Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Elery Teor

Polügoonide konservatiivne lamedus

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja : Valdis Laan

Tartu 2017

Polügoonide konservatiivne lamedus

Bakalaureusetöö

Elery Teor

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös vaadeldakse polügoone üle poolrühma S. Antakse üksikasjalik tõestus teoreemile, mille kohaselt järgmised väited püsivate parempoolsete polügoonide A_S kohta on samaväärsed: (i) A_S on konservatiivselt lame; (ii) A_S on konservatiivselt lame ja võrdsuslame; (iii) A_S rahuldab tingimust (P) ja (E); (iv) A_S rahuldab tingimust (BF). Töös esitatud tõestus toetub M. Kilbi, U. Knaueri ja A. V. Mikhalevi monograafias *Monoids, acts and categories* (Berlin, New York: Walter de Gruytor, 2000) esitatule üle monoidi. Antud tulemust üle poolrühmade pole varem tõestatud.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.
Märksõnad: Poolrühm, polügoon, tensorkorrutis, konservatiivne lamedus, võrdsuslamedus.

Characterization of pullback flat acts

Bachelor's thesis

Elery Teor

Abstract. In this bachelor's thesis we consider acts over a semigroup S. The objective is to present a detailed proof of a theorem stating the equivalence of the following assertions for any firm act A_S: (i) A_S is pullback flat; (ii) A_S is pullback flat and equalizer flat; (iii) A_S satisfies both Condition (P) and Condition (E); (iv) A_S satisfies Condition (BF). The exposition is based on the proof for acts over monoids presented in the monograph *Monoids, acts and categories* (Berlin, New York: Walter de Gruytor, 2000) by M. Kilp, U. Knauer and A. V. Mikhalev. The theorem over semigroups has never been proven before.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.
Keywords: Semigroup, act, tensor product, pullback flatness, equalizer flatness.

Sisukord

Sissejuhatus

Polügoone üle monoidi on uuritud aktiivselt alates 1970. aastate algusest. Monograafiast [3] võib leida põhjaliku ülevaate sellest, millised on olnud põhilised omadused, mida on uuritud, ning samuti ulatusliku kirjanduse loetelu selle valdkonna kohta.

Tähtsat kohta polügoonide teoorias on algusest peale omanud niinimetatud lamedusomadused. Need defineeritakse nõudes polügooniga tensorkorrutamise funktorilt teatud tüüpi diagrammide säilitamist. Näiteks parempoolset polügooni nimetatakse konservatiivselt lamedaks, kui temaga tensorkorrutamise funktor säilitab konservatiivsed ruudud. Bo Stenström oma artiklis [6] tõi sisse omaduse, mida hiljem hakati nimetama tugevaks lameduseks ja mis tähendab nii konservatiivsete ruutude kui võrdsustajate säilitamist. Ta näitas, et tugev lamedus on samaväärne teatud lihtsate tingimustega (P) ja (E). Sydney Bulman-Fleming [1] näitas hiljem, et tugev lamedus ja konservatiivne lamedus langevad kokku.

Polügoonidest üle poolrühma on teada üsna vähe. Neid on uuritud küll seoses poolrühmade Morita ekvivalentsusega, kuid nende lamedusomadusi pole uuritud. Siin võib olla takistuseks see, et üritades Stenströmi lähenemist vahetult üle kanda poolrühmade juhule, ei õnnestu näidata, et tugev lamedus on samaväärne tingimustega (P) ja (E). Käesolevas töös näitame, et lamedusest on võimalik mõistlikul viisil kõnelda siis, kui lisaks teatud diagrammide säilitamisele nõuda ka teatud loomuliku kujutuse bijektiivsust. Täpsemalt, me ütleme, et polügoon A_S üle poolrühma S on püsiv, kui kujutus $\mu_A : A \otimes_S S \to A,\ a \otimes s \mapsto as$, on bijektiivne. Lihtne on näha, et iga polügoon üle monoidi on püsiv, kuid poolrühmade korral see alati nii ei ole. Tuleb välja, et püsivus suudab üpris hästi asendada poolrühma ühikelemendi puudumist. Püsivaid polügoone on kasutatud näiteks artiklis [5] poolrühmade Morita ekvivalentsuse uurimisel.

Antud bakalaureusetöö eesmärk on anda konservatiivselt lamedate polügoonide kirjeldus tingimuste (P), (E) ja (BF) abil. Konservatiivse lameduse defineerime nõudes polügoonilt püsivust ja konservatiivsete ruutude säilitamist.

Bakalaureusetöö on jaotatud kolmeks peatükiks, millest esimene on sissejuhatav ning annab kõik vajalikud definitsioonid ning mõned tulemused, mida töös kasutatakse. Sõnastatakse ja tõestatakse seos unitaarsete polügoonide ning kujutuse μ_A sürjektiivsuse vahel.

Teises peatükis kirjeldatakse polügoone, mis rahuldavad tingimust (P). Tõestatakse, et mistahes polügooni A_S korral on samaväärsed väited, et polügoon A_S rahuldab tingimust (P) ja kui $a \otimes m = a' \otimes m'$ tensorkorrutises $A \otimes_S M$, siis saame leida paare (a, m) ja (a', m') ühendava skeemi pikkusega 1. Antakse konservatiivsete ruutude konstruktsioon vasakpoolsete S-polügoonide kategoorias. Tõestatakse, et püsivad polügoonid A_S rahuldavad tingimust (P) parajasti siis, kui kõigi teatud tüüpi konservatiivsete ruutude korral on teatud kanooniline kujutus φ sürjektiivne.

Kolmandas peatükis antakse võrdsustajate konstruktsioon vasakpoolsete S-polügoonide kategoorias, sõnastatakse seos konservatiivsete ruutude ning võrdsustajate säilitamise vahel. Tõestatakse, et iga võrdsuslame polügoon rahuldab tingimust (E) ning iga konservatiivselt lame polügoon rahuldab tingimust (P). Tõestatakse bakalaureusetöö põhitulemus, mis annab konservatiivselt lamedate polügoonide kirjelduse tingimuste (P) ja (E) abil. Tõestuses tuginetakse allikas [3] toodud teoreemile polügoonide kohta üle monoidi. Antud teoreemi polügoonide kohta üle poolrühma pole varem tõestatud. Lisaks tuuakse kaks näidet polügoonide konservatiivse lameduse kohta.

1 Põhimõisted

Selles peatükis esitatakse põhimõisted, mida edaspidi antud töös kasutatakse. Kõik definitsioonid ning tulemused on allikatest [2], [3] ja [4].

Definitsioon. Poolrühmaks nimetatakse mittetühja hulka, millel on defineeritud kahekohaline assotsiatiivne algebraline tehe, mida harilikult nimetatakse korrutamiseks. Poolrühma S elementide s, t korrutist tähistatakse sümboliga st.

Käesolevas tekstis tähistab S kõikjal poolrühma.

