Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Laura Anna Tammesoo

Hõredate ja stabiilsete väärtpaberiportfellide koostamine Balti aktsiaturu näitel

Matemaatilise statistika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: dotsent Toomas Raus

Tartu 2020

Hõredate ja stabiilsete väärtpaberiportfellide koostamine Balti aktsiaturu näitel

Bakalaureusetöö

Laura Anna Tammesoo

Lühikokkuvõte

Aastal 1952 pakkus Harry Markowitz välja idee, kuidas sobivalt aktsiaid portfelli valides õnnestub investeerimisriski vähendada. Kuna aktsiate osakaalude leidmiseks vajalikud aktsiate oodatavad tulusused ning tulususte kovariatsioonimaatriks ei ole *a priori* teada ning need leitakse hindamise teel, siis praktikas ei pruugi sel viisil moodustatud portfellid olla kuigi head. Peamiste probleemidena on välja toodud selliste portfellide korral portfelli madal tulusus ja absoluutväärtuselt ekstreemselt suured aktsiate osakaalud portfellis.

Bakalaureusetöö eesmärk on uurida mõnda kirjanduses välja pakutud võimalust, kuidas kirjeldatud probleeme ületada. Töös vaadeldakse, kuidas osakaalude normidele seatud kitsendused ning portfelliteooria klassikalise minimeerimisülesande sihifunktsiooni modifitseerimine annavad võimaluse leida stabiilseid portfelle, kus aktsiate osakaalud portfellis ei muutu aja jooksul olulisel määral. Samuti võimaldavad need meetodid kontrollida portfelli hõredust ehk aktsiate arvu portfellis.

Töös vaadeldud meetodeid analüüsitakse Balti aktsiaturul kaubeldavate aktsiate baasil moodustatud portfellide näitel ning võrreldakse neid erinevate näitajate põhjal klassikalise portfelliteooriaga saadud portfellidega.

CERCS teaduseriala: P160 – Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika

Märksõnad: Portfelliteooria, finantsmatemaatika, minimaalse riskiga portfell, stabiilne ja hõre portfell, portfelli kaalude kitsendamine

Creating sparse and stable portfolios based on Baltic Stock Market

Bachelor's thesis

Laura Anna Tammesoo

Abstract

In 1952, Harry Markowitz proposed an idea of how to diversify risk in a portfolio by appropriately selecting assets in the portfolio. Portfolios formed using modern portfolio theory method have the best results in theory, however, are difficult to apply in practice. In recent years, more attention has been paid to achieving better results with modern portfolio theory.

The thesis aims to study different possibilities how to use the results of the portfolio theory better in practice. Previously, there has been presented following solutions: estimating the expected returns and covariations differently, additionally constraining the portfolio weights, supplementing a regularization parameter to the objective function of the optimization problem. The aim is to conduct stable and sparse portfolios using the regularization parameter method and contraining the portfolio weights. The stability indicates that between periods there are minor changes in portfolio weigths, and the sparsity means that the number of different assets in the portfolio is small.

The Baltic Stock Market's assets are used to analyze the methods considered in this bachelor's thesis. Also, the newly constructed portfolios are compared with the portfolios constructed by using the modern portfolio theory. Different financial performance metrics are used for comparison.

CERCS research specialisation: P160 – Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics

Key words: Portfolio theory, financial mathematics, minimum variance portfolio, sparse and stable portfolio, constraining portfolio weights

Sisukord

Sissejuhatus

Harry Markowitz avaldas 1952. aastal ajakirjas *"Journal of Finance"* oma idee, kuidas aktsiaportfelli koostamisel kasutada riski mõõtva tegurina aktsiate tulususte standardhälvet (Sander, 1999, lk 49). Markowitzi portfelliteooria (nimetatakse ka klassikaliseks portfelliteooriaks, portfelliteooriaks[1]) idee on näidata, et kui moodustada sobivalt riskantsetest väärtpaberitest portfell, siis on võimalik riske hajutada võrreldes üksikaktsiasse investeerimisega.

Markowitzi portfelliteooria (MPT) on olnud oluliseks käsitluseks finantsmaailmas ligi 70 aastat, kuid aja jooksul on ilmnenud sellel mitmeid puudusi. Portfelliteooria põhjal koostatud portfellid on küll teoreetiliselt minimaalse riskiga, kuid praktikas ei pruugi portfelliteooria kasutamine portfelli riski vähendada, kuna portfelliteooria põhjal portfellide koostamine vajab sisenditeks aktsiate tulususi ja nende vahelisi kovariatsioone. Need suurused on aga täpselt teadmata ning tuleb hinnata ajalooliste andmete põhjal, kuid ajaloolised andmed on ajas muutuvad ja hinnangud sisenditele ei pruugi kehtida (Giannone *et al.*, 2008). Seega portfellid, mis ajaloolistele andmetele tuginedes olid väikese riskiga, ei pruugi seda tulevikus olla. Lisaks võidakse portfelliteooria kasutamisel saada portfellid, milles aktsiate osakaalud on absoluutväärtuselt ekstreemsete väärtustega ning neid ei ole võimalik praktikas kasutada lühikese aktsiapositsiooni võtmisele seatavate piirangute tõttu (Dai *et al.*, 2018). Enamasti kuulub MPT tulemusel tekkinud portfelli ka suur hulk erinevaid aktsiaid, millega kauplemine tähendab väikeinvestorile suuri teenustasusid (Derpanopoulos, 2018).

Viimastel aastatel on pööratud tähelepanu meetoditele, kuidas praktikas portfelliteooriat paremini rakendada. Portfelliteooria modifitseerimisele on kirjanduses välja toodud kolm üldisemat lähenemist (Derpanopoulos, 2018):

1. hinnata kovariatsioonimaatriksit teisiti;
2. hinnata aktsiate tulususte vektorit teisiti;
3. muuta portfelli riski minimeerivat ülesannet lisades täiendavaid kitsendusi aktsiate osakaaludele portfellis või muutes sihifunktsiooni.

Muudatuste eesmärk on saada riski minimeerimisel portfellid, mille osakaalude absoluutväärtused ei oleks väga suured ja osakaalude väärtused muutuksid ajas suhteliselt

[1]Käesolevas töös on ka edaspidi Markowitzi portfelliteooria nimetamiseks kasutatud mõisteid klassikaline portfelliteooria ja portfelliteooria ning lühendit MPT.

vähe ehk moodustatud portfellid oleks stabiilsed. Samuti on muudatuste eesmärk väiksema aktsiate arvuga ehk hõredamate portfellide koostamine.

Bakalaureusetöö põhieesmärk on uurida portfelli riski minimeerimisülesande võimalikke modifikatsioone, kas aktsia osakaaludele täiendava kitsenduse või sihifunktsioonile täiendava liidetava lisamise teel. Kitsendusi osakaaludele on võimalik seada nii igale osakaalule eraldi kui ka osakaalude normidele tõkestamise teel. Kasutades Balti aktsiaturu andmeid võrreldakse töö praktilises osas selliselt moodustatud portfellide tulusust, riski, stabiilsust ja hõredust võrdsete kaaludega portfelliga ning klassikalise portfelliteooria alusel moodustatud portfellidega.

Töö jaguneb kolmeks põhiosaks. Esmalt antakse ülevaade Markowitzi portfelliteooriast ning sellega seonduvatest mõistetest. Töö teises osas käsitletakse praktikas portfelliteoora rakendamisega kaasnevaid puuduseid ning antakse ülevaade võimalikest lahendustest. Põhjalikumalt uuritakse portfelli aktsiate osakaalude vektorile täiendavate kitsenduste seadmist ja minimeerimisülesande sihifunktsiooni muutmist. Osutub, et mitmel juhul on sellised ülesanded samaväärsed nihutatud kovariatsioonimaatriksiga riski minimeerimisülesandele. Töö kolmandas osas koostatakse töös vaadeldud meetoditega erinevaid aktsiaportfelle kasutades Balti aktsiaturul kaubeldavaid aktsiaid. Koostatud portfelle võrreldakse klassikalise portfelliteooria põhjal koostatud portfellidega ja võrdsete kaaludega portfellidega. Portfellide võrdlemiseks on kasutatud portfelli tulusust, riski, stabiilsust ja hõredust iseloomustavaid erinevaid näitajaid.

Balti aktsiaturu andmete analüüsimiseks ja bakalaureusetöö jooniste koostamiseks kasutati programmeerimiskeelt Python.

1 Markowitzi portfelliteooria

Harry Markowitz avaldas 1952. aastal artikli, milles näitas, et sobivalt aktsiaid ostes on võimalik koostada aktsiaportfelle, mille risk on väiksem kui üksikaktsiasse investeerides. Markowitzi portfelliteooria oli uuenduslik, kuna riski mõõtva tegurina kasutati esmakordselt portfelli tulususe standardhälvet. (Sander, 1999, lk 50)

Käesolev peatükk põhineb raamatul *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering.* (2003), kui ei ole viidatud teisiti.

1.1 Investeeringu tulusus ja risk

Riskantne ja riskivaba investeering

Investeeringuid on kahte erinevat liiki: riskivabad ja riskantsed investeeringud. Riskivabade investeeringute puhul on investeeringu tegemise ajal teada tuleviku maksete suurused ja nende tegemise ajahetked ehk puudub makserisk. Riskivabadeks investeeringuteks loetakse üldiselt tähtajalisi hoiuseid ja valitsuse võlakirju. Riskantsete investeeringute korral on tuleviku rahavood juhuslikud suurused ning seega ei ole üheselt määratletavad. Riskantse investeeringu korral on investoril võimalik tulevikus teenida tulu kui ka kanda kahju ehk investeeringuga kaasneb risk. Üheks peamiseks riskantseks investeeringuks on aktsiate ehk omandiõigust väljendavate väärtpaberite omandamine. (Raus, 2019)

Riskivaba investeeringu tulusus

Oletame, et ajahetkel $t = 0$ tehakse riskivaba investeering summas $V(0)$, mille tulemusel saadakse ajahetkel $t > 0$ summa $V(t)$, kus aeg t on mõõdetud aastates. Järgnevalt on võimalik leida investeeringu puhastulu ja tulusus kogu perioodil. Investeeringu puhastulu iseloomustab investeeringult saadavat tulu või kulu absoluutväärtuses ning on arvutatav valemiga $V(t) - V(0)$. Protsentides on investeeringu **tulusus** R arvutatav valemiga

$$R = \frac{V(t) - V(0)}{V(0)}.$$

Lisaks ülaltoodud valemile kasutatakse investeeringu tulususe leidmiseks ka pidevat tulususe valemit

$$R_{ln} = \ln\left(\frac{V(t)}{V(0)}\right),$$

kuid antud töös pideva tulususe mõistet ei kasutata.

Riskantse investeeringu tulusus ja risk

Järgmiseks vaadeldakse aktsia ostmist kui riskantset investeeringut. Aktsia puhul ei ole selle hind tulevikus teada ning seetõttu on aktsia hind vaadeldav juhusliku suurusena. Olgu ajahetkel $t = 0$ aktsia hind fikseeritud ja võrdne suurusega $S(0)$. Olgu aktsia hind $S(t)$ ajahetkel $t > 0$ diskreetne juhuslik suurus, mis võib m erineva stsenaariumi korral omandada väärtusi $S_j = S_j(t)$ vastavalt tõenäosustega $p_j > 0$, kus $\sum_{j=1}^{m} p_j = 1$. Investeeringu oodatav väärtus on aktsia hinna $S = S(t)$ keskväärtus

$$E(S) = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot S_j$$

ning investeeringu **oodatav tulusus** μ on leitav valemiga

$$\mu := E(R) = \frac{E(S) - S(0)}{S(0)}.$$

Kui on teada investeeringu tulusused erinevate stsenaariumite korral

$$R_j = \frac{S_j - S(0)}{S(0)}, \quad \text{kus } j = 1, \ldots, m,$$

siis kehtib võrdus

$$\mu = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot R_j.$$

Tõepoolest

$$\begin{aligned} \mu = E(R) = \frac{E(S) - S(0)}{S(0)} &= \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot S_j - S(0)}{S(0)} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot S_j - \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot S(0)}{S(0)} \\ &= \sum_{j=1}^{m} p_j \left(\frac{S_j - S(0)}{S(0)} \right) = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot R_j. \end{aligned}$$

Kui tegemist on riskantse investeeringuga, siis on alati oht saada kahju ehk investeeringuga kaasneb **risk**. Aktsiainvesteeringu riski mõõtmiseks on erinevaid näitajaid. Kuna risk ei ole üheselt defineeritav, võib tegemist olla näiteks ohtude kogumiga või kahju saamise tõenäosusega. Enam levinud on investeeringu riski hindamine selle tulususe standardhälbe või dispersiooni abil. Kuna investeeringu tulusus on riskantse investeeringu korral juhuslik suurus, siis tulususe dispersiooni saab leida valemiga

$$Var(R) = E(R - E(R))^2 = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot (R_j - \mu)^2$$

ja standardhälvet valemiga

$$\sigma = \sqrt{Var(R)}.$$

1.2 Väärtpaberiportfelli tulusus ja risk

Väärtpaberiportfelli moodustavad mitu erinevat riskantset väärtpaberit (näiteks aktsiat) koos. Esmalt vaadeldakse kahest riskantsest väärtpaberist koosnevat portfelli.

