TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA–INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Kärt Päll

Kvaasi-aritmeetilised keskmised ja Lagrange'i keskmised

Bakalaureusetöö

Juhendaja: professor Toivo Leiger

Tartu 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas töös nimetatakse keskmiseks sellist pidevat kahe muutuja funktsiooni $\mu\colon\ I \times I \to I$ ($I \subset \mathbb{R}$ on mingi intervall), mis rahuldab tingimusi $\mu(x,x) = x$ ja $\mu(x,y) = \mu(y,x)$ ning on mõlema muutuja suhtes rangelt kasvav. Lihtsamad keskmised on aritmeetiline keskmine

$$(x,y) \longmapsto \frac{x+y}{2} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

ja geomeetriline keskmine

$$(x,y) \longmapsto \sqrt{xy} \quad \big(x,y \in [0,\infty)\big).$$

Keskmiste üldist teooriat (vt [B]) rakendatakse funktsionaalvõrrandite lahendamisel, võrratuste uurimisel jm.

Matemaatilise analüüsi seisukohalt pakuvad erilist huvi sellised keskmised, mis on määratud mingi pideva rangelt monotoonse funktsiooniga $f\colon\ I \to \mathbb{R}$. Antud bakalaureuse töös vaadeldakse kahte sellist keskmist: kvaasi-aritmeetilist keskmist $\mathbf{Q}_f$, mis on määratud seosega

$$\mathbf{Q}_f\,(x,y) := f^{-1}\left(\frac{f\,(x)+f\,(y)}{2}\right) \quad \big(x,y \in I\big)$$

ja Lagrange'i keskmist $\mathbf{L}_f$, kus

$$\mathbf{L}_f(x,y) := \begin{cases} f^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)dt\right), & \text{kui } x \neq y, \\ x, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Viimase defineerimisel on lähtekohaks tuntud integraalarvutuse keskväärtusteoreem: kui $f\colon\ [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev, siis leidub selline $c \in (a,b)$, et

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)dt.$$

Kui f on seejuures rangelt monotoonne, siis c on üheselt määratud.

Töö eesmärgiks on anda mõlema nimetatud keskmise jaoks vastus kahele küsimusele.

1. Millist keskmist μ saab esitada mingi funktsiooni f vastavalt kvaasi-aritmeetilise või Lagrange'i keskmisena?

2. Kuidas kirjeldada nende funktsioonide klasse, millel on vastavalt sama kvaasi-aritmeetiline või Lagrange'i keskmine?

Kvaasi-aritmeetiliste keskmiste korral annab esimesele küsimusele vastuse allpool tõestatav Aczéli teoreem: keskmine μ on mingi funktsiooni kvaasi-aritmeetiline keskmine parajasti siis, kui μ on bisümmeetriline, st

$$\mu\big(\mu(x,y),\mu(z,t)\big)=\mu\big(\mu(x,z),\mu(y,t)\big)\quad(x,y,z,t\in I).$$

Lagrange'i keskmise jaoks saame töös vaid osalise vastuse: antud funktsiooni f korral kehtib $\mu=\mathbf{L}_f$ parajasti siis, kui

$$f\big(\mu(x,y)\big)=\frac{f\Big(\mu\left(x,\frac{x+y}{2}\right)\Big)+f\Big(\mu\left(\frac{x+y}{2},y\right)\Big)}{2}\quad(x,y\in I).\tag{0.1}$$

Teisele küsimusele on vastus mõlemal juhul sama: nii seos $\mathbf{Q}_f=\mathbf{Q}_g$ kui ka seos $\mathbf{L}_f=\mathbf{L}_g$ kehtib parajasti siis, kui $g=\alpha f+\beta$, kus $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ja $\alpha\neq 0$.

Käesolev töö on referatiivne, tema kirjutamisel olid aluseks järgmised artiklid: L. R. Berrone ja J. Moro [BM], J. K. Merikoski, M. Halmetoja ja T. Tossavainen [MHT] ning J. Aczél [A]. Töö koosneb kolmest peatükist.

Esimeses peatükis vaadeldakse keskmisi üldiselt. Antakse keskmise definitsioon ja tuuakse mõned näited lihtsamate keskmiste kohta.

Teine peatükk on pühendatud kvaasi-aritmeetilistele keskmistele. Esimeses alapunktis, mille kirjutamisel on kasutatud raamatut [NP], käsitletakse kumeraid ja nõgusaid funktsioone, kuid põhieesmärgiks on näidata, et kui $f:I\to\mathbb{R}$ on pidev, siis võrdus

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}\quad(x,y\in I)$$

kehtib parajasti siis, kui f on lineaarne funktsioon, st $f(x)=\alpha f(x)+\beta$ iga $x\in I$ korral. Teises alapunktis defineeritakse kvaasi-aritmeetiline keskmine ja näidatakse, et tegemist on keskmisega. Veendutakse, et kvaasi-aritmeetiline keskmine on bisümmeetriline. Antakse vastus teisele küsimusele ja näidatakse, et $\mathbf{Q}_f=\mathbf{Q}_g$ parajasti siis, kui leiduvad sellised $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, et $\alpha\neq 0$ ja $g=\alpha f+\beta$. Märgime, et saadud tulemus on esmakordselt tõestatud A. Kolosárová töös [K]. Kolmandas alapunktis tõestatakse eelpool tsiteeritud Aczéli teoreem ariklist [A].

Viimases peatükis käsitletakse Lagrange'i keskmiseid. Esimeses alapunktis antakse Lagrange'i keskmise definitsioon ja veendutakse, et $\mathbf{L}_f$ on keskmine. Jõutakse esimese küsimuse vastuseni: $\mu=\mathbf{L}_f$ parajasti siis, kui on täidetud tingimus (0.1).

Teises alapunktis leitakse seos keskmiste $\mathbf{Q}_f$ ja $\mathbf{L}_f$ vahel fikseeritud funktsiooni f korral. Selle seose abil antakse vastus teisele küsimusele: $\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_g$ parajasti siis, kui $g = \alpha f + \beta$, kus $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $\alpha \neq 0$. Kolmanda peatüki tulemused on pärit artiklitest [BM] ja [MHT].

Lõpetuseks märgime, et täht I tähistab järgnevas tekstis kõikjal mingit intervalli korpuses $\mathbb{R}$ ja

$$Q := I \times I.$$

Antud $x \in \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$ korral tähistatakse

$$U_\delta(x) := (x - \delta, x + \delta),$$

st $U_\delta(x)$ on punkti x $\delta-$ümbrus. Mingi jada z_n korral kirjutame $z_n \to z$, kui $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

1 Keskmised

Definitsioon 1.1. Olgu $I \subset \mathbb{R}$ intervall ja $Q := I \times I$. Kahe muutuja funktsiooni $\mu\colon Q \to \mathbb{R}$ nimetatakse *(üldiseks) keskmiseks* intervallis I, kui ta rahuldab tingimusi

(M1) μ on pidev,

(M2) $\mu(x, x) = x$ *(refleksiivsus),*

(M3) $\mu(x, y) = \mu(y, x)$ *(sümmeetria),*

(M4) μ on mõlema muutuja suhtes rangelt kasvav *(monotoonsus).*

Märkus 1.1. Kui funktsioon μ on rangelt monotoonne ühe muutuja suhtes, siis tänu tema sümmeetriaomadusele (M3) on ta seda ka teise muutuja suhtes. Näiteks, kui μ on esimese muutuja suhtes rangelt monotoonne ja $y < y'$, siis

$$\mu(x, y) = \mu(y, x) < \mu(y', x) = \mu(x, y'),$$

st μ on ka teise muutuja suhtes rangelt monotoonne.

Märkus 1.2. Aksioomidest (M2) ja (M4) tuleneb järgmine, keskmiste jaoks kõige tähtsam omadus:

$$\min\{x, y\} < \mu(x, y) < \max\{x, y\} \quad (x, y \in I) \qquad \textit{(vahepealsus).}$$

Selle omaduse kohaselt $\mu(Q) \subset I$, arvestades tingimust (M2), saame, et $\mu(Q) = I$.

Märkus 1.3. Aksioomist (M4) järeldub vahetult järgmine monotoonsusomadus: kui $x, x', y, y' \in I,\ x < x'$ ja $y < y'$, siis

$$\mu(x, y) < \mu(x', y').$$

Märkus 1.4. Aksioomi (M1) juurde märgime, et kahe muutuja funktsioon $\mu\colon Q \to \mathbb{R}$ on kohal $(x, y) \in Q$ pidev parajasti siis, kui

$$\mu(x_n, y_n) \longrightarrow \mu(x, y),$$

iga sellise jada $\big((x_n, y_n)\big)$ korral, kus $x_n, y_n \in I$ ja $(x_n, y_n) \to (x, y)$ ruumis $\mathbb{R}^2$, st

$$\sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \longrightarrow 0.$$

Viimane tingimus on samaväärne tingimusega

$$x_n \to x \quad \text{ja} \quad y_n \to y.$$

Niisiis, tingimus (M1) on täidetud parajasti siis, kui iga $(x, y) \in Q$ korral kehtib implikatsioon

$$\big[x_n, y_n \in I \quad (n \in \mathbb{N}),\ \ x_n \to x,\ \ y_n \to y\big] \Longrightarrow \mu(x_n, y_n) \longrightarrow \mu(x, y).$$

Näide 1.1. Olgu $Q := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Näitame, et aritmeetiline keskmine

$$\mu\colon\ Q \to \mathbb{R},\ \text{kus}\ \mu(x,y) := \frac{x+y}{2},$$

rahuldab tingimusi (M1)–(M4).

(M1) Olgu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ suvaline ja $\big((x_n,y_n)\big)$ selline jada hulgas $\mathbb{R}^2$, et

$$x_n \to x \text{ ja } y_n \to y.$$

Koonduvate arvjadade omadustest saame, et

$$\frac{x_n+y_n}{2} \longrightarrow \frac{x+y}{2},$$

seega

$$\mu\left(x_n,y_n\right) \to \mu\left(x,y\right).$$

See tähendab, et μ on pidev punktis (x,y).

Aksioomide (M2) ja (M3) kehtivus on ilmne.

(M4) Kui $x < x'$, siis

$$\mu\left(x,y\right) = \frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{x'}{2} + \frac{y}{2} < \frac{x'+y}{2} = \mu\left(x',y\right).$$

Näide 1.2. Olgu $Q := [0,\infty) \times [0,\infty)$. Näitame, et geomeetriline keskmine

$$\mu\colon\ Q \to [0,\infty),\ \text{kus}\quad \mu(x,y) := \sqrt{xy},$$

rahuldab tingimusi (M1)–(M4).

(M1) Olgu $(x,y) \in Q$ suvaline ja $\big((x_n,y_n)\big)$ selline jada hulgas Q, et

$$x_n \to x \text{ ja } y_n \to y.$$

Võttes arvesse funktsiooni $x \to \sqrt{x}$ pidevust, saame, et

$$\mu(x_n,y_n) = \sqrt{x_n y_n} = \sqrt{x_n}\sqrt{y_n} \longrightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy} = \mu(x,y),$$

st μ on pidev punktis (x,y).

(M2) ja (M3) kehtivus on ilmne.

(M4) Kui $0 \le x < x'$, siis

$$\mu\left(x,y\right) = \sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} < \sqrt{x'}\sqrt{y} = \sqrt{x'y} = \mu(x',y).$$

Näide 1.3. Olgu $Q := (0,\infty) \times (0,\infty)$. Näitame, et harmooniline keskmine

$$\mu\colon\ Q \to \mathbb{R},\ \text{kus}\quad \mu(x,y) := \frac{2xy}{x+y},$$

rahuldab tingimusi (M1)–(M4).

