Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Alvin Lepik

Poolrühmade laiendid ja Morita ekvivalentsus

Matemaatika ja statistika õppekava
Matemaatika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: prof. Valdis Laan

Tartu 2019

Poolrühmade laiendid ja Morita ekvivalentsus

Magistritöö

Alvin Lepik

Lühikokkuvõte. Vaatleme Lawsoni Morita ekvivalentsuse kirjeldust lokaalsete ühikelementidega poolrühmade korral. Esitame Lawsoni töö põhjal detailse tõestuse, et lokaalsete ühikelementidega poolrühmade Cauchy täieldite ekvivalentsusest järeldub nende poolrühmade ühise laiendi olemasolu. Näitame veel ära mõned poolrühma omadused, mis kanduvad üle sellele ühisele laiendile. Seejärel vaatleme poolrühmade laiendeid ning uurime nende rolli faktoriseeruvate poolrühmade Morita ekvivalentsuse teoorias. Lawsoni teoreemi täienduseks näitame ära, et ka faktoriseeruvate poolrühmade korral järeldub poolrühmade ühise laiendi olemasolust nende tugev Morita ekvivalentsus.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Keywords. Kategooriateooria, monoidid, poolrühmad.

Enlargements and Morita equivalence of semigroups

Master's thesis

Alvin Lepik

Abstract. We consider Lawson's description of Morita equivalence of semigroups with local units. Based on Lawson's work we provide a detailed proof to the claim that for semigroups with local units the equivalence of their Cauchy completions implies the existence of a joint enlargement for those semigroups. We show that some semigroup properties are inherited by the joint enlargement. We then turn to enlargements of semigroups and explore their connection to Morita equivalence in the case of factorisable semigroups. We complement Lawson's work by showing that the existence of a joint enlargement of factorisable semigroups implies their strong Morita equivalence.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Keywords. Category theory, monoids, semigroups.

Sisukord

Sissejuhatus

Algebraliste struktuuride kirjeldamisel on isomorfismi nõue sageli liiga kitsendav. Kui lõplike Abeli rühmade kirjeldus on hästi tuntud, siis lõplike poolrühmade kirjeldamine isomorfismi täpsuseni on suisa lootusetu ettevõtmine. Seetõttu on sageli otstarbekas algebralisi struktuure klassifitseerida mingi ekvivalentsusseose järgi, mis on nõrgem isomorfismiseosest. Poolrühmade korral on üheks selliseks seoseks Morita ekvivalentsus.

Morita ekvivalentsuse uurimine algas (ühikelemendiga) ringide teoorias. Teineteisest sõltumatult üldistasid Knauer ja Banaschewski 1970ndatel Morita ekvivalentsuse mõiste monoididele nii, et see alati ei taandu isomorfismiks ning 1990ndatel kirjeldas Talwar Morita ekvivalentsuse faktoriseeruvate poolrühmade teatud alamklassi jaoks. Järgmine oluline edasiminek teooriaarenduses poolrühmade korral leidis aset alles aastal 2011 Lawsoni artiklis [11].

Magistritöös vaatleme Lawsoni artiklis [11] antud Morita ekvivalentsuse kirjeldust lokaalsete ühikelementidega poolrühmade jaoks, mis kõlab järgmiselt.

Lawsoni teoreem. *Lokaalsete ühikelementidega poolrühmade S ja T korral on järgmised väited samaväärsed.*

1. *Poolrühmad S ja T on Morita ekvivalentsed.*
2. *Kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ on ekvivalentsed.*
3. *Poolrühmadel S ja T on olemas ühine laiend.*
4. *Poolrühmad S ja T on tugevalt Morita ekvivalentsed.*

On loomulik küsida, kas mõned neist neljast tingimusest (või isegi kõik tingimused) on samaväärsed ka mingite suuremate poolrühmade klasside, näiteks faktoriseeruvate poolrühmade klassi, korral. Olgu mainitud, et tingimused 3 ja 4 omavadki mõtet ainult faktoriseeruvate poolrühmade korral. Laan ja Reimaa on artiklis [10] tõestanud tingimuste 1 ja 4 samaväärsuse faktoriseeruval juhul.

Magistritöös esitame Lawsoni teoreemi implikatsiooni $2 \Rightarrow 3$ üksikasjaliku tõestuse. Veel vaatleme artiklis [4] Costa ja Steinbergi defineeritud kategooriat $\mathbb{D}(S)$ ning uurime, kas seda saab kasutada Lawsoni teoreemi üldistamiseks faktoriseeruvatele poolrühmadele. Veel vaatleme poolrühmade laiendeid ning tõestame Lawsoni teoreemi implikatsiooni $3 \Rightarrow 4$ faktoriseeruvate poolrühmade korral. Töö on jaotatud neljaks osaks.

Esimene osa on valdavalt kategooriateooria alane. Kirjeldame kategooriate ekvivalentsust kahealuselise kategooria abil, mille konstruktsioon on antud artikli [2] põhjal. Täienduseks näitame üksikasjalikult, et sealne konstruktsioon rahuldab kõiki kategooriale esitatavaid nõudeid. Näitame ära mõned kategooriate ekvivalentsi invariandid. Näitame veel, kuidas teatud kujutuse abil konstrueerida väiksest kategooriast poolrühm.

Teine osa on valdavalt seotud poolrühmateooriaga. Tutvustame mõningaid poolrühmade alamklasse ning poolrühmade laiendi mõistet. Näitame artikli [11] põhjal, kuidas kahealuselise kategooria abil konstrueerida teatud poolrühmadele ühist laiendit. Veel näitame ära, et regulaarsetest kategooriatest konsolidatsiooniga tekitatud poolrühmade regulaarsus ja inverssus kanduvad üle ühisele laiendile.

Kolmandas osas defineerime poolrühmale S vastavad kategooriad $C(S)$ ja $\mathbb{D}(S)$ ning näitame, et regulaarse poolrühma korral on need kategooriad ekvivalentsed. Esitame ka Lawsoni teoreemi implikatsiooni $2 \Rightarrow 3$ tõestuse ja näitame, et teatud poolrühmade omadused kanduvad üle ühisele laiendile. Lõplike poolrühmade korral anname ülemise tõkke selle ühise laiendi elementide arvule.

Neljandas osas defineerime (tugeva) Morita ekvivalentsuse poolrühmade jaoks. Täpsustuseks artikli [7] kirjeldusele Morita ekvivalentsetele poolrühmadele, anname kirjelduse fikseeritud monoidiga Morita ekvivalentsetele poolrühmadele. Veel näitame artikli [13] põhjal, et faktoriseeruv poolrühm ja tema mistahes laiend on tugevalt Morita ekvivalentsed. Tõestame ka Lawsoni teoreemi implikatsiooni $3 \Rightarrow 4$ faktoriseeruvate poolrühmade korral.

Magistritöös anname detailsed või alternatiivsed tõestused mõnedele allikmaterjalides esitatud väidetele, mille tõestused on kas lakoonilised või puuduvad. Me loodame, et selline esitus muudab teooriaarenduse lihtsamini jälgitavaks. Esitame ka täiendusi või täpsustusi mitmetele tulemustele. Meie eesmärk aga ei ole selgitada baaskursustest teadaolevaid põhimõisteid. Et peaaegu kõik allikmaterjalid on ingliskeelsed, siis paljude mõistete eestikeelsete vastete puudumise tõttu esineb ka töös autori ettepanekuid nende tõlkimiseks.

1 Kahealuseline kategooria

Me eeldame, et käesoleva magistritöö lugeja on tuttav kategooriateooria põhimõistetega. Muuhulgas ei hakka me defineerima mõisteid nagu kategooria, alamkategooria, funktor ja loomulik teisendus. Defineerimata mõistetega on võimalik tutvuda kategooriateooria loengukonspekti [8] abil. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide klassi tähistatakse sümboliga $\mathcal{C}_0$ ja kõigi morfismide hulka objektist A objekti B sümboliga $\mathcal{C}(A, B)$.

Selles alajaotuses defineerime artiklis [2] kirjeldatud kategooria, mis võimaldab kahest ekvivalentsest kategooriast moodustada suurema kategooria nii, et ta on oma komponentidega ekvivalentne. Tõestame ka mõnede omaduste invariantsuse kategooriate ekvivalentsuse suhtes.

Definitsioon 1.1. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad. Öeldakse, et funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ on **kategooriate ekvivalents**, kui leidub funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ning loomulikud isomorfismid $\eta : 1_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ ja $\varepsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathcal{D}}$. Sellisel juhul öeldakse, et kategooriad $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ on **ekvivalentsed** ja kirjutatakse $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$. Kui lisaks mistahes objektide $C \in \mathcal{C}_0$ ja $D \in \mathcal{D}_0$ korral

$$(GF)(C) = C \quad \text{ja} \quad (FG)(D) = D,$$

siis öeldakse, et kategooriad $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ on **isomorfsed** ja kirjutatakse $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$. Sellisel juhul öeldakse ka, et funktor F on **kategooriate isomorfism**.

Järelikult on kategooriate ekvivalents isomorfism parajasti siis, kui ta realiseerib üksühese vastavuse objektiklasside vahel. Muuhulgas järeldub kategooriate isomorfsusest nende ekvivalentsus, kuid vastupidine üldjuhul ei kehti. Kategooriate ekvivalentsus on ekvivalentsusseos.

Definitsioon 1.2. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad ja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor.

1. Öeldakse, et funktor F on **täpne** (**täielik**), kui iga $A, B \in \mathcal{C}_0$ korral on funktori F poolt tekitatud kujutus
$$\mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B)), \quad f \mapsto F(f),$$
injektiivne (sürjektiivne).

2. Öeldakse, et funktor F on **tihe**, kui iga $D \in \mathcal{D}_0$ korral leidub $C \in \mathcal{C}_0$ nii, et kehtib $F(C) \cong D$.

Käesolevas töös kasutame oluliselt lihtsamini kontrollitavat kategooriate ekvivalentsuse kirjeldust.

Teoreem ([8] Teoreem 6.15). *Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ on kategooriate ekvivalents parajasti siis, kui F on täielik, täpne ja tihe.*

Definitsioon 1.3. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ja $\mathcal{C}'$ kategooria $\mathcal{C}$ alamkategooria. Öeldakse, et $\mathcal{C}'$ on kategooria $\mathcal{C}$ **toes**, kui on täidetud järgmised tingimused.

1. Alamkategooria $\mathcal{C}'$ on täielik alamkategooria.

2. Iga $C \in \mathcal{C}_0$ korral leidub $C' \in \mathcal{C}'_0$ nii, et $C \cong C'$.

3. Mistahes kahe objekti $A, B \in \mathcal{C}'_0$ korral

$$A \cong B \Rightarrow A = B.$$

Lemma 1.4 ([1] Lause 4.14). *Olgu $\mathcal{C}$ kategooria. Kehtivad järgmised väited.*

1. *Kategoorial $\mathcal{C}$ leidub toes $\mathcal{C}'$.*
2. *Kategooria $\mathcal{C}$ ja tema mistahes toes $\mathcal{C}'$ on ekvivalentsed.*
3. *Kategooria $\mathcal{C}$ mistahes kaks toest on isomorfsed.*

Tõestus. Tõestame esimese väite. Fikseerime alamklassi $\mathcal{C}'_0 \subseteq \mathcal{C}_0$, mis sisaldab täpselt ühe objekti igast kategooria $\mathcal{C}$ objektide isomorfismiklassist. Mistahes $C', D' \in \mathcal{C}'_0$ korral olgu

$$\mathcal{C}'(C', D') = \mathcal{C}(C', D'),$$

seega on $\mathcal{C}'$ kategooria $\mathcal{C}$ toes.

Tõestame teise väite. Olgu $\mathcal{C}'$ kategooria $\mathcal{C}$ toes ja $I : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ sisestusfunktor, kusjuures ta on täpne ja täielik. Olgu $C \in \mathcal{C}_0$. Toese mõiste kohaselt leidub $C' \in \mathcal{C}'_0$ nii, et $C \cong C'$, seega $I(C') \cong C$ ehk I on tihe.

Tõestame kolmanda väite. Olgu $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{E}$ kategooria $\mathcal{C}$ toesed. Olgu $D \in \mathcal{D}_0$, siis leidub $E \in \mathcal{E}_0$ nii, et $D \cong E$. Kui mingi $E' \in \mathcal{E}_0$ korral $D \cong E'$, siis $E \cong E'$ ja toese mõiste kohaselt $E = E'$. Olgu vastav isomorfism $h_D : D \to E$. Defineerime $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ nii, et

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "h_{D'} f h_D^{-1}"] \\ D' \arrow[r, mapsto] & E' \end{tikzcd}.$$

Näitame, et tegemist on funktoriga. Olgu $g : D_2 \to D_3$ ja $f : D_1 \to D_2$ mingid morfismid kategoorias $\mathcal{D}$, siis

$$\begin{aligned} F(gf) = h_{D_3} g f h_{D_1}^{-1} &= h_{D_3} \left(g 1_{D_2} f \right) h_{D_1}^{-1} \\ &= h_{D_3} g \left(h_{D_2}^{-1} h_{D_2} \right) f h_{D_1}^{-1} \\ &= \left(h_{D_3} g h_{D_2}^{-1} \right) \left(h_{D_2} f h_{D_1}^{-1} \right) = F(g) F(f). \end{aligned}$$

Ühikmorfismi $1_D, D \in \mathcal{D}_0$ korral

$$F(1_D) = h_D 1_D h_D^{-1} = h_D h_D^{-1} = 1_E.$$

Olgu $D, D' \in \mathcal{D}_0$ fikseeritud. Näitame, et F on täpne. Olgu $f, g : D \to D'$ sellised, et $F(f) = F(g)$. Vastavate pöördmorfismidega kummaltki poolt korrutades saame

$$h_{D'} f h_D^{-1} = h_{D'} g h_D^{-1} \Rightarrow (h_{D'}^{-1} h_{D'}) f (h_D^{-1} h_D) = (h_{D'}^{-1} h_{D'}) g (h_D^{-1} h_D) \Rightarrow f = g.$$

Näitame, et F on täielik. Olgu $F(D) = E$ ja $F(D') = E'$. Olgu morfism $g : E \to E'$ fikseeritud. Kehtib

$$g = 1_{E'} g 1_E = (h_{D'} h_{D'}^{-1}) g (h_D h_D^{-1}) = h_{D'} (h_{D'}^{-1} g h_D) h_D^{-1} = F\left(h_{D'}^{-1} g h_D \right),$$

seejuures toese mõiste kohaselt $h_{D'}^{-1} g h_D : D \to D'$ on morfism kategoorias $\mathcal{D}$. Kokkuvõttes on F isomorfism. ■

Järeldus 1.5 ([1] Järeldus 4.15). *Kategooriad on ekvivalentsed parajasti siis, kui neil on isomorfsed toesed.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad ning lemma 1.4 esimese punkti põhjal vastavad toesed $\mathcal{C}'$ ja $\mathcal{D}'$ fikseeritud.

Tarvilikkus. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ ekvivalentsed kategooriad. Lemma 1.4 teise punkti põhjal on kategooria ekvivalentne oma toesega, seega $\mathcal{C}' \approx \mathcal{C} \approx \mathcal{D} \approx \mathcal{D}'$ põhjal saame $\mathcal{C}' \approx \mathcal{D}'$. Olgu $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ kategooriate ekvivalents ja $D \in \mathcal{D}'_0$. Funktori F tiheduse tõttu leidub $C \in \mathcal{C}'_0$ nii, et $F(C) \cong D$. Toese mõiste kohaselt $F(C) = D$.
Näitame veel, et F on injektiivne objektidel. Olgu $F(C) = F(C') = D$ mingite objektide $C, C' \in \mathcal{C}'_0$ korral. Funktor F tekitab kujutused

$$\mathcal{C}'(C, C') \longrightarrow \mathcal{D}'(D, D) \longleftarrow \mathcal{C}'(C', C).$$

Funktori F täielikkuse tõttu leiduvad morfismid $f : C \to C'$ ja $g : C' \to C$ nii, et $F(f) = F(g) = 1_D$. Funktoriaalsuse põhjal saame võrdused $F(gf) = F(fg) = 1_D$. Kasutades funktori F täpsust saame võrdused $gf = 1_C$ ja $fg = 1_{C'}$ ehk $C \cong C'$. Toese mõiste kohaselt $C = C'$. Kokkuvõttes on F isomorfism.

Piisavus. Kehtigu $\mathcal{C}' \cong \mathcal{D}'$, siis lemma 1.4 teise punkti põhjal $\mathcal{C} \approx \mathcal{C}' \cong \mathcal{D}' \approx \mathcal{D}$. Järelikult on kategooriad $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ ekvivalentsed. ■

Definitsioon 1.6. Olgu $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ kategooriad. Öeldakse, et $\mathcal{C}$ on **kahealuseline** kategooria komponentidega $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, tähistatakse $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, kui on täidetud järgmised tingimused.

1. Kategooriad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on kategooria $\mathcal{C}$ lõikumatud täielikud alamkategooriad ja $\mathcal{C}_0 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0$.
2. Iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral leidub isomorfism $f : A \to B$, kus $B \in \mathcal{B}_0$.
3. Iga $B \in \mathcal{B}_0$ korral leidub isomorfism $g : B \to A$, kus $A \in \mathcal{A}_0$.

Lause 1.7. *Olgu $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ kahealuseline kategooria. Siis $\mathcal{C} \approx \mathcal{A}$ ja $\mathcal{C} \approx \mathcal{B}$.*

Tõestus. Näitame, et $\mathcal{C} \approx \mathcal{A}$. Teine väide tõestatakse analoogiliselt.
Väite tõestuseks näitame, et sisestusfunktor $I : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ on kategooriate ekvivalents, kusjuures ta on täpne ja täielik. Funktor I on tihe, sest iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral $A = I(A)$ ja iga $B \in \mathcal{B}_0$ korral leidub $A \in \mathcal{A}_0$ nii, et $B \cong A = I(A)$. ■

Järgneva teoreemi kohaselt saab kahealuselisi kategooriaid moodustada parajasti ekvivalentsetest kategooriatest. Tõestus tugineb artiklile [2], kus kahealuselist kategooriat nimetatakse ekvivalentsisillaks. Täienduseks näitame ära, et artiklis [2] antud konstruktsioon rahuldab kõiki kategooriale esitatud nõudeid.

Teoreem 1.8 ([2] Teoreem 3.2). *Kategooriad $\overline{\mathcal{A}}$ ja $\overline{\mathcal{B}}$ on ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub kahealuseline kategooria $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, kus $\mathcal{A} \cong \overline{\mathcal{A}}$ ja $\mathcal{B} \cong \overline{\mathcal{B}}$.*

Tõestus. Piisavus. Leidugu kahealuseline kategooria $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Lause 1.7 põhjal $\mathcal{C} \approx \mathcal{A}$ ja $\mathcal{C} \approx \mathcal{B}$. Kehtib $\overline{\mathcal{A}} \cong \mathcal{A} \approx \mathcal{B} \cong \overline{\mathcal{B}}$. Järelikult kehtib ka $\overline{\mathcal{A}} \approx \overline{\mathcal{B}}$.

Tarvilikkus. Olgu $\overline{\mathcal{A}}$ ja $\overline{\mathcal{B}}$ ekvivalentsed kategooriad. Need kategooriad võivad lõikuda, kuid me saame konstrueerida nende isomorfsed koopiad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ nii, et $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on lõikumatud. Siis ka $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$. Lemma 1.4 esimese punkti põhjal leiduvad toesed $\mathcal{A}'$ ja $\mathcal{B}'$ vastavalt kategooriatel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Toese mõiste kohaselt saame iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ jaoks valida välja ühe isomorfismi $h_A : A \to A'$, kus $A' \in \mathcal{A}'_0$. Järelduse 1.5 põhjal $\mathcal{A}'$ ja $\mathcal{B}'$ on isomorfsed. Olgu $F : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ isomorfism, siis leidub ka pöördfunktor $F^{-1} : \mathcal{B}' \to \mathcal{A}'$. Defineerime kandidaatkategooria $\mathcal{C}$ nii, et $\mathcal{C}_0 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0$ ning mistahes $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_0$ ja $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0$ korral

(1) $\mathcal{C}(A_1, A_2) := \mathcal{A}(A_1, A_2)$;

(2) $\mathcal{C}(B_1, B_2) := \mathcal{B}(B_1, B_2)$;

(3) $\mathcal{C}(A_1, B_1) := \{(A_1, \beta) \mid \beta : F(A'_1) \to B_1\}$;

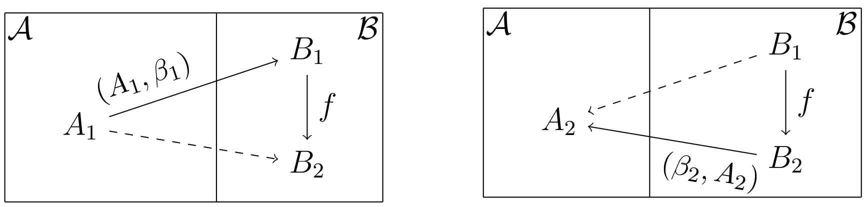
(4) $\mathcal{C}(B_2, A_2) := \{(\beta, A_2) \mid \beta : B_2 \to F(A'_2)\}$.

