

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Reelika Tõnisson

Barjääriga optsioonide hindamine võrgumeetodiga

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja Toomas Raus

Tartu 2017

Barjääriga optsioonide hindamine võrgumeetodiga

Bakalaureusetöö

Reelika Tõnisson

Lühikokkuvõte: Optsioon on võimalus osta või müüa alusvara fikseeritud hinna eest kokkulepitud ajal tulevikus. Optsiooni õige hinna määramine on üks suurimaid probleeme, millega optsioonide teoorias kokku puututakse. Käesolevas töös vaadeldakse võrgumeetodit barjääriga optsiooni hinna leidmiseks. Võrgumeetod on numbriline meetod diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks, kus tuletisi lähendatakse diferentsidega. Töös on toodud programmid ilmutamata ja Crank-Nicolsoni meetodite abil barjääriga optsiooni hinna leidmiseks.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: optsioonid, tuletisväärtpaberid, finantsmatemaatika.

Pricing barrier options with finite difference method

Bachelor's Thesis

Reelika Tõnisson

Abstract: An option is the opportunity to buy or sell an underlying asset with a fixed price at a given time in the future. One of the biggest difficulties in option theory is determining the correct value of an option. In this thesis, we contribute to this problem using finite difference methods, which are numerical methods for solving differential equations by approximating them with difference equations. This thesis contains programs to price a barrier option with implicit and Crank-Nicolson methods.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics.

Keywords: options, derivative instruments, financial mathematics.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Optsioonid, optiooni hind	5
1.1 Optsiooni mõiste	5
1.2 Optsiooni hind	7
1.3 Barjääriga optioonid	12
2 Võrgumeetod optiooni hinna leidmiseks	15
2.1 Osatuletisega diferentsiaalvõrrandi ligikaudne lahendamine	15
2.2 Ilmutatud diferentsiskeem	16
2.3 Ilmutamata diferentsiskeem	18
2.4 Crank-Nicolsoni skeem	19
3 Barjääriga optioonide hindamine võrgumeetodiga	21
3.1 Optioonide hindamine võrgumeetodiga	21
3.2 Raja- ja lõputingimused	26
3.3 Numbrilised eksperimendid	28
Viited	36
Lisad	37

Sissejuhatus

Opsioon on võimalus osta või müüa alusvara fikseeritud hinna eest kokkulepitud ajal tulevikus. Opsiooni õige hinna määramine on üks suurimaid probleeme, millega opsioonide teoorias kokku puututakse. Euroopa tüüpi opsiooni korral saab alusvara osta fikseeritud hinnaga vaid mingil kindlaks määratud ajal tulevikus. Tavalise Euroopa opsiooni hinna saab leida analüütiliselt Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi lahendina, kuid keerulisemate opsioonide korral tuleb diferentsiaalvõrrandi lahendi leidmiseks kasutada erinevaid numbrilisi meetodeid.

Käesolevas töös vaadeldakse barjääriga opsiooni hinna leidmist. Barjääriga opsioonid erinevad tavalistest opsioonidest selle poolest, et barjääriga opsiooni korral määratakse alusvara hinnale üks või kaks barjääri, mille saavutamisel hakkab opsioon alles kehtima või muutub kehtetuks. Töö eesmärgiks on tutvustada võrgumeetodit barjääriga opsiooni hindamiseks.

Töö esimeses alapeatükis seletame opsioonidega seotud mõisteid ning näitame, kuidas leitakse opsiooniga saadavat tulu. Alapeatükis 1.2 käsitleme opsiooni hinda mõjutavaid tegureid, teeme eeldused aktsia hinna liikumisele ning esitame opsiooni hinna leidmiseks Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandi. Alapeatükis 1.3 vaatleme barjääriga opsioonide liigitust ja maksefunktsioone. Barjääriga opsioonile võib ette anda alumise barjääri, ülemise barjääri või mõlemad.

Töö teises peatükis tutvustame osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamist kolme võrgumeetodiga: ilmutatud, ilmutamata ja Crank-Nicolsoni meetod. Võrgumeetodi korral lähendatakse diferentsiaalvõrrandis olevaid tuletisi etteantud punktides (sõlmedes) diferentsvalemitega ning saadakse võrrandisüsteem otsitava lahendi lähisväärtuse määramiseks sõlmedes. Toome ära ka nende diferentssskeemide šabloonid, täpsuse järgud ning stabiilsustingimused.

Kolmandas peatükis vaatleme osatuletistega diferentsiaalvõrrandit, mille abil leitakse barjääriga opsiooni hind. Lisaks toome ära lõpu- ja rajatingimused, mida võrgumeetodis opsiooni hinna leidmiseks kasutatakse. Töö viimases alapunktis esitame numbrilisi näiteid barjääriga opsioonidest ning nende hinna koondumisest. Programmid numbriliste eksperimentide jaoks on koostatud MATLABis ning on toodud lisades.

1 Optsioonid, optsiooni hind

Selles peatükis esitame mõned optsioonidega seotud mõisted, mida vajame töö järgmistes osades. Kastutatud on materjale [1], [2], [3] ja [4].

1.1 Optsiooni mõiste

Tuletisinstrument ehk derivatiiv on finantsinstrument, mille väärtus on seotud mõne teise finantsvaraga, edapidi alusvaraga, nagu aktsia, valuuta, võlakiri jne. Derivaatiivid on legaalsed kokkulepped, mis sisaldavad kindlaks määratud õigusi või kohustusi. Derivaatiivide hulka kuuluvad näiteks optsioonid, forwardid ning futuurid. Forward kohustab ostma ja müüma mingit finantsvara fikseeritud hinnaga varem kokku lepitud ajal. Futuur erineb forwardist selle poolest, et seda saab enne tehingu lõppemist finantsturgudel maha müüa.

Opsioon on võimalus osta või müüa alusvara fikseeritud hinna eest kokkulepitud ajal tulevikus. Optsiooni õige hinna määramine on üks suurimaid probleeme, millega optsioonide teoorias kokku puututakse. Optsioone jagatakse ostu- ja müügioptsioonideks ning optsiooni täitmisaja järgi Euroopa ja Ameerika optsioonideks.

Euroopa ostuoptsioon on leping, mis annab selle omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) osta mingit vara, edaspidi alusvara, varem määratud hinna X eest, mida nimetatakse optsiooni täitmishinnaks, teatud ajal T tulevikus. Viimast nimetatakse optsiooni täitmisajaks või realiseerimisajaks.

Lisaks tavalisele alusvarale nagu aktsiad ja välisvaluuta koostatakse optsioone ka alusele, millel puudub rahaline väärtus. Näiteks võib anda välja optsiooni, mille korral optsioonist saadav tulu sõltub suusakuurordi lumekihi paksusest.

Euroopa müügioptsioon annab optsiooni omanikule õiguse (kuid mitte kohustuse) müüa alusvara ostmise hetkel fikseeritud hinnaga X kindlaksmääratud ajal T .

Kasutame järgmisi tähistusi:

- X – optsiooni täitmishind (*strike price*)
- T – optsiooni lõppaeg, täitmisaeg (*expiry time, exercise time*)
- P_C – ostuoptsiooni tulu
- P_P – müügioptsiooni tulu
- V_C – Euroopa ostuoptsiooni hind
- V_P – Euroopa müügioptsiooni hind
- $S(t)$ – alusvara väärtus hetkel t

- r – riskivaba pidev intressimäär
- σ – alusvara hinna volatiilsus

Euroopa ostuoptiooni omaniku tulu ajahetkel T leitakse valemiga

$$P_C = \begin{cases} S(T) - X, & \text{kui } S(T) > X, \\ 0, & \text{vastasel juhul.} \end{cases} \quad (1.1)$$

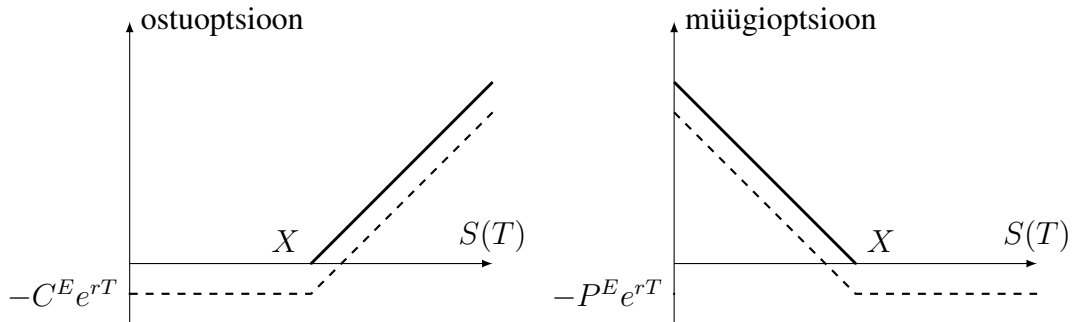
Paralleelselt kasutatakse ka tähistust $P_C = (S(T) - X)^+$, kus

$$x^+ = \begin{cases} x, & \text{kui } x > 0, \\ 0, & \text{vastasel juhul.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Müügioptiooni omaniku tulu leitakse analoogiliselt valemiga

$$P_P = \begin{cases} X - S(T), & \text{kui } S(T) < X, \\ 0, & \text{vastasel juhul.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Optioonist saadava kasumi suurust mõjutab lisaks tulule ka optiooni hind, mida tähistame V_C (ostuoptiooni korral) või V_P (müügioptiooni korral). Ajahetkel T on Euroopa ostuoptiooni omaniku kasum $(S(T) - X)^+ - V_C e^{rT}$, kus r tähistab riskivaba pidevat intressimäära. Euroopa müügioptiooni omaniku kasum on $(X - S(T))^+ - V_P e^{rT}$.



Joonis 1.1: Tulu (pidev joon) ja kasum (katkendlik joon) Euroopa ostu- ja müügioptiooni omanikule.

Ostu- ja müügioptiooni väljaandja tulu on ülalt tõkestatud optiooni hinnaga ning leitakse vastavalt valemitega $V_C e^{rT} - (S(T) - X)^+$ ja $V_P e^{rT} - (X - S(T))^+$.

Ameerika ostu- või müügioptioon annab õiguse osta või müüa alusvara täitmishinna X eest ükskõik millisel ajal alates praegusest kuni määratud ajani T . Seega Ameerika optioon erineb Euroopa optioonist selle poolest, et seda saab realiseerida igal ajal kuni ja kaasaarvatud optiooni täitmisajani.

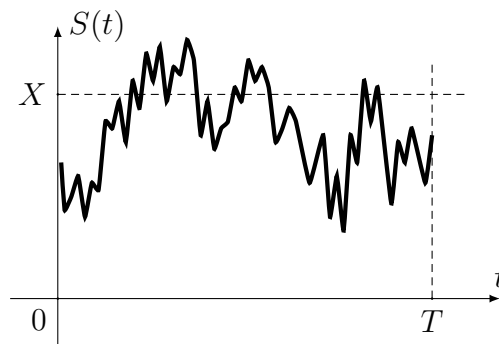
1.2 Optsiooni hind

Igal optsioonil on hind, st. olenemata optsiooni sisust maksab optsiooni omanik selle väljaandjale teatava summa. Vastasel juhul ei kaotaks optsiooni omanik kunagi raha ning see läheks vastuollu arbitraaži puudumise nõudega. Arbitraaži puudumise nõue tähendab, et finantsturul ei ole võimalik teenida riskivabalt suuremat tulu kui raha hoiustamisel pangas.

Sama täitmishinnaga X ja lõppajaga T Ameerika ja Euroopa optsioonide hindadele kehtivad võrratused

$$V_C^E \leq V_C^A, \quad V_P^E \leq V_P^A, \quad (1.4)$$

sest Ameerika optsioon annab omanikule vähemalt samad õigused, mis samade eeldustega Euroopa optsioon.



Joonis 1.2: Näide stsenaariumist, mille puhul Ameerika ostuoptsioon võib omanikule tulu tuua, aga Euroopa ostuoptsioon mitte.

Euroopa ostu ja müügioptsiooni hindade omavahelist kooskõla iseloomustab järgmine teoreem. [1]

Teoreem 1. (Opsiooni hindade pariteetsusnõue). *Kui alusvaraks oleva aktsia korral ei maksta dividende, siis sama täitmishinna X ja sama täitmisaja T korral on Euroopa ostu- ja müügioptsioonide hinnad seotud järgmise võrdusega*

$$V_C - V_P = S(0) - X e^{-rT}.$$

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $V_C - V_P > S(0) - X e^{-rT}$. Näitame, et sellisel juhul on võimalik konstrueerida arbitraažistrateegia. Hetkel $t = 0$:

- ostame ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$;
- ostame ühe müügioptsiooni hinnaga V_P ;

- kirjutame välja ja müüme ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C ;
- investeerime summa $V_C - V_P - S(0)$ (negatiivse summa korral laenamine) rahaturule pideva intressimääraga r ;

Nende tegevuste bilanss on kokkuvõttes nullis. Ajal $t = T$:

- lõpetame rahaturu positsiooni ning saame (negatiivse summa korral maksa-me) summa $(V_C - V_P - S(0))e^{rT}$;
- kui $S(T) - X \geq 0$, siis jätame müügioptsiooni realiseerimata, müüme alusvara hinnaga $S(T)$ ning maksame optsiooniga seotud väljamakse $S(T) - X$. Rahaline tulem nendest tegevustest on

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + S(T) - (S(T) - X) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab, et selline strateegia on juhul $S(T) - X \geq 0$ arbitraažistrateegia, kuna hetkel $t = 0$ me selle strateegia rakendamiseks raha ei kulutanud, kuid hetkel T saame positiivse rahasumma.