(M1) Olgu $(x,y) \in Q$ suvaline ja $\big((x_n,y_n)\big)$ selline jada hulgas Q, et

$$x_n \to x \quad \text{ja} \quad y_n \to y.$$

Koonduvate jadade omadusest saame, et

$$\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n} \longrightarrow \frac{2xy}{x+y},$$

seega

$$\mu(x_n,y_n) \longrightarrow \mu(x,y).$$

See tähendab, et μ on pidev punktis (x,y).

Aksioomide (M2) ja (M3) kehtivus on ilmne.

(M4) Kui $0 < x < x'$, siis

$$\mu\,(x,y) = \frac{2xy}{x+y} = \frac{2y}{1+\frac{y}{x}} < \frac{2y}{1+\frac{y}{x'}} = \frac{2x'y}{x'+y}.$$

Aczél $\big($vt[A]$\big)$ on andnud järgmise bisümmeetria definitsiooni.

Definitsioon 1.2. [BM] Keskmist $\mu\colon\ Q \to \mathbb{R}$ nimetatakse *bisümmeetriliseks,* kui

$$\mu\big(\mu\,(x,y)\,,\mu\,(z,t)\big) = \mu\big(\mu\,(x,z)\,,\mu\,(y,t)\big) \quad (x,y,z,t \in I). \tag{1.1}$$

Lihtne on veenduda, et näidetes 1–3 vaadeldud keskmised on kõik bisümmeetrilised. Kontrollime seda harmoonilise keskmise puhul:

$$\begin{aligned}
\mu\big(\mu(x,y),\mu(z,t)\big) &= \mu\left(\frac{2xy}{x+y},\frac{2zt}{z+t}\right) = \frac{2\cdot\frac{2xy}{x+y}\cdot\frac{2zt}{z+t}}{\frac{2xy}{x+y}+\frac{2zt}{z+t}} \\
&= \frac{8xyzt(x+y)(z+t)}{(x+y)(z+t)\cdot\big(2xy(z+t)+2zt(x+y)\big)} \\
&= \frac{4xyzt}{xy(z+t)+zt(x+y)} = \frac{4xyzt}{xyz+xyt+xzt+yzt} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4xyzt}{xz(y+t)+yt(x+z)} \\
&= \frac{8xyzt(x+z)(y+t)}{(x+z)(y+t)\cdot\big(2xz(y+t)+2yt(x+z)\big)} \\
&= \frac{2\cdot\frac{2xz}{x+z}\cdot\frac{2yt}{y+t}}{\frac{2xz}{x+z}+\frac{2yt}{y+t}} = \mu\left(\frac{2xz}{x+z},\frac{2yt}{y+t}\right) \\
&= \mu\big(\mu(x,z),\mu(y,t)\big).
\end{aligned}
$$

Järgmine näide kinnitab, et kõik keskmised ei ole bisümmeetrilised.

Näide 1.4. Olgu $Q := (0,\infty)\times(0,\infty)$. Funktsiooni

$$\mu\colon\ Q\to\mathbb{R},\ \text{kus}\quad \mu(x,y) := \frac{x-y}{\ln x-\ln y}.$$

nimetatakse logaritmiliseks keskmiseks. Allpool (vt näide 3.4) on näidatud, et μ rahuldab aksioome (M1)–(M4). Veendume, et kui võtame $x=e, y=t=e^2, z=e^3$, siis võrdus 1.1 ei kehti. Ühelt poolt,

$$\mu\left(e,e^2\right) = \frac{e-e^2}{\ln e-\ln e^2} = \frac{e(1-e)}{1-2} = e(e-1)$$

ja

$$\mu\left(e^3,e^2\right) = \frac{e^3-e^2}{\ln e^3-\ln e^2} = e^2(e-1),$$

seega

$$
\begin{aligned}
\mu\big(\mu\left(e,e^2\right),\mu\left(e^3,e^2\right)\big) &= \mu\big(e\left(e-1\right),e^2\left(e-1\right)\big) = \frac{e\left(e-1\right)-e^2\left(e-1\right)}{\ln e\left(e-1\right)-\ln e^2\left(e-1\right)} \\
&= \frac{e\left(e-1\right)\left(1-e\right)}{1+\ln(e-1)-2-\ln(e-1)} = e\left(e-1\right)^2 \approx 17.3673.
\end{aligned}
$$

Teisalt,

$$\mu\left(e,e^3\right) = \frac{e-e^3}{-2} = \frac{1}{2}e\left(e^2-1\right),$$

seega

$$
\begin{aligned}
\mu\big(\mu\left(e,e^3\right),\mu\left(e^2,e^2\right)\big) &= \mu\left(\frac{1}{2}e\left(e^2-1\right),e^2\right) = \frac{\frac{1}{2}e\left(e^2-1\right)-e^2}{\ln\frac{1}{2}e\left(e^2-1\right)-\ln e^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}e\left(e^2-1\right)-e^2}{-\ln 2+1+\ln(e^2-1)-2} = \frac{\frac{1}{2}e\left(e^2-1\right)-e^2}{\ln(e^2-1)-1-\ln 2} \\
&\approx 8.0189.
\end{aligned}
$$

Kuna

$$\mu\big(\mu\left(e,e^2\right),\mu\left(e^3,e^2\right)\big) \neq \mu\big(\mu\left(e,e^3\right),\mu\left(e^2,e^2\right)\big),$$

siis keskmine μ ei ole bisümmeetriline.

2 Kvaasi-aritmeetilised keskmised

2.1 Kumerad ja nõgusad funktsioonid

Definitsioon 2.1 (vt [NP])**.** Funktsiooni $f\colon I \to \mathbb{R}$ nimetatakse *kumeraks* intervallis I, kui suvaliste $x, y \in I$ ja $a \in [0,1]$ korral kehtib võrratus

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)\, y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)\, f\,(y)\,. \tag{2.1}$$

Kui on täidetud vastupidine võrratus, siis nimetatakse funktsiooni f *nõgusaks.*

Kumeruse ja nõgususe geomeetrilise tähenduse selgitamiseks võtame suvalised $x_1, x_2 \in I$ ja olgu $x_1 < x_2$. Näitame kõigepealt, et

$$\big[x_1, x_2\big] = \big\{\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2 |\ \ \alpha \in [0,1]\big\}.$$

Tõepoolest, kui $\alpha \in [0,1]\,$, siis

$$x_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_1 \leqslant \alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2 \leqslant \alpha x_2 + (1-\alpha)\, x_2 = x_2,$$

seega $\big[x_1, x_2\big] \supset \big\{\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2 |\ \ \alpha \in [0,1]\big\}$. Teiseltpoolt, kui $x \in (x_1, x_2)\,$, võtame $\alpha := \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$, siis $x - x_2 = \alpha\,(x_1 - x_2)\,$, järelikult

$$x = \alpha\,(x_1 - x_2) + x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2,$$

niisiis $\big[x_1, x_2\big] \subset \big\{\alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2 |\ \ \alpha \in [0,1]\big\}$.

Olgu $f\colon I \to \mathbb{R}$ mingi funktsioon ja olgu $[x_1, x_2] \subset I$. Tõmbame sirge läbi funktsiooni f graafiku punktide $\big(x_1, f\,(x_1)\big)$ ning $\big(x_2, f\,(x_2)\big)$, see on määratud võrrandiga $y = T(x)$, kus

$$T\,(x) := f\,(x_1) + \frac{f\,(x_2) - f\,(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\,.$$

Iga $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)\, x_2 \in [x_1, x_2]$ korral

$$\begin{aligned} T\,(x) &= f\,(x_1) + \frac{f\,(x_2) - f\,(x_1)}{x_2 - x_1}\big((\alpha - 1)\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2\big) \\ &= f\,(x_1) + (1-\alpha)\,\frac{f\,(x_2) - f\,(x_1)}{x_2 - x_1}\,(x_2 - x_1) = \alpha f\,(x_1) + (1-\alpha)\, f\,(x_2)\,. \end{aligned}$$

Kui f on kumer funktsioon intervallis I, siis iga $\alpha \in [0,1]$ korral

$$f(x) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) = T(x),$$

st

$$f(x) \leq T(x) \quad \big(x \in [x_1, x_2]\big)$$

ehk funktsiooni $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ graafik paikneb allpool läbi punktide $\big(x, f(x_1)\big)$ ja $\big(x_2, f(x_2)\big)$ tõmmatud lõikajat.

Kui f on nõgus, siis analoogselt

$$f(x) \geq T(x) \quad \big(x \in [x_1, x_2]\big).$$

Kui f on samaaegselt kumer ja nõgus intervallis I, siis suvaliste $x_1, x_2 \in I$ korral, kus $x_1 < x_2$ kehtib võrdus

$$f(x) = T(x) \quad \big(x \in [x_1, x_2]\big).$$

Lause 2.1. *Funktsioon $f\colon I \to \mathbb{R}$ on samaaegselt kumer ja nõgus intervallis I parajasti siis, kui ta on lineaarne.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Intervall I on esitatav kujul $I = \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} I_n$, kus $I_n = [a_n, b_n]$ ja $I_n \subset I_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Olgu f kumer ja nõgus samaaegselt intervallis I, siis on ta seda ka lõigus I_1. Eelneva arutelu kohaselt leiduvad $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et

$$f(x) = \lambda x + \mu \quad (x \in I_1).$$

Analoogselt saame lõigust $[a_n, b_n]$ lähtudes leida $\tilde{\lambda},\ \tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ nii, et

$$f(x) = \tilde{\lambda} x + \tilde{\mu} \quad (x \in I_n).$$

Kuna $I_1 \subset I_n$, siis kehtib $\lambda x + \mu = \tilde{\lambda} x + \tilde{\mu}$ iga $x \in I_1$ korral, seega

$$(\lambda - \tilde{\lambda})x + (\mu - \tilde{\mu}) = 0 \quad (x \in I_1).$$

Selline võrdus on võimalik ainult juhul, kui $\lambda = \tilde{\lambda}$ ja $\mu = \tilde{\mu}$. Saame, et suvalise $x \in I$ korral

$$f(x) = \lambda x + \mu.$$

Piisavus. Olgu $f(x) = \lambda x + \mu \quad (x \in I)$ ja olgu $x_1, x_2 \in I$ suvalised. Kui $x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ mingi $\alpha \in [0,1]$ korral, siis

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda\big(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\big) + \alpha\mu + (1-\alpha)\mu = \alpha(\lambda x_1 + \mu) + (1-\alpha)(\lambda x_2 + \mu) \\ &= \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2). \end{aligned}$$

Seega kehtib võrdus

$$f\big(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\big) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad (x_1, x_2 \in I),$$

mis tähendab, et funktsioon f on intervallis I samaaegselt kumer ja nõgus. $\square$

Lause 2.2 (Jenseni võrratus; vt nt [NP])**.** *Pidev funktsioon* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *on kumer parajasti siis, kui kõikide* $x, y \in I$ *korral kehtib võrratus*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Tõestus. *Tarvilikkus* on selge, sest kui f on kumer, siis on võrratus (2.1) rahuldatud ka juhul, kus $\alpha = \frac{1}{2}$.