Sellised morfismide hulgad on paarikaupa lõikumatud. Morfismide korrutamine on defineeritud järgmiselt.

K1. Kategooriates $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ morfismide korrutamine jäetakse samaks.

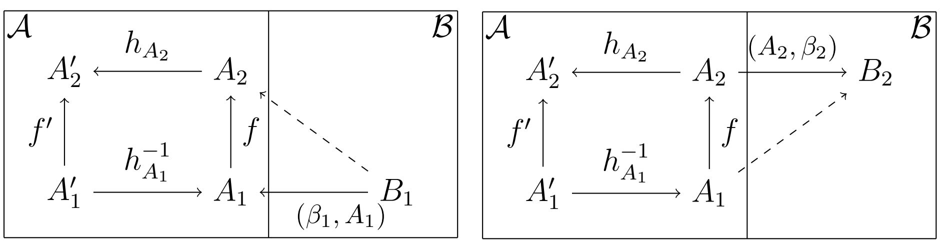
K2. Olgu $f : B_1 \to B_2$ morfism kategoorias $\mathcal{B}$, $(A_1, \beta_1) \in \mathcal{C}(A_1, B_1)$ ja olgu $(\beta_2, A_2) \in \mathcal{C}(B_2, A_2)$, siis

$$f(A_1, \beta_1) := (A_1, f\beta_1) \quad \text{ja} \quad (\beta_2, A_2)f := (\beta_2 f, A_2).$$



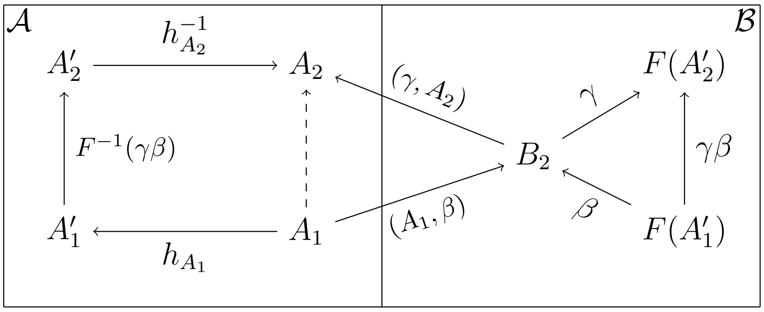
K3. Olgu $f : A_1 \to A_2$ morfism kategoorias $\mathcal{A}$, $(\beta_1, A_1) \in \mathcal{C}(B_1, A_1)$ ja olgu $(A_2, \beta_2) \in \mathcal{C}(A_2, B_2)$. Tähistame $f' := h_{A_2} f h_{A_1}^{-1} : A'_1 \to A'_2$, siis

$$f(\beta_1, A_1) := (F(f')\beta_1, A_2) \quad \text{ja} \quad (A_2, \beta_2)f := (A_1, \beta_2 F(f')).$$



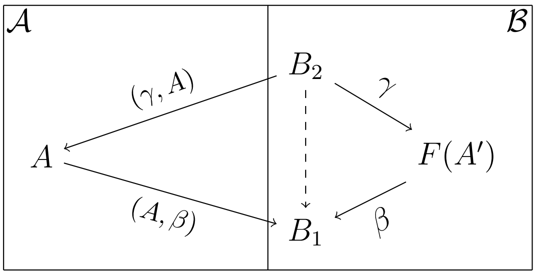
K4. Olgu $(\gamma, A_2) \in \mathcal{C}(B, A_2)$ ja $(A_1, \beta) \in \mathcal{C}(A_1, B)$, siis

$$(\gamma, A_2)(A_1, \beta) := h_{A_2}^{-1} F^{-1}(\gamma\beta) h_{A_1}.$$



K5. Olgu $(A, \beta) \in \mathcal{C}(A, B_2)$ ja $(\gamma, A) \in \mathcal{C}(B_1, A)$, siis

$$(A, \beta)(\gamma, A) := \beta\gamma.$$



Sellise korrutamise assotsiatiivsuse näitamiseks piisab kontrollida 16 juhtu, millest kaks on vahetult selged. Järgnevalt kontrollime assotsiatiivsust kõigil ülejäänud juhtudel. Me ei väida, et lihtsamad alternatiivid assotsiatiivsuse kontrolliks puuduvad.

1. Kontrollime juhtu $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow[\alpha: F(A'_2)\to B_1]{(A_2,\alpha)} B_1 \xrightarrow[\beta: B_1 \to F(A'_3)]{(\beta, A_3)} A_3$:

$$\begin{aligned}
((\beta, A_3)(A_2, \alpha))\, f &= h_{A_3}^{-1} F^{-1}(\beta\alpha) h_{A_2} f \\
&= h_{A_3}^{-1} F^{-1}(\beta\alpha) h_{A_2} f h_{A_1}^{-1} h_{A_1} \\
&= h_{A_3}^{-1} F^{-1}\left(\beta\alpha F(h_{A_2} f h_{A_1}^{-1})\right) h_{A_1} \\
&= (\beta, A_3)\left(A_1, \alpha F(h_{A_2} f h_{A_1}^{-1})\right) \\
&= (\beta, A_3)\left((A_2, \alpha) f\right).
\end{aligned}$$

2. Kontrollime juhtu $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow[\alpha: F(A'_2)\to B_1]{(A_2,\alpha)} B_1 \xrightarrow{g} B_2$:

$$\begin{aligned}
(g(A_2, \alpha))f = (A_2, g\alpha)f &= \left(A_1, g\alpha F\left(h_{A_2} f h_{A_1}^{-1}\right)\right) \\
&= g\left(A_1, \alpha F\left(h_{A_2} f h_{A_1}^{-1}\right)\right) \\
&= g\left((A_2, \alpha) f\right).
\end{aligned}$$

3. Kontrollime juhtu $A_1 \xrightarrow[\alpha: F(A'_1)\to B_1]{(A_1,\alpha)} B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} B_3$:

$$(g_2 g_1)(A_1, \alpha) = (A_1, g_2 g_1 \alpha) = g_2(A_1, g_1\alpha) = g_2(g_1(A_1, \alpha)).$$

4. Kontrollime juhtu $A_1 \xrightarrow[\alpha: F(A_1') \to B_1]{(A_1,\alpha)} B_1 \xrightarrow{g} B_2 \xrightarrow[\beta: B_2 \to F(A_2')]{(\beta,A_2)} A_2$:

$$\begin{aligned}((\beta, A_2)g)\,(A_1,\alpha) &= (\beta g, A_2)(A_1,\alpha)\\ &= h_{A_2}^{-1}F^{-1}(\beta g\alpha)h_{A_1}\\ &= (\beta, A_2)(A_1, g\alpha)\\ &= (\beta, A_2)\,(g(A_1,\alpha))\,.\end{aligned}$$

5. Kontrollime juhtu $A_1 \xrightarrow[\alpha: F(A_1') \to B_1]{(A_1,\alpha)} B_1 \xrightarrow[\beta: B_1 \to F(A_2')]{(\beta,A_2)} A_2 \xrightarrow{f} A_3$:

$$\begin{aligned}(f(\beta, A_2))(A_1,\alpha) &= \left(F\left(h_{A_3} f h_{A_2}^{-1}\right)\beta, A_3\right)(A_1,\alpha)\\ &= h_{A_3}^{-1}F^{-1}\left(F\left(h_{A_3} f h_{A_2}^{-1}\right)\beta\alpha\right)h_{A_1}\\ &= h_{A_3}^{-1}h_{A_3} f h_{A_2}^{-1}F^{-1}(\beta\alpha)h_{A_1}\\ &= f h_{A_2}^{-1}F^{-1}(\beta\alpha)h_{A_1}\\ &= f\,((\beta, A_2)(A_1,\alpha))\,.\end{aligned}$$

6. Kontrollime juhtu $A_1 \xrightarrow[\alpha: F(A_1') \to B_1]{(A_1,\alpha)} B_1 \xrightarrow[\beta: B_1 \to F(A_2')]{(\beta,A_2)} A_2 \xrightarrow[\gamma: F(A_2') \to B_2]{(A_2,\gamma)} B_2$:

$$\begin{aligned}((A_2,\gamma)(\beta, A_2))\,(A_1,\alpha) &= \gamma\beta(A_1,\alpha) = (A_1, \gamma\beta\alpha)\\ &= \left(A_1, \gamma F\left(h_{A_2}\left(h_{A_2}^{-1}F^{-1}(\beta\alpha)h_{A_1}\right)h_{A_1}^{-1}\right)\right)\\ &= (A_2,\gamma)h_{A_2}^{-1}F^{-1}(\beta\alpha)h_{A_1}\\ &= (A_2,\gamma)\,((\beta, A_2)(A_1,\alpha))\,.\end{aligned}$$

7. Kontrollime juhtu $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow[\alpha: F(A_3') \to B_1]{(A_3,\alpha)} B_1$:

$$\begin{aligned}((A_3,\alpha)f_2)\,f_1 = \left(A_2, \alpha F\left(h_{A_3} f_2 h_{A_2}^{-1}\right)\right)f_1 &= \left(A_1, \alpha F\left(h_{A_3} f_2 h_{A_2}^{-1}\right)F\left(h_{A_2} f_1 h_{A_1}^{-1}\right)\right)\\ &= \left(A_1, \alpha F\left(h_{A_3} f_2 f_1 h_{A_1}^{-1}\right)\right)\\ &= (A_3,\alpha)\,(f_2 f_1).\end{aligned}$$

8. Kontrollime juhtu $B_1 \xrightarrow{g} B_2 \xrightarrow[\beta: B_2 \to F(A_1')]{(\beta,A_1)} A_1 \xrightarrow[\alpha: F(A_1') \to B_3]{(A_1,\alpha)} B_3$:

$$\begin{aligned}((A_1,\alpha)(\beta, A_1))\,g = \alpha\beta g &= (A_1,\alpha)(\beta g, A_1)\\ &= (A_1,\alpha)\,((\beta, A_1)g)\,.\end{aligned}$$

9. Kontrollime juhtu $B_1 \xrightarrow{g} B_2 \xrightarrow[\beta: B_2 \to F(A_1')]{(\beta,A_1)} A_1 \xrightarrow{f} A_2$:

$$\begin{aligned}(f(\beta, A_1))\,g = \left(F\left(h_{A_2} f h_{A_1}^{-1}\right)\beta, A_2\right)g &= \left(F\left(h_{A_2} f h_{A_1}^{-1}\right)\beta g, A_2\right)\\ &= f\,(\beta g, A_1)\\ &= f\,((\beta, A_1)g)\,.\end{aligned}$$

10. Kontrollime juhtu $B_1 \xrightarrow[\beta:B_1\to F(A_1')]{(\beta,A_1)} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$:

$$\begin{aligned}(f_2f_1)(\beta, A_1) = \left(F\left(h_{A_3}f_2f_1h_{A_1}^{-1}\right)\beta, A_3\right) &= \left(F\left(h_{A_3}f_2h_{A_2}^{-1}h_{A_2}f_1h_{A_1}^{-1}\right)\beta, A_3\right)\\ &= \left(F\left(h_{A_3}f_2h_{A_2}^{-1}\right)F\left(h_{A_2}f_1h_{A_1}^{-1}\right)\beta, A_3\right)\\ &= f_2\left(F\left(h_{A_2}f_1h_{A_1}^{-1}\right)\beta, A_2\right)\\ &= f_2\left(f_1(\beta, A_1)\right).\end{aligned}$$

11. Kontrollime juhtu $B_1 \xrightarrow[\beta:B_1\to F(A_1')]{(\beta,A_1)} A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow[\alpha:F(A_2')\to B_2]{(A_2,\alpha)} B_2$:

$$\begin{aligned}((A_2,\alpha)f)(\beta, A_1) = \left(A_1, \alpha F\left(h_{A_2}fh_{A_1}^{-1}\right)\right)(\beta, A_1) &= \alpha F\left(h_{A_2}fh_{A_1}^{-1}\right)\beta\\ &= (A_2,\alpha)\left(F\left(h_{A_2}fh_{A_1}^{-1}\right)\beta, A_2\right)\\ &= (A_2,\alpha)\left(f(\beta, A_1)\right).\end{aligned}$$

12. Kontrollime juhtu $B_1 \xrightarrow[\beta:B_1\to F(A_1')]{(\beta,A_1)} A_1 \xrightarrow[\alpha:F(A_1')\to B_2]{(A_1,\alpha)} B_2 \xrightarrow{g} B_3$:

$$\begin{aligned}(g(A_1,\alpha))(\beta, A_1) = (A_1, g\alpha)(\beta, A_1) &= g\alpha\beta\\ &= g\left((A_1,\alpha)(\beta, A_1)\right).\end{aligned}$$

13. Kontrollime juhtu $B_1 \xrightarrow[\alpha:B_1\to F(A_1')]{(\alpha,A_1)} A_1 \xrightarrow[\beta:F(A_1')\to B_2]{(A_1,\beta)} B_2 \xrightarrow[\gamma:B_2\to F(A_2')]{(\gamma,A_2)} A_2$:

$$\begin{aligned}((\gamma, A_2)(A_1,\beta))(\alpha, A_1) = h_{A_2}^{-1}F^{-1}(\gamma\beta)h_{A_1}(\alpha, A_1) &= (\gamma\beta\alpha, A_2)\\ &= (\gamma, A_2)\beta\alpha\\ &= (\gamma, A_2)\left((A_1,\beta)(\alpha, A_1)\right).\end{aligned}$$

14. Kontrollime juhtu $B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} B_3 \xrightarrow[\beta:B_3\to F(A_1')]{(\beta,A_1)} A_1$:

$$((\beta, A_1)g_2)\,g_1 = (\beta g_2, A_1)g_1 = (\beta g_2g_1, A_1) = (\beta, A_1)(g_2g_1).$$

Näitame veel, et kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ühikmorfismid on $\mathcal{C}$ ühikmorfismid. On kaks mittetriviaalset juhtu.

1. Olgu $f : A \to B$ morfism kujul (A, α), kus $\alpha : F(A') \to B$. Siis

$$\begin{aligned}1_Bf = 1_B(A,\alpha) = (A, 1_B\alpha) = (A,\alpha) &= \left(A, \alpha 1_{F(A')}\right)\\ &= \left(A, \alpha F(h_A1_Ah_A^{-1})\right)\\ &= (A,\alpha)\,1_A\\ &= f1_A.\end{aligned}$$

2. Olgu $g : B \to A$ morfism kujul (β, A), kus $\beta : B \to F(A')$. Siis

$$\begin{aligned} 1_A g = 1_A(\beta, A) = \big(F(h_A 1_A h_A^{-1})\beta, A\big) = \big(1_{F(A')}\beta, A\big) &= (\beta, A) \\ &= (\beta 1_B, A) \\ &= (\beta, A)1_B \\ &= g1_B. \end{aligned}$$

Oleme näidanud, et $\mathcal{C}$ on kategooria. Tegemist on kahealuselise kategooriaga. Esiteks, iga $A \in \mathcal{A}_0$ korral $(A, 1_{F(A')}) : A \to F(A')$ on isomorfism kategoorias $\mathcal{C}$. Tõepoolest, vahetult $(A, 1_{F(A')})(1_{F(A')}, A) = 1_{F(A')}$ ning teistpidi korrutades saame

$$(1_{F(A')}, A)(A, 1_{F(A')}) = h_A^{-1}F^{-1}(1_{F(A')})h_A = h_A^{-1}1_{A'}h_A = 1_A.$$

Teiseks, olgu $B \in \mathcal{B}_0$, siis $B \cong B'$, kus $B' \in \mathcal{B}'$. Kuna F on isomorfism, siis leidub (üheselt määratud) $A' \in \mathcal{A}'_0$ nii, et $F(A') = B'$. Niisiis leidub isomorfism $\gamma : B \to F(A')$ kategoorias $\mathcal{B}$. Morfismi $(\gamma, A') : B \to A'$ pöördmorfism on (A', γ^{-1}), seega on tegemist isomorfismiga kategoorias $\mathcal{C}$. Kokkuvõttes on $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ kahealuseline kategooria. ∎

Definitsioon 1.9. Öeldakse, et kategooria $\mathcal{C}$ on **tugevalt sidus**, kui mistahes objektide $A, B \in \mathcal{C}_0$ korral leidub morfism $f : A \to B$.

Näide 1.10. Kõigi hulkade kategooria, kus morfismid on kujutused, ei ole tugevalt sidus, sest ei leidu kujutust mittetühjast hulgast hulka $\emptyset$. Kõigi mittetühjade hulkade kategooria aga on tugevalt sidus.
Kõigi monoidide kategooria nendevaheliste homomorfismidega on tugevalt sidus kategooria. Mistahes monoidide M ja N korral on $M \to N,\ m \mapsto 1$, homomorfism. Poolrühmade kategooria aga ei ole tugevalt sidus. Ei leidu homomorfismi $\{0\} \to (\mathbb{N}, +)$.

Regulaarse kategooria mõiste on defineeritud õpikus [1]. Käesolevas töös kasutame seda mõistet sellises tähenduses nagu on seda kasutatud artiklis [11].

Definitsioon 1.11. Öeldakse, et kategooria $\mathcal{C}$ on **regulaarne**, kui mistahes objektide $A, B \in \mathcal{C}_0$ ja mistahes morfismi $f : A \to B$ korral leidub morfism $g : B \to A$ nii, et $f = fgf$.

Regulaarse kategooria abil saame hiljem loomulikul viisil regulaarse poolrühma. Näeme ka, et kui regulaarses kategoorias on võrdust $f = fgf$ realiseeriv morfism g üheselt määratud, siis tekivad loomulikul viisil inverssed poolrühmad. Artikli [11] eeskujul võtame veel kasutusele järgmise loomuliku mõiste.

Definitsioon 1.12. Öeldakse, et kategooria $\mathcal{C}$ on **inversne**, kui mistahes objektide $A, B \in \mathcal{C}_0$ ja mistahes morfismi $f : A \to B$ korral leidub üheselt määratud morfism $g : B \to A$ nii, et $f = fgf$.

Konkreetsed näited regulaarsetest ja inverssetest kategooriatest tekivad kolmandas alajaotuses, kus näitame, et poolrühma S regulaarsus ja inverssus kanduvad üle kategooriale $C(S)$. Järgnevalt toome välja veel mõned invariandid kategooriate ekvivalentsuse suhtes.