- kui $S(T) - X < 0$, siis realiseerime müügioptsiooni ning saame summa $X - S(T)$ ja müüme alusvara aktsia hinnaga $S(T)$. Tegevuste bilanss on seega

$$(V_C - V_P - S(0))e^{rT} + S(T) + (X - S(T)) = (V_C - V_P - S(0))e^{rT} + X > 0,$$

mis näitab, et strateegia on ka juhul $S(T) - X < 0$ arbitraažistrateegia.

Analoogilise strateegia saab luua juhul, kui oletada, et $V_C - V_P < S(0) - Xe^{-rT}$. Hetkel $t = 0$:

- müüme ühe alusvara aktsia hinnaga $S(0)$;
- ostame ühe ostuoptsiooni hinnaga V_C ;
- kirjutame välja ja müüme ühe müügioptsiooni hinnaga V_P ;
- investeerime summa $V_P - V_C + S(0)$ (negatiivse summa korral laenamine) rahaturule pideva intressimääraga r ;

Nende tegevust bilanss on kokkuvõttes nullis. Ajal $t = T$:

- lõpetame rahaturu positsiooni ning saame (negatiivse summa korral maksa-me) summa $(V_P - V_C + S(0))e^{rT}$;
- kui $S(T) - X \geq 0$, siis realiseerime ostuoptsiooni ja maksame alusvara aktsia eest hinna $S(T)$. Kui $S(T) - X < 0$, siis jätame ostuoptsiooni realiseerimata, maksame alusvara aktsia eest hinna $S(T)$ ning maksame välja müügioptsiooniga seotud kulud $X - S(T)$.

Mõlemal juhul on rahaline tulem

$$(V_P - V_C + S(0))e^{rT} - X > 0,$$

mis näitab, et selline strateegia on samuti arbitraažistrateegia. ■

Lisaks eelnevale teoreemile saab lähtudes arbitraaži puudumise nõudest näidata, et Euroopa ostu- ja müügioptsiooni hind peab rahuldama järgmisi tingimusi:

$$\max \{0, S(0) - Xe^{-rT}\} \leq V_C < S(0), \quad (1.5)$$

$$\max \{0, Xe^{-rT} - S(0)\} \leq V_P < Xe^{-rT}. \quad (1.6)$$

Opsiooni õiglase hinna leidmiseks tuleb teha eeldus alusvara hinna käitumise kohta.

Aksia hindade empiiriline uurimine on näidanud, et ligikaudselt kirjeldab hinna käitumist järgmine võrrand:

$$\log S_t - \log S_{t-1} = \mu + \varepsilon_t,$$

kus $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$ on sõltumatud normaaljaotusega juhuslikud suurused. Kuna

$$\log S_t - \log S_{t-1} = \log \frac{S_t}{S_{t-1}} = \log \left(1 + \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \right) \approx \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$$

iseloomustab aktsia hinna tulusust perioodil $[t-1, t]$, siis konstant μ iseloomustab aktsia keskmist tulusust.

Kui alusvara hinda vaadeldakse pideva ajast sõltuva funktsioonina, siis eeldame, et alusvara hind käitub vastavalt stohhastilisele diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), \quad (1.7)$$

kus μ ja σ iseloomustavad vastavalt alusvara hinna keskmist tulusust ajas ning alusvara hinna volatiilsust. $W(t)$ on Wieneri protsess, mis defineeritakse järgmiselt:

Definitsioon 1.1. *Juhuslikku protsessi $\{W(t), t \leq 0\}$ nimetatakse Wieneri protsessiks (ehk Browni liikumiseks), kui*

(i) $W(0) = 0$;

(ii) $W(t)$ juurdekasvud on statsionaarsed, st. $W(t+a) - W(s+a)$ jaotus ei sõltu a väärtusest, ja sõltumatud, st. $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ ning $W(t) - W(s)$ ja $W(v) - W(u)$ on sõltumatud.

(iii) $\forall t > 0$ korral $W(t) \sim N(0, c\sqrt{t})$, kus $c > 0$ on konstant.

F. Black ja M. Sholes näitasid, et kui teha järgmised eeldused:

1. Alusvara hind käitub vastavalt võrrandile (1.7);
2. Lubatud on lühikese positsiooni võtmine turul st. on võimalus müüa edasi laenatud alusvara ning hiljem selle tagasiostmine ja omanikule tagastamine;
3. Alusvara ostu ja müügi seotud tehingukulud puuduvad;
4. Alusvaralt ei maksta optsiooni eluea jooksul dividende;
5. Osta ja müüa võib suvalise reaalarvu alusvara;
6. Alusvaraga kauplemisel puudub arbitraaživõimalus;
7. Alusvaraga kauplemine toimub pidevalt,

siis nendel eeldustel peab optsiooni hind $V = V(S(t), t)$ rahuldama järgmist teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandit:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (1.8)$$

Tegemist on parabolset tüüpi diferentsiaalvõrrandiga, kuna lineaarset teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$a \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + 2b \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t} + c \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + d \frac{\partial V}{\partial S} + e \frac{\partial V}{\partial t} + gV = f, \quad (1.9)$$

kus $a(S, t), b(S, t), c(S, t), d(S, t), e(S, t), g(S, t)$ ja $f(S, t)$ on antud kahe muutuja funktsioonid, tüüpi määrab determinandi

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 \quad (1.10)$$

väärtus. Kui $D > 0$, siis on tegemist elliptilist tüüpi võrrandiga, kui $D < 0$, siis hüperboolset tüüpi võrrandiga ning kui $D = 0$, siis parabolset tüüpi võrrandiga. Võrrandi (1.8) korral $b = c = 0$ ning $D = 0$.

Võrrandil (1.8) on üldjuhul lõpmata palju lahendeid. Ühese lahendi leidmiseks tuleb ette anda ka lõputingimus ja rajatingimused.

Euroopa ostuoptsiooni korral teame optsiooni hinda hetkel $t = T$, see on võrdne optsiooni omaniku tuluga optsiooni realiseerimisel:

$$V_C(S(T), T) = \max\{S(T) - X, 0\}. \quad (1.11)$$

Kui $S(t) = 0$ mingil ajahetkel $t, 0 \leq t \leq T$ (alusvara muutub väärtusetuks näiteks juhul, kui firma läheb pankrotti), siis ka $S(t') = 0$, kus $t' > t$ ning optiooni hind on null:

$$V_C(0, t) = 0. \quad (1.12)$$

Kui $S(t) \rightarrow \infty$, siis optiooni hind on sama suurusjärku alusvara hinnaga ehk

$$V_C(S(t), t) \sim S, \quad \text{kui } S(t) \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Saab näidata, et tingimustel (1.11) - (1.13) on Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandil ühene lahend Euroopa ostuoptiooni korral.

Müügioptiooni puhul on lõpu- ja rajatingimused analoogiliselt

$$V_P(S(T), T) = \max\{X - S(T), 0\}, \quad (1.14)$$

$$V_P(0, t) = X e^{-r(T-t)}, \quad (1.15)$$

$$V_P(S(t), t) \rightarrow 0, \quad \text{kui } S(t) \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

Kui riskivaba intressimäär $r = r(t)$ ja alusvara volatiilsus $\sigma = \sigma(t)$ on hetkel $t = 0$ teadaolevad ajast sõltuvad funktsioonid või konstandid, siis saame Euroopa ostu- ja müügioptiooni hinna leida analüütiliselt.

Ajal $t < T$ on täitmishinnaga X ja täitmisajaga T Euroopa ostuoptiooni hind esitatav kujul

$$V_C(t) = S(T)N(d_1) - X e^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (1.17)$$

kus

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \quad (1.18)$$

on standardse normaaljaotuse $N(0, 1)$ jaotusfunktsioon ning

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(0)}{X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S(0)}{X} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (1.19)$$

Müügioptiooni hind on esitatav kujul

$$V_P(t) = X e^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(T)N(-d_1). \quad (1.20)$$

Optiooni hinna V_C või V_P hetkel $t = 0$ saame, kui võtame valemities (1.17), (1.19) ja (1.20) $t = 0$.

1.3 Barjääriga optsioonid

Lisaks tavalistele Euroopa ja Ameerika optsioonidele kaubeldakse ka nn eksootiliste optsioonidega. Barjääriga optsioon on üks eksootilise optsiooni liikidest. Barjääriga optsiooni korral antakse alusvara hinnale ette üks või kaks barjääri, mille saavutamisel hakkab optsioon alles kehtima või muutub kehtetuks. Barjääriga optsiooni kõrval tuntakse näiteks ka Aasia optsioone, tagasivaatavaid optsioone ja binaarseid optsioone. Aasia optsioonide korral sõltub väljamakse suurus alusvara keskmisest hinnast optsiooni eluajal, tagasivaatavate optsioonide korral alusvara maksimaalsest või minimaalsest hinnast.

Barjääriga optsioone on kaht tüüpi:

1. *Knock-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui alusvara hind jõuab etteantud hinnatasemeni enne täitmisaega.
2. *Knock-in* optsioon hakkab kehtima, kui alusvara hind ületab etteantud hinna-barjääri enne täitmisaega.

Barjääriga optsioonile võib ette anda alumise barjääri L (*low*), kus $L < S(0)$, ülemise barjääri H (*high*), kus $H > S(0)$, või mõlemad. Kui barjäär asub alusvara alghinnast ülalpool, siis on tegemise *up*-optsiooniga, vastasel juhul *down*-optsiooniga.

Eelnevaid tingimusi ühendades saame barjääriga optsioonid jagada neljaks:

1. *Up-and-in* optsiooni saab realiseerida vaid juhul, kui alusvara hind ületab ülemist barjääri H .
2. *Down-and-in* optsiooni saab realiseerida vaid juhul, kui alusvara hind langeb alla alumist barjääri L .
3. *Up-and-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui ülemisest barjäärist H jõutakse ülespoole enne optsiooni eluea lõppu.
4. *Down-and-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui alumisest barjäärist L langetakse allapoole enne optsiooni eluea lõppu.

Barjääriga optsioonid jagunevad pidevateks ja diskreetseteks. Kui pideva optsiooni puhul jälgitakse barjääri saavutamist kogu perioodi vältel, siis diskreetse optsiooni puhul jälgitakse barjääri saavutamist teatud kindlaks määratud ajahikute tagant. Tähistame need ajahetked sümboliga t_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Enamlevinud diskreetse barjääriga optsioonide puhul kontrollitakse barjääri tingimust kas kord päevas või nädalas (*daily, weekly*).

Barjääriga optsiooni tulu sõltub sellest, kas optsiooni eluea jooksul barjäär saavutatakse või mitte. Ühe barjääriga Euroopa tüüpi *down-and-out* optsiooni korral on maksefunktsioon kujul:

$$P_C = \begin{cases} \max \{ \theta(S(T) - X), 0 \}, & \text{kui } S_{inf} > L, \\ 0, & \text{vastasel juhul,} \end{cases} \quad (1.21)$$

kus $S_{inf} = \inf_{0 \leq t \leq T} S(t)$ ning $\theta = 1$ ostuoptsiooni korral ja $\theta = -1$ müügioptsiooni korral.

Ühe barjääriga Euroopa tüüpi *up-and-out* optsiooni korral:

$$P_C = \begin{cases} \max \{ \theta(S(T) - X), 0 \}, & \text{kui } S_{sup} < H, \\ 0, & \text{vastasel juhul,} \end{cases} \quad (1.22)$$

kus $S_{sup} = \sup_{0 \leq t \leq T} S(t)$.

Kahe barjääriga (ülemine ja alumine) optsiooni korral on maksefunktsioon järgmine:

$$P_C = \begin{cases} \max \{ \theta(S(T) - X), 0 \}, & \text{kui } S_{inf} > L \text{ ja } S_{sup} < H, \\ 0, & \text{vastasel juhul.} \end{cases} \quad (1.23)$$

Down-and-in ning *up-and-in* optsioonide korral on maksefunktsioonid analoogilised, kuid väljamakse toimub vastupidiste tingimuste korral (näiteks *up-and-out* optsiooni puhul kui $S_{sup} \geq H$).