Piisavus. Eeldame, et

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad (x, y \in I)$$

ja oletame vastuväiteliselt, et f ei ole kumer. Seega leidub $[a, b] \subset I$, et funktsiooni f graafik ei paikne allpool läbi punktide $\big(a, f(a)\big)$ ja $\big(b, f(b)\big)$ võetud kõõlu. Tähistame

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) = f(x) - T(x),$$

siis vastuväitelise eelduse kohaselt

$$\sup_{x\in[a,b]} \varphi(x) := \gamma > 0.$$

Tähistame

$$C := \big\{x \in [a, b] \,\big|\; \varphi(x) = \gamma\big\}.$$

Et φ on lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon, siis $C \neq \emptyset$, seega

$$\gamma = \max_{x\in[a,b]} \varphi(x).$$

Kuna C on alt tõkestatud, siis eksisteerib $c := \inf C$. Lähtudes infiimumi definitsioonist, saame leida sellise jada (x_n), et $x_n \in C$ ja $x_n \to c$. Tänu funktsiooni φ pidevusele

$$\varphi(c) = \lim_n \varphi(x_n) = \lim_n \gamma = \gamma,$$

järelikult $c = \min C$. Kuna $c \neq a$ ja $c \neq b$, siis saame leida $\varepsilon > 0$, et $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset I$. Seega

$$\varphi(c-\varepsilon) < \varphi(c) = \gamma \quad \text{ja} \quad \varphi(c+\varepsilon) \leq \gamma = \varphi(c),$$

millest tulenevalt

$$\frac{\varphi(c-\varepsilon)+\varphi(c+\varepsilon)}{2} < \varphi(c) = \varphi\left(\frac{(c-\varepsilon)+(c+\varepsilon)}{2}\right).$$

Saime punktid $x = c - \varepsilon$ ja $y = c + \varepsilon$, et

$$\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} < \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Näitame, et funktsiooni φ korral selline võrratus ei saa kehtida. Tõepoolest,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\left(\frac{x+y}{2} - \frac{a+a}{2}\right) - f(a) \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\big(f(x) + f(y)\big) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\big((x-a) + (y-a)\big) - f(a) - f(a)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(f(y) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(y-a) - f(a)\right) = \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}.
\end{aligned}$$

Seega on meie vastuväiteline oletus vale. □

Järeldus 2.3. *Pidev funktsioon $f\colon I \to \mathbb{R}$ rahuldab intervallis I tingimust*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (x, y \in I)$$

parajasti siis, kui f on lineaarne funktsioon.

TÕESTUS. Lause 2.2 kohaselt kehtib võrratus (2.1) parajasti siis, kui f on samaaegselt kumer ja nõgus. Väide järeldub lausest 2.1. □

2.2 Rangelt monotoonse funktsiooni kvaasi-aritmeetiline keskmine

Olgu $I \subset \mathbb{R}$ intervall ja olgu $f\colon I \to \mathbb{R}$ pidev rangelt monotoonne funktsioon, konkreetsuse mõttes eeldame esialgu, et f on rangelt kasvav. Kui $x, y \in I$ ja $x < y$, siis $x < \frac{x+y}{2} < y$ ning $f(x) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < f(y)$. Kuna pöördfunktsioon $f^{-1}\colon f(I) \to I$ on rangelt kasvav, siis võrratustest $f(x) < \frac{f(x)+f(y)}{2} < f(y)$ saame, et

$$x = f^{-1}(f(x)) < f^{-1}\left(\frac{f(x) + f(y)}{2}\right) < f^{-1}(f(y)) = y. \tag{2.2}$$

Lihtne on veenduda, et võrratused (2.2) kehtivad ka siis, kui f on intervallis I rangelt kahanev.

Definitsioon 2.2. Kahe muutuja funktsiooni $\mathbf{Q}_f\colon\ I \times I \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$\mathbf{Q}_f\,(x,y) := f^{-1}\left(\frac{f\,(x) + f\,(y)}{2}\right) \qquad \big((x,y) \in Q\big),$$

nimetatakse *funktsiooniga f määratud* (lühemalt *funktsiooni f*) *kvaasi-aritmeetiliseks keskmiseks.*

Veendume, et $\mathbf{Q}_f$ on keskmine, st ta rahuldab aksioome (M1)–(M4).
(M1) Olgu $(x,y) \in Q$ suvaline ja $\big((x_n,y_n)\big)$ selline jada hulgas Q, et

$$x_n \to x \quad \text{ja} \quad y_n \to y.$$

Funktsioonide f ja f^{-1} pidevuse tõttu

$$\begin{aligned}\lim_n \mathbf{Q}_f(x_n,y_n) &= \lim_n f^{-1}\left(\frac{f(x_n)+f(y_n)}{2}\right) = f^{-1}\left(\lim_n \frac{f(x_n)+f(y_n)}{2}\right)\\ &= f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = \mathbf{Q}_f(x,y),\end{aligned}$$

st $\mathbf{Q}_f$ on pidev puntkis (x,y).

Aksioomide (M2) ja (M3) kehtivus on ilmne.

(M4) Kui $x < x'$, siis

$$\mathbf{Q}_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) < f^{-1}\left(\frac{f(x')+f(y)}{2}\right) = \mathbf{Q}_f\,(x',y)\,.$$

Kuna $\mathbf{Q}_f$ rahuldab aksioome (M1)–(M4), siis on ta keskmine.

Näide 2.1. Olgu $I = \mathbb{R}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $f\,(x) := x$, siis $f^{-1}(z) = z$. Seega

$$\mathbf{Q}_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2},$$

st funktsiooniga f määratud kvaasi-aritmeetiliseks keskmiseks on tavaline aritmeetiline keskmine.

Näide 2.2. Olgu $I = (0,\infty)$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $f(x) := \ln x$, siis $f^{-1}(z) = e^z$. Kuna $\frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{\ln x + \ln y}{2} = \frac{1}{2}\ln(xy) = \ln\sqrt{xy}$, siis

$$\mathbf{Q}_f(x,y) = e^{\ln\sqrt{xy}} = \sqrt{xy}.$$

Seega funktsiooniga f määratud kvaasi-aritmeetiliseks keskmiseks on geomeetriline keskmine.

Näide 2.3. Olgu $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $f(x) := \frac{1}{x}$, siis $f^{-1}(z) = \frac{1}{z}$. Seega

$$\mathbf{Q}_f(x,y) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}} = \frac{2}{\frac{x+y}{xy}} = \frac{2xy}{x+y},$$

st funktsiooniga f määratud kvaasi-aritmeetiliseks keskmiseks on harmooniline keskmine.

Lause 2.4. *Kvaasi-aritmeetiline keskmine $\boldsymbol{Q}_f$ on bisümmeetriline.*

Tõestus. Olgu $f\colon I \to \mathbb{R}$ pidev rangelt monotoonne funktsioon ning

$$\mu(x,y) := \mathbf{Q}_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \qquad \big((x,y) \in Q\big).$$

Siis

$$f\big(\mu(x,y)\big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

ja

$$\begin{aligned} f\Big(\mu\big(\mu(x,y), \mu(z,t)\big)\Big) &= \frac{f\big(\mu(x,y)\big) + f\big(\mu(z,t)\big)}{2} = \frac{\frac{f(x)+f(y)}{2} + \frac{f(z)+f(t)}{2}}{2} \\ &= \frac{\frac{f(x)+f(z)}{2} + \frac{f(y)+f(t)}{2}}{2} = f\Big(\mu\big(\mu(x,z), \mu(y,t)\big)\Big). \end{aligned}$$

Seega

$$\mu\big(\mu(x,y), \mu(z,t)\big) = \mu\big(\mu(x,z), \mu(y,t)\big),$$

st kvaasi-aritmeetiline keskmine on bisümmeetriline. □

Teoreem 2.5. *Olgu $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ pidevad rangelt monotoonsed funktsioonid. Võrdus $\boldsymbol{Q}_f = \boldsymbol{Q}_g$ kehtib parajasti siis, kui leiduvad sellised $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\alpha \neq 0$ ja $g = \alpha f + \beta$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_g$. Lähtudes kvaasi-aritmeetilise keskmise $\mathbf{Q}_f$ definitisoonist, saame kirjutada, et

$$f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = \mathbf{Q}_f(x,y) = \mathbf{Q}_g(x,y) = g^{-1}\left(\frac{g(x)+g(y)}{2}\right),$$

seega

$$g \circ f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

Vastavalt järeldusele 2.3 on $g \circ f^{-1}$ lineaarne funktsioon, st leiduvad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\alpha \neq 0$ ja

$$g \circ f^{-1}(u) = \alpha u + \beta \quad \big(u = f(x) \in f(I)\big)$$

ehk

$$g(x) = \alpha f(x) + \beta \quad (x \in I).$$

Piisavus. Olgu $g = \alpha f + \beta$, kus $\alpha \neq 0$. Siis suvaliste $x, y \in I$ korral

$$\begin{aligned} g\big(\mathbf{Q}_g(x,y)\big) &= \frac{g(x)+g(y)}{2} = \frac{\alpha f(x) + \beta + \alpha f(g) + \beta}{2} = \alpha \frac{f(x)+f(y)}{2} + \beta \\ &= \alpha \mathbf{Q}_f(x,y) + \beta = g\big(\mathbf{Q}_f(x,y)\big), \end{aligned}$$

st

$$\mathbf{Q}_g(x,y) = \mathbf{Q}_f(x,y).$$

□

2.3 Aczéli teoreem

Meenutame, et keskmist $\mu\colon Q \to I$ nimetatakse *bisümmeetriliseks*, kui

$$\mu\big(\mu\left(x,y\right), \mu\left(z,t\right)\big) = \mu\big(\mu\left(x,z\right), \mu(y,t)\big) \quad (x,y,z,t \in I).$$

Moodustame funktsioonid
$\psi_1\left(x_1, x_2\right) := \mu\left(x_1, x_2\right)$,
$\psi_2\left(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\right) := \mu\big(\mu\left(x_{11}, x_{12}\right), \mu\left(x_{21}, x_{22}\right)\big)$,
$\psi_3\left(x_{111}, x_{112}, x_{121}, x_{122}, x_{211}, x_{212}, x_{221}, x_{222}\right)$
$:= \mu\Big(\mu\big(\mu\left(x_{111}, x_{112}\right), \mu\left(x_{121}, x_{122}\right)\big), \mu\big(\mu\left(x_{211}, x_{212}\right), \mu\left(x_{221}, x_{222}\right)\big)\Big)$
jne.

Üldiselt on ψ_k 2^k muutuja funktsioon. Kui μ on bisümmeetriline, siis juhul $k = 2$ saame, et

$$\psi_2(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \psi_2(x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}).$$

Kasutades keskmise hariliku monotoonsuse omadust $\mu(x,y) = \mu(y,x)$, võime kirjutada, et

$$\psi_2(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = \psi_2(x_{12}, x_{11}, x_{21}, x_{22}),$$

jne. Seega tegelikult võime funktsiooni ψ_2 argumente võtta suvalises järjekorras, funktsiooni väärtused sellest ei muutu. Sama väide kehtib ka ülejäänud $k \in \mathbb{N}$ korral.

Eespool veendusime (vt lause 2.4), et iga kvaasi-aritmeetiline keskmine on bisümmeetriline. Järgnev Aczéli teoreem, mis on tõestatud artiklis [A], väidab, et keskmine on kvaasi-aritmeetiline parajasti siis, kui ta on bisümmeetriline.

Teoreem 2.6. *Kui keskmine $\mu\colon Q \to \mathbb{R}$ on bisümmeetriline, siis leidub selline pidev rangelt kasvav funktsioon $f\colon I \to \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust*

$$\mu(x,y) = f^{-1}\left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right) \quad (x,y \in I), \tag{2.3}$$

st $\mu = \mathbf{Q}_f$.

TÕESTUS. Esitame tõestuse kahes osas. Esimeses osas vaatleme juhtu, kus I on mingi lõik ning teises osas juhtu, kus I on suvaline intervall.

I. Olgu $I = [a,b]$ mingi lõik ja olgu $\mu\colon Q \to \mathbb{R}$ bisümmeetriline keskmine. Meie eesmärgiks on leida pidev rangelt kasvav funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ omadusega (2.3). Selleks konstrueerime funktsiooni f pöördfunktsiooni $\varphi := f^{-1}$, kus $\varphi\colon [0,1] \to [a,b]$. Funktsioon φ peab olema rangelt kasvav, pidev ja rahuldama tingimust

$$\mu\big(\varphi(u),\varphi(v)\big) = \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right), \tag{2.4}$$

kus $u = f(x)$ ja $v = f(y)$ on lõigu $[0,1]$ suvalised punktid.