Definitsioon. Hulka A nimetatakse **parempoolseks polügooniks** üle poolrühma S (ehk parempoolseks S-polügooniks), kui mistahes $a \in A$ ja mistahes $s \in S$ korral on defineeritud korrutis $as \in A$ nii, et:

$$a(st) = (as)t$$

mistahes elementide $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral.
Parempoolset S-polügooni tähistatakse sümboliga A_S. Analoogiliselt defineeritakse vasakpoolsed polügoonid ${}_SA$ üle poolrühma S.

Iga poolrühma S saab loomulikul viisil vaadata nii parempoolse polügoonina S_S kui vasakpoolse polügoonina ${}_SS$.

Definitsioon. Kujutust $f : A_S \to B_S$ nimetatakse parempoolsete S-polügoonide **homomorfismiks** ehk S-**homomorfismiks**, kui

$$f(as) = f(a)s$$

mistahes $a \in A$ ja $s \in S$ korral. Kõikide selliste homomorfismide hulka tähistatakse: $\mathrm{Hom}(A_S, B_S)$.

Definitsioon. Olgu A_S ja ${}_SM$ polügoonid ja ϑ vähim ekvivalentsusseos hulgal $A \times M$, mis sisaldab kõik paarid $((as, m), (a, sm))$, $a \in A$, $m \in M$, $s \in S$.
Hulka $(A \times M)/\vartheta$ nimetatakse polügoonide A_S ja ${}_SM$ **tensorkorrutiseks** ja tähistatakse: $A \otimes_S M$. Tensorkorrutise $A \otimes_S M$ elementi $[(a, m)]_\vartheta$ tähistatakse $a \otimes m$ ja nimetatakse elementide $a \in A$ ja $m \in M$ **tensorkorrutiseks**.

Definitsiooni põhjal on selge, et mistahes $a \in A$, $m \in M$ ja $s \in S$ korral

$$as \otimes m = a \otimes sm.$$

Definitsioon. Olgu S poolrühm, olgu 1 mingi element, mis ei kuulu hulka S ja

$$S^1 = S \cup 1.$$

Defineerime hulgal S^1 korrutamise nii, et poolrühma S omavahelisi korrutisi ei muudeta,

$$1 \cdot 1 = 1,$$

$$1s = s1 = s$$

iga $s \in S$ korral. Ilmselt on S^1 monoid ühikelemendiga 1. Öeldakse, et monoid S^1 on saadud poolrühmast S **ühikelemendi välisel lisamisel**.

Saab näidata, et kehtib järgmine lemma.

Lemma 1. *Olgu A_S ja $_SM$ polügoonid. Siis*

$$a \otimes m = a' \otimes m',$$

$a, a' \in A$, $m, m' \in M$, parajasti siis, kui leidub $k \in \mathbb{N}$ ja elemendid $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k \in S^1$, $b_1, \ldots, b_k \in A$, $n_1, \ldots, n_{k-1} \in M$ nii, et

$$\begin{aligned} a &= b_1t_1 & t_1m &= s_1n_1 \\ b_1s_1 &= b_2t_2 & t_2n_1 &= s_2n_2 \\ b_2s_2 &= b_3t_3 & t_3n_2 &= s_3n_3 \\ &\ldots & &\ldots \\ b_{k-1}s_{k-1} &= b_kt_k & t_kn_{k-1} &= s_km' \\ b_ks_k &= a' & &. \end{aligned}$$

Definitsioon. Võrduste jada esitatuna lemmas 1 toodud kujul nimetatakse hulga $A \times M$ paare (a, m) ja (a', m') ühendavaks **skeemiks** pikkusega k.

Märkus. Kui $k = 1$, siis me loeme, et skeem on kujul

$$\begin{aligned} a &= b_1t_1 & t_1m &= s_1m' \\ b_1s_1 &= a' & &. \end{aligned}$$

Lause 1. *Olgu A_S polügoon. Siis on olemas kujutus $\mu_A : A \otimes_S S \to A$,*

$$\mu_A(a \otimes s) = as,$$

kus $a \in A$, $s \in S$.

Tõestus. Olgu $a \otimes s = a' \otimes s'$, $a, a' \in A$, $s, s' \in S$. Siis lemma 1 põhjal leiduvad $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k \in S^1$, $n_1, \ldots, n_{k-1} \in S$, $b_1, \ldots b_k \in A$ nii, et

$$\begin{aligned} a &= b_1t_1 & t_1s &= s_1n_1 \\ b_1s_1 &= b_2t_2 & t_2n_1 &= s_2n_2 \\ b_2s_2 &= b_3t_3 & t_3n_2 &= s_3n_3 \\ &\ldots & &\ldots \\ b_{k-1}s_{k-1} &= b_kt_k & t_kn_{k-1} &= s_ks' \\ b_ks_k &= a' & &. \end{aligned}$$

Siis aga

$$\begin{aligned} as &= (b_1t_1)s = b_1(t_1s) = b_1(s_1n_1) = (b_1s_1)n_1 = (b_2t_2)n_1 = b_2(t_2n_1) \\ &= \cdots = (b_kt_k)n_{k-1} = b_k(t_kn_{k-1}) = b_k(s_ks') = (b_ks_k)s' = a's'. \end{aligned}$$

Seega μ_A on korrektselt defineeritud kujutus. □

Definitsioon. Olgu A_S polügoon. Öeldakse, et A_S on **püsiv**, kui kujutus

$$\mu_A : A \otimes_S S \to A,\ a \otimes s \mapsto as,$$

on bijektiivne.
Analoogiliselt defineeritakse vasakpoolsed püsivad polügoonid ${}_SA$.

Definitsioon. Polügooni A_S nimetatakse **unitaarseks**, kui iga $a \in A$ korral leiduvad $a' \in A$ ja $s \in S$ nii, et $a = a's$.

Lemma 2. *Polügoon A_S on unitaarne parajasti siis, kui kujutus μ_A on sürjektiivne.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et A_S on unitaarne polügoon. Olgu $a \in A$. Siis leiduvad $a' \in A$ ja $s \in S$ nii, et $a = a's$. Seega $a = a's = \mu_A(a' \otimes s)$, järelikult μ_A on sürjektiivne.

Piisavus. Olgu A_S polügoon. Eeldame, et μ_A on sürjektiivne, s.t mistahes $a \in A$ korral leiduvad $a' \in A$ ja $s \in S$ nii, et $a = \mu_A(a' \otimes s) = a's$. Järelikult A_S on unitaarne. □

Definitsioon. Olgu $f : A_S \to A'_S$ ja $g : {}_SM \to {}_SM'$ S-homomorfismid. Kujutust $f \otimes g$, mis on defineeritud võrdusega

$$(f \otimes g)(a \otimes m) = f(a) \otimes g(m)$$

mistahes $a \in A$, $m \in M$ korral, nimetatakse **homomorfismide** f ja g **tensorkorrutiseks**.

