N
|   | A1,0 ←  $\frac{m_i}{1 - k_i \cdot A_{i-1,0}}$ 
|   | A1,1 ←  $\frac{z_i - k_i \cdot A_{i-1,1}}{1 - k_i \cdot A_{i-1,0}}$ 
|   | i ← i + 1
|   | AN,1 ←  $\frac{z_N - k_N \cdot A_{N-1,1}}{1 - k_N \cdot A_{N-1,0}}$ 
| A

```

```

m :=
| mN ← AN,1
| i ← N - 1
| while i > -1
|   | mi ← Ai,1 - Ai,0 · mi+1
|   | i ← i - 1
| m

```

Splain:

S(x) := for i ∈ 1..N

$$\left[ \frac{(t_i - x)^2}{(h_i)^2} \cdot (3 \cdot y_{i-1} + h_i \cdot m_{i-1}) - \frac{(t_i - x)^3}{(h_i)^3} \cdot (2 \cdot y_{i-1} + h_i \cdot m_{i-1}) + \frac{(x - t_{i-1})^2}{(h_i)^2} \cdot (3 \cdot y_i - h_i \cdot m_i) - \frac{(x - t_{i-1})^3}{(h_i)^3} \cdot (2 \cdot y_i - h_i \cdot m_i) \right]$$

if  $t_{i-1} \leq x \leq t_i$

Viga, mis tehakse kümme korda tihedama võrgu sõlmedes:

```

viga :=
| a ← 0
| max ← 0
| for i ∈ 0..N - 1
|   for k ∈ 0..10
|     | s ← ti +  $\frac{k \cdot h_{i+1}}{10}$ 
|     | q ← | f(s) - S(s) |
|     | if q ≥ max
|     |   | max ← q
|     |   | a ← s
| [ max ]
| [ a ]

```

$$\text{viga} = \begin{bmatrix} 1.542372 \cdot 10^{-6} \\ -0.996826 \end{bmatrix}$$



## Lisa 2.

### Interpoleerimisülesande lahendamine kasutades kuupsplainide esitust teiste momentide kaudu

Algandmed:

Lõigu otspunktid:

$$a := -1 \quad b := 1$$

Interpoleeritava funktsioon:

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

Osalõikude arv:

$$N := 256$$

Programm:

Sõlmpunktid:

```
t := | n ← N/2
      | δ ← (b-a)/n
      | t0 ← a
      | tn-2 ← (a+b)/2 - 2 * δ/n2
      | tn-1 ← (a+b)/2 - δ/n2
      | tn ← (a+b)/2
      | tn+1 ← (a+b)/2 + δ
      | tn+2 ← (a+b)/2 + δ + δ/n2
      | tn+3 ← (a+b)/2 + δ + 2 * δ/n2
      | tN ← b
      | for i ∈ 1..n-3
      |   ti ← ti-1 + (tn-2 - t0)/(n-2)
      | for i ∈ n+4..N-1 if N > 8
      |   ti ← ti-1 + (tN - tn+3)/(n-3)
      | t
```

Osalõigud:

```
h := | for i ∈ 1..N
      |   hi ← ti - ti-1
      | h
```

Splaini väärtused sõlmedes:

```
y := | for i ∈ 0..N
      |   yi ← f(ti)
      | y
```

Kolmediagonaalse süsteemi kordajad:

```
k := | for i ∈ 1..N-1
      |   ki ← hi / (hi + hi+1)
      | kN ← 0
      | k
```