A. Tähistame

$$D := \left\{\frac{q}{2^k}\,\middle|\; q \in \{0,...,2^k\},\;\; k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

ja defineerime funktsiooni φ esialgu hulgas D :

kui $k = 0$, siis

$$\begin{aligned}\varphi(0) &:= r_0^{(0)} := a = \mu(a,a),\\ \varphi(1) &:= r_1^{(0)} := b = \mu(b,b);\end{aligned}$$

kui $k = 1$, siis

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \mu(a,a) = r_0^{(0)} =: r_0^{(1)},\\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) &:= r_1^{(1)} := \mu(a,b),\\ \varphi(1) &= \mu(b,b) = r_1^{(0)} =: r_2^{(1)};\end{aligned}$$

kui $k=2$, siis

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \mu(a,a) = r_0^{(1)} =: r_0^{(2)},\\ \varphi\left(\frac{1}{4}\right) &:= r_1^{(2)} := \mu\big(r_0^{(1)}, r_1^{(1)}\big) = \mu\big(\mu(a,a), \mu(a,b)\big),\\ \varphi\left(\frac{1}{2}\right) &= \mu(a,b) = r_1^{(1)} =: r_2^{(2)},\\ \varphi\left(\frac{3}{4}\right) &:= r_3^{(2)} := \mu\big(r_1^{(1)}, r_2^{(1)}\big) = \mu\big(\mu(a,b), \mu(b,b)\big),\\ \varphi\,(1) &= \mu(b,b) = r_2^{(1)} =: r_4^{(2)}\end{aligned}$$

jne. Üldiselt

$$\varphi\left(\frac{2q}{2^{k+1}}\right) := r_{2q}^{(k+1)} := \mu\left(r_q^{(k)}, r_q^{(k)}\right)$$

ja

$$\varphi\left(\frac{2q+1}{2^{k+1}}\right) := r_{2_{q+1}}^{(k+1)} := \mu\left(r_q^{(k)}, r_{q+1}^{(k)}\right).$$

Kui arvutada rekursiivselt, saame juhul $k \in \mathbb{N}_0$ funktsiooni ψ_{k+1}, milles muutujatena esinevad vaid arvud a ja b. Osutub, et arvu $r_p^{(k)}$ sellises esituses esineb arv b funktsiooni ψ_k argumentide hulgas täpselt p korda. Kontrollime seda matemaatilise induktsiooni abil. Väide kehtib kui $k=1$. Oletame, et ta kehtib naturaalarvu k korral ja veendume, et siis ka juhul $k+1$. Tõepoolest, kuna arvu $r_q^{(k)}$ esituses arv b esineb q korda, siis avaldises

$$r_{2q}^{(k+1)} = \mu\left(r_q^{(k)}, r_q^{(k)}\right)$$

esineb ta $q+q=2q$ korda ning avaldises

$$r_{2q+1}^{(k+1)} = \mu\left(r_q^{(k)}, r_{q+1}^{(k)}\right)$$

aga $q+(q+1)=2q+1$ korda.

B. Märgime funktsiooni $\varphi\colon\ D \to [a,b]$ kolme omadust.

(a) Kui $q_1+q_2 = q_1'+q_2'$, siis

$$r_{q_1+q_2}^{(k+1)} = r_{q_1'+q_2'}^{(k+1)} = r_{2q+s}^{(k+1)},$$

kus $2q+s = q_1+q_2$ ja $s=0$ või $s=1$. Tõepoolest, mõlema arvu $r_{q_1+q_2}^{(k+1)}$ ja $r_{q_1'+q_2'}^{(k+1)}$ esituses esineb arv b ühepalju kordi, seejuures funktsiooni ψ_{k+1} sümmeetriaomadusi arvestades

$$r_{q_1+q_2}^{(k+1)} = r_{q_1'+q_2'}^{(k+1)}.$$

(b) Funktsioon $\varphi\colon\ D \to [a,b]$ on rangelt kasvav. Olgu $u = \frac{q_1}{2^k}$ ja $v = \frac{q_2}{2^k}$ sellised arvud hulgast D, et $u < v$. Siis $q_1 < q_2$, mistõttu

$$\varphi(u) = \varphi\left(\frac{q_1}{2^k}\right) = r_{q_1}^{(k)} < r_{q_2}^{(k)} = \varphi\left(\frac{q_2}{2_k}\right) = \varphi(v).$$

(c) Hulgas D rahuldab funktsioon φ tingimust (2.4). Olgu $u = \frac{q_1}{2^k}$ ja $v = \frac{q_2}{2^k}$ suvalised punktid hulgas D, siis

$$\frac{u+v}{2} = \frac{q_1+q_2}{2^{k+1}} = \frac{2q+s}{2^{k+1}},$$

kus $s = 0$ või $s = 1$. Seega

$$\mu\big(\varphi(u), \varphi(v)\big) = \mu\left(\varphi\left(\frac{q_1}{2^k}\right), \varphi\left(\frac{q_2}{2^k}\right)\right) = \mu\left(r_{q_1}^{(k)}, r_{q_2}^{(k)}\right) = \mu\left(r_q^{(k)}, r_{q+s}^{(k)}\right) = r_{2q+s}^{(k+1)}$$
$$= \varphi\left(\frac{2q+s}{2^{k+1}}\right) = \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

C. Jätkame funktsiooni φ hulgast D kogu lõiku $[0,1]$. Kõigepealt märgime, et hulk D on lõigus $[0,1]$ tihe: kui $0 \le u < v \le 1$, siis võtame $k \in \mathbb{N}$ nii suure, et $\frac{1}{2^k} < v - u$, sel juhul leidub niisugune $q \in \{0, ..., 2^k\}$, et $u < \frac{q}{2^k} < v$.

Olgu $u \in (0,1)$ suvaline. Kuna D on tihe hulk, siis saame leida tema elementidest moodustatud jadad $\left(z_i^{(1)}\right)$ ja $\left(z_j^{(2)}\right)$ nii, et

$$z_i^{(1)} \uparrow u \quad \text{ja} \quad z_j^{(2)} \downarrow u.$$

Siis jada $\left(\varphi\left(z_i^{(1)}\right)\right)$ on kasvav ja $\left(\varphi\left(z_j^{(2)}\right)\right)$ on kahanev, sest funktsioon φ on hulgas D rangelt kasvav. Need jadad on tõkestatud ning monotoonsusprintsiibi kohaselt eksisteerivad lõplikud piirväärtused

$$\lim_i \varphi\left(z_i^{(1)}\right) =: y_1 \quad \text{ja} \quad \lim_j \varphi\left(z_j^{(2)}\right) =: y_2,$$

seejuures $y_1 \le y_2$. Näitame, et $y_1 = y_2$. Selleks oletame vastuväiteliselt, et $y_1 < y_2$, siis vastavalt keskmise μ vahepealsuse omadusele

$$y_1 < m := \mu(y_1, y_2) < y_2.$$

Leiame sellise $\varepsilon > 0$, et

$$y_1 + \varepsilon < m < y_2 - \varepsilon.$$

Kuna μ on punktis (y_1, y_2) pidev kahe muutuja funktsioon, siis leidub selline $\delta > 0$, et kui $y_1', y_2' \in I$ ja $|y_1 - y_1'| < \delta, |y_2 - y_2'| < \delta$, siis

$$|\mu(y_1, y_2) - \mu(y_1', y_2')| < \varepsilon$$

ehk

$$m - \varepsilon < \mu\big(y_1', y_2'\big) < m + \varepsilon.$$

Võttes arvesse, et $\varphi\left(z_i^{(1)}\right) \longrightarrow y_1$ ja $\varphi\left(z_j^{(2)}\right) \longrightarrow y_2$, kui $i, j \to \infty$, siis võime arvu y_1' valida jada $\varphi\left(z_i^{(1)}\right)$ liikmete hulgast ja y_2' jada $\varphi\left(z_j^{(2)}\right)$ liikmete hulgast. Niisiis, olgu

$$y_1' = \varphi\left(z_{i_0}^{(1)}\right) \quad \text{ja} \quad y_2' = \varphi\left(z_{j_0}^{(2)}\right).$$

Seejuures võime i_0 ja j_0 valida nii, et arvude $z_{i_0}^{(1)}$ ja $z_{j_0}^{(2)}$ aritmeetiline keskmine $z := \frac{z_{i_0}^{(1)} + z_{j_0}^{(2)}}{2}$ rahuldab tingimust

$$z < u.$$

Nimelt, kui mingid $z_{i_1}^{(1)}$ ja $z_{j_1}^{(2)}$ rahuldavad tingimusi

$$\left|y_1 - \varphi\left(z_{i_1}^{(1)}\right)\right| < \delta \quad \text{ja} \quad \left|y_2 - \varphi\left(z_{j_1}^{(2)}\right)\right| < \delta,$$

siis valime $j_0 := j_1$ ja $i_0 \geq i_1$ nii suure, et $\frac{z_{i_0} + z_{j_0}}{2} > u$.

Kuna $u < z$ ja $z_j^{(2)} \to u$, siis leidub selline j_2, et $u < z_{j_2}^{(2)} < z$. Seega

$$\varphi(z) > \varphi\left(z_{j_2}^{(2)}\right) \geq \lim_{j \to \infty} \varphi\left(z_j^{(2)}\right) = y_2.$$

Teisalt, kui $z_{i_0}^{(1)} = \frac{q_1}{2^k}$ ja $z_{j_0}^{(2)} = \frac{q_2}{2^k}$, siis

$$z = \frac{z_{i_0}^{(1)} + z_{j_0}^{(2)}}{2} = \frac{q_1 + q_2}{2^{k+1}}$$

ja

$$\varphi(z) = \varphi\left(\frac{q_1 + q_2}{2^{k+1}}\right) = r_{q_1+q_2}^{(k+1)} = \mu\left(\varphi\left(\frac{q_1}{2^k}\right), \varphi\left(\frac{q_2}{2^k}\right)\right) = \mu\left(y_1', y_2'\right) < m + \varepsilon < y_2.$$

Saime vastuolu, seega $y_1 = y_2$.

Defineerime

$$\varphi(u) := \lim_i \varphi(z_i), \text{ kus } \quad z_i \in D \ (i \in \mathbb{N}) \quad \text{ja} \quad z_i \to u \ \text{ monotoonselt.} \tag{2.5}$$

Eelneva arutelu kohaselt on arv $\varphi(u)$ üheselt määratud. Oleme defineerinud funktsiooni

$$\varphi\colon\ [0,1] \to [a,b].$$

D. Näitame, et funktsioon φ on rangelt kasvav, pidev ja rahuldab tingimust (2.4).

(i) Olgu $0 \le u < v \le 1$, valime z_1 ja z_2 hulgast D nii, et

$$u < z_1 < z_2 < v.$$

Olgu jadad $\left(z_i^{(1)}\right)$ ja $\left(z_j^{(2)}\right)$ sellised, et

$$z_i^{(1)} \uparrow u \quad \text{ja} \quad z_j^{(2)} \downarrow v,$$

kus $z_i^{(1)}, z_j^{(2)} \in D$ $(i,j \in \mathbb{N})$. Siis $z_i^{(1)} < z_1 < z_2 < z_j^{(2)}$ $(i,j \in \mathbb{N})$, mistõttu

$$\varphi\left(z_i^{(1)}\right) < \varphi(z_1) < \varphi(z_2) < \varphi\left(z_j^{(2)}\right)$$

ning

$$\varphi(u) = \lim_i \varphi\left(z_i^{(1)}\right) \le \varphi(z_1) < \varphi(z_2) \le \lim_j \varphi\left(z_j^{(2)}\right) = \varphi(v).$$

Seega on funktsioon φ rangelt kasvav lõigus $[0,1]$.