Olgu $S_1(0)$ ja $S_2(0)$ nende väärtpaberite hinnad ajahetkel $t = 0$ ja olgu nende kogused portfellis vastavalt x_1 ja x_2. Portfelli maksumus ajahetkel $t = 0$ on arvutatav valemiga

$$V(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0).$$

Väärtpaberi osakaal portfellis näitab väärtpaberile kulutatud summa suhtelist suurust portfelli alghinnast. Väärtpaberite osakaalud portfellis tähistatakse tähisega ω_i ja leitakse valemiga

$$\omega_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \text{ kus } i = 1, 2.$$

On ilmne, et kaalude summa on võrdne ühega:

$$\omega_1 + \omega_2 = 1.$$

Aktsia osakaal ω_1 või ω_2 võib olla ka negatiivne. Negatiivse osakaaluga aktsia positsiooni portfellis nimetatakse **lühikeseks positsiooniks**. Lühikese positsiooni võtmist nimetatakse lühikeseks müümiseks, mis tähendab, et esmalt investor müüb väärtpaberi ning hiljem ostab selle tagasi. Investorid kasutavad lühikeseks müümist juhul, kui nad loodavad, et tulevikus hakkab aktsia hind langema. Lühikeseks müümist nimetatakse ka katteta müümiseks. Kuna üldjuhul kaasneb lühikeseks müümisega suurem risk, siis finantsinstitutsioonide poolt seatakse tihti investorile piiranguid, kui suures osas on lubatud lühikest positsiooni omada. Kui investor aga esmalt ostab aktsia ja hiljem selle müüb, siis öeldakse, et väärtpaberiga võetakse **pikk positsioon**. Tegemist on klassikalise investeerimispraktikaga, kus kasu loodetakse teenida väärtpaberi hinna tõusult. (Raus, 2019)

Olgu R_1 ja R_2 väärtpaberite tulusused, siis ajahetkel $t > 0$ on võimalik leida portfelli hind $V_p = V_p(t)$ valemiga:

$$\begin{aligned} V_p &= x_1 S_1(0)(1 + R_1) + x_2 S_2(0)(1 + R_2) = V(0)\omega_1(1 + R_1) + V(0)\omega_2(1 + R_2) = \\ &= V(0)(\omega_1(1 + R_1) + \omega_2(1 + R_2)) = V(0)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) = \\ &= V(0)(1 + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2). \end{aligned}$$

Portfelli tulusus arvutatakse valemiga

$$R_p = \frac{V_p - V(0)}{V(0)} = \frac{V(0)(1 + \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) - V(0)}{V(0)} = \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2. \tag{1}$$

Olgu üksikute väärtpaberite oodatavad tulusused $\mu_1 = E(R_1)$ ja $\mu_2 = E(R_2)$. Kasutades valemit (1) saab portfelli oodatava tulususe μ_p esitada valemiga

$$\mu_p = E(R_p) = E(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) = \omega_1 E(R_1) + \omega_2 E(R_2) = \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2.$$

Tähistame väärtpaberite tulususte dispersioonid $\sigma_1^2 = Var(R_1)$ ja $\sigma_2^2 = Var(R_2)$, siis väärtpaberiportfelli tulususe dispersiooni saab leida valemiga

$$\sigma_p^2 = Var(R_p) = Var(\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2) = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 Cov(R_1, R_2),$$

kus $Cov(R_1, R_2)$ on kovariatsioon aktsiate tulususte vahel.

Kahe aktsia tulususte vahelist lineaarse seose tugevust saab hinnata **korrelatsioonikordajaga**

$$\rho_{12} = \frac{Cov(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2}, \tag{2}$$

kus ρ_{12} on kahe aktsia tulususte vaheline korrelatsioonikordaja ning σ_1 ja σ_2 on aktsiate tulususte standardhälbed.

Kasutades valemit (2) saab väärtpaberiportfelli tulususe dispersiooni esitada kujul

$$\sigma_p^2 = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2.$$

Edasi vaadeldakse juhtu, kus väärtpaberiportfellis on n väärtpaberit. Olgu x_i ja $S_i(0)$ vastavalt i-nda väärtpaberi arv portfellis ja selle hind ajahetkel $t = 0$, kus $i = 1, \ldots, n$. Väärtpaberite osakaalud portfellis leitakse valemiga

$$\omega_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, i = 1, 2, \ldots, n,$$

kus $V(0)$ on portfelli hind ajahetkel $t = 0$. Lihtne on näha, et kaalud rahuldavad tingimust

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1. \tag{3}$$

Portfelli kuuluvate väärtpaberite osakaalud tähistatakse vektori kujul

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

ning olgu vektor $\boldsymbol{u}$ n-mõõtmeline ühikvektor kujul $\boldsymbol{u} = (1, 1, \ldots, 1)$. Siis saame esitada tingimuse (3) valemiga

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T = 1.$$

Portfelli väärtus V_p ajahetkel $t > 0$ on riskantsete väärtpaberite korral juhuslik suurus. Portfelli oodatav tulu on leitav valemiga

$$E(V_p) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E(S_i),$$

kus $E(S_i)$ on i-nda väärtpaberi hinna keskväärtus ehk oodatav hind.

Olgu üksikute väärtpaberite tulusused $R_1, R_2, \ldots, R_n$ ning oodatavad tulususted $\mu_1 = E(R_1), \mu_2 = E(R_2), \ldots, \mu_n = E(R_n)$. Portfelli kuuluvate väärtpaberite oodatavad tulusused saab esitada vektorina

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n).$$

Analoogiliselt üksiku väärtpaberi tulususega on portfelli tulusus R_p esitatav valemiga

$$R_p = \frac{V_p - V(0)}{V(0)}.$$

Saab näidata, et portfelli tulusus on esitatav üksikute väärtpaberite tulususte kaudu valemiga

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i.$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} R_p = \frac{V_p - V(0)}{V(0)} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i S_i(0)(1 + R_i) - V(0)}{V(0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i V(0)(1 + R_i) - V(0)}{V(0)} = \\ &= \frac{V(0) \sum_{i=1}^{n} \omega_i (1 + R_i) - V(0)}{V(0)} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (1 + R_i) - 1 = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i - 1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i. \end{aligned}$$

Kasutades ülal toodud valemit saab leida portfelli oodatava tulususe

$$\mu_p = E(R_p) = E\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i E(R_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega}^T.$$

Olgu maatriks $\mathbf{\Sigma}$ portfelli kuuluvate väärtpaberite tulususte vaheline kovariatsioonimaatriks kujul

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

kus $\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ on i-nda ja j-nda aktsia vaheline kovariatsioon ning diagonaali elemendid $\sigma_{ii} = Var(R_i)$. Kuna kovariatsioonimaatriks $\mathbf{\Sigma}$ on positiivselt määratud ja sümmeetriline, siis tal leidub sümmeetriline pöördmaatriks $\mathbf{\Sigma}^{-1}$. Maatriks $\boldsymbol{A}$ on positiivselt määratud (poolmääratud), kui iga vektori $\boldsymbol{x}$ korral $\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T > 0$ ($\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^T \geq 0$).

Nüüd saadakse portfelli tulususe dispersioon ja standardhälve valemitega

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 = Var(R_p) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i\right) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i, \sum_{j=1}^{n} \omega_j R_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T\end{aligned}$$

ja

$$\sigma_p = \sqrt{\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T}.$$

1.3 Portfelli riski minimeerimine

Markowitzi portfelliteoorias tehakse investorite ja väärtpaberituru käitumise kohta järgmised eeldused (Derpanopoulos, 2018;Chen, 2020):

1. investorid on riskiteadlikud ja ratsionaalsed, mis tähendab, et nad ei võta riskantseid positsioone väärtpaberitega;
2. investorid moodustavad portfelle aktsiatest nende oodatava tulususe ja riski põhjal;
3. investorite eesmärk on madala riskitaseme juures maksimeerida oodatavat tulusust;
4. investoritele on kättesaadav kogu informatsioon aktsiahindade kohta enne tehingu sooritamist;
5. investorite otsused (st ostu- ja müügitehingud) ei mõjuta turul olevaid hindasid;
6. turul on võimalik kaubelda antud hinna juures väärtpaberiga piiramatus koguses ehk konkreetse hinnataseme juures on võimalik osta aktsiaid soovitud koguses ning müüa neid ka lühikeseks;
7. turuhinnad on normaaljaotusega;
8. makse ega kauplemistasusid ei arvestata.

Portfelli riski minimeerimiseks on erinevaid võimalusi. Näiteks võivad väga riskikartlikud investorid soovida koostada vähima riskiga portfelli, keskendumata portfelli tulususele. Kuid on võimalik püstitada ülesanne ka minimaalse dispersiooniga portfelli leidmiseks etteantud tulususe juures.

1.3.1 Riski minimeeriv portfell

Minimaalse riskiga portfelli koostamine on esitatav järgmise miinimumülesandena

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T \longrightarrow \min, \tag{4}$$

tingimusel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1. \tag{5}$$

Teoreem 1. *Kui $\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T \neq 0$, siis portfelli dispersioon on minimaalne juhul, kui aktsiate osakaalud portfellis on leitud valemiga*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T}.$$

Tõestus. Portfelli dispersiooni minimeerimise ülesanne kujul (4) – (5) on tinglik ekstreemumülesanne, mille üldkuju on esitatav järgmiselt

$$\min\left\{f(\boldsymbol{x}) : g_i(\boldsymbol{x}) = 0, \text{kus } i = 1, \ldots, m \text{ ja } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\}. \tag{6}$$

Portfelli dispersiooni minimeerimise korral $m = 1$ ning funktsioonid $f(\boldsymbol{x})$ ja $g_1(\boldsymbol{x})$ on kujul

$$f(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T, \quad g_1(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T - 1.$$

Tingliku ekstreemumülesande lahendamiseks kasutatakse Lagrange'i kordajate meetodit, mis seisneb ülesande (6) lahendite otsimises Lagrange'i funktsiooni

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(\boldsymbol{x})$$

statsionaarsete punktide hulgast, kus vektorit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ nimetatakse Lagrange'i kordajate vektoriks (Kaasik *et al.*, 1982, lk 238). See tähendab lahendite otsimist võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0, & \text{kus } i = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} = 0, & \text{kus } i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

lahendite hulgast.

Kui funktsioonid $g_i(\boldsymbol{x})$ on esitatavad kujul $g_i(\boldsymbol{x}) = \tilde{g}_i(\boldsymbol{x}) - c_i$, kus c_i on konstandid, siis võime Lagrange'i funktsiooni defineerida ka kujul

$$F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \tilde{g}_i(\boldsymbol{x}).$$

Seejärel saame otsida minimeerimisülesande (6) lahendit võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0 & \text{, kus } i = 1, \dots, n \\ \tilde{g}_i(\boldsymbol{x}) = c_i & \text{, kus } i = 1, \dots, m \end{cases}$$

lahendite hulgast, kuna

$$\frac{\partial F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i},$$

kus $i = 1, \dots, n$, ning võrrand $\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} = g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ on samaväärne võrrandiga $\tilde{g}_i(\boldsymbol{x}) = c_i$.

Ülesande (4) – (5) Lagrange'i funktsioon on kujul

$$F_1(\boldsymbol{\omega}, \lambda) = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \lambda \boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T.$$

Leiame funktsiooni $F_1(\boldsymbol{\omega}, \lambda)$ osatuletised portfelli osakaalude järgi ning võrdsustame need nulliga:

$$\frac{\partial F_1(\boldsymbol{\omega}, \lambda)}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial \left(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T\right)}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \left(\left[\frac{\partial \left(\sum_{i,j}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} - \lambda \sum_{i=1}^{n} \omega_i \right)}{\partial \omega_k} \right]_{k=1}^{n} \right)^T$$

$$= \left(\left[2 \sum_{i=1}^{n} \omega_i \sigma_{ik} - \lambda \right]_{k=1}^{n} \right)^T = 2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma} - \lambda \boldsymbol{u} = 0.$$

Seosest $2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma} - \lambda \boldsymbol{u} = 0$ saab avaldada vektori $\boldsymbol{\omega}$ kujul

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}, \tag{7}$$

mis on piisav tingimus miinimumkohaks sihifunktsiooni $f(\boldsymbol{\omega})$ ja kitsenduse $g_1(\boldsymbol{\omega})$ kumeruse tõttu.

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse **kumeraks** (kumeraks alla), kui iga reaalarvu $\beta \in (0, 1)$ ja iga x_1,x_2 korral oma määramispiirkonnast rahuldab funktsioon f võrratust $f(\beta x_1 + (1 - \beta)x_2) \leq \beta f(x_1) + (1 - \beta) f(x_2)$. See tähendab, et funktsiooni graafiku mistahes kahte punkti ühendav lõik asub ülalpool funktsiooni graafikut. (Boyd *et al.*, 2004, lk 67)

Asendades saadud osakaalud (7) tingimusse (5), saame võrduse

$$1 = \frac{\lambda}{2} \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T. \tag{8}$$

Avaldame seosest (8) kordaja λ ning asendame selle valemisse (7):

$$\lambda = \frac{2}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{2\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T}\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T}.$$

Sellega on teoreem 1 tõestatud. □

1.3.2 Minimaalse riskiga portfell etteantud oodatava tulususe korral

Minimaalse riskiga portfell etteantud oodatava tulususe μ_p korral on leitav lahendades ekstreemumülesannet

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T \longrightarrow \min, \tag{9}$$

tingimustel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1, \tag{10}$$

$$\mu_p = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega}^T. \tag{11}$$

Teoreem 2. *Kui* $c := \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}^T \\ \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T & \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}^T \end{vmatrix} \neq 0$, *siis minimaalse riskiga portfell etteantud tulususe* μ_p *juures on leitav valemiga*

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}}{c},$$

kus $a = \begin{vmatrix} 1 & \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}^T \\ \mu_p & \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}^T \end{vmatrix}$ *ja* $b = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T & 1 \\ \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{u}^T & \mu_p \end{vmatrix}$.

Teoreemi 2 tõestus on analoogiline teoreemi 1 tõestusele (Zastawniak *et al.*, 2003, lk 110). Seetõttu seda käesolevas töös ei tõestata.

Kõikide portfellide hulka etteantud tulususte korral, mis minimeerivad portfelli tulususe dispersiooni, nimetatakse **minimaalse dispersiooni jooneks**. Minimaalse dispersiooni joon sõltub etteantud portfelli tulususest μ_p ning tegemist on kumera hulgaga. **Kumeraks hulgaks** nimetatakse hulka, mille kahte punkti x ja y saab ühendada hulka kuuluva lõiguga $(1-\alpha)x + \alpha y$, kus $\alpha \in [0, 1]$ (Kaasik, 2002, lk 123).