```
l := | for i ∈ 0..N
      |   li ← 2
      | l
```

```
m := | m0 ← 0
      | for i ∈ 1..N
      |   mi ← 1 - ki
      | m
```

```
z := | z0 ← 0
      | for i ∈ 1..N-1
      |   zi ← 6 / (hi + hi+1) * (yi+1 - yi / hi+1 - yi - yi-1 / hi)
      | zN ← 0
      | z
```

Kolmediagonaalse süsteemi lahendamine:

$$A := \left[ \begin{array}{l} A_{0,0} \leftarrow \frac{m_0}{l_0} \\ A_{0,1} \leftarrow \frac{z_0}{l_0} \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } i < N \\ \left[ \begin{array}{l} A_{i,0} \leftarrow \frac{m_i}{l_i - k_i \cdot A_{i-1,0}} \\ A_{i,1} \leftarrow \frac{z_i - k_i \cdot A_{i-1,1}}{l_i - k_i \cdot A_{i-1,0}} \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ A_{N,1} \leftarrow \frac{z_N - k_N \cdot A_{N-1,1}}{l_N - k_N \cdot A_{N-1,0}} \\ A \end{array} \right.$$

$$M := \left[ \begin{array}{l} M_N \leftarrow A_{N,1} \\ i \leftarrow N - 1 \\ \text{while } i > -1 \\ \left[ \begin{array}{l} M_i \leftarrow A_{i,1} - A_{i,0} \cdot M_{i+1} \\ i \leftarrow i - 1 \end{array} \right. \\ M \end{array} \right.$$

Splain:

$S(x) :=$  for  $i \in 1..N$

$$\left[ \frac{(t_i - x)^3}{6 \cdot h_i} \cdot M_{i-1} + \frac{(x - t_{i-1})^3}{6 \cdot h_i} \cdot M_i + \left[ y_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} \cdot (h_i)^2 \right] \cdot \frac{t_i - x}{h_i} + \left[ y_i - \frac{M_i}{6} \cdot (h_i)^2 \right] \cdot \frac{x - t_{i-1}}{h_i} \right] \text{ if } t_{i-1} \leq x \leq t_i$$

Viga, mis tehakse kümme korda tihedama võrgu sõlmedes:

$$\text{viga} := \left[ \begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ \text{max} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..N - 1 \\ \text{for } k \in 0..10 \\ \left[ \begin{array}{l} s \leftarrow t_i + \frac{k \cdot h_{i+1}}{10} \\ q \leftarrow |f(s) - S(s)| \\ \text{if } q \geq \text{max} \\ \left[ \begin{array}{l} \text{max} \leftarrow q \\ a \leftarrow s \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left[ \begin{array}{l} \text{max} \\ a \end{array} \right] \end{array} \right.$$

$$\text{viga} = \left[ \begin{array}{l} 1.543119 \cdot 10^{-6} \\ -0.996825 \end{array} \right]$$

### Lisa 3.

#### Interpoleerimisülesande lahendamise kasutades kuup-B-splaine

Algandmed:

Lõigu otspunktid:

$$a := -1 \quad b := 1$$

Interpoleeritava funktsioon:

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

Osaloikude arv:

$$N := 256$$

Programm:

Sõlmpunktid:

```
t := | n ← N / 2
      | δ ← (b - a) / n
      | t3 ← a
      | tn+1 ← (a + b) / 2 - δ / n - δ / n2
      | tn+2 ← (a + b) / 2 - δ / n
      | tn+3 ← (a + b) / 2
      | tn+4 ← (a + b) / 2 + δ
      | tn+5 ← (a + b) / 2 + δ + δ / n
      | tn+6 ← (a + b) / 2 + δ + δ / n + δ / n2
      | tN+3 ← b
      | for i ∈ 4..n
      |   | ti ← ti-1 + (tn+1 - t3) / (n - 2)
      |   | for i ∈ n+7..N+2 if N > 8
      |   |   | ti ← ti-1 + (tN+3 - tn+6) / (n - 3)
      | t
```

Lisapunktid:

$$t_2 := t_3 - \frac{t_4 - t_3}{2}$$

$$t_1 := t_3 - (t_4 - t_3)$$

$$t_0 := t_3 - \frac{3(t_4 - t_3)}{2}$$

$$t_{N+4} := t_{N+3} + \frac{t_{N+3} - t_{N+2}}{2}$$

$$t_{N+5} := t_{N+3} + (t_{N+3} - t_{N+2})$$

$$t_{N+6} := t_{N+3} + \frac{3(t_{N+3} - t_{N+2})}{2}$$

Osaloigud:

$$h := \begin{cases} \text{for } i \in 1..N+6 \\ h_i \leftarrow t_i - t_{i-1} \\ h \end{cases}$$

Kolmediagonaalse süsteemi kordajad:

K := for i ∈ 3..N + 3

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{l}
 k_{i-2} \leftarrow \frac{(h_{i+1})^2}{(h_{i-1} + h_i + h_{i+1})(h_i + h_{i+1})} \\
 l_{i-2} \leftarrow \frac{(h_{i-1} + h_i) h_{i+1}}{(h_{i-1} + h_i + h_{i+1})(h_i + h_{i+1})} + \frac{h_i (h_{i+2} + h_{i+1})}{(h_i + h_{i+1} + h_{i+2})(h_i + h_{i+1})} \\
 m_{i-2} \leftarrow \frac{(h_i)^2}{(h_i + h_{i+1} + h_{i+2})(h_i + h_{i+1})} \\
 z_{i-2} \leftarrow f(t_i)
 \end{array} \right. \\
 a1 & \leftarrow \frac{6}{(h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_3 + h_4)} \\
 a2 & \leftarrow \frac{2 \cdot h_2 + 2 \cdot h_3 - 4 \cdot h_4}{(h_2 + h_3 + h_4) \cdot (h_3 + h_4) \cdot h_4} + \frac{2 \cdot h_3 - 4 \cdot h_4 - 2 \cdot h_5}{(h_3 + h_4 + h_5) \cdot (h_3 + h_4) \cdot h_4} - \frac{4}{(h_3 + h_4 + h_5) \cdot h_4} \\
 a3 & \leftarrow \frac{2 \cdot h_4 - 4 \cdot h_3}{(h_3 + h_4 + h_5) \cdot (h_3 + h_4) \cdot h_4} + \frac{2 \cdot h_4 + 2 \cdot h_5 - 2 \cdot h_3}{(h_3 + h_4 + h_5) \cdot (h_4 + h_5) \cdot h_4} + \frac{2}{(h_4 + h_5) \cdot h_4} \\
 b1 & \leftarrow \frac{6}{(h_{N+2} + h_{N+3} + h_{N+4}) \cdot (h_{N+3} + h_{N+4})} \\
 b2 & \leftarrow \frac{2 \cdot h_{N+2} + 2 \cdot h_{N+3} - 4 \cdot h_{N+4}}{(h_{N+2} + h_{N+3} + h_{N+4}) \cdot (h_{N+3} + h_{N+4}) \cdot h_{N+4}} + \frac{2 \cdot h_{N+3} - 4 \cdot h_{N+4} - 2 \cdot h_{N+5}}{(h_{N+3} + h_{N+4} + h_{N+5}) \cdot (h_{N+3} + h_{N+4}) \cdot h_{N+4}} \\
 b2 - b2 & \leftarrow \frac{4}{(h_{N+3} + h_{N+4} + h_{N+5}) \cdot h_{N+4}} \\
 b3 & \leftarrow \frac{2 \cdot h_{N+4} - 4 \cdot h_{N+3}}{(h_{N+3} + h_{N+4} + h_{N+5}) \cdot (h_{N+3} + h_{N+4}) \cdot h_{N+4}} + \frac{2 \cdot h_{N+4} + 2 \cdot h_{N+5} - 2 \cdot h_{N+3}}{(h_{N+3} + h_{N+4} + h_{N+5}) \cdot (h_{N+4} + h_{N+5}) \cdot h_{N+4}} \\