Barjääriga optsioonide hinnad on barjäärita optsioonide hinnaga järgmises seoses:

$$V_C = V_{down-and-out} + V_{down-and-in}, \quad (1.24)$$

$$V_P = V_{up-and-out} + V_{up-and-in}. \quad (1.25)$$

Eksootiliste optsioonide, sh. barjääriga optsioonide korral ei õnnestu Black-Sholesi diferentsiaalvõrrandi lahendit analüütiliselt leida ning nende hindade leidmiseks kasutatakse erinevaid numbrilisi meetodeid:

1. Binoom- ja trinoommeetoditel baseeruvad meetodid, millel korral konstrueeritakse alusvara hinnapuu ning optsiooni hind leitakse ajas tagant ettepoole liikudes rekursiivselt. Nende meetoditega barjääriga optsioonide hindamist uuris Mailis Metsalu oma Tartu Ülikooli finants- ja kindlustusmatemaatika eriala magistritöös [7].

2. Võrgumeetod, mis seisneb Black-Sholesi diferentsiaalvõrrandi numbrilises lahendamises ning mida vaatleme lähemalt töö järgmistes osades.
3. Monte-Carlo meetod, mille korral simuleeritakse palju erinevaid alusvara hinna liikumise teid ning optiooni hind leitakse kui keskmine diskonteeritud optiooniga saadav tulu üle kõigi hinnateede.

2 Võrgumeetod optsiooni hinna leidmiseks

Selles peatükis tutvustame teist järku lineaarsete osatuletistega diferentsiaalvõrrandite (ODV) liigitust ning võrgumeetodit ODV ligikaudseks lahendamiseks. Kasutatud on materjali [5].

2.1 Osatuletisega diferentsiaalvõrrandi ligikaudne lahendamine

Diferentsiaaloperaatoriks nimetatakse (osa)tuletisi sisaldavat kujutist, mis seab ühele funktsioonile vastavusse teise funktsiooni.

Operaatorit A nimetatakse lineaarseks, kui

1. $A(u + v) = Au + Av$ iga funktsioonipaari u ja v korral;
2. $A(\lambda u) = \lambda Au$ iga skalaari $\lambda \in \mathbb{R}$ ja funktsiooni u korral.

Lineaarne diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul $Au = f$, kus A on lineaarne diferentsiaaloperaator ja f on etteantud funktsioon.

Teist järku lineaarse ODV üldkuju on

$$\sum_{i,j=1}^k a_{ij} u_{y_i y_j} + \sum_{i=1}^k a_i u_{y_i} + a_0 u = f, \quad (2.1)$$

kus $u = u(\mathbf{y})$ on otsitav k -muutuva funktsioon argumentide vektoriga $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$ ja kordajad $a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{y})$, $a_i = a_i(\mathbf{y})$, $a_0 = a_0(\mathbf{y})$ ning vabaliige $f = f(\mathbf{y})$ on etteantud suurused.

Võrrandi peaosaks nimetatakse teist järku tuletisi sisaldavat summat $\sum_{i,j=1}^k a_{ij} u_{y_i y_j}$. Teist järku lineaarsed ODVD jagatakse neljaks tüübiks sõltuvalt peaosaga kordajate maatriksi $\mathbf{A}(\mathbf{y}) = (a_{ij}(\mathbf{y}))_{i,j=1,\dots,k}$ omadustest. ODV on punktis \mathbf{y}

- paraboolset tüüpi, kui maatriksil $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ on nulliga võrduvaid omaväärtusi;
- elliptilist tüüpi, kui kõik $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ omaväärtused erinevad nullist ja positiivsete omaväärtuste arv on 0 või k ;
- hüperboolset tüüpi, kui kõik $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ omaväärtused erinevad nullist ja positiivsete omaväärtuste arv on 1 või $k - 1$;
- ultrahüperboolset tüüpi, kui kõik $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ omaväärtused erinevad nullist ja positiivsete omaväärtuste arv on suurem kui 1 ja väiksem kui $k - 1$.

Diferentsiaalvõrrand (2.1) ei määra üheselt lahendit. Lahendi üheseks määramiseks tuleb võrrandile lisada tingimused, mida nimetatakse alg- ja rajatingimusteks.

Kuna punktis 1.2 saadud ODV optiooni hinna leidmiseks on parabolset tüüpi, siis keskendume edaspidi sellele.

Üks parabolset tüüpi võrrandi erijuht on klassikalise matemaatilise füüsika võrrand

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varkappa \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^m p_i u_{x_i} + pu = f, \quad (2.2)$$

kus otsitav lahend $u = u(\mathbf{x}, t)$ ja vabaliige $f = f(\mathbf{x}, t)$ sõltuvad lisaks vektorile $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ka skalaarist t . Võrrand kirjeldab ajas muutuvaid difusiooniprotsesse ruumis \mathbb{R}^m (t - aeg, $\varkappa > 0$ - difusioonikordaja).

Järgmises kolmes alapunktis toome välja diferentsiskeemid järgmisele esimest liiki rajatingimusega segaülesandele (alg- ja rajatingimusi sisaldavale ülesandele) ühemõõtmelisel juhul:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x} - \varkappa \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f, \quad x \in (a, b), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$V(a, t) = g_a(t), \quad V(b, t) = g_b(t), \quad t > 0, \quad (2.4)$$

$$V(x, 0) = V_0(x), \quad x \in (a, b), \quad (2.5)$$

kus $V = V(x, t)$, $f = f(x, t)$, $\lambda = \lambda(x)$ ja $\varkappa = \varkappa(x)$.

2.2 Ilmutatud diferentsiskeem

Võrgumeetodi korral lähendatakse diferentsiaalvõrrandis olevaid tuletisi etteantud punktides (sõlmedes) diferentsvalemitega ning saadakse võrrandisüsteem otsitava lahendi lähisväärtuse määramiseks sõlmedes. Vaatleme esmalt ilmutatud meetodit.

Jaotame lõigu $[a, b]$ võrdse pikkusega osalõikudeks otspunktidega $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Olgu nende osalõikude pikkus $x_{i+1} - x_i = h > 0$. Valime ajateljel võrdsete vahedega punktid sammuga $\tau > 0$ ning tähistame $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, \dots$. Tulemusena saame piirkonnas $[a, b] \times [0, \infty)$ sõlmed (x_i, t_j) , $i = 0, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots$.

Asendame funktsiooni V teist järku tuletise x suhtes diferentsvalemiga:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{1}{h^2} (V(x_{i-1}, t_j) - 2V(x_i, t_j) + V(x_{i+1}, t_j)) + O(h^2), \quad (2.6)$$

funktsiooni V tuletise t suhtes diferentsvalemiga sammuga ette:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{1}{\tau} (V(x_i, t_{j+1}) - V(x_i, t_j)) + O(\tau), \quad (2.7)$$

ja funktsiooni V tuletise x suhtes diferentsvalemiga:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{1}{2h} (V(x_{i+1}, t_j) - V(x_{i-1}, t_j)) + O(2h), \quad (2.8)$$

Asendame diferentsvalemid (2.6), (2.7) ja (2.8) diferentsiaalvõrrandisse (2.3):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (V(x_i, t_{j+1}) - V(x_i, t_j)) + \frac{\lambda_i}{2h} (V(x_{i+1}, t_j) - V(x_{i-1}, t_j)) \\ & - \frac{\varkappa_i}{h^2} (V(x_{i-1}, t_j) - 2V(x_i, t_j) + V(x_{i+1}, t_j)) = f(x_i, t_j) + O(\tau + h), \end{aligned}$$

kus $\lambda_i = \lambda(x_i)$ ja $\varkappa_i = \varkappa(x_i)$. Eemaldades jääkliikmed ning tähistades lähislahendi $V_i^j \approx V(x_i, t_j)$ ning $f_i^j = f(x_i, t_j)$, saame ilmutatud diferents skeemi, kus $j + 1$ kihile vastavad suurused V_i^{j+1} , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ arvutatakse vahetult eelneva kihi suuruste kaudu kujul

$$V_i^{j+1} = a_i V_{i-1}^j + b_i V_i^j + c_i V_{i+1}^j + d_i f_i^j, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

kus

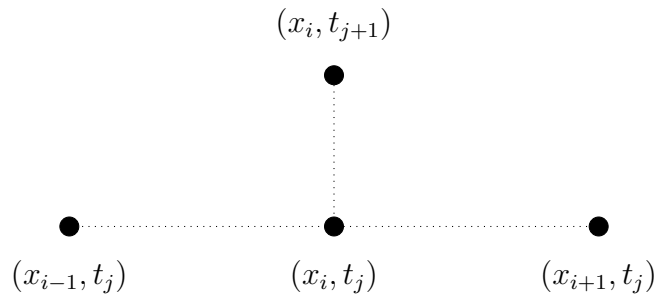
$$\begin{aligned} a_i &= \frac{-\lambda_i h \tau + 2\varkappa_i \tau}{2h^2}, \\ b_i &= 1 - \frac{2\varkappa_i \tau}{h^2}, \\ c_i &= \frac{\lambda_i h \tau + 2\varkappa_i \tau}{2h^2}, \\ d_i &= \tau. \end{aligned}$$

Funktsiooni V väärtused rajal V_0^{j+1} ja V_n^{j+1} leiame vastavalt rajatingimustele (2.4):

$$V_0^{j+1} = g_a(t_{j+1}), \quad V_n^{j+1} = g_b(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

ning väärtused hetkel $t = 0$ leitakse vastavalt algtingimusele (2.5):

$$V_i^0 = V_0(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.11)$$



Joonis 2.1: Ilmutatud diferents skeemi šabloon.

Näeme, et väärtuse V_i^{j+1} leidmiseks esinevad võrrandis veel lähendi väärtused kolmes naabersõlmes. Seetõttu võib öelda, et diferents skeem (2.2) on määratud joonisel (2.1) kujutatud šabloonil.

Diferents skeemi abil leitud lähislahendi viga koosneb meetodi veast (tekib jääkliikmete eemaldamisel võrranditest) ja ümardamistest tingitud veast. Just viimast on põhjust uurida ilmutatud diferents skeemi puhul. Kui sammupikkused rahuldavad seost $\tau \leq \frac{h^2}{2\kappa}$, siis on lähendi vea kasv maksimaalselt lineaarne. Vastasel juhul võib lähendi viga kasvada eksponentsiaalselt. Sellist diferents skeemi käitumist nimetatakse tingimisi stabiilsuseks ümardamisvigade suhtes, kusjuures stabiilsustingimuseks on $\tau \leq \frac{h^2}{2\kappa}$.

2.3 Ilmutamata diferents skeem

Moodustame piirkonna $[a, b] \times [0, \infty)$ sõlmed analoogiliselt alapunktis 2.2 kirjeldatuga. Asendame funktsiooni V teist järku tuletise t suhtes diferentsvalemiga (2.6), funktsiooni V tuletise t suhtes diferentsvalemiga sammuga h :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x_i, t_{j+1}) = \frac{1}{\tau} (V(x_i, t_{j+1}) - V(x_i, t_j)) + O(\tau), \quad (2.12)$$

ja funktsiooni V tuletise x suhtes diferentsvalemiga:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) = \frac{1}{2h} (V(x_{i+1}, t_{j+1}) - V(x_{i-1}, t_{j+1})) + O(2h), \quad (2.13)$$

Sellisel juhul saame analoogiliselt eelmises alapunktis toodud teisendustega kihiga $j + 1$ seotud suuruste V_i^{j+1} , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ arvutamiseks võrrandi kujul

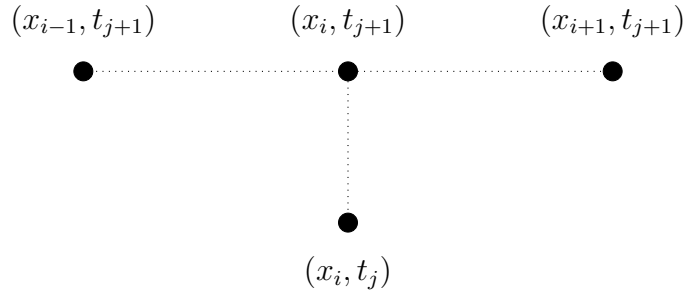
$$a_i V_{i-1}^{j+1} + b_i V_i^{j+1} + c_i V_{i+1}^{j+1} = V_i^j + d_i f_i^{j+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (2.14)$$

kus

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{-\lambda_i h \tau - 2\kappa_i \tau}{2h^2}, \\ b_i &= 1 + \frac{2\kappa_i \tau}{h^2}, \\ c_i &= \frac{\lambda_i h \tau - 2\kappa_i \tau}{2h^2}, \\ d_i &= \tau. \end{aligned}$$

Suurused V_0^{j+1} , V_n^{j+1} ja V_i^0 leiame raja- ning algtingimustest (2.10), (2.11) nagu ilmutatud skeemi korral.

Erinevalt ilmutatud diferents skeemist vajatakse selles sõlme V_i^{j+1} väärtuse leidmiseks ka väärtusi teistes sama tasandi sõlmedes $V_{i-1}^{j+1}, V_{i+1}^{j+1}$.



Joonis 2.2: Ilmutamata diferents skeemi šabloon.

Ilmutamata diferents skeem on absoluutselt stabiilne, s.t stabiilsus ei sõltu τ ja h vahekorrad nagu ilmutatud diferents skeemi puhul.