1.3.3 Turuportfell

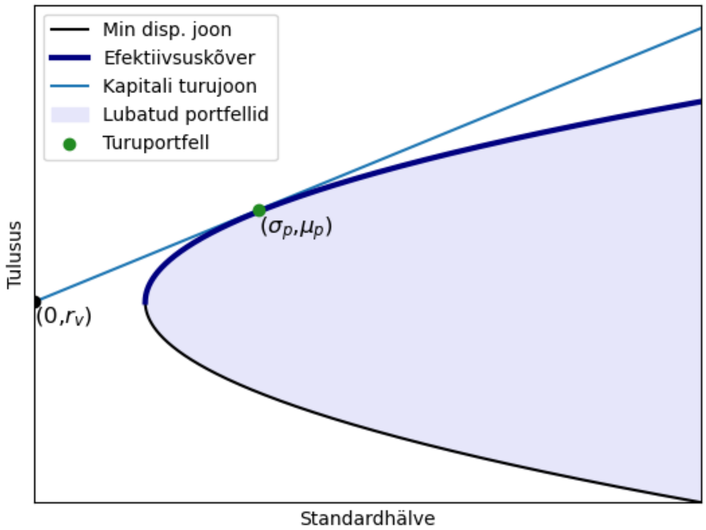
Öeldakse, et aktsia oodatava tulususega μ_1 ja standardhälbega σ_1 **domineerib** aktsia üle, mille oodatav tulusus on μ_2 ja standardhälve on σ_2, kui

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad \text{ja} \quad \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

Kui üks aktsia domineerib teise üle, siis ratsionaalne investor eelistab investeerida domineerivasse aktsiasse. Analoogilist ideed saab rakendada ka portfellide jaoks.

Portfelli nimetatakse **efektiivseks**, kui ei ole ühtegi portfelli (peale tema enda), mis domineeriks tema üle ning kõikide selliste portfellide hulka nimetatakse **efektiivsuskõveraks**. Efektiivsuskõver on minimaalse dispersiooni joone osahulk (Joonis 1).

Ratsionaalne investor valib portfelli erinevate efektiivsete portfellide hulgast ning tema valik sõltub sellest, kui riskikartlik investor ta on. Sealjuures erinevate portfellide korral on väärtpaberite osakaalud portfellides erinevad.



Joonis 1. Efektiivsuskõver ja turuportfell.

Kui aga vaadelda juhtu, kus lisaks riskantsetele väärtpaberitele on võimalik investeerida ka riskivabasse varasse, siis kõigi ratsionaalsete investorite riskantsete väärtpaberite osakaal riskantsetesse varadesse kokku on sama. Seda selgitatakse alljärgnevalt. Olgu riskivaba investeeringu tulusus ehk riskivaba intressimäär r_v. Riskivaba investeeringu tulusust ja standardhälvet kujutab joonisel 1 punkt $(0, r_v)$. Kui läbi selle punkti tõmmata sirge, mis on puutujaks efektiivsuskõverale, siis puutepunktile (σ_p, μ_p) vastavat portfelli nimetatakse **turuportfelliks**. Antud puutujasirget nimetatakse **kapitali turujooneks**. Iga portfell kapitali turujoonel kujutab endast riskivaba investeeringu ja turuportfelli lineaarset kombinatsiooni. Kui lubatakse investeerida ka riskivabadesse varadesse, siis kapitali turujoon on efektiivsuskõveraks kõigi selliste portfellide hulgale, kuna kapitali turujoon on ülalpool riskantsetest väärtpaberitest moodustatud portfellide hulgast (Joonis 1).

Kapitali turujoon rahuldab võrrandit

$$\mu = r_v + \frac{\mu_p - r_v}{\sigma_p}\sigma,$$

kus tähised μ ja σ on kapitali turujoonel asuva portfelli oodatav tulusus ja tulususe standardhälve.

Kapitali turujoone tõus $\frac{\mu_p - r_v}{\sigma_p}$ iseloomustab portfelli riskipreemiat ehk kompensatsiooni oodatavas tulususes lisariski võtmise eest. Antud suurust $\frac{\mu_p - r_v}{\sigma_p}$ nimetatakse ka **Sharpe'i suhtarvuks**.

Paneme tähele, et kapitali turujoon on suurima tõusuga sirge, mis läbib punkti $(0, r_v)$ ja millel on ühisosa lubatud riskantsetesse varadesse investeeritud portfellide hulgaga. Seega tuleb turuportfelli osakaalude leidmiseks maksimeerida Sharpe'i suhtarvu ehk lahendada tinglik ekstreemumülesanne

$$\frac{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\omega} - r_v}{\sqrt{\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T}} \longrightarrow \max, \tag{12}$$

tingimusel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1. \tag{13}$$

2 Stabiilsete ja hõredate portfellide moodustamine

2.1 Klassikalise Markowitzi portfelliteooria puudused

Kuigi Markowitzi portfelliteooria puhul on tegemist pikka aega finantsmaailmas olulisel kohal olnud käsitlusega, leidub sellel mitmeid puuduseid.

MPT analüüs vajab minimaalse dispersiooni ülesande lahendamisel etteantud tulususe korral kahte sisendit: aktsiate oodatavate tulususte vektorit ja oodatavate tulususte vahelisi kovariatsioone. Need parameetrid ei ole teada ning need tuleb hinnata ajalooliste andmete põhjal. Kovariatsioonimaatriksi ja tulususte vektori hindamisega kaasnevad hindamisvead, mis muudavad optimeerimisel leitud kaalud ebatäpseks (Dai *et al.*, 2018).

Markowitzi portfellitooria põhjal aktsiate osakaalude leidmine on tundlik väikestele muutustele kovariatsioonimaatriksis. Enamasti hinnatakse kovariatsioonimaatriks ajalooliste andmete põhjal ning väikesed muutused andmetes mõjutavad optimeerimise tulemusi suures ulatuses (Giannone *et al.*, 2008). Kuna eespool vaadeldud minimeerimisülesannete korral ei seata tõkkeid kaalude absoluutväärtuste summale, siis võivad praktikas tekkida absoluutväärtuselt ekstreemselt suurte osakaaludega portfellid. See aga tähendab, et portfelli koostamisel on investoril tarvis võtta aktsiatega ulatuslikult lühikesi positsioone. Tavaliselt on turgudel seatud piirangud, kui suures ulatuses portfelli koguväärtusest võib aktsiaid lühikeseks müüa. Antud piirang muudab klassikalise MPT kasutamisel saadud portfellide koostamise praktikas keeruliseks.

Teiseks, MPT analüüsi sisendid arvutatakse erinevate perioodide jaoks erinevate ajalooliste andmete pealt. Sellest tulenevalt võivad leitud osakaalude vektorid olla erinevate perioodide jaoks oluliselt erinevad. Suur muutus portfelli aktsiate osakaaludes tähendab, aga perioodide vahel aktsiate müümist ja ostmist suures mahus, millega kaasnevad kauplemistasud. Üldjuhul saadakse klassikalise portfelliteooria meetoditega portfellid, kus igale aktsiale on osakaalude vektoris nullist erinev osakaal ehk portfell koosneb enamasti kõikidest vaadeldud aktsiatest (DeMiguel *et al.*, 2007). Kuna iga aktsiatehinguga kaasnevad kauplemistasud, viib suure hulga aktsiate omamine portfellis kauplemistasud kõrgeks. Seega klassikaline portfelliteooria rakendamisel praktikas ei pruugi leitud portfellid olla stabiilsed ega hõredad. Siin stabiilsus iseloomustab aktsiate osakaalude suhteliselt väikest muutust pika aja jooksul ning hõredus iseloomustab erinevate aktsiate vähest arvu portfellis.

Järgnevalt tuuakse näide, kus väikesed muutused lähteandmetes põhjustavad suuri muutusi aktsiate osakaaludes ja portfelli tulususes.

Vaadeldakse kahte aktsiat, mille oodatavad tulusused on $\mu_1 = 0.1$ ja $\mu_2 = 0.2$ ning standardhälbed σ_1 ja σ_2 on väärtusega 0.2. Olgu kahe aktsia vaheline korrelatsioon $\rho_{12} = 0.99$. Kasutades minimaalse dispersiooniga portfelli kaalude saamiseks valemit

$$\omega_1 = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2},$$

leiame riski minimeeriva portfelli kaalud (Zastawniak *et al.*, 2003, lk 103). Teades, et kaalude summa võrdub ühega saadakse:

$$\omega_1 = \frac{0.2^2 - 0.99 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{0.2^2 + 0.2^2 - 2 \cdot 0.99 \cdot 0.2 \cdot 0.2} = 0.5 \Longrightarrow \omega_2 = 0.5.$$

Antud portfelli tulusus on

$$\mu_p = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2 = 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.15.$$

Kui aga võtta standardhälvete väärtusteks

$$\sigma_1 = 0.2, \quad \sigma_2 = \sigma_1 + \epsilon,$$

kus $\epsilon = 0.05$, siis saadakse uued minimaalse riskiga portfelli aktsia osakaalud:

$$\omega_1 = \frac{0.2^2 - 0.99 \cdot 0.2 \cdot 0.25}{0.2^2 + 0.25^2 - 2 \cdot 0.99 \cdot 0.2 \cdot 0.25} = -2.7 \Longrightarrow \omega_2 = 3.7.$$

On näha, et kaalude muutus on märgatavalt suurem, kui standardhälbe muutus. Lisaks muutus oluliselt ka antud portfelli tulusus:

$$\mu_p = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2 = -2.7 \cdot 0.2 + 3.7 \cdot 0.1 = -0.17.$$

Vaadeldes juhte, kus $\epsilon = 0.01$ ja $\epsilon = 0.10$, saadakse aktsiate osakaalud ja tulusused vastavalt $\omega_1 = -1.68$, $\omega_2 = 2.68$ ja $\mu_p = -0.068$ ning $\omega_1 = -1.73$, $\omega_2 = -2.73$ ja $\mu_p = -0.073$.

2.2 Võimalikud lahendused stabiilsete portfellide moodustamiseks

Lahendusi Markowitzi portfelliteooria puudustele on toodud mitmeid. Derpanopoulos (2018) on kirjeldanud kolme üldisemat lähenemist:

1. oodatavate tulususte hindamisvea vähendamine (oodatavaid tulususi kasutatakse etteantud tulususega portfelli ja turuportfelli leidmisel);

2. kovariatsioonimaatriksi ja selle pöördmaatriksi hindamisvea vähendamine;

3. optimeerimisülesande muutmine osakaalude kitsendamise või sihifunktsioonile täiendava liikme lisamise teel.

Aktsia tulususe ja tulususte vahelise kovariatsioonimaatriksi hindamisvea vähendamiseks on võimalik kasutada erinevaid robustseid hinnanguid. Tavaline viis, kuidas aktsia tulusust hinnata, on valimi keskmise tulususe arvutamine kujul

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \mu_t,$$

kus μ_t on aktsia tulusus perioodil t ja T on perioodide arv. Robustse hindamise korral jäetakse osa ekstreemsete väärtustega tulemusi välja ja arvutatakse keskmine ilma nendeta. Robustsed hinnangud vähendavad hinnangu dispersiooni. (Derpanopoulos, 2018)

Kirjanduses on välja pakutud ka optimeerimisel tulususte nihutatud kovariatsioonimaatriksi (*shrinkage covariance matrix*) kasutamist. Sellisel juhul leitakse nihutatud kovariatsioonimaatriks vastavalt valemile

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}} = (1 - \alpha)\mathbf{\Sigma} + \alpha\mathbf{\Sigma}_1,$$

ning näiteks portfelli riski minimeerimisel lahendatakse ülesanne (4) – (5), kus kovariatsioonimaatriks $\mathbf{\Sigma}$ on asendatud nihutatud kovriatsioonimaatriksiga $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$. Parameeter α määratakse andmete põhjal. Maatriksi $\mathbf{\Sigma}_1$ võib ette anda (näiteks ühikmaatriksina või konstrueerida vastavalt ootustele aktsia tulususte kohta) või kasutada maatriksit $\mathbf{\Sigma}_1$, mille hindamisvea varieeruvus on väiksem võrreldes esialgse maatriksiga $\mathbf{\Sigma}$. (Jagannathan *et al.*, 2003)

Järgnevas osas vaadeldakse põhjalikumalt võimalusi portfelli osakaalude robustseks leidmiseks osakaaludele kitsenduse seadmise või sihifunktsioonile kitsendava liikme lisamise teel. Osutub, et sellised ülesanded on taandatavad portfelli riski minimeerimisele juhul, kui kasutatakse nihutatud kovariatsioonimaatriksit sobivalt valitud parameeteri α ja maatriksi $\mathbf{\Sigma}_1$ korral.

2.3 Portfelli osakaalude kitsendamine

Üks võimalus selleks, et vältida väärtpaberite liigset lühikeseks müümist ja stabiliseerida portfelli osakaale üle perioodide, on portfelli aktsiate osakaalude tõkestamine (Jagannathan *et al.*, 2003).

Esmalt vaadeldakse minimeerimisülesannet, kus vektori $\boldsymbol{\omega}$ elemendid on positiivsed ning ülalt tõkestatud parameetriga $\tilde{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T \longrightarrow \min, \tag{14}$$

tingimustel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1, \tag{15}$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{ja} \tag{16}$$

$$\omega_i \leq \tilde{\omega}, \text{ kus } \frac{1}{n} \leq \tilde{\omega} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Minimeerimisülesande (14) – (17) korral on tegemist kumera mittelineaarse planeerimisülesandega, mille üldkuju on

$$\min \left\{ f(\boldsymbol{x}) : h_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, p; g_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \ldots, m; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\},$$

kus funktsioonid $f(\boldsymbol{x})$ ja $h_i(\boldsymbol{x})$, kus $i = 1, \ldots, p$, on kumerad ning funktsioonid $g_i(\boldsymbol{x})$ on esitatavad kujul $g_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$, kus $i = 1, \ldots, m$.