Veendume eelmise definitsiooni korrektsuses.

Olgu $a \otimes m = a' \otimes m'$, $a, a' \in A$, $m, m' \in M$. Siis lemma 1 põhjal leiduvad $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_k \in S^1$, $n_1, \ldots, n_{k-1} \in M$, $b_1, \ldots b_k \in A$ nii, et

$$\begin{aligned} a &= b_1t_1 & t_1m &= s_1n_1 \\ b_1s_1 &= b_2t_2 & t_2n_1 &= s_2n_2 \\ b_2s_2 &= b_3t_3 & t_3n_2 &= s_3n_3 \\ &\cdots & &\cdots \\ b_{k-1}s_{k-1} &= b_kt_k & t_kn_{k-1} &= s_km' \\ b_ks_k &= a' & &. \end{aligned}$$

Kasutades seda, et f ja g on S-homomorfismid, saame, et kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b_1)t_1 & t_1g(m) &= s_1g(n_1) \\ f(b_1)s_1 &= f(b_2)t_2 & t_2g(n_1) &= s_2g(n_2) \\ f(b_2)s_2 &= f(b_3)t_3 & t_3g(n_2) &= s_3g(n_3) \\ &\dots & &\dots \\ f(b_{k-1})s_{k-1} &= f(b_k)t_k & t_kg(n_{k-1}) &= s_kg(m') \\ f(b_k)s_k &= f(a') & &, \end{aligned}$$

millest järeldub, et

$$\begin{aligned} f(a) \otimes g(m) &= f(b_1)t_1 \otimes g(m) = f(b_1) \otimes t_1g(m) = f(b_1) \otimes s_1g(n_1) \\ &= f(b_1)s_1 \otimes g(n_1) = f(b_2)t_2 \otimes g(n_1) = \cdots = f(b_k) \otimes s_kg(m') \\ &= f(b_k)s_k \otimes g(m') = f(a') \otimes g(m'). \end{aligned}$$

Seega $f \otimes g$ on korrektselt defineeritud kujutus.

Polügoonide konservatiivse lameduse ja võrdsuslameduse defineerimiseks toome sisse kategooria ning funktori mõisted.

Definitsioon. Kategooria $\mathcal{C}$ koosneb järgmistest asjadest:

1. klass $\mathcal{C}_0$, mille elemente kutsume selle kategooria objektideks;
2. iga objektipaari (A, B) jaoks on olemas hulk $\mathcal{C}(A, B)$, mille elemente nimetame **morfismideks** objektist A objekti B;
3. iga objektikolmiku (A, B, C) jaoks on olemas kujutus (**komponeerimine** ehk **korrutamine**)

   $$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C);$$

   paari (f, g) kujutist (morfismide f ja g **kompositsiooni** ehk **korrutist**) tähistame $g \circ f$ või lühidalt gf;
4. iga objekti A jaoks on olemas morfism $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$, mida kutsutakse objekti A **ühikmorfismiks**.

Need andmed peavad rahuldama järgmisi aksioome.

1. Kui $(A, B) \neq (A', B')$, siis $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \varnothing$.
2. **Assotsiatiivsuse aksioom:** mistahes morfismide $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, $h \in \mathcal{C}(C, D)$ korral kehtib võrdus

   $$h(gf) = (hg)f.$$

3. **Ühiku aksioom:** mistahes morfismide $f \in \mathcal{C}(A,B)$, $g \in \mathcal{C}(B,C)$ korral kehtivad võrdused $1_B f = f$ ja $g 1_B = g$.

Morfismi $f \in \mathcal{C}(A,B)$ tähistatakse $f : A \to B$; üheselt määratud objekti A kutsutakse morfismi f **lähteobjektiks** ning objekti B kutsutakse morfismi f **sihtobjektiks**.

Antud töös kasutame järgmisi kategooriaid:

- **Set** – objektideks on hulgad, morfismideks on kujutused;
- **Act**-S – objektideks on parempoolsed S-polügoonid, morfismideks on parempoolsete S-polügoonide homomorfismid;
- S-**Act** – objektideks on vasakpoolsed S-polügoonid, morfismideks on vasakpoolsete S-polügoonide homomorfismid.

Definitsioon. Kovariantne funktor F kategooriast $\mathcal{A}$ kategooriasse $\mathcal{B}$ koosneb

1. kujutusest $F_0 : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$ kategooriate $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ objektide klasside vahel; objekti $A \in \mathcal{A}_0$ kujutist tähistatakse $F(A)$;
2. $\mathcal{A}$ iga objektipaari (A, A') jaoks kujutusest $F_1^{A,A'} : \mathcal{A}(A,A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A'))$; morfismi $f \in \mathcal{A}(A,A')$ kujutist tähistatakse $F(f)$;

nii et on täidetud järgmised tingimused:

1. mistahes morfismide $f \in \mathcal{A}(A,A')$ ja $g \in \mathcal{A}(A',A'')$ korral
$$F(gf) = F(g)F(f);$$
2. iga objekti $A \in \mathcal{A}_0$ korral
$$F(1_A) = 1_{F(A)}.$$

Definitsioon. Kategooria $\mathcal{C}$ objektide A, B **kokorrutis** on kolmik (P, u_A, u_B), kus $P \in \mathcal{C}_0$ ja $u_A : A \to P$, $u_B : B \to P$ on kategooria $\mathcal{C}$ morfismid (mida nimetatakse **sisestusteks**), mis rahuldavad tingimust, et kui $Q \in \mathcal{C}_0$ on mistahes objekt ja $f : A \to Q$, $g : B \to Q$ on morfismid, siis leidub üheselt määratud morfism $m : P \to Q$ nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
& Q & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "u_A"'] & P \arrow[u, dashed, "m"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "u_B"]
\end{tikzcd}$$

kommuteerub.
Harilikult kirjutatakse P asemel $A \coprod B$.

Lihtne on veenduda, et kategoorias S-**Act** (**Set**) on kokorrutiseks polügoonide (hulkade) lõikumatu ühend.

Definitsioon. Olgu $f : B \to C$ ja $g : A \to C$ kaks morfismi kategoorias $\mathcal{C}$, millel on sama sihtobjekt. Morfismide f ja g **tagasitõmbaja** on kolmik (P, p_1, p_2), mis rahuldab tingimusi:

1. $p_1 : P \to B$ ja $p_2 : P \to A$ on morfismid kategoorias $\mathcal{C}$;
2. $fp_1 = gp_2$;
3. kui $q_1 : Q \to B$ ja $q_2 : Q \to A$ on sellised $\mathcal{C}$ morfismid, et $fq_1 = gq_2$, siis leidub üheselt määratud morfism $m : Q \to P$ nii, et $p_1 m = q_1$ ja $p_2 m = q_2$.

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "m"] \arrow[drr, "q_1"] \arrow[ddr, "q_2"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & B \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Ruutu eelmises diagrammis nimetatakse **konservatiivseks ruuduks**. Lühidalt kirjutatakse $(P, p_1, p_2) \approx \mathrm{Pb}(f, g)$.