Lause 1.13. *Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ekvivalentsed kategooriad. Kehtivad järgmised väited.*

1. *Kui $\mathcal{A}$ on tugevalt sidus, siis $\mathcal{B}$ on tugevalt sidus.*
2. *Kui $\mathcal{A}$ on regulaarne, siis $\mathcal{B}$ on regulaarne.*
3. *Kui $\mathcal{A}$ on inversne, siis $\mathcal{B}$ on inversne.*

Tõestus. Olgu $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ kategooriate ekvivalents. Olgu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0$ fikseeritud. Funktori F tiheduse tõttu leiduvad $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_0$ nii, et $F(A_1) \cong B_1$ ja $F(A_2) \cong B_2$. Olgu $h_1 : B_1 \to F(A_1)$ ja $h_2 : B_2 \to F(A_2)$ isomorfismid.
Tõestame esimese väite. Tugeva sidususe tõttu leidub morfism $f : A_1 \to A_2$. Saame moodustada morfismi $h_2^{-1}F(f)h_1 : B_1 \to B_2$, seega on kategooria $\mathcal{B}$ tugevalt sidus.
Tõestame teise väite. Fikseerime morfismi $g : B_1 \to B_2$. Näitame, et leidub morfism $g' : B_2 \to B_1$ omadusega $g = gg'g$. Illustreerigu olukorda järgmine diagramm:

$$\begin{array}{|c|ccr|}
\hline
\mathcal{A} & & & \mathcal{B} \\
A_1 & F(A_1) & \xrightarrow{h_1^{-1}} & B_1 \\
f \big\downarrow & & & \big\downarrow g \\
A_2 & F(A_2) & \xleftarrow{h_2} & B_2 \\
\hline
\end{array}.$$

Funktori F täielikkuse tõttu leidub morfism $f : A_1 \to A_2$ nii, et $F(f) = h_2 g h_1^{-1}$. Regulaarsuse tõttu leidub morfism $f' : A_2 \to A_1$ nii, et $f = ff'f$. Võtame morfismiks $g' := h_1^{-1}F(f')h_2$. Võrduse $h_2^{-1}F(f)h_1 = g$ põhjal

$$\begin{aligned}
gg'g &= \left(h_2^{-1}F(f)h_1\right)\left(h_1^{-1}F(f')h_2\right)\left(h_2^{-1}F(f)h_1\right) \\
&= h_2^{-1}\left(F(f)F(f')F(f)\right)h_1 \\
&= h_2^{-1}F(ff'f)h_1 \\
&= h_2^{-1}F(f)h_1 = g.
\end{aligned}$$

Järelikult on kategooria $\mathcal{B}$ regulaarne.
Tõestame kolmanda väite. Kuna teises punktis oleme juba leidnud morfismi g' omadusega $g = gg'g$, siis väite tõestuseks piisab näidata, et kui mingi morfismi $l : B_2 \to B_1$ korral $g = glg$, siis $g' = l$. Olgu selline morfism l fikseeritud. Leidub morfism $k : A_2 \to A_1$ nii, et $F(k) = h_1 l h_2^{-1}$ ehk $l = h_1^{-1}F(k)h_2$. Eelneva põhjal

$$h_2^{-1}F(f)h_1 = g = glg = h_2^{-1}F(fkf)h_1.$$

Vahetult järeldub võrdus $F(f) = F(fkf)$ ja kuna F on täpne, siis $f = fkf$. Inverssuse tõttu $f' = k$, seega

$$l = h_1^{-1}F(k)h_2 = h_1^{-1}F(f')h_2 = g'.$$

Järelikult on kategooria $\mathcal{B}$ inversne. ■

Artiklis [11] on mainitud, et kui komponendid on regulaarsed kategooriad, siis üldisust kitsendamata on ka neist moodustatud kahealuseline kategooria regulaarne (vt Järeldus 3.9). Eelnevale tuginedes saame kahealuselise kategooria kohta väita järgmist.

Järeldus 1.14. *Kahealuseline kategooria $\mathcal{C} =: [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ on tugevalt sidus, regulaarne ja inversne parajasti siis, kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on vastavalt tugevalt sidusad, regulaarsed ja inverssed.*

Tõestus. Lause 1.7 põhjal $\mathcal{A} \approx [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \approx \mathcal{B}$. Samaväärsused kehtivad lause 1.13 vastavalt esimese, teise ja kolmanda punkti põhjal. ∎

Järgmiseks tahame näidata, kuidas väikse kategooria morfismide hulga saab muuta poolrühmaks. Selleks on meil vaja konsolidatsiooni mõistet. Meenutame, et kategooria $\mathcal{C}$ kõigi morfismide klassi tähistatakse sümboliga $\mathcal{C}_1$.

Definitsioon 1.15. Olgu $\mathcal{C}$ tugevalt sidus kategooria. Eeskirja $\alpha : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$ nimetatatakse **konsolidatsiooniks**, kui mistahes $C, D \in \mathcal{D}_0$ korral $\alpha(C, D) \in \mathcal{C}(C, D)$ ja iga $C \in \mathcal{C}_0$ korral $\alpha(C, C) = 1_C$.

Järgnevas näites vaadeldav kategooria on võetud õpikust [1] (näited 3.3).

Näide 1.16. Olgu kategooria $\mathcal{C}$ objektide hulk $\mathbb{N}$. Fikseeritud $m, n \in \mathbb{N}$ korral olgu morfismid $m \to n$ maatriksid $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$. Morfismide

$$m \xrightarrow{A} n \xrightarrow{B} p$$

korrutamine on antud hariliku maatriksite korrutamise kaudu st see korrutis on maatriks $AB \in \mathsf{Mat}_{m,p}(\mathbb{R})$. Iga objekti $m \in \mathbb{N}$ ühikmorfism on ühikmaatriks I_m. Kategooria $\mathcal{C}$ on tugevalt sidus. Kujutus

$$\alpha : \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1, \quad (m, n) \mapsto \begin{cases} I_m, & m = n \\ (I_m|0), & m < n \\ \left(\frac{I_n}{0}\right), & m > n \end{cases},$$

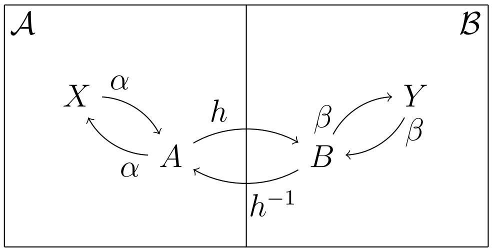
on konsolidatsioon kategoorial $\mathcal{C}$.

Olgu $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ kahealuseline kategooria, kus α ja β on konsolidatsioonid vastavalt kategooriatel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Fikseerime $A \in \mathcal{A}_0$, siis leidub isomorfism $h : A \to B$, kus $B \in \mathcal{B}_0$. Defineerime konsolidatsiooni γ kategoorial $\mathcal{C}$ järgmiselt:

$$\gamma(X, Y) = \begin{cases} \alpha(X, Y), & X, Y \in \mathcal{A}_0 \\ \beta(X, Y), & X, Y \in \mathcal{B}_0 \\ \beta(B, Y)\, h\, \alpha(X, A), & X \in \mathcal{A}_0, Y \in \mathcal{B}_0 \\ \alpha(A, Y)\, h^{-1}\, \beta(X, B), & X \in \mathcal{B}_0, Y \in \mathcal{A}_0 \end{cases}.$$

Definitsioon 1.17. Konsolidatsiooni γ nimetatakse konsolidatsioonide α ja β **loomulikuks laiendiks** kategooriale $\mathcal{C}$ isomorfismi h kaudu.

Loomuliku laiendi käitumist eri komponentide vahel illustreerib järgmine diagramm:



.

Meenutame, et kategooriat nimetatakse **väikseks**, kui tema morfismide klass on hulk. Olgu $\mathcal{A}$ väike tugevalt sidus kategooria ja $\alpha : \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_1$ konsolidatsioon. Defineerime korrutamise morfismide hulgal $\mathcal{A}_1$ järgmiselt. Mistahes morfismide $f \in \mathcal{A}(A, B)$ ja $g \in \mathcal{A}(C, D)$ korral

$$f \circ g := f\,\alpha(D, A)\,g.$$

Kuna eelnev korrutamine on defineeritud kategooria $\mathcal{A}$ morfismide korrutamise kaudu, siis on tegemist assotsiatiivse tehtega. Saadud poolrühma tähistame $\mathcal{A}^\alpha$. Kui kasutame tehet $\circ$, siis tähendab, et korrutamine toimub poolrühmas $\mathcal{A}^\alpha$.

Olgu morfismid $g : A \to B$ ja $f : C \to A$ poolrühmas $\mathcal{A}^\alpha$. Paneme tähele, et kui dom$(g) = $ codom(f), siis

$$g \circ f = g\alpha(A, A)f = gf$$

st võime korrutamise $\circ$ asendada tavalise morfismide korrutamisega selles kategoorias. Illustreeritult

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, bend right, "f"'] & & B \\ & A \arrow[loop above, "1_A"] \arrow[ur, bend right, "g"'] & \end{tikzcd}.$$

Olgu $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ kahealuseline kategooria. Olgu γ konsolidatsioon kategoorial $\mathcal{C}$. Ahendid $\gamma_A := \gamma\mid_{\mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_0}$ ja $\gamma_B := \gamma\mid_{\mathcal{B}_0 \times \mathcal{B}_0}$ on konsolidatsioonid vastavalt kategooriatel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Järelikult $\mathcal{A}^{\gamma_A} \leqslant \mathcal{C}^\gamma$ ja $\mathcal{B}^{\gamma_B} \leqslant \mathcal{C}^\gamma$ st nii $\mathcal{A}^{\gamma_A}$ kui ka $\mathcal{B}^{\gamma_B}$ on poolrühma $\mathcal{C}^\gamma$ alampoolrühmad. Edaspidises tähistame lihtsalt

$$\mathcal{A}^\gamma := \mathcal{A}^{\gamma_A} \quad \text{ja} \quad \mathcal{B}^\gamma := \mathcal{B}^{\gamma_B}.$$

2 Poolrühmade ühine laiend

Käesolevas alajaotuses eeldame, et lugeja on tuttav poolrühmateooria põhimõistetega. Muuhulgas ei hakka me defineerima mõisteid poolrühm, alampoolrühm, homomorfism, ideaal ja kongruents.

Tutvume teatud poolrühmade klassidega ning näitame, kuidas eelmises alajaotuses kirjeldatud kategooria omadused kanduvad üle konsolidatsiooniga tekitatud poolrühmale. Anname piisava tingimuse poolrühmade ühise laiendi olemasoluks ning näitame ära mõned omadused, mis poolrühmadelt kanduvad üle ühisele laiendile.

Edaspidises eeldame, et vaadeldavad poolrühmad on mittetühjad. Olgu S poolrühm. Element $e \in S$ on **idempotent**, kui kehtib võrdus $ee = e$ ja nende hulka tähistatakse kirjutisega $E(S)$. Kui $U, V \subseteq S$, siis tähistatakse

$$UV := \{uv \mid u \in U, v \in V\}.$$

Üheelemendilise alamhulga $\{a\} \subseteq S$ korral kirjutatakse lühidalt $aS := \{a\} S$.

Definitsioon 2.1. Olgu R poolrühma S alampoolrühm. Öeldakse, et S on poolrühma R **laiend**, kui kehtivad võrdused $R = RSR$ ja $S = SRS$. Asjaolu, et S on R laiend tähistame $R \preceq S$.

Lause 2.2 ([13] Lause 2.2). *Kehtivad järgmised väited.*

1. *Olgu $\varphi : S \to T$ sürjektiivne poolrühmade homomorfism ja $R \leqslant S$. Kui $R \preceq S$, siis $\varphi(R) \preceq T$.*
2. *Olgu $R \leqslant S \leqslant T$ poolrühmad. Kui $R \preceq S \preceq T$, siis $R \preceq T$.*

Tõestus. Tõestame esimese väite. Võrduste $R = RSR$ ja $S = SRS$ põhjal

$$\begin{aligned} \varphi(R) &= \varphi(RSR) \\ &= \varphi(R)\varphi(S)\varphi(R) \\ &= \varphi(R)T\varphi(R) \end{aligned} \quad \text{ja} \quad \begin{aligned} T = \varphi(S) &= \varphi(SRS) \\ &= \varphi(S)\varphi(R)\varphi(S) \\ &= T\varphi(R)T. \end{aligned}$$

Järelikult on T alampoolrühma $\varphi(R)$ laiend.

Tõestame teise väite. Eelduse kohaselt kehtivad võrdused $T = TST$, $S = STS = SRS$ ja $R = RSR$. Näitame, et kehtivad võrdused $T = TRT$ ja $R = RTR$.

Tõestame esimese võrduse. Sisalduvus $TRT \subseteq T$ kehtib alati. Teisalt,

$$T = TST = (TS)R(ST) \subseteq TRT.$$

Tõestame teise võrduse. Esiteks, $R = RSR \subseteq RTR$. Teiseks,

$$RTR = (RSR)T(RSR) = R(SR)T(RS)R \subseteq R(STS)R = RSR = R.$$

Seega on T alampoolrühma R laiend. ∎

Definitsioon 2.3. Olgu R', S' ja T poolrühmad. Öeldakse, et poolrühm T on poolrühmade R' ja S' **ühine laiend**, kui leiduvad alampoolrühmad $R \leqslant T$ ja $S \leqslant T$ nii, et $R \cong R'$, $S \cong S'$ ning $R \preceq T$ ja $S \preceq T$.

Definitsioon 2.4. Öeldakse, et poolrühm S on **regulaarne**, kui iga $s \in S$ korral leidub $x \in S$ nii, et $s = sxs$ ja $x = xsx$. Öeldakse veel, et x on elemendi s **inversne** element.

Mõnes allikas on poolrühma regulaarsus defineeritud nii, et iga $s \in S$ korral leidub $x \in S$, mille korral $s = sxs$, kus elementi x nimetatakse elemendi s **pseudoinversseks** elemendiks. Võrduste

$$(xsx)s(xsx) = x(sxs)(xsx) = x(sxs)x = xsx$$

tõttu on mõlemad regulaarsuse kirjeldused samaväärsed. Iga rühm on regulaarne poolrühm. Järgnev näide on üldtuntud ja leitav raamatu [5] teoreemist 1.1.3.

Näide 2.5. Olgu L ja R mingid mittetühjad hulgad. Siis hulk $L \times R$, kus korrutamine defineeritakse võrdusega

$$(l, r)(l', r') := (l, r'),$$

on regulaarne poolrühm, mis ei ole rühm, kui $|L| > 1$ või $|R| > 1$. Selliselt esituvaid poolrühmi nimetatakse **ristkülikpoolrühmadeks**.

Kui e on poolrühma S idempotent, siis alamhulk eSe on poolrühma S alampoolrühm, mis on ühtlasi ka monoid, mille ühikelement on e. Alampoolrühma eSe nimetatakse poolrühma S **lokaalseks alammonoidiks**.

Lause 2.6. *Olgu S poolrühm, milles leidub idempotent, ja olgu $e \in E(S)$. Kui kehtib võrdus $SeS = S$, siis S on oma lokaalse alammonoidi eSe laiend.*

Tõestus. Kehtivad võrdused

$$(eSe)S(eSe) = e(SeSeS)e = eSe \quad \text{ja} \quad S(eSe)S = SeS = S.$$

Järelikult kehtib $eSe \preceq S$. ■

Näiteid regulaarsetest poolrühmadest, mille korral kehtib võrdus $S = SeS$, on toodud hulgaliselt artikli [12] teises alajaotuses. Toome siinkohal välja järgmise.

Näide 2.7. Olgu S regulaarne poolrühm, milles leidub idempotent $e \in E(S)$ nii, et iga $x, y \in S$ korral $xy = xey$. Siis kehtib ka võrdus $SeS = S$.

Definitsioon 2.8. Olgu S poolrühm ja $s \in S$. Öeldakse, et alamhulk $sS^1 \subseteq S$ on elemendi s poolt tekitatud **parempoolne peaideaal** poolrühmas S.

Analoogiliselt defineeritakse poolrühma mingi elemendi poolt tekitatud vasakpoolne peaideaal. Poolrühma ideaalid on alampoolrühmad.

Definitsioon 2.9. Olgu S poolrühm ja $s, t \in S$. **Greeni seosed** $\mathscr{L}, \mathscr{R}$ ja $\mathscr{D}$ poolrühmal S on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{aligned} s\mathscr{L}t &\Leftrightarrow S^1 s = S^1 t, \\ s\mathscr{R}t &\Leftrightarrow sS^1 = tS^1, \\ s\,\mathscr{D}\,t &\Leftrightarrow (\exists u \in S)\,(s\mathscr{R}u\mathscr{L}t)\,. \end{aligned}$$

Räägitakse veel Greeni seostest $\mathscr{J}$ ja $\mathscr{H}$, kuid selles töös me neid ei kasuta. Kõik Greeni seosed on ekvivalentsusseosed. Eelnevalt mainitud artikli [12] näidete hulgast toome veel välja järgmise.

Näide 2.10. On teada, et regulaarse poolrühma T iga $\mathscr{D}$-klass sisaldab idempotente. Valime igast $\mathscr{D}$-klassist ühe idempotendi. Olgu nende hulk $D \subseteq T$. Tähistame

$$S := \bigcup \{eTf \mid e, f \in D\} = DTD.$$

Näitame, et S on alampoolrühm. Olgu $et_1f, e't_2f' \in S$, kus $e, f, e', f' \in D$ ja $t_1, t_2 \in T$, siis

$$(et_1f)(e't_2f') = e(t_1fe't_2)f' \in eTf' \subseteq S.$$

Analoogiliselt saab veenduda võrduste $T = TST$ ja $S = STS$ kehtivuses. Kokkuvõttes $S \preceq T$.

Toome ristkülikpoolrühmade abil veel näite ühisest laiendist.

Näide 2.11. Olgu A_1, A_2, B_1 ja B_2 lõplikud mittetühjad hulgad. Moodustame ristkülikpoolrühmad $A_1 \times B_1$ ja $A_2 \times B_2$. Kehtigu näiteks $|A_1| \leq |A_2|$ ja $|B_2| \leq |B_1|$, seega hulk A_1 (B_2) on isomorfne mingi hulga A_2 (B_1) alamhulgaga. Üldisust kitsendamata kehtigu $A_1 \subseteq A_2$ ja $B_2 \subseteq B_1$. Nii $A_1 \times B_1$ kui ka $A_2 \times B_2$ on ristkülikpoolrühma $A_2 \times B_1$ alampoolrühmad. Kuna ristkülikpoolrühmas tehte tulemuse määravad äärmised komponendid, siis kehtivad võrdused

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_1)(A_1 \times B_1) = A_1 \times B_1 \quad \text{ja}$$
$$(A_2 \times B_1)(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_1) = A_2 \times B_1.$$

Järelikult on $A_2 \times B_1$ poolrühma $A_1 \times B_1$ laiend. Analoogiliselt on ta poolrühma $A_2 \times B_2$ laiend, seega on tegemist nende poolrühmade ühise laiendiga.

Definitsioon 2.12. Öeldakse, et poolrühmal S on **lokaalsed ühikelemendid**, kui iga $s \in S$ korral leiduvad idempotendid $e, f \in E(S)$ nii, et $es = s = sf$.

Samaväärselt võime öelda, et eelneva definitsiooni tingimuses kehtib võrdus $s = esf$.

Definitsioon 2.13. Öeldakse, et poolrühm S on **faktoriseeruv**, kui iga $s \in S$ korral leiduvad $u, v \in S$ nii, et $s = uv$.

Olgu S regulaarne poolrühm ja $s, x \in S$, mille korral $s = sxs$. Kehtivad

$$(sx)(sx) = (sxs)x = sx \quad \text{ja} \quad (xs)(xs) = x(sxs) = xs,$$

kusjuures $(sx)s = s = s(xs)$, seega on poolrühmal S lokaalsed ühikelemendid. Iga lokaalsete ühikelementidega poolrühm on faktoriseeruv. Üldiselt ei kehti vastupidised väited.

Olgu $R \leqslant S$, mille korral $R \preceq S$. Võrduse $S = S(RS)$ tõttu $S \subseteq SS$, seega on mistahes laiend faktoriseeruv poolrühm. Poolrühm on iseenda laiend parajasti siis, kui ta on faktoriseeruv.

Definitsioon 2.14. Öeldakse, et regulaarne poolrühm S on **inversne**, kui igal elemendil $s \in S$ on üheselt määratud inversne element.

Inversse poolrühma S puhul piisab tingimusest $s = sxs$, sest võrduste

$$s(xsx)s = (sxs)xs = sxs = s$$

ja inverssuse tõttu kehtib võrdus $xsx = x$ automaatselt. Iga rühm on inversne poolrühm. Järgnev näide on üldtuntud ja muuhulgas leitav monograafiast [6].

Näide 2.15. Bitsüklilise poolrühma $\langle p, q \mid pq = 1 \rangle$ fikseeritud element esitub üheselt kujul $q^m p^n$, kus $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ja tema üheselt määratud inversne element on $p^m q^n$.

Inversse elemendi ühese määratuse otse kontrollimine võib mõnikord osutuda väga keeruliseks. Otstarbekas on kasutada järgmist kirjeldust.

Teoreem 2.16 ([5] Teoreem 5.1.1). *Regulaarne poolrühm S on inversne parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $e, f \in E(S)$ idempotendid ja x korrutise ef inversne element. Kehtib $ef = (ef)x(ef) = (ef)fxe(ef)$. Inverssuse tõttu $fxe = x = xefx$. Paneme tähele, et x on idempotent. Tõepoolest, kehtib

$$xx = fxefxe = f(xefx)e = fxe = x.$$

Kehtivad võrdused $xxx = x = x(ef)x$ ja inverssuse tõttu $x = ef$ ehk $ef \in E(S)$. Et $ef(fe)ef = ef$, siis inverssuse tõttu $ef = fe$.