2.4 Crank-Nicolsoni skeem

Eelnevates alapunktides vaadeldud ilmutatud ja ilmutamata diferents skeemid on esimest järku täpsusega suuruse τ suhtes. Sellest parema täpsuse tagab Crank-Nicolsoni skeem, milles lähendatakse tuletisi t ning x suhtes sümmeetrilise diferentsvalemiga, mille täpsusjärk on 2.

Moodustame piirkonna $[a, b] \times [0, \infty)$ sõlmed analoogiliselt alapunktis 2.2 kirjeldatuga. Kasutame kahe kihi vahel asuvaid punkte $(x_i, t_{j+1/2})$, kus $t_{j+1/2} = t_j + \frac{\tau}{2}$, ja $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots$ ning kirjutame diferentsiaalvõrrandi üles nendes punktides:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) + \lambda \frac{\partial V}{\partial x}(x_i, t_{j+1/2}) - \varkappa \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1/2}) = f(x_i, t_{j+1/2}). \quad (2.15)$$

Asendame funktsiooni V tuletised t ja x suhtes sümmeetriliste diferentsvalemitega:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) = \frac{1}{\tau} (V(x_i, t_{j+1}) - V(x_i, t_j)) + O(\tau), \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_i, t_{j+1/2}) = \frac{1}{2h} (V(x_{i+1}, t_j) - V(x_{i-1}, t_j)) + O(2h), \quad (2.17)$$

Funktsiooni f väärtuse punktis $(x_i, t_{j+1/2})$ asendame valemiga

$$f(x_i, t_{j+1/2}) = \frac{1}{2} (f(x_i, t_j) + f(x_i, t_{j+1})) + O(\tau^2) \quad (2.18)$$

ning

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1/2}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) \right) + O(\tau^2), \quad (2.19)$$

Funktsiooni V teist järku tuletise x suhtes punktides (x_i, t_j) ja (x_i, t_{j+1}) asendame diferentsvalemi (2.6) põhjal.

Sellisel juhul saame kihiga $j + 1$ seotud suuruste $V_i^{j+1}, i = 1, 2, \dots, n - 1$ arvutamiseks võrrandi kujul

$$a_i V_{i-1}^{j+1} + b_i V_i^{j+1} + c_i V_{i+1}^{j+1} = d_i V_{i-1}^j + e_i V_i^j + f_i V_{i+1}^j + g_i (f_i^j + f_i^{j+1}), \quad (2.20)$$

$$i = 1, \dots, n - 1, j = 0, 1, \dots,$$

kus

$$a_i = \frac{-\lambda_i h \tau - 2\kappa_i \tau}{4h^2},$$

$$b_i = 1 + \frac{\kappa_i \tau}{h^2},$$

$$c_i = \frac{\lambda_i h \tau - 2\kappa_i \tau}{4h^2},$$

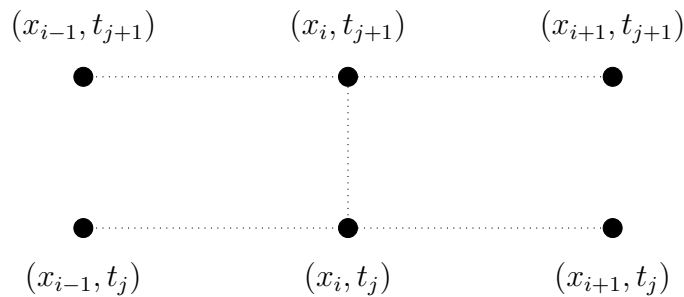
$$d_i = \frac{-\lambda_i h \tau + 2\kappa_i \tau}{4h^2},$$

$$e_i = 1 - \frac{\kappa_i \tau}{h^2},$$

$$f_i = \frac{\lambda_i h \tau + 2\kappa_i \tau}{4h^2},$$

$$g_i = \frac{\tau}{2}.$$

Suurused V_0^{j+1}, V_n^{j+1} ja V_i^0 leiame raja- ning algtingimustest (2.10), (2.11) nagu ilmutatud skeemi korral. Nii nagu ilmutamata diferentsskeem, on ka Crank-Nicolsoni skeem absoluutselt stabiilne.



Joonis 2.3: Crank-Nicolsoni skeemi šabloon.

Nii ilmutamata kui ka Crank-Nicolsoni skeemi korral on võrrandisüsteemi maatriks kolmediagonaalne.

3 Barjääriga optsioonide hindamine võrgumeetodiga

Selles peatükis esitame valemid barjääriga optsioonide hindamiseks kolme võrgumeetodiga. Täpsemalt uurime numbriliste näidete abil neist ilmutamata ja Crank-Nicolsoni skeeme. Kasutatud on materjale [1], [6] ning numbriliste näidete juures magistritööd [7].

3.1 Optsioonide hindamine võrgumeetodiga

Kasutame samu tähistusi nagu esimeses peatükis, s.t t on hetke aeg, T on optsiooni lõppaeg, V on vaadeldava optsiooni hind, $S(0)$ on alusvara alghind, $S(t)$ on alusvara hind, σ alusvara hinna volatiilsus ja r riskivaba intressimäär. Barjääriga optsiooni hind on mittelineaarne funktsioon alusvara hinnast ning optsiooni hindamisel võrgumeetodiga võivad tekkida mittelineaarsusest tulenevad vead. Need vead tekivad juhul, kui barjäär ei läbi võrgu sõlmesid või kui barjäär on lähedane alusvara alghinnale. Sellest tingituna koondub optsiooni hind ajaperioodide kasvades aeglaselt ning võib tugevalt ostsilleeruda.

Vähendamaks mittelineaarsusest tulenevaid vigu on mõistlik konstrueerida võrk nii, et alusvara alghind ja barjäär(id) läbiksid võrgu sõlmesid. Kahe barjääri korral ei ole see üldjuhul aga võimalik ning seetõttu on artiklis [6] barjääriga optsiooni hindamisel koonduvuse kiirendamiseks kasutatud ebäühtlast võrku, mis on barjääride lähedal tihedam.

Teeme võrrandis (1.8) muutujavahetuse $t^* = T - t$ ning saame

$$\frac{\partial V}{\partial t^*} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV. \quad (3.1)$$

Artiklis [6] on võrrandi (3.1) lahendamiseks välja pakutud järgmine üldine diferentsiskeem

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t^*} &= \theta F_{i-1/2}^{n+1}(V_{i-1}^{n+1}, V_i^{n+1}) - \theta F_{i+1/2}^{n+1}(V_i^{n+1}, V_{i+1}^{n+1}) + \theta f_i^{n+1}(V_i^{n+1}) \\ &+ (1 - \theta) F_{i-1/2}^n(V_{i-1}^n, V_i^n) - (1 - \theta) F_{i+1/2}^n(V_i^n, V_{i+1}^n) \\ &+ (1 - \theta) f_i^n(V_i^n), \end{aligned} \quad (3.2)$$

võrgul (S_i, t_n^*) , $i \in \{1, 2, \dots, I + 1\}$, $n \in \{1, 2, \dots, N + 1\}$, kus $t_n^* = T - (n - 1)\Delta t^*$, $n = 1, 2, \dots, N + 1$, $\Delta t^* = \frac{T}{N}$ on aja sammu suurus ning suurus θ ,

$0 \leq \theta \leq 1$ on kaalutegur, mis määrab diferentsiskeemi. Olgu V_i^n optiooni hind ajahetkel t_n^* alusvara hinna S_i korral.

Võrrandis (3.2) kasutatavad $F_{i-1/2}^{n+1}, F_{i+1/2}^{n+1}$ ja f_i^{n+1} avalduvad aja tasemel $n + 1$ kujul:

$$F_{i-1/2}^{n+1}(V_{i-1}^{n+1}, V_i^{n+1}) = \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1})}{\Delta S_{i-1/2}} - (r S_i) V_{i-1/2}^{n+1} \right], \quad (3.3)$$

$$F_{i+1/2}^{n+1}(V_i^{n+1}, V_{i+1}^{n+1}) = \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1})}{\Delta S_{i+1/2}} - (r S_i) V_{i+1/2}^{n+1} \right], \quad (3.4)$$

kus $\Delta S_i = \frac{1}{2}(S_{i+1} - S_{i-1})$, $\Delta S_{i+1/2} = S_{i+1} - S_i$, ning

$$f_i^{n+1}(V_i^{n+1}) = (-r) V_i^{n+1}. \quad (3.5)$$

Suurus $V_{i+1/2}^{n+1}$ seostes (3.3), (3.4) leitakse järgmiselt:

$$V_{i+1/2}^{n+1} = \frac{V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1}}{2}. \quad (3.6)$$

Kaalutegur θ võrrandis (3.2) määrab, millist diferentsiskeemi kasutatakse:

- kui $\theta = 1$, siis on tegemist ilmutamata diferentsiskeemiga;
- kui $\theta = \frac{1}{2}$, siis saame Crank-Nicolsoni skeemi;
- kui $\theta = 0$, siis saame ilmutatud diferentsiskeemi.

Näitame, et diferentsiskeem (3.2) on parameetri $\theta = 1$ korral ilmutamata diferentsiskeem ning leiame kordajad a_i, b_i, c_i, d_i võrrandis

$$a_i V_{i-1}^{n+1} + b_i V_i^{n+1} + c_i V_{i+1}^{n+1} = V_i^n + d_i f_i^n, \quad i = 2, \dots, I, \quad n = 2, \dots, N. \quad (3.7)$$

Kasutades seoseid (3.3) - (3.5) saame võrrandi (3.2) esitada kujul

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t^*} &= \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1})}{\Delta S_{i-1/2}} - (r S_i) V_{i-1/2}^{n+1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1})}{\Delta S_{i+1/2}} - (r S_i) V_{i+1/2}^{n+1} \right] + (-r) V_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Asendame võrrandisse suurused $\Delta S_{i+1/2}$ ning $\Delta S_{i-1/2}$:

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t^*} &= \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1})}{S_i - S_{i-1}} - (r S_i) V_{i-1/2}^{n+1} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1})}{S_{i+1} - S_i} - (r S_i) V_{i+1/2}^{n+1} \right] + (-r) V_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Seosest (3.6) saame:

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t^*} &= \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1})}{S_i - S_{i-1}} - (r S_i) \frac{(V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1})}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1})}{S_{i+1} - S_i} - (r S_i) \frac{(V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1})}{2} \right] + (-r) V_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Võtame suuruse $\frac{1}{\Delta S_i}$ sulgude ette:

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t^*} &= \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1})}{S_i - S_{i-1}} - (r S_i) \frac{(V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1})}{2} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \frac{(V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1})}{S_{i+1} - S_i} - (r S_i) \frac{(V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1})}{2} \right] + (-r) V_i^{n+1} \end{aligned}$$

ning rühmitame sulgude sees:

$$\begin{aligned} \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t^*} &= \frac{1}{\Delta S_i} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \left(\frac{V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{S_i - S_{i-1}} + \frac{-V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1}}{S_{i+1} - S_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - (r S_i) \left(\frac{V_{i-1}^{n+1} - V_{i+1}^{n+1}}{2} \right) \right] + (-r) V_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Pärast võrduse pooli Δt^* ga läbi korrutamist ja ΔS_i asendamist võrdusse saame, et

$$\begin{aligned} V_i^{n+1} - V_i^n &= \frac{\Delta t^*}{\frac{1}{2}(S_{i+1} - S_{i-1})} \left[- \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_i^2 \right) \left(\frac{V_i^{n+1} - V_{i-1}^{n+1}}{S_i - S_{i-1}} + \frac{-V_{i+1}^{n+1} + V_i^{n+1}}{S_{i+1} - S_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - (r S_i) \left(\frac{V_{i-1}^{n+1} - V_{i+1}^{n+1}}{2} \right) \right] + (-r \Delta t^*) V_i^{n+1} \\ &= \frac{\Delta t^*}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left[(\sigma^2 S_i^2) \left(\frac{-V_i^{n+1} + V_{i-1}^{n+1}}{S_i - S_{i-1}} + \frac{V_{i+1}^{n+1} - V_i^{n+1}}{S_{i+1} - S_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - (r S_i) (V_{i-1}^{n+1} - V_{i+1}^{n+1}) \right] + (-r \Delta t^*) V_i^{n+1}. \end{aligned}$$

Viime viimase võrduse kujule (3.7):

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\Delta t^*}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_i - S_{i-1}} - rS_i \right) \right] V_{i-1}^{n+1} \\ & + \left[1 + \frac{\Delta t^* \sigma^2 S_i^2}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} + \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \right) + r\Delta t^* \right] V_i^{n+1} \\ & + \left[-\frac{\Delta t^*}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_{i+1} - S_i} + rS_i \right) \right] V_{i+1}^{n+1} = V_i^n. \end{aligned}$$

Oleme saanud ilmutamata skeemi kujul (2.14):

$$a_i V_{i-1}^{n+1} + b_i V_i^{n+1} + c_i V_{i+1}^{n+1} = V_i^n + d_i f_i^n, \quad i = 2, \dots, I, \quad n = 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

kus

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{\Delta t^*}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_i - S_{i-1}} - rS_i \right), \\ b_i &= 1 + \frac{\Delta t^* \sigma^2 S_i^2}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} + \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \right) + r\Delta t^*, \\ c_i &= -\frac{\Delta t^*}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_{i+1} - S_i} + rS_i \right), \\ d_i &= 0. \end{aligned}$$

Märgime, et ühtlase võrgu korral, tähistades $S_{i+1} - S_i = S_i - S_{i-1} = \Delta S$ saame ilmutamata skeemi viia kujule

$$a_i V_{i-1}^{n+1} + b_i V_i^{n+1} + c_i V_{i+1}^{n+1} = V_i^n, \quad i = 2, \dots, I, \quad n = 2, \dots, N,$$

kus

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{\sigma^2 S_i^2 \Delta t^*}{2(\Delta S)^2} + \frac{rS_i \Delta t^*}{2\Delta S}, \\ b_i &= 1 + \frac{\sigma^2 S_i^2 \Delta t^*}{(\Delta S)^2} + r\Delta t^*, \\ c_i &= -\frac{\sigma^2 S_i^2 \Delta t^*}{2(\Delta S)^2} - \frac{rS_i \Delta t^*}{2\Delta S}. \end{aligned}$$

Kui tähistada

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -rS_i & h &= \Delta S \\ \varkappa_i &= \frac{1}{2}\sigma^2 S_i^2 & \tau &= \Delta t^* \\ f_i^n &= -rV_i^n \end{aligned}$$

siis saame saame ilmutamata diferentskeemi kujul (2.14).