Lemma 3 (vt [3, lk. 115])**.** *Kahe morfismi tagasitõmbaja, kui ta leidub, on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.*

Definitsioon. Olgu A_S parempoolne püsiv S-polügoon. Leidub polügooniga A_S **tensorkorrutamise funktor** $A_S \otimes - : S - \mathbf{Act} \to \mathbf{Set}$, mis on defineeritud võrdustega

$$(A_S \otimes -)({}_S M) := A \otimes_S M,$$

$$(A_S \otimes -)(f) := 1_A \otimes f$$

iga vasakpoolse S-polügooni ${}_S M$ ja iga vasakpoolsete S-polügoonide homomorfismi f korral.

Öeldakse, et funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ säilitab konservatiised ruudud, kui sellest, et

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

on konservatiivne ruut kategoorias $\mathcal{A}$ järeldub, et

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[r, "F(p_1)"] \arrow[d, "F(p_2)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(A) \arrow[r, "F(g)"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

on konservatiivne ruut kategoorias $\mathcal{B}$.

Definitsioon. Parempoolset polügooni A_S nimetame **konservatiivselt lamedaks**, kui ta on püsiv ja funktor $A_S \otimes - : S - \mathbf{Act} \to \mathbf{Set}$ säilitab konservatiivsed ruudud.

Definitsioon. Olgu $f, g : A \to B$ morfismid kategoorias $\mathcal{C}$. Morfismide f ja g **võrdsustaja** on paar (E, e), mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $e : E \to A$ on morfism kategoorias $\mathcal{C}$;

2. $fe = ge$;

3. iga $\mathcal{C}$ morfismi $e' : E' \to A$ korral, mis rahuldab tingimust $fe' = ge'$, leidub üheselt määratud morfism $k : E' \to E$ nii, et $ek = e'$.

Lühidalt kirjutatakse $(E, e) \approx \mathrm{Eq}(f, g)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "e"] & & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & E' \arrow[ul, dashed, "k"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Lemma 4 (vt [4, lk. 33]). *Kahe morfismi võrdsustaja, kui ta leidub, on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.*

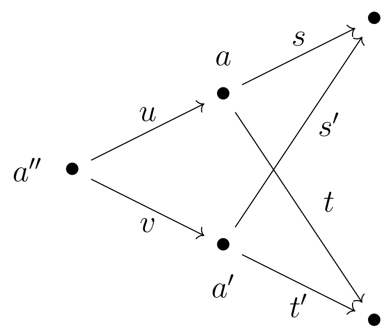
Analoogiliselt konservatiivsete ruutude säilitamisega saab defineerida võrdsustajate säilitamise.

Definitsioon. Parempoolset polügooni A_S nimetatakse **võrdsuslamedaks**, kui ta on püsiv ja funktor $A_S \otimes - : S - \mathbf{Act} \to \mathbf{Set}$ säilitab võrdsustajad.

Toome sisse veel kolm polügoonide kohta käivat tingimust.

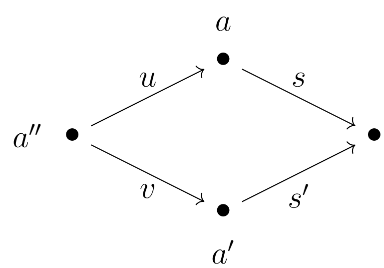
Tingimus (BF): Kui $as = a's'$ ja $at = a't'$, $a, a' \in A$, $s, s', t, t' \in S$, siis leiduvad $a'' \in A$, $u, v \in S$ nii, et

$$a = a''u,\ a' = a''v,\ us = vs',\ ut = vt'.$$



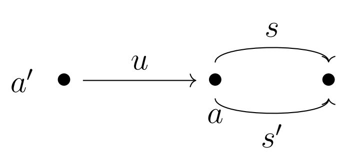
Tingimus (P): Kui $as = a's'$, $a, a' \in A$, $s, s' \in S$, siis leiduvad $a'' \in A$, $u, v \in S$ nii, et

$$a = a''u,\ a' = a''v,\ us = vs'.$$



Tingimus (E): Kui $as = as'$, $a \in A$, $s, s' \in S$, siis leiduvad $a' \in A$, $u \in S$ nii, et

$$a = a'u,\ us = us'.$$



2 Polügoonid, mis rahuldavad tingimust (P)

Antud peatükis tõestatakse mitu tulemust polügoonide kohta, mis rahuldavad tingimust (P). Lisaks antakse konservatiivsete ruutude konstruktsioon kategoorias S-**Act** ning defineeritakse teatud kanooniline kujutus φ.

Lause 2. *Mistahes püsiva polügooni A_S korral on järgmised väited samaväärsed:*

(i) *A_S rahuldab tingimust (P).*

(ii) *Mistahes vasakpoolsete polügoonide ${}_SM$ ja elementide $a, a' \in A$, $m, m' \in M$ korral, kui $a \otimes m = a' \otimes m'$ tensorkorrutises $A \otimes_S M$, siis leiduvad $a'' \in A$ ja $u, v \in S$ nii, et $a = a''u$, $a' = a''v$, $um = vm'$.*

Tõestus. (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu A_S ja ${}_SM$ polügoonid. Eeldame, et A_S rahuldab tingimust (P), oletame, et $a \otimes m = a' \otimes m'$. Siis lemma 1 põhjal

$$\begin{aligned} a &= b_1t_1 & t_1m &= s_1n_1 \\ b_1s_1 &= b_2t_2 & t_2n_1 &= s_2n_2 \\ b_2s_2 &= b_3t_3 & t_3n_2 &= s_3n_3 \\ &\dots & &\dots \\ b_{k-1}s_{k-1} &= b_kt_k & t_kn_{k-1} &= s_km' \\ b_ks_k &= a' \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k \in S^1$, $b_1, \dots, b_k \in A$, $n_1, \dots, n_{k-1} \in M$.