Piisavus. Olgu $s \in S$ ja regulaarsuse põhjal kehtigu $sys = sxs = s$, $x = xsx$ ja $y = ysy$ mingite $x, y \in S$ korral. Kuna $sx, xs, sy, ys \in E(S)$ siis nende kommuteerumise tõttu

$$sx = sysx = sxsy = sy \quad \text{ja} \quad xs = xsys = ysxs = ys.$$

Eelneva põhjal kehtib

$$x = xsx = ysx = ysy = y,$$

seega on S inversne poolrühm. ∎

Lemma 2.17 ([3] Lemma 7.34). *Olgu S inversne poolrühm ja $\varphi : S \to T$ sürjektiivne poolrühmade homomorfism. Iga $f \in E(T)$ korral on $\varphi^{-1}(f)$ poolrühma S inversne alampoolrühm.*

Tõestus. Olgu $f \in E(T)$ idempotent. Olgu $s, s' \in \varphi^{-1}(f)$ ehk

$$\varphi(s) = \varphi(s') = f.$$

Siis $\varphi(ss') = ff = f$, seega $\varphi^{-1}(f) \leqslant S$. Olgu $s \in \varphi^{-1}(f)$ ja $x \in S$ tema inversne element. Tähistame $t := \varphi(x)$ ja näitame, et $x \in \varphi^{-1}(f)$.

Teoreemi 2.16 põhjal poolrühma S idempotendid kommuteeruvad, seega kehtib võrdus

$sxxs = xssx$. Kuna $s = sxs$ ja $x = xsx$, siis $f = ftf$ ja $t = tft$ ning

$$\begin{aligned} f = ftf = f(tft)f = f(tfft)f &= f\varphi(xssx)f \\ &= f\varphi(sxxs)f \\ &= f\varphi(s)\varphi(xx)\varphi(s)f \\ &= ff\varphi(xx)ff \\ &= f\varphi(xx)f \\ &= \varphi(s)\varphi(xx)\varphi(s) \\ &= \varphi(sxxs) \\ &= \varphi(xssx) \\ &= tfft = tft = t. \end{aligned}$$

Et $f = t$, siis $x \in \varphi^{-1}(f)$ ja seega $\varphi^{-1}(f)$ on poolrühma S inversne alampoolrühm. ∎

Kuna inversses poolrühmas leidub idempotent, siis saame vahetult järgmise.

Järeldus 2.18. *Olgu S inversne poolrühm ja $\varphi : S \to T$ sürjektiivne poolrühmade homomorfism. Iga $f \in E(T)$ korral leidub $e \in E(S)$ nii, et $\varphi(e) = f$.*

Teoreem 2.19 ([5] Teoreem 5.1.4). *Olgu $\varphi : S \to T$ sürjektiivne poolrühmade homomorfism. Kui S on regulaarne (inversne), siis T on regulaarne (inversne).*

Tõestus. Olgu $t \in T$. Leidub $s \in S$ nii, et $\varphi(s) = t$. Regulaarsuse tõttu leidub $x \in S$ nii, et $s = sxs$ ning

$$t\varphi(x)t = \varphi(s)\varphi(x)\varphi(s) = \varphi(sxs) = \varphi(s) = t.$$

Seega on T regulaarne poolrühm.
Olgu nüüd S inversne ja $f, f' \in E(T)$. Järelduse 2.18 põhjal leiduvad $e, e' \in E(S)$ nii, et $\varphi(e) = f$ ja $\varphi(e') = f'$. Teoreemi 2.16 põhjal poolrühma S idempotendid kommuteeruvad, seega

$$ff' = \varphi(e)\varphi(e') = \varphi(ee') = \varphi(e'e) = f'f.$$

Et ka poolrühma T idempotendid kommuteeruvad, siis teoreemi 2.16 põhjal on T inversne poolrühm. ∎

Osutub, et (väiksest tugevalt sidusast) kategooriast konsolidatsiooniga poolrühma moodustamisel tekib alati lokaalsete ühikelementidega poolrühm. Samuti kanduvad kategooria regulaarsus ja inverssus üle tekkinud poolrühmadele. Järgmine on artikli [11] lemma 3.5 põhjal.

Lemma 2.20. *Olgu $\mathcal{A}$ väike tugevalt sidus kategooria ja α konsolidatsioon sellel kategoorial. Kehtivad järgmised väited.*

1. *Poolrühmal $\mathcal{A}^\alpha$ on lokaalsed ühikelemendid.*
2. *Kui $\mathcal{A}$ on regulaarne (inversne) kategooria, siis poolrühm $\mathcal{A}^\alpha$ on regulaarne (inversne).*

Tõestus. Olgu $f : A \to B$ mingi morfism kategoorias $\mathcal{A}$.
Esimese väite tõestuseks märgime, et 1_B ja 1_A on idempotendid poolrühmas $\mathcal{A}^\alpha$ ja

$$1_B \circ f = 1_B f = f = f 1_A = f \circ 1_A.$$

Tõestame teise väite. Leidub morfism $g : B \to A$ nii, et $f = fgf$. Kehtib võrdus

$$f \circ g \circ f = fgf = f,$$

seega on $\mathcal{A}^\alpha$ regulaarne poolrühm.
Olgu nüüd $\mathcal{A}$ inversne kategooria ja $g' : B \to A$ morfism, mille korral $f \circ g' \circ f = f$. Siis $fg'f = f$ ja inverssuse tõttu $g' = g$. Järelikult on $\mathcal{A}^\alpha$ inversne poolrühm. ∎

Alajaotuse lõpuni eeldame, et vaadeldavad kategooriad on väiksed ja tugevalt sidusad.

Lause 2.21 ([11] Lemma 3.7). *Olgu γ konsolidatsioon kategoorial $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Poolrühm $\mathcal{C}^\gamma$ on alampoolrühmade $\mathcal{A}^\gamma$ ja $\mathcal{B}^\gamma$ laiend.*

Tõestus. Esimese alajaotuse lõpus nägime, et $\mathcal{A}^\gamma$ ja $\mathcal{B}^\gamma$ on $\mathcal{C}^\gamma$ alampoolrühmad. Näitame, et $\mathcal{C}^\gamma$ on poolrühma $\mathcal{A}^\gamma$ laiend. Teine väide tõestatakse analoogiliselt. Tõestuseks näitame, et kehtivad võrdused $A^\gamma = A^\gamma \circ \mathcal{C}^\gamma \circ \mathcal{A}^\gamma$ ja $\mathcal{C}^\gamma = \mathcal{C}^\gamma \circ \mathcal{A}^\gamma \circ \mathcal{C}^\gamma$.

Tõestame esimese võrduse. Sisalduvus $A^\gamma \subseteq A^\gamma \circ \mathcal{C}^\gamma \circ \mathcal{A}^\gamma$ on lemma 2.20 esimese punkti põhjal vahetu. Olgu $g \circ h \circ f \in A^\gamma \circ \mathcal{C}^\gamma \circ \mathcal{A}^\gamma$. Kuna $\mathcal{A}$ on $\mathcal{C}$ täielik alamkategooria, siis $g \circ h \circ f \in \mathcal{A}^\gamma$.

Tõestame teise võrduse. Sisalduvus $\mathcal{C}^\gamma \circ \mathcal{A}^\gamma \circ \mathcal{C}^\gamma \subseteq \mathcal{C}^\gamma$ kehtib alati. Olgu $c \in \mathcal{C}(C_1, C_2)$ ja näitame, et $c \in \mathcal{C}^\gamma \circ \mathcal{A}^\gamma \circ \mathcal{C}^\gamma$. Vaatame nelja erinevat võimalust.

1. Olgu $c \in \mathcal{A}^\gamma$, siis lemma 2.20 esimese punkti põhjal $c = 1_{C_2} \circ c \circ 1_{C_1}$.
2. Olgu $c \in \mathcal{B}^\gamma$. Leiduvad isomorfismid $h_1 : C_1 \to A_1$ ja $h_2 : C_2 \to A_2$, kus $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_0$. Alamkategooria $\mathcal{A}$ täielikkusest $h_2 c h_1^{-1} \in \mathcal{A}(A_1, A_2)$ ning
$$c = h_2^{-1} \circ h_2 c h_1^{-1} \circ h_1 \in \mathcal{C}^\gamma \circ \mathcal{A}^\gamma \circ \mathcal{C}^\gamma.$$
3. Olgu $C_1 \in \mathcal{A}_0$ ja $C_2 \in \mathcal{B}_0$. Siis $c = c \circ 1_{C_1} \circ 1_{C_1}$.
4. Olgu $C_1 \in \mathcal{B}_0$ ja $C_2 \in \mathcal{A}_0$. Siis $c = 1_{C_2} \circ 1_{C_2} \circ c$.

Rohkem võimalusi ei ole. Lause on tõestatud. ∎

Võib ka öelda, et $\mathcal{C}^\gamma$ on poolrühmade $\mathcal{A}^\gamma$ ja $\mathcal{B}^\gamma$ ühine laiend.

Kehtigu veel järgmine, kui pole öeldud teisiti. Olgu $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ kahealuseline kategooria, kus α ja β on konsolidatsioonid vastavalt kategooriatel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$. Olgu $A \in \mathcal{A}_0$. Fikseerime isomorfismi $h : A \to B$, kus $B \in \mathcal{B}_0$. Olgu γ konsolidatsioonide α ja β loomulik laiend kategooriale $\mathcal{C}$ isomorfismi h kaudu.
Kategooria $\mathcal{C}$ morfismide alamhulka, mis tegutsevad komponendist $\mathcal{A}$ komponenti $\mathcal{B}$, tähistame $\mathcal{AB}$. Analoogiline tähendus olgu kirjutisel $\mathcal{BA}$.

Lemma 2.22 ([11] Lemma 3.10). *Olgu $a \in \mathcal{A}^\gamma$, $b \in \mathcal{B}^\gamma$, $c \in \mathcal{BA}$ ja $d \in \mathcal{AB}$. Kehtivad järgmised võrdused.*

1. $c \circ h \circ h^{-1} \circ a = c \circ a$.

2. $a \circ h \circ h^{-1} \circ d = a \circ d$.

3. $a \circ h^{-1} \circ b = a \circ b$.

4. $b \circ h \circ a = b \circ a$.

Tõestus. Olgu $a : A' \to A''$, $b : B' \to B''$, $c : B_1 \to A_1$ ja $d : A_2 \to B_2$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} & & & \mathcal{B} \\
 & A_2 \arrow[r, "d"] & B_2 & \\
A' \arrow[dd, "a"] & & & B' \arrow[dd, "b"] \\
 & A \arrow[r, bend left, "h"] & B \arrow[l, bend left, "h^{-1}"] & \\
A'' & A_1 & B_1 \arrow[l, "c"] & B''
\end{tikzcd}
$$

Tõestame esimese võrduse:

$$
\begin{aligned}
c \circ h \circ h^{-1} \circ a &= c \circ 1_B \circ a \\
&= c\gamma(B, B_1)1_B\gamma(A'', B)a \\
&= c\beta(B, B_1)\gamma(A'', B)a \\
&= c\beta(B, B_1)\beta(B, B)h\alpha(A'', A)a \\
&= c\beta(B, B_1)h\alpha(A'', A)a \\
&= c\gamma(A'', B_1)a = c \circ a.
\end{aligned}
$$

Tõestame teise võrduse:

$$
\begin{aligned}
a \circ h \circ h^{-1} \circ d &= a \circ 1_B \circ d \\
&= a\gamma(B, A')1_B\gamma(B_2, B)d \\
&= a\gamma(B, A')\beta(B_2, B)d \\
&= a\alpha(A, A')h^{-1}\beta(B, B)\beta(B_2, B)d \\
&= a\alpha(A, A')h^{-1}\beta(B_2, B)d \\
&= a\gamma(B_2, A')d = a \circ d.
\end{aligned}
$$

Tõestame kolmanda võrduse:

$$
\begin{aligned}
a \circ h^{-1} \circ b &= a\gamma(A, A')h^{-1}\gamma(B'', B)b \\
&= a\alpha(A, A')h^{-1}\beta(B'', B)b \\
&= a\gamma(B'', A')b = a \circ b.
\end{aligned}
$$

Tõestame neljanda võrduse:

$$
\begin{aligned}
b \circ h \circ a &= b\gamma(B, B')h\gamma(A'', A)a \\
&= b\beta(B, B')h\alpha(A'', A)a \\
&= b\gamma(A'', B')a = b \circ a.
\end{aligned}
$$

Lemma on tõestatud. ■

Definitsioon 2.23. Olgu S poolrühm ja $\rho \subseteq S \times S$. Alamhulga ρ poolt **tekitatud kongruents** on sisalduvuse mõttes vähim kongruents π poolrühmal S, mille korral $\rho \subseteq \pi$.

Olgu S poolrühm ja $\rho \subseteq S \times S$. Olgu $s, t \in S$ ja leidugu $x, y, u, v \in S^1$ nii, et $s = xuy$ ja $t = xvy$, kus $(u, v) \in \rho$ või $(v, u) \in \rho$. Siis ütleme, et leidub ρ-**siire** elemendilt s elemendile t. Lühidalt $s \to t$. ([5])

Lause 2.24 ([5] Lause 1.5.9). *Olgu S poolrühm ja π alamhulga $\rho \subseteq S \times S$ poolt tekitatud kongruents poolrühmal S. Kehtib $(a, b) \in \pi$ parajasti siis, kui $a = b$ või leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $z_1, \ldots, z_n \in S$ nii, et*

$$a =: z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n := b,$$

kus $z_j \to z_{j+1}$ on ρ-siirded.

Tõestus. Vaatleme alamhulka

$$\rho^c := \left\{(xuy, xvy) \mid x, y \in S^1, (u, v) \in \rho \cup \rho^{-1}\right\} \subseteq S \times S.$$

Defineerime seose τ poolrühmal S järgmiselt:

$$(a, b) \in \tau \Leftrightarrow a = b \quad \text{või} \quad (a, b) \in \rho^c.$$

Seos τ on refleksiivne, sümmeetriline ja kooskõlas korrutamisega. Tähistame

$$\hat{\tau} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau^n.$$

Seos $\hat{\tau}$ on samuti refleksiivne, sümmeetriline ja kooskõlas korrutamisega. Näitame, et $\hat{\tau} = \pi$. Olgu $a, b, c \in S$ ja $m, n \in \mathbb{N}$, mille korral $(a, b) \in \tau^n$ ja $(b, c) \in \tau^m$, siis vahetult $(a, c) \in \tau^{m+n} \subseteq \hat{\tau}$, seega on $\hat{\tau}$ transitiivne. Järelikult on $\hat{\tau}$ kongruents poolrühmal S. Kuna $\rho \subseteq \hat{\tau}$, siis kongruentsi π minimaalsuse tõttu $\pi \subseteq \hat{\tau}$. Teisalt, kuna $\tau \subseteq \pi$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\tau^n \subseteq \pi$, seega $\hat{\tau} \subseteq \pi$.

Tarvilikkus. Olgu $(a, b) \in \pi$ ja $a \neq b$. Leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $(a, b) =: (z_1, z_n) \in \tau^n$. Leidub $z_{n-1} \in S$ nii, et $(z_1, z_{n-1}) \in \tau^{n-1}$ ja $(z_{n-1}, z_n) \in \tau$, siis leidub $z_{n-2} \in S$ nii, et $(z_1, z_{n-2}) \in \tau^{n-2}$ ja $(z_{n-2}, z_{n-1}) \in \tau$ jne. Kordame protsessi seni kuni kõik paarid on seoses τ ning saame tulemuseks ρ-siirete jada

$$z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n.$$

Piisavus. Olgu $a = z_1 \neq z_n = b$ ja olgu $z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n$ ρ-siirete jada. Kuna

$$(z_j, z_{j+1}) \in \hat{\tau} = \pi, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

siis transitiivsuse tõttu $(a, b) = (z_1, z_n) \in \pi$. ■

Järgnevat lauset kasutame töö kolmandas osas, kus meil on vaja kontrollida teatud kongruentside võrdsust.

Lause 2.25 ([11] Lause 3.11). *Olgu π_A kongruents poolrühmal $\mathcal{A}^\gamma$ ja π_B kongruents poolrühmal $\mathcal{B}^\gamma$. Olgu π kongruents poolrühmal $\mathcal{C}^\gamma$, mis on tekitatud hulga $\pi_A \cup \pi_B$ poolt. Võrdus*

$$\pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma) = \pi_A$$

kehtib parajasti siis, kui kehtivad tingimused

> *(i) mistahes morfismide* $a, a' \in \mathcal{A}^\gamma$ *korral* $(a, a') \in \pi_A \Rightarrow (h^{-1} \circ a, h^{-1} \circ a') \in \pi_A$*,*
>
> *(ii) mistahes morfismide* $a, a' \in \mathcal{A}^\gamma$ *korral* $(a, a') \in \pi_A \Rightarrow (a \circ h, a' \circ h) \in \pi_A$*,*
>
> *(iii) mistahes morfismide* $b, b' \in \mathcal{B}^\gamma$*, isomorfismi* $f \in \mathcal{AB}$ *ja isomorfismi* $g \in \mathcal{BA}$ *korral kehtib* $(b, b') \in \pi_B \Rightarrow (g \circ b \circ f, g \circ b' \circ f) \in \pi_A$*.*

Tõestus. Tarvilikkus. Tõestame (i) ja (ii). Olgu $a, a' \in \mathcal{A}^\gamma$ nii, et $(a, a') \in \pi_A \subseteq \pi$. Kuna $\mathcal{A}$ on täielik alamkategooria, siis $h^{-1} \circ a, a \circ h \in \mathcal{A}^\gamma$. Et π on kongruents, siis

$$\left(h^{-1} \circ a, h^{-1} \circ a'\right), (a \circ h, a' \circ h) \in \pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma) = \pi_A.$$

Tõestame (iii). Fikseerime $b, b' \in \mathcal{B}^\gamma$ nii, et $(b, b') \in \pi_B$. Olgu morfismid $f \in \mathcal{AB}$ ja $g \in \mathcal{BA}$. Kuna $\mathcal{A}$ on täielik alamkategooria, siis $g \circ b \circ f \in \mathcal{A}^\gamma$. Et π on kongruents, siis

$$(g \circ b \circ f, g \circ b' \circ f) \in \pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma) = \pi_A.$$

Piisavus. Sisalduvus $\pi_A \subseteq \pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma)$ kehtib alati. Näitame, et kehtib sisalduvus $\pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma) \subseteq \pi_A$. Olgu $x, y \in \mathcal{A}^\gamma$, mille korral $(x, y) \in \pi$. Olgu $x \neq y$, siis lause 2.24 põhjal leidub lõplik $\pi_A \cup \pi_B$-siirete jada

$$x =: z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n := y.$$

Kehtigu $\pi_A \cup \pi_B$-siirde kirjelduse põhjal

$$z_j = x_j \circ u_j \circ y_j \quad \text{ja} \quad z_{j+1} = x_j \circ v_j \circ y_j, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

kus $x_j, y_j \in (\mathcal{C}^\gamma)^1$ ja $(u_j, v_j) \in \pi_A \cup \pi_B$ või $(v_j, u_j) \in \pi_A \cup \pi_B$. Kuna π_A ja π_B on sümmeetrilised, siis piisab vaadelda juhtu $(u_j, v_j) \in \pi_A \cup \pi_B$. Et $z_1 = x \in \mathcal{A}^\gamma$, siis $\mathrm{dom}(y_1) \in \mathcal{A}_0$ ja $\mathrm{codom}(x_1) \in \mathcal{A}_0$. Alamkategooria $\mathcal{A}$ on täielik st $z_2 \in \mathcal{A}^\gamma$ ja analoogiliselt jätkates näeme, et iga $z_j \in \mathcal{A}^\gamma$. Väite tõestuseks piisab π_A transitiivsuse põhjal näidata, et iga $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ korral $(z_j, z_{j+1}) \in \pi_A$. Kuna kongruents on kooskõlas korrutamisega, siis meil piisab näidata, et saame paari (z_j, z_{j+1}) komponendid esitada sobivalt valitud tegurite kaudu. Vaatame kahte võimalust.
Esiteks, olgu $(u_j, v_j) \in \pi_A$. Morfismide x_j, y_j valikuks on neli võimalust.