Analoogilised teisendused saab viia läbi juhtude $\theta = \frac{1}{2}$ ja $\theta = 0$ korral. Siinkohal esitame vaid lõplikud avaldised.

Kui $\theta = 0$, siis saame ilmutatud skeemi kujul (2.2):

$$V_i^{n+1} = a_i V_{i-1}^n + b_i V_i^n + c_i V_{i+1}^n + d_i f_i^n \quad i = 2, \dots, I, \quad n = 2, \dots, N,$$

kus

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\Delta t^*}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_i - S_{i-1}} - r S_i \right), \\ b_i &= 1 - \frac{\Delta t^* \sigma^2 S_i^2}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} + \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \right) - r \Delta t^*, \\ c_i &= \frac{\Delta t^*}{(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_{i+1} - S_i} + r S_i \right), \\ d_i &= 0. \end{aligned}$$

Kui $\theta = \frac{1}{2}$, siis saame Crank-Nicolsoni skeemi kujul (2.20):

$$\begin{aligned} a_i V_{i-1}^{n+1} + b_i V_i^{n+1} + c_i V_{i+1}^{n+1} &= d_i V_{i-1}^n + e_i V_i^n + f_i V_{i+1}^n + g_i (f_i^n + f_i^{n+1}), \\ i &= 2, \dots, I, \quad n = 2, \dots, N, \end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{\Delta t^*}{2(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_i - S_{i-1}} - r S_i \right), \\ b_i &= 1 + \frac{\Delta t^* \sigma^2 S_i^2}{2(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} + \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \right) + \frac{r \Delta t^*}{2}, \\ c_i &= -\frac{\Delta t^*}{2(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_{i+1} - S_i} + r S_i \right), \\ d_i &= \frac{\Delta t^*}{2(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_i - S_{i-1}} - r S_i \right), \\ e_i &= 1 - \frac{\Delta t^* \sigma^2 S_i^2}{2(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{1}{S_i - S_{i-1}} + \frac{1}{S_{i+1} - S_i} \right) - \frac{r \Delta t^*}{2}, \\ f_i &= \frac{\Delta t^*}{2(S_{i+1} - S_{i-1})} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{S_{i+1} - S_i} + r S_i \right), \\ g_i &= 0. \end{aligned}$$

Toodud võrrandid kehtivad Euroopa tüüpi optsoonide korral. Kuna Ameerika optiooni saab realiseerida mistahes ajal kuni optiooni täitmisajani, siis leiame

es malt optiooni hinna Φ_i^{n+1} , kui optiooni hetkel t_{n+1}^* ei realiseerita, ilmutamata skeemist:

$$a_i \Phi_{i-1}^{n+1} + b_i \Phi_i^{n+1} + c_i \Phi_{i+1}^{n+1} = V_i^n + d_i f_i^{n+1},$$

vastavalt võrrandile (3.8).

Optiooni lõpliku hinna V_i^{n+1} hetkel t_{n+1}^* leiame vastavalt valemile

$$V_i^{n+1} = \max(\Phi_i^{n+1}, S_i - X, 0).$$

Ilmutatud ja Crank-Nicolsoni meetodite korral leitakse Ameerika optiooni hind analoogiliselt, kuid suurus Φ_i^{n+1} leitakse vastavalt ilmutatud ja Crank-Nicolsoni diferents skeemidele.

3.2 Raja- ja lõputingimused

Selles punktis vaatame, kuidas määrata kindlaks võrk (S_i, t_n^*) , $i = 1, 2, \dots, I + 1$, $n = 1, 2, \dots, N + 1$ ja lõpu- ning rajatingimused erinevate barjääriga optioonide korral. Eespool saime, et $t_1^* = T$ ja $t_{N+1}^* = 0$.

Lõputingimus on kõigi barjääride korral sama: optiooni hind on võrdne väljamaksega, kui hind jääb barjääri(de) vahele. Näiteks alumise barjääriga Euroopa tüüpi *down-and-out* optiooni korral:

$$V_i^1 = V(S_i, t_1^*) = \begin{cases} \max\{\theta(S_i - X), 0\}, & \text{kui } S_i > L, \\ 0, & \text{vastasel juhul,} \end{cases} \quad (3.9)$$

kus $\theta = 1$ ostuoptiooni korral ja $\theta = -1$ müügioptiooni korral.

Vaatleme nüüd, kuidas anda ette väärtusi $a = S_1$, $b = S_{I+1}$ ning millised on rajatingimused erinevate barjääriga optioonide korral. Euroopa ja Ameerika optioonide rajatingimused on samad ning neid me järgmises liigituses eraldi välja ei too.

1. Pideva alumise barjääriga ostuoptioon.

Suuruse S_1 valime nii, et $S_1 \leq L < S_2$ ning S_{I+1} nii, et hind oleks piisavalt suur (töö raames $S_{I+1} \approx 10 \cdot S(0)$). Rajatingimused on kujul:

$$V_1^n = V(S_1, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1;$$

$$V_{I+1}^n = V(S_{I+1}, t_n^*) = S_{I+1} - X, \quad 1 \leq n \leq N + 1.$$

2. Pideva alumise barjääriga müügioptioon.

Valime S_1 ja S_{I+1} nii, nagu ostuoptiooni puhul. Rajatingimused on kujul:

$$\begin{aligned} V_1^n &= V(S_1, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1; \\ V_{I+1}^n &= V(S_{I+1}, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1. \end{aligned}$$

3. Pideva ülemise barjääriga ostuoptioon.

Suuruse S_1 valime nii, et hind oleks piisavalt väike (töö raames $S_1 = 0$) ning S_{I+1} nii, et $S_I < H \leq S_{I+1}$. Rajatingimused on kujul:

$$\begin{aligned} V_1^n &= V(S_1, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1; \\ V_{I+1}^n &= V(S_{I+1}, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1. \end{aligned}$$

4. Pideva ülemise barjääriga müügioptioon.

Valime S_1 ja S_{I+1} nii, nagu ostuoptiooni puhul. Rajatingimused on kujul:

$$\begin{aligned} V_1^n &= V(S_1, t_n^*) = X, \quad 1 \leq n \leq N + 1; \\ V_{I+1}^n &= V(S_{I+1}, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1. \end{aligned}$$

5. Kahe pideva barjääriga ostu- ja müügioptioon.

S_1 valime nii, et $S_1 \leq L < S_2$ ning S_{I+1} nii, et $S_I < H \leq S_{I+1}$. Rajatingimused on kujul:

$$\begin{aligned} V_1^n &= V(S_1, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1; \\ V_{I+1}^n &= V(S_{I+1}, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1. \end{aligned}$$

6. Diskreetse alumise barjääriga ostuoptioon.

S_1 valime nii, et hind oleks piisavalt väike (töö raames $S_1 = 0$) ning S_{I+1} nii, et hind oleks piisavalt suur (töö raames $S_{I+1} \approx 10 \cdot S(0)$) Rajatingimused on kujul:

$$\begin{aligned} V_1^n &= V(S_1, t_n^*) = 0, \quad 1 \leq n \leq N + 1; \\ V_{I+1}^n &= V(S_{I+1}, t_n^*) = S_{I+1} - X, \quad 1 \leq n \leq N + 1. \end{aligned}$$

Diskreetse barjääri puhul tuleb optiooni hinnale V_i^n rakendada lisatingimust, sest barjäärini jõudmist kontrollitakse kindlaks määratud aja tagant, näiteks diskreetse alumise barjääriga optiooni korral

$$V_i^n = V(S_i, t_n^*) = 0, \text{ kui } S_i \leq L \text{ ja } t_n^* = T - t_k, \quad (3.10)$$

kus t_k , $k = 1, 2, \dots, K$ tähistab ajahetki, kus barjääri tingimust kontrollitakse.

Analoogiliselt esitatakse rajatingimused ka teiste diskreetsete barjääridega optioonide korral.

3.3 Numbrilised eksperimendid

Selles alapeatükis kasutatavad andmed on võetud artiklist [6] ja magistritööst [7]. Programmid on koostatud MATLABi abil ning need on toodud lisades. Arvutuste sooritamiseks kasutame sülearvutit (8 GB RAM; 4 x 2.1 GHz; Windows 10). Selles punktis toodud tabelites võrdleme optsiooni hinna koondumist ja hinna leidmise kiirust. Programmide tööks kulunud ajad on toodud sekundites.

Märgime siinkohal, et võrk on moodustatud nii, et $S(0) = S_i$ mingi i korral, st võrk läbib alati alusvara alghinda.

Vaatame esmalt ühe pideva barjääriga Euroopa tüüpi *knock-out* ostuoptsiooni parameetritega:

- optsiooni täitmishind $X = 100$;
- optsiooni lõppaeg $T = 1$ aasta;
- alusvara alghind $S(0) = 100$;
- riskivaba pidev intressimäär $r = 0.1$;
- alusvara volatiilsus $\sigma = 0.25$;
- alumise barjääri hind $L = 90$.

Alusvara hinda vaatame vahemikus $[90; 1090]$. Kasutame ühtlast võrku, mis läbib nii alumist barjääri kui ka alusvara alghinda. Täpne hind 11.3234 [7].

Ajaperioodide arv	S jaotuste arv	Ilmutamata meetod		Crank-Nicolsoni meetod	
		Aeg	Hind	Aeg	Hind
20	100	0.016	11.0925	0.027	11.1801
40	200	0.019	11.2484	0.029	11.2888
100	500	0.038	11.3021	0.066	11.3179
300	1500	0.725	11.3175	0.764	11.3228
500	2500	2.843	11.3200	3.476	11.3231
1000	5000	20.526	11.3217	20.626	11.3233

Tabel 3.1: Ühe barjääriga optsiooni hinna leidmine ilmutamata ja Crank-Nicolsoni diferentsmeetoditega.

Tabelis (3.1) märkame, et Crank-Nicolsoni meetod koondub kiiremini, kuid vajab samade parameetrite juures arvutuste teostamiseks mõnevõrra kauem aega.

Üldjuhul ei õnnestu võrku selliselt moodustada, et see barjääre ja alusvara alghinda läbiks. Sellisel juhul tuleb kasuks ebäühtlane võrk. Järgmisest tabelist

näeme, et kui barjääri läheduses võtta tihedam võrk, siis on optsiooni hind täpsem. Kasutame eelmise näite andmeid, kus ajaperioodide arv on 500. Toome sisse muutuja *kaugus*, mis näitab, kui kaugel barjäärist asub lähim võrgupunkt. Alusvara hinda vaatame vahemikus $[90 - \textit{kaugus}; 1090]$ ning barjäär on tihedam lõigus $[90 - \textit{kaugus}; 92]$. Tihedamas alusvara hinna lõigus on samm $\Delta S = 0.1$, väljaspool ehk lõigus $[92; 1090]$ on $\Delta S = 0.5$. Alusvara hind on jaotatud 2016 osaks.

Lähima võrgupunkti kaugus barjäärist	Ilmutamata meetod	
	Aeg	Hind
0.08	1.743	11.3697
0.06	1.717	11.3574
0.04	1.869	11.3449
0.02	1.871	11.3325
0.01	1.781	11.3263
0.005	1.811	11.3232

Tabel 3.2: Ühe barjääriga optsiooni hinna leidmine ilmutamata meetodil, kui võrk ei läbi barjääri.