Oletame, et $k \geq 2$. Näitame, et siis leidub paare (a, m) ja (a', m') ühendav skeem pikkusega $k - 1$. Kuna $b_1s_1 = b_2t_2$ ja A_S rahuldab tingimust (P), siis leiduvad $c \in A$, $u', v' \in S$ nii, et $b_1 = cu'$, $b_2 = cv'$ ja $u's_1 = v't_2$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} (u't_1)m &= u'(t_1m) = u'(s_1n_1) = (u's_1)n_1 \\ &= (v't_2)n_1 = v'(t_2n_1) = v'(s_2n_2) = (v's_2)n_2 \end{aligned}$$

ja

$$c(v's_2) = (cv')s_2 = b_2s_2 = b_3t_3.$$

Seega

$$\begin{aligned} a &= c(u't_1) & (u't_1)m &= (v's_2)n_2 \\ c(v's_2) &= b_3t_3 & t_3n_2 &= s_3n_3 \\ &\dots & &\dots \\ b_{k-1}s_{k-1} &= b_kt_k & t_kn_{k-1} &= s_km' \\ b_ks_k &= a' \end{aligned}$$

kus hulga $A \times M$ paare (a, m) ja (a', m') ühendav skeem on pikkusega $k-1$. Samamoodi jätkates jõuame olukorrani, kus skeem

$$\begin{array}{ll} a = a''u & um = vm' \\ a''v = a' & \end{array}$$

on pikkusega $k = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Olgu $as = a's'$. Siis μ_A definitsiooni kohaselt $\mu_A(a \otimes s) = \mu_A(a' \otimes s')$. Kuna μ_A on injektiivne, siis $a \otimes s = a' \otimes s'$ tenorkorrutises $A \otimes_S S$. Eelduse põhjal leiduvad $a'' \in A$, $u, v \in S$ nii, et

$$a = a'u, \quad a' = a''v, \quad us = vs'.$$

$\square$

Lause 3. *Kategoorias S-**Act** on mistahes morfismidel $f : {}_SM \to {}_SQ$ ja $g : {}_SN \to {}_SQ$ olemas tagasitõmbaja.*

Tõestus. Vaatame diagrammi

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & {}_SM \arrow[d, "f"] \\ {}_SN \arrow[r, "g"'] & {}_SQ, \end{tikzcd}$$

kus

$$P := \{(m, n) \in M \times N \mid f(m) = g(n)\} \subseteq M \times N$$

ja

$$p_1 : P \to {}_SM,\ (m, n) \mapsto m,$$
$$p_2 : P \to {}_SN,\ (m, n) \mapsto n$$

on projektsioonide ahendid. On selge, et see diagramm on kommutatiivne.

Oletame, et $P = \varnothing$. Siis $p_1 : \varnothing \to {}_SM$ ja $p_2 : \varnothing \to {}_SN$. Kuna

$$p_1 \subseteq \varnothing \times {}_SM = \varnothing,$$

$$p_2 \subseteq \varnothing \times {}_SN = \varnothing$$

ja tühja hulga ainuke alamhulk on tühi hulk, siis $p_1 = \varnothing$ ja $p_2 = \varnothing$. Saame kommutatiivse diagrammi

$$\begin{tikzcd} \varnothing \arrow[r, "\varnothing"] \arrow[d, "\varnothing"'] & {}_SM \arrow[d, "f"] \\ {}_SN \arrow[r, "g"'] & {}_SQ. \end{tikzcd}$$

Eeldame, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[drr, "q_1"] \arrow[ddr, "q_2"'] & & \\
& \varnothing \arrow[r, "\varnothing"'] \arrow[d, "\varnothing"] & {}_S M \arrow[d, "f"] \\
& {}_S N \arrow[r, "g"'] & {}_S Q
\end{tikzcd}$$

on kommutatiivne. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $a \in R$. Siis $f(q_1(a)) = g(q_2(a))$, millest järeldub, et $(q_1(a), q_2(a)) \in P$. See on vastuolus eeldusega, et P on tühi hulk. Seega $R = \varnothing$, $q_1 = \varnothing$, $q_2 = \varnothing$ ja tühi kujutus $R \to \varnothing$ on üheselt määratud homomorfism, mis muudab kolmnurgad kommutatiivseks. Saime, et (P, p_1, p_2) on morfismide f ja g tagasitõmbaja.

Oletame nüüd, et $P \neq \varnothing$. Olgu $q_1 : R \to {}_S M$ ja $q_2 : R \to {}_S N$ sellised morfismid, et $fq_1 = gq_2$, siis $(q_1(r), q_2(r)) \in P$ iga $r \in R$ korral. Seega leidub üheselt määratud homomorfism $m : R \to P$,

$$m(r) = (q_1(r), q_2(r)),$$

nii, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[drr, "q_1"] \arrow[ddr, "q_2"'] \arrow[dr, "m"] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & {}_S M \arrow[d, "f"] \\
& {}_S N \arrow[r, "g"'] & {}_S Q
\end{tikzcd}$$

on kommutatiivne. Saime, et (P, p_1, p_2) on morfismide f ja g tagasitõmbaja. $\square$

Märkus. Analoogiliselt saab konstrueerida mistahes morfismide $f : {}_S M \to {}_S Q$ ja $g : {}_S N \to {}_S Q$ tagasitõmbaja kategoorias **Set**.

Olgu $f : {}_S M \to {}_S Q$ ja $g : {}_S N \to {}_S Q$ sellised homomorfismid kategoorias S-**Act**, et

$${}_S P = \{(m, n) \in M \times N \mid f(m) = g(n)\} \neq \varnothing.$$

Siis lause 3 põhjal diagramm

$$\begin{tikzcd} {}_S P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & {}_S M \arrow[d, "f"] \\ {}_S N \arrow[r, "g"'] & {}_S Q, \end{tikzcd} \tag{P1}$$

kus p_1, p_2 on projektsioonide ahendid, on konservatiivne ruut.

Olgu A_S mittetühi püsiv polügoon. Tensorkorrutades diagrammi (P1), saame kommutatiivse diagrammi

$$\begin{tikzcd} A \otimes_S P \arrow[r, "1_A \otimes p_1"] \arrow[d, "1_A \otimes p_2"'] & A \otimes_S M \arrow[d, "1_A \otimes f"] \\ A \otimes_S N \arrow[r, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S Q. \end{tikzcd}$$

Analoogiliselt lausega 3, saame kategoorias **Set** konstrueerida morfismide $1_A \otimes f$ ja $1_A \otimes g$ tagasitõmbaja kui kolmiku (P', p_1', p_2'), kus

$$P' = \{(a \otimes m, a' \otimes n) \in (A \otimes_S M) \times (A \otimes_S N) \,|\, (1_A \otimes f)(a \otimes m) = (1_A \otimes g)(a' \otimes n)\}$$

ja p_1', p_2' on projektsioonide ahendid. Homomorfismide tensorkorrutise definitsiooni põhjal

$$(1_A \otimes f)(a \otimes m) = 1_A(a) \otimes f(m) = a \otimes f(m)$$

ja

$$(1_A \otimes g)(a' \otimes n) = 1_A(a') \otimes g(n) = a' \otimes g(n)$$

seega

$$P' = \{(a \otimes m, a' \otimes n) \in (A \otimes_S M) \times (A \otimes_S N) \,|\, a \otimes f(m) = a' \otimes g(n)\}.$$

Paneme tähele, et kuna $A \neq \varnothing$ ja $P \neq \varnothing$, siis ka $P' \neq \varnothing$.