(ii) Uurime funktsiooni φ pidevust. Olgu $u \in (0,1)$ suvaline ja olgu $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $\delta > 0$, et

$$\big[v \in [0,1],\ \ |u-v| < \delta\big] \Longrightarrow |\varphi(u) - \varphi(v)| < \varepsilon.$$

Moodustame jadad $\left(z_i^{(1)}\right)$ ja $\left(z_i^{(2)}\right)$ nii, et $z_i^{(1)}, z_i^{(2)} \in D$ ning $z_i^{(1)} \uparrow u$ ja $z_i^{(2)} \downarrow u$. Definitsiooni (2.5) kohaselt $\varphi\left(z_i^{(1)}\right) \uparrow \varphi(u)$ ja $\varphi\left(z_i^{(2)}\right) \downarrow \varphi(u)$, seega saab leida $i_0 \in \mathbb{N}$ nii, et kui $i \ge i_0$, siis

$$\left|\varphi\left(z_i^{(1)}\right) - \varphi(u)\right| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \left|\varphi\left(z_i^{(2)}\right) - \varphi(u)\right| < \varepsilon.$$

Võtame $\delta := \min\left\{u - z_{i_0}^{(1)},\ z_{i_0}^{(2)} - u\right\}$. Olgu $v \in [0,1]$ selline arv, et $|u-v| < \delta$ ehk $u - \delta < v < u + \delta$, st

$$z_{i_0}^{(1)} < v < z_{i_0}^{(2)}.$$

Seega saame, et

$$\varphi\left(z_{i_0}^{(1)}\right) < \varphi(v) < \varphi\left(z_{i_0}^{(2)}\right)$$

ehk
$$\varphi\left(z_{i_0}^{(1)}\right)-\varphi(u)<\varphi(v)-\varphi(u)<\varphi\left(z_{i_0}^{(2)}\right)-\varphi(u),$$
millest tulenevalt
$$|\varphi(v)-\varphi(u)|<\max\Big\{\varphi\left(z_{i_0}^{(2)}\right)-\varphi(u),\ \varphi(u)-\varphi\left(z_{i_0}^{(1)}\right)\Big\}<\varepsilon.$$
Kui $u=0$, siis valime $z_i^{(1)}=0$ $(i\in\mathbb{N})$ ning kui $u=1$, siis $z_i^{(2)}=1$ $(i\in\mathbb{N})$. Seega on $\varphi\colon\ [0,1]\to[a,b]$ pidev funktsioon.

(iii) Eesmärgiks on näidata, et $\mu\big(\varphi(u),\varphi(v)\big)=\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$ suvaliste $u,v\in[0,1]$ korral. Moodustame jadad $\left(z_i^{(1)}\right)$ ja $\left(z_i^{(2)}\right)$ hulga D elementidest nii, et $z_i^{(1)}\to u$ ja $z_i^{(2)}\to v$. Siis
$$\frac{z_i^{(1)}+z_i^{(2)}}{2}\longrightarrow\frac{u+v}{2},$$
seejuures, vastavalt eelpool tõestatud omadusele (c), kehtib võrdus
$$\mu\bigg(\varphi\left(z_i^{(1)}\right),\varphi\left(z_i^{(2)}\right)\bigg)=\varphi\left(\frac{z_i^{(1)}+z_i^{(2)}}{2}\right)\quad(i\in\mathbb{N}).$$
Kuna mõlemad funktsioonid $\varphi\colon\ [0,1]\to[a,b]$ ja $\mu\colon\ Q\to I$ on pidevad, siis
$$\mu\big(\varphi(u),\varphi(v)\big)=\lim_i\mu\bigg(\varphi\left(z_i^{(1)}\right),\varphi\left(z_i^{(2)}\right)\bigg)=\lim_i\varphi\left(\frac{z_i^{(1)}+z_i^{(2)}}{2}\right)=\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right).$$
Seega on väide tõestatud juhul, kui $I=[a,b]$.

II. Olgu nüüd $I\subset\mathbb{R}$ suvaline intervall. Saame leida sellise lõikude $I_n:=[a_n,b_n]$ jada (I_n), et $I_1\subset I_2\subset...\subset I_n\subset...$ ja $I=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}I_n$. Näitame kõigepealt, et leiduvad pidevad, rangelt kasvavad funktsioonid $f_n\colon\ I_n\to\mathbb{R}$, et $Q_{f_n}(x,y)=\mu(x,y)$ kõikide $x,y\in I_n$ korral ja
$$f_n(x)=f_k(x)\quad(x\in I_k),\ \text{kus}\ k=1,...,n. \tag{2.6}$$
Selleks leiame vastavalt tõestuse osale **I** $f_1\colon\ [a_1,b_1]\to[0,1]$ vastavate omadustega, seega väide kehtib juhul $k=1$. Eeldame, et funktsioonid $f_1,f_2,...,f_n$ on defineeritud vastavate omadustega ja näitame, kuidas määratakse f_{n+1}. Leiame funktsiooni $\tilde{f}_{n+1}\colon\ I_{n+1}\to\mathbb{R}$ vastavalt osale **I**. Teatavasti (vt teoreem 2.5) leiduvad sellised $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\mathbb{R}$, et $\tilde{\alpha}\neq0$ ja
$$Q_{\tilde{f}_{n+1}}=Q_{\tilde{\alpha}\tilde{f}_{n+1}+\tilde{\beta}}.$$

Valime seejuures $\tilde{\alpha}$ ja $\tilde{\beta}$ nii, et kui tähistada $f_{n+1} := \tilde{\alpha}\tilde{f}_{n+1} + \tilde{\beta}$, siis

$$f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) \quad \text{ja} \quad f_{n+1}(b_n) = f_n(b_n).$$

Sellised $\tilde{\alpha}$ ja $\tilde{\beta}$ leiduvad, nende leidmiseks tuleb lahendada lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}\tilde{f}_{n+1}(a_n) + \tilde{\beta} = f_n(a_n) \\ \tilde{\alpha}\tilde{f}_{n+1}(b_n) + \tilde{\beta} = f_n(b_n). \end{cases}$$

Sellel süsteemil on lahend, sest tema determinant on nullist erinev:

$$\begin{vmatrix} \tilde{f}_{n+1}(a_n) & 1 \\ \tilde{f}_{n+1}(b_n) & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Näitame, et $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ iga $x \in [a_n, b_n]$ korral. Kuna

$$Q_{f_{n+1}}(x,y) = \mu(x,y) = Q_{f_n}(x,y) \quad (x, y \in I_n),$$

siis teoreemi 2.5 põhjal leiduvad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kus $\alpha \neq 0$, et

$$f_{n+1}(x) = \alpha f_n(x) + \beta \quad (x \in I_n).$$

Seejuures

$$\alpha f_n(a_n) + \beta = f_n(a_n)$$

ja

$$\alpha f_n(b_n) + \beta = f_n(b_n),$$

mistõttu $\alpha\big(f_n(a_n) - f_n(b_n)\big) = f_n(a_n) - f_n(b_n)$, seega $\alpha = 1$ ja $\beta = 0$.

Kokkuvõttes

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) \quad (x \in I_n).$$

Defineerime funktsiooni $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ seosega

$$f(x) := f_n(x), \quad \text{kui } x \in I_n.$$

Funktsioonide f_n omadus (2.6) garanteerib selle definitsiooni korrektsuse.

Paneme tähele, et f on rangelt kasvav: kui $x, y \in I$ ja $x < y$, siis leiame sellise $n \in \mathbb{N}$, et $x, y \in I_n$. Siit saame, et

$$f(x) = f_n(x) < f_n(y) = f(y).$$

Teiseks, f on pidev igas punktis $x \in I$, sest kui $x \in I_n$, siis f_n on punktis x pidev.

Lõpuks, kui $x, y \in I$ ja n on valitud nii, et $x, y \in I_n$, siis

$$f\big(\mu(x,y)\big) = f_n\big(\mu(x,y)\big) = \frac{f_n(x) + f_n(y)}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Seega on väide tõestatud ka juhul, kus I on suvaline intervall.

Kokkuvõttes saime, et keskmine $\mu\colon Q \to \mathbb{R}$ on kvaasi-aritmeetiline parajasti siis, kui ta on bisümmeetriline. $\square$

3 Rangelt monotoonse funktsiooni Lagrange'i keskmine

3.1 Lagrange'i keskmise definitsioon ja omadused

Lagrange'i keskmise defineerimisel on lähtekohaks järgmine tuntud integraali keskväärtusteoreem.

Teoreem 3.1. *Kui funktsioon* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *on pidev, siis leidub arv* $c \in (a,b)$, *et*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Märgime, et kui lisaks pidevusele eeldada funktsiooni f ranget monotoonsust, siis on arv $c \in (a,b)$ teoreemis 3.1 üheselt määratud.

Definitsioon 3.1. Olgu $f\colon I \to \mathbb{R}$ pidev rangelt monotoonne funktsioon. Kahe muutuja funktsiooni $\mathbf{L}_f\colon Q \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$\mathbf{L}_f(x,y) := \begin{cases} f^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)dt\right), & \text{kui } x \neq y, \\ x, & \text{kui } x = y, \end{cases}$$

nimetatakse *funktsiooniga* f *määratud* (lühemalt *funktsiooni* f) *Lagrange'i keskmiseks.*

Tähistades

$$F(z) := \int\limits_x^z f(t)dt \quad (z \in I),$$

saame tänu seosele $F'(z) = f(z)$ esitada funktsiooni f Lagrange'i keskmise kujul

$$\mathbf{L}_f(x,y) = \begin{cases} (F')^{-1}\left(\frac{F(y)-F(x)}{y-x}\right) =: \xi, & \text{kui } x \neq y, \\ x, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Seejuures saame seose $\mathbf{L}_f(x,y) = \xi$ kirjutada kujul

$$\frac{F(y)-F(x)}{y-x} = F'(\xi) = F'\left(\mathbf{L}_f(x,y)\right),$$

see on põhjus, miks funktsiooni $\mathbf{L}_f\colon Q \to \mathbb{R}$ nimetatakse Lagrange'i keskmiseks [MHT].

Lause 3.2. *Iga pideva rangelt monotoonse funktsiooniga $f\colon I \to \mathbb{R}$ määratud Lagrange'i keskmine $\boldsymbol{L}_f$ on keskmine, st $\boldsymbol{L}_f$ rahuldab hulgas Q tingimusi* (M1)–(M4).

Tõestus. (M1) Olgu $(x,y) \in Q$ suvaline ja olgu $\big((x_n, y_n)\big)$ selline jada hulgast Q, et $x_n \to x$ ja $y_n \to y$. Eesmärgiks on näidata, et $\mathbf{L}_f(x_n, y_n) \longrightarrow \mathbf{L}_f(x,y)$.

Esialgu vaatame juhtu, kus $x \neq y$. Võime eeldada, et $x_n \neq y_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis arvestades funktsioonide f^{-1} ja $x \longmapsto \int\limits_a^x f(t)dt$ pidevust, saame, et

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_f(x_n, y_n) &= f^{-1}\left(\frac{1}{y_n - x_n}\int\limits_{x_n}^{y_n} f(t)dt\right) \\
&= f^{-1}\left(\frac{1}{y_n - x_n}\int\limits_{a}^{y_n} f(t)dt - \frac{1}{y_n - x_n}\int\limits_{a}^{x_n} f(t)dt\right) \\
&\longrightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{y - x}\int\limits_{a}^{y} f(t)dt - \frac{1}{y - x}\int\limits_{a}^{x} f(t)dt\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{y - x}\int\limits_{x}^{y} f(t)dt\right) \\
&= \mathbf{L}_f(x,y).
\end{aligned}$$

Teisalt, kui $x = y$, siis $x_n \to x$ ja $y_n \to x$. Kui seejuures $x_n = y_n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis

$$\mathbf{L}_f(x_n, y_n) = x_n \longrightarrow x = \mathbf{L}_f(x,y).$$

Kui aga $x_n \neq y_n$, siis keskväärtusteoreemi 3.1 kohaselt

$$\mathbf{L}_f(x_n, y_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{y_n - x_n}\int\limits_{x_n}^{y_n} f(t)dt\right) = f^{-1}\big(f\,(c_n)\big) = c_n \longrightarrow x,$$

kus $\quad x_n < c_n < y_n \quad$ ja $\quad f(c_n) = \frac{1}{y_n - x_n}\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt \quad (n \in \mathbb{N})$.