1. Olgu $x_j, y_j \in \mathcal{A}^\gamma$. Kuna π_A on $\mathcal{A}^\gamma$ kongruents, siis

   $$(z_j, z_{j+1}) = (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j) \in \pi_A.$$

2. Olgu $x_j \in \mathcal{BA}$ ning $y_j \in \mathcal{A}^\gamma$. Kehtib $(u_j \circ y_j, v_j \circ y_j) \in \pi_A$, sest π_A on kongruents. Eelduse (i) põhjal

   $$\left(h^{-1} \circ u_j \circ y_j, h^{-1} \circ v_j \circ y_j\right) \in \pi_A.$$

   Alamkategooria täielikkuse tõttu $x_j \circ h \in \mathcal{A}^\gamma$. Lemma 2.22 esimese punkti põhjal

   $$\begin{aligned}(z_j, z_{j+1}) &= (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j) \\ &= \left(x_j \circ h \circ h^{-1} \circ u_j \circ y_j, x_j \circ h \circ h^{-1} \circ v_j \circ y_j\right) \in \pi_A.\end{aligned}$$

3. Olgu $x_j \in \mathcal{A}^\gamma$ ning $y_j \in \mathcal{AB}$. Kehtib $(x_j \circ u_j, x_j \circ v_j) \in \pi_A$, sest π_A on

kongruents. Eelduse (ii) põhjal

$$(x_j \circ u_j \circ h, x_j \circ v_j \circ h) \in \pi_A.$$

Alamkategooria täielikkuse tõttu $h^{-1} \circ y_j \in \mathcal{A}^\gamma$. Lemma 2.22 teise punkti põhjal

$$\begin{aligned}(z_j, z_{j+1}) &= (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j)\\ &= \big(x_j \circ u_j \circ h \circ h^{-1} \circ y_j, x_j \circ v_j \circ h \circ h^{-1} \circ y_j\big) \in \pi_A.\end{aligned}$$

4. Olgu morfismid $x_j \in \mathcal{BA}$ ja $y_j \in \mathcal{AB}$. Eeldusi (i) ja (ii) järjest kasutades saame

$$(u_j \circ h, v_j \circ h) \in \pi_A \quad \text{ja} \quad (h^{-1} \circ u_j \circ h, h^{-1} \circ v_j \circ h) \in \pi_A.$$

Eelnevalt nägime, et $x_j \circ h, h^{-1} \circ y_j \in \mathcal{A}^\gamma$, seega kongruentsi mõiste kohaselt

$$\begin{aligned}(z_j, z_{j+1}) &= (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j)\\ &= \big(x_j \circ h \circ h^{-1} \circ u_j \circ h \circ h^{-1} \circ y_j, x_j \circ h \circ h^{-1} \circ v_j \circ h \circ h^{-1} \circ y_j\big) \in \pi_A.\end{aligned}$$

Teiseks, oletame, et $(u_j, v_j) \in \pi_B$. Taas on neli võimalust.

1. Olgu $x_j, y_j \in \mathcal{A}^\gamma$. Eelduse (iii) põhjal

$$\big(h^{-1} \circ u_j \circ h, h^{-1} \circ v_j \circ h\big) \in \pi_A.$$

Lemma 2.22 kolmanda ja neljanda punkti põhjal kehtib

$$x_j \circ u_j \circ y_j = x_j \circ h^{-1} \circ u_j \circ y_j = x_j \circ h^{-1} \circ u_j \circ h \circ y_j.$$

Analoogiliselt kehtib võrdus

$$x_j \circ v_j \circ y_j = x_j \circ h^{-1} \circ v_j \circ h \circ y_j.$$

Kuna π_A on kongruents, siis

$$\begin{aligned}(z_j, z_{j+1}) &= (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j)\\ &= \big(x_j \circ h^{-1} \circ u_j \circ h \circ y_j, x_j \circ h^{-1} \circ v_j \circ h \circ y_j\big) \in \pi_A.\end{aligned}$$

2. Olgu $y_j \in \mathcal{A}^\gamma$ ja $x_j \in \mathcal{BA}$ nii, et $x_j : B_1 \to A_1$. Kahealuselise kategooria mõiste kohaselt leidub isomorfism $g : B_1 \to A'$, kus $A' \in \mathcal{A}_0$. Eelduse (iii) põhjal

$$(g \circ u_j \circ h, g \circ v_j \circ h) \in \pi_A.$$

Kuna $y_j \in \mathcal{A}^\gamma$, siis kongruentsi mõiste kohaselt

$$(g \circ u_j \circ h \circ y_j, g \circ v_j \circ h \circ y_j) \in \pi_A.$$

Lemma 2.22 neljanda punkti põhjal kehtivad

$$g \circ u_j \circ h \circ y_j = g \circ u_j \circ y_j \quad \text{ja} \quad g \circ v_j \circ h \circ y_j = g \circ v_j \circ y_j,$$

ning seega

$$(g \circ u_j \circ y_j, g \circ v_j \circ y_j) \in \pi_A.$$

Veel kehtib $x_j \circ g^{-1} \in \mathcal{A}^\gamma$. Näeme, et $x_j \circ g^{-1} \circ g = x_j$. Kuna π_A on kongruents, siis eelneva põhjal kehtib

$$\begin{aligned}(z_j, z_{j+1}) &= (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j)\\ &= \big(x_j \circ g^{-1} \circ g \circ u_j \circ y_j, x_j \circ g^{-1} \circ g \circ v_j \circ y_j\big) \in \pi_A.\end{aligned}$$

3. Olgu $x_j \in \mathcal{A}^\gamma$ ja $y_j \in \mathcal{AB}$ nii, et $y_j : A_2 \to B_2$. Kahealuselise kategooria mõiste kohaselt leidub isomorfism $f : A'' \to B_2$, kus $A'' \in \mathcal{A}_0$. Eelduse (iii) põhjal

$$\big(h^{-1} \circ u_j \circ f, h^{-1} \circ v_j \circ f\big) \in \pi_A.$$

Kuna $x_j \in \mathcal{A}^\gamma$, siis

$$\big(x_j \circ h^{-1} \circ u_j \circ f, x_j \circ h^{-1} \circ v_j \circ f\big) \in \pi_A.$$

Lemma 2.22 kolmanda punkti põhjal kehtivad

$$x_j \circ h^{-1} \circ u_j \circ f = x_j \circ u_j \circ f \quad \text{ja} \quad x_j \circ h^{-1} \circ v_j \circ f = x_j \circ v_j \circ f$$

ning seega

$$(x_j \circ u_j \circ f, x_j \circ v_j \circ f) \in \pi_A.$$

Veel kehtib $f^{-1} \circ y_j \in \mathcal{A}^\gamma$. Näeme, et $f \circ f^{-1} \circ y_j = y_j$. Kuna π_A on kongruents, siis eelneva põhjal kehtib

$$\begin{aligned}(z_j, z_{j+1}) &= (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j)\\ &= \big(x_j \circ u_j \circ f \circ f^{-1} \circ y_j, x_j \circ v_j \circ f \circ f^{-1} \circ y_j\big) \in \pi_A.\end{aligned}$$

4. Olgu $x_j \in \mathcal{BA}$ ja $y_j \in \mathcal{AB}$ neile vastavate isomorfismidega g ja f nii nagu nad on tähistatud eelnevas kahes punktis. Eelduse (iii) põhjal

$$(g \circ u_j \circ f, g \circ v_j \circ f) \in \pi_A.$$

Kehtivad võrdused

$$x_j \circ g^{-1} \circ g = x_j \quad \text{ja} \quad f \circ f^{-1} \circ y_j = y_j.$$

Kuna $x_j \circ g^{-1}, f^{-1} \circ y_j \in \mathcal{A}^\gamma$, siis kongruentsi mõiste kohaselt

$$\begin{aligned}(z_j, z_{j+1}) &= (x_j \circ u_j \circ y_j, x_j \circ v_j \circ y_j)\\ &= \big(x_j \circ g^{-1} \circ g \circ u_j \circ f \circ f^{-1} \circ y_j, x_j \circ g^{-1} \circ g \circ v_j \circ f \circ f^{-1} \circ y_j\big) \in \pi_A.\end{aligned}$$

Rohkem võimalusi ei ole. Lause on tõestatud. ∎

Analoogiliselt saame kirjeldada võrdust $\pi \cap (\mathcal{B}^\gamma \times \mathcal{B}^\gamma) = \pi_B$. Sõnastame selle eraldi lausena.

Lause 2.26 ([11] Lause 3.11). *Olgu π_A kongruents poolrühmal $\mathcal{A}^\gamma$ ja π_B kongruents poolrühmal $\mathcal{B}^\gamma$. Olgu π kongruents poolrühmal $\mathcal{C}^\gamma$, mis on tekitatud hulga $\pi_A \cup \pi_B$ poolt. Võrdus*

$$\pi \cap (\mathcal{B}^\gamma \times \mathcal{B}^\gamma) = \pi_B$$

kehtib parajasti siis, kui kehtivad tingimused

(i) mistahes morfismide $b, b' \in \mathcal{B}^\gamma$ korral $(b, b') \in \pi_B \Rightarrow (h \circ b, h \circ b') \in \pi_B$,

(ii) mistahes morfismide $b, b' \in \mathcal{B}^\gamma$ korral $(b, b') \in \pi_B \Rightarrow (b \circ h^{-1}, b' \circ h^{-1}) \in \pi_B$,

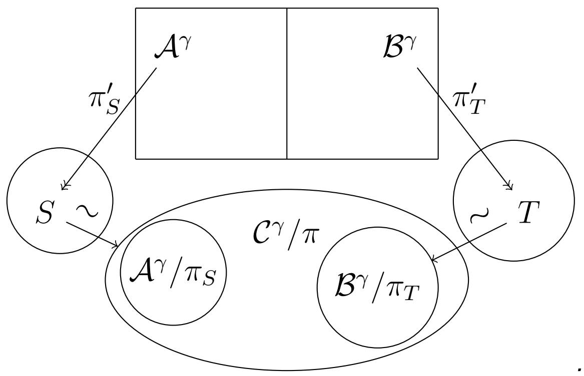
(iii) mistahes morfismide $a, a' \in \mathcal{A}^\gamma$, isomorfismi $f \in \mathcal{AB}$ ja isomorfismi $g \in \mathcal{BA}$ korral kehtib $(a, a') \in \pi_A \Rightarrow (f \circ a \circ g, f \circ a' \circ g) \in \pi_B$.

Alajaotuse lõpetame piisava tingimusega poolrühmade ühise laiendi olemasoluks, kusjuures ühine laiend pärib teatud poolrühma omadusi nendelt poolrühmadelt, millest ta moodustatakse. Järgnevas teoreemis me ei vaja konsolidatsioonide laiendamist suuremale kategooriale mingi fikseeritud isomorfismi kaudu.

Teoreem 2.27 ([11] Lause 3.12). *Olgu S ja T poolrühmad ja $\mathcal{C} = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ kahealuseline kategooria, millel on antud konsolidatsioon γ. Olgu $\pi'_S : \mathcal{A}^\gamma \to S$ ning $\pi'_T : \mathcal{B}^\gamma \to T$ sürjektiivsed homomorfismid, mille tuumad on vastavalt π_S ja π_T. Olgu π hulga $\pi_S \cup \pi_T$ poolt tekitatud kongruents poolrühmal $\mathcal{C}^\gamma$. Kui*

$$\pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma) = \pi_S \quad \textit{ja} \quad \pi \cap (\mathcal{B}^\gamma \times \mathcal{B}^\gamma) = \pi_T,$$

siis faktorpoolrühm $\mathcal{C}^\gamma/\pi$ on poolrühmade S ja T ühine laiend. Illustreeritult



Kui kategooriad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on regulaarsed (inverssed), siis $\mathcal{C}^\gamma/\pi$ on regulaarne (inversne) poolrühm.

Tõestus. Kuna $\pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma) = \pi_S$, siis kujutus

$$\iota : \mathcal{A}^\gamma/\pi_S \to \mathcal{C}^\gamma/\pi, \quad [x]_{\pi_S} \mapsto [x]_\pi,$$

on injektiivne homomorfism. Järelikult on $\mathcal{A}^\gamma/\pi_S$ isomorfne poolrühma $\mathcal{C}^\gamma/\pi$ mingi alampoolrühmaga. Samastame selle alampoolrühma poolrühmaga $\mathcal{A}^\gamma/\pi_S$.
Olgu $\rho : \mathcal{C}^\gamma \to \mathcal{C}^\gamma/\pi$ loomulik projektsioon. See on sürjektiivne homomorfism. Siis

$$\rho|_{\mathcal{A}^\gamma} : \mathcal{A}^\gamma \to \rho(\mathcal{A}^\gamma)$$

on ka sürjektiivne homomorfism, kusjuures tema tuum on $\pi \cap (\mathcal{A}^\gamma \times \mathcal{A}^\gamma) = \pi_S$. Hästi tuntud poolrühmade homomorfismiteoreemist järeldub, et

$$S \cong \mathcal{A}^\gamma/\pi_S \cong \rho(\mathcal{A}^\gamma).$$

Lemma 2.21 põhjal on $\mathcal{C}^\gamma$ alampoolrühma $\mathcal{A}^\gamma$ laiend. Lause 2.2 esimese punkti põhjal on $\mathcal{C}^\gamma/\pi$ alampoolrühma $\rho(\mathcal{A}^\gamma)$ laiend. Kui eelnev arutelu läbi viia poolrühma T jaoks, siis saame analoogiliselt, et $\mathcal{C}^\gamma/\pi$ on alampoolrühma $\rho(\mathcal{B}^\gamma)$ laiend, kusjuures $\rho(\mathcal{B}^\gamma) \cong T$. Seega on $\mathcal{C}^\gamma/\pi$ poolrühmade S ja T ühine laiend.

Olgu nüüd $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ regulaarsed (inverssed) kategooriad, siis järelduse 1.7 põhjal on kategooria $\mathcal{C}$ regulaarne (inversne). Lemma 2.20 teise punkti põhjal on $\mathcal{C}^\gamma$ regulaarne (inversne) poolrühm. Teoreemi 2.19 põhjal on $\mathcal{C}^\gamma/\pi$ regulaarne (inversne) poolrühm. ∎

3 Poolrühma Schützenberger' kategooria

Käesolevas alajaotuses defineerime poolrühma Schützenberger' kategooria ning toome artikli [4] põhjal välja mõned tema omadused. Esitame Lawsoni teoreemi implikatsiooni $2 \Rightarrow 3$ tõestuse tuginedes eelnevates alajaotustes tehtule.

Definitsioon 3.1. Poolrühma S **Schützenberger' kategooria** $\mathbb{D}(S)$ objektide hulk on S. Morfismid $t \to s, s, t \in S$, on kolmikud (s, u, t), kus $u \in sS^1 \cap S^1 t$ ning nende korrutamine defineeritakse võrdusega

$$(s, xt, t)(t, ty, r) := (s, xty, r).$$

Veendume, et tegemist on kategooriaga.
Morfismid on võrdsed, kui kõik nende vastavad komponendid on võrdsed, seega morfismide hulgad on paarikaupa lõikumatud. Vaatame nüüd kolmikuid

$$(p, x_1 r, r), \quad (r, ry_2, s) = (r, x_2 s, s) \quad \text{ja} \quad (s, sy_3, t)$$

ning näitame, et definitsioonis antud morfismide korrutamine on assotsiatiivne:

$$\begin{aligned}
((p, x_1 r, r)(r, ry_2, s))\,(s, sy_3, t) &= (p, x_1 ry_2, s)(s, sy_3, t) \\
&= (p, x_1 x_2 s, s)(s, sy_3, t) \\
&= (p, x_1 x_2 sy_3, t) \\
&= (p, x_1 ry_2 y_3, t) \\
&= (p, x_1 r, r)(r, ry_2 y_3, t) \\
&= (p, x_1 r, r)(r, x_2 sy_3, t) \\
&= (p, x_1 r, r)\,((r, x_2 s, s)(s, sy_3, t)) \\
&= (p, x_1 r, r)\,((r, ry_2, s)(s, sy_3, t))\,.
\end{aligned}$$

Iga objekti $s \in S$ ühikmorfism on (s, s, s). Tõepoolest, olgu $(s, sy, t) = (s, xt, t)$ mingi morfism, siis

$$\begin{aligned}
(s, s, s)(s, sy, t) &= (s, 1s, s)(s, sy, t) \\
&= (s, 1sy, t) \\
&= (s, sy, t) \\
&= (s, xt, t)(t, t1, t) \\
&= (s, xt, t)(t, t, t).
\end{aligned}$$

Mistahes $s, t \in S$ korral on (s, st, t) morfism $t \to s$, seega on kategooria $\mathbb{D}(S)$ tugevalt sidus.
Kategooriaga $\mathbb{D}(S)$ paralleelselt saame rääkida kategooriast $\mathbb{I}(S)$, mille objektid on parempoolsed peaideaalid $sS^1, s \in S$. Morfism $\varphi : tS^1 \to sS^1$, kus $s, t \in S$, on selline kujutus, mille korral leidub $u \in S^1$ nii, et iga $x \in S^1$ korral $\varphi(tx) = utx$. Artiklis [4] nimetatakse sellist kujutust **sisemorfismiks**. Olgu

$$tS^1 \xrightarrow{\varphi} sS^1 \xrightarrow{\psi} rS^1$$

sisemorfismid. Leiduvad $u, v \in S^1$ nii, et iga $x \in S^1$ korral $\varphi(tx) = utx$ ja $\psi(sx) = vsx$. Võttes $x = 1$ saame $\varphi(t) = ut \in sS^1$. Olgu $u' \in S^1$ selline, et $ut = su'$. Iga $x \in S^1$ korral

$$(\psi\varphi)(tx) = \psi(utx) = \psi(su'x) = vsu'x = (vu)tx,$$

seega sisemorfismide kompositsioon on samuti sisemorfism. Kuna komponeerimine on harilik kujutuste komponeerimine, siis on see assotsiatiivne tehe. Samuti, iga objekti sS^1 ühikmorfism on kujutus $sx \mapsto sx$.

Osutub, et kategooriad $\mathbb{D}(S)$ ja $\mathbb{I}(S)$ on ekvivalentsed. Järgnevat teoreemi kasutame töö neljandas osas.

Teoreem 3.2 ([4] Teoreem 3.3). *Olgu S suvaline poolrühm. Siis kategooria $\mathbb{D}(S)$ on ekvivalentne kategooriaga $\mathbb{I}(S)$.*

Tõestus. Defineerime $F : \mathbb{D}(S) \to \mathbb{I}(S)$ nii, et

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(s,ut,t)}"'] & tS^1 \arrow[d, "\tau_{ut}"] \\
s \arrow[r, mapsto] & sS^1
\end{tikzcd},$$

kus $ut = sw$ ja $\tau_{ut} : tS^1 \to sS^1$ on defineeritud võrdusega

$$\tau_{ut}(tx) = utx, \quad x \in S^1,$$

st ta on tõepoolest sisemorfism. Selline eeskiri F on korrektselt defineeritud, sest kui leiduvad $u, v \in S^1$ nii, et $ut = vt \in sS^1$, siis iga $x \in S^1$ korral

$$\tau_{ut}(tx) = utx = vtx = \tau_{vt}(tx) \tag{1}$$

ja seega $\tau_{ut} = \tau_{vt}$. Konrollime funktoriaalsust. Olgu $(s, ut, t) = (s, sw, t)$ ja (r, vs, s) morfismid kategoorias $\mathbb{D}(S)$. Olgu $x \in S^1$ fikseeritud, siis

$$\begin{aligned}
F\left((r, vs, s)(s, sw, t)\right)(tx) &= F\left((r, vsw, t)\right)(tx) \\
&= F\left((r, vut, t)\right)(tx) \\
&= \tau_{vut}(tx) \\
&= vutx.
\end{aligned}$$

Samuti kehtib

$$\begin{aligned}
F((r, vs, s))F((s, sw, t))(tx) &= F((r, vs, s))F((s, ut, t))(tx) \\
&= \tau_{vs}\tau_{ut}(tx) \\
&= \tau_{vs}(utx) \\
&= \tau_{vs}(swx) \\
&= vswx \\
&= vutx.
\end{aligned}$$

Kategooria $\mathbb{D}(S)$ iga ühikmorfismi $(s, s, s) = (s, 1s, s)$ korral kehtib

$$F((s, 1s, s))(sx) = \tau_{1s}(sx) = 1sx = sx,$$

seega F säilitab ühikmorfismid. Näitame veel, et F on kategooriate ekvivalents. Kuna F on objektidel sürjektiivne, siis ta on ka tihe. Funktor F on täpne, sest (1) põhjal nägime, et võrdusest $\tau_{ut} = \tau_{vt}$ järeldub $ut = vt$. Kui $\varphi : tS^1 \to sS^1$ on sisemorfism, siis leidub $u \in S^1$ nii, et iga $x \in S^1$ korral $\varphi(tx) = utx$, muuhulgas $\varphi(t) = ut \in sS^1 \cap S^1t$. Järelikult

$$F((s, ut, t)) = \tau_{ut} = \varphi$$

ja oleme näidanud, et F on täielik. ∎

Jätkame nüüd Schützenberger' kategooriatega. Järgnev lemma annab muuhulgas hea mooduse kategooria $\mathbb{D}(S)$ toese fikseerimiseks.