Kumera planeerimisülesande lahendamiseks kasutatakse Lagrange'i funktsiooni kujul

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i h_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}),$$

kus kordajad μ_i ja λ_i on Lagrange'i kordajad. Vektor $\boldsymbol{x}^*$ on kumera planeerimisülesande lahend parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused, mida nimetatakse Karush-Kuhn-Tuckeri (KKT) tingimusteks (Boyd *et al.*, 2004, lk 244):

1. $h_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0, i = 1, \ldots, p;$
2. $g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, i = 1, \ldots, m;$
3. $\mu_i \geq 0, i = 1, \ldots, p;$
4. $\mu_i \cdot h_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, i = 1, \ldots, p;$
5. $\frac{\partial F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_i} = 0, i = 1, \ldots, n.$

Ülesande (14) – (17) Lagrange'i funktsiooni saab esitada kujul

$$F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\lambda}, \lambda_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\omega_i - \tilde{\omega}) + \lambda_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \omega_i\right),$$

kus vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ on Lagrange'i kordajate vektor kitsendusele (16), vektor $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ on Lagrange'i kordajate vektor kitsendusele (17) ning λ_0 on Lagrange'i kordaja kitsendusele (15).

Funktsiooni $F(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}, \lambda_0)$ korral on KKT 5. tingimus kujul

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\omega_j - \lambda_i + \delta_i = \lambda_0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

KKT 3. ja 4. tingimuse saab kokku võtta järgmisteks tingimusteks

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{ja} \quad \lambda_i = 0, \text{ kui } \omega_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

$$\delta_i \geq 0 \quad \text{ja} \quad \delta_i = 0, \text{ kui } \omega_i < \tilde{\omega}, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Järgnevalt näidatakse, et minimeerimisülesanne (14) – (17) vastab portfelli dispersiooni minimeerimisülesandele nihutatud kovariatsioonimaatriksiga $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ sobivalt valitud nihke korral. Selleks tõestatakse esmalt järgmine lemma.

Lemma 1 (Laiendatud Cauchy-Schwarzi võrratus). *Olgu $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ n-mõõtmelise veeruvektorid ning $\boldsymbol{A}$ $(n \times n)$-mõõtmeline positiivselt määratud maatriks. Siis*

$$(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})$$

kusjuures võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui $\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ (või $\boldsymbol{y} = c\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$) suvalise konstandi c korral.

Tõestus. Võrratus on ilmne kui $\boldsymbol{x} = 0$ või $\boldsymbol{y} = 0$. Vaatleme juhtu, kus vektorid $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$ ei ole võrdsed nulliga. Kuna maatriks $\boldsymbol{A}$ on positiivselt määratud ehk tal leidub pöördmaatriks, siis saame defineerida maatriksid $\boldsymbol{A}^{1/2}$ ja $\boldsymbol{A}^{-1/2}$ omaväärtuste λ_i ja normaliseeritud omavektorite $\boldsymbol{e}_i$ kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T, \qquad \boldsymbol{A}^{-1/2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i^T.$$

Nüüd paneme tähele, et

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y}). \tag{21}$$

Kasutades Cauchy-Schwarzi võrratust kujul

$$\left(\sum_{i}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i}^{n} b_i^2\right),$$

saame hinnata

$$\begin{aligned}
\left((\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y})\right)^2 &= \left(\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y}\right)^2 \\
&\leq \left(\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y}\right).
\end{aligned} \tag{22}$$

Kehtivad võrdused $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ ja $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T$, kus $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on suvalised n-mõõtmelised vektorid ning $\boldsymbol{B}$ ja $\boldsymbol{C}$ on $(n \times n)$-mõõtmelised maatriksid, siis

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^{1/2})^T\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y})^2 &\leq (\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^{1/2})^T\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{A}^{-1/2})^T\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{A}^{-1/2}\boldsymbol{y}) \\
&= (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{23}$$

Nüüd saame lemma väite vahetult seostest (21) – (23). □

Teoreem 3. *Olgu* $\boldsymbol{\omega}^+(\boldsymbol{\Sigma})$ *ülesande (14) – (17) lahend. Siis minimaalse dispersiooniga portfell* $\boldsymbol{\omega}^+(\boldsymbol{\Sigma})$ *kuulub nihutatud kovariatsioonimaatriksiga miinimumülesande*

$$\boldsymbol{\omega}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\omega}^T \longrightarrow min, \tag{24}$$

tingimusel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1, \tag{25}$$

lahendite hulka, kus nihutatud kovariatsioonimaatriks $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ *on kujul*

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{\Sigma} + (\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\delta}) - (\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\lambda})$$

ning see on sümmeetriline ja positiivselt poolmääratud. (Jagannathan et al.*, 2003)*

Tõestus. On ilmne, et $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ on sümmeetriline. Peame näitama, et see on ka positiivselt poolmääratud. Olgu

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \delta_1, \ldots, \delta_n, \lambda_0) \equiv (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}, \lambda_0)$$

lahend minimeerimisülesandele (14) – (17). Siis iga vektori $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ korral kehtib

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{x}^T &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{x}^T - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{x}^T = \\
&= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{x}^T - \boldsymbol{x}\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}^T = \\
&= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{u}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}^T + \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{x}^T - \boldsymbol{u}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\lambda}^T - \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{x}^T = \\
&= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T + \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}^T + \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}^T - \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\lambda}^T - \boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\lambda}^T = \\
&= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}^T - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}\boldsymbol{\lambda}^T = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T - 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}^T - \boldsymbol{\delta}^T)),
\end{aligned} \tag{26}$$

kus vektor $\boldsymbol{u}$ on n-mõõtmeline ühikvektor kujul $\boldsymbol{u} = (1, \ldots, 1)$. KKT tingimuse (18) saab esitada kujul

$$\boldsymbol{\lambda}^T - \boldsymbol{\delta}^T = \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \lambda_0\boldsymbol{u}^T$$

ja seega

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}^T - \boldsymbol{\delta}^T) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \lambda_0\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T$$

ning

$$2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\lambda}^T - \boldsymbol{\delta}^T)) = 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \lambda_0\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T) = 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T) - 2\lambda_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)^2. \tag{27}$$

Kuna kovariatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Sigma}$ on positiivselt poolmääratud, siis

$$|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T)| = |(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2})(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\omega}^T)|$$

ja kasutades laiendatud Cauchy-Schwarzi võrratust saame

$$|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}^{1/2})(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\omega}^T)| \leq |(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T)^{1/2}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T)^{1/2}. \tag{28}$$

KKT tingimuste (18) – (20) põhjal saame

$$0 \leq \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}^T - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\delta}^T + \lambda_0\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T = \lambda_0 - \tilde{\omega}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{u}^T \leq \lambda_0, \tag{29}$$

kuna $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}^T = 0$, $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T = 1$ ja $\omega_i = \tilde{\omega}$, kui $\delta_i > 0$.
Võrratuste (28) ja (29) põhjal saame hinnata

$$|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T)| \leq |(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T)^{1/2}(\lambda_0)^{1/2} \tag{30}$$

ning kasutades võrratusi (26), (27) ja (30) saame

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{x}^T &= \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T - 2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T + 2\lambda_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)^2 \\
&\geq \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T - 2|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T| + 2\lambda_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)^2 \\
&\geq \boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T - 2|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T)^{1/2}(\lambda_0)^{1/2} + 2\lambda_0(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)^2 \\
&= \left((\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}^T)^{1/2} - \lambda_0^{1/2}|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)|\right)^2 + (\lambda_0^{1/2}|(\boldsymbol{x}\boldsymbol{u}^T)|)^2,
\end{aligned}$$

millest näeme, et $\boldsymbol{\omega}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\omega}^T \geq 0$ ehk tegemist on positiivselt poolmääratud maatriksiga.
Kuna $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ on positiivselt poolmääratud, siis piisab KKT tingimuse (18) näitamisest, et tõestada, et kaalud $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ on globaalse miinimumülesande (24) – (25) lahendiks:

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{\omega}^T &= \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - (\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{\omega}^T + (\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{\omega}^T \\
&= \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T + \boldsymbol{u}^T\tilde{\omega}(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{u}^T) + \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T \\
&= \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \boldsymbol{\lambda}^T + \tilde{\omega}(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{u}^T)\boldsymbol{u}^T + \boldsymbol{\delta}^T \\
&= (\lambda_0 + \tilde{\omega}\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{u}^T)\boldsymbol{u}^T,
\end{aligned}$$

kus võrdused kehtivad, kuna $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\lambda}^T = 0$ ja $\delta_i(\omega_i - \tilde{\omega}) = 0$ iga i korral ning $\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1$. Viimane võrdus kehtib KKT tingimuse (18) põhjal: $\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - \boldsymbol{\lambda}^T + \boldsymbol{\delta}^T = \lambda_0$.

Seega oleme näidanud, et $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ on sümmeetriline ja positiivselt poolmääratud ning $\boldsymbol{\omega}$ on miinimumülesande (24) – (25) lahendiks. □

Lisaks portfelli iga osakaalu tõkestamisele leidub ka teine võimalus portfelli osakaalusid kitsendada stabiilsemate osakaalude leidmiseks. Portfelli osakaalude kogumile tõkke seadmine annab võimaluse aktsia osakaalusid kui ühte tervikut mõjutada. Selleks on välja pakutud kaalude normide kasutamine, kus portfelli kaalude **1-norm** on kujul

$$||\boldsymbol{\omega}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\omega_i|$$

ja **2-norm** on kujul

$$||\boldsymbol{\omega}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2}$$

(DeMiguel *et al.*, 2007). Portfelli kaalude 1-norm kitsendus tähendab, et kaalude absoluutväärtuste summa on alla teatud tõkke $\delta \geq 1$:

$$||\boldsymbol{\omega}||_1 = \sum_{i=1}^{n} |\omega_i| \leq \delta.$$

Seega on võimalik püstitada ekstreemumülesanne minimaalse dispersiooniga portfelli leidmiseks järgnevalt (DeMiguel *et al.*, 2007):

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T \longrightarrow \min, \tag{31}$$

tingimustel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1, \tag{32}$$

$$||\boldsymbol{\omega}||_1 \leq \delta. \tag{33}$$

Optimeerimisülesanne (31) – (33), kus $\delta = 1$, langeb kokku optimeerimisülesandega, kus lühikeseks müümine on keelatud. Kui $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$, siis kitsendused $\omega_i \geq 0$ on samaväärsed tingimusega $||\boldsymbol{\omega}||_1 \leq 1$, sest lühikeseks müümise lubamisega ei ole võimalik saada portfelli kaalude 1-normi võrdseks ühega.

Kui ülesande (31) – (33) korral $\delta > 1$, siis parameeter δ määrab ära lühikeseks müümise ulatuse portfellis, kuna tingimus (33) on samaväärne tingimusega

$$-\sum_{i,\omega_i<0} \omega_i \leq \frac{\delta - 1}{2},$$

kus vasak pool iseloomustab lühikese positsiooniga aktsiate summaarset osakaalu portfellis ning parem pool näitab, kui suures ulatuses on lühikeseks müümine lubatud.

Aktsiate osakaaludele portfellis on võimalik seada ka piirang kasutades kaalude 2-normi kitsendust. Seega on võimalik püstitada järgmine ekstreemumülesanne minimaalse dispersiooniga portfelli leidmiseks (DeMiguel *et al.*, 2007):

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T \longrightarrow \min, \tag{34}$$

tingimustel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1, \tag{35}$$

$$||\boldsymbol{\omega}||_2^2 \leq \delta, \tag{36}$$

kus tingimus (36) tähendab kaalude ruutude summa ülalt tõkestamist mingi arvuga $\delta > 0$.

On näha, et miinimumülesanne (34) – (36) on lahenduv juhul kui $\delta \geq \frac{1}{n}$. Tõepoolest, kasutades teoreemi 1 tulemust, kus kovariatsioonimaatriks on asendatud ühikmaatriksiga $\boldsymbol{I}$, omab osakaalude 2-norm kujul

$$||\boldsymbol{\omega}||_2^2 = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}^T$$

miinimumväärtust, kui kaalud valida vastavalt valemile

$$\boldsymbol{\omega}^* = \frac{\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{u}^T}{\boldsymbol{u}\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{u}^T} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

ning sel juhul $||\boldsymbol{\omega}||_2^2 = \frac{1}{n}$.

Ka selline ülesanne on samaväärne nihutatud kovariatsioonimaatriksiga minimeerimisülesandele, kui nihutatud kovariatsioonimaatriks $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ on sobivalt valitud.

Teoreem 4. *Olgu $\boldsymbol{\Sigma}$ sümmeetriline ja regulaarne maatriks. Iga $v \geq 0$ korral leidub δ nii, et minimeerimisülesanne (34) – (35), kus kovariatsioonimaatriks on kujul*

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{1+v}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{v}{1+v}\boldsymbol{I},$$

on samaväärne ekstreemumülesandega (34) – (36) (DeMiguel et al.*, 2007).*

Tõestus. Kuna ülesanne (34) – (36) on kumer planeerimisülesanne, siis tal leidub globaalne miinimum KKT tingimuse (18) põhjal.