Kokkuvõttes, kui $(x_n, y_n) \to (x,y)$, siis $\mathbf{L}_f(x_n, y_n) \longrightarrow (x_n, y_n)$.

Aksioomide (M2) ja (M3) kehtivus on ilmne.

(M4) Eeldame esialgu, et f on rangelt kasvav ja olgu $x \in I$ suvaliselt fikseeritud. Tähistame

$$\theta_x(y) := \frac{1}{y - x}\int\limits_{x}^{y} f(t)dt \quad \big(y \in I \setminus \{x\}\big),$$

siis

$$\theta_x'(y) = \frac{(y-x)f(y) - \int\limits_x^y f(t)dt}{(y-x)^2} = \frac{(y-x)f(y) - (y-x)f(x)}{(y-x)^2} \tag{3.1}$$
$$= \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Paneme tähele, et $\theta_x'(y) > 0:$ kui $y > x$, siis $f(y) > f(x)$ ja seega $\theta_x'(y) > 0$, juhul $y < x$ kehtib võrratus $f(y) < f(x)$ ning samuti $\theta_x'(y) > 0$. Seega on θ_x hulgas $I \setminus \{x\}$ rangelt kasvav funktsioon, järelikul on ka

$$f^{-1} \circ \theta_x \colon\ I \setminus \{x\} \to \mathbb{R}$$

rangelt kasvav. Sama tulemuse saame ka juhul, kui f on rangelt kahanev.

Näitame, et kui $\mathbf{L}_f$ on teise muutuja järgi rangelt kasvav, siis on ta seda ka esimese muutuja järgi. Olgu $y, y' \in I$, kus $y < y'$. Vaatleme kolme juhtu.

Esiteks, olgu $x \neq y$ ja $x \neq y'$, siis

$$\mathbf{L}_f(x,y) = f^{-1} \circ \theta_x(y) < f^{-1} \circ \theta_x(y') = \mathbf{L}_f(x,y').$$

Teiseks, kui $x = y < y'$, siis keskväärtusteoreemi 3.1 kohaselt leidub selline $c \in (x, y')$, et $f(c) = \frac{1}{y'-x} \int\limits_x^{y'} f(t)dt$, seega

$$\mathbf{L}_f(x,y) = x < c = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}\left(\frac{1}{y'-x}\int\limits_x^{y'} f(t)dt\right) = \mathbf{L}_f(x,y').$$

Kolmandaks, olgu $y < y' = x$ ning $c \in (y, x)$ selline punkt, et $f(c) = \frac{1}{y-x} \int\limits_x^{y} f(t)dt$. Siis

$$\mathbf{L}_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int\limits_x^{y} f(t)dt\right) = f^{-1}\big(f(c)\big) = c < x' = \mathbf{L}_f(x,y').$$

$\square$

Näide 3.1. Vaatleme lineaarset funktsiooni

$$f \colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ kus } \quad f(x) := \alpha x + \beta$$

ja $\alpha \neq 0$. Siis suvaliste $x, y \in \mathbb{R}$, kus $x \neq y$, saame, et

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_f(x,y) &= f^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y (\alpha t + \beta)\,dt\right) \\
&= f^{-1}\left(\alpha\frac{1}{2(y-x)}(y^2-x^2) + \beta\frac{1}{y-x}(y-x)\right) = f^{-1}\left(\alpha\frac{x+y}{2} + \beta\right) \\
&= f^{-1}\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = \frac{x+y}{2},
\end{aligned}$$

Seega lineaarse funktsiooni f Lagrange'i keskmine on kujul

$$\mathbf{L}_f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, & \text{kui } x \neq y, \\ x, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Näide 3.2. Olgu $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ja

$$f\colon\ I \to \mathbb{R}, \text{ kus } \quad f(x) := \cos x.$$

Kui $x, y \in I$ ja $x \neq y$, siis

$$\mathbf{L}_f(x,y) = f^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y \cos t dt\right) = f^{-1}\left(\frac{\sin y - \sin x}{y-x}\right) = \arccos\frac{\sin y - \sin x}{y-x}.$$

Seega on koosinusfunktsiooni Lagrange'i keskmine kujul

$$\mathbf{L}_f(x,y) = \begin{cases} \arccos\frac{\sin y - \sin x}{y-x}, & \text{kui } x \neq y, \\ x, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Märkus 3.1. Osutub, et kõik keskmised ei ole esitatavad Lagrange'i keskmistena. Saab näidata, et harmooniline keskmine

$$(x,y) \longmapsto \frac{2xy}{x+y}$$

ei ole ühegi funktsiooni f Lagrange'i keskmine (vt [BM]).

Teoreem 3.3. *Olgu $I \subset \mathbb{R}$ mingi intervall. Keskmine $\mu\colon\ Q \to I$ on funktsiooniga $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ määratud Lagrange'i keskmine (st $\mu = \mathbf{L}_f$) parajasti siis, kui*

$$f\big(\mu(x,y)\big) = \frac{f\Big(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right)\Big) + f\Big(\mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\Big)}{2} \qquad \big((x,y) \in Q\big). \tag{3.2}$$

TÕESTUS. Kõigepealt märgime, et võrdus (3.2) kehtib suvalise funktsiooni $f\colon I \to \mathbb{R}$ ja suvalise keskmise $\mu\colon Q \to I$ korral, kui $x = y$.

Tarvilikkus. Olgu $\mu\colon Q \to I$ keskmine ja olgu $f\colon I \to \mathbb{R}$ selline pidev ja rangelt monotoonne funktsioon, et $\mathbf{L}_f = \mu$, st

$$f\big(\mu\,(x, y)\big) = \frac{1}{y - x} \int_x^y f(t)dt,$$

kui $(x, y \in I)$ ja $x \neq y$. Integraali aditiivsusomaduse tõttu

$$\begin{aligned} f\left(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\right) &= \frac{2}{y-x}\int_x^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt + \frac{2}{y-x}\int_{\frac{x+y}{2}}^y f(t)dt \\ &= \frac{2}{y-x}\int_x^y f(t)dt = 2f\big(\mu\,(x, y)\big), \end{aligned}$$

seega kehtib võrdus (3.2).

Piisavus. Eeldame, et funktsioonid μ ja f rahuldavad tingimust (3.2), olgu x ja y kaks suvalist punkti hulgast I. Üldisust kitsendamata eeldame, et $x < y$, võrduse (3.2) tõttu

$$\begin{aligned} f\left(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right)\right) &= \frac{f\left(\mu\left(x, \frac{x+\frac{x+y}{2}}{2}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{x+\frac{x+y}{2}}{2}, \frac{x+y}{2}\right)\right)}{2} \\ &= \frac{f\left(\mu\left(x, \frac{3x+y}{4}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{3x+y}{4}, \frac{x+y}{2}\right)\right)}{2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f\left(\mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\right) &= \frac{f\left(\mu\left(\frac{x+y}{2}, \frac{\frac{x+y}{2}+y}{2}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{\frac{x+y}{2}+y}{2}, y\right)\right)}{2} \\ &= \frac{f\left(\mu\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+3y}{4}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{x+3y}{4}, y\right)\right)}{2}, \end{aligned}$$

seega

$$f\big(\mu\,(x, y)\big) = \frac{f\left(\mu\left(x, \frac{3x+y}{4}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{3x+y}{4}, \frac{x+y}{2}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+3y}{4}\right)\right) + f\left(\mu\left(\frac{x+3y}{4}, y\right)\right)}{4}.$$

Paneme tähele, et

$$\frac{3x+y}{4} = x + \frac{y-x}{2^2},$$

$$\frac{x+y}{2} = x + \frac{2(y-x)}{2^2},$$

$$\frac{x+3y}{2} = x + \frac{3(y-x)}{2^2},$$

niisiis,

$$f\big(\mu\left(x,y\right)\big) = \frac{1}{2^2}\sum_{i=1}^{2^2} f\left(\mu\left(x + \frac{\left(i-1\right)\left(y-x\right)}{2^2}, x + \frac{i\left(y-x\right)}{2^2}\right)\right).$$

Niimoodi korduvalt lõike poolitades jõuame n–ndal sammul valemini

$$\begin{aligned}(y-x)\, f\big(\mu\left(x,y\right)\big) &= (y-x)\,\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} f\big(\mu\left(x_{i-1},x_i\right)\big)\\ &= \sum_{i=1}^{2^n} f\big(\mu\left(x_{i-1},x_i\right)\big)\frac{y-x}{2^n},\end{aligned} \tag{3.3}$$

kus

$$x_i := x + \frac{i(y-x)}{2^n}.$$

Kuna funktsioon f on pidev, siis on ta lõigus $[x,y]$ integreeruv. Paneme tähele, et avaldis (3.3) on funktsiooni f integraalsumma, mis vastab lõigu $[x,y]$ alajaotusele

$$x = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2^n} = y.$$

Seetõttu

$$(y-x)\, f\big(\mu\left(x,y\right)\big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2^n} f\big(\mu\left(x_{i-1},x_i\right)\big)\frac{y-x}{2^n} = \int_x^y f(t)dt$$

ehk

$$f\big(\mu(x,y)\big) = \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt.$$

Seega on teoreem 3.3 tõestatud. $\square$

3.2 Lagrange'i ja kvaasi-aritmeetiliste keskmiste vahelised seosed

Olgu $\mu\colon Q \to I$ mingi keskmine. Defineerime kujutuse $\Phi\colon Q \to \mathbb{R}^2$ seosega

$$\Phi(x,y) := \left(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right), \mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\right). \tag{3.4}$$

Tänu funktsiooni $\mu\colon Q \to I$ pidevusele on ka kujutus Φ pidev. Et selles veenduda, fikseerime suvalise $(x,y) \in Q$ ning sellise punktide $(x_n, y_n) \in Q$ jada, mis koondub punktiks (x,y), st $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, ning näitame, et $\Phi(x_n,y_n) \to \Phi(x,y)$. Kuna

$$\frac{x_n + y_n}{2} \longrightarrow \frac{x+y}{2},$$

siis funktsiooni μ pidevuse tõttu

$$\mu\left(x_n, \frac{x_n+y_n}{2}\right) \longrightarrow \mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right)$$

ja

$$\mu\left(\frac{x_n+y_n}{2}, y_n\right) \longrightarrow \mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right).$$

Seega

$$\begin{aligned}\Phi\left(x_n, y_n\right) &= \left(\mu\left(x_n, \frac{x_n+y_n}{2}\right), \mu\left(\frac{x_n+y_n}{2}, y_n\right)\right)\\ &\longrightarrow \left(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right), \mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\right) = \Phi\left(x,y\right).\end{aligned}$$

Lause 3.4. *Olgu $\mu\colon Q \to I$ keskmine ja olgu kujutus Φ määratud seosega* (3.4). *Siis $\Phi\colon Q \to \Phi(Q)$ on homöomorfism, st*

1) $\Phi\colon Q \to \mathbb{R}^2$ on üksühene,

2) Φ on pidev,

3) $\Phi^{-1}\colon \Phi(Q) \to Q$ on pidev.