Lemma 3.3 ([4] Lemma 3.4). *Olgu S poolrühm. Kategooria $\mathbb{D}(S)$ objektid $s, t \in S$ on isomorfsed parajasti siis, kui $s \mathscr{D} t$.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu (s, u, t) isomorfism kategoorias $\mathbb{D}(S)$, kus $u = xt = sy,\ x, y \in S^1$. Leidub morfism (t, v, s), kus $v = tz = ws,\ z, w \in S^1$, nii, et

$$\begin{aligned}(s,s,s) &= (s,xt,t)(t,tz,s)\\ &= (s,xtz,s)\end{aligned} \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned}(t,t,t) &= (t,ws,s)(s,sy,t)\\ &= (t,wsy,t).\end{aligned}$$

Võrduste $s = xtz = uz$ ja $u = sy$ põhjal $s\mathscr{R}u$. Analoogiliselt, võrduste $t = wsy = wu$ ja $u = xt$ põhjal, $u\mathscr{L}t$. Seega kehtib $s \mathscr{D} t$.
Piisavus. Leidugu $u \in S$ nii, et $s\mathscr{R}u\mathscr{L}t$. Leiduvad $x, y, z, w \in S^1$, mille korral

$$u = sy = xt, \quad s = uz \quad \text{ja} \quad t = wu.$$

Kehtib $v := tz = wuz = ws \in tS^1 \cap S^1s$, mille põhjal

$$\begin{aligned}(s,u,t)(t,v,s) &= (s,xt,t)(t,tz,s)\\ &= (s,xtz,s)\\ &= (s,uz,s)\\ &= (s,s,s)\end{aligned} \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned}(t,v,s)(s,u,t) &= (t,ws,s)(s,sy,t)\\ &= (t,wsy,t)\\ &= (t,wu,t)\\ &= (t,t,t).\end{aligned}$$

Järelikult on objektid s ja t isomorfsed. ∎

Olgu $(e, s, f), e, f \in E(S)$, morfism kategoorias $\mathbb{D}(S)$, siis $s = ex = yf$, kus $x, y \in S^1$, ning kehtib võrdus

$$esf = eexf = exf = yff = yf = s.$$

Definitsioon 3.4. Poolrühma S **Cauchy täieldiks** nimetatakse kategooria $\mathbb{D}(S)$ täielikku alamkategooriat $C(S)$, mille morfismid on kolmikud (e, s, f), kus $e, f \in E(S) = C(S)_0$ ja $s \in S$, mille korral $esf = s$.

Artiklis [4] öeldakse kategooria $C(S)$ kohta ka Karoubi ümbrik ja seda tähistatakse $\mathbb{K}(S)$. Leidub poolrühmi, milles pole idempotente. Sellisel juhul on nende Cauchy täieldid tühjad kategooriad. Mittetühja poolrühma Schützenberger' kategooria on mittetühi.

Teoreemiga 3.2 analoogiliselt saame tõestada järgmise.

Teoreem 3.5 ([4] Teoreem 3.6). *Kategooria $C(S)$ on ekvivalentne kategooria $\mathbb{I}(S)$ täieliku alamkategooriaga, mille moodustavad parempoolsed peaideaalid $eS^1, e \in E(S)$, koos nendevaheliste sisemorfismidega.*

Lemma 3.3 abil saame piisava tingimuse kategooriate $C(S)$ ja $\mathbb{D}(S)$ ekvivalentsuseks. Asjakohane põgus kommentaar on ka artiklis [4].

Järeldus 3.6. *Olgu S poolrühm. Sisestusfunktor $I : C(S) \to \mathbb{D}(S)$ on tihe parajasti siis, kui S on regulaarne poolrühm.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $s \in S$. Funktori I tiheduse tõttu leidub $e \in E(S)$ nii, et $s \cong e$ kategoorias $\mathbb{D}(S)$. Lemma 3.3 põhjal $s \mathscr{D} e$. Olgu $u \in S$, mille korral $s \mathscr{R} u \mathscr{L} e$. Niisiis, olgu $v, y, z, w \in S^1$ valitud nii, et

$$s = uv, \quad u = sy = ze \quad \text{ja} \quad e = wu.$$

Näitame, et elemendi s pseudoinversne element on $x := yw$. Kehtib

$$\begin{aligned} sxs = (sy)ws = uws = uw(uv) = u(wu)v &= uev \\ &= (ze)ev \\ &= (ze)v \\ &= uv = s. \end{aligned}$$

Järelikult on S regulaarne poolrühm.
Piisavus. Olgu $s \in S$. Regulaarsuse tõttu leidub $x \in S$ nii, et $s = sxs$, kusjuures $sx \in E(S)$. Seega $s \mathscr{R} sx \mathscr{L} sx$ ehk $s \mathscr{D} sx$. Lemma 3.3 põhjal $s \cong sx$ kategoorias $\mathbb{D}(S)$, seega on funktor I tihe. ■

Kuna sisestusfunktor on täpne ja täielik, siis on meil regulaarse poolrühma S korral tegemist kategooriate $C(S)$ ja $\mathbb{D}(S)$ ekvivalentsiga.

Järeldus 3.7. *Olgu S regulaarne poolrühm. Siis kategooriad $C(S)$ ja $\mathbb{D}(S)$ on ekvivalentsed.*

Lawsoni teoreemi tõestuse käigus, artiklis [11], mainitakse, et regulaarsete poolrühmade Cauchy täieldite ekvivalentsusest järeldub, et neil on ka olemas regulaarne ühine laiend. Antud asjaolu sõltub sellest, kas poolrühma regulaarsus kandub üle Cauchy täieldile. See on tõepoolest nii.

Lause 3.8. *Olgu S regulaarne (inversne) poolrühm, siis kategooria $C(S)$ on regulaarne (inversne).*

Tõestus. Regulaarsuse tõttu on poolrühmal S lokaalsed ühikelemendid. Olgu morfism (e, s, f) fikseeritud, kus $e, f \in E(S), s \in S$ ja $s = esf$. Siis $es = s = sf$. Regulaarsuse tõttu leidub $x \in S$ nii, et $s = sxs$. Võrduse $ffxee = fxe$ tõttu (f, fxe, e) on morfism kategoorias $C(S)$ ning

$$\begin{aligned}(e,s,f)(f,fxe,e)(e,s,f) &= (e,sfxe,e)(e,es,f)\\ &= (e,sfxes,f)\\ &= (e,sxs,f)\\ &= (e,s,f),\end{aligned}$$

seega on kategooria $C(S)$ regulaarne.
Olgu nüüd S inversne poolrühm ja morfism (f,y,e), kus $y = fye$, selline, et

$$(e,s,f) = (e,s,f)(f,y,e)(e,s,f) = (e,sys,f).$$

Kuna $sys = s$, siis inverssuse tõttu $y = x$. Kuna $fxe = fye = y$, siis

$$(f,y,e) = (f,fxe,e)$$

ja seega on $C(S)$ inversne kategooria. ■

On loomulik küsida, kas analoogiline väide kehtib ka kategooria $\mathbb{D}(S)$ puhul.

Järeldus 3.9. *Olgu S regulaarne (inversne) poolrühm, siis kategooria $\mathbb{D}(S)$ on regulaarne (inversne).*

Tõestus. Lause 3.8 põhjal on $C(S)$ regulaarne (inversne) kategooria. Järelduse 3.7 põhjal on kategooriad $C(S)$ ja $\mathbb{D}(S)$ ekvivalentsed. Lause 1.13 teise (kolmanda) punkti põhjal on $\mathbb{D}(S)$ regulaarne (inversne) kategooria. ■

Esitame nüüd Lawsoni teoreemi implikatsiooni $2 \Rightarrow 3$ tõestuse. Täienduseks näitame ära veel mõned omadused, mis kanduvad üle ühisele laiendile ning lõplike poolrühmade korral anname selle ühise laiendi elementide arvule ülemise tõkke. Teoreemi põhiosa tõestus tugineb artikli [11] teoreemi 3.13 tõestuse skeemile.

Teoreem 3.10. *Olgu S ja T lokaalsete ühikelementidega poolrühmad. Kui kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ on ekvivalentsed, siis poolrühmadel S ja T on olemas ühine laiend. Veel kehtivad järgmised väited.*

1. *Kui S ja T on regulaarsed (inverssed) poolrühmad, siis on neil olemas regulaarne (inversne) ühine laiend.*
2. *Kui S ja T on lõplikud poolrühmad, siis on neil olemas lõplik ühine laiend, milles on ülimalt $4n^3$ elementi, kus $n := \max\{|S|,|T|\}$.*

Tõestus. Üldisust kitsendamata olgu kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ lõikumatud. Teoreemi 1.8 põhjal leidub kahealuseline kategooria

$$\mathcal{C} := [C(S), C(T)].$$

Fikseerime $e_0 \in E(S)$, siis leidub isomorfism $h : e_0 \to f_0$, kus $f_0 \in E(T)$. Defineerime konsolidatsioonid α ja β vastavalt kategooriatel $C(S)$ ja $C(T)$ võrdustega

$$\alpha(e_1,e_2) := (e_2, e_2e_1, e_1) \quad \text{ja} \quad \beta(f_1,f_2) := (f_2, f_2f_1, f_1).$$

Olgu γ konsolidatsioonide α ja β loomulik laiend kategooriale $\mathcal{C}$ isomorfismi h kaudu. Defineerime kujutused

$$\pi'_S : C(S)^\gamma \to S, \quad (e_2, s, e_1) \mapsto s, \quad \text{ja} \quad \pi'_T : C(T)^\gamma \to T, \quad (f_2, t, f_1) \mapsto t.$$

Näitame, et π'_S on sürjektiivne homomorfism. Kujutuse π'_T korral on põhjendus analoogiline. Olgu morfismid $(e_2, s, e_1), (e'_2, s', e'_1) \in C(S)^\gamma$ fikseeritud. Võrduste $e'_2 s' e'_1 = s'$ ja $e_2 s e_1 = s$ põhjal

$$\begin{aligned}
\pi'_S((e'_2, s', e'_1) \circ (e_2, s, e_1)) &= \pi'_S((e'_2, s', e'_1)\alpha(e_2, e'_1)(e_2, s, e_1)) \\
&= \pi'_S((e'_2, s', e'_1)(e'_1, e'_1 e_2, e_2)(e_2, s, e_1)) \\
&= \pi'_S((e'_2, s' e'_1 e_2, e_2)(e_2, e_2 s, e_1)) \\
&= \pi'_S((e'_2, s' e'_1 e_2 s, e_1)) \\
&= \pi'_S((e'_2, (e'_2 s' e'_1 e'_1)(e_2 e_2 s e_1), e_1)) \\
&= \pi'_S((e'_2, (e'_2 s' e'_1)(e_2 s e_1), e_1)) \\
&= \pi'_S((e'_2, s' s, e_1)) \\
&= s' s \\
&= \pi'_S((e'_2, s', e'_1))\pi'_S((e_2, s, e_1)).
\end{aligned}$$

Kuna poolrühmal S on lokaalsed ühikelemendid, siis iga $s \in S$ korral leiduvad idempotendid $e_1, e_2 \in E(S)$ nii, et $s = e_2 s e_1$, seega $\pi'_S((e_2, s, e_1)) = s$ ehk π'_S on sürjektiivne. Olgu π_S ja π_T vastavalt homomorfismide π'_S ja π'_T tuumad. Olgu π hulga $\pi_S \cup \pi_T$ poolt tekitatud kongruents poolrühmal $\mathcal{C}^\gamma$. Kontrollime lause 2.25 tingimuste (i), (ii) ja (iii) täidetust kongruentsi π_S jaoks.

1. Olgu $(e_2, s, e_1)\pi_S(e'_2, s, e'_1)$. Kuna $e_2 s = s$, siis

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ (e_2, s, e_1) = h^{-1}\,\gamma(e_2, f_0)\,(e_2, s, e_1) &= h^{-1}\,\beta(f_0, f_0)\,h\,\alpha(e_2, e_0)\,(e_2, s, e_1) \\
&= \alpha(e_2, e_0)\,(e_2, s, e_1) \\
&= (e_0, e_0 e_2, e_2)\,(e_2, s, e_1) \\
&= (e_0, e_0 e_2 s, e_1) \\
&= (e_0, e_0 s, e_1).
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame $h^{-1} \circ (e'_2, s, e'_1) = (e_0, e_0 s, e'_1)$. Järelikult kehtib

$$\pi'_S((e_0, e_0 s, e_1)) = e_0 s = \pi'_S((e_0, e_0 s, e'_1))$$

ja seega $h^{-1} \circ (e_2, s, e_1)\,\pi_S\,h^{-1} \circ (e'_2, s, e'_1)$.

2. Olgu $(e_2, s, e_1)\pi_S(e'_2, s, e'_1)$. Võrduse $s e_1 = s$ põhjal

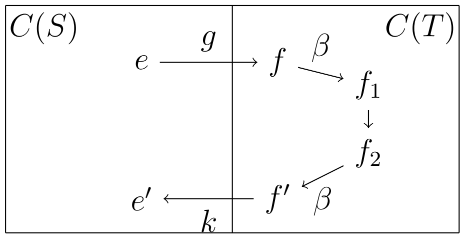
$$\begin{aligned}
(e_2, s, e_1) \circ h = (e_2, s, e_1)\,\gamma(f_0, e_1)\,h &= (e_2, s, e_1)\,\alpha(e_0, e_1)\,h^{-1}\,\beta(f_0, f_0)\,h \\
&= (e_2, s, e_1)\alpha(e_0, e_1) \\
&= (e_2, s, e_1)\,(e_1, e_1 e_0, e_0) \\
&= (e_2, s e_1 e_0, e_0) \\
&= (e_2, s e_0, e_0).
\end{aligned}$$

Kehtib ka $(e_2', s, e_1') \circ h = (e_2', se_0, e_0)$ ja seega $(e_2, s, e_1) \circ h \, \pi_S \, (e_2', s, e_1') \circ h$.

3. Olgu $(f_2, t, f_1) \, \pi_T \, (f_2', t, f_1')$. Olgu $g : e \to f$ ja $k : f' \to e'$ suvalised isomorfismid kategoorias $\mathcal{C}$, kus $e, e' \in E(S)$ ja $f, f' \in E(T)$. Siis

$$\begin{aligned} k \circ (f_2, t, f_1) \circ g &= k \, \gamma(f_2, f') \, (f_2, t, f_1) \, \gamma(f, f_1) \, g \\ &= k \, \beta(f_2, f') \, (f_2, t, f_1) \, \beta(f, f_1) \, g. \end{aligned}$$

Olukorda illustreerib järgmine diagramm



.

Leiame morfismi, mis jääb k ja g vahele:

$$\begin{aligned} \beta(f_2, f') \, (f_2, t, f_1) \, \beta(f, f_1) &= (f', f'f_2, f_2)(f_2, t, f_1)(f_1, f_1 f, f) \\ &= (f', f'f_2 t, f_1)(f_1, f_1 f, f) \\ &= (f', f'f_2 t f_1 f, f) \\ &= (f', f'tf, f). \end{aligned}$$

Nähtavasti ei sõltu tulemus $f_1, f_2 \in E(T)$ valikust. Refleksiivsuse tõttu kehtib

$$(k \circ (f_2, t, f_1) \circ g) \; \pi_S \; (k \circ (f_2', t, f_1') \circ g).$$

Lause 2.25 põhjal $\pi \cap (C(S)^\gamma \times C(S)^\gamma) = \pi_S$. Eelneva kontrolli saab analoogiliselt läbi viia kongruentsi π_T korral, seega lause 2.26 põhjal $\pi \cap (C(T)^\gamma \times C(T)^\gamma) = \pi_T$. Teoreemi 2.27 põhjal on $\mathcal{C}^\gamma / \pi$ poolrühmade S ja T ühine laiend.

Kui poolrühmad S ja T on regulaarsed (inverssed), siis lause 3.8 põhjal on kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ regulaarsed (inverssed). Teoreemi 2.27 põhjal on $\mathcal{C}^\gamma / \pi$ regulaarne (inversne) poolrühm.

Olgu S ja T lõplikud poolrühmad ja üldisust kitsendamata $m := |S| \leq |T| =: n$. Siis kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ on lõplikud. Kategooria $\mathcal{C}$ morfisme on nelja tüüpi.

1. Mistahes kahe idempotendi $e, f \in E(S)$ (võib ka olla $e = f$) korral vastab neile ülimalt m morfismi kategoorias $C(S)$, seega on kategoorias $C(S)$ ülimalt m^3 morfismi. Analoogiliselt on kategoorias $C(T)$ ülimalt n^3 morfismi.

2. Morfismide hulga $C(S)C(T)$ elemendid moodustatakse objektide $E(S), E(T)$ ja kategooria $C(T)$ morfismide abil. Fikseeritud objektide $e \in E(S)$ ja $f \in E(T)$ korral leidub ülimalt n morfismi $e \to f$. Lastes objektil f muutuda, on morfisme ülimalt n^2, seega kokku on selliseid morfisme ülimalt mn^2. Samamoodi on ka hulgas $C(T)C(S)$ ülimalt mn^2 morfismi.

Me ei oska hinnata, kuidas hulga $\mathcal{C}_1$ faktoriseerimisel kongruentsi π järgi muutub elementide arv. Küll aga ei saa neid olla rohkem kui esialgses poolrühmas. Samuti, võrdsusseose järgi faktoriseerides saame esialgse poolrühmaga isomorfse poolrühma. Ühises laiendis on ülimalt $4n^3$ elementi. ∎

Kui S ja T on regulaarsed poolrühmad, siis eeldusel, et nende poolrühmade Schützenberger' kategooriad on ekvivalentsed, saame järelduse 3.7 põhjal

$$C(S) \approx \mathbb{D}(S) \approx \mathbb{D}(T) \approx C(T).$$

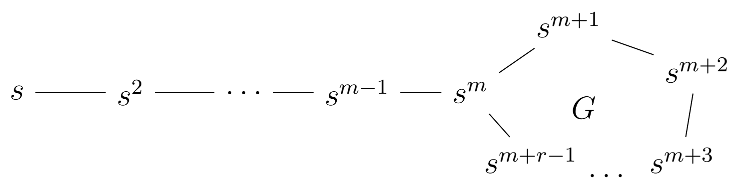
Seega regulaarsete poolrühmade Schützenberger' kategooriate ekvivalentsusest järeldub nende poolrühmade ühise laiendi olemasolu. Artikli [4] põhjal kehtib järgmine.

Teoreem 3.11 ([4] Järeldus 4.6). *Olgu S ja T lokaalsete ühikelementidega poolrühmad. Kui kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ on ekvivalentsed, siis ka kategooriad $\mathbb{D}(S)$ ja $\mathbb{D}(T)$ on ekvivalentsed.*

Järeldus 3.12. *Olgu S ja T regulaarsed poolrühmad. Kategooriad $C(S)$ ja $C(T)$ on ekvivalentsed parajasti siis, kui kategooriad $\mathbb{D}(S)$ ja $\mathbb{D}(T)$ on ekvivalentsed.*

Võib küsida, et milliste poolrühmade korral teoreemi 3.11 implikatsioon veel kehtib. Tuleb välja, et see ei kehti näiteks ei lõplikul ega kommutatiivsel juhul. Järgnev näide on raamatu [5] alajaotuse 1.2 põhjal.

Näide 3.13. Olgu $S = \langle s \rangle$ lõplik monogeenne poolrühm. Fikseeritud $x \in \mathbb{N}$ korral leidub lõplikuse tõttu $y \in \mathbb{N}$ nii, et $x \neq y$ ja $s^x = s^y$. Olgu m vähim sellise omadusega naturaalarv, mille kohta öeldakse poolrühma $\langle s \rangle$ **indeks**.
Kui iga $k \in \mathbb{N}$ korral $s^m = s^{m+k}$, siis öeldakse, et poolrühm $\langle s \rangle$ on **aperioodiline**. Alternatiivselt, leidub vähim naturaalarv $r > 1$, mille korral $s^m = s^{m+r}$, mille kohta öeldakse poolrühma $\langle s \rangle$ **periood**. Alamhulk $G := \{s^m, s^{m+1}, \ldots, s^{m+r-1}\}$ on tsükliline alamrühm, mis on isomorfne rühmaga $(\mathbb{Z}_r, +)$. Öeldakse, et see on poolrühma $\langle s \rangle$ **rühmaosa**. Paneme veel tähele, et G on poolrühma $\langle s \rangle$ ideaal.