Siis saame ülesande Lagrange'i funktsiooni kirja panna järgmiselt

$$F_1(\boldsymbol{\omega}, \lambda, v) = \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T - v\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}^T - \lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T.$$

Seega, kui $\delta \geq \frac{1}{n}$, siis leiduvad Lagrange'i kordajad v ja λ nii, et täidetud on järgmised tingimused:

$$2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma} - 2v\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{u} = 0 \tag{37}$$

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1 \tag{38}$$

$$||\boldsymbol{\omega}||_2^2 \leq \delta \tag{39}$$

$$v \geq 0. \tag{40}$$

Ülesande (34) – (35), kus kovariatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Sigma}$ on asendatud nihutatud kovariatsioonimaatriksiga $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$, Lagrange'i funktsioon on kujul

$$F_2(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, v) = \boldsymbol{\omega}\left(\frac{1}{1+v}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{v}{1+v}\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\omega}^T - \lambda_1\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T.$$

Kuna maatriks $\boldsymbol{\Sigma}$ on positiivselt määratud, siis on ka $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ positiivselt määratud ning ülesandel leidub globaalne miinimumkoht, mille määrab ära KKT tingimus (18). Miinimumkoha saame leida osakaalude järgi osatuletise võrdsutamisel nulliga, mis on piisavaks funktsiooni kumeruse tõttu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2(\boldsymbol{\omega}, \lambda_1, v)}{\partial \boldsymbol{\omega}} =& \frac{\partial \left(\boldsymbol{\omega}\left(\frac{1}{1+v}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{v}{1+v}\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\omega}^T - \lambda_1 \boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T\right)}{\partial \boldsymbol{\omega}} \\ =& \left(\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{1+v}\sum_{i,j}^n \omega_i\omega_j\sigma_{ij} - \frac{v}{1+v}\sum_{i,j}^n \omega_i\omega_j - \lambda_1\sum_i^n \omega_i\right)}{\omega_k}\right]_{k=1}^n\right)^T \\ =& \left(\left[\frac{2}{1+v}\sum_{i,j}^n \omega_i\sigma_{ik} - \frac{2v}{1+v}\sum_i^n \omega_i - \lambda_1\right]_{k=1}^n\right)^T \\ =& \frac{2}{1+v}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma} - \frac{2v}{1+v}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{I} - \lambda_1\boldsymbol{u} = 0\end{aligned}$$

ehk

$$2\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma} - 2v\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{I} - (1+v)\lambda_1\boldsymbol{u} = 0. \tag{41}$$

Võttes $\lambda = \lambda_1(1+v)$, siis näeme, et mingi $v \geq 0$ korral leidub $\delta \geq 0$ nii, et ülesanded (37) ja (41) on samaväärsed. Seega kovariatsioonimaatriksiga $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ ülesande (34) – (35) lahend on võrdne ülesande (34) – (36) lahendiga. $\square$

2.4 Regulariseeritud optimeerimine

Üks võimalus stabiilsemate osakaalude leidmiseks on täiendava liidetava lisamine sihifunktsioonile, mida nimetatakse **regulariseeritud optimeerimiseks**. Giannone *et al.* (2008) on oma artiklis vaadelnud järgmist minimeerimisülesannet portfelli kaalude leidmiseks:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T + \tau||\boldsymbol{\omega}||_1 \longrightarrow \min, \tag{42}$$

tingimusel

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T = 1, \tag{43}$$

kus $\tau > 0$ on regulariseeriv parameeter. Parameeter τ annab võimaluse määrata kui suures osas 1-norm muudab esialgset sihifunktsiooni.

Regulariseeriva parameetri lisamisel sihifunktsioonile on erinevaid võimalikke positiivseid omadusi (Giannone *et al.*, 2008):

1. Kaalude 1-norm liikme lisamine sihifunktsioonile annab hõredama kaalude vektori ehk portfelli kuulub väike arv erinevaid aktsiaid. See on oluline kauplemiskulude vähendamiseks.

2. Parameetriga τ saab kontrollida lühikeseks müümise ulatust portfellis. Mida suurem on parameeter τ, seda suurem on ka lühikese positsiooni osakaal portfellis.

3. Lisaliikme kasutamine aitab vähendada kovariatsioonimaatriksi $\boldsymbol{\Sigma}$ hindamisel tekkinud vigade mõju ning muudab lahendi stabiilsemaks.

Ekstreemumülesande (42) – (43) lahendamiseks saab kasutada Lagrange'i kordajate meetodit, kus Lagrange'i funktsioon on kujul

$$F(\boldsymbol{\omega}, \lambda) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T + \tau||\boldsymbol{\omega}||_1 - \lambda\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T,$$

Siis KKT tingimused on järgmised

$$\omega_i\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n}\omega_j\sigma_{ij} - \lambda = -\tau, \text{ kui } \omega_i > 0, \tag{44}$$

$$\omega_i\sigma_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n}\omega_j\sigma_{ij} - \lambda = \tau, \text{ kui } \omega_i < 0, \tag{45}$$

$$|\sum_{i\neq j}^{n}\omega_j\sigma_{ij} - \lambda| \leq \tau, \text{ kui } \omega_i = 0, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{\omega}^T - 1 = 0. \tag{47}$$

Parameetrit τ võib vaadelda parameetrina, mis reguleerib aktsiate arvu portfellis. Kui τ võtta suurem, siis on suurem tõenäosus, et $\omega_i = 0$ korral osatuletiste avaldis satub intervalli $\lambda - \tau \leq \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T\right)}{\partial\omega_i} = \sum_{i\neq j}^{n}\omega_j\sigma_{ij} \leq \lambda + \tau$ ning rohkem aktsiaid jäetakse portfellist välja. Lisaks sellele on τ suurendades väiksem tõenäosus, et võrdus (45) kehtib, kuna avaldise $\lambda+\tau$ väärtus suureneb. Seega parameetrit τ suurendades lisatakse vähem negatiivse kaaluga aktsiaid portfelli. (Dai *et al.*, 2018)

Eeltoodust saab teha järgmise järelduse. Olgu miinimumülesande (42) – (43) regulariseerivate parameetrite τ_1 ja τ_2 korral vastavalt lahendid $\boldsymbol{\omega}_1$ ja $\boldsymbol{\omega}_2$. Siis juhul $||\boldsymbol{\omega}_1|| \geq ||\boldsymbol{\omega}_2||$ kehtib võrratus

$$(\tau_1 - \tau_2)(||\boldsymbol{\omega}_2||_1 - ||\boldsymbol{\omega}_1||_1) \geq 0.$$

Tõepoolest, kasutades vektorite $\boldsymbol{\omega}_1$ ja $\boldsymbol{\omega}_2$ miinimumkoha omadusi, saame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_1^T + \tau_1||\boldsymbol{\omega}_1||_1 &\leq \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_2^T + \tau_1||\boldsymbol{\omega}_2||_1 \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_2^T + \tau_2||\boldsymbol{\omega}_2||_1 + (\tau_1 - \tau_2)||\boldsymbol{\omega}_2||_1 \\
&\leq \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_1^T + \tau_2||\boldsymbol{\omega}_1||_1 + (\tau_1 - \tau_2)||\boldsymbol{\omega}_2||_1 \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}_1^T + \tau_1||\boldsymbol{\omega}_1||_1 + (\tau_1 - \tau_2)(||\boldsymbol{\omega}_2||_1 - ||\boldsymbol{\omega}_1||_1).
\end{aligned}$$

Sellest järeldub, et

$$(\tau_1 - \tau_2)(||\boldsymbol{\omega}_2||_1 - ||\boldsymbol{\omega}_1||_1) \geq 0 \tag{48}$$

ehk kui $\tau_1 \geq \tau_2$, siis $||\boldsymbol{\omega}_2||_1 \geq ||\boldsymbol{\omega}_1||_1$. On lihtne näha, et kui kõik vektori $\boldsymbol{\omega}_1$ elemendid on mittenegatiivsed ja mõned vektori $\boldsymbol{\omega}_2$ elemendid on negatiivsed, siis $||\boldsymbol{\omega}_2||_1 \geq ||\boldsymbol{\omega}_1||_1 = 1$. Järelikult suure τ väärtuse korral saame minimaalse riskiga portfelli, kus lühikeseks müümine on keelatud. (Dai *et al.*, 2018)

Artiklis *Sparse and stable Markowitz portfolios* (2008) on vaadeldud minimeerimisülesannet, kus regulariseeritud optimeerimisele on lisatud 2-normi kitsendus:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T + \tau_1||\boldsymbol{\omega}||_1 \longrightarrow \min, \tag{49}$$

tingimustel

$$\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T = 1, \tag{50}$$

$$||\boldsymbol{\omega}||_2^2 \leq \delta \tag{51}$$

$$\delta \geq \frac{1}{n}. \tag{52}$$

Järgnevaks näidatakse, et selle ülesande saab taandada ülesandele kujul (42) – (43), kus esialgne kovariatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Sigma}$ on asendatud nihutatud kovariatsioonimaatriksiga $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$.

Teoreem 5. *Olgu $\boldsymbol{\Sigma}$ regulaarne ja positiivselt määratud maatriks. Iga $v \geq 0$ korral leidub δ ja $\tau_1 = \tau(1+v)$ nii, et minimeerimisülesande (42) – (43), kus kovariatsioonimaatriks on asendatud nihutatud kovariatsioonimaatriksiga $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ kujul*

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{1+v}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{v}{1+v}\boldsymbol{I}, \tag{53}$$

lahend langeb kokku ülesande (49) – (52) lahendiga.

Tõestus. Kui valimi andmete põhjal moodustatud kovariatsioonimaatriksi $\boldsymbol{\Sigma}$ asendada maatriksiga $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ valemist (53), siis Lagrange'i funktsioon miinimumülesande (42) – (43) jaoks on kujul

$$F_1(\boldsymbol{\omega}, \lambda, v) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\left(\frac{1}{1+v}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{v}{1+v}\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\omega}^T + \tau||\boldsymbol{\omega}||_1 - \lambda\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T.$$

Lisaks paneme tähele, et Lagrange'i funktsioon optimeerimisprobleemile (49) – (52) on kujul

$$
\begin{aligned}
F_2(\boldsymbol{\omega}, \lambda, v) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega}^T + \tau_1||\boldsymbol{\omega}||_1 - \lambda\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T + \frac{v}{2}(||\boldsymbol{\omega}||_2^2 - \delta) = \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\Sigma} + v\boldsymbol{I})\boldsymbol{\omega}^T + \tau_1||\boldsymbol{\omega}||_1 - \lambda\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T - \frac{v}{2}\delta = \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\left(\frac{1}{1+v}\boldsymbol{\Sigma} + \frac{v}{1+v}\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{\omega}^T + \frac{\tau_1}{1+v}||\boldsymbol{\omega}||_1 - \frac{\lambda}{1+v}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{u}^T \\
&- \frac{v}{2(1+v)}\delta.
\end{aligned}
$$

Kuna maatriks $\boldsymbol{\Sigma}$ on regulaarne ja positiivselt määratud, maatriks $\boldsymbol{I}$ on positiivselt määratud ning $v \geq 0$, siis $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ on positiivselt määratud maatriks. Osakaalude 1-normi kumeruse tõttu leidub ülesandel (42) – (43) nihutatud kovariatsioonimaatriksiga $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ globaalne miinimumkoht, mille määrab ära KKT tingimus (18).

Võrreldes kahte Lagrange'i funktsiooni $F_1(\boldsymbol{\omega}, \lambda, v)$ ja $F_2(\boldsymbol{\omega}, \lambda, v)$, kus funktsioonis $F_1(\boldsymbol{\omega}, \lambda, v)$ võtame parameetri $\tau = \frac{\tau_1}{1+v}$. Leides Lagrange'i funktsioonide osatuletised osakaalude vektori $\boldsymbol{\omega}$ järgi ning võrdsustades need nulliga, näeme, et kaalude $\boldsymbol{\omega}$ võrrandid langevad kokku ja ülesannete lahendid on samad.

$\square$

3 Portfelliteooria rakendus Balti aktsiaturu näitel

Käesoleva peatüki eesmärk on võrrelda eelnevalt kirjeldatud portfellide koostamise meetodeid Balti aktsiaturu andmete põhjal.

3.1 Portfellide koostamise meetodid

Järgnevalt tutvustatakse erinevate optimeerimismeetodite abil saadud osakaaludega aktsiaportfelle, mida hakatakse hiljem portfellide tulususte, tulususte standardhälbe ja muude näitajate alusel võrdlema. Töös vaadeldakse järgmisi portfelle:

1. Võrdsete aktsiate osakaaludega portfell (edaspidi võrdsete kaaludega), kus portfelli osakaalud on kujul $\omega_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$, kus n on vaadeldud aktsiate arv.

2. Riski minimeeriv portfell (edaspidi riski min. portfell), mille osakaalud leitakse miinimumülesande (4) – (5) lahendamisel.

3. Turuportfell (TP), mille osakaalude leidmiseks lahendatakse ülesanne (12) – (13).

4. Etteantud tulususe juures minimaalse riskiga portfell (edaspidi etteantud tul. portfell), mille osakaalud leitakse ülesande (9) – (11) lahendamisel, kus etteantud tulusus μ_p on viieaastase ajaloolise perioodi põhjal leitud võrdsete kaaludega portfelli tulusus.

5. Riski minimeeriv portfell, kus lühikeseks müümine on keelatud (edaspidi 1-norm tõkkega $\delta = 1$); tegemist on optimeerimisülesandega (31) – (33) samaväärse ülesandega, kui 1-normi tõkkeks võtta $\delta = 1$.

6. Turuportfell lühikeseks müümise keeluga (edaspidi turuportfell (TP) lüh. keeluga), mille osakaalude leidmiseks lahendatakse ülesanne (12) – (13) lisatingimustega $\omega_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$.

7. Riski minimeeriv portfell, kus portfelli osakaalude 1-norm on tõkestatud arvuga δ (edaspidi 1-norm $\leq \delta$) ning kaalud leitakse lahendades ülesannet (31) – (33). Töös vaadeldakse juhte, kus $\delta = 1.4$ ja $\delta = 2$, mis tähendavad vastavalt portfellis lühikese positsiooni lubamist 20% ja 50% ulatuses portfelli väärtusest.

8. Riski minimeeriv portfell, kus portfelli osakaalude 2-normi on tõkestatud arvuga δ_2 (edaspidi 2-norm $\leq \delta_2$) ning kaalud leitakse lahendades ülesannet (34) – (36). Kuna töös kasutatakse portfellide moodustamiseks andmestikku, kus on 45 aktsiat ehk tõkke δ_2 miinimumväärtus on $\frac{1}{45}$, siis vaadeldakse juhte, kus δ_2 on

väärtustega $0.05, 0.10, 0.30$ ehk vastavalt ligikaudu 2, 4 ja 14 korda suuremad miinimumväärtusest.