TÕESTUS. Esmalt veendume, et kujutus $\Phi\colon\ Q \to \mathbb{R}^2$ on üksühene. Olgu $\Phi(x_1, y_1) = \Phi(x_2, y_2)$, st

$$\mu\left(x_1, \frac{x_1 + y_1}{2}\right) = \mu\left(x_2, \frac{x_2 + y_2}{2}\right) \tag{3.5}$$

ja

$$\mu\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, y_1\right) = \mu\left(\frac{x_2 + y_2}{2}, y_2\right). \tag{3.6}$$

Meie eesmärgiks on näidata, et $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$. Oletame vastuväiteliselt, et $x_1 < x_2$. Osutub, et sellisel juhul

$$\frac{x_1 + y_1}{2} > \frac{x_2 + y_2}{2}.$$

Tõepoolest, kui kehtiks võrratus

$$\frac{x_1 + y_1}{2} \leq \frac{x_2 + y_2}{2},$$

siis keskmise μ monotoonsusomaduse tõttu

$$\mu\left(x_1, \frac{x_1 + y_1}{2}\right) < \mu\left(x_2, \frac{x_1 + y_1}{2}\right) \leq \mu\left(x_2, \frac{x_2 + y_2}{2}\right),$$

mis on aga vastuolus võrdusega (3.5).

Võrratustest

$$x_1 < x_2 \quad \text{ja} \quad \frac{x_1 + y_1}{2} > \frac{x_2 + y_2}{2}$$

tuleneb võrratus

$$y_2 < y_1,$$

sest vastupidisel juhul $y_2 \geq y_1$ saaksime, et

$$\frac{x_1 + y_1}{2} = \frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2} < \frac{x_2}{2} + \frac{y_1}{2} \leq \frac{x_2}{2} + \frac{y_2}{2} = \frac{x_2 + y_2}{2}.$$

Võrratustest

$$\frac{x_1 + y_1}{2} > \frac{x_2 + y_2}{2} \quad \text{ja} \quad y_2 < y_1$$

tuleneb, et

$$\mu\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, y_1\right) > \mu\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, y_2\right) > \mu\left(\frac{x_2 + y_2}{2}, y_2\right),$$

mis on vastuolus eeldusega (3.6). Seega kehtib võrdus $x_1 = x_2$, võrdus $y_1 = y_2$ tõestatakse analoogselt. Niisiis on kujutus $\Phi\colon\ Q \to \Phi(Q)$ üksühene ning tal leidub pöördkujutus $\Phi^{-1}\colon\ \Phi(Q) \to Q$.

Kujutuse Φ pidevuse tõestasime lausele 3.4 eelnevas märkuses, näitame, et pöördkujutus Φ^{-1} on pidev.

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $I = [a, b]$. Teatavasti on kujutus $T\colon\ X \to Y$, kus X ja Y on meetrilised ruumid, pidev parajasti siis, kui iga kinnise alamhulga $C \subset Y$ originaal $T^{-1}(C) := \{x \in X | T(x) \in C\}$ on kinnine ruumis X. Seejuures on hulk C kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab kõiki oma koonduvate jadade piirväärtuseid, st kui kehtib implikatsioon

$$\big[z_n \in C \quad (n \in \mathbb{N}), \quad z_n \to z \text{ ruumis } Y\big] \Longrightarrow z \in C.$$

Märgime, et kui $Y_0 \subset Y$ on kinnine alamhulk meetrilises ruumis Y, siis hulk $C \subset Y_0$ on kinnine alamruumis Y_0 parajasti siis, kui ta on kinnine ruumis Y. Üldjuhul, kui me ei eelda alamruumi Y_0 kinnisust, tuleneb kinnisusest ruumis Y kinnisus ruumis Y_0. Märgime veel, et meetrilises ruumis $\mathbb{R}^2$ kehtib Bolzano–Weierstrassi teoreem: kui $((x_n, y_n))$ on tõkestatud jada, siis leidub tal koonduv osajada $\big((x_{n_k}, y_{n_k})\big)$.

Näitame, et pöördkujutus $\Phi^{-1}\colon\ \Phi(Q) \to Q$, kus Q on pidev. Selleks võtame suvalise alamhulga $C \subset Q$, mis on kinnine hulgas Q, ja näitame, et $(\Phi^{-1})^{-1}(C) = \Phi(C)$ on kinnine ruumis $\mathbb{R}^2$, siis on ta kinnine ka hulgas $\Phi(Q)$.

Olgu $\big((u_n, v_n)\big)$ selline jada, et $(u_n, v_n) \in \Phi(C) \quad (n \in \mathbb{N})$ ning $(u_n, v_n) \to (u, v)$ ruumis $\mathbb{R}^2$. Tähistame $(x_n, y_n) := \Phi^{-1}(u_n, v_n) \ \ (n \in \mathbb{N})$, siis $\big((x_n, y_n)\big)$ on tõkestatud jada (sest ta koosneb tõkestatud hulga Q elementidest), mistõttu on tal koonduv osajada $\big((x_{n_k}, y_{n_k})\big)$, tähistame $(x, y) := \lim\limits_k (x_{n_k}, y_{n_k})$ ja märgime, et $(x, y) \in C$, sest C on kinnine hulk. Tänu kujutuse Φ pidevusele punktis (x, y) saame, et $(u_{n_k}, v_{n_k}) = \Phi(x_{n_k}, y_{n_k}) \to \Phi(x, y)$. Samal ajal $(u_{n_k}, v_{n_k}) \to (u, v)$, niisiis $(u, v) = \Phi(x, y) \in \Phi(C)$. Järelikult sisaldab $\Phi(C)$ kõikide oma koonduvate jadade piirväärtuseid, st $\Phi(C)$ on kinnine.

Üldjuhul, kui $I \subset \mathbb{R}$ on suvaline intervall, saame leida sellise lõikude $I_k = [a_k, b_k]$ jada (I_k), et $I_k \subset I_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ ja $I = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} I_k$. Tähistame $Q_k := I_k \times I_k$, siis $Q_k \subset Q_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$. Tõestuse esimese osa kohaselt on $\Phi^{-1}\colon\ \Phi(Q_k) \to Q_k$ pidev. Näitame, et Φ^{-1} on pidev suvaliselt fikseeritud punktis $(u, v) \in \Phi(Q)$. Tähistame $(x, y) := \Phi^{-1}(u, v) \in Q$, leiame sellise $n \in \mathbb{N}$, et $(x, y) \in Q_n$, seega $(u, v) \in \Phi(Q_n)$. Kuna Φ^{-1} on pidev hulgas $\Phi(Q_n)$, siis on Φ^{-1} pidev ka punktis (u, v). □

Lause 3.5. *Olgu μ: $Q \to \mathbb{R}$ keskmine ja $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ pidev rangelt monotoonne funktsioon. Selleks, et μ oleks funktsiooniga f määratud Lagrange'i keskmine, on* *tarvilik ja piisav, et kahe muutuja funktsioon*

$$M\colon\ \Phi(Q) \to \mathbb{R},$$

kus $M := \mu \circ \Phi^{-1}$*, oleks funktsiooniga* f *määratud kvaasi-aritmeetilise keskmise ahend hulgas* $\Phi(Q)$*. Teisisõnu,* $\mu = \mathbf{L}_f$ *parajasti siis, kui*

$$\mu \circ \Phi^{-1} = \mathbf{Q}_f|_{\Phi(Q)}.$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Eeldame, et $\mathbf{L}_f = \mu$, kus funktsioon $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ on pidev ja rangelt montotoonne. Teoreemi 3.3 kohaselt

$$f\big(\mu\,(x,y)\big) = \frac{f\Big(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right)\Big) + f\Big(\mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\Big)}{2} \quad (x, y \in I).$$

Kui $(u,v) \in \Phi(Q)$ ja $(x,y) := \Phi^{-1}(u,v)$, siis seosest (3.4) tuleneb, et

$$u = \mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right) \text{ja } v = \mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right).$$

Seega

$$f\big(M\,(u,v)\big) = f\Big(\mu\big(\Phi^{-1}\,(u,v)\,\big)\Big) = f\big(\mu\,(x,y)\big) = \frac{f(u)+f(v)}{2},$$

niisiis $M(u,v) = \mathbf{Q}_f(u,v)$ iga $(u,v) \in \Phi(Q)$ korral.

Piisavus. Eeldame, et $M = \mathbf{Q}_f|_{\Phi(Q)}$. Olgu $(u,v) \in Q$ suvaline, siis

$$f\big(\mu \circ \Phi^{-1}\,(u,v)\big) = \frac{f(u)+f(v)}{2}.$$

Kui $(x,y) := \Phi^{-1}(u,v)$, siis

$$(u,v) = \Phi\,(x,y) = \left(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right), \mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\right)$$

ehk

$$u = \mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right)$$

ja

$$v = \mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right).$$

Saame, et iga $(x,y) \in Q$ korral

$$f\big(\mu\,(x,y)\big) = \frac{f\Big(\mu\,\big(x, \frac{x+y}{2}\big)\Big) + f\Big(\mu\,\big(\frac{x+y}{2}, y\big)\Big)}{2}.$$

See on aga teoreemi 3.3 kohaselt tarvilik ja piisav, et μ oleks funktsiooniga f määratud Lagrange'i keskmine. $\square$

Illustreerime lauset 3.5 mõningate näidetega.

Näide 3.3. Vaatleme geomeetrilist keskmist

$$\mu\colon \big((0,\infty) \times (0,\infty)\big) \to (0,\infty), \quad \mu(x,y) := \sqrt{xy}.$$

Paneme tähele, et suvalise $(u,v) \in \Phi(Q)$ korral

$$(u,v) = \Phi(x,y) = \left(\mu\left(x, \frac{x+y}{2}\right), \mu\left(\frac{x+y}{2}, y\right)\right) = \left(\sqrt{\frac{x^2+xy}{2}}, \sqrt{\frac{xy+y^2}{2}}\right),$$

siis

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

ehk

$$\frac{x+y}{2} = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}.$$

Seega

$$u = \sqrt{x\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}} \quad \text{ja} \quad v = \sqrt{y\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}}$$

ehk

$$x = \frac{u^2}{\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}} \quad \text{ja} \quad y = \frac{v^2}{\sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}}}.$$

Niisiis

$$\Phi^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{2}{u^2+v^2}}u^2, \sqrt{\frac{2}{u^2+v^2}}v^2\right)$$

ja

$$\mu \circ \Phi^{-1}(u,v) = \sqrt{\frac{2}{u^2+v^2}}uv \quad \big((u,v) \in \Phi(Q)\big).$$

Funktsiooni

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x^2}$$

korral

$$\frac{f(u)+f(v)}{2}=\frac{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}}{2}=\frac{u^2+v^2}{2u^2v^2}.$$

Pidades silmas, et $f^{-1}(y)=\frac{1}{\sqrt{y}} \quad (y>0)$, saame

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{f}}(u,v)=f^{-1}\left(\frac{f(u)+f(v)}{2}\right)=\sqrt{\frac{2}{u^2+v^2}}uv.$$

Kokkuvõttes

$$\mu\circ\Phi^{-1}(u,v)=Q_f(u,v) \quad \big((u,v)\in\Phi(Q)\big).$$

Lause 3.5 kohaselt on geomeetriline keskmine funktsiooniga $f(x)=\frac{1}{x^2}$ määratud Lagrange'i keskmine.

Näide 3.4. Vaatleme logaritmilist keskmist

$$\mu\colon\ (1,\infty)\times(1,\infty)\to(1,\infty), \quad \mu(x,y):=\frac{x-y}{\ln x-\ln y}.$$

Kui $(u,v)=\Phi(x,y)\ \in\Phi(C)$, siis

$$u=\mu\left(x,\frac{x+y}{2}\right)=\frac{x-\frac{x+y}{2}}{\ln x-\ln\frac{x+y}{2}}=\frac{x-y}{2(\ln x-\ln\frac{x+y}{2})}$$

ja

$$v=\mu\left(\frac{x+y}{2},y\right)=\frac{\frac{x+y}{2}-y}{\ln\frac{x+y}{2}-\ln y}=\frac{x-y}{2\left(\ln\frac{x+y}{2}-\ln y\right)}.$$

Seega

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=2\frac{\ln x-\ln y}{x-y}=\frac{2}{\mu(x,y)}$$

ja

$$\mu\circ\Phi^{-1}(u,v)=\mu(x,y)=\frac{2}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}=\frac{2uv}{u+v}.$$

Kui $f(x):=\frac{1}{x}$, siis $f^{-1}(y)=\frac{1}{y} \quad \big(y\in(1,\infty)\big)$. Seetõttu

$$\mathbf{Q}_f(u,v)=f^{-1}\left(\frac{f(u)+f(v)}{2}\right)=\left(\frac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{u+v}{2uv}\right)^{-1}=\frac{2uv}{u+v}.$$

Lause 3.5 kohaselt on logaritmiline keskmine funktsiooniga $f(x)=\frac{1}{x}$ määratud Lagrange'i keskmine.