Kui $\langle s \rangle$ ei ole rühm, siis rühmaossa mittekuuluvad elemendid $\{s, s^2, \ldots, s^{m-1}\}$ moodustavad poolrühma $\langle s \rangle$ **saba**. Kuna $\langle s \rangle$ on kommutatiivne poolrühm, siis $\mathscr{L} = \mathscr{R}$. Ühelt poolt $\mathscr{D} = \mathscr{L}\mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$. Alati kehtib $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$, seega praeguses olukorras $\mathscr{L} = \mathscr{R} = \mathscr{D}$. Niisiis moodustavad saba elemendid igaüks eraldi $\mathscr{D}$-klassi, sest nende tekitatud peaideaalid on erinevad.
Olgu S lõplik monogeenne poolrühm, mis ei ole rühm ja sisaldab mittetriviaalset alamrühma. Poolrühm S sisaldab täpselt ühte idempotenti e, see on rühma G ühikelement. Kõik morfismid kategoorias $C(S)$ on kujul (e, s, e), kus $s = ese$, millest järeldub, et

$s \in G$, sest G on ideaal. Seega $C(S) = C(G)$. Rühm G on parajasti üks $\mathscr{D}$-klass poolrühmas S. Saba elementidest tekib aga vähemalt üks $\mathscr{D}$-klass veel. Kategooriatel $\mathbb{D}(S)$ ja $\mathbb{D}(G)$ ei saa sellisel juhul olla isomorfseid toeseid, seega pole tegemist ekvivalentsete kategooriatega.

Ka implikatsioon

$$\mathbb{D}(S) \approx \mathbb{D}(T) \Rightarrow C(S) \approx C(T)$$

ei kehti ei lõplikul ega kommutatiivsel juhul. Järgnev näide samuti demonstreerib, et Schützenberger' kategooriate isomorfsusest ei järeldu vastavate poolrühmade isomorfsus.

Näide 3.14. Olgu $S := (\mathbb{Z}_2, \cdot)$ ja $T := \{t, 0\}$, kus $tt = t0 = 0t = 00 = 0$. Kategooriad $\mathbb{D}(S)$ ja $\mathbb{D}(T)$ (ilma ühikmorfismideta) näevad välja järgmiselt:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "{(1,0,0)}"] & 1 \arrow[l, bend left, "{(0,0,1)}"] \arrow[loop right, "{(1,0,1)}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "{(t,0,0)}"] & t \arrow[l, bend left, "{(0,0,t)}"] \arrow[loop right, "{(t,0,t)}"] \end{tikzcd}.$$

Mõlemas poolrühmas on kaks $\mathscr{D}$-klassi, kusjuures kategooriad $\mathbb{D}(S)$ ja $\mathbb{D}(T)$ on isomorfsed. Et nendel poolrühmadel on erinev arv idempotente, siis kategooriatel $C(S)$ ja $C(T)$ ei ole isomorfseid toeseid.

Teoreemi 3.11 vastupidise implikatsiooni kehtivus lokaalsete ühikelementidega juhul pole teada.

4 Poolrühmade (tugev) Morita ekvivalentsus

Morita ekvivalentsus poolrühmade korral defineeritakse nendele poolrühmadele vastavate teatava omadusega parempoolsete polügoonide alamkategooriate ekvivalentsuse kaudu. Sellist tingimust on üldiselt väga tülikas kontrollida. Oluliselt mugavam on opereerida nn Morita kontekstidega, mille abil defineeritakse tugev Morita ekvivalentsus.
Näitame, et faktoriseeruv poolrühm on tugevalt Morita ekvivalentne oma mistahes laiendiga. Täpsustuseks artikli [7] kirjeldusele anname kirjelduse fikseeritud monoidiga tugevalt Morita ekvivalentsetele poolrühmadele. Tõestame ka Lawsoni teoreemi implikatsiooni $3 \Rightarrow 4$ faktoriseeruvate poolrühmade korral.

Definitsioon 4.1. Olgu S poolrühm ja P mittetühi hulk. Öeldakse, et hulk P on **parempoolne S-polügoon**, kui on defineeritud kujutus $\cdot : P \times S \to P$ nii, et iga $p \in P$ ja $s, s' \in S$ korral

$$(p \cdot s) \cdot s' = p \cdot (ss').$$

Kujutust $\cdot$ nimetatakse poolrühma S **toimeks** hulgale P. Asjaolu, et P on parempoolne S-polügoon, rõhutatakse kirjutades P_S.

Kui S on monoid ühikelemendiga 1, siis nõutakse lisaks, et iga $p \in P$ korral

$$p \cdot 1 = p.$$

Analoogiliselt defineeritakse vasakpoolsed S-polügoonid. Kui kontekstist on selge, et tegemist on parempoolse (vasakpoolse) S-polügooniga, siis kirjutame harilikult P_S (${}_SP$) asemel lihtsalt P. Samuti kirjutame lühidalt $ps := p \cdot s$ ($sp := s \cdot p$).

Definitsioon 4.2. Olgu S ja T poolrühmad ning P mittetühi hulk. Öeldakse, et ${}_SP_T$ on (S,T)-**bipolügoon**, kui ta on vasakpoolne S-polügoon, parempoolne T-polügoon ja mistahes $p \in P, s \in S$ ja $t \in T$ korral

$$(sp)t = s(pt).$$

Iga poolrühm S on loomulikul viisil vaadeldav vasak- ja parempoolse S-polügoonina ja ka (S,S)-bipolügoonina.

Definitsioon 4.3. Olgu S poolrühm ning P_S ja Q_S parempoolsed S-polügoonid. Öeldakse, et kujutus $\varphi : P_S \to Q_S$ on S-**homomorfism**, kui iga $p \in P$ ja $s \in S$ korral

$$\varphi(ps) = \varphi(p)s.$$

Vasakpoolsel juhul defineeritakse S-homomorfismid analoogiliselt.

Definitsioon 4.4. Olgu S ja T poolrühmad ning ${}_SP_T$ ja ${}_SQ_T$ (S,T)-bipolügoonid. Öeldakse, et kujutus $\varphi : {}_SP_T \to {}_SQ_T$ on **bipolügoonide homomorfism**, kui iga $p \in P, s \in S$ ja $t \in T$ korral kehtivad võrdused

$$\varphi(sp) = s\varphi(p) \quad \text{ja} \quad \varphi(pt) = \varphi(p)t.$$

Olgu S poolrühm, P_S parempoolne S-polügoon ja $_SQ$ vasakpoolne S-polügoon. Olgu ρ^e ekvivalentsusseos hulgal $P \times Q$, mis on tekitatud järgmise hulga poolt:

$$\rho := \{((ps, q), (p, sq)) \mid p \in P, q \in Q, s \in S\}.$$

Tähistame faktorhulka $(P \times Q)/\rho^e =: P \otimes_S Q =: P \otimes Q$ ning vastavaid ekvivalentsiklasse kirjutisega $p \otimes q$, kusjuures $ps \otimes q = p \otimes sq, \quad p \in P, q \in Q, s \in S$.

Definitsioon 4.5. Öeldakse, et hulk $P \otimes Q$ on S-polügoonide P ja Q **tensorkorrutis**. Veel öeldakse, et ekvivalentsiklass $p \otimes q$ on elementide $p \in P$ ja $q \in Q$ **tensorkorrutis**.

Faktorhulgal defineeritud kujutuse korrektselt defineerituseks tuleb kontrollida, et tulemus ei sõltuks ekvivalentsiklassi esindaja valikust. Kasutame selleks järgmist kirjeldust.

Lemma 4.6 ([6] Lemma II.5.5). *Olgu P_S ja $_SQ$ S-polügoonid ja $P \otimes Q$ nende tensorkorrutis. Mistahes $p, p' \in P$ ja $q, q' \in Q$ korral kehtib $p \otimes q = p' \otimes q'$ parajasti siis, kui leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n \in S^1$, $p_1, \ldots, p_{n-1} \in P$ ja $q_1, \ldots, q_n \in Q$ nii, et*

$$\begin{aligned} pr_1 &= p_1 s_1 & r_1 q_1 &= q \\ p_1 r_2 &= p_2 s_2 & r_2 q_2 &= s_1 q_1 \\ p_2 r_3 &= p_3 s_3 & r_3 q_3 &= s_2 q_2 \\ &\ldots & &\ldots \\ p_{n-1} r_n &= p' s_n & r_n q_n &= s_{n-1} q_{n-1} \\ & & q' &= s_n q_n. \end{aligned}$$

Olgu P ja Q vastavalt (R, S)- ja (S, T)-bipolügoonid. Siis tensorkorrutis $P \otimes_S Q$ on (R, T)-bipolügoon loomulikul viisil defineeritud toimete suhtes:

$$r(p \otimes q) := rp \otimes q \quad \text{ja} \quad (p \otimes q)t := p \otimes qt, \quad p \in P, q \in Q, r \in R, t \in T.$$

Definitsioon 4.7. Öeldakse, et parempoolne (vasakpoolne) S-polügoon P_S ($_SP$) on **unitaarne**, kui kehtib võrdus $PS = P$ ($SP = P$). (S, T)-bipolügoon $_SP_T$ on **unitaarne**, kui kehtivad võrdused $SP = P$ ja $PT = P$.

Definitsioon 4.8. Öeldakse, et parempoolne S-polügoon P_S on **püsiv**, kui kujutus

$$\mu_P : P \otimes_S S \to P, \quad p \otimes s \mapsto ps,$$

on bijektiivne. Öeldakse, et poolrühm S on **püsiv**, kui S-polügoon S_S on püsiv.

Veendume, et see definitsioon on korrektne. Selleks näitame, et kujutus μ_P on korrektselt defineeritud. Olgu $p \otimes s = p' \otimes s'$, kus $p, p' \in P$, $s, s' \in S$. Lemma 4.6 põhjal leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ning $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n \in S^1$, $p_1, \ldots, p_{n-1} \in P$ ja $q_1, \ldots, q_n \in S$ sellised, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} pr_1 &= p_1 s_1 & r_1 q_1 &= s \\ p_1 r_2 &= p_2 s_2 & r_2 q_2 &= s_1 q_1 \\ p_2 r_3 &= p_3 s_3 & r_3 q_3 &= s_2 q_2 \\ \dots & & \dots & \\ p_{n-1} r_n &= p' s_n & r_n q_n &= s_{n-1} q_{n-1} \\ & & s' &= s_n q_n. \end{aligned}$$

Eelneva põhjal kehtib

$$\begin{aligned} \mu_P(p \otimes s) = ps = pr_1 q_1 = \; & p_1 s_1 q_1 \quad = p_1 r_2 q_2 \\ = \; \dots \; & = p_{n-1} r_n q_n = p' s_n q_n = p' s' = \mu_P(p' \otimes s'). \end{aligned} \tag{2}$$

Näide 4.9. Artikli [9] lause 2.4 põhjal on iga lokaalsete ühikelementidega (näiteks, regulaarne) poolrühm püsiv. Veelgi enam, selle lause põhjal piisab poolrühma S püsivuseks, kui iga $s \in S$ korral leiduvad $u, v \in S$ nii, et $us = s = sv$.

Püsivate (parempoolsete) S-polügoonide kategooriat koos nendevaheliste S-homomorfismidega tähistatakse kirjutisega FAct_S. Poolrühm on püsiv ainult siis, kui ta on faktoriseeruv. Vastupidine ei kehti (vt [9] näide 2.3).

Definitsioon 4.10. Öeldakse, et poolrühmad S ja T on **Morita ekvivalentsed**, kui kategooriad FAct_S ja FAct_T on ekvivalentsed.

Et Morita ekvivalentsus on defineeritud kategooriate ekvivalentsuse kaudu, siis on tegemist ekvivalentsusseosega kõigi poolrühmade klassil.

Definitsioon 4.11. Olgu S, T poolrühmad, ${}_SP_T$ ja ${}_TQ_S$ vastavalt (S,T)- ja (T,S)-bipolügoonid ning olgu

$$\theta : {}_S(P \otimes Q)_S \to {}_SS_S \quad \text{ja} \quad \phi : {}_T(Q \otimes P)_T \to {}_TT_T$$

bipolügoonide homomorfismid. Öeldakse, et kuuik $(S, T, {}_SP_T, {}_TQ_S, \theta, \phi)$ on **Morita kontekst**, kui iga $p, p' \in P$ ja $q, q' \in Q$ korral

$$\theta(p \otimes q)p' = p\phi(q \otimes p') \quad \text{ja} \quad q\theta(p \otimes q') = \phi(q \otimes p)q'.$$

Veel öeldakse, et Morita kontekst $(S, T, {}_SP_T, {}_TQ_S, \theta, \phi)$ on

(a) **unitaarne**, kui ${}_SP_T$ ja ${}_TQ_S$ on unitaarsed bipolügoonid;

(b) **sürjektiivne**, kui homomorfismid θ ja ϕ on sürjektiivsed.

Definitsioon 4.12. Öeldakse, et poolrühmad S ja T on **tugevalt Morita ekvivalentsed**, kui leidub unitaarne sürjektiivne Morita kontekst $(S, T, {}_SP_T, {}_TQ_S, \theta, \phi)$.

Tugev Morita ekvivalentsus on (faktoriseeruvate poolrühmade korral) nõrgem isomorfsusest. Artikli [7] teoreemi 3.16 põhjal on mistahes ristkülikpoolrühm tugevalt Morita ekvivalentne üheelemendilise poolrühmaga. Osutub, et tugevast Morita ekvivalentsusest on võimalik rääkida ainult faktoriseeruvate poolrühmade korral.

Lause 4.13 ([7] Lemma 3.7). *Olgu poolrühmad S ja T tugevalt Morita ekvivalentsed. Siis S ja T on faktoriseeruvad poolrühmad.*

Tõestus. Olgu $(S, T, {}_SP_T, {}_TQ_S, \theta, \phi)$ unitaarne sürjektiivne Morita kontekst. Näitame, et S on faktoriseeruv poolrühm. Poolrühma T faktoriseeruvus tõestatakse analoogiliselt. Olgu $s \in S$. Leidub $p \otimes q \in P \otimes Q$ nii, et $s = \theta(p \otimes q)$. Kuna ${}_SP$ on unitaarne, siis leiduvad $p' \in P$ ja $s' \in S$ nii, et $p = s'p'$, mille põhjal saame

$$s = \theta(p \otimes q) = \theta(s'p' \otimes q) = s'\theta(p' \otimes q).$$

Seega on S faktoriseeruv poolrühm. ■

Poolrühmade Morita teooria üks ülesanne on välja selgitada, milliste poolrühmade korral Morita ekvivalentsus ja tugev Morita ekvivalentsus ühtivad. Eelmise lause põhjal on faktoriseeruvate poolrühmade klass suurim võimalik. Lawsoni teoreemi kohaselt kehtib see ka nende poolrühmade korral, millel on lokaalsed ühikelemendid. Aastal 2018 on tõestatud järgmine teoreem.

Teoreem 4.14 ([10] Teoreem 4.11). *Faktoriseeruvad poolrühmad on tugevalt Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui nad on Morita ekvivalentsed.*

Muuhulgas on tugev Morita ekvivalentsus ekvivalentsusseos faktoriseeruvate poolrühmade klassil. See asjaolu on ka otse tõestatud artiklis [7].

Lawsoni teoreemi üldistamiseks faktoriseeruvale juhule on loomulik tingimuses 2 kaaluda kategooria $C(S)$ asendamist kategooriaga $\mathbb{D}(S)$ kuna me ei vaja viimase konstrueerimiseks idempotente.

Olgu S suvaline poolrühm ja $e, f \in E(S)$. Iga parempoolsete S-polügoonide homomorfism $\varphi : eS^1 \to fS^1$ on sisemorfism, sest kui $\varphi(e) = fs$, siis iga $x \in S^1$ korral

$$\varphi(ex) = \varphi(eex) = \varphi(e)ex = (fs)(ex).$$

Lisaks sellele on polügoon eS^1 püsiv, sest kujutus

$$\mu : eS^1 \otimes S \to eS^1, \;\; ex \otimes s \mapsto exs,$$

on bijektiivne. See tähendab, et (ekvivalentsi täpsuseni) võime kategooriat $C(S)$ vaadelda nii kategooria FAct_S täieliku alamkategooriana kui ka kategooria $\mathbb{I}(S)$ täieliku alamkategooriana. Osutub, et kategooria $\mathbb{D}(S)$ ei pruugi üldiselt olla ekvivalentne FAct_S täieliku alamkategooriaga.

Teoreemi 3.2 põhjal on kategooriad $\mathbb{D}(S)$ ja $\mathbb{I}(S)$ ekvivalentsed. Kas faktoriseeruva poolrühma peaideaalid on püsivad polügoonid? Järgnev kontranäide on tänu Ülo Reimaale.

Näide 4.15. Vaatleme poolrühma $S = \{0, a, b, c\}$, kus korrutamine on defineeritud järgmiselt:

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & a & b & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & a & a \\ b & 0 & a & b & c \\ c & 0 & a & b & c \end{array}.$$

Poolrühmal S on lokaalsed ühikelemendid. Näitame, et peaideaal $aS^1 = \{0, a\}$ ei ole püsiv polügoon. Vastav tensorkorrutis on järgmine:

$$aS^1 \otimes S = \{\{(0,0),(0,a),(0,b),(0,c),(a,0),(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(a,c)\}\}.$$

Paneme tähele, et

$$\mu_{aS^1}(a \otimes c) = ac = a = ab = \mu_{aS^1}(a \otimes b).$$

Teisalt, $a \otimes b \neq a \otimes c$, seega pole kujutus μ_{aS^1} injektiivne.

Automaatselt pole välistatud kategooria $\mathbb{D}(S)$ kasutatavus Morita ekvivalentsuse kirjeldamiseks faktoriseeruvate poolrühmade korral, kuid selle kategooria sobilikkus on eelneva kontranäite tõttu vähetõenäone.

Keskendume nüüd poolrühmade laienditele ning uurime nende seost Morita teooriaga faktoriseeruvate poolrühmade korral. Osutub, et faktoriseeruv poolrühm ja tema mistahes laiend on tugevalt Morita ekvivalentsed. Järgnev põhineb põgusal kommentaaril artikli [13] teise alajaotuse algusest.

Lause 4.16. *Olgu poolrühm T alampoolrühma S laiend. Kui S on faktoriseeruv poolrühm, siis S ja T on tugevalt Morita ekvivalentsed.*

Tõestus. Näitame, et leidub unitaarne sürjektiivne Morita kontekst, mis sisaldab poolrühmi S ja T. Vaatleme poolrühma T alampoolrühma ST kui (S,T)-bipolügooni ning alampoolrühma TS kui (T,S)-bipolügooni. Defineerime kujutused

$$\theta : ST \otimes_T TS \to S, \quad st \otimes t's' \mapsto stt's', \quad \text{ja}$$
$$\phi : TS \otimes_S ST \to T, \quad ts \otimes s't' \mapsto tss't'.$$

Kujutuste θ ja ϕ korrektselt defineerituses saame veenduda lemma 4.6 abil. Tõestused on tähistuste täpsuseni samad nagu kujutuse μ_P korral (vt (2)).

Kuna S ja T on faktoriseeruvad, siis bipolügoonid ST ja TS on unitaarsed. Näitame, et kujutus θ on sürjektiivne bipolügoonide homomorfism. Sama väide kujutuse ϕ korral tõestatakse analoogiliselt. Olgu $p \otimes q \in ST \otimes_T TS$ ja $s \in S$, siis

$$\begin{aligned} \theta(s(p \otimes q)) &= \theta(sp \otimes q) \\ &= s(pq) \\ &= s\theta(p \otimes q). \end{aligned} \quad \text{ja} \quad \begin{aligned} \theta((p \otimes q)s) &= \theta(p \otimes qs) \\ &= (pq)s \\ &= \theta(p \otimes q)s. \end{aligned}$$

Olgu $u \in S$. Kehtib võrdus $S = STS = (ST)(TS)$. Leiduvad $s, s' \in S$ ja $t, t' \in T$ nii, et $u = stt's'$ ja seega $u = \theta(st \otimes t's')$.