Paneme tähele, et erinevalt tabelis (3.1) toodud tulemustest hindab ilmutamata meetod tabeli (3.2) põhjal optsiooni hinda üle, kui lähima võrgupunkti kaugus barjäärist on suhteliselt suur. Ühtlasi märkame, et kui $\textit{kaugus} = 0.005$, siis andis meetod täpsema tulemuse kui tabelis (3.1).

Näitame nüüd, et ebauhtlase võrgu abil saab diferentsmeetodi koondumist kiirendada. Kasutame taaskord esimese näite andmeid ning valime ajaperioodide arvuks 100. Lõigus $[90; 100]$ kasutame tihedamat võrku kui võrgu ülejäänud osas (siinkohal lõigus $[100; 1090]$). Tuletame meelde, et ilmutama diferentsskeemi abil saime ühtlase võrgu korral (kus ajaperioode oli 100 ning S oli jaotatud 500 osaks) 0.038 sekundiga tulemuse 11.3021. Tegelik optsiooni hind on 11.3234.

S jaotuste arv	$[90; 100]$ jaotuste arv	$[100; 1090]$ jaotuste arv	Ilmutamata meetod	
			Aeg	Hind
218	20	198	0.020	11.3299
298	100	198	0.021	11.3295
350	100	250	0.024	11.3220

Tabel 3.3: Ühe barjääriga optsiooni hinna leidmine ilmutamata meetodil, kui barjääri läheduses on võrk tihedam.

Paneme tähele, et juba tabeli (3.3) esimeses arvutuste reas saime hinna, mis erines tegelikust vaid 0.0065 võrra. Seejuures oli S jaotatud 218 osaks. Ühtlase võrgu korral saime sama ajaperioodide arvu ning S jagamisel 500 osaks hindade erinevuseks 0.0213. Kokkuvõttes saime selle näite korral tänu ebaühtlasele võrgule rohkem kui kolm korda täpsema tulemuse ja kulutasime ligi kaks korda vähem aega. Ka teised tabelis (3.3) toodud võrgud annavad kordades parema tulemuse ning kulutavad vähem aega.

Vaatleme nüüd kahe barjääriga optsoone. Olgu tegemist kahe pideva barjääriga Euroopa tüüpi *knock-out* ostuoptsooniga, millel on järgmised parameetrid:

- optiooni täitmishind $X = 100$;
- optiooni lõppaeg $T = 1$ aasta;
- alusvara alghind $S(0) = 95$;
- riskivaba pidev intressimäär $r = 0.1$;
- alusvara volatiilsus $\sigma = 0.25$;
- alumise barjääri hind $L = 90$;
- ülemise barjääri hind $H = 140$.

Alusvara hinda vaatame vahemikus $[L; H]$ ehk $[90; 140]$. Kasutame ühtlast võrku, mis läbib mõlemat barjääri. Optiooni täpne hind on 1.4584 [7].

Ajaperioodide arv	S jaotuste arv	Ilmutamata meetod		Crank-Nicolsoni meetod	
		Aeg	Hind	Aeg	Hind
10	50	0.016	1.5935	0.024	1.4491
30	150	0.017	1.5114	0.026	1.4583
50	250	0.021	1.4912	0.031	1.4583
100	500	0.037	1.4752	0.076	1.4584
300	1500	0.659	1.4641	0.788	1.4584
500	2500	2.805	1.4618	3.190	1.4584
1000	5000	19.614	1.4601	22.449	1.4584

Tabel 3.4: Kahe barjääriga optiooni hinna leidmine ilmutamata ja Crank-Nicolsoni diferentsmeetoditega.

Märkame, et ka tabeli (3.4) põhjal kulub ilmutamata meetodil optiooni hinna arvutamiseks vähem aega, kuid ka kõige tihedama võrgu korral erineb saadud

tulemus tegelikust ligikaudu 0.0017 võrra. Crank-Nicolsoni meetodil saime täpse vastuse juba 100×500 võrgu korral ning selle arvutamiseks kulus 0.076 sekundit.

Vaatame eelmise näite põhjal, mis juhtub, kui alusvara hind on ülemise barjääri lähedal. Olgu ajaperioodide arv 500 ning S jaotuste arv 2500. Võrk on ühtlane ning läbib barjääre. Kasutame samu parameetreid, mis eelmises näites.

Alusvara hind	Hind ilmutamata meetodiga	Hind Crank-Nicolsoni meetodiga
139.8	0.0268	0.2709
139.86	0.0187	-0.4670
139.9	0.0134	-1.7225
139.94	0.0080	-1.0245
139.96	0.0053	3.2651
139.98	0.0027	14.6367

Tabel 3.5: Ilmutamata ja Crank-Nicolsoni meetoditega saadud optsioonide hinnad, kui alusvara hind on barjääri lähedal.

Barjäärile lähenedes peaks optsiooni hind lähenema nullile, kuid tabelist (3.5) näeme, et Crank-Nicolsoni meetod annab teistsuguse tulemuse.

Ostsilleerumise vältimiseks peavad olema täidetud artiklis [6] toodud tingimused:

$$\Delta S_{i-1/2} < \frac{\sigma^2 S_i}{r} \quad (3.11)$$

ja

$$\frac{1}{(1-\theta)\Delta t^*} > \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \left(\frac{1}{\Delta S_{i-1/2} \Delta S_i} + \frac{1}{\Delta S_{i+1/2} \Delta S_i} \right) + r. \quad (3.12)$$

Tingimus (3.11) on lihtsasti täidetav, kui $S_i \neq 0$. Ilmutamata diferentsiskeemi korral on tingimus (3.12) triviaalselt täidetud, sest $\theta = 1$. Crank-Nicolsoni ja ilmutatud diferentsiskeemide korral seab tingimus (3.12) aja sammu ja alusvara alghinna sammu suurustele teatud piirangud. Märkime, et tabeli (3.5) loomiseks kasutatud andmed ei rahulda tingimust (3.12).

Järgmisena vaaatame Euroopa müügioptsiooni. Olgu meil ühe pideva barjääriga *knock-out* müügioptsioon:

- optsiooni täitmishind $X = 10$;
- optsiooni lõppaeg $T = 1$ aasta;
- alusvara alghind $S(0) = 9$;

- riskivaba pidev intressimäär $r = 0.12$;
- alusvara volatiilsus $\sigma = 0.5$;
- alumise barjääri hind $L = 7$.

Alusvara hinda vaatame vahemikus [7; 107]. Kasutame ühtlast võrku, mis läbib alumisit barjääri. Täpne hind 0.0811 [7].

Ajaperioodide arv	S jaotuste arv	Ilmutamata meetod		Crank-Nicolsoni meetod	
		Aeg	Hind	Aeg	Hind
20	100	0.016	0.0830	0.026	0.0735
40	200	0.018	0.0826	0.029	0.0793
100	500	0.047	0.0821	0.061	0.0808
300	1500	0.695	0.0815	0.843	0.0811
500	2500	2.819	0.0814	3.047	0.0811
1000	5000	21.090	0.0813	20.911	0.0811

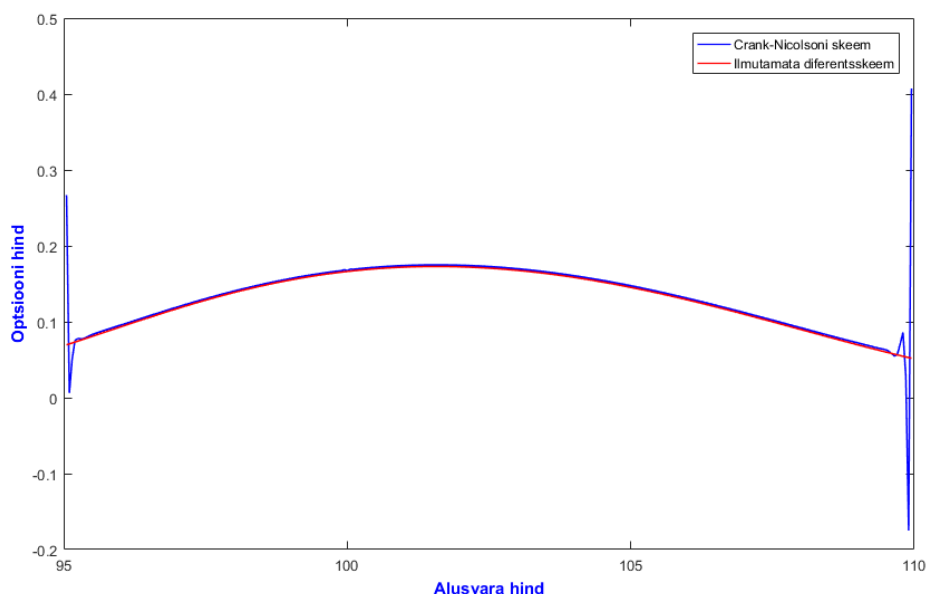
Tabel 3.6: Ühe barjääriga müügioptsiooni hinna leidmine ilmutamata ja Crank-Nicolsoni diferentsmeetoditega.

Erinevalt varasematest näidetest on tabeli (3.6) põhjal ilmutamata meetod hõreda võrgu korral Crank-Nicolsoni meetodist täpsem. Lisaks paneme tähele, et müügioptsiooni korral on ilmutamata meetodiga saadud hinnad suuremad ja Crank-Nicolsoni meetodiga arvutatud hinnad väiksemad kui täpne hind.

Eelnevad näited iseloomustasid kõik pideva barjääriga optioone. Järgmine näide on aga kahe diskreetse barjääriga Euroopa tüüpi *knock-out* ostuoptioon. Barjääri tingimust kontrollitakse nädala tagant, seega tegemist on *weekly* optiooniga. Juhime siinkohal tähelepanu sellele, et artiklis [6] arvestatakse diskreetsete optioonide arvutamisel, et aasta koosneb 250 päevast ning nädal viiest päevast. Kasutame selliseid parameetreid:

- optiooni täitmishind $X = 100$;
- optiooni lõppaeg $T = 0.5$ aastat;
- riskivaba pidev intressimäär $r = 0.10$;
- alusvara volatiilsus $\sigma = 0.2$;
- alumise barjääri hind $L = 95$;
- ülemise barjääri hind $H = 110$.

Alusvara alghinda vaatame lõigus $[0; 610]$. Võrk on tihedam lõigus $[55; 150]$, kus $\Delta S = 0.05$, väljaspool tihedamat osa on $\Delta S = 0.5$. Võrk läbib barjääre L ning H . Tulemuse esitame seekord graafikuna, kus x -teljel on alusvara alghind ning y -teljel optiooni hind vastava alusvara alghinna korral.

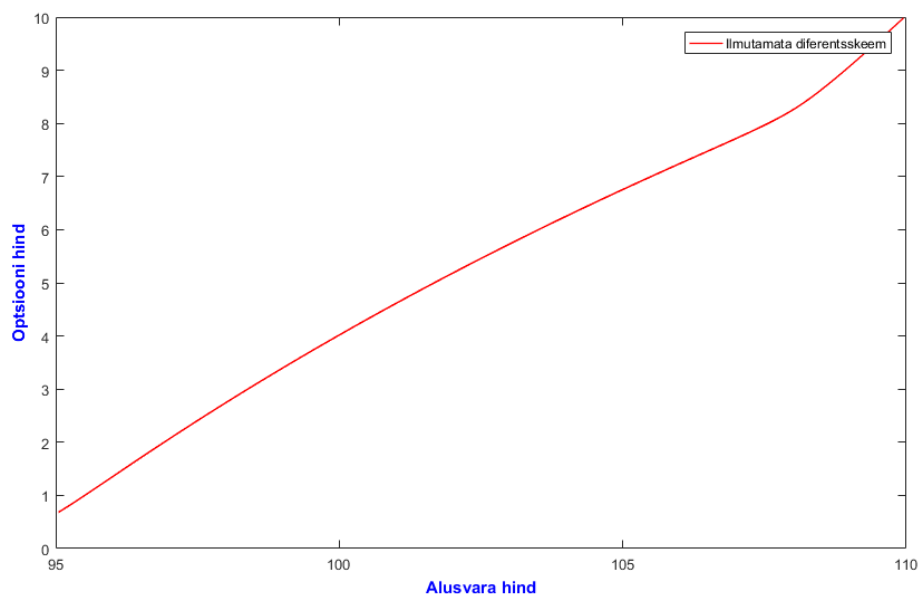


Joonis 3.1: Kahe diskreetse barjääriga ostuoptiooni hinna sõltuvus alusvara hinnast Crank-Nicolsoni ja ilmutamata diferentskeemiga arvutades.

Jooniselt (3.1) on hästi näha, et barjääride $L = 95$ ja $H = 110$ lähedal tekivad Crank-Nicolsoni meetodiga arvutades suured numbrilised ostsillatsioonid.

Vaatleme nüüd Ameerika tüüpi optiooni, mis erineb Euroopa optioonist selle poolest, et seda sai realiseerida ükskõik millisel ajal enne optiooni täitmisaega. Järgmine näide on kahe diskreetse barjääriga *knock-out* ostuoptioon. Barjääri tingimust kontrollitakse iga päeva tagant, seega tegemist on *daily* optiooniga. Kasutame samu parameetreid ja võrku, mis eelmises näites.