Lause 3.6. *Kui kahe muutuja funktsioon* $\mu\colon Q \to I$ *on mingi pideva rangelt monotoonse funktsiooniga* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *määratud Lagrange'i keskmine (st* $\mu = \boldsymbol{L}_f$*), siis igal sisepunktil* $x \in I$ *leidub selline ümbrus* $U_\delta(x)$*, et*

$$\mu \circ \Phi^{-1}(u,v) = \boldsymbol{Q}_f(u,v) \quad \textit{suvaliste } u, v \in U_\delta(x) \textit{ korral.}$$

TÕESTUS. Olgu $x \in I$ suvaline. Kuna I on lahtine intervall, siis leidub $\varepsilon > 0$ nii, et $I_0 := U_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset I$. Tähistame μ_ε keskmise μ ahendi hulgas $Q_0 := I_0 \times I_0$, st

$$\mu_\varepsilon(\xi,\eta) := \mu(\xi,\eta), \quad \text{kui } (\xi,\eta) \in Q_0.$$

Selge, et $\mu_\varepsilon\colon Q_0 \to I_0$ on keskmine. Olgu Φ_ε keskmisega μ_ε määratud kujutus, paneme tähele, et $\Phi_\varepsilon = \Phi|_{Q_0}$: suvalise $(\xi,\eta) \in Q_0$ korral

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(\xi,\eta) &= \left(\mu_\varepsilon\left(\xi, \frac{\xi+\eta}{2}\right), \mu_\varepsilon\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \eta\right)\right) = \left(\left(\xi, \frac{\xi+\eta}{2}\right), \left(\frac{\xi+\eta}{2}, \eta\right)\right) \\ &= \Phi(\xi,\eta).\end{aligned}$$

Olgu $(u,v) \in \Phi_\varepsilon(Q_0)$ suvaline ja $(\xi,\eta) := \Phi_\varepsilon^{-1}(u,v)$, siis

$$\Phi(\xi,\eta) = \Phi_\varepsilon(\xi,\eta) = (u,v),$$

st

$$(\xi,\eta) = \Phi^{-1}(u,v),$$

seega

$$M(u,v) = \mu \circ \Phi^{-1}(u,v) = \mu_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1}(u,v)$$

ehk

$$M_\varepsilon := \mu_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon^{-1} = M|_{\Phi(Q_0)}.$$

Rakendame keskmise μ_ε poolt määratud kujutusele Φ_ε lauset 3.4, selle kohaselt on Φ_ε homöomorfism. Teatavasti kujutab homöomorfism hulga sisepunktid kujutishulga sisepunktideks. Kuna (x,x) on hulga $Q_0 = I_0 \times I_0$ sisepunkt ja $\Phi_\varepsilon(x,x) = (x,x)$, siis (x,x) on hulga $\Phi_\varepsilon(Q_0)$ sisepunkt. Seetõttu leidub $\delta > 0$, et $U_\delta(x) \times U_\delta(x) \subset \Phi_\varepsilon(Q_0)$.

Rakendame funktsioonile M_ε lauset 3.5, selle kohaselt on ta mingi kvaasi-aritmeetilise keskmise ahend hulgas $\Phi(Q_0)$, järelikult ka ahend hulgas $U_\delta(x) \times U_\delta(x)$. $\square$

Teoreem 3.7. *Olgu* $I \subset \mathbb{R}$ *lahtine intervall ja olgu* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *ja* $g\colon I \to \mathbb{R}$ *pidevad ja rangelt monotoonsed funktsioonid. Võrdus*

$$\boldsymbol{L}_f(x,y) = \boldsymbol{L}_g(x,y)$$

kehtib iga $(x,y) \in Q$ korral parajasti siis, kui leiduvad sellised $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\alpha \neq 0$ ja

$$g(x) = \alpha f(x) + \beta \quad (x \in I).$$

TÕESTUS. *Piisavus.* Eeldame, et $g = \alpha f + \beta$ ning $\alpha \neq 0$. Selge, et $\mathbf{L}_f(x,y) = \mathbf{L}_g(x,y)$, kui $x = y$. Kui $x, y \in I$ ja $x \neq y$, siis

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_g(x,y) &= g^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int_x^y g(t)\,dt\right) = g^{-1}\left(\alpha\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt + \beta\right) \\ &= g^{-1}\left(\alpha f\left(\mathbf{L}_f(x,y)\right) + \beta\right) = g^{-1}\Big(g\big(\mathbf{L}_f(x,y)\big)\Big) = \mathbf{L}_f(x,y).\end{aligned}$$

Tarvilikkus. Olgu $x \in I$ suvaline. Eeldame, et $\mathbf{L}_f(x,y) = \mathbf{L}_g(x,y) =: \mu(x,y)$, kus $x, y \in I$. Rakendame mõlema funktsiooni korral lauset 3.6 ja leiame $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ nii, et

$$\begin{aligned}\mu \circ \Phi^{-1}(u,v) &= \mathbf{Q}_f(u,v) \quad \big(u, v \in U_{\delta_1}(x)\big), \\ \mu \circ \Phi^{-1}(u,v) &= \mathbf{Q}_g(u,v) \quad \big(u, v \in U_{\delta_2}(x)\big).\end{aligned}$$

Siis

$$f^{-1}\left(\frac{f(u)+f(v)}{2}\right) = \mu \circ \Phi^{-1}(u,v) = g^{-1}\left(\frac{g(u)+g(v)}{2}\right) \quad \big(u, v \in U_\delta(x)\big),$$

kus $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Hulgas $U_\delta(x) \times U_\delta(x)$ langevad funktsioonidega f ja g määratud kvaasi-aritmeetilised keskmised kokku. Teoreemi 2.5 kohaselt leiduvad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et $\alpha \neq 0$ ja

$$g(u) = \alpha f(u) + \beta \quad \big(u \in U_\delta(x)\big).$$

Tähistame

$$\gamma := \sup\big\{\rho > 0 | g(u) = \alpha f(u) + \beta \text{ iga } u \in (x-\delta, x+\rho) \text{ korral}\big\} \tag{3.7}$$

ja näitame, et $x + \gamma = b$, kus b on intervalli I parempoolne otspunkt (kui I on ülalt tõkestatud) või ∞ (kui I ei ole ülalt tõkestatud).

Oletame vastuväiteliselt, et $x + \gamma < b$, sel juhul saame valida $\tilde{\delta} > 0$, et

$$\big(x + \gamma - \tilde{\delta}, x + \gamma + \tilde{\delta}\big) \subset (a, b).$$

Korrates eelnevat arutelu punktis $x + \gamma$, leiame $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{R}$ nii, et $\tilde{\alpha} \neq 0$ ja

$$g(u) = \tilde{\alpha} f(u) + \tilde{\beta} \quad \Big(u \in \big(x + \gamma - \tilde{\delta}, x + \gamma + \tilde{\delta}\big)\Big).$$

Olgu $\xi_1, \xi_2 \in \left(x+\gamma-\tilde{\delta}, x+\gamma\right)$ ning $\xi_1 \neq \xi_2$, siis $f(\xi_1) \neq f(\xi_2)$, sest f on rangelt monotoonne. Lineaarsel võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} f(\xi_1)(\alpha-\tilde{\alpha}) + \left(\beta-\tilde{\beta}\right) = 0 \\ f(\xi_2)(\alpha-\tilde{\alpha}) + \left(\beta-\tilde{\beta}\right) = 0 \end{cases}$$

leidub vaid nulllahend, sest tema determinant on nullist erinev, st

$$\begin{vmatrix} f(\xi_1) & 1 \\ f(\xi_2) & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Sellest tuleneb, et $\alpha = \tilde{\alpha}$ ja $\beta = \tilde{\beta}$. Seega $g(u) = \alpha f(u) + \beta$, kui $u \in \left(x-\delta, x+\gamma+\tilde{\delta}\right)$. Saime vastuolu seosega (3.7), see tähendab, et võrdus $g(u) = \alpha f(u) + \beta$ kehtib iga $u \in I \cap (x-\delta, \infty)$ korral.

Analoogselt veendutakse, et sama võrdus kehtib iga $u \in I \cap (-\infty, x+\delta)$ korral. Kokkuvõttes

$$g(x) = \alpha f(x) + \beta \quad \text{iga } x \in I \text{ korral.}$$

Sellega on teoreem 3.7 tõestatud. $\square$

Quasi-arithmetic means and Lagrangian means

Bachelor's Thesis

Kärt Päll

Summary

In this thesis, a continuous function is called a proper mean if it is symmetric, reflexive and monotonic. We mainly observe quasi-arithmetic and Lagrangian means. Lagrangian means are defined as means obtained from applying the classical mean value formula to a continuous and strictly monotonic function. Quasi-arithmetic means are transformations of the common arithmetic mean. We define the quasi-arithmetic mean $\mathbf{Q}_f$ associated with $f\colon\ I \to \mathbb{I}$ as

$$\mathbf{Q}_f\left(x, y\right) := f^{-1}\left(\frac{f\left(x\right) + f\left(y\right)}{2}\right) \quad \big(x, y \in I\big)$$

and Lagrangian mean $\mathbf{L}_f$ as

$$\mathbf{L}_f(x, y) := \begin{cases} f^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int\limits_x^y f(t)dt\right), & \text{if } x \neq y, \\ x, & \text{if } x = y. \end{cases}$$

Many well-known means like arithmetic and geometric mean are both Lagrangian and quasi-arithmetic. The harmonic mean however is not Lagrangian but it is quasi-arithmetic. It is shown that there is a close relationship between Lagrangian and quasi-arithmetic means. This relationship can be made explicit through a homeomorphism.

The purpose of this thesis is to give answers for two questions:

1. Which means μ can be represented according to some function f as quasi-arithmetic and Lagrangian mean?

2. How to describe function classes with the same quasi-arithmetic and Lagrangian mean?

The answers are presented in the second and third chapter.

In the first chapter, some of the well-known means are discussed. The definition of a proper mean is given and illustrated with some examples.

The second chapter of the thesis, is dedicated to quasi-arithmetic means. It is shown that $\mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_g$ if and only if $g = \alpha f + \beta$ where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and $\alpha \neq 0$. A proof of the famous Aczél theorem is given.

In the last chapter of the thesis, Lagrangian means are observed. It is shown that $\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_g$ if and only if $g = \alpha f + \beta$ where $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and $\alpha \neq 0$.

Kirjandus

[A] J. Aczél, *On mean values.* Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 392–400.

[BM] L. R. Berrone, J. Moro, *Lagrangian means.* Aequationes Math. **55** (1998), 217–226.

[B] P. S. Bullen, *Handbook of means and their inequalities.* Kluwer Academic Publishers Group, 2003.

[K] A. Kolesárová *Comparison of quasi-arithmetic means.* Proc. EUROFUSE–SIC'99, Budapest, 237–240, 1999.

[MHT] J. K. Meriokoski, M. Halmetoja, T. Tossavainen, *Means and the mean value theorem.* Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. **40** (2009), 729–740.

[NP] C. P. Niculescu, L. -E. Persson, *Convex functions and their applications.* A contemporary approach. Springer, New York, 2006.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks.

Mina, Kärt Päll (sünnikuupäev: 17.01.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Kvaasi-aritmeetilised keskmised ja Lagrange'i keskmised,

   mille juhendaja on Toivo Leiger,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 3. juuni 2013. a.