9. Riski minimeeriv portfell, kus optimeerimise sihifunktsioonile on lisatud regulariseeriv liige parameetriga τ (edaspidi regulariseeritud portfell), mille kaalud leitakse ülesande (42) – (43) lahendamisel. Parameetri τ väärtused on valitud selliselt, et suurima väärtusega $\tau = 0.01$ korral on portfelli kaalude absoluutväärtuste summa ligikaudu võrdne ühega. Töös vaadeldakse ka juhte, kus τ väärtused on suurimast väärtusest vastavalt 10, 100 ja 1000 korda väiksemad.

10. Riski minimeeriv portfell, kus optimeerimise sihifunktsioonile on lisatud regulariseeriv parameeter τ ja osakaalude 2-normi on tõkestatud arvuga δ_2 (edaspidi tõkestatud ja regulariseeritud portfell), mille kaalud leitakse ülesande (49) – (52) lahendamisel. Parameetrid δ_2 ja τ omavad samasuguseid väärtuseid nagu on kirjeldatud 8-ndas ja 9-ndas loetelupunktis.

3.2 Näitajad portfellide võrdlemiseks

Lisaks portfelli tulususele ja tulususe standardhälbele kasutatakse portfellide hindamiseks järgmisi näitajaid, mis iseloomustavad portfelli stabiilsust ja hõredust.

Sharpe'i suhtarv võrdleb investeeringu tulusust ja riski ning leitakse valemiga

$$S_p = \frac{\mu_p - r_v}{\sigma_p},$$

kus riskivabaks tulumääraks r_v on võetud 0.2%. Mida suurem on portfelli S_p väärtus, seda paremaks võime tulu ja riski suhte mõttes portfelli pidada. Sharpe'i suhtarv ei ole aga sobilik näitaja, kui $\mu_p - r_v < 0$. Näiteks, kui kahe portfelli Sharpe'i suhtarvu lugejad on negatiivsed ja võrdsed, siis on suurem Sharpe'i suhtarv portfellil, mille risk on suurem. Seega sel juhul ei näita suurem Sharpe'i suhtarv portfelli headust ning selle asemel kasutatakse korrigeeritud Sharpe'i suhtarvu kujul

$$S_p' = \frac{\mu_p - r_v}{\sigma_p^{\frac{\mu_p - r_v}{|\mu_p - r_v|}}}.$$

Kui $\mu_p - r_v \geq 0$, siis $S_p = S_p'$ ja kui $\mu_p - r_v < 0$, siis $S_p' = \sigma_p(\mu_p - r_v)$. (Israelsen *et al.*, 2005)

Portfelli kaalude absoluutväärtuste summa **GE** (*Gross Exposure*),

$$GE = \sum_{i=1}^{n} |\omega_i|$$

iseloomustab portfelli aktsiapositsioonide lühikeseks müümise ulatust. Kuna portfelli kaalude summa on alati võrdne ühega, siis $GE > 1$ viitab võimendusega portfellile. Kui portfelli GE väärtus on näiteks 2.5, siis see tähendab, et lühikeseks müümise osakaal portfellis on 75% portfelli maksumusest. Madalam GE iseloomustab madalama riskiga portfelli. (Derpanopoulos, 2018)

Portfelli aktsiate osakaalude muutumist ajas iseloomustab näitaja $\boldsymbol{TO}$ (*Turnover*). Näitaja TO leitakse valemiga

$$TO = \sum_{i=1}^{n} |\omega_{i,t} - \omega_{i,t-1}|,$$

kus $\omega_{i,t}$ on i-nda aktsia osakaal vaadeldaval perioodil ja $\omega_{i,t-1}$ on i-nda aktsia osakaal vaadeldavale perioodile eelnenud perioodil. Näitajat TO ei saa vahetult kasutada kauplemistasude hindamiseks, kuid madalam TO väärtus tähendab üldjuhul madalamaid kauplemiskulusid portfellide koostamisel. (Derpanopoulos, 2018)

Herfindahl-Hirschman pöördindeks ($\boldsymbol{HH^{-1}}$ või $\boldsymbol{IHH}$) on portfelli aktsiate osakaalude ruutude summa pöördväärtus kujul

$$IHH = HH^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{N} \omega_i^2\right)^{-1}.$$

Indeksiga IHH hinnatakse portfelli mitmekesisust ja kontsentratsiooni. Kõrgem IHH viitab aktsiate ekstreemsete väärtustega osakaalude puudumisele ja suuremale hajutatusele portfellis. (Derpanopoulos, 2018)

3.3 Aktsiate tulusus ja standardhälve ajalooliste andmete põhjal

Erinevate optimeerimiste sisenditena on tarvis teada aktsiate tulususte vektorit ja aktsiate tulususte vahelist kovariatsioonimaatriksit. Antud näitajatele leitakse hinnangud ajalooliste andmete põhjal, kuna eeldatakse, et aktsiate hindade käitumise põhjal minevikus, saab prognoosida nende käitumist tulevikus (Sander, 1999, lk 4).

Ajalooliste andmete põhjal leitakse iga aktsia kuised tulusused valemiga

$$R_{i,j} = \frac{S_{i,j} - S_{i-1,j}}{S_{i,j}},$$

kus $R_{i,j}$ on j-nda aktsia i-nda kuu tulusus, $S_{i,j}$ ja $S_{i-1,j}$ on vastavalt j-nda aktsia i-nda ja $(i-1)$-nda kuu sulgemishinnad (Sander, 2003, lk 29).

Aktsiate kuiste tulususte põhjal arvutatakse keskmine tulusus valitud perioodil valemiga

$$R_j = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_{i,j},$$

kus R_j on j-nda aktsia keskmine kuine tulusus kogu perioodil, T on kuude arv vaadeldavas perioodis.

Keskmise kuise tulususe standardhälve iga aktsia kohta on leitav valemiga

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(R_{i,j} - R_j)^2}.$$

Lisaks on võimalik leida ajalooliste andmete põhjal aktsiate tulususte vaheline kovariatsioon valemiga

$$Cov(R_j, R_k) = \sum_{i=1}^{T}\frac{(R_{ij} - R_j)(R_{ik} - R_k)}{T-1},$$

kus $Cov(R_j, R_k)$ on j-nda ja k-nda aktsia tulususte vaheline kovariatsioon, R_{ij} on j-nda aktsia kuine tulusus i-ndal kuul, R_{ik} on k-nda aktsia kuine tulusus i-ndal kuul, R_j on j-nda aktsia keskmine kuine tulusus, R_k on k-nda aktsia keskmine kuine tulusus ja T on kuude arv vaadeldaval perioodil. (Sander, 1999, lk 52)

3.4 Balti aktsiaturg

Analüüsi koostamiseks kasutatakse Balti aktsiaturul[2] olevaid aktsiaid nii põhi- kui ka lisanimekirjast. Balti aktsiaturul on põhinimekirjas 34 ja lisanimekirjas 28 aktsiat. Valimisse valiti kõik aktsiad, millel olid olemas kõik kuised sulgemishinnad perioodil detsember 2009 kuni detsember 2019. Andmestikus on kokku 45 aktsiat, millest 23 aktsiat kuulub põhinimekirja ning 22 aktsiat kuulub lisanimekirja. (Lisa 1, Tabel 4)

Balti aktsiaturu iseloomustamiseks on tabelis 1 toodud kõikide valimisse kuuluvate aktsiate keskmine kuine tulusus, keskmine kuiste tulususte standardhälve ja keskmine Sharpe'i korrigeeritud suhtarv erinevatel aastatel.

Võrreldes teiste aastatega toimus aastal 2010 kaks märkimisväärset muutust aktsiate hindades, mis põhjustasid suure standardhälbe $\sigma = 0.9856$ ja tulususe $\mu = 0.1176$ (Tabel 1). Ettevõte Arco Vara tühistas aasta alguses osa oma aktsiakapitalist ning aktsia hind tõusis ligi 2000%. Lisaks tõusis oluliselt ettevõtte Rīgas autoelektroaparātu

[2]Andmed on võetud Balti aktsiaturu koduleheküljelt `www.nasdaqbaltic.com`

rūpnīca aktsia hind aasta teises pooles. Kuna antud aasta mõjutab aktsia tulususte ja kovariatsioonide hindamist ainult kahel hindamisperioodil kümnest (kui hindamisperioodi pikkus on 5 aastat), jäeti aktsiad valimisse.

Üheks edukaimaks aastaks võib nimetada aastat 2017. Sel aastal oli aktsiate keskmine kuine tulusus $\mu = 0.03$, keskmine tulususte standardhälve $\sigma = 0.1646$. Sharpe'i korrigeeritud suhtarv oli parim üle kõikide aastate. (Tabel 1)

Aastate 2011 ja 2018 keskmised kuised tulusused on mõlemal juhul negatiivsed, vastavalt $\mu = -0.0110$ ja $\mu = -0.0148$. Kuiste tulususte keskmised standardhälbed antud aastatel olid $\sigma = 0.1197$ ja $\sigma = 0.0938$, mis on võrreldes teiste aastatega madalaimad. Sharpe'i korrigeeritud suhtarvud aastatel 2011 ja 2018 olid ligikaudu võrdsed ning kõige madalamad üle kõikide aastate, vastavalt $S_p' = -0.0013$ ja $S_p' = -0.0014$. Neid aastaid võib tulususe ja Sharpe'i suhtarvu mõttes lugeda kõige vähem edukamateks aastateks. (Tabel 1)

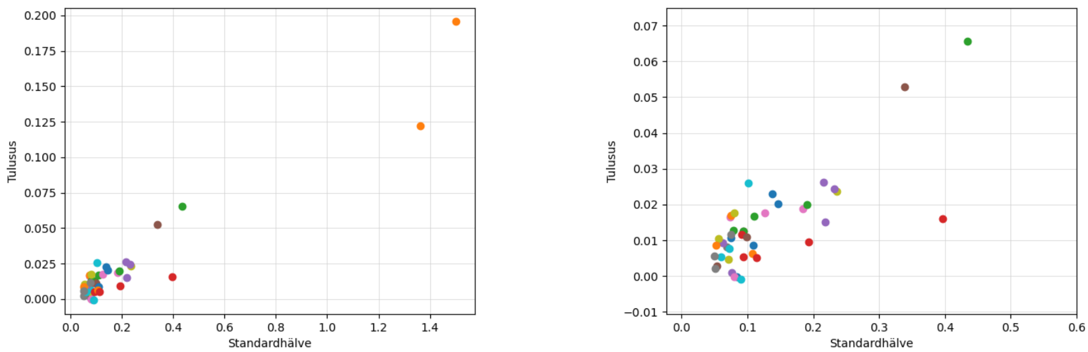
Tabel 1. Balti aktsiate keskmised kuised tulusused, kuiste tulususte keskmised standardhälbed ja keskmised Sharpe'i korrigeeritud suhtarvud erinevatel aastatel

Aasta	$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{S_p'}$
2010	0.1176	0.9856	0.1192
2011	-0.0110	0.1197	-0.0013
2012	0.0178	0.1288	0.1372
2013	0.0137	0.1152	0.1177
2014	0.0091	0.1562	0.0569
2015	0.0031	0.1081	0.0270
2016	0.0340	0.2735	0.1237
2017	0.0300	0.1646	0.1812
2018	-0.0148	0.0938	-0.0014
2019	0.0204	0.2388	0.0849

Valimisse kuuluvate üksikaktsiate keskmisi kuiseid tulususi ja standardhälbeid üle kõikide aastate iseloomustab joonis 2, kus vasakul pool on kõik valimisse kuuluvad aktsiad (Lisa 1 Tabel 4) ja paremal pool on eemaldatud valimist ettevõtete Arco Vara ja Rīgas autoelektroaparātu rūpnīca aktsiad, mille keskmised kuised tulusused ja nende standardhälbed olid eespool toodud põhjustel teistest aktsiatest oluliselt suuremad.

Valimis olevate üksikute aktsiate keskmiste kuiste tulususte ja tulususte keskmiste standardhälvete paiknemine joonisel 2 kinnitab, et suurema tulususega kaasneb tavaliselt ka suurem risk ehk standardhälve.

Põhinimekirjas (v.a ettevõtte Arco Vara aktsia) on suurima keskmise kuise tulususega 0.0230 üle kõikide aastate ettevõtte SAF Tehnika aktsia, mille keskmine standardhälve on 0.1373. Väikseima keskmise kuise tulususega on ettevõtte Nordecon aktsia, mille keskmine tulusus üle kõikide aastate on −0.0003 ja selle keskmine standardhälve on 0.0834.



Joonis 2. Balti aktsiate keskmised kuised tulusused ja tulususte standardhälbed aastatel 2010 – 2019

Lisanimekirjas (v.a ettevõtte Rīgas autoelektroaparātu rūpnīca aktsia) on suurima keskmise kuise tulususega üle kõikide aastate 0.0528 ettevõtte Kurzemez atslega 1 aktsia, mille keskmine standardhälve on 0.3383. Väikseima keskmise kuise tulususega üle kõikide aastate on ettevõtte Nordic Fiberboard aktsia, mille keskmine kuine tulusus ja tulususe keskmine standardhälve on vastavalt −0.0008 ja 0.0900.

3.5 Optimaalsete portfellide võrdlemine

Erinevatel meetoditel koostatud portfelle võrreldakse kümnel erineval perioodil ehk võrdlusperioodil. Võrdlusperioodi pikkuseks on kuus kuud ning esimene periood on jaanuar 2015 – juuni 2015, teine periood juuli 2015 – detsember 2015 jne kuni viimase võrdlusperioodini juuli 2019 – detsember 2019. Erinevatel meetoditel portfelli kaalude leidmiseks kasutatakse nn hindamisperioode, mis on võrdlusperioodidele eelnenud perioodid. Käesolevas töös vaadeldi kahe erineva hindamisperioodi pikkusega saadud tulemusi, kahe- ja viieaastase hindamisperioodiga. Hindamisperioodi kuu sulgemishindade põhjal arvutati aktsiate kuised tulusused, kuiste tulususte standardhälbed ja tulususte kovariatsioonimaatriks. Hinnatud näitajate abil leiti erinevatel meetoditel (kirjeldatud peatükis 3.1) aktsiate osakaalud portfellis järgnevaks võrdlusperioodiks. Hinnatud osakaalude ja võrdlusperioodide aktsiate hindadega arvutati portfellidele tulusus, tulususe standardhälve ja peatükis 3.2 toodud näitajad.