Tulemuse esitame taaskord graafikuna, kus x -teljel on alusvara hind ning y -teljel optiooni hind vastava alusvara hinna korral.



Joonis 3.2: Kahe diskreetse barjääriga Ameerika tüüpi ostuoptiooni hinna sõltuvus alusvara hinnast ilmutamata diferentsiskeemiga arvutades.

Joonis (3.2) erineb märgatavalt varem toodud joonisest (3.1), kuigi algandmed on samad. Erinev on barjääri tingimuse kontrollimise tihedus ja optiooni tüüp (Euroopa/Ameerika). Just optiooni tüüp määrab optiooni hinna sõltuvuse alusvara alghinnast. Kui kahe barjääriga Euroopa tüüpi optioonide graafik sarnaneb parabooliga, siis Ameerika tüüpi optioonide kasvab alusvara alghinna kasvades. Pane me tähele ka seda, et kui alusvara hind läheneb ülemisele barjäärile, st. $S(0) \rightarrow H$, siis olenemata suurest optiooni kehtetuks muutumise riskist ei ole optiooni hind nulli lähedal nagu joonisel (3.1).

Viimaseks vaatame kuidas mõjutavad optiooni ja barjääri liigid samade algandmetega optiooni hinda. Kasutame järgmisi parameetreid:

- optiooni täitmishind $X = 100$;
- alusvara alghind $S(0) = 100$;
- optiooni lõppaeg $T = 0.5$ aastat;
- riskivaba pidev intressimäär $r = 0.10$;
- alusvara volatiilsus $\sigma = 0.2$;
- alumise barjääri hind $L = 99.9$;

Kasutame ebäühtlast võrku ja ilmutamata meetodit. Alusvara hinda vaatame lõigus $[0, 1000]$, tihedam on võrk barjääri lähedal ehk lõigus $[98; 102]$. Väljaspool tihendatud võku on $\Delta S = 1$. Pideva barjääri korral kasutame barjääri lähedal võrku, kus $\Delta S = 0.1$, *daily* ja *weekly* optsiooni korral $\Delta S = 0.01$. Aja sammu tihedused on vastavalt $\Delta t^* = 0.05$, $\Delta t^* = 0.001$ ning $\Delta t^* = 0.0025$, pideva, *daily* ja *weekly* optsiooni korral. Täpsed Euroopa tüüpi optsiooni hinnad võrame artiklist [6].

Barjääri rakendamine	Euroopa optsioon			Ameerika optsioon	
	Täpne hind	Aeg	Hind	Aeg	Hind
Pidev	0.165	0.145	0.1641	0.172	0.1641
<i>daily</i>	1.512	21.518	1.5054	25.100	1.5054
<i>weekly</i>	2.963	8.848	2.9966	9.726	2.9966

Tabel 3.7: Eri liiki barjääriga optsioonide hindade erinevus.

Tabel (3.7) näitab, kuidas mõjutab barjääri kontrollimise sagedus optsiooni, mille alusvara hind on barjääri lähedal. Paneme tähele, et selliste andmete korral on Euroopa ja Ameerika tüüpi optsioonide hinnad võrdsed. Kuna barjäär on alusvara hinnale väga lähedal ($X - L = 0.1$), siis muutub erinevate barjääri tüüpide korral optsiooni hind mitmekordselt.

Kokkuvõtteks võime öelda, et optsiooni hinna leidmisel eelistatakse ilmutamata diferents skeemi, sest selle korral on tingimus (3.12) triviaalselt täidetud ning ostsillatsioonid ei teki. Crank-Nicolsoni skeemi on mõistlik kasutada juhul, kui täidetakse tingimused (3.11) ja (3.12), kuid see nõuab üldjuhul väga väikese ajasammu kasutamist, mis suurendab arvutuste mahtu.

Lisaks tasub mainida, et barjääriga optsioonide hindamisel võrgumeetodiga tuleb kasuks ebäühtlane võrk. Selle kasutamisel saab vähendada programmide tööaega ja leida täpsemaid hindasid juhul, kui võrku ei õnnestu luua selliselt, et see barjääre läbiks, või alusvara alghind on barjääri lähedal.

Viited

- [1] M. Capinski, T. Zastawniak: *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*. Springer-Verlag (2003).
- [2] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison: *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press (1993).
- [3] T.-S. Dai, Y.-D. Lyuu: *The Bino-Trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing*. The Journal of Derivatives (2010).
- [4] Meelis Käärik: *Juhuslikud protsessid*. Loengukonspekt, Tartu (2011).
- [5] J. Janno: *Arvutusmeetodid*. TTÜ kirjastus (2016).
- [6] R. Zvan, K.R. Vetzal, P.A. Forsyth: *PDE methods for pricing barrier options*. Elsevier Science B.V. (2000).
- [7] M. Metsalu: *Barjääriga optiooni hinna määramine binoom- ja trinoommeetodi modifikatsioonidega*. Magistritöö, Tartu (2016).

Lisad

Crank-Nicolsoni meetod, pidev, Euroopa ostuoptsoon, ühe barjääriga (tabel 3.1)

```
1 r=0.1;           %riskivaba intressimaar
2 sigma=0.25;     %volatiilsus
3 T=1;           %optsooni pikkus aastates
4 X=100;         %taitmishind
5 L=90;          %alumine barjaar
6 S0=100;        %alusvara hind
7 algus=L;
8 S_vork=[[algus 1090];[0 2]]; %vorgu loikude kirjeldamine
9 [x y]=size(S_vork);
10 S=[];          %vorgu loomine
11 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
12 S=[S osa];
13 for i=3:y;     %vorgu laiendamise ebauhtlase vorgu korral
14     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
15     S=[S osa];
16 end
17 T_samm=0.01;   %aja samm
18 [x y]=size(S);
19 n=y-1;
20 m=T/T_samm;
21 V(1,1)=0;     %loputingimus
22 V(n+1,1)=0;
23 for i=2:n;
24     V(i,1)= max(0, S(i)-X);
25 end
26 t=0:T_samm:T;
27 A=zeros(n+1,m+1);
28 for i=2:n
29     A(i,i-1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
30     A(i,i)=1+0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i))+0.5*r*T_samm;
31     A(i,i+1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
32 end
33 A(1,1)=1;
34 A(n+1,n+1)=1;
35 A1=inv(A);
36 for j=1:m
37     for i=2:n
38         d(i)=(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i)))*V(i+1,j)+(1-0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i))-0.5*r*T_samm)*V(i,j)+(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i)))*V(i-1,j);
39     end
40     d(1)=0;           % 1. rajatingimus
41     d(n+1)=1090-X;   % 2. rajatingimus
```

```

42     V(:, j+1)=A1*d';
43 end
44 [row, column] = find(S==S0); %alusvara alghinna indeksi leidmine
45 [x y]=size(V); %ja optsiooni hinna kuvamine
46 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Ilmutamata meetod, pidev, Euroopa ostuoptsioon, ühe barjääriga (tabel 3.1)

```

1  r=0.1; %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.25; %volatiilsus
3  T=1; %optsiooni pikkus aastates
4  X=100; %taitmishind
5  L=90; %alumine barjaar
6  S0=100; %alusvara hind
7  algus=L;
8  S_vork=[[algus 1090];[0 2]];
9  [x y]=size(S_vork);
10 S=[];
11 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
12 S=[S osa];
13 for i=3:y;
14     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
15     S=[S osa];
16 end
17 T_samm=0.01;
18 [x y]=size(S);
19 n=y-1;
20 m=T/T_samm;
21 V(1,1)=0;
22 V(n+1,1)=0;
23 for i=2:n;
24     V(i,1) =max(0, S(i)-X);
25 end
26 t=0:T_samm:T;
27 A=zeros(n+1,m+1);
28 for i=2:n
29     A(i,i-1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
30     A(i,i)=1+(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+r*T_samm;
31     A(i,i+1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
32 end
33 A(1,1)=1;
34 A(n+1,n+1)=1;
35 A1=inv(A);
36 for j=1:m
37     for i=2:n
38         d(i)=V(i, j);
39     end
40     d(1)=0;
41     d(n+1)=1090-X;
42     V(:, j+1)=A1*d';

```

```

43 end
44 [row,column] = find(S==S0);
45 [x y]=size(V);
46 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Tabel 3.2. Vörk on barjäärist 0.005 kaugusel.

```

1 r=0.1;           %riskivaba intressimaar
2 sigma=0.25;     %volatiilsus
3 T=1;           %optiooni pikkus aastates
4 X=100;         %taitmishind
5 L=90;         %alumine barjaar
6 S0=100;       %alusvara hind
7 algus=L-0.005;
8 S_vork=[[algus 92 1090];[0 0.1 0.5]];
9 [x y]=size(S_vork);
10 S=[];
11 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
12 S=[S osa];
13 for i=3:y;
14     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
15     S=[S osa];
16 end
17 T_samm=0.002;
18 [x y]=size(S);
19 n=y-1;
20 m=T/T_samm;
21 V(1,1)=0;
22 V(n+1,1)=0;
23 for i=2:n;
24     V(i,1) =max(0, S(i)-X);
25 end
26 t=0:T_samm:T;
27 A=zeros(n+1,m+1);
28 for i=2:n
29     A(i,i-1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
30     A(i,i)=1+(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+r*T_samm;
31     A(i,i+1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
32 end
33 A(1,1)=1;
34 A(n+1,n+1)=1;
35 A1=inv(A);
36 for j=1:m
37     for i=2:n
38         d(i)=V(i, j);
39     end
40     d(1)=0;
41     d(n+1)=1090-X;
42     V(:, j+1)=A1*d';
43 end

```

```

44 [row, column] = find(S==S0);
45 [x y]=size(V);
46 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Crank-Nicolsoni meetod, pidev, Euroopa ostuoptsioon, kahe barjääriga (tabel 3.4)

```

1  r=0.1;           %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.25;     %volatiilsus
3  T=1;           %optsiooni pikkus aastates
4  X=100;         %taitmishind
5  L=90;          %alumine barjaar
6  H=140;         %ulemine barjaar
7  S0=95;         %alusvara hind
8  algus=L;
9  S_vork=[[algus H];[0 1/30]];
10 [x y]=size(S_vork);
11 S=[];
12 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
13 S=[S osa];
14 for i=3:y;
15     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
16     S=[S osa];
17 end
18 T_samm=1/300;
19 [x y]=size(S);
20 n=y-1;
21 m=T/T_samm;
22 V(1,1)=0;
23 V(n+1,1)=0;
24 for i=2:n;
25     V(i,1)= max(0, S(i)-X);
26 end
27 t=0:T_samm:T;
28 A=zeros(n+1,m+1);
29 for i=2:n
30     A(i,i-1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
31     A(i,i)=1+0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+0.5*r*T_samm;
32     A(i,i+1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
33 end
34 A(1,1)=1;
35 A(n+1,n+1)=1;
36 A1=inv(A);
37 for j=1:m
38     for i=2:n
39         d(i)=(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i)))*V(i+1,j)+(1-0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))-0.5*r*T_samm)*V(i,j)+(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i)))*V(i-1,j);
40     end

```



```

41     d(1)=0;
42     d(n+1)=0;
43     V(:,j+1)=A1*d';
44 end
45 [row,column] = find(S==S0);
46 [x y]=size(V);
47 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Ilmutamata meetod, pidev, Euroopa ostuoptsoon, kahe barjääriga (tabel 3.4)

```

1  r=0.1;           %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.25;     %volatiilsus
3  T=1;            %optsooni pikkus aastates
4  X=100;          %taitmishind
5  L=90;           %alumine barjaar
6  H=140;          %ulemine barjaar
7  S0=95;          %alusvara hind
8  algus=L;
9  S_vork=[[algus H];[0 1/30]];
10 [x y]=size(S_vork);
11 S=[];
12 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
13 S=[S osa];
14 for i=3:y;
15     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
16     S=[S osa];
17 end
18 T_samm=1/300;
19 [x y]=size(S);
20 n=y-1;
21 m=T/T_samm;
22 V(1,1)=0;
23 V(n+1,1)=0;
24 for i=2:n;
25     V(i,1) =max(0, S(i)-X);
26 end
27 t=0:T_samm:T;
28 A=zeros(n+1,m+1);
29
30 for i=2:n
31     A(i,i-1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
32     A(i,i)=1+(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+r*T_samm;
33     A(i,i+1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
34 end
35 A(1,1)=1;
36 A(n+1,n+1)=1;
37 A1=inv(A);
38 for j=1:m
39     for i=2:n
40         d(i)=V(i,j);

```

```

41     end
42     d(1)=0;
43     d(n+1)=0;
44     V(:,j+1)=A1*d';
45 end
46 [row,column] = find(S==S0);
47 [x y]=size(V);
48 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Crank-Nicolsoni meetod, pidev, Euroopa müügioptsioon, ühe barjääriga (tabel 3.5)