Tagasitõmbaja definitsiooni põhjal saame, et leidub üheselt määratud morfism $\varphi : A \otimes_S P \to P'$ nii, et $p_2'\varphi = 1_A \otimes p_2$ ja $p_1'\varphi = 1_A \otimes p_1$ ning järgnev diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_S P \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "1_A \otimes p_1"] \arrow[ddr, "1_A \otimes p_2"'] & & \\
& P' \arrow[r, "p'_1"'] \arrow[d, "p'_2"] & A \otimes_S M \arrow[d, "1_A \otimes f"] \\
& A \otimes_S N \arrow[r, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S Q.
\end{tikzcd} \qquad \text{(P2)}$$

Lemma 5. *Kujutus φ diagrammis (P2) on defineeritud võrdusega*

$$\varphi(a \otimes (m,n)) = (a \otimes m, a \otimes n)$$

iga $a \in A$ ja $(m,n) \in P$ korral.

Tõestus. Olgu $\varphi(a \otimes (m,n)) = (a' \otimes m', a'' \otimes n')$, kus $a', a'' \in A$, $m' \in M$, $n' \in N$. Võrdusest $p'_1\varphi = 1_A \otimes p_1$ saame, et

$$a' \otimes m' = p'_1(\varphi(a \otimes (m,n))) = (p'_1\varphi)(a \otimes (m,n)) = (1_A \otimes p_1)(a \otimes (m,n)) = a \otimes m.$$

Analoogiliselt $a'' \otimes n' = a \otimes n$. Seega $\varphi(a \otimes (m,n)) = (a \otimes m, a \otimes n)$. □

Teoreem 1. *Mittetühi püsiv polügoon A_S rahuldab tingimust (P) parajasti siis, kui iga konservatiivse ruudu (P1) korral kategoorias S-**Act** on kujutus φ diagrammilt (P2) sürjektiivne.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et mittetühi püsiv polügoon A_S rahuldab tingimust (P). Olgu (P1) konservatiivne ruut kategoorias S-**Act**. Peame näitama, et kujutus φ joonisel (P2) on sürjektiivne. Olgu $(a \otimes m, a' \otimes n) \in P'$ suvaline. Hulga P' definitsiooni järgi

$$a \otimes f(m) = a' \otimes g(n)$$

tensorkorrutises $A \otimes_S Q$. Kuna A_S rahuldab tingimust (P), siis lause 2 põhjal leiduvad sellised $a'' \in A$, $u, v \in S$, et $a = a''u$, $a' = a''v$ ja $uf(m) = vg(n)$. Kuna f ja g on vasakpoolsete polügoonide homomorfismid, siis $f(um) = g(vn)$, seega $(um, vn) \in P$. Kasutades lemmat 5 saame, et

$$\varphi(a'' \otimes (um, vn)) = (a'' \otimes um, a'' \otimes vn) = (a''u \otimes m, a''v \otimes n) = (a \otimes m, a' \otimes n).$$

Järelikult φ on sürjektiivne.

Piisavus. Olgu $as = a's'$, kus $a, a' \in A$, $s, s' \in S$. Vaatleme diagrammi (P1), kus ${}_SM = {}_SN = {}_SQ = {}_SS$,

$$f(x) = xs,$$

$$g(x) = xs'$$

iga $x \in S$ korral. Lihtne on veenduda, et nii defineeritud kujutused $f, g : {}_SS \to {}_SS$ on vasakpoolsete polügoonide homomorfismid. Eelduse kohaselt on kujutus φ diagrammi

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_S P \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "1_A \otimes p_1"] \arrow[ddr, "1_A \otimes p_2"'] & & \\
& P' \arrow[r, "p_1'"'] \arrow[d, "p_2'"] & A \otimes_S S \arrow[d, "1_A \otimes f"] \\
& A \otimes_S S \arrow[r, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S S
\end{tikzcd}$$

korral sürjektiivne. Kuna A_S on eelduse kohaselt püsiv, siis lemmast 2 järeldub, et A_S on unitaarne. Seega leiduvad $a_1, a_1' \in A$, $r, r' \in S$ nii, et $a = a_1 r$ ja $a' = a_1' r'$. Eelduse kohaselt $(a_1 r)s = (a_1' r')s'$ ehk $a_1(rs) = a_1'(r's')$. Kujutuste f ja g definitsiooni põhjal $a_1 f(r) = a_1' g(r')$, seega kujutuse μ_A definitsiooni kohaselt $\mu_A(a_1 \otimes f(r)) = \mu_A(a_1' \otimes g(r'))$ ning μ_A injektiivsuse põhjal $a_1 \otimes f(r) = a_1' \otimes g(r')$. Järelikult $(a_1 \otimes r, a_1' \otimes r') \in P'$. Kuna φ on sürjektiivne, siis leidub $a'' \otimes (u, v) \in A \otimes_S P$ nii, et

$$\varphi(a'' \otimes (u, v)) = (a_1 \otimes r, a_1' \otimes r').$$

Lemma 5 põhjal saame, et $a'' \otimes u = a_1 \otimes r$ ja $a'' \otimes v = a_1' \otimes r'$ tensorkorrutises $A \otimes_S S$. Siit järeldub, et $a''u = a_1 r = a$ ja $a''v = a_1' r' = a'$. Veelgi enam, kuna $(u, v) \in P$, siis $f(u) = g(v)$ ehk $us = vs'$. Saime, et A_S rahuldab tingimust (P). $\square$

3 Konservatiivselt lamedad polügoonid

Käesolevas peatükis tõestatakse antud bakalaureusetöö põhitulemus – teoreem 2. Enne seda sõnastatakse seos konservatiivsete ruutude ning võrdsustajate säilitamise vahel ning tõestatakse mitu tulemust antud töös käsitletavate lamedusomaduste seosest tingimustega (P) ja (E).

Lause 4 (vt [4, lk. 47])**.** *Olgu $\mathcal{A}$ lõplike korrutistega kategooria. Kui funktor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ säilitab tagasitõmbajad, siis ta säilitab ka võrdsustajad.*

Järgmine lause tõestatakse analoogiliselt lause 3 tõestusega.

Lause 5. *Kategoorias S-**Act** on mistahes morfismidel $f, g : {}_SX \to {}_SY$ olemas võrdsustaja.*

Lause 6. *Iga võrdsuslame polügoon rahuldab tingimust (E).*

Tõestus. Olgu A_S võrdsuslame polügoon. Eeldame, et $as = as'$, kus $a \in A$, $s, s' \in S$. Defineerime kujutused $f, g : {}_SS \to {}_SS$ nii, et

$$f(x) = xs$$

ja

$$g(x) = xs'.$$

Olgu

$$E := \{x \in S \mid f(x) = g(x)\} = \{x \in S \mid xs = xs'\} \subseteq S$$

ja $\iota : E \hookrightarrow S$ on sisestus. Siis lause 5 kohaselt diagramm

$$\begin{tikzcd} {}_SE \arrow[r, hook, "\iota"] & {}_SS \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & {}_SS \end{tikzcd}$$

on võrdsustaja.