Hindamisperioodiga 5 aastat erinevatel meetoditel koostatud portfellide keskmisi näitajaid üle kõigi võrdlusperioodide iseloomustab tabel 2. Portfelle iseloomustavad kõikide perioodide puhul leitud portfellide keskmised näitajad: tulusus, tulususe standardhälve, Sharpe'i korrigeeritud suhtarv, GE, TO, HH pöördindeks ja aktsiate arv. Portfelli keskmine aktsiate arv N on arvutatud igal perioodil portfelli kuulunud aktsiate arvu keskmisena, kus portfelli valiti aktsiad, mille osakaalu absoluutväärtus oli suurem või võrdne kui 0.001.

Tabel 2. Erinevatel meetoditel hindamisperioodiga 5 aastat koostatud portfellide keskmised näitajad: tulusus (μ), standardhälve (σ), korrigeeritud Sharpe'i suhtarv (S_p'), GE, TO, HH pöördindeks (IHH) ja aktsiate arv (N)

Portfell	μ	σ	S_p'	GE	TO	IHH	N
Võrdsed kaalud	0.0145	0.0307	0.5599	1.00	0	45.00	45.0
Riski min.	-0.0018	0.0419	0.2953	2.79	1.811	3.21	44.5
Turuportfell	1.6970	148.1106	-4817.24	10802.15	13382.07	0.54	44.9
Etteantud tul.	-0.0016	0.0454	0.2695	3.01	2.038	2.95	44.5
1-norm ≤ 1	0.0057	0.0244	0.4106	1.01	0.451	10.78	22.8
TP lüh. keeld	0.0106	0.0405	0.3795	1.00	0.535	10.98	19.9
1-norm ≤ 1.4	0.0043	0.0272	0.4166	1.40	0.697	7.69	32.5
1-norm ≤ 2	0.0006	0.0368	0.2895	2.00	1.133	4.86	40.0
2-norm≤ 0.05	0.0064	0.0259	0.5769	1.19	0.350	20.00	44.3
2-norm≤ 0.10	0.0043	0.0299	0.4513	1.59	0.631	10.00	44.1
2-norm≤ 0.30	-0.0004	0.0395	0.3045	2.52	1.479	3.71	44.6
Regul. $\tau = 0.00001$	-0.0012	0.0397	0.2972	2.47	1.503	3.83	42.9
Regul. $\tau = 0.0001$	0.0030	0.0295	0.3899	1.58	0.778	6.91	34.1
Regul. $\tau = 0.001$	0.0056	0.0246	0.3955	1.01	0.450	10.76	21.8
Regul. $\tau = 0.01$	0.0060	0.0244	0.3950	1.00	0.417	10.99	20.2

Varasemalt on näiteid, et klassikalistel meetoditel koostatud portfellide (riski minimeeriv, turuportfell, etteantud tulususega) puhul tekivad ekstreemsete väärtustega osakaalud (Green *et al.*, 1992), kuid antud analüüsi käigus ekstreemsete väärtustega osakaale ei tekkinud v.a turuportfelli korral. Sellele vaatamata ei ole Markowitzi portfelliteooria lähenemine hea, kuna keskmised tulusused on negatiivsed ning tulususte standardhälbed kõrgeimad (Tabel 2). Näitaja GE väärtused iseloomustavad lühikeseks müümise osakaalu klassikalistes portfellides nende maksumuse ulatuses või suuremalt. Praktikas pole üldiselt lühikeseks müümine nii suures osas lubatud, kui antud portfellid seda nõuavad. Portfellide Sharpe'i korrigeeritud suhtarvud on võrreldes teiste portfellidega madalaimad. Seega analüüsi tulemustes kinnitub, et klassikalistel meetoditel koostatud portfellid ei ole praktikas mõistlikud.

Parima keskmise tulususega portfell on võrdsete kaaludega portfell, mille keskmine portfelli tulusus on 0.0145. See-eest võrdsete kaaludega portfelli Sharpe'i korrigeeritud suhtarv S_p' ei ole kõige suurema väärtusega, selle väärtus 0.5599 on paremuselt teine. Võrdsete kaaludega portfelli parim tulusus oli ootuspärane, kuna kirjanduses on näiteid võrdsete kaaludega moodustatud portfelli võimest moodustada parima tulususega portfelle (DeMiguel *et al.*, 2009). Sellele järgneb turuportfell lühikeseks müümise keeluga, mille keskmine portfelli tulusus on 0.0106. Lühikeseks müümise keeluga turuportfelli Sharpe'i korrigeeritud suhtarv jääb keskmisele tasemele (Tabel 2). Lisaks saavutati lühikeseks müümise keeluga turuportfellis hõredus ning stabiilsus: keskmine aktsiate arv portfellis langes 20 aktsiani; näitaja $TO = 0.535$ iseloomustab osakaalude stabiilsena püsimist perioodide vahel ja näitaja $IHH = 10.98$ iseloomustab portfelli aktsiate hajutatust.

Võib öelda, et portfellid 1-normi kitsendusega moodustasid keskmiselt paremaid tulemusi, mida väiksem oli tõkke δ väärtus. Kuna tõke δ reguleerib lühikeseks müümise osakaalu portfellis, on tegemist loogilise tulemusega. Tavaliselt on lühikeste positsioonide kaasamine riskantsem ning nõuab suuremat aktsiate arvu portfellis. Osakaalude 1-normi tõkkega δ puhul moodustub parim portfell, kui $\delta = 1$, mis keelab portfellis lühikeseks müümise täielikult. Antud portfelli Sharpe'i korrigeeritud suhtarv on suurem kui lühikeseks müümise keeluga turuportfellil. Lisaks on tõkkega $\delta = 1$ portfellil väike aktsiate arv ja näitaja TO väärtus ning indeksi IHH kõrge väärtus. Seega saavutati 1-normi kitsendusega $\delta = 1$ portfellis nii hõredus kui ka stabiilsus, kuid ei suudetud ületada tulususes ja Sharpe'i korrigeeritud suhtarvus võrdsete kaaludega portfelli. (Tabel 2)

Kirjanduses on mitmeid näiteid regulariseeritud portfellide (Giannone *et al.*, 2008) ja kaalude normide kitsendustega portfellide (DeMiguel *et al.*, 2007) võimest moodustada võrdsete kaaludega portfellidega sarnaseid või isegi paremaid tulususi ja Sharpe'i korrigeeritud suhtarve. Käesolevas töös saavutati 2-normi kitsendusega $\delta_2 = 0.05$ parem keskmine Sharpe'i korrigeeritud suhtarv kui võrdsete kaaludega portfellil, vastavalt 0.5769 ja 0.5599. Tegemist on ka stabiilse portfelliga, kus näitaja $TO = 0.35$, kuid ei saavutatud portfelli hõredust, portfelli kuulub keskmiselt 44 aktsiat ehk peaaegu kõik vaadeldud aktsiad. (Tabel 2) Ka varasemad uuringud näitavad, et 2-normi kitsendustega saadud portfellid on stabiilsed, kuid mitte hõredad (DeMiguel *et al.*, 2007).

Tabelist 2 saab tähele panna, et analüüsi tulemused kinnitavad regulariseeritud portfelli kohta näidatud teoreetilist tulemust, et suurema regulariseeriva parameetri τ korral kuulub portfelli järjest väiksem arv erinevaid aktsiaid. Regulariseeriva parameetri $\tau = 0.01$ puhul on tegemist stabiilse ($TO = 0.417$, $IHH = 10.99$) ja hõreda ($N = 20.2$) portfelliga, mille keskmine tulusus 0.0060 ja Sharpe'i korrigeeritud suhtarv 0.395 jäävad kõikidest portfellidest headuses esimeste hulka.

Hindamisperioodiga 5 aastat erinevate tõkestavate ja regulariseerivate parameetritega koostatud portfellide keskmisi näitajaid üle kõikide perioodide iseloomustab tabel 3. Tabelis on toodud portfellide keskmised kuised tulusused, keskmised standardhälbed, keskmised Sharpe'i korrigeeritud suhtarvud, keskmised GE, TO, IHH väärtused ning keskmine aktsiate arv N.

Tabel 3. Hindamisperioodiga 5 aastat tõkkega δ_2 ja regulariseeritud parameetriga τ leitud portfellide keskmised näitajad: tulusus (μ), standardhälve (σ), Sharpe'i korrigeeritud suhtarv (S_p'), GE,TO, HH pöördindeks (IHH), aktsiate arv (N)

Parameetrid	$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{S_p'}$	$\boldsymbol{GE}$	$\boldsymbol{TO}$	$\boldsymbol{IHH}$	$\boldsymbol{N}$
$\tau = 0.00001$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0064	0.0259	0.5777	1.18	0.350	19.99	44.0
$\tau = 0.00001$ ja $\delta_2 = 0.10$	0.0042	0.0295	0.4506	1.56	0.628	9.99	42.9
$\tau = 0.00001$ ja $\delta_2 = 0.30$	-0.0005	0.0387	0.3024	2.35	1.345	4.10	43.0
$\tau = 0.0001$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0068	0.0253	0.5593	1.11	0.341	20.01	39.4
$\tau = 0.0001$ ja $\delta_2 = 0.10$	0.0049	0.0267	0.4445	1.35	0.606	10.01	36.1
$\tau = 0.0001$ ja $\delta_2 = 0.30$	0.0030	0.0295	0.3899	1.58	0.778	6.91	34.1
$\tau = 0.001$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0075	0.0254	0.4891	1.00	0.313	19.99	31.1
$\tau = 0.001$ ja $\delta_2 = 0.10$	0.0058	0.0243	0.4110	1.01	0.432	11.05	22.2
$\tau = 0.001$ ja $\delta_2 = 0.30$	0.0056	0.0246	0.3953	1.01	0.449	10.77	22.0
$\tau = 0.01$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0078	0.0255	0.4905	1.00	0.308	20.00	30.9
$\tau = 0.01$ ja $\delta_2 = 0.10$	0.0062	0.0241	0.4188	1.00	0.403	11.30	20.5
$\tau = 0.01$ ja $\delta_2 = 0.30$	0.0065	0.0246	0.4078	1.00	0.412	11.10	20.2

Tõkkega δ_2 ja regulariseeriva parameetriga τ portfellide keskmised tulusused on enamasti positiivsed ja ekstreemsed osakaalud puuduvad. Kui neid portfelle võrrelda võrdsete kaaludega portfelliga on keskmised tulusused ja standardhälbed madalamad, seega portfellid sobivad riskikartlikumale investorile. Lisaks on antud portfellides enamasti väiksem aktsiate arv, mis tähendab investorile väiksemaid kauplemistasusid. (Tabel 3)

Parameetrit τ muutes saab reguleerida aktsiate arvu portfellis, mida suurem on τ väärtus seda hõredam on moodustatud portfell. Tõket δ_2 muutes saab regulariseerida portfelli osakaalude stabiilsust perioodide vahel ning lühikeseks müümise osakaalu portfellis.

Suure tõkke δ_2 väärtuse korral on aktsiate arv portfellis väiksem võrreldes muude δ_2 väärtustega. Kuigi tekivad hõredamad portfellid, kaotatakse Sharpe'i korrigeeritud suhtarvus ja näitaja TO väärtuses ehk aktsiate osakaalud perioodide vahel muutuvad rohkem. Suure tõkke δ_2 ja väikse parameetri τ tulemus ($\mu = -0.0005$ ja $S_p' = 0.3024$) sarnaneb tavalisele riski minimeerivale portfellile (Tabel 2; Tabel 3).

Väikese parameetri τ väärtuse korral (0.00001, 0.0001), kus tõkke δ_2 väärtus on väike, on keskmine Sharpe'i korrigeeritud suhtarv suur, vastavalt 0.5777 ja 0.5593. Nende portfellide Sharpe'i korrigeeritud suhtarvu tulemust saab lugeda paremaks kui võrdsete kaaludega portfellil. Kuigi nendes portfellides esineb lühikeseks müümist, on lühikeste positsioonide osakaal väike ning näitaja TO väärtus madal. Portfellides ei saavutatud hõredust, kuid hea keskmise oodatava tulususe juures on portfelli osakaalud stabiilsed ja Sharpe'i korrigeeritud suhtarv kõrge. (Tabel 3)

Suure parameetri τ väärtuse 0.01 ja 0.001 korral ning tõkke δ_2 väärtuste 0.10 ja 0.30 korral on tulemuseks keskmiselt hõredamad portfellid, kus portfelli kaasatakse ligikaudu pooled valimis olnud aktsiad. Antud portfellid on keskmiselt hea tulususega, kuid madalama Sharpe'i korrigeeritud suhtarvudega võrreldes teiste tõkestatud ja regulariseeritud portfellidega. Näitajate TO väärtused on suhteliselt madalad ning lühikeseks müümist antud portfellis ei ole. Tulemuseks on hõredad ja keskmiselt stabiilsed portfellid, kuid madalama tulususega. (Tabel 3)

Kokkuvõttes võime öelda, et sobivalt valitud kaalude tõkke ja/või regulariseeriva parameetri korral on võimalik saavutada võrdsete kaaludega portfellist väiksema riskiga ning hõredamad portfellid.

Kaheaastase hindamisperioodi põhjal saadud portfellide keskmised näitajad on antud Lisas 2 (Tabel 5; Tabel 6). Erinevate hindamisperioodide põhjal moodustatud portfellid ei andnud märkimisväärselt erinevaid tulemusi. Siiski on kaheaastase hindamisperioodi korral keskmised portfellide tulusused madalamad võrreldes viieaastase hindamisperioodiga. Kirjanduses on toodud, et portfelli tulusus on täpsem, kui see on hinnatud pikema ajaloolise aegrea põhjal ning tulususe standardhälve on seda täpsem, mida lühem on ajalooline hindamisperiood (Sander, 1999, lk 39). Seega võib arvata, et viieaastase hindamiseprioodiga portfellide keskmised tulusused on täpsemad. Ka kaheaastase hindamisperioodiga on võrdsete kaaludega portfellil parim keskmine tulusus.