 b3 - b3 & \leftarrow \frac{2}{(h_{N+4} + h_{N+5}) \cdot h_{N+4}} \\
 l_0 & \leftarrow a1 - \frac{k_1 a3}{m_1} \\
 m_0 & \leftarrow a2 - \frac{l_1 a3}{m_1} \\
 z_0 & \leftarrow \frac{-z_1 a3}{m_1} \\
 k_{N+2} & \leftarrow b2 - \frac{l_{N+1} b1}{k_{N+1}} \\
 l_{N+2} & \leftarrow b3 - \frac{m_{N+1} b1}{k_{N+1}} \\
 m_{N+2} & \leftarrow 0 \\
 z_{N+2} & \leftarrow \frac{-z_{N+1} b1}{k_{N+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ 1 \\ m \\ z \end{bmatrix}$$

$$k := K_0 \quad l := K_1 \quad m := K_2 \quad z := K_3$$

Kolmediagonaalse süsteemi lahendamine:

$$A := \begin{array}{l} A_{0,0} \leftarrow \frac{m_0}{l_0} \\ A_{0,1} \leftarrow \frac{z_0}{l_0} \\ i \leftarrow 1 \\ \text{while } i < N + 2 \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{i,0} \leftarrow \frac{m_i}{l_i - k_i \cdot A_{i-1,0}} \\ A_{i,1} \leftarrow \frac{z_i - k_i \cdot A_{i-1,1}}{l_i - k_i \cdot A_{i-1,0}} \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ A_{N+2,1} \leftarrow \frac{z_{N+2} - k_{N+2} \cdot A_{N+1,1}}{l_{N+2} - k_{N+2} \cdot A_{N+1,0}} \\ A \end{array}$$

$$c := \begin{array}{l} c_{N+2} \leftarrow A_{N+2,1} \\ i \leftarrow N + 1 \\ \text{while } i > -1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c_i \leftarrow A_{i,1} - A_{i,0} \cdot c_{i+1} \\ i \leftarrow i - 1 \end{array} \right. \\ c \end{array}$$

Splain:

$i := 2..N+4$

$$\begin{aligned}
 B(x,i) := & \frac{(x-t_{i-2})^3}{(h_{i-1}+h_i+h_{i+1}) \cdot (h_{i-1}+h_i) \cdot h_{i-1}} \quad \text{if } t_{i-2} \leq x < t_{i-1} \\
 & \left[ \frac{(x-t_{i-2})^2 \cdot (t_i-x)}{(h_{i-1}+h_i+h_{i+1}) \cdot (h_{i-1}+h_i) \cdot h_i} + \frac{(x-t_{i-2}) \cdot (x-t_{i-1}) \cdot (t_{i+1}-x)}{(h_{i-1}+h_i+h_{i+1}) \cdot (h_i+h_{i+1}) \cdot h_i} + \frac{(x-t_{i-1})^2 \cdot (t_{i+2}-x)}{(h_i+h_{i+1}+h_{i+2}) \cdot (h_i+h_{i+1}) \cdot h_i} \right] \quad \text{if } t_{i-1} \leq x < t_i \\
 & \left[ \frac{(x-t_{i-2}) \cdot (t_{i+1}-x)^2}{(h_{i-1}+h_i+h_{i+1}) \cdot (h_i+h_{i+1}) \cdot h_{i+1}} + \frac{(x-t_{i-1}) \cdot (t_{i+1}-x) \cdot (t_{i+2}-x)}{(h_i+h_{i+1}+h_{i+2}) \cdot (h_i+h_{i+1}) \cdot h_{i+1}} + \frac{(x-t_i) \cdot (t_{i+2}-x)^2}{(h_i+h_{i+1}+h_{i+2}) \cdot (h_{i+1}+h_{i+2}) \cdot h_{i+1}} \right] \quad \text{if } t_i \leq x < t_{i+1} \\
 & \frac{(t_{i+2}-x)^3}{(h_i+h_{i+1}+h_{i+2}) \cdot (h_{i+1}+h_{i+2}) \cdot h_{i+2}} \quad \text{if } t_{i+1} \leq x < t_{i+2} \\
 & 0 \quad \text{otherwise}
 \end{aligned}$$

$$S(x) := \sum_{i=0}^{N+2} c_i \cdot B(x,i+2)$$

Viga, mis tehakse kümme korda tihedama võrgu sõlmedes:

```

viga :=
  a ← 0
  max ← 0
  for i ∈ 3..N + 2
    for k ∈ 0..10
      s ← ti +  $\frac{k \cdot h_{i+1}}{10}$ 
      q ← | f(s) - S(s) |
      if q ≥ max
        max ← q
        a ← s
  [ max ]
  [ a ]

```

$$\text{viga} = \begin{bmatrix} 1.542746 \cdot 10^{-6} \\ -0.996826 \end{bmatrix}$$

## Lisa 4.

### Interpoleerimisülesande lahendamine kasutades naturaalsplaine

Algandmed:

Lõigu otspunktid:

$a := -1$      $b := 1$

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

Interpoleeritav funktsioon:

Osaloikude arv:

$N := 32$

Programm:

Sõlmpunktid:

```
t :=
| n ← N/2
| δ ← (b-a)/n
| t₀ ← a
| t_{n-2} ← (a+b)/2 - δ/n² - δ/n⁴
| t_{n-1} ← (a+b)/2 - δ/n²
| t_n ← (a+b)/2
| t_{n+1} ← (a+b)/2 + δ
| t_{n+2} ← (a+b)/2 + δ + δ/n²
| t_{n+3} ← (a+b)/2 + δ + δ/n² + δ/n⁴
| t_N ← b
| for i ∈ 1..n-3
|   t_i ← t_{i-1} + (t_{n-2} - t₀)/(n-2)
| for i ∈ n+4..N-1 if N > 8
|   t_i ← t_{i-1} + (t_N - t_{n+3})/(n-3)
| t
```

Osaloikud:

```
h :=
| for i ∈ 1..N
|   h_i ← t_i - t_{i-1}
| h
```

Splaine väärtused sõlmedes:

```
z :=
| for i ∈ 0..N
|   z_i ← f(t_i)
| z
```

$z_{N+1} := 0$

$z_{N+2} := 0$

```
A :=
| for i ∈ 0..N
|   | A_{i,0} ← 1
|   | A_{i,1} ← t_i
|   | for j ∈ 0..N
|   |   A_{i,j+2} ← (t_i - t_j)³
| A_{N+1,0} ← 0
| A_{N+1,1} ← 0
| A_{N+2,0} ← 0
| A_{N+2,1} ← 0
| for j ∈ 0..N
|   | A_{N+1,j+2} ← 1
|   | A_{N+2,j+2} ← t_j
| A
```

lah := solve(A, z)



$$c_0 := 1ah_0$$

$$c_1 := 1ah_1$$

$$d := \begin{cases} \text{for } i \in 0..N \\ d_i \leftarrow 1ah_{i+2} \\ d \end{cases}$$

Splain:

$$S(x) := c_0 + c_1 x + \sum_{i=0}^N d_i \cdot (x - t_i)^3$$

Viga, mis tehakse kümme korda tihedama võrgu sõlmedes:

```
viga :=
  a ← 0
  max ← 0
  for i ∈ 0..N - 1
    for k ∈ 0..10
      s ← t_i +  $\frac{k \cdot h_{i+1}}{10}$ 
      q ← | f(s) - S(s) |
      if q ≥ max
        max ← q
        a ← s
  [ max
    a ]
```

$$viga = \begin{bmatrix} 1.25407 \cdot 10^{-4} \\ -0.971443 \end{bmatrix}$$

## Lisa 5.

### Sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritm tõkete silumisülesande lahendamiseks ühedimensionaalsel juhul

Algandmed:

Interpolatsioonisõlmed ja -tingimused

Interpolatsioonisõlmede arv (vähemalt 2)       $n1 := 4$

$A1 :=$

0.0	-1.0
3.0	2.0
5.0	3.0
7.0	6.0

Esimeses tulbas on argumendi väärtused (sõlmed)  $x_i$ ,  
teises tulbas funktsiooni väärtused  $z_j$

Tõkkestingimused ning vastavad sõlmed

Sõlmede arv (vähemalt 1)       $n2 := 6$

$A2 :=$

1.0	-3.0	-0.5
2.0	-1.5	-0.5
4.0	4.0	6.0
6.0	-1.0	5.0
8.0	3.0	4.0
9.0	-1.0	1.0

Esimeses tulbas on argumendi väärtused  $x_i$ ,  
teises ja kolmandas tulbas tõkkestingimused  $a_i$  ja  $b_i$

Sõlmi kokku       $n := n1 + n2$

Lubatav viga       $\varepsilon := 10^{-12}$

Abimaatriksid:

$$A := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n1-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{i,0} \leftarrow 1 \\ A_{i,1} \leftarrow A1_{i,0} \\ A_{i,2} \leftarrow A1_{i,1} \\ A_{i,3} \leftarrow A1_{i,1} \end{array} \right. \\ \text{for } i \in n1..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} A_{i,0} \leftarrow 0 \\ A_{i,1} \leftarrow A2_{i-n1,0} \\ A_{i,2} \leftarrow A2_{i-n1,1} \\ A_{i,3} \leftarrow A2_{i-n1,2} \end{array} \right. \\ A \end{cases}$$

$$B := \begin{cases} B_{0,0} \leftarrow 0 \\ B_{0,1} \leftarrow 0 \\ B_{1,0} \leftarrow 0 \\ B_{1,1} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 2..n+1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} B_{0,i} \leftarrow 1 \\ B_{i,0} \leftarrow 1 \\ B_{1,i} \leftarrow A_{i-2,1} \\ B_{i,1} \leftarrow A_{i-2,1} \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 2..n+1 \\ \quad \text{for } j \in 2..n+1 \\ \quad \quad B_{i,j} \leftarrow \left( A_{i-2,1} - A_{j-2,1} \right)^3 \\ B \end{cases}$$

$$b := \begin{cases} b_0 \leftarrow 0 \\ b_1 \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 2..n1+1 \\ \quad b_i \leftarrow A_{i-2,2} \\ \text{for } i \in n1+2..n+1 \\ \quad b_i \leftarrow 0 \\ b \end{cases}$$

$t := A^{<1>}$        $u := A^{<2>}$        $v := A^{<3>}$

Programm:

```

pr := C ← B
  for i ∈ 0..n+1
    for j ∈ n1+2..n+1
      Ci,j ← 0
      Cj,i ← 0
    for i ∈ n1+2..n+1
      Ci,i ← 1
  c ← b
  d ← lsolve(C, c)
  A ← A
  etapp ← 2
  while etapp = 2
    while etapp = 2
      for i ∈ n1..n-1
        Si ← d0 + d1 · Ai,1 + ∑j=0n-1 dj+2 · (Ai,1 - Aj,1)3
        return d if ∏i=n1n-1 [(Ai,2 - 10-12) ≤ Si] · [Si ≤ (Ai,3 + 10-12)]
      otherwise
        for i ∈ n1..n-1
          Ai,0 ← 1 if Si < Ai,2
        for i ∈ n1..n-1
          Ai,0 ← 2 if Si > Ai,3
        C ← B
        for i ∈ 0..n+1
          for j ∈ n1+2..n+1
            if Aj-2,0 = 0
              Ci,j ← 0
              Cj,i ← 0
          for j ∈ n1+2..n+1
            Cj,j ← 1 if Aj-2,0 = 0
        c ← b
        for i ∈ n1+2..n+1
          ci ← 0 if Ai-2,0 = 0
          ci ← Ai-2,2 if Ai-2,0 = 1
          ci ← Ai-2,3 if Ai-2,0 = 2
        d ← lsolve(C, c)

```

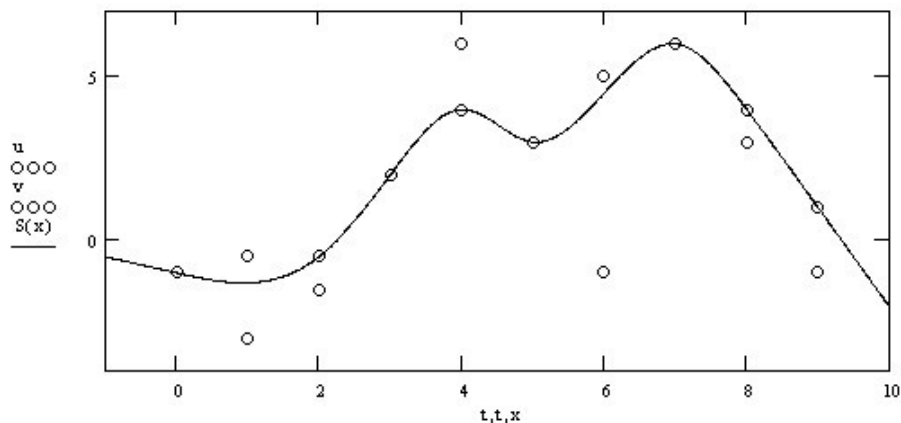
```