Näitame, et θ ja ϕ on kooskõlas. Olgu $p, p' \in ST$ ja $q, q' \in TS$, siis

$$\begin{aligned} \theta(p \otimes q)p' &= (pq)p' \\ &= p(qp') \\ &= p\phi(q \otimes p') \end{aligned} \quad \text{ja} \quad \begin{aligned} q\theta(p \otimes q') &= q(pq') \\ &= (qp)q' \\ &= \phi(q \otimes p)q'. \end{aligned}$$

Kuuik $(S, T, ST, TS, \theta, \phi)$ on unitaarne sürjektiivne Morita kontekst. ∎

Teineteisest sõltumatult andsid Knauer ja Banaschewski 1970ndatel kirjelduse Morita ekvivalentsetele monoididele, mis on muuhulgas esitatud ka monograafias [6]. Seal defineeritakse Morita ekvivalentsus monoidide M ja N vahel kategooriate Act_M ja Act_N ekvivalentsuse kaudu. Monoidi M korral $\mathsf{Act}_M = \mathsf{FAct}_M$, seega kaks monoidi on Morita ekvivalentsed monoiditeooria mõttes parajasti siis, kui nad on Morita ekvivalentsed poolrühmateooria mõttes.

Teoreem 4.17 ([6] Teoreem V.3.13). *Monoidide M ja N korral on järgmised väited samaväärsed.*

1. *Monoidid M ja N on Morita ekvivalentsed.*
2. *Leidub $e \in E(M)$ nii, et $MeM = M$ ja $eMe \cong N$.*

Kui $M = MeM$, siis lause 2.6 põhjal $eMe \preceq M$. Kuna eelnevas teoreemis esitatud väide on sümmeetriline, siis kaks monoidi on tugevalt Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui nad on (isomorfismi täpsuseni) teineteise laiendid. Lõplike monoidide korral taandub Morita ekvivalentsus isomorfsuseks.

Järeldus 4.18. *Olgu M ja N lõplikud monoidid. Kui M ja N on Morita ekvivalentsed, siis nad on isomorfsed monoidid.*

Tõestus. Olgu teoreemi 4.17 põhjal $e \in E(M)$ ja $e' \in E(N)$ sellised, et

$$eMe \cong N \quad \text{ja} \quad e'Ne' \cong M.$$

Olgu $\varphi : N \to eMe$ ja $\psi : M \to e'Ne'$ isomorfismid, siis on olukord järgmine:

$$N \xrightarrow{\varphi} eMe \xrightarrow{\iota_M} M \qquad M \xrightarrow{\psi} e'Ne' \xrightarrow{\iota_N} N,$$

kus homomorfismid ι_M ja ι_N on sisestused. Näeme, et hulkadena on M ja N isomorfsed. Lõplikuse tõttu on need sisestused samasusteisendused. Järelikult $M \cong N$. ■

Poolrühmade ja monoidide erinevust Morita teooria seisukohalt illustreerib näiteks asjaolu, et Morita ekvivalentsed poolrühmad ei tarvitse olla teineteise laiendid.

Näide 4.19. Nägime, et mistahes ristkülikpoolrühmad on tugevalt Morita ekvivalentsed. Tähistame n-elemendilist hulka sümboliga X_n. Siis saame vaadelda ristkülikpoolrühmi

$$X_2 \times X_2 \quad \text{ja} \quad X_1 \times X_3.$$

Kumbki pole (isomorfismi täpsuseni) teise alampoolrühm.

Artikli [7] teoreemist 3.9 inspireeritult uurime fikseeritud monoidiga tugevalt Morita ekvivalentseid poolrühmi. Eelnimetatud teoreemi saame täpsustada järgmiselt.

Teoreem 4.20. *Olgu M monoid. Järgmised väited on samaväärsed.*

1. *Monoid M on tugevalt Morita ekvivalentne poolrühmaga S.*
2. *Leidub $e \in E(S)$ nii, et $eSe \preceq S$ ning monoidid M ja eSe on isomorfsed.*

Tõestus. $(2 \Rightarrow 1)$. Olgu $e \in E(S)$, mille korral $eSe \preceq S$ ja $eSe \cong M$ monoididena. Kuna eSe on monoid, siis ta on faktoriseeruv ning lause 4.16 põhjal on S ja eSe tugevalt Morita ekvivalentsed. Järelikult on S ja M tugevalt Morita ekvivalentsed.
$(1 \Rightarrow 2)$. Realiseerigu ekvivalentsust Morita kontekst

$$(S, M, {}_SP_M, {}_MQ_S, \theta, \phi)\,.$$

Leidub $q_1 \otimes p_1 \in Q \otimes P$, mille korral $\phi(q_1 \otimes p_1) = 1$, kus 1 on monoidi M ühikelement. Tähistame $e := \theta(p_1 \otimes q_1) \in S$. Kuna P_M ja ${}_MQ$ on unitaarsed, siis iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral $p1 = p$ ja $1q = q$. Kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} ee = \theta(p_1 \otimes q_1)\theta(p_1 \otimes q_1) &= \theta\left(\theta(p_1 \otimes q_1)p_1 \otimes q_1\right) \\ &= \theta\left(p_1\phi(q_1 \otimes p_1) \otimes q_1\right) = \theta(p_1 1 \otimes q_1) = \theta(p_1 \otimes q_1) = e, \end{aligned}$$

st e on idempotent. Näitame, et kehtib võrdus $SeS = S$. Peame näitama, et $S \subseteq SeS$. Lause 4.13 põhjal on S faktoriseeruv. Olgu $s \in S$ fikseeritud ja olgu $s = s's''$, kus $s', s'' \in S$. Kehtigu võrdused

$$s' = \theta(p' \otimes q') \quad \text{ja} \quad s'' = \theta(p'' \otimes q'').$$

Eelneva põhjal saame

$$\begin{aligned} s = s's'' &= \theta(p' \otimes q')\theta(p'' \otimes q'') \\ &= \theta\left(p' \otimes q'\theta(p'' \otimes q'')\right) \\ &= \theta\left(p' \otimes \phi(q' \otimes p'')q''\right) \\ &= \theta\left(p' \otimes \phi(q' \otimes p'')1^2 q''\right) \\ &= \theta\left(p' \otimes \phi(q' \otimes p'')(\phi(q_1 \otimes p_1))^2 q''\right) \\ &= \theta\left(p' \otimes q'\theta(p'' \otimes (\phi(q_1 \otimes p_1))^2 q'')\right) \\ &= \theta\left(p' \otimes q'\theta(p'' \otimes \phi(q_1 \otimes p_1)q_1\theta(p_1 \otimes q''))\right) \\ &= \theta\left(p' \otimes q'\theta(p'' \otimes q_1\theta(p_1 \otimes q_1)\theta(p_1 \otimes q''))\right) \\ &= \theta(p' \otimes q')\theta(p'' \otimes q_1)\theta(p_1 \otimes q_1)\theta(p_1 \otimes q'') \in SeS. \end{aligned}$$

Lause 2.6 põhjal on poolrühm S lokaalse alammonoidi eSe laiend. Näitame, et eSe ja M on monoididena isomorfsed. Paneme tähele, et iga $s \in S$ korral

$$\begin{aligned} q_1 \otimes (ese)p_1 &= q_1 \otimes \theta(p_1 \otimes q_1)s\theta(p_1 \otimes q_1)p_1 \\ &= q_1\theta(p_1 \otimes q_1) \otimes s\theta(p_1 \otimes q_1)p_1 \\ &= \phi(q_1 \otimes p_1)q_1 \otimes sp_1\phi(q_1 \otimes p_1) \\ &= 1q_1 \otimes sp_1 1 \\ &= q_1 \otimes sp_1. \end{aligned}$$

Seega kujutus

$$\tau : eSe \to M, \quad ese \mapsto \phi(q_1 \otimes sp_1),$$

on korrektselt defineeritud.

Näitame, et τ on monoidide homomorfism. Olgu $s, s' \in S$, siis

$$\begin{aligned}\tau((ese)(es'e)) = \tau(e(ses')e) &= \phi(q_1 \otimes ses'p_1)\\ &= \phi(q_1 \otimes s\theta(p_1 \otimes q_1)s'p_1)\\ &= \phi(q_1 \otimes sp_1\phi(q_1 \otimes s'p_1))\\ &= \phi(q_1 \otimes sp_1)\phi(q_1 \otimes s'p_1)\\ &= \tau(ese)\tau(es'e).\end{aligned}$$

Ühikelemendi $e \in eSe$ korral

$$\begin{aligned}\tau(e) = \tau(eee) &= \phi(q_1 \otimes ep_1)\\ &= \phi(q_1 \otimes \theta(p_1 \otimes q_1)p_1)\\ &= \phi(q_1 \otimes p_1\phi(q_1 \otimes p_1))\\ &= \phi(q_1 \otimes p_1) = 1 \in M.\end{aligned}$$

Näitame, et τ on injektiivne. Olgu $s, s' \in S$ sellised, et $\phi(q_1 \otimes sp_1) = \phi(q_1 \otimes s'p_1)$. Siis saame ülalt alla järelduste ahela

$$\begin{aligned}p_1\phi(q_1 \otimes sp_1) &= p_1\phi(q_1 \otimes s'p_1)\\ \theta(p_1 \otimes q_1)sp_1 &= \theta(p_1 \otimes q_1)s'p_1\\ esp_1 &= es'p_1\\ esp_1 \otimes q_1 &= es'p_1 \otimes q_1\\ \theta(esp_1 \otimes q_1) &= \theta(es'p_1 \otimes q_1)\\ ese &= es'e\end{aligned}$$

st võrdusest $\tau(ese) = \tau(es'e)$ järeldub $ese = es'e$.
Näitame veel, et τ on sürjektiivne. Olgu $m \in M$, siis $m = \phi(q_m \otimes p_m)$. Tähistame

$$s := \theta(p_1 \otimes q_m)\theta(p_m \otimes q_1).$$

Kõigepealt näitame, et $ese = s$:

$$\begin{aligned}ese &= \theta(p_1 \otimes q_1)\theta(p_1 \otimes q_m)\theta(p_m \otimes q_1)\theta(p_1 \otimes q_1)\\ &= \theta(p_1 \otimes q_1\theta(p_1 \otimes q_m))\theta(\theta(p_m \otimes q_1)p_1 \otimes q_1)\\ &= \theta(p_1 \otimes \phi(q_1 \otimes p_1)q_m)\theta(p_m\phi(q_1 \otimes p_1) \otimes q_1)\\ &= \theta(p_1 \otimes 1q_m)\theta(p_m1 \otimes q_1)\\ &= \theta(p_1 \otimes q_m)\theta(p_m \otimes q_1) = s.\end{aligned}$$

Rakendades kujutust τ saame

$$\begin{aligned}\tau(s) = \tau(ese) = \phi(q_1 \otimes sp_1) &= \phi(q_1 \otimes \theta(p_1 \otimes q_m)\theta(p_m \otimes q_1)p_1)\\ &= \phi(q_1\theta(p_1 \otimes q_m) \otimes \theta(p_m \otimes q_1)p_1)\\ &= \phi(\phi(q_1 \otimes p_1)q_m \otimes p_m\phi(q_1 \otimes p_1))\\ &= \phi(q_m \otimes p_m) = m.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes on monoidid eSe ja M isomorfsed. ■

Niisiis on monoid endaga tugevalt Morita ekvivalentsete poolrühmade klassis võimsuse poolest vähim.

Järeldus 4.21. *Olgu poolrühm S ja monoid M tugevalt Morita ekvivalentsed. Siis $|M| \leq |S|$.*

Artikli [10] märkuses 5.10 on püstitatud järgmine küsimus. Kui R ja S on lõplikud faktoriseeruvad poolrühmad, mis on tugevalt Morita ekvivalentsed, siis mis suurusjärgus on vastavate bipolügoonide elementide arvud? Lause 4.16 ja teoreemi 3.10 põhjal saame anda mingi hinnangu. Kõigepealt märgime artikli [11] põhjal järgmist.

Lause 4.22 ([11] Lause 3.14). *Olgu R ja S lokaalsete ühikelementidega poolrühmad, millel on olemas ühine laiend T. Siis R ja S on tugevalt Morita ekvivalentsed, kusjuures vastav Morita kontekst esitub kujul*

$$(R, S, {}_RRTS_S, {}_SSTR_R, \theta, \phi)\,. \tag{3}$$

Lawsoni teoreemi põhjal on lokaalsete ühikelementidega poolrühmade S ja T tugev Morita ekvivalentsus samaväärne kategooriate $C(S)$ ja $C(T)$ ekvivalentsusega. Kuna Morita kontekstis (3) kasutatakse ühist laiendit T ning $RTS \subseteq T$ ja $STR \subseteq T$, siis teoreemi 3.10 põhjal saame vahetult järgmise.

Järeldus 4.23. *Olgu R ja S lokaalsete ühikelementidega lõplikud poolrühmad, mis on tugevalt Morita ekvivalentsed. Olgu $m := |R|$ ja $n := |S|$ ning $m \leq n$. Siis vastava Morita konteksti bipolügoonide elementide arv on ülimalt $4n^3$.*

Vastame nüüd küsimusele ka faktoriseeruval juhul.

Definitsioon 4.24. Öeldakse, et poolrühm S on **sändvitšpoolrühm**, kui kehtib võrdus $S = SES$, kus $E := E(S)$.

Artikli [10] järelduse 5.8 põhjal on kõik lõplikud poolrühmad sändvitšpoolrühmad.

Järeldus 4.25. *Olgu R ja S lõplikud faktoriseeruvad poolrühmad, mis on tugevalt Morita ekvivalentsed. Olgu $m := |R|$, $n := |S|$ ning $m \leq n$. Siis vastavas Morita kontekstis on kummagi bipolügooni elementide arv ülimalt $4mn^4$.*

Tõestus. Poolrühmad R ja S on sändvitšpoolrühmad. Tähistame

$$E := E(R) \quad \text{ja} \quad F := E(S).$$

Võrduse $RER = R$ tõttu $ERE \preceq R$. Lause 4.16 põhjal on R ja ERE tugevalt Morita ekvivalentsed. Analoogiliselt on ka poolrühmad S ja FSF tugevalt Morita ekvivalentsed. Siis ka ERE ja FSF on tugevalt Morita ekvivalentsed, seejuures on nendel poolrühmadel lokaalsed ühikelemendid. Paneme tähele, et

$$|ERE| \leq m \quad \text{ja} \quad |FSF| \leq n.$$

Järelduse 4.23 põhjal on nende poolrühmade ühises laiendis ülimalt $4n^3$ elementi.

Lause 4.16 põhjal on ekvivalentsust realiseeriva Morita konteksti bipolügoonide elementide arv ülalt tõkestatud laiendi elementide arvuga. Olukord on järgmine:

$$R \xrightarrow{m} ERE \xrightarrow{4n^3} FSF \xrightarrow{n} S, \tag{4}$$

kus kahe poolrühma vahele on märgitud vastava Morita konteksti bipolügoonide elementide arvu ülemine tõke.

Uurime, mis viisil muutub transitiivsust kasutades bipolügoonide elementide arv. Olgu A ja B ning B ja C tugevalt Morita ekvivalentsed poolrühmad. Olgu vastavad Morita kontekstid järgmised:

$$(A, B, {}_AM_B, {}_BN_A, \cdot, \cdot) \quad \text{ja} \quad (B, C, {}_BP_C, {}_CQ_B, \cdot, \cdot)\,,$$

kus hetkel homomorfismid pole olulised. Artiklis [7] lause 2.4 tõestuses transitiivsuse näitamiseks konstrueeritakse poolrühmadele A ja C Morita kontekst, mis näeb välja järgmine:

$$(A, C, {}_A(M \otimes_B P)_C, {}_C(Q \otimes_B N)_A, \cdot, \cdot)\,.$$

Tensorkorrutise elementide arvu saame ülalt hinnata otsekorrutise võimsusega. Tulles tagasi diagrammi (4) juurde saame seega poolrühmadele R ja S konstrueerida ekvivalentsust realiseeriva Morita konteksti, milles bipolügoonide elementide arv on ülimalt $4mn^4 \in \mathcal{O}(n^5)$. ∎

Lõpetuseks näitame, et Lawsoni teoreemis kehtib implikatsioon $3 \Rightarrow 4$ ka faktoriseeruvate poolrühmade korral. Artiklis [11] on seda tehtud lokaalsete ühikelementidega poolrühmade jaoks.

Teoreem 4.26. *Olgu poolrühm T faktoriseeruvate poolrühmade R' ja S' ühine laiend. Siis poolrühmad R' ja S' on tugevalt Morita ekvivalentsed.*

Tõestus. Leiduvad poolrühmad $R \leqslant T$ ja $S \leqslant T$ nii, et $R \preceq T$, $S \preceq T$ ning $R \cong R'$ ja $S \cong S'$. Isomorfsed (faktoriseeruvad) poolrühmad on tugevalt Morita ekvivalentsed. Lause 4.16 põhjal on poolrühmad T ja R ning T ja S tugevalt Morita ekvivalentsed. Tähistame ajutiselt tugevat Morita ekvivalentsust seosena sümboliga $\sim$, siis kehtib

$$R' \sim R \sim T \sim S \sim S'.$$

Transitiivsuse põhjal on poolrühmad R' ja S' tugevalt Morita ekvivalentsed. ∎

Kokkuvõte

Poolrühmade Morita ekvivalentsust on lokaalsete ühikelementidega juhul Lawson kirjeldanud nelja samaväärse tingimuse abil. Lawsoni teoreemi üldistamiseks faktoriseeruvale juhule on sammu teinud Laan ja Reimaa tõestades tingimuste 1 ja 4 samaväärsuse. Selles töös esitasime muuhulgas Lawsoni teoreemi implikatsiooni $2 \Rightarrow 3$ detailse tõestuse. Töö käigus jäid lahtisteks mitmed probleemid, mille uurimisega võiks tegeleda edaspidi.

1. Milliseid omadusi saame kirjeldada kategooriate puhul nii, et need kanduvad üle (mistahes) konsolidatsiooniga tekitatud poolrühmale?

Me teame, et kategooriate regulaarsus ja inverssus kanduvad, aga kas on veel selliseid?

2. Kas suvalise mittetühja poolrühma korral on võimalik talle konstrueerida (mingil loomulikul viisil) laiend?

Faktoriseeruva poolrühma korral oleme loomulikult huvitatud pärislaiendi olemasolust.

3. Kirjeldada poolrühma omadusi, mis on ka olemas selle poolrühma mingil laiendil. Millised omadused kanduvad üle ühisele laiendile, kui see eksisteerib?

4. Kirjeldada poolrühmad S, mille korral kategooriad $C(S)$ ja $\mathbb{D}(S)$ on ekvivalentsed.

Järelduse 3.7 põhjal teame, et regulaarsusest piisab. Kas regulaarsus on tarvilik?

5. Kas lokaalsete ühikelementidega poolrühma S korral kehtib

$$C(S) \approx C(T) \Leftrightarrow \mathbb{D}(S) \approx \mathbb{D}(T)?$$

Teoreemi 3.11 põhjal kehtib (mõnevõrra üllataval kombel) implikatsioon vasakult paremale. Regulaarsete poolrühmade korral kehtib implikatsioon mõlemas suunas.

Kasutatud kirjandus

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker, Abstract and Concrete Categories, *John Wiley and Sons,* New York, 1990;

http://katmat.math.uni-bremen.de/acc

[2] B. Pécsi, On Morita contexts in bicategories, *Appl. Categ. Struct.* **20**(4) (2012) 149-168.

[3] A. H. Clifford, G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, vol. II, *Amer. Math. Soc.,* Providence, RI, USA, 1967.

[4] A. Costa, B Steinberg, The Schützenberger category of a semigroup, *Semigroup Forum* **91** (2014) 543-559.

[5] J. M. Howie, Fundamentals of semigroup theory, *Clarendon Press, Oxford*, 1995.

[6] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, Monoids, Acts and Categories, *Walter de Gruytor*, Berlin, New York, 2000.

[7] V. Laan, Context equivalence of semigroups, *Period. Math. Hungar.* **60** (2010) 81-94.

[8] V. Laan, Kategooriateooria, loengukonspekt, 2016;

https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.037/2016_fall/uploads/Main/kat.pdf

[9] V. Laan, L. Márki, Ü. Reimaa, Morita equivalence of semigroups revisited: firm semigroups, *J. Algebra* **505** (2018) 247-270.

[10] V. Laan, Ü. Reimaa, Morita equivalence of factorizable semigroups, preprint, 2018.

[11] M. V. Lawson, Morita theory for semigroups with local units, *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011) 455-470.

[12] M. V. Lawson, L. Márki, Enlargements of regular semigroups, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **39** (1996) 425-460.

[13] M. V. Lawson, L. Márki, Enlargements and coverings by Rees matrix semigroups, *Monatsh. Math.* **129** (2000) 191-195.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Alvin Lepik,

1. anna Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) oma loodud teose *Poolrühmade laiendid ja Morita ekvivalentsus*, mille juhendaja on Valdis Laan, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Alvin Lepik
15.05.2019