Klassikalistel meetoditel saadud portfellide keskmised tulusused on endiselt negatiivsed või esineb ekstreemselt suurte väärtustega osakaalusid (turuportfell). Lisaks on 2-normi ja 1-normi kitsendustega moodustatud portfellide keskmised tulusused negatiivsed suuremate väärtustega tõkete korral. Regulariseeriva parameetri τ ja 2-normi tõkkega δ_2 saadud portfellide korral käituvad portfellide näitajad sõltuvalt parameetritest τ ja δ_2 analoogiliselt viieaastase hindamisperioodiga. (Tabel 3, Lisa 2 Tabel 6)

Kokkuvõte

Bakalaureusetöö eesmärk oli uurida Markowitzi portfelliteooria abil praktikas paremate tulemuste saavutamist portfelli osakaaludele kitsenduste seadmisega, mille tulemusel tekkisid hõredamad ja stabiilsemate osakaaludega portfellid. Täpsemalt uuriti võimalusi kitsenduste seadmiseks portfelli osakaalude normidele ning üksikaktsiale. Lisaks uuriti täiendava liikme lisamist optimeerimisülesande sihifunktsioonile, hõredamate portfellide koostamiseks.

Töö esimeses osas anti ülevaade Markowitzi portfelliteooriast ning sellega seotud mõistetest. Tõestati minimaalse riskiga portfelli osakaalude leidmise valem ja näidati, kuidas koostada minimaalse riskiga portfelli etteantud oodatava tulususe juures.

Teises osas uuriti stabiilsete ja hõredate portfellide moodustamist teoreetiliselt. Käsitleti portfelliteooria puuduseid ning võimalikke viise paremate tulemuste saavutamiseks. Tõestati portfelli osakaaludele erinevate kitsenduste seadmisega moodustatud portfelli samaväärsust nihutatud kovariatsioonimaatriksiga moodustatud portfelliga.

Kolmandas osas analüüsiti Balti aktsiaturu ajalooliste andmete põhjal erinevaid meetodeid stabiilsemate ja hõredamate portfellide saavutamiseks. Erinevate näitajatega võrreldi stabiilseid ja hõredaid portfelle klassikalise portfelliteooria põhjal leitud portfellidega.

Võrdsete kaaludega portfelli tulusus oli kõige parem võrreldes ülejäänud portfellidega, mis oli varasemalt tehtud tööde tulemustest lähtuvalt ootuspärane. Andmetest aga ei tulnud välja, et Markowitzi portfelliteooria põhjal koostatud portfellid omaksid ekstreemsete väärtustega osakaale v.a turuportfell. Vaatamata sellele oli klassikalise portfelliteooria põhjal koostatud portfellid halvimate tulusustega, madala Sharpe'i korrigeeritud suhtarvuga ning suurema lühikeseks müümise osakaaluga portfellid.

Analüüsi tulemusel ei õnnestunud saada ühte parimat hõredat ja stabiilset portfelli, kuid sobivalt regulariseerivat parameetrit ja normi tõket valides on võimalik moodustada hõredaid või stabiilseid portfelle. Regulariseeriva parameetriga portfell mõjutab portfelli hõredust ning osakaalude normi kitsendustega portfell muudab portfelli osakaalud stabiilsemaks. Sihifunktsioonile suurema regulariseeriva parameetri rakendamisel ja seejuures 2-normile väiksema tõkke määramisel saavutati aktsiaportfellid, mille aktsiate arv oli madalaim ning osakaalud suhteliselt stabiilsed, kuid ei ületanud võrdsete kaaludega portfelli tulusust.

Viidatud kirjandus

Boyd, S., Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization.* Cambridge University Press.

Chen, J. (14. märts 2020). *Modern Portfolio Theory (MPT).* URL: `https://www.investopedia.com/terms/m/modernportfoliotheory.asp`.

Dai, Z., Wen, F. (2018). "A generalized approach to sparse and stable portfolio optimization problem". *Journal of Industrial & Management Optimization* 14.4, lk. 1651–1666.

DeMiguel, V., Garlappi, L., Nogales, F. J., Uppal, R. (2007). "Improving Performance By Constraining Portfolio Norms: A Generalized Approach to Portfolio Optimization". Teoses: *AFA 2008 New Orleans Meetings Paper.*

DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R. (2009). "Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?" *The review of Financial studies* 22.5, lk. 1915–1953.

Derpanopoulos, G. (2018). "Optimal Financial Portfolio Selection". Doktoritöö. UCLA.

Giannone, D., De Mol, C., Brodie, J., Daubechies, I., Loris, I. *et al.* (2008). *Sparse and stable Markowitz portfolios.* Tehniline raport.

Green, R. C., Hollifield, B. (1992). "When will mean-variance efficient portfolios be well diversified?" *The Journal of Finance* 47.5, lk. 1785–1809.

Israelsen, C. L. *et al.* (2005). "A refinement to the Sharpe ratio and information ratio". *Journal of Asset Management* 5.6, lk. 423–427.

Jagannathan, R., Ma, T. (2003). "Risk reduction in large portfolios: Why imposing the wrong constraints helps". *The Journal of Finance* 58.4, lk. 1651–1683.

Kaasik, Ü. (2002). *Matemaatikaleksikon.* Tartu Ülikooli Kirjastus.

Kaasik, Ü., Kivistik, L. (1982). *Operatsioonianalüüs.* kirjastus "Valgus".

Raus, T. (2019). *Sissejuhatus finantsmatemaatikasse.* URL: https://courses.ms.ut.ee/LTMS.00.017/2019_fall/uploads/Main/Sissejuhatus%5C%20finantsmatemaatikasse.%5C%20Loengukonspekt%5C%202019.pdf.

Sander, P. (1999). *Portfelliteooria I.* Tartu Ülikooli Kirjastus.

Sander, P. (2003). *Portfelliteooria II.* Tartu Ülikooli Kirjastus.

Zastawniak, T., Capinski, M. (2003). *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering.* Springer, lk. 91–124.

Lisad

1. Vaadeldud aktsiad

Tabel 4. Analüüsis kasutatud Balti aktsiaturu aktsiad

Nr	Aktsia	Lühend	Balti aktsiaturg
1	Apranga	APG1L	Põhinimekiri
2	Arco Vara	ARC1T	Põhinimekiri
3	AUGA group	AUG1L	Põhinimekiri
4	Baltika	BLT1T	Põhinimekiri
5	EkspressGroup	EEG1T	Põhinimekiri
6	Grindeks	GRD1R	Põhinimekiri
7	Grigeo	GRG1L	Põhinimekiri
8	Harju Elekter	HAE1T	Põhinimekiri
9	Klaipedos nafta	KNF1L	Põhinimekiri
10	Merko Ehitus	MRK1T	Põhinimekiri
11	Nordcon	NCN1T	Põhinimekiri
12	Olainfarm	OLF1R	Põhinimekiri
13	Panevežio statybos trestas	PTR1L	Põhinimekiri
14	Pieno žvaigždes	PZV1L	Põhinimekiri
15	Rokiškio suris	RSU1L	Põhinimekiri
16	Šiauliu bankas	SAB1L	Põhinimekiri
17	SAF Tehnika	SAF1R	Põhinimekiri
18	Silvano Fashion Group	SFG1T	Põhinimekiri
19	Tallink Grupp	TAL1T	Põhinimekiri
20	Telia Lietuva	TEL1L	Põhinimekiri
21	Tallinna Kaubamaja Grupp	TKM1T	Põhinimekiri
22	Tallinna Vesi	TVEAT	Põhinimekiri
23	Vilkyškiu pienine	VLP1L	Põhinimekiri
24	Latvijas balzams	BAL1R	Lisanimekiri
25	Ditton pievadkežu rupnica	DPK1R	Lisanimekiri
26	Latvijas Gaze	GZE1R	Lisanimekiri
27	Invalda INVL	IVL1L	Lisanimekiri

Nr	Aktsia	Lühend	Balti aktsiaturg
28	Kurzemez atslega 1	KA11R	Lisanimekiri
29	Kauno energija	KNR1L	Lisanimekiri
30	Latvijas Juras medicinas centrs	LJM1R	Lisanimekiri
31	Linas	LNS1L	Lisanimekiri
32	Rīgas autoelektroaparātu rūpnīca	RAR1R	Lisanimekiri
33	Rīgas elektromašīnbūves rūpnīca	RER1R	Lisanimekiri
34	Rīgas juvelierizstrādājumu rūpnīca	RJR1R	Lisanimekiri
35	Rīgas kuģu būvētava	RKB1R	Lisanimekiri
36	Siguldas ciltslietu un mākslīgās apsēklošanas stacija	SCM1R	Lisanimekiri
37	Nordc Fibreboard	SKN1T	Lisanimekiri
38	PATA Saldus	SMA1R	Lisanimekiri
39	Snaigė	SNG1L	Lisanimekiri
40	Trigon Property Development	TPD1T	Lisanimekiri
41	Utenos trikotažas	UTR1L	Lisanimekiri
42	Vilniaus baldai	VBL1L	Lisanimekiri
43	VEF	VEF1R	Lisanimekiri
44	Valmieras stikla šķiedra	VSS1R	Lisanimekiri
45	Žemaitijos pienas	ZMP1L	Lisanimekiri

2. Tulemused kaheaastase hindamisperioodiga

Tabel 5. Erinevatel meetoditel hindamisperioodiga 2 aastat leitud portfellide keskmised näitajad: tulusus (μ), standardhälve (σ), Sharpe'i korrigeeritud suhtarv (S_p'), GE, TO, HH pöördindeks (IHH), aktsiate arv (N)

Portfell	$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{S_p'}$	$\boldsymbol{GE}$	$\boldsymbol{TO}$	$\boldsymbol{IHH}$	$\boldsymbol{N}$
Võrdsed kaalud	0.0145	0.0307	0.5599	1.00	0	45.00	45.0
Riski min.	-0.0274	0.0845	0.1605	4.75	6.082	5.68	44.4
Turuportfell	19.6876	921.2503	-159413	68327.51	96880.5	0	45.0
Etteantud tul.	-0.0280	0.0848	0.0643	4.42	4.198	2.03	44.4
1-norm ≤ 1	0.0047	0.0262	0.3784	1.01	0.820	8.89	17.8
TP lüh. keeld	0.0074	0.0328	0.5496	1.00	0.872	7.76	17.7
1-norm ≤ 1.4	-0.0011	0.0321	0.4473	1.39	1.304	7.24	33.8
1-norm ≤ 2	-0.0047	0.0351	0.3459	1.85	1.632	7.14	43.7
2-norm ≤ 0.05	0.0054	0.0277	0.3241	1.22	0.550	19.99	43.8
2-norm ≤ 0.10	-0.0012	0.0377	0.3284	1.61	1.100	10.57	44.1
2-norm ≤ 0.30	-0.0065	0.0434	0.2198	2.13	1.837	7.74	44.3
Regul. $\tau = 0.00001$	-0.0045	0.0432	0.4973	1.29	1.267	6.31	23.2
Regul. $\tau = 0.0001$	0.0012	0.028	0.4438	1.15	0.985	7.30	20.8
Regul. $\tau = 0.001$	0.0059	0.0264	0.3646	1.00	0.832	9.16	17.0
Regul. $\tau = 0.01$	0.0061	0.0272	0.373	1.00	0.860	9.28	16.7

Tabel 6. Hindamisperioodiga 2 aastat tõkkega δ_2 ja regulariseeritud parameetriga τ leitud portfellide keskmised näitajad: tulusus (μ), standardhälve (σ), Sharpe'i korrigeeritud suhtarv (S_p'), GE,TO, HH pöördindeks (IHH), aktsiate arv (N)

Parameetrid	$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{S_p'}$	$\boldsymbol{GE}$	$\boldsymbol{TO}$	$\boldsymbol{IHH}$	$\boldsymbol{N}$
$\tau = 0.00001$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0054	0.0275	0.3244	1.21	0.551	20.00	42.8
$\tau = 0.00001$ ja $\delta_2 = 0.10$	0	0.0324	0.4762	1.35	0.992	10.06	32.3
$\tau = 0.00001$ ja $\delta_2 = 0.30$	-0.0036	0.0383	0.4462	1.29	1.243	6.41	23.3
$\tau = 0.0001$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0060	0.0267	0.3472	1.12	0.546	20.00	36.4
$\tau = 0.0001$ ja $\delta_2 = 0.10$	0.0033	0.0238	0.4782	1.15	0.847	10.13	25.1
$\tau = 0.0001$ ja $\delta_2 = 0.30$	0.0014	0.0282	0.4694	1.15	0.994	7.30	20.9
$\tau = 0.001$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0081	0.0252	0.4280	1	0.511	20.00	30.1
$\tau = 0.001$ ja $\delta_2 = 0.10$	0.0057	0.0268	0.3426	1	0.792	10.27	18.2
$\tau = 0.001$ ja $\delta_2 = 0.30$	0.0056	0.0265	0.3616	1	0.825	9.20	17.0
$\tau = 0.01$ ja $\delta_2 = 0.05$	0.0084	0.0252	0.4489	1	0.512	20.00	29.4
$\tau = 0.01$ ja $\delta_2 = 0.10$	0.0052	0.0264	0.3989	1	0.798	10.88	17.7
$\tau = 0.01$ ja $\delta_2 = 0.30$	0.0064	0.0266	0.4609	1	0.865	9.59	16.9

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Laura Anna Tammesoo,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Hõredate ja stabiilsete väärtpaberiportfellide koostamine Balti aktsiaturu näitel", mille juhendaja on dotsent Toomas Raus, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Laura Anna Tammesoo
19.05.2020