| | | | etapp ← 2 if  $\prod_{i=n1+2}^{n+1} [(A_{i-2,0}=0) + (d_i > 0) \cdot (A_{i-2,0}=1) + (d_i < 0) \cdot (A_{i-2,0}=2)] = 1$ 
| | | | etapp ← 3 otherwise
| | | while etapp = 3
| | | | for i ∈ n1..n-1
| | | | | Ai,0 ← 0 if  $[(d_{i+2} \leq 0) \cdot (A_{i,0}=1) + (d_{i+2} \geq 0) \cdot (A_{i,0}=2)] = 1$ 
| | | | | C ← B
| | | | | for i ∈ 0..n+1
| | | | | | for j ∈ n1+2..n+1
| | | | | | | if Aj-2,0 = 0
| | | | | | | |  $\begin{cases} C_{i,j} \leftarrow 0 \\ C_{j,i} \leftarrow 0 \end{cases}$ 
| | | | | | for j ∈ n1+2..n+1
| | | | | | | Cj,j ← 1 if Aj-2,0 = 0
| | | | | | c ← b
| | | | | | for i ∈ n1+2..n+1
| | | | | | |  $\begin{cases} c_i \leftarrow 0 & \text{if } A_{i-2,0} = 0 \\ c_i \leftarrow A_{i-2,2} & \text{if } A_{i-2,0} = 1 \\ c_i \leftarrow A_{i-2,3} & \text{if } A_{i-2,0} = 2 \end{cases}$ 
| | | | | | d ← lsolve(C, c)
| | | | | etapp ← 2 if  $\prod_{i=n1+2}^{n+1} [(A_{i-2,0}=0) + (d_i > 0) \cdot (A_{i-2,0}=1) + (d_i < 0) \cdot (A_{i-2,0}=2)] = 1$ 
| | | | | etapp ← 3 otherwise

```

Splain:

$$S(x) := pr_0 + pr_1 \cdot x + \sum_{i=0}^{n-1} pr_{i+2} \cdot (x - A_{i,1})^3$$