Kuna A_S on võrdsuslame, siis tensorkorrutades eelmist diagrammi, saame võrdsustaja

$$\begin{tikzcd} A \otimes_S E \arrow[r, hook, "1_A \otimes \iota"] & A \otimes_S S \arrow[r, shift left, "1_A \otimes f"] \arrow[r, shift right, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S S \end{tikzcd}$$

kategoorias **Set**.

Morfismide $1_A \otimes f$ ja $1_A \otimes g$ kanooniline võrdsustaja on paar (E', ι'), kus

$$\begin{aligned} E' : &= \{a \otimes y \in (A \otimes_S S) \mid (1_A \otimes f)(a \otimes y) = (1_A \otimes g)(a \otimes y)\} \\ &= \{a \otimes y \in (A \otimes_S S) \mid a \otimes ys = a \otimes ys')\} \end{aligned}$$

ja $\iota' : E' \to A \otimes_S S$ on sisestus. Saame, et diagramm

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, hook, "\iota'"] & A \otimes_S S \arrow[r, shift left, "1_A \otimes f"] \arrow[r, shift right, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S S \end{tikzcd}$$

on võrdsustaja kategoorias **Set**.

Võrdsustaja definitsiooni põhjal leidub üheselt määrtatud morfism $\psi : A \otimes_S E \to E'$ nii, et $\iota'\psi = 1_A \otimes \iota$ ja järgnev diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[rr, "\iota'"] & & A \otimes_S S \arrow[r, shift left, "1_A \otimes f"] \arrow[r, shift right, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S S \\ & A \otimes_S E \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "1_A \otimes \iota"'] & & \end{tikzcd} .$$

Lemma 4 kohaselt on ψ bijektsioon.

Kuna A_S on püsiv, siis A_S on unitaarne, s.t leiduvad $a_1 \in A$ ja $s \in S$ nii, et $a = a_1 r$. Eelduse kohaselt $(a_1 r)s = (a_1 r)s'$ ehk $a_1(rs) = a_1(rs')$. Kujutuse μ_A definitsiooni põhjal $\mu_A(a_1 \otimes rs) = \mu_A(a_1 \otimes rs')$. Kuna μ_A on injektiivne, siis $a_1 \otimes rs = a_1 \otimes rs'$. Järelikult $a_1 \otimes r \in E'$. Kuna ψ on sürjektiivne, siis leidub $a' \otimes u \in A \otimes_S E$ nii, et $\psi(a' \otimes u) = a_1 \otimes r$. Paneme tähele, et

$$\psi(a' \otimes u) = (\iota'\psi)(a' \otimes u) = (1_A \otimes \iota)(a' \otimes u) = 1_A(a') \otimes \iota(u) = a' \otimes u.$$

Seega $a' \otimes u = a_1 \otimes r$. Siit järeldub, et $a'u = a_1 r = a$ ning kuna $u \in E$, siis $us = us'$. □

Lemma 6. *Konservatiivselt lamedad polügoonid rahuldavad tingimust (P).*

Tõestus. Lemma 3 põhjal on polügoon A_S konservatiivselt lame parajasti siis, kui kujutus φ lemmast 5 on bijektsioon. Teoreemi 1 põhjal rahuldab mittetühi püsiv polügoon A_S tingimust (P) parajasti siis, kui kujutus φ on sürjektsioon. Seega kui A_S on konservatiivselt lame ja mittetühi, siis ta rahuldab tingimust (P). On selge, et ka tühi polügoon rahuldab tingimust (P). □

Alljärgnev teoreem on antud bakalaureusetöö põhitulemus. See annab konservatiivselt lamedate polügoonide kirjelduse suhteliselt lihtsate tingimuste (P), (E) ja (BF) abil.

Teoreem 2. *Iga püsiva polügooni A_S korral on järgmised väited samaväärsed:*

(i) *A_S on konservatiivselt lame.*

(ii) *A_S on konservatiivselt lame ja võrdsuslame.*

(iii) *A_S rahuldab tingimust (P) ja tingimust (E).*

(iv) *A_S rahuldab tingimust (BF).*

Tõestus. Vaatame kahte juhtu.

1)$A = \varnothing$. Vaatame suvalist konservatiivset ruutu

$$\begin{tikzcd}
{}_SP \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & {}_SM \arrow[d, "f"] \\
{}_SN \arrow[r, "g"'] & {}_SQ
\end{tikzcd}$$

kategoorias S-**Act**. Rakendades polügooniga A_S tensorkorrutamise funktorit saame, et diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_S P \arrow[r, "1_A \otimes p_1"] \arrow[d, "1_A \otimes p_2"'] & A \otimes_S M \arrow[d, "1_A \otimes f"] \\
A \otimes_S N \arrow[r, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S Q
\end{tikzcd}$$

on kommutatiivne. Kuna $(\varnothing \otimes -)({}_SB) = \varnothing$ ja $(\varnothing \otimes -)(h) = \varnothing$ mistahes vasakpoolse S-polügooni ${}_SB$ ja vasakpoolsete S-polügoonide homomorfismi h korral, siis eelmine diagramm saab kuju

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, "\varnothing"] \arrow[d, "\varnothing"'] & \varnothing \arrow[d, "\varnothing"] \\
\varnothing \arrow[r, "\varnothing"'] & \varnothing.
\end{tikzcd}$$

Olgu $r_1 : R \to \varnothing$ ja $r_2 : R \to \varnothing$ sellised morfismid, et $\varnothing r_1 = \varnothing r_2$,

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[drr, "r_1"] \arrow[ddr, "r_2"'] & & \\
& \varnothing \arrow[r, "\varnothing"'] \arrow[d, "\varnothing"] & \varnothing \arrow[d, "\varnothing"] \\
& \varnothing \arrow[r, "\varnothing"'] & \varnothing.
\end{tikzcd}$$

Siis $R = \varnothing$, $r_1 = \varnothing$ ja $r_2 = \varnothing$. Võttes tühja kujutuse $k = \varnothing : R \to \varnothing$ näeme, et $\varnothing k = r_1$ ja $\varnothing k = r_2$, kusjuures k on üheselt määratud.

2)$A \neq \varnothing$. (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu A_S konservatiivselt lame, s.t ta on püsiv ja funktor $A_S \otimes - : S - \mathbf{Act} \to \mathbf{Set}$ säilitab konservatiivsed ruudud. Siis lause 4 põhjal $A_S \otimes -$ säilitab võrdsustajad. Saime, et A_S on võrdsuslame.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Olgu A_S konservatiivselt lame ja võrdsuslame. Lemma 6 põhjal rahuldab A_S tingimust (P). Lause 6 põhjal rahuldab A_S tingimust (E).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Eeldame, et $as = a's'$, $at = a't'$, kus $a, a' \in A$ ja $s, s', t, t' \in S$. Kuna eelduse kohaselt A_S rahuldab tingimust (P), siis esimesest võrdusest järeldub, et leiduvad sellised $a'' \in A$, $u, v \in S$, et $a = a''u$, $a' = a''v$, $us = vs'$. Nüüd saame teisest võrdusest, et $a''(ut) = a''(vt')$. Kuna eelduse kohaselt A_S rahuldab tingimust (E), siis leiduvad sellised $\bar{a} \in A$, $z \in S$, et $a'' = \bar{a}z$ ja $z(ut) = z(vt')$. Nüüd $a = \bar{a}(zu)$, $a' = \bar{a}(zv)$ ja

$$(zu)s = z(us) = z(vs') = (zv)s',$$
$$(zu)t = z(ut) = z(vt') = (zv)t'.$$

Seega A_S rahuldab tingimust (BF).

(iv) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et A_S rahuldab tingimust (BF). Vaatame suvalist konservatiivset ruutu

$$\begin{tikzcd}
{}_SP \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & {}_SM \arrow[d, "f"] \\
{}_SN \arrow[r, "g"'] & {}_SQ
\end{tikzcd}$$

kategoorias S-**Act**, kus ${}_SP = \{(m, n) \in M \times N |\, f(m) = g(n)\}$ ja p_1, p_2 on projektsioonide ahendid. Peame näitama, et kujutus φ diagrammis

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_S P \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, "1_A \otimes p_1"] \arrow[ddr, "1_A \otimes p_2"'] & & \\
& P' \arrow[r, "p_1'"'] \arrow[d, "p_2'"] & A \otimes_S M \arrow[d, "1_A \otimes f"] \\
& A \otimes_S N \arrow[r, "1_A \otimes g"'] & A \otimes_S Q
\end{tikzcd}$$

kategoorias **Set** on bijektsioon, kusjuures

$$P' = \{(a \otimes m, a' \otimes n) \in (A \otimes_S M) \otimes (A \otimes_S N) |\, a \otimes f(m) = a' \otimes g(n)\},$$

p_1', p_2' on projektsioonide ahendid. Lisaks teame, et $\varphi : A \otimes_S P \to P'$ on lemma 5 kohaselt defineeritud võrdusega

$$\varphi(a \otimes (m, n)) = (a \otimes m, a \otimes n).$$

Kuna tingimusest (BF) järeldub tingimus (P), siis teoreemi 1 kohaselt on φ sürjektiivne.

Kujutuse φ injektiivsuse näitamiseks eeldame, et

$$\varphi(a' \otimes (m', n')) = \varphi(a \otimes (m, n)),$$

kus $a, a' \in A$ ja $(m, n), (m', n') \in P$, s.t $a \otimes m = a' \otimes m'$ ja $a \otimes n = a' \otimes n'$. Kuna A_S rahuldab tingimust (P), siis lause 2 kohaselt kahest viimasest võrdusest järelduvalt leiduvad sellised $a_1, a_2 \in A$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in S$, et $a = a_i u_i$, $a' = a_i v_i$, $i = 1, 2$ ja $u_1 m = v_1 m'$, $u_2 n = v_2 n'$.

Rakendades tingimust (BF) võrdustele $a_1 u_1 = a_2 u_2$ ja $a_1 v_1 = a_2 v_2$ saame leida elemendid $a'' \in A$, $u, v \in S$ nii, et

$$a_1 = a'' u,\ a_2 = a'' v,\ u u_1 = v u_2,\ u v_1 = v v_2.$$

Nüüd

$$\begin{aligned} a \otimes (m, n) &= a_1 u_1 \otimes (m, n) = a'' u u_1 \otimes (m, n) = a'' \otimes (u u_1 m, u u_1 n) \\ &= a'' \otimes (u u_1 m, v u_2 n) = a'' \otimes (u v_1 m', v v_2 n') = a'' \otimes (u v_1 m', u v_1 n') \\ &= a'' u v_1 \otimes (m', n') = a_1 v_1 \otimes (m', n') = a' \otimes (m', n'). \end{aligned}$$

Seega φ on injektiivne. $\square$

Toome näite polügoonist, mis on konservatiivselt lame ning polügoonist, mis ei ole konservatiivselt lame.

Näide. Olgu S rühm. Näitame, et polügoon S_S on konservatiivselt lame. Selleks veendume, et ta rahuldab tingimust (E), tingimust (P) ja on püsiv.

Olgu $as = a's'$, kus $a, a', s, s' \in S$. Siis

$$s^{-1} s = (s')^{-1} s',\ a = (as) s^{-1},\ a' = (as)(s')^{-1}$$

ja seega kehtib tingimus (P).

Olgu $as = as'$, kus $a, s, s' \in S$. Korrutades seda võrdust vasakult elemendiga a^{-1}, saame, et $s = s'$. Siis

$$1 \cdot s = 1 \cdot s',\ a = a \cdot 1$$

ja seega kehtib tingimus (E).

Vaatleme kujutust

$$\mu_S : S \otimes_S S \to S,\ s \otimes t \mapsto st.$$

Kuna iga elemendi $s \in S$ saab esitada kujul $s = 1 \cdot s$, siis S_S on unitaarne ja seega μ_S on sürjektiivne. Oletame nüüd, et $\mu_S(s \otimes t) = \mu_S(s' \otimes t')$ ehk $st = s't'$. Siis

$$s \otimes t = s \otimes t1 = st \otimes 1 = s't' \otimes 1 = s' \otimes t'1 = s' \otimes t'.$$

Seega μ_S on injektiivne ning S_S on püsiv.

Näide. Olgu S mittetriviaalne rühm, s.t $|S| \geqslant 2$. Vaatame üheelemendilist hulka $\Theta = \{\theta\}$. Defineerime

$$\theta s = \theta$$

iga $s \in S$ korral. Saame polügooni Θ_S, mis ei rahulda tingimust (E), seega ei ole konservatiivselt lame.

Tõepoolest, olgu $s, t \in S$, $s \neq t$. Siis

$$\theta s = \theta t.$$

Oletame vastuväiteliselt, et leidub $u \in S$ nii, et $us = ut$. Korrutades selle võrduse mõlemad pooled vasakult elemendiga u^{-1}, saame, et $s = t$, vastuolu.

Kirjandus

[1] S. Bulman-Fleming, *Pullback-flat acts are strongly flat*, Canad. Math. Bull. 34, (1991), 456-461.

[2] M. Kilp, *Algebra II*, Tartu, (1998).

[3] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Monoids, acts and categories*, Berlin, New York: Walter de Gruytor, (2000).

[4] V. Laan, *Kategooriateooria*, (2006), `http://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.037/2016_fall/uploads/Main/kat.pdf`

[5] M. V. Lawson, *Morita equivalence of semigroups with local units*, J. Pure Appl. Algebra 215, (2011), 455-470.

[6] B. Stenström, *Flatness and localization over monoids*, Math. Nachr. 48, (1971), 315-334.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Elery Teor (sünnikuupäev: 25.09.1995)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   "Polügoonide konservatiivne lamedus",

   mille juhendaja on professor Valdis Laan,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **11.05.2017**