```

1  r=0.12;           %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.5;       %volatiilsus
3  T=1;             %optsiooni pikkus aastates
4  X=10;            %taitmishind
5  L=7;             %alumine barjaar
6  S0=9;            %alusvara hind
7  algus=L;
8  S_vork=[[algus 107];[0 0.04]];
9  [x y]=size(S_vork);
10 S=[];
11 for i=2:y;
12     osa=S_vork(1, i-1):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
13     S=[S osa];
14 end
15 T_samm=0.002;
16 [x y]=size(S);
17 n=y-1;
18 m=T/T_samm;
19 V(1,1)=0;
20 V(n+1,1)=0;
21 for i=2:n;
22     V(i,1)=max(0, X-S(i));
23 end
24 t=0:T_samm:T;
25 A=zeros(n+1,m+1);
26 for i=2:n
27     A(i,i-1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
28     A(i,i)=1+0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+0.5*r*T_samm;
29     A(i,i+1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
30 end
31 A(1,1)=1;
32 A(n+1,n+1)=1;
33 A1=inv(A);
34 for j=1:m
35     for i=2:n
36         d(i)=(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i)))*V(i+1,j)+(1-0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))-0.5*r*T_samm)*V(i,j)+(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*

```

```

                S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i))*V(i-1,j);
37     end
38     d(1)=0;
39     d(n+1)=0;
40     V(:,j+1)=A1*d';
41 end
42 [row,column] = find(S==S0);
43 [x y]=size(V);
44 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Ilmutamata meetod, pidev, Euroopa müügioptsioon, ühe barjääriga (tabel 3.5)

```

1  r=0.12;           %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.5;       %volatiilsus
3  T=1;             %optsiooni pikkus aastates
4  X=10;            %taitmishind
5  L=7;             %alumine barjaar
6  S0=9;            %alusvara hind
7  algus=L;
8  S_vork=[[algus 107];[0 0.04]];
9  [x y]=size(S_vork);
10 S=[];
11 for i=2:y;
12     osa=S_vork(1, i-1):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
13     S=[S osa];
14 end
15 T_samm=0.002;
16 [x y]=size(S);
17 n=y-1;
18 m=T/T_samm;
19 V(1,1)=0;
20 V(n+1,1)=0;
21 for i=2:n;
22     V(i,1) =max(0, X-S(i));
23 end
24 t=0:T_samm:T;
25 A=zeros(n+1,m+1);
26 for i=2:n
27     A(i,i-1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
28     A(i,i)=1+(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+r*T_samm;
29     A(i,i+1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
30 end
31 A(1,1)=1;
32 A(n+1,n+1)=1;
33 A1=inv(A);
34 for j=1:m
35     for i=2:n
36         d(i)=V(i,j);
37     end
38     d(1)=0;

```

```

39     d(n+1)=0;
40     V(:, j+1)=A1*d';
41 end
42 [row, column] = find(S==S0);
43 [x y]=size(V);
44 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Crank-Nicolsoni meetod, diskreetne, Euroopa ostuoptsoon, kahe barjääriga (joonis 3.1)

```

1  r=0.10;           %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.2;       %volatiilsus
3  T=0.5;           %optsooni pikkus aastates
4  St=100;          %alusvara hind
5  X=100;           %taitmishind
6  L=95;            %alumine barjaar
7  H=110;           %ulemine barjaar
8  algus=L;
9  S_vork=[[0 55 150 610];[0 0.5 0.05 0.5]];
10 [x y]=size(S_vork);
11 S=[];
12 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
13 S=[S osa];
14 for i=3:y;
15     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
16     S=[S osa];
17 end
18 T_samm=0.002;
19 [x y]=size(S);
20 n=y-1;
21 m=T/T_samm;
22 t=0:T_samm:T;
23 weekly=0.02;
24 t_disk=0:weekly:T;
25 A=zeros(n+1,m+1);
26 V(1,1)=0;
27 V(n+1,1)=0;
28 for i=2:n;
29     if ismember(t(1), t_disk)==1 & ( S(i)<=L || S(i)>=H )
30         V(i,1)= 0;
31     else
32         V(i,1)= max(0, S(i)-X);
33     end
34 end
35 for i=2:n
36     A(i,i-1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
37     A(i,i)=1+(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+r*T_samm;
38     A(i,i+1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
39 end

```

```

40 A(1,1)=1;
41 A(n+1,n+1)=1;
42 A1=inv(A);
43 for j=1:m
44     for i=2:n
45         d(i)=V(i,j);
46     end
47     d(1)=0;
48     d(n+1)=610-X;
49     V(:,j+1)=A1*d';
50     for i=1:n+1
51         if ismember(t(j+1), t_disk)==1 & ( S(i)<=L || S(i)>=H )
52             V(i,j+1)=0;
53         end
54     end
55 end
56 x=linspace(S(912),S(1210),1210-912+1);
57 yid=V(:,length(t));
58 y=[];
59 for i=1:1210-912+1
60     y(i) =yid(912+i-1);
61 end
62 plot(x,y,'r');
63 xlabel('Alusvara hind', 'FontSize',11,'FontWeight','bold','Color',
        'b');
64 ylabel('Optsiooni hind', 'FontSize',11,'FontWeight','bold','Color',
        'b');

```

Ilmutamata meetod, diskreetne, Euroopa ostuoptsioon, kahe barjääriga (joonis 3.1)

```

1 r=0.10;      %riskivaba intressimaar
2 sigma=0.2;  %volatiilsus
3 T=0.5;      %optsiooni pikkus aastates
4 St=100;     %alusvara hind
5 X=100;      %taitmishind
6 L=95;       %alumine barjar
7 H=110;      %ulemine barjar
8 alvus=L;
9 S_vork=[[0 55 150 610];[0 0.5 0.05 0.5]];
10 [x y]=size(S_vork);
11 S=[];
12 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
13 S=[S osa];
14 for i=3:y;
15     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
16     S=[S osa];
17 end
18 T_samm=0.002;
19 [x y]=size(S);
20 n=y-1;
21 m=T/T_samm;
22 t=0:T_samm:T;
23 weekly=0.02;

```

```

24 t_disk=0:weekly:T;
25 A=zeros(n+1,m+1);
26 V(1,1)=0;
27 V(n+1,1)=0;
28 for i=2:n;
29     if ismember(t(1), t_disk)==1 & ( S(i)<=L || S(i)>=H )
30         V(i,1)= 0;
31     else
32         V(i,1)= max(0, S(i)-X);
33     end
34 end
35 for i=2:n
36     A(i,i-1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S
37         (i-1))-r*S(i));
38     A(i,i)=1+0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-
39         S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+0.5*r*T_samm;
40     A(i,i+1)=-0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)
41         -S(i))+r*S(i));
42 end
43 A(1,1)=1;
44 A(n+1,n+1)=1;
45 A1=inv(A);
46 for j=1:m
47     for i=2:n
48         d(i)=(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)
49             -S(i))+r*S(i)))*V(i+1,j)+(1-0.5*(T_samm*sigma^2*S(i)^2)
50             / (S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))-0.5*
51             r*T_samm)*V(i,j)+(0.5*T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*
52             S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i)))*V(i-1,j);
53     end
54     d(1)=0;
55     d(n+1)=610-X;
56     V(:,j+1)=A1*d';
57     for i=1:n+1
58         if ismember(t(j+1), t_disk)==1 & ( S(i)<=L || S(i)>=H )
59             V(i,j+1)=0;
60         end
61     end
62 end
63 x=linspace(S(912),S(1210),1210-912+1);
64 yid=V(:,length(t));
65 y=[];
66 for i=1:1210-912+1
67     y(i) =yid(912+i-1);
68 end
69 plot(x,y,'b');
70 xlabel('Alusvara hind', 'FontSize',11,'FontWeight','bold','Color',
71     'b');
72 ylabel('Optsiooni hind', 'FontSize',11,'FontWeight','bold','Color',
73     'b');

```

Ilmutamata meetod, diskreetne, Ameerika ostuoptsoon, kahe barjääriga (joonis 3.2)

```

1  r=0.10;           %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.2;       %volatiilsus
3  T=0.5;           %optsooni pikkus aastates
4  St=100;          %alusvara hind
5  X=100;           %taitmishind
6  L=95;            %alumine barjaar
7  H=110;           %ulemine barjaar
8  aligus=L;
9  S_vork=[[0 55 150 610];[0 0.5 0.05 0.5]];
10 [x y]=size(S_vork);
11 S=[];
12 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
13 S=[S osa];
14 for i=3:y;
15     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
16     S=[S osa];
17 end
18 T_samm=0.002;
19 [x y]=size(S);
20 n=y-1;
21 m=T/T_samm;
22 t=0:T_samm:T;
23 daily=0.004;
24 t_disk=0:daily:T;
25 A=zeros(n+1,m+1);
26 V(1,1)=0;
27 V(n+1,1)=0;
28 for i=2:n;
29     if ismember(t(1), t_disk)==1 & ( S(i)<=L || S(i)>=H )
30         V(i,1)= 0;
31     else
32         V(i,1)= max(0, S(i)-X);
33     end
34 end
35 for i=2:n
36     A(i,i-1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i-1))-r*S(i));
37     A(i,i)=1+(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i-1))+1/(S(i+1)-S(i)))+r*T_samm;
38     A(i,i+1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i))+r*S(i));
39 end
40 A(1,1)=1;
41 A(n+1,n+1)=1;
42 A1=inv(A);
43 Fi=V;
44 for j=1:m
45     for i=2:n
46         d(i)=V(i,j);
47     end
48     d(1)=0;

```

```

49     d(n+1)=610-X;
50     Fi(:,j+1)=A1*d';
51     for i=1:n+1
52         V(i,j+1)=max([0, Fi(i,j+1), S(i)-X]);
53         if ismember(t(j+1), t_disk)==1 & ( S(i)<=L || S(i)>=H )
54             V(i,j+1)=0;
55         end
56     end
57 end
58 x=linspace(S(912),S(1210),1210-912+1);
59 yid=V(:,length(t));
60 y=[];
61 for i=1:1210-912+1
62     y(i) =yid(912+i-1);
63 end
64 plot(x,y,'r');
65 xlabel('Alusvara hind', 'FontSize',11,'FontWeight','bold','Color',
        'b');
66 ylabel('Optsiooni hind', 'FontSize',11,'FontWeight','bold','Color',
        'b');

```

Ilmutamata meetod, diskreetne, Ameerika ostuoptsioon, ühe barjääriga (tabel 3.7)

```

1  r=0.1;           %riskivaba intressimaar
2  sigma=0.2;      %volatiilsus
3  T=0.5;          %optsiooni pikkus aastates
4  X=100;          %taitmishind
5  L=99.9;         %alumine barjaar
6  S0=100;         %alusvara hind
7  algus=L;
8  S_vork=[[0 98 102 1000];[0 1 0.01 1]];
9  [x y]=size(S_vork);
10 S=[];
11 osa=S_vork(1, 1):S_vork(2, 2):S_vork(1, 2);
12 S=[S osa];
13 for i=3:y;
14     osa=S_vork(1, i-1)+S_vork(2, i):S_vork(2, i):S_vork(1, i);
15     S=[S osa];
16 end
17 T_samm=0.001;
18 [x y]=size(S);
19 n=y-1;
20 m=T/T_samm;
21 t=0:T_samm:T;
22 daily=0.004;
23 t_disk=0:daily:T;
24 A=zeros(n+1,m+1);
25 V(1,1)=0;
26 V(n+1,1)=0;
27 for i=2:n;
28     if ismember(t(1), t_disk)==1 & S(i)<=L
29         V(i,1)= 0;
30     else

```



```

31         V(i,1)= max(0, S(i)-X);
32     end
33 end
34 for i=2:n
35     A(i,i-1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i)-S(i
        -1))-r*S(i));
36     A(i,i)=1+(T_samm*sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i-1))*(1/(S(i)-S(i
        -1))+1/(S(i+1)-S(i)))+r*T_samm;
37     A(i,i+1)=-T_samm/(S(i+1)-S(i-1))*((sigma^2*S(i)^2)/(S(i+1)-S(i
        ))+r*S(i));
38 end
39 A(1,1)=1;
40 A(n+1,n+1)=1;
41 A1=inv(A);
42 Fi=V;
43 for j=1:m
44     for i=2:n
45         d(i)=V(i,j);
46     end
47     d(1)=0;
48     d(n+1)=1000-X;
49     Fi(:,j+1)=A1*d';
50     for i=1:n+1
51         V(i,j+1)=max([0, Fi(i,j+1), S(i)-X]);
52         if ismember(t(j+1), t_disk)==1 & S(i)<=L
53             V(i,j+1)=0;
54         end
55     end
56 end
57 [row,column] = find(S==S0);
58 [x y]=size(V);
59 AlusvaraHinnaS0korral = V(column,y)

```

Lihlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Reelika Tõnisson (sünnikuupäev: 17.12.1995),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihlitsentsi) enda loodud teose "Barjääriga optsoonide hindamine võrgumeetodiga", mille juhendaja on Toomas Raus,
 - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
3. kinnitan, et lihlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 09.06.2017