```

viga := | v ← 0
        | for i ∈ 0..n-1
        |   | v ← Ai,2 - S(Ai,1) if (S(Ai,1) < Ai,2) · (Ai,2 - S(Ai,1) > v)
        |   | v ← S(Ai,1) - Ai,3 if (Ai,3 < S(Ai,1)) · (S(Ai,1) - Ai,3 > v)
        | v

```

viga = 9.237·10<sup>-14</sup>

# Smoothing problems

Evely Leetma

## Summary

For given integers  $r$  and  $n$ , with  $2r > n \geq 1$  we denote by  $G$  the fundamental solution of the operator  $\Delta^r$ , where  $\Delta$  is the  $n$ -dimensional Laplace operator. Let  $\mathcal{P}_{r-1}$  be the space of all polynomials of order  $\leq r-1$  on  $\mathbb{R}^n$ . We denote by  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  the space of functions defined on  $\mathbb{R}^n$  having all partial derivatives of order  $r$  in  $L_2(\mathbb{R}^n)$ .

Given a finite number of points  $X_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , a function

$$S(X) = Q_0(X) + \sum_{i=1}^m d_i G(X - X_i), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

with  $Q_0 \in \mathcal{P}_{r-1}$  and

$$\sum_{i=1}^m d_i Q(X_i) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{r-1},$$

is called the natural spline. It is shown that any natural spline belongs to  $L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$ .

We define

$$Tf = \left\{ \sqrt{\frac{r!}{\alpha!}} D^\alpha f \mid |\alpha| = r \right\},$$

where  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$  and  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . Thus  $T : L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L_2(\mathbb{R}^n)$  with the number of components in the product as far as there are different derivatives of order  $r$ . We also need the product

$$\langle f, g \rangle_{L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)} = \langle Tf, Tg \rangle = \sum_{|\alpha|=r} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{r!}{\alpha!} D^\alpha f D^\alpha g dX$$

and the corresponding seminorm  $\|Tf\| = \sqrt{\langle Tf, Tf \rangle}$

It is shown that for all  $g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n)$  and any natural spline  $S$  it holds

$$\langle TS, Tg \rangle = (-1)^r \sum_{i=1}^m d_i g(X_i).$$

There exists only one natural spline  $S$  satisfying  $S(X_i) = z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , which is the unique solution of the minimization problem

$$\min_{g \in \Omega} \|Tg\|^2,$$

where  $\Omega = \{g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid g(X_i) = z_i, i = 1, \dots, m\}$ .

We consider the smoothing problem with weights

$$\min_{g \in \Omega_w} \left( \|Tg\|^2 + \sum_{i=m+1}^N \frac{|g(X_i) - z_i|^2}{w_i} \right),$$

where

$$\Omega_w = \{g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid g(X_i) = z_i, i = 1, \dots, m\},$$

with given data  $z_i, i = 1, \dots, N$ , and weights  $w_i > 0, i = m + 1, \dots, N$ . Also we consider the smoothing problem with obstacles

$$\min_{g \in \Omega_{\alpha\beta}} \|Tg\|^2,$$

where

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{g \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}^n) \mid g(X_i) = z_i, i = 1, \dots, m, \alpha_i \leq g(X_i) \leq \beta_i, i = m + 1, \dots, N\},$$

with given  $z_i, i = 1, \dots, m$ , and obstacles  $\alpha_i < \beta_i, i = m + 1, \dots, N$ . It is shown that both problems have unique solution among natural splines. Necessary and sufficient conditions for the characterization of these solutions are established.

One possibility to solve the smoothing problem with obstacles is the method of adding-removing knots in the interpolation problem. The proof of its finiteness in ([10], p. 71-72) is based on a false lemma. Thus the finiteness of the method in general case is not yet proved. We give a proof of finiteness at some particular assumptions.

Theoretical part of this work is illustrated by practical examples of interpolating and smoothing given data in one dimensional case. The orders  $r = 1$  (linear splines) and  $r = 2$  (cubic splines) are treated.

# Sisukord

Sissejuhatus	2
1. Abitulemused	4
1.1. Võrratused polünoomide hindamiseks	4
1.2. Minimiseerimisülesande lahendi iseloomustusteoreem	5
1.3. Farkaši lemma	6
1.4. Tarvilik ja piisav tingimus ekstreemumülesande lahenduvuseks	12
2. Naturaalsplainid	20
3. Silumisülesannete püstitused	33
3.1. Kaaludega silumisülesanne	33
3.2. Tõketega silumisülesanne	34
4. Tõketega silumisülesande lahendamine	40
4.1. Sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritm	40
4.2. Näiteid algoritmi realiseerimise kohta	42
4.3. Algoritmi lõplikkus	46
5. Paketi Mathcad abil realiseeritud näited	49
5.1. Interpoleerimisülesande lahendamine	49
5.2. Tõketega silumisülesande lahendamine	53
Kasutatud kirjandus	54
Lisa 1. Interpoleerimisülesande lahendamine kasutades kuupsplainide esitust esimeste momentide kaudu	55
Lisa 2. Interpoleerimisülesande lahendamine kasutades kuupsplainide esitust teiste momentide kaudu	57
Lisa 3. Interpoleerimisülesande lahendamine kasutades kuup-B-splaine	59
Lisa 4. Interpoleerimisülesande lahendamine kasutades naturaalsplaine	64
Lisa 5. Sõlmede lisamise ja eemaldamise algoritm tõketega silumisülesande lahendamiseks ühedimensionaalsel juhul	66
Summary	70