TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Füüsika instituut

Alexander Vein

Noetheri teoreem ja gravitatsioonienergia üldrelatiivsusteoorias

Bakalaureusetöö

Füüsika, keemia ja materjaliteaduse õppekava, füüsika eriala

Juhendaja: Laur Järv, PhD

Tartu 2025

Noetheri teoreem ja gravitatsioonienergia üldrelatiivsusteoorias

Alustame klassikalise väljateooria tutvustamisest, luues jäävusseaduste mõistmiseks vajaliku matemaatilise aparatuuri. Sellele tuginedes käsitleme Noetheri teoreeme: esimest, mis seob globaalseid sümmeetriad jäävate suurustega ning teist, mis ühendab lokaalseid sümmeetriad diferentsiaalsamasustega. Seejärel liigume üldrelatiivsusteooria raamistikku, mis on invariantne lokaalsete üldiste koordinaatteisenduste ehk difeomorfismide all. Noetheri teise teoreemi rakendamine paljastabki põhimõttelise probleemi: lokaalsele sümmeetriale tuginedes ei saa määratleda lihtsasti-interpreteeritavat jäävusseadust. Selle asemel jõuame identselt kehtivate diferentsiaalseosteni liikumisvõrrandite vahel, ekvivalentselt Bianchi ahendatud samasusteni. See tulemus näitab, et tavapärane energia jäävuse mõiste ei ole üldrelatiivsusteoorias gravitatsiooniväljadele otseselt laiendatav. Lõpetame mõne selle probleemi lahendamiseks väljapakutud lähenemise tutvustamisega.

Märksõnad: Sümmeetria, üldrelatiivsusteooria, Noetheri teoreem, gravitatsioonivälja energia

CERCS: P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

Noether's Theorem and Gravitational Energy in General Relativity

We begin with an overview of classical field theory, thus establishing the mathematical framework necessary for understanding conservation laws. Building on this, we present both of Noether's theorems: the first theorem, connecting global symmetries to conserved quantities, and the second theorem, relating local symmetries to differential identities. We then shift to the framework of general relativity, which is invariant under general coordinate transformations, i.e. diffeomorphisms. Applying Noether's second theorem reveals a fundamental difficulty: rather than yelding a well-defined conserved quantity, it provides us with differential identities, specifically the contracted Bianchi identity. This result demonstrates that the usual notion of energy conservation cannot be straightforwardly extended to gravitational fields within the framework of general relativity. We conclude with a brief survey of some approaches to solve this issue.

Keywords: Symmetry, general relativity, Noether's theorem, gravitational energy

CERCS: P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Sisukord

Sissejuhatus **5**

1 Noetheri teoreem klassikalises väljateoorias **6**

1.1 Lagrange'i formalism väljateoorias 6

1.2 Noetheri teoreemid 9

1.3 Globaalsed sümmeetriad ja Noetheri 1. teoreem 14

1.3.1 Näide: energia-impulsi jäävus 16

1.4 Lokaalsed sümmeetriad ja Noetheri 2. teoreem 17

1.5 Üldisemad sümmetriateisendused 21

2 Noetheri teoreem üldrelatiivsusteoorias **22**

2.1 Einsteini väljavõrrandid 22

2.1.1 Gibbonsi-Hawkingi-Yorki (GHY) ääreliige 26

2.2 Aktiivsed ja passiivsed difeomorfismid 29

2.3 Noetheri samasused ja jäävusseadused 30

2.3.1 Üldised Kleini-Noetheri samasused 30

2.3.2 Kovariantsed samasused üldrelatiivsusteoorias 31

2.4 Jäävusseadused 36

Kokkuvõte **41**

Tänuavaldused **42**

Kirjandus **44**

Litsents **45**

A Tähistused ja akronüümid **46**

B Lagrange'i formalism klassikalises mehhaanikas **47**

B.1 Statsionaarse mõju printsiip ja Euler-Lagrange'i liikumisvõrrandid 47

B.2 Sümmeetriateisendused ja esmapilk Noetheri teoreemile 49

C Diferentsiaalgeomeetria elemente **56**

C.1 Taustsüsteemid ja gravitatsioon 56

C.2 Jooned ja kõverad muutkonnal 57

C.3 Vektorid, tensorid 58
C.4 Meetrika 60
C.5 Tensortihedused, vektorväljad 61
C.5.1 Tensortihedused ja lokaalsed inertsiaalsed koordinaadid 61
C.5.2 Vektorväljad 62
C.5.3 Lie sulg 63
C.5.4 Vektorvood ja Lie tuletis 64
C.6 Afiinne seostus ja kovariantne tuletis 67
C.6.1 Levi-Civita seostus 69
C.7 Riemanni geomeetria 70

D Hilberti mõjufunktsionaali varieerimine 72
D.1 Meetrika determinandi ruutjuure varieerimine 72
D.2 Ricci tensori varieerimine 74

E Einsteini mõjufunktsionaal 75

F Algebralised tuletused 78
F.1 Christoffeli sümbolid 78
F.2 Afiinse seostuse komponentide teiseneminemiseeskiri 79
F.2.1 Tuletuskäik jakobiaanidega 79
F.2.2 Tuletuskäik kovariantsest tuletisest lähtuvalt 81
F.3 Seosed meetrika determinandiga 82
F.4 Meetrika variatsioon 83
F.5 Seostuse variatsioon 84

Sissejuhatus

1915. aasta novembris esitas Albert Einstein oma üldrelatiivsusteooria lõpliku versiooni, revolutsioonilise teooria, mis kirjeldab gravitatsiooni mitte jõuna, vaid aegruumi kõverusena. Peaaegu koheselt tõstatus küsimus, et kui klassikalises füüsikas tuleneb energia jäävus aja homogeensusest, siis kuidas mõtestada energiat teoorias, kus aegruum ise on dünaamiline? See küsimus tõi kokku Einsteini, David Hilberti ja Felix Kleini. Just sellesse arutelusse sisenes ka saksa matemaatik Emmy Noether, kes töötas Göttingeni ülikoolis, tollases matemaatilise füüsika keskuses, olles sinna kutsutud Hilberti poolt. Aastal 1918. esitas Noether kaks teoreemi, mida me tänapäeval tunnemegi tema nime järgi. Noetheri esimene teoreem käsitleb globaalseid sümmeetriaid, mille teisenduste parameetrid on konstandid. See teoreem selgitab juba-tuttavaid jäävusseadusi. Teine, vähemtuntud teoreem käsitleb lokaalseid sümmeetriaid, mille teisenduste parameetrid on funktsioonid. Just see teoreem osutub keskseks üldrelatiivsusteooria kontekstis, mis on sümmeetriline difeomorfismide ehk lokaalsete üldiste koordinaatteisenduste suhtes. Seega aitab Noetheri teoreem vastata üldrelatiivsusteooria poolt esitatud väljakutsele: kuidas defineerida gravitatsioonivälja energiat teoorias, milles puudub fikseeritud taust-aegruum, mille suhtes energiat mõõta?

Käesoleval tööl on kaks eesmärki. Esiteks, anda esimeses peatükis süstemaatiline ja matemaatiliselt range ülevaade Noetheri kahest teoreemist klassikalise väljateooria. Kuigi Noetheri teoreemid on laialdaselt tuntud, on nende täpne matemaatiline sisu sageli ebaselge. Eriti puudutab see teist teoreemi, mille olulisus ja rakendusalad on vähetuntud. Teiseks, rakendada teises peatükis Noetheri teoreemi üldrelatiivsusteooria näitel, selgitamaks gravitatsioonienergia määratlemisega seonduvaid probleeme. Näitame, kuidas lokaalne sümmeetria juhatab Kleini-Noetheri samasusteni, mis taandub vaakumgravitatsiooni korral Bianchi samasuseks, st matemaatiliseks tõeks, millel puudub energia jäävuse mõttes füüsikaline sisu.

Oma iseloomult ja ülesehituselt on käesolev töö osaliselt didaktiline. Töö toetub põhiliselt ja läbivalt allikale [1]. Kirjutamisel olnud abiks ka [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Töö teemapüstitus on inspireeritud artiklist [9].

Lisas A on loetleme töös kasutatavaid tähistusi ja akronüüme, lisas B esitame ülevaatliku käsitluse klassikalisest mehhaanikast koos sissejuhatusega Noetheri teoreemi, lisas C esitame vajalikud eelteadmised diferentsiaalgeomeetriast, lisas D oleme läbi teinud Hilberti mõjufunktsionaali varieerimise, lisas E oleme tuletanud Einsteini mõjufunktsionaali ning lisasse F oleme kokku kogunud valiku töös esinevate suuruste algebralistest tuletuskäikudest.

1 Noetheri teoreem klassikalises väljateoorias

Ülevaade klassikalisest mitterelativistlikust mehhaanikast on leitav lisas B. Järgnevas asume kohe tööle relativistliku väljateooria formalismis.

1.1 Lagrange'i formalism väljateoorias

Tänapäevastes fundamentaalfüüsikateooriates me modelleerime füüsikalisi nähtusi, sh gravitatsiooni, **väljateooriate** kaudu. **Väli** Q on tensor või tensortihedus, mille komponendid on siledad aegruumi koordinaatide funktsioonid, $Q^\alpha = Q^\alpha(x^\mu)$. Väljakomponente Q^α käsitleme dünaamiliste muutujatena. **Lagranžiaan** $L = L(Q^\alpha(x^\mu), \partial_\mu Q^\alpha(x^\mu))$ on väljakomponentide ja nende tuletiste funktsioon. Lagranžiaan võib sisaldada ka kõrgemat kui esimest järku väljatuletisi, kuid neid me siinkohal veel ei käsitle. Lisaks töötame me siin peatükis Minkowski geomeetriaga aegruumis $M_4 = \mathbb{R}^{1,3}$ signatuuriga $(+1, -1, -1, -1)$. Kuna lagranžiaan peab olema Poincaré skalaar, on tarvis kanda hoolt selle eest, et ta vastavalt ka teiseneks. Selleks tuleb meil defineerida **lagranžiaani tihedus**, mis on samuti väljakomponentide ja nende tuletiste funktsioon, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Q^\alpha(x^\mu), \partial_\mu Q^\alpha(x^\mu))$. Lagranžiaani tiheduse integreerimine üle ruumi annabki meile lagranžiaani: $L := \int d^3x \mathcal{L}$. Kuna me edaspidises töötame just lagranžiaani tihedustega, siis me nimetame ka neid lihtsalt lagranžiaanideks. **Mõjufunktsionaal** S avaldub 4-mõõtmelises Minkowski ruumis kui

$$S[Q] = \int_\Omega d^4x \, \mathcal{L}(Q^\alpha, \partial_\mu Q^\alpha). \tag{1.1}$$

Variatsiooniprintsiibi kohaselt on füüsikalised väljakonfiguratsioonid $\{Q^\alpha(x)\}$ sellised, mis jätavad mõjufunktsionaali $S[Q]$ statsionaarseks suvaliste väikeste variatsioonide δQ all, ehk

$$\delta S[Q] = S[Q + \delta Q] - S[Q] = 0. \tag{1.2}$$

Liikumisvõrrandid saame, kui nõuame mõju statsionaarsust väikeste väljavariatsioonide korral $\delta Q^\alpha = Q'^\alpha(x) - Q^\alpha(x)$, ehk:

$$Q^\alpha \to Q^\alpha + \delta Q^\alpha \,, \tag{1.3a}$$

$$\partial_\mu Q^\alpha \to \partial_\mu Q^\alpha + \delta(\partial_\mu Q^\alpha) = \partial_\mu Q^\alpha + \partial_\mu(\delta Q^\alpha) \,, \tag{1.3b}$$

kus *erijuhul* kehtib $\delta(\partial_\mu Q^\alpha) = \partial_\mu(\delta Q^\alpha)$, kuna me varieerime ainult väljasid ja nende tuletisi, seega $\delta x^\alpha = 0$. Lisaks eeldame, et väljad Q^α on integreerimispiirkonna rajades fikseeritud ehk teisisõnu, nende variatsioonid δQ^α on nullid: $\delta Q^\alpha|_{\partial\Omega} = 0$. Statsionaarsuse all peame seejuures

silmas, et mõjufunktsionaali väärtus on invariantne kuni esimest järku variatsioonideni. Ehk siis $\delta S = \int d^4x\, \delta\mathcal{L} \overset{!}{=} 0$, milles lagranžiaanitiheduse variatsioon on

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}\delta Q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\delta(\partial_\mu Q^\alpha) \underset{(1.3b)}{=} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}\delta Q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\partial_\mu\delta Q^\alpha\,, \tag{1.4}$$

ja mõjufunktsionaali oma

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}\delta Q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\partial_\mu\delta Q^\alpha\right]. \tag{1.5}$$

Integreerime teist liiget ositi:

$$\begin{aligned}\int_\Omega d^4x\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\partial_\mu\delta Q^\alpha &= \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\delta Q^\alpha\right) - \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\right)\delta Q^\alpha \\ &= \underbrace{\oint_{\partial\Omega} d\Sigma_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\delta Q^\alpha}_{=0} - \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\right)\delta Q^\alpha \\ &= -\int_\Omega d^4x\, \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\right)\delta Q^\alpha\,,\end{aligned} \tag{1.6}$$

kus esimeses liikmes kasutasime Gaussi divergentsi teoreemi,

$$\int_\Omega d^4x\, \partial_\mu A^\mu = \oint_{\partial\Omega} d\Sigma_\mu A^\mu\,, \tag{1.7}$$

ning seejärel rajatingimust $\delta Q^\alpha|_{\partial\Omega} = 0$. Seega (1.5) koos statsionaaruse tingimusega avaldub kui

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}\delta Q^\alpha - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\right)\delta Q^\alpha\right] = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\right)\right]\delta Q^\alpha \overset{!}{=} 0\,,$$

mis peab kehtima suvalise δQ^α korral, seega

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\right) =: [\mathcal{L}]_\alpha = 0. \tag{1.8}$$

Valem (1.8) väljendab **Euleri-Lagrange'i (EL) liikumisvõrrandeid** klassikalises väljateoorias, $[\mathcal{L}]_\alpha$ on **Euleri tuletis**.

Liigume nüüd üldisemale juhule, kus varieerime ka koordinaate x^μ. See tähendab, et kuna $\delta x^\mu \neq 0$, siis ka $\delta(\partial_\mu Q^\alpha) \neq \partial_\mu(\delta Q^\alpha)$. Küll aga piirdume endiselt lagranžiaanidega, milles kohtame väljadest kuni esimest-järku tuletisi. Seega, mõju üldine variatsioon on

$$\delta S = \delta\int_\Omega d^4x\, \mathcal{L} = \int_\Omega d^4x\, \delta\mathcal{L}(Q, \partial_\mu Q, x^\mu) \tag{1.9}$$

ja vastavalt ka lagranžiaani üldine variatsioon,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}\delta Q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\delta(\partial_\mu Q^\alpha) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu. \tag{1.10}$$

Kuna $\delta\,\partial_\mu \neq \partial_\mu\,\delta$, ei saa me enam teist liiget hõlpsasti δQ^α kaudu avaldada. Defineerime $\bar{\delta}$-variatsiooni:

$$\bar{\delta}Q^\alpha := \delta Q^\alpha - (\partial_\mu Q^\alpha)\delta x^\mu\,, \qquad \delta Q^\alpha = \bar{\delta}Q^\alpha + (\partial_\mu Q^\alpha)\delta x^\mu\,, \tag{1.11}$$

mis kommuteerub tuletise operaatoriga, ehk $\bar{\delta}\,\partial_\mu = \partial_\mu\,\bar{\delta}$.

Edasipidises kasutame aegajalt osatuletiste tähistamiseks $\partial_\mu Q^\alpha := Q^\alpha_{,\mu}$. Saame

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}\bar{\delta}Q^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}Q^\alpha_{,\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\overset{\bar{\delta}\,\partial_\mu=\partial_\mu\,\bar{\delta}}{\bar{\delta}(\partial_\mu Q^\alpha)} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu Q^\alpha)}(\partial_\nu Q^\alpha)_{,\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}\bar{\delta}Q^\alpha - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\right)\bar{\delta}Q^\alpha + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\bar{\delta}Q^\alpha\right) \\
&\qquad + \underbrace{\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha}Q^\alpha_{,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu Q^\alpha)}(\partial_\nu Q^\alpha)_{,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\right]}_{\partial_\mu\mathcal{L}}\delta x^\mu\,,
\end{aligned}$$

kus δx^μ ees oleva kordaja tunneme ära kui täistuletise $\partial_\mu\mathcal{L}$ ning variatsiooniga $\bar{\delta}Q$ proportsionaalsed liikmed moodustavad Euleri tuletise lagranžiaanitihedusest. Seega oleme saanud

$$\delta\mathcal{L} = [\mathcal{L}]_\alpha\bar{\delta}Q^\alpha + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}\bar{\delta}Q^\alpha + \mathcal{L}\delta x^\mu\right] \tag{1.12}$$

Varsti kasutame seda tulemust, et tuletada Noetheri teoreemi väljateoorias.

Üldiselt on igasugusele funktsionaalile $F[Q]$ defineeritav talle omane **funktsionaalne tuletis** Q suhtes kui funktsionaali F variatsiooni saab avaldada kui

$$\delta F[Q] = \int d^D x\, f_\alpha(x)\,\delta Q^\alpha(x),$$

mis tähendab integraalina, mille all ei ole Q^α tuletisi. Sel juhul on funktsionaalseks tuletiseks

$$\frac{\delta F}{\delta Q^\alpha} := f_\alpha.$$

Meenutuseks, me tuletasime EL võrrandid varieerides mõjufunktsionaalis $S[Q]$ ainult väljasid Q^α (ehk $\delta x^\mu = 0$), seejuures fikseerides nende väärtused äärepiirkonnas (ehk $\delta Q^\alpha|_{\partial\Omega} = 0$), seega näeme valemist (1.12), et tõepoolest:

$$\frac{\delta S}{\delta Q^\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)} = [\mathcal{L}]_\alpha\,.$$

Seega **Euleri tuletis** ongi mõjufunktsionaali funktsionaalseks tuletiseks:

$$[\mathcal{L}]_\alpha := \frac{\partial S}{\partial Q^\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}.$$

Edasipidises kasutame neid mõisted sünonüümsetena. Tingimuse $[\mathcal{L}]_\alpha = 0$ kehtivuse korral ütleme, et süsteem on **massi pinnal**.[1]

Juhime siinkohal tähelepanu olulisele järeldusele, nimelt et lagranžiaanile täistuletise liitmine liikumisvõrrandeid ei muuda. Defineerides pseudo-impulsi

$$\Pi^\mu_\alpha := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)} \tag{1.13}$$

saame võrrandi (1.12) ümber kirjutada kui

$$\delta\mathcal{L} = [\mathcal{L}]_\alpha \bar{\delta} Q^\alpha + \partial_\mu C^\mu \quad \text{kus} \quad C^\mu = \Pi^\mu_\alpha \bar{\delta} Q^\alpha + \mathcal{L}\delta x^\mu \tag{1.14}$$

Avaldades nüüd C^μ läbi δ-variatsiooni, saame

$$C^\mu = \Pi^\mu_\alpha \delta Q^\alpha - \Theta^\mu_\nu \delta x^\nu \tag{1.15}$$

milles kohtame kanoonilist energia-impulsi tensorit

$$\Theta^\mu{}_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}(\partial_\nu Q^\alpha) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}\,. \tag{1.16}$$

Seega, pidev teisendus on **sümmeetria variatsioon**, kui selle all on lagranžiaani muut (kuni esimese järguni) täisdivergents.

$$\delta_S \mathcal{L} = \partial_\mu \Sigma^\mu_S\,. \tag{1.17}$$

1.2 Noetheri teoreemid

Siin alapeatükis on toetatud allikale [10]. Emmy Noether uuris funktsionaalide

$$I = \int \ldots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) dx \tag{1.18}$$

invariantust teisenduste $x \to x'(x)$ ja $u \to u'(u, x)$ all. Enda esialgses töös tegeles ta invariantsusega, kuid mitte kvaasi-invariantsusega, ehk siis kuni divergentsiliikmeni [11]. Tööd divergentsidega jätkas E. Bessel-Hagen, kes üldistas Noetheri teoreeme [12].

Lähtekoht Noether-Bessel-Hageni teoreemide tuletamiseks väljateoorias on tingimus (vt (B.18))

$$\int_{\hat{\Omega}} d^4\hat{x}\, \mathcal{L}(\hat{Q}, \partial\hat{Q}, \hat{x}) \stackrel{!}{=} \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}(Q, \partial Q, x), \tag{1.19}$$

[1] Mis siinkohal tähendabki lihtsalt, et $[\mathcal{L}]_\alpha = 0$, samas osakestefüüsikas ja relatiivsusteoorias on võrrandid massi pinnal, kui relativistlikud väljavõrrandid rahuldavad seost $p_\mu p^\mu = m^2c^2$.

mis kehtib üheparameetrilise teisenduste rühma all,

$$\begin{aligned}\hat{x}^\mu &= \hat{x}^\mu(Q, \partial Q, x, \epsilon) = x^\mu + \epsilon\, \xi^\mu(Q, \partial Q, x) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\\ \hat{Q}^\alpha &= \hat{Q}^\alpha(Q, \partial Q, x, \epsilon) = Q^\alpha + \epsilon\, \eta^\alpha(Q, \partial Q, x) + \mathcal{O}(\epsilon^2),\end{aligned} \tag{1.20}$$

kus ϵ on teisenduste parameeter ning ξ, η on funktsioonid.

Siinkohal paar sõna Lie rühmadest. Pisut on Lie rühmadest juttu ka lisas C.5. N-parameetriline Lie rühm G on ühtlasi ka N-mõõtmeline sile muutkond. Olgu Lie rühma elemendid g, mis sõltuvad pidevalt ja diferentseeruvalt reaalsetest parameetritest $\epsilon^1, \dots \epsilon^r, \dots \epsilon^N$, mis on omakorda ühtlasi ka rühma muutkonna lokaalseteks koordinaatideks. Rühma elementide üldine kuju on $g(\epsilon) = \epsilon(\epsilon^1 \dots \epsilon^N) \in \mathsf{G}$. Lie rühma generaatorid X on defineeritud rühma muutkonna puutujaruumi kaudu ühikelemendi g_0 ümbruses. On võimalik leida koordinaadid $\{\epsilon^i\}$, milles $g(\epsilon = 0) = g_0$. Rühma elementide rittaarendus identsuse ümbruses on

$$g(\epsilon) = g_0 + i\epsilon^a X^a + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \epsilon \in \mathbb{R}\,,$$

kus X^a on rühma infinitesimaalsed generaatorid:

$$X^a = -i \frac{\partial g}{\partial \epsilon^a}\bigg|_{\epsilon=0}.$$

Me saame konstrueerida lõpliku rühma elemendi, tehes lõpmatu jada infinitesimaalseid teisendusi ühikelemendi ümbruses:

$$g(\epsilon) = g(\epsilon/n)^m = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\epsilon X}{n}\right)^n = e^{i\epsilon X}\,,$$

ja r-parameetrilise Lie rühma elemendi avaldada kui

$$g(\epsilon, \dots \epsilon^r) = e^{i\epsilon^a X^a}\,.$$

Täpsemini, me vaatame ühe-parameetrilist voogu, mille genereerib (vt (B.39))

$$X = \epsilon^\mu(Q, \partial Q, x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta^\alpha(Q, \partial Q, x)\,\frac{\partial}{\partial Q^\alpha}\,, \tag{1.21}$$

mille lõplik kujutus on

$$\hat{x} = e^{\epsilon X} \cdot x\,, \qquad \hat{Q} = e^{\epsilon X} \cdot Q\,, \tag{1.22}$$

mille rittaarenduseks ongi teisendused (1.20). On kerge näha, et tegemist on pideva rühmaga, kui ϵ võib võtta nulli naabruses suvalisi väärtusi: $e^{\epsilon_1 X} \circ e^{\epsilon_2 X} = e^{(\epsilon_1+\epsilon_2)X}$.

Võiksime siinkohal arutleda sarnaselt nagu lisas D.2 ja jõuda valemiga (B.36) sarnase tulemuseni. Samas aga oleme juba tuletanud avaldise (1.14) lagranžiaani üldise variatsiooni jaoks,

$$\delta\mathcal{L} = [\mathcal{L}]_\alpha \bar{\delta} Q^\alpha + \partial_\mu C^\mu \,, \tag{1.23}$$

milles divergentsi liige C^μ on avaldatav nii $\bar{\delta}$ kui ka δ kaudu:

$$C^\mu = \Pi^\mu_\alpha \bar{\delta}_S Q^\alpha + \mathcal{L}\delta x^\mu = \Pi^\mu_\alpha \delta Q^\alpha - \Theta^\mu_\nu \delta x^\nu \,. \tag{1.24}$$

Sümmeetriateisenduse korral peab kehtima $\delta_S\mathcal{L} = \partial_\mu \Sigma^\mu_S$ (vt (1.17)) ning võrdus

$$\delta_S\mathcal{L} = \partial_\mu \Sigma^\mu_S = [\mathcal{L}]_\alpha \bar{\delta} Q^\alpha + \partial_\mu C^\mu$$

ning kui võtame C^μ avaldises $\delta \to \delta_S$, tuleneb

$$0 = \Delta_S\mathcal{L} = \delta_S\mathcal{L} - \partial_\mu \Sigma^\mu_S = [\mathcal{L}]_\alpha \bar{\delta}_S Q^\alpha + \partial_\mu J^\mu_S \,, \tag{1.25}$$

milles

$$J^\mu_S = \Pi^\mu_\alpha \bar{\delta}_S \overset{(1.14)}{Q^\alpha} + \mathcal{L}\delta x^\mu - \Sigma^\mu_S = \Pi^\mu_\alpha \delta_S \overset{(1.14)}{Q^\alpha} - \Theta^\mu_\nu \delta_S x^\nu - \Sigma^\mu_S \,, \tag{1.26}$$

Mis on tulemuse (B.36) üldistuseks. Me ütleme, et J^μ_S on massi pinnal[2] **jääv vool** kui $[\mathcal{L}]_\alpha = 0$ ehk liikumisvõrrandid on rahuldatud, millest tulenevalt valem (1.25) võtab kuju $0 = \partial_\mu J^\mu_S$, mis on sisuliselt pidevuse võrrand. Massi pinnal kehtivat tingimust tähistame edaspidi punktiga võrdusmärgiga, st üldiselt kui j^μ on **massi pinnal jääv vool**, siis

$$\partial_\mu j^\mu \doteq 0 \,. \tag{1.27}$$

Valemit (1.25) on mõnes kontekstis mugav avaldada kui

$$\frac{\delta S}{\delta Q^\alpha} \bar{\delta}_S Q^\alpha \equiv \Delta_S\mathcal{L} - \partial_\mu J^\mu_S \,. \tag{1.28}$$

Enne Noetheri teoreemide esitamist tutvustame ka väljateooria kontekstis infinitesimaalse sümmeetriageneraatori mõistet. Olgu meil operaator (vt (B.40), (B.42)),

$$\overline{X} = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial Q^\alpha} + \eta^\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial Q_{\alpha,\mu}} + \dots \quad \text{kus} \quad \eta^\alpha_\mu = d_\mu \eta^\alpha - Q^\alpha_{,\nu} d_\mu \xi^\nu \,, \tag{1.29}$$

või samaväärselt (vt (B.44)),

$$\overline{X} = \xi^\mu d_\mu + \chi^\alpha \frac{\partial}{\partial Q^\alpha} + (d_\mu \chi^\alpha) \frac{\partial}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} + \dots \quad \text{kus} \quad \chi^\alpha = \eta^\alpha - Q^\alpha_{,\mu} \xi^\mu, \tag{1.30}$$

[2]Vahest ütleme ka „nõrgalt jääv“.

milles $d_\mu = \frac{d}{dx^\mu}$. Valemi (1.19) vasaku poole saab ümber kirjutada kui

$$\int_{\hat{\Omega}} d^4\hat{x}\, \mathcal{L}(\hat{Q}, \partial\hat{Q}, \hat{x}) = \int_{\Omega} d^4x\, J\, \mathcal{L}(\hat{Q}, \partial\hat{Q}, x), \tag{1.31}$$

kus J on teisenduse $x \to \hat{x}$ jakobiaan ($d^4\hat{x} = J\, d^4x$):

$$J = \det \left| \frac{d\hat{x}^\mu}{dx^\nu} \right| . \tag{1.32}$$

Kui $J = 1$, on $\epsilon = 0$, st $J|_{\epsilon=0} = 1$. Seega saame rittaarendusel

$$J = 1 + \epsilon\, \partial_\mu \xi^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)\, .$$

Lagranžiaani teisenemine $\hat{\mathcal{L}} = e^{\epsilon \overline{X}} \cdot \mathcal{L}$ võtab kuju:

$$\mathcal{L}(\hat{Q}, \partial\hat{Q}, \hat{x}) = \mathcal{L}(Q, \partial Q, x) + \epsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha} \eta^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} \eta^\alpha_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \xi^\mu \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{1.33}$$

Seega,

$$0 = \int_\Omega d^4x \left[J\mathcal{L}(\hat{Q}, \partial\hat{Q}, x) - \mathcal{L}(Q, \partial Q, x) \right] = \epsilon \int_\Omega d^4x \left[X\mathcal{L} + \mathcal{L} d_\mu \xi^\mu \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{1.34}$$

millest tulenevalt saab tingimuse (1.19) kuni järguni $\mathcal{O}(\epsilon)$ esitada kui

$$0 = \int_\Omega d^4x \left(\eta^\alpha - Q^\alpha_{,\mu} \xi^\mu \right) [\mathcal{L}]_\alpha + \int_\Omega d^4x\, d_\mu \left(\chi^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} + \mathcal{L}\xi^\mu \right) , \tag{1.35}$$

Pinnaliikme olemasolul on seega operaator X Noetheri sümmeetria generaator kui:

$$X\mathcal{L} + \mathcal{L} d_\mu \xi^\mu = d_\mu \Sigma^\mu\, , \tag{1.36}$$

Järgnevalt esitame Noetheri kaks teoreemi.

Noetheri 1. teoreem

Kui eksisteerivad funktsioonid

$$\xi^\mu_r(x, Q, \partial Q), \qquad \eta^\alpha_r(x, Q, \partial Q), \qquad \Sigma^\mu_r(x, Q, \partial Q) \tag{1.37}$$

nii, et suvaliste konstantsete parameetrite $\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots \epsilon^r, \ldots \epsilon^R$ $(r = 1, \ldots R)$ korral eksisteerivad teisendused

$$\delta x^\mu = \xi^\mu = \xi^\mu_r \epsilon^r, \qquad \delta Q^\alpha = \eta^\alpha = \eta^\alpha_r \epsilon^r, \qquad \Sigma^\mu = \sigma^\mu_r \epsilon^r\, , \tag{1.38}$$

eksisteerib vastavalt ka R samasust kujul

$$(\eta^\alpha_r - Q^\alpha_{,\mu} \xi^\mu_r)[\mathcal{L}]_\alpha = \partial_\mu \left(\chi^\alpha_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} + \mathcal{L}\xi^\mu_r - \sigma^\mu_r \right) , \tag{1.39}$$

milles (vt (1.30))

$$\chi_r^\alpha = \eta_r^\alpha \epsilon^r - Q^\alpha_{,\mu} \xi_r^\mu \epsilon^r \,. \tag{1.40}$$

Ühtlasi eksisteerib R massi pinnal jäävat voolu

$$j_r^\mu = \chi_r^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} + \mathcal{L} \xi_r^\mu - \sigma_r^\mu \,. \tag{1.41}$$

Tõestus. Konstantsete parameetrite ϵ^r jaoks on meil

$$\delta x^\mu \overset{(1.38)}{=} \xi_r^\mu \epsilon^r \,, \qquad X\mathcal{L} + \mathcal{L}\, d_\mu \xi^\mu \overset{(1.40)}{\overset{(1.38)}{=}} \partial_\mu \Sigma_r^\mu \epsilon^r \,,$$
$$\bar{\delta} Q^\alpha \overset{(1.11)}{=} \delta Q^\alpha - Q^\alpha_{,\mu} \delta x^\mu \overset{(1.38)}{=} \eta_r^\alpha \epsilon^r - Q^\alpha_{,\mu} \xi_r^\mu \epsilon^r \overset{(1.30)}{=} \chi_r^\alpha \epsilon^r \,.$$

Sisetame need lagranžiaani sümmeetria tingimuse valemisse (1.25):

$$\begin{aligned} 0 &= [\mathcal{L}]_\alpha \, \chi_r^\alpha \epsilon^r + \partial_\mu \Big(\Pi_\alpha^\mu \, \chi_r^\alpha + \mathcal{L}\, \xi_r^\mu - \overset{(1.38)}{\sigma_r^\mu} \Big) \epsilon^r \\ &= [\mathcal{L}]_\alpha \big(\eta_r^\alpha \epsilon^r - Q^\alpha_{,\mu} \xi_r^\mu \big) \epsilon^r + \partial_\mu \left(\overset{(1.13)}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}}} \chi_r^\alpha + \mathcal{L}\, \xi_r^\mu - \sigma_r^\mu \right) \epsilon^r \\ &= \left[\big(\eta_r^\alpha \epsilon^r - Q^\alpha_{,\mu} \xi_r^\mu \big) [\mathcal{L}]_\alpha + \partial_\mu \Big(\chi_r^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} + \mathcal{L}\, \xi_r^\mu - \sigma_r^\mu \Big) \right] \epsilon^r \,. \end{aligned}$$

Kuna ϵ^r on suvaline, peab selle kordaja nulliga võrduma. See sisaldab kahte liiget, millest esimene on massi pinnal null, kuna siis $[\mathcal{L}]_\alpha = 0$. Seega peab ka teine liige nulliga võrduma, mis on valemi (1.39) sisuks, seejuures

$$0 \doteq \partial_\mu \Big(\chi_r^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} + \mathcal{L}\, \xi_r^\mu - \sigma_r^\mu \Big) = \partial_\mu \, j_r^\mu$$

ehk oleme leidnud massi pinnal jäävad voolud j_r^μ. $\square$

Noetheri 2. teoreem

Kui eksisteerivad lineaarsed operaatorid[3]

$$\hat{\xi}_r^\mu, \qquad \hat{\eta}_r^\alpha, \qquad \hat{\sigma}_r^\mu \tag{1.42}$$

nii, et suvaliste äärepiirkonnal $\partial\Omega$ nulliks minevate funktsioonide ϵ^r jaoks avalduvad teisendused kui

$$\delta x^\mu = \hat{\xi}_r^\mu \cdot \epsilon^r, \qquad \delta Q^\alpha = \hat{\eta}_r^\alpha \cdot \epsilon^r, \qquad \Sigma^\mu = \hat{\sigma}_r^\mu \cdot \epsilon^r, \tag{1.43}$$

[3] Katusega tähistame siinkohal lineaarseid *operaatoreid*, $\hat{\xi}_r^\mu, \hat{\eta}_r^\alpha, \hat{\sigma}_r^\mu$.

siis eksisteerib ühtlasi R samasust,

$$\hat{\eta}_r^{*\alpha}[\mathcal{L}]_\alpha - \hat{\xi}_r^{*\mu}\left(Q^\alpha_{,\mu}[\mathcal{L}]_\alpha\right) = 0\,, \tag{1.44}$$

milles $*$ tähistab vastavate operaatorite kaasoperaatoreid, defineeritud äärealal $\partial\Omega$ kaduvate funktsioonide f, g jaoks kui

$$\int_\Omega d^D x\, f\left(\hat{O}\cdot g\right) = \int_\Omega d^4 x\left(\hat{O}^\star\cdot f\right)\, g\,.$$

Näiteks, kui $\hat{O} = a(x) + b(x)\,\partial_\mu$, siis $\hat{O}^\star = a(x) - b(x)\,\partial_\mu$. Samasused (1.44) ütlevad meile, et väljavõrrandid ei ole üksteisest sõltumatud.

Tõestus.

Lähtume valemist (1.35). Siis on meil lisaks teisendustele (1.43) ka

$$\eta^\alpha = \hat{\eta}_r^\mu\cdot\epsilon^r, \qquad \chi^\alpha = \left(\hat{\eta}_r^\alpha - Q^\alpha_{,\mu}\,\hat{\xi}_r^\mu\right)\cdot\epsilon^r.$$

Pannes need valemisse (1.35), saame

$$0 = \int_\Omega d^4x\left(\hat{\eta}_r^\mu\cdot\epsilon^r - Q^\alpha_{,\mu}\,\hat{\xi}_r^\mu\cdot\epsilon^r\right)\,[\mathcal{L}]_\alpha + \int_\Omega d^4x\, d_\mu\left[\left(\left(\hat{\eta}_r^\alpha - Q^\alpha_{,\mu}\,\hat{\xi}_r^\mu\right)\cdot\epsilon^r\right)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}} + \mathcal{L}\big(\hat{\xi}_r^\mu\cdot\epsilon^r\big)\right].$$

Gaussi teoreemiga saame teise liikme teha pinnaliikmeks ning kuna $\epsilon_r|_{\partial\Omega} = 0$, võrdub see liige nulliga. Seega meil on

$$0 = \int_\Omega d^4x\Big[\left(\hat{\eta}_r^\mu - Q^\alpha_{,\mu}\,\hat{\xi}_r^\mu\right)\cdot\epsilon^r\Big][\mathcal{L}]_\alpha\,.$$

Kaasoperaatori definitsiooni kasutades tuvastame **(1)** esimeses liikmes $f = [\mathcal{L}]_\alpha$, $\hat{O} = \hat{\eta}_r^\alpha$, $g = \epsilon^r$ ja **(2)** teises liikmes $f = Q^\alpha_{,\mu}[\mathcal{L}]_\alpha$, $\hat{O} = \hat{\xi}_r^\mu$, $g = \epsilon^r$. Seega

$$0 = \int_\Omega d^4x\,\epsilon^r\Big(\hat{\eta}_r^{*\alpha}\cdot[\mathcal{L}]_\alpha - \hat{\xi}_r^{\star\mu}\cdot\big(Q^\alpha_{,\mu}[\mathcal{L}]_\alpha\big)\Big)\,.$$

Kuna see peab kehtima suvalise ϵ^r korral, saamegi

$$\hat{\eta}_r^{*\alpha}\cdot[\mathcal{L}]_\alpha - \hat{\xi}_r^{\star\mu}\cdot\big(Q^\alpha_{,\mu}[\mathcal{L}]_\alpha\big) = 0\,. \quad \square$$

1.3 Globaalsed sümmeetriad ja Noetheri 1. teoreem

Noetheri 1. teoreem on formuleeritud konstantsete parameetritega ϵ^r sümmeetriavariatsioonide $\delta_\epsilon x^\mu = \xi_r^\mu(x, Q, \partial Q)\,\epsilon^r$ ja $\delta_\epsilon Q^\alpha = \eta_r^\alpha(x, Q, \partial Q)\,\epsilon^r$ jaoks. Järgnevas piirdume sümmeetriateisendustega kujul

$$\delta_\epsilon x^\mu = \mathcal{D}_r^\mu(x)\epsilon^r, \qquad \delta_\epsilon Q^\alpha = \mathcal{A}_r^\alpha(Q)\epsilon^r\,, \tag{1.45}$$

milles funktsioonidele $\mathcal{D}_r^\mu$ ja $\mathcal{A}_r^\alpha$ rakenduvad (Lie-)rühmateoreetilised tingimused, seega nad ei ole päris suvalised koefitsiendid. Kuna ϵ^r on konstandid, muutub valem (1.25) järgnevalt:

$$[\mathcal{L}]_\alpha(\mathcal{A}_r^\alpha - Q^\alpha_{,\mu}\mathcal{D}_r^\mu) + \partial_\mu j_r^\mu = 0 \quad (r = 1, \ldots, R), \tag{1.46}$$

milles

$$j_r^\mu := \Pi^\mu_\alpha \mathcal{A}_r^\alpha - \Theta^\mu_\nu \mathcal{D}_r^\nu - \sigma_r^\mu. \tag{1.47}$$

Seejuures oleme pinnaliikme lahti kirjutanud kui $\Sigma_S^\mu = \sigma_r^\mu \epsilon^r$. Valemist (1.46) tulenevalt eksisteerib R massi pinnal jäävat Noetheri voolu j_r^μ,

$$\partial_\mu j_r^\mu = \partial_\mu(\Pi^\mu_\alpha \mathcal{A}_r^\alpha - \Theta^\mu_\nu \mathcal{D}_r^\nu - \sigma_r^\mu) = -[\mathcal{L}]_\alpha(\mathcal{A}_r^\alpha - Q^\alpha_{,\mu}\mathcal{D}_r^\mu) \doteq 0\,. \tag{1.48}$$

Need voolud võivad olla triviaalsed numbrilised konstandid (sh nullid) või massi pinnal kaduvad. Näiteks kui meil oleks vool kujul $j^\mu = \partial_\nu K^{\mu\nu}$, milles $K^{\mu\nu}$ on antisümmeetriline, kehtiks triviaalselt $\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \partial_\nu K^{\mu\nu} = 0$, mistõttu poleks selles avaldises füüsikalist sisu. Sellest järelduvalt pole ka voolud unikaalsed, kuna igasugune vool kujul

$$\tilde{j}_r^\mu = j_r^\mu + \partial_\nu k_r^{\mu\nu} \tag{1.49}$$

antisümmeetriliste tensoritega $k_r^{\mu\nu}$ allub jäävusseadusele $\partial_\nu \tilde{j}_r^\mu = 0$. Seda alamääratust saab ära kasutada voolu sobival viisil ümberdefineerimisel. Kuna need voolud on jäävad ainult massi pinnal, $\partial_\mu j^\mu \doteq 0$, kõneldakse nendega seoses „nõrkadest“ jäävusseadustest, eristamaks neid „tugevatest“ jäävusseadustest, mis tulenevad divergentsi-samasustest.

Väljadele Q^α mõõdukate tingimuste seadmise korral viitavad (mitte-triviaalsed) jäävad voolud (1.47) jäävate laengute olemasolule:

$$\frac{d}{dt}C_r = 0 \quad \text{milles} \quad C_r := \int_\Omega d^3x\, j_r^0.$$

Seejuures „mõõdukad“ tingimused lähtuvad järgnevast eeldusest:

$$0 = \int_\Omega d^3x\, \partial_\mu j^\mu = \int_\Omega d^3x\, \partial_0 j^0 + \int_\Omega d^3x\, \partial_i j^i = \frac{d}{dt}\int_\Omega d^3x\, j^0 + \oint_{\partial\Omega} dS\, \hat{n}^i_{ij}\,,$$

kus viimases etapis kasutasime Gaussi integraalteoreemi teisendamaks ruumintegraali pindintegraaliks. Selle integraali panus kaob, kui voolude ruumilised komponendid j^i lähenevad piisavalt kiiresti nullile: kui j^i vähenevad kauguse r suurenedes viisil, et kogu vool regioonist Ω välja väheneb kiiremini kui ruumala suureneb[4], siis ühtlasi kogu väljavool üle pinna $\partial\Omega$ muutub piisavalt suure kauguse r korral nulliks.

[4]Relativistlike väljade jaoks on see suhe üldiselt $j_r^i = \mathcal{O}(r^{-3-\epsilon})$ või kiiremini.

1.3.1 Näide: energia-impulsi jäävus

(I) Infinitesimaalsete nihete $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$ korral tuvastame suurused valemis (1.45) kui

$$\mathcal{D}^\mu_r = \delta^\mu_r \qquad \text{ja} \qquad \delta Q^\alpha = 0\,.$$

Sellest tulenevalt on koefitsendid $\mathcal{A}_r$ nullid, millest omakorda järeldub

$$\bar{\delta}_\epsilon Q_\alpha = -\epsilon^\mu \partial_\mu Q_\alpha. \tag{1.50}$$

Aegruumi nihkeinvariantsususele vastav Noetheri vool (1.47) ongi lihtsalt **kanooniline energia-impulsi tensor** $\Theta^\mu{}_\nu$. See on nõrgalt jääv:

$$\partial_\mu \Theta^\mu{}_\nu \doteq 0\,. \tag{1.51}$$

Selle integraalvõrrand ehk 4-impulss on ajalisest jääv, eeldades $\Theta^{i\mu}$ jaoks varasemalt kirjeldatud käitumist rajapiirkonnas,

$$P^\mu := \int d^3x\, \Theta^{0\mu}\,. \tag{1.52}$$

(II) Kuue antisümmeetrilise parameetriga $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ infinitesimaalsete Lorentzi teisenduste $\hat{x}^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}(\delta^\rho_\mu x^\sigma - \delta^\sigma_\mu x^\rho)$ korral, milles $\delta x^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu$, loeme valemist (1.45):

$$\mathcal{D}^\mu_{[\rho\sigma]} = \mathcal{D}^\mu_{\rho\sigma} - \mathcal{D}^\mu_{\sigma\rho} = x_\rho \delta^\mu_\sigma + x_\rho \delta^\mu_\sigma = -x_{[\rho}\delta^\mu_{\sigma]}\,. \tag{1.53}$$

Q teiseneb Lorentz-invariantse väljana:

$$\hat{Q}^\alpha(\hat{x}) = D^\alpha{}_\beta Q^\beta(x) = \left(\delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Sigma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\right) Q^\beta\,, \tag{1.54}$$

milles $D = D(\Lambda)$ on Lorentzi rühma esituse maatriks ja $(\Sigma^{\mu\nu})$ on **spinn-maatriks**. Võrdlus valemiga (1.45) ütleb meile, et

$$\mathcal{A}^\alpha_{[\rho\sigma]} = -(i\Sigma_{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta Q^\beta.$$

Valemile (1.47) vastav Noetheri vool on impulsimomendi tensor,

$$M^\mu{}_{\rho\sigma} := (\Theta^\mu{}_\rho x_\sigma - \Theta^\mu{}_\sigma x_\rho) + S^\mu{}_{\rho\sigma}\,, \tag{1.55}$$

milles $S^\mu{}_{\rho\sigma}$ on **kanooniline spinn-tensor**:

$$S_{\mu\rho\sigma} := -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu}}(i\Sigma_{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta Q^\beta\,. \tag{1.56}$$

Jäävusseadustest (1.51) ja $\partial_\mu M^\mu{}_{\rho\sigma} \doteq 0$ järeldub, et

$$\partial_\mu S^{\mu\rho\sigma} \doteq \Theta^{\sigma\rho} - \Theta^{\rho\sigma}\,. \tag{1.57}$$

Noetheri laengud defineeritud kui

$$M^{\rho\sigma} := \int d^3x\, M^{0\rho\sigma} = \int d^3x\, (x^\rho \Theta^{0\sigma} - x^\sigma \Theta^{0\rho}) + \int d^3x\, S^{0\rho\sigma} \tag{1.58}$$

on impulsimomendi komponendid. Need on jäävad suurused, eeldades $M^{i\rho\sigma}$ jaoks sobivaid ääretingimusi.[5]

Võib tekkida kiusatus tõlgendada esimest liiget valemis (1.58) orbitaal- ning teist spinn-osana. Selline tõlgendus oleks aga kahtlane, kuna energia-impulsi ja spinni jaotust saab relokaliseerida avaldisse rootorite („superpotentsiaalide“) lisamisega,

$$\hat{\Theta}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda Y^{\mu\nu\lambda} \quad \text{ning} \quad \hat{S}^{\mu\rho\sigma} = S^{\mu\rho\sigma} + Y^{[\mu\rho]\sigma} + \partial_\lambda Z^{\mu\rho\sigma\lambda}, \tag{1.59}$$

indeksite antisümmeetriatega $Y^{\mu\nu\lambda} = -Y^{\mu\lambda\nu}$ ning $Z^{\mu\rho\sigma\lambda} = -Z^{\mu\rho\lambda\sigma} = -Z^{\mu\sigma\rho\lambda}$. Need ümber-defineeritud tensorid alluvad jäävusseadustele (1.51): $\partial_\mu \hat{\Theta}^{\mu\nu} \doteq 0$, (1.57): $\partial_\mu \hat{S}^{\mu\rho\sigma} \doteq \hat{\Theta}^{\sigma\rho} - \hat{\Theta}^{\rho\sigma}$. Spetsiifilise superpotensiaali valikuga saame ka $\hat{S}^{\mu\rho\sigma} = 0$, kui defineerime **Belinfante tensori**:

$$B^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\lambda \left(S^{\mu\lambda\nu} + S^{\nu\lambda\mu} - S^{\lambda\mu\nu}\right) . \tag{1.60}$$

Ehk teisisõnu, me valime $Y^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(S^{\lambda\mu\nu} + S^{\lambda\nu\mu} + S^{\mu\nu\lambda}\right)$ ning $Z^{\mu\rho\sigma\lambda} = 0$. Selline energia-impulsi tensori ümberdefineerimine tagab, et nii impulsimoment kui ka 4-impulss sõltuvad ainult sellest uuest energia-impulsi tensorist:

$$T^\mu = \int d^3x\, B^{0\mu} \tag{1.61a}$$

$$M^{\mu\nu} = \int d^3x\, (x^\mu B^{0\nu} - x^\nu B^{0\mu}) \tag{1.61b}$$

Belinfante tensor on sümmeetriline $B^{\mu\nu} - B^{\nu\mu} \doteq 0$ tänu kaduvale spinn-tensorile ja jäävusseadusele (1.57). Hiljem näeme, et Belinfante tensor on tasase ruumi piirjuhuks Hilberti mateeria-tensorile, so tensorile, mis on defineeritud üldrelatiivsusteooria raamistikus minimaalselt seotud relativistlike aineväljade jaoks.

1.4 Lokaalsed sümmeetriad ja Noetheri 2. teoreem

Globaalsete sümmeetriateisenduste parameetrid ϵ^r on konstandid; Noetheri 1. teoreemi abil saame igaühele neist seada vastavusse jääva voolu. Lokaalne teisendus on aga selline, mille parameetrid ϵ^r on funktsioonid: $\delta_\epsilon x^\mu = \hat{\xi}^\mu_r \cdot \epsilon^r$, $\delta_\epsilon Q^\alpha = \hat{\eta}^\alpha_r \cdot \epsilon^r$, milles $\hat{\xi}^\mu_r$ ja $\hat{\eta}^\alpha_r$ on lineaarsed

[5] Need tingimused on jällegi, et pindintegraal muutuks ruumilises lõpmatuses nulliks: $\frac{d}{dt}M^{\rho\sigma} = \cdots = -\oint_{S_\infty} dS_i M^{i\rho\sigma} = 0$.

operaatorid. Nagu peatselt näeme, on sellisel juhul kanoonilised Noetheri voolud kas massi pinnal identselt nullid või täisdivergentsidest (superpotentsiaalidest) tuletatavad. Kummalgi juhul ei saa me enam üheselt jäävaid laenguid defineerida.

Meie piirdume teisendustega, mis võtavad kuju

$$\delta_\epsilon x^\mu = \mathcal{D}^\mu_r(x)\epsilon^r(x) + \dots \tag{1.62a}$$

$$\delta_\epsilon Q^\alpha = \mathcal{A}^\alpha_r(Q)\epsilon^r(x) + \mathcal{B}^{\alpha\mu}_r(Q)\epsilon^r_{,\mu}(x) + \dots \tag{1.62b}$$

Teisendused võivad kätkeda ka kõrgemat järku tuletisi, meil pole aga tarvis neid käsitleda. Lähtekohaks on taaskord invariantsuse tingimus (1.25)

$$\Delta_\epsilon \mathcal{L} = [\mathcal{L}]_\alpha \bar{\delta}_\epsilon Q^\alpha + \partial_\mu J^\mu_\epsilon \equiv 0 \tag{1.63}$$

koos Noetheri vooluga (1.26). On kasulik avaldada voolu J^μ_S tema „komponentide“ j^μ_r ja $k^{\mu\nu}_r$ kaudu,

$$J^\mu_\epsilon = j^\mu_r \epsilon^r + k^{\mu\nu}_r \partial_\nu \epsilon^r = \left[j^\mu_r - \partial_\nu k^{\mu\nu}_r\right]\epsilon^r + \partial_\nu(k^{\mu\nu}_r \epsilon^r). \tag{1.64}$$

Sisestades teisendused (1.62) invariantsuse tingimusse (1.63), saame parameetri ϵ^r ja selle tuletiste $\partial_\mu \epsilon^r$ ning $\partial_\mu \partial_\nu \epsilon^r$ kaudu avaldatud võrrandi

$$\begin{aligned}
\Delta_\epsilon \mathcal{L} &= [\mathcal{L}_\alpha]\bar{\delta} Q^\alpha + \partial_\mu J^\mu \\
&= [\mathcal{L}_\alpha]\Big(\mathcal{A}^\alpha_r \epsilon^r + \mathcal{B}^{\alpha\nu}\epsilon^r_{,\mu} - Q^\alpha_{,\mu}\mathcal{D}^\mu_r \epsilon^r\Big) + \partial_\mu\Big(j^\mu_r \epsilon^r + k^{\mu\nu}_r \epsilon^r_{,\nu}\Big) \\
&= \Big([\mathcal{L}_\alpha](\mathcal{A}^\alpha_r - Q^\alpha_{,\mu}\mathcal{D}^\mu_r) + \partial_\mu j^\mu_r\Big)\epsilon^r + \Big([\mathcal{L}_\alpha]\mathcal{B}^{\alpha\nu} + j^\mu_r + \partial_\nu k^{\nu\mu}_r\Big)\epsilon^r_{,\mu} + \Big(k^{\mu\nu}_r\Big)\epsilon^r_{,\mu\nu} \\
&= \Big([\mathcal{L}_\alpha]\bar{\mathcal{A}}^\alpha_r + \partial_\mu j^\mu_r\Big)\epsilon^r + \Big([\mathcal{L}_\alpha]\mathcal{B}^{\alpha\nu} + j^\mu_r \partial_\nu k^{\nu\mu}_r\Big)\epsilon^r_{,\mu} + k^{\mu\nu}_r \epsilon^r_{,\mu\nu} = 0\,,
\end{aligned} \tag{1.65}$$

milles oleme defineerinud kommuteeruva „kalibratsiooni“ koefitsiendi,

$$\bar{\mathcal{A}}^\alpha_r := \mathcal{A}^\alpha_r - Q^\alpha_{,\mu}\mathcal{D}^\mu_r\,. \tag{1.66}$$

Globaalse sümmeetria korral oleksid valemis (1.65) viimased kaks liiget on nullid, kuna $\epsilon^r_{,\mu} = 0 = \epsilon^r_{,\mu\nu}$. Parameetri ϵ^r ees oleva teguri nulliks võtmine tooks meid tagasi (1.46) juurde. Lokaalsete sümmeetriateisenduste korral peavad valemis (1.65) eraldivõetult ka ϵ^r tuletiste ees olevad tegurid nulliga võrduma, kuna valem kehtib suvalise ϵ^r korral. Saame kolm gruppi samasusi:

$$k^{\mu\nu}_r + k^{\nu\mu}_r \equiv 0\,, \tag{1.67a}$$

$$[\mathcal{L}]_\alpha \mathcal{B}^{\alpha\mu}_r + j^\mu_r - \partial_\nu k^{\mu\nu}_r \equiv 0\,, \tag{1.67b}$$

$$[\mathcal{L}]_\alpha \bar{\mathcal{A}}^\alpha_r + \partial_\mu j^\mu_r \equiv 0\,, \tag{1.67c}$$

millest kaks esimest puuduvad globaalsete sümmeetriate korral. Samasustest (1.67c) näeme, et voolu komponendid j_r^μ on massi pinnal jäävad,

$$\partial_\mu j_r^\mu \equiv -[\mathcal{L}]_\alpha \bar{\mathcal{A}}_r^\alpha \doteq 0\,. \tag{1.68}$$

Valemi (1.67b) kohaselt kehtib

$$j_r^\mu \doteq \partial_\nu k_r^{\mu\nu}\,. \tag{1.69}$$

Noetheri voolu (1.64) saab seega tulemuse (1.67b) kaudu ümber kirjutada massi pinnal kaduva- ja divergentsiliikme summana:

$$J_\epsilon^\mu = -[\mathcal{L}]_\alpha \mathcal{B}_r^{\alpha\mu}\epsilon^r + \partial_\nu(k_r^{\mu\nu}\epsilon^r)\,. \tag{1.70}$$

Suurust $(k_r^{\mu\nu}\epsilon^r)$, mis massi pinnal annab meile Noetheri voolu, võime kutsuda superpotentsiaaliks; see terminoloogia kusjuures pärinebki püüdlusest defineerida lokaalseid jäävusseadusi üldrelatiivsusteooria kontekstis. Kui nüüd võtame valemist (1.67b) täisdivergentsi, saame

$$\begin{aligned}\partial_\mu\Big([\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{B}_r^{\alpha\mu}\Big) + \partial_\mu j_r^\mu - \underbrace{\partial_\mu\partial_\nu k_r^{\mu\nu}}_{=0} &= \partial_\mu\Big([\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{B}_r^{\alpha\mu}\Big) + \partial_\mu j_r^\mu = 0\\ \implies \partial_\mu j_r^\mu &= -\partial_\mu\Big([\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{B}_r^{\alpha\mu}\Big).\end{aligned} \tag{1.71}$$

Valemit (1.71) kutsutakse vahest *rajateoreemiks*, kuna see isoleerib voolu selle osa, mis tuleneb äärepiirkonnast [13]. Sisestame selle valemisse (1.67c), saades

$$\mathcal{N}_r = [\mathcal{L}]_\alpha\left(\mathcal{A}_r^\alpha - Q^\alpha_{,\mu}\mathcal{D}_r^\mu\right) - \partial_\mu([\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{B}_r^{\alpha\mu}) \equiv 0\,. \tag{1.72}$$

Need võrrandid on R samasust liikumisvõrrandite ja nende tuletiste vahel, millest tulenevalt ei ole väljavõrrandid $[\mathcal{L}]_\alpha = 0$ üksteisest sõltumatud. Võrrandeid (1.72) kutsutakse **Noetheri samasusteks** või ka **üldistatud Bianchi samasusteks**, kuna üldrelatiivsusteoorias vastavad nad ahendatud Bianchi samasustele. Noetheri teisest teoreemist kõneldes peetaksegi tavaliselt just neid võrrandeid silmas. Teiste võrrandite, nagu (1.67a), olulisus on saanud ilmseks alles üpris hiljuti, püüdest leida sobivat füüsikalist tõlgenndust Noetheri laengutele gravitatsiooniteooriates.

Võrrandeid (1.67) nimetatakse ka Kleini-Noetheri samasusteks või Noetheri kaskaadiks. Nendes mängivad tähtsat rolli voolud

$$\Upsilon_r^\mu := [\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{B}_r^{\alpha\mu} + j_r^\mu\,, \tag{1.73}$$

kuna Kleini-Noetheri samasusi saab avaldada ka kui

$$\partial_\mu\Upsilon_r^\mu \equiv 0\,, \qquad \Upsilon_r^\mu - \partial_\nu k_r^{\mu\nu} \equiv 0\,, \qquad k_r^{\mu\nu} + k_r^{\nu\mu} \equiv 0\,. \tag{1.74}$$

Selles tähistuses selgelt näha, et need seosed ei ole üksteisest sõltumatud. Paneme tähele, et voolud Υ^μ_r on identselt jäävad, samas j^μ_r on seda ainult massi pinnal.

Suuruste j^μ_r ja $k^{\mu\nu}_r$ ilmutatud kujul avaldised sõltuvad koefitsientidest $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{D}$, mida kohtame sümmeetriateisendustes (1.62), ning ka võimalikest pinnaliikmetest. Kirjutades viimased lahti kui

$$\Sigma^\mu_S = \sigma^\mu_r \epsilon^r + \rho^{\mu\nu}_r \partial_\nu \epsilon^r \,, \tag{1.75}$$

saame valemist (1.26) tuletada:

$$j^\mu_r = \Pi^\mu_\alpha \bar{\mathcal{A}}^\alpha_r + \mathcal{L}\mathcal{D}^\mu_r - \sigma^\mu_r \,, \tag{1.76a}$$

$$k^{\mu\nu}_r = \Pi^\mu_\alpha \mathcal{B}^{\alpha\nu}_r - \rho^{\mu\nu}_r \,. \tag{1.76b}$$

Proovime nüüd leida massi pinnal jäävaid laenguid. Täheldasime varem, et voolud j^μ_r on jäävad massi pinnal, (1.68). Eeldades, et ruumilised komponendid j^k lähenevad nullile piisavalt kiiresti, leiame jäävad suurused,

$$C_r = \int_V d^3x j^0_\epsilon = \int_{\partial V} k^{i0}_r dS_i \,, \tag{1.77}$$

kus kasutasime massi pinnal kehtivat samasust (1.68), $j^\mu_r \doteq \partial_\nu k^{\mu\nu}_r$, mille kaudu saamegi lokaalse sümmeetria korral avaldada laenguid pindintegraalidena.[6]

Lisaks vooludele j_r, on meil ka massi pinnal jäävad Noetheri voolud J_r, millest võiksime proovida laenguid defineerida,

$$C_\epsilon = \int_V d^3x J^0_r = \int_{\partial V} (k^{i0}_r \epsilon^r) dS_i \,. \tag{1.78}$$

Need sõltuvad sümmeetria parameetri $\epsilon^r(x)$ funktsioonidest, mis muudab nad raskesti tõlgendatavateks. Kui ϵ^r oleks konstantne, saaksime ülaltoodud laengud tuttavamal kujul: $C_\epsilon = \epsilon^r C_r$ (vt ka (B.46)). Üldiselt aga ei ole suurused C_ϵ üheselt määratletavad. Tõsiasja, et lokaalse sümmeetriaga teooriad võimaldavad defineerida lõpmatult palju laenguid, avastati eelmise sajandi keskpaigas justnimelt üldrelatiivsusteoora kontekstis. Selle tõdemuse omaksvõtt kulges vaevaliselt, kuna see viitab segadust tekitavale asjaolule, et on gravitatsioonivälja jaoks on olemas üleküllusliik valik energia-impulsi tensoreid.

[6] Üldrelatiivsusteooria kontekstis kutsume selliseid laenguid *kvaasi-lokaalseteks*.

1.5 Üldisemad sümmetriateisendused

Valemist (1.63) saame tuletada veelgi üldisema kujuga sümmeetriateisenduste kui (1.62) järelmid. Kaalume näiteks teisendusi, mis sisaldavad lisaks teist-järku tuletisi parameetritest ϵ^r:

$$\delta Q^\alpha = \mathcal{A}^\alpha_r(Q)\cdot\epsilon^r(x) + \mathcal{B}^{\alpha\mu}_r(Q)\cdot\epsilon^r_{,\mu}(x) + \mathcal{C}^{\alpha\mu\nu}_r(Q)\cdot\epsilon^r_{,\mu\nu}\,. \tag{1.79}$$

Sarnaselt valemile (1.64) saab voolu J^μ_S kaheks jagada,

$$J^\mu_S = \tilde{j}^\mu_r\epsilon^r + \partial_\nu\big(k^{\mu\nu}_r\epsilon^r\big), \qquad \tilde{j}^\mu_r = j^\mu_r - \partial_\nu k^{\mu\nu}_r.$$

Sisestades need invariantsuse tingimusse $[\mathcal{L}]_\alpha\delta_S Q^\alpha + \partial_\mu J^\mu_S \equiv 0$, saame sarnaselt seostele (1.67) järjekordse kaskaadi Kleini-Noetheri samasusi

$$[\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{A}^\alpha_r + \partial_\mu\tilde{j}^\mu_r + \partial_\mu\partial_\nu k^{\mu\nu}_r \equiv 0\,, \tag{1.80a}$$

$$[\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{B}^{\alpha\mu}_r + \tilde{j}^\mu_r + 2\partial_\nu k^{\mu\nu}_r \equiv 0\,, \tag{1.80b}$$

$$[\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{C}^{\alpha[\mu\nu]}_r + k^{[\mu\nu]}_r \equiv 0\,.. \tag{1.80c}$$

Ülalolevast tulenevad Noetheri samasused,

$$\mathcal{N}_r = [\mathcal{L}]_\alpha\mathcal{A}^\alpha_r - \partial_\mu\big([\mathcal{L}]_\alpha B^{\alpha\mu}_r\big) + \partial_\mu\partial_\nu\big([\mathcal{L}]_\alpha C^{\alpha\mu\nu}_r\big) \equiv 0\,, \tag{1.81}$$

on (1.72) üldistustuseks.

Seni oleme eeldanud, et lagranžiaanid sisaldavad väljadest kuni esimest järku tuletisi. Üldrelatiivsusteooria Einsteini-Hilberti lagranžiaanis me kohtame aga teist järku tuletisi meetrikast. Saab kontrollida, et invariantsuse tingimus (1.25) püsib muutumatuna, kui Noetheri voolu (1.26) täiendada väljade teist järku tuletisi sisaldava osaga

$$J^\mu_S = \Pi^{\alpha\mu}\bar{\delta}_S Q^\alpha + \mathcal{L}\partial_S x^\mu - \Sigma^\mu_S + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu\nu}}\bar{\delta}_S Q^\alpha_{,\nu} - \partial_\nu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu\nu}}\bar{\delta}_S Q^\alpha\,. \tag{1.82}$$

2 Noetheri teoreem üldrelatiivsusteoorias

Näitasime eelmises peatükis, kuidas fikseeritud Minkowski aegruumis saab globaalse sümmeetria korral Noetheri esimese teoreemi abil leida jäävaid suuruseid. Samuti nägime, kuidas teine teoreem võimaldab lokaalse sümmeetria korral leida seoseid liikumisvõrrandite vahel. Soovides aga ka gravitatsiooni paremini mõista, pöörame nüüd tähelepanu olukorrale, kus aegruum—gravitatsiooni vahendaja—on ise dünaamiline väli. Liigume lõpliku-mõõtmelisest Poincaré rühmast lõpmatu-mõõtmelisse difeomorfismide rühma. Tuleb välja, et lokaalse difeomorfismisümmeetria korral ei ole gravitatsiooniliste jäävusseaduste leidmine sugugi triviaalne ülesanne. Energia jäävuse probleemist oldi teadlikud juba enne üldrelatiivsusteooria lõpliku versiooni avaldamist 1915. aasta novembris. Kusjuures just see probleem ajendaski Emmy Noetherit enda teoreeme formuleerima. Noetheri teoreemid on osutunud teoreetilises füüsikas tõeliselt kasulikeks, gravitatsiooni olemus on aga endiselt lahtine küsimus. Alustame sarnaselt eelneva peatükiga liikumisvõrrandite tuletamisest. Siin kasutatavat matemaatilist aparatuuri on tutvustatud lisas C.

2.1 Einsteini väljavõrrandid

Einsteini väljavõrrandid seovad aegruumi kõveruse selle energia-impulsi tihedusega,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}\,, \tag{2.1}$$

kus $G_{\mu\nu}$ on aegruumi kõverust kirjeldav **Einsteini tensor** (C.69), $R_{\mu\nu}$ on **Ricci tensor** (C.67), R on **Ricci skalaar** (C.68), $T_{\mu\nu}$ on **energia-impulsi tensor** ning konstantne võrdetegur $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 2.07665 \times 10^{-43} N^{-1}$ on **Einsteini gravitatsiooniline konstant**.[7] Enamikes praktilistes rakendustes pannakse $T_{\mu\nu}$ võrranditesse käsitsi sisse, et sellest tuletada aegruumi geomeetria. Võrrandid (2.1) kujutavad endas kümmet osatuletisega diferentsiaalvõrrandit, nimelt sõltumatute $g_{\mu\nu}$ komponentide jaoks. Samas aga pole sõltumatute diferentsiaalvõrrandite arv võrdne tundmatute arvuga. See tuleneb sellest, et ahendatud Bianchi samasused $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ (C.80) annavad meile neli lisapiirangut, mis on omakorda difeomorfismisümmetria tulem. Seega on kümnest diferentsiaalvõrrandist sõltumatud vaid kuus.

Üldrelatiivsusteooriat kirjeldab Hilberti mõjufunktsionaal,

$$S_H = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x\, \mathcal{L}_H(g, \partial g, \partial^2 g) = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x\, \sqrt{-g}\, R\,. \tag{2.2}$$

[7] Vahest kohtab kirjanduses Einsteini gravitatsioonilist konstanti, kus nimetajas on c^2, mitte c^4. Sel juhul oleks $T_{\mu\nu}$ mõõtmeks massitihedus, valikuga c^4 on see aga energiatihedus.

Kogu avaldis meetrilise gravitatsiooni üldrelatiivsusteooria mõjufunktsionaali jaoks sisaldab ka kosmoloogilist konstanti Λ,

$$S_G = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda)\,. \tag{2.3}$$

Täieliku üldrelatiivsusteooria mõjufunktsionaali saame, kui täiendame gravitatsioonilist osa aineväljade omaga,

$$S_{GR}[g, Q] = S_G[g] + S_M[g, Q]\,. \tag{2.4}$$

Siitmaalt väljavõrrandite tuletamiseks on kaks võimalikku lähenemist: kas esimest- või teist järku formalismis, millest esimest nimetatakse Palantini variatsiooniks. Teist järku lähenemisel varieeritakse mõju meetrika suhtes, st kõveruse skalaari käsitletakse meetrika ja selle esimest ning teist järku tuletiste funktsioonina $R = R(g, \Gamma(g), \partial\Gamma(g))$. Seevastu Palantini variatsioonis käsitletakse meetrikat ja seostust omavahel sõltumatutena, $R = R(g, \Gamma, \partial\Gamma)$, millest tulenevalt annavad need formalismid ka erineva arvu liikumisvõrrandeid. Teist järku formalismis tuletatakse 10 EL võrrandit, seevastu Palantini formalismis on kokku 50 võrrandit: 10 meetrika järgi varieerimisest ja 40 sümmeetrilise seostuse järgi varieerimisest saadavat võrrandit.

Meie töötame järgnevas teist järku formalismis ja käsitleme sõltumatutena pöördmeetrika $g^{\mu\nu}$ komponente. Mõjufunktsionaalist (2.4) saadavate väljavõrrandite üldine kuju on

$$[\mathcal{L}]_{\mu\nu} := \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\delta S_G}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0\,, \tag{2.5a}$$

$$[\mathcal{L}]_{\alpha} := \frac{\delta S_H}{\delta Q^{\alpha}} = \frac{\delta S_M}{\delta Q^{\alpha}} = 0\,. \tag{2.5b}$$

Teine komplekt võrrandeid mitte-gravitatsiooniliste väljade jaoks on tuletatud gravitatsiooniga minimaalselt seotud aineväljade lagranžiaanist.

Tuletamaks gravitatsioonilised väljavõrrandid, selmet otse Euleri tuletisi (2.5a) arvutada, varieerime lihtsalt mõju gravitatsioonilist osa:

$$\begin{aligned}\delta S_G &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda)\right) = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x\, \delta\left(\sqrt{-g}\right)\,(R - 2\Lambda) + \frac{1}{2\kappa} \int d^4x\, \sqrt{-g}\, \delta(g^{\mu\nu} \overset{\text{(C.68)}}{R_{\mu\nu}}) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\underbrace{\delta\left(\sqrt{-g}\right)}_{A} (R - 2\Lambda) + \sqrt{-g}\left(\underbrace{\delta g^{\mu\nu}}_{B}\right) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left(\underbrace{\delta R_{\mu\nu}}_{C}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.6}$$

Käsitleme variatsioone A, B ja C eraldi.

A: Variatsioon $\delta\sqrt{-g}$ on läbi tehtud lisas D.1. Tulemuseks on

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

B: Pöördmeetrika (C.27) variatsioon $\delta g^{\mu\nu}$ avaldub järgnevalt:

$$g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \implies (\delta g^{\mu\rho})g_{\rho\nu} + g^{\mu\rho}(\delta g_{\rho\nu}) = 0 \quad \implies \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}\,. \tag{2.8}$$

Sisestades (2.7) variatsiooni δS_G, saame vahetulemuseks

$$\delta S_G = -\frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\Big(R-2\Lambda\Big)g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\underbrace{\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}}_{C^*}\,. \tag{2.9}$$

C: Ricci skalaari (C.68), (C.77) variatsiooni $\delta R_{\mu\nu}$ leidmiseks kasutame ära teadmist, et seostuse variatsioon avaldub kahe seostuse vahena, olles seega tensor. Järelikult võiksime proovida sellest kovariantse tuletise võtmist,

$$D_\lambda(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}) = \partial_\lambda\big(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\big) + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma}\big(\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}\big) - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\nu}\big(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\sigma\mu}\big) - \Gamma^{\sigma}{}_{\lambda\mu}\big(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}\big)\,,$$

mille kaudu saaksime pärast pikka tuletuskäiku vastuseks

$$\delta R^{\rho}{}_{\mu\lambda\nu} = D_\lambda\,\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - D_\nu\,\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\,. \tag{2.10}$$

Samas lisas D.2 on võrdväärne tuletus lihtsamini läbi tehtud, andes tulemuseks (2.10), kuid ahendatult,

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\lambda\,\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - D_\nu\,\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\,. \tag{2.11}$$

Defineerime nüüd

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = D_\lambda\Big[g^{\mu\nu}\big(\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\sigma\mu}\big)\Big] := D_\lambda\delta w^\lambda\,, \tag{2.12}$$

ning tulenevalt valemist (F.21c) on valemis (2.9) integrand C^* täistuletis,

$$\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\big(\sqrt{-g}\,\delta w^\lambda\big)\,. \tag{2.13}$$

Pannes nüüd kõik nüüd kõik variatsiooni avaldisse (2.6), saame tulemuseks

$$\delta S_G = -\frac{1}{2\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}\,\left(\frac{1}{2}\Big(R-2\Lambda\Big)g_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa}\int d^4x\,\partial_\lambda\big(\sqrt{-g}\,\delta w^\lambda\big)\,. \tag{2.14}$$

Siinkohal oleks olukord väga mugav, kui meil oleks tegemist sellise kena divergentsiliikmega, mis ääretingimuse $\delta g_{\mu\nu}\Big|_{\partial V} = 0$ (Dirichlet tingimus) kaudu nulliks muutuks. Kahjuks aga sisaldab see ääreliige ka meetrika *teist* järku tuletisi ning nii $\delta g_{\mu\nu}\Big|_{\partial V} = 0$ *kui ka* $\partial_\lambda\delta g_{\mu\nu}\Big|_{\partial V} = 0$ stipuleerimine (Cauchy tingimus) oleks liigselt piirav ning laiemas kontekstis problemaatiline. Kuigi me saame liikumisvõrrandid tuletada ignoreerides ääreliiget, mida me siinkohal ka teeme, tuleb meil selle

juurde hiljem tagasi tulla, modifitseerides mõju S_H nii, et lisatud panus tühistaks täpselt tülika ääreliikme. Seega, gravitatsioonilise mõju variatsioon ilma ääreliikmeta on

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_G}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\Big(R-2\Lambda\Big)g_{\mu\nu}-R_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,\Big(\underbrace{R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu}}_{(2.1)}+\Lambda g_{\mu\nu}\Big) \\ &= \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,\Big(G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}\Big)\,.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Saadud tulemusega saame valemi (2.5a) ümber kirjutada kui

$$[\mathcal{L}]_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,\big(G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}\big)+\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0,$$

millest saamegi Einsteini väljavõrrandid (2.1), kui ignoreerime kosmoloogilist konstanti Λ ning kui energia-impulsi tensor $T_{\mu\nu}$ on identselt defineeritud kui

$${}_GT_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}\,. \tag{2.16}$$

Meenutame, et Noetheri teoreemide kontekstis ilmub kanooniline energia-impulsi tensor $\Theta^{\mu\nu}$. Tähistades tasase ruumi aine lagranžiaani kui $\mathcal{L}_M^\eta$, on see defineeritud kui

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}_M^\eta}{\partial_\mu Q^\alpha}\partial^\nu Q^\alpha - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_M^\eta\,,$$

mis tähendab, defineerituna aineväljade Q tuletiste kaudu (vt ka (1.16)). Teisest küljest, tensor (2.16) on defineeritud läbi meetrika tuletiste. Üllatavalt kombel aga on meetrika kaudu defineeritud tensor seotud Belinfante tensoriga, mis on omakorda seotud kanoonilise energia-impulsi tensoriga (1.60). Kui defineerime Hilberti tensori kui

$$T_H^{\mu\nu} := {}_GT^{\mu\nu}|_{g_{\rho\sigma}\to\eta_{\rho\sigma}},$$

avaldub Belifante energia-impulsi tensor täpselt kui

$$T_B^{\mu\nu} = T_H^{\mu\nu} - [\mathcal{L}_M^\eta]_\alpha\mathcal{B}^{\alpha\mu\nu}. \tag{2.17}$$

Seega mõlemad tensorid langevad kokku liikumisvõrrandite kehtivuse korral, $[\mathcal{L}_M^\eta]_\alpha = 0$. Koefitsiendid $\mathcal{B}^{\alpha\mu\nu}$ on maha-loetavad väljade teisenemise omadustest difeomorfismide all (vt. (1.62b)):

$$\delta_\xi Q^\alpha = \mathcal{A}_\mu^\alpha\xi^\mu + \mathcal{B}_\mu^{\alpha\nu}\partial_\nu\xi^\mu.$$

See on erakordne tulemus: gravitatsioon lubab defineerida „korrektse“ energia-impulsi tasases aegruumis. [14]

2.1.1 Gibbonsi-Hawkingi-Yorki (GHY) ääreliige

Kuigi ääreliikmete saatuseks on sageli olnud kõrvaleheit, kuna nad pole vajalikud väljavõrrandite tuletamisel, peitub nendes nii füüsikalist, matemaatilist kui ka filosoofilist sisu. Meid huvitab siinkohal ääreliikmete roll mõjufunktsionaali parandamisel, et optimeerimisülesanne oleks Hamiltoni printsiibi kohaselt hästi formuleeritud.

Hilberti mõjust gravitatsiooniliste väljavõrrandite tuletamisel tekkis meil vastavalt võrrandile (2.14) divergentsiliige,[8]

$$B_H = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,D_\lambda \delta w^\lambda = \int d^4x\,\partial_\lambda\Big(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} - \delta^\lambda_\nu \delta\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu})\Big),$$

millest tuleb meil lahti saada. Probleem seisneb selles, nagu ka varasemalt mainitud, et antud liige sisaldab variatsioone meetrika tuletistest ($\delta\Gamma$ sees). Tingimus $\delta g|_{\partial\Omega} = 0$ ei ole piisav ühese lahendi määramiseks. Nõudes lisaks, et ka $\delta(\partial g)|_{\partial\Omega} = 0$, oleks pisut pisut *ad hoc* ja võimalik, et ka ebakorrektne. Tõsiasi, et gravitatsioonilistes väljateooriates esinevad meetrika esimest järku tuletiste variatsioonid tuleneb sellest, et nende lagranžiaanid sisaldavad teist järku tuletisi. Kuna väljavõrrandid sisaldavad ainult kuni teist järku tuletisi meetrikast, saab mõju panna kirja viisil, kus kõik kõrgemat-järku tuletised on peidetud divergentsiliikmesse,

$$\begin{aligned} S_H &= S_E + \int_\Omega d^4x\,\partial_\mu W^\mu = \int_\Omega d^4x\,\mathcal{L}_{\text{maht}} + \int_\Omega d^4x\,\mathcal{L}_{\text{pind}} \\ &= \int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\big(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\big) + \int_\Omega d^4x\,\partial_\mu\Big(\sqrt{-g}\,g_{\lambda\rho,\nu}\big(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\big)\Big). \end{aligned} \tag{2.18}$$

$\Gamma\Gamma$-liige, ehk „mahuliige“ vastab sellele, mille Einstein pakkus välja juba aastal 1916,

$$S_E = \int_\Omega d^x\sqrt{-g}\,\mathcal{G} := \int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\big(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\big)\,. \tag{2.19}$$

Vastavalt nimetame seda, S_E, Einsteini mõjuks. Lisas E oleme selle ka tuletanud. Hilberti- ja Einsteini lagranžiaanid käituvad difeomorfismide all erinevalt:

$$\delta_\xi \mathcal{L}_H = -\partial_\lambda(\xi^\lambda \mathcal{L}_H) \qquad\qquad \delta_\xi \mathcal{L}_E = -\partial_\lambda(\xi^\lambda \mathcal{L}_H + W^\lambda). \tag{2.20}$$

Ainult Hilberti lagranžiaan teiseneb kui skalaartihedus. Nii S_H kui ka S_E annavad samad liikumisvõrrandd, $[\mathcal{L}_H]^{\mu\nu} = 0 = [\mathcal{L}_E]^{\mu\nu}$; nad on lahendi-ekvivalentsed, kuid mitte raja-ekvivalentsed. Matemaatiliselt tähendab esimene lihtsalt seda, et nad erinevad divergentsi-liikme võrra, mis ei mõjuta nendest tuletatavaid dünaamilisi väljavõrrandeid. Raja-ekvivalentsus on tugevam kriteerium: nende esimest järku variatsioonid erinevad maksimaalselt ääreliikme võrra, mis muutub nulliks *samade* ääretingimuste all; nad lähtuvad samast variatsiooniprintsiibist.

[8] Täht „B“ on akronüümiks ingliskeelsele sõnale *boundary* ehk „äär“.

Lahendi-ekvivalentsus ütleb meile, et *erinevatesse* lagranžiaanidesse on kodeeritud *samad* dünaamilised struktuurid, st samad võimalikud aegruumid. See viitab *ontilisele strukturaalsele realismile*, milles on „tõelisteks objektideks“ terved lahendiruumid, seega valik nende vahel on puhtalt valikuline, representatiivne[9]. Väljateooriate määramispiirkond ei ole ainult nende liikumisvõrrandite ruum, aga ka nende variatsiooniliste ääretingimuste ruum. Mõjufunktsionaali jaoks tähendab see, et määramispiirkonnaks on antud süsteemi kõik ajalood koos rajatingimustega. Kui kaks süsteemi ei ole rajaekvivalentsed, on neil erinevad hamiltoniaanid, Noetheri laengud... Nad esindavad seega erinevaid struktuure.

Liikudes lahendiekvivalentsilt rajaekvivalentsile läheme ühtlasi lokaalsest determinismist globaalsesse. Küsimus, et kas pidada seda erinevust pelgalt kokkuleppeliseks või füüsikaliselt tähenduslikuks sõltub sellest, millised raja-tundlikke suurusi (ADM energia, musta augu entroopia, ületeedeintegraalid) lugeda ontoloogia selgelt määratletud osadeks. Mitte-triviaalsed kalibratsiooniteisendused annavad meile füüsikalisi suurusi. Aegruum ilma ääretingimusteta on justkui kirjavahemärkideta tekst: lokaalselt grammatiliselt korrektne, kuid globaalselt ebamääraselt mõistetav.

Einsteini- ja Hilberti mõjude variatsioonides kohtame seega erinevaid ääreliikmeid. Nimelt

$$\delta S_H = \int_\Omega \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}}\, \delta g^{\mu\nu} + B_H, \tag{2.21a}$$

$$\delta S_E = \int_\Omega \frac{\delta S_E}{\delta g^{\mu\nu}}\, \delta g^{\mu\nu} + B_E, \tag{2.21b}$$

$$\delta S_H = \delta(S_E + S_B), \tag{2.21c}$$

milles S_B on ühenduslüliks S_H ja S_E vahel; teine liige valemis (2.18).

Kuna mõlemad mõjud annavad samad liikumisvõrrandid ($[\mathcal{L}_H]^{\mu\nu} = 0 = [\mathcal{L}_E]^{\mu\nu}$),

$$\frac{\delta S_H}{g^{\mu\nu}} = \frac{\delta S_E}{g^{\mu\nu}}\,,$$

on ääreliikmed seotud kui

$$B_E + \delta S_B = B_H\,. \tag{2.22}$$

Meile siinkohal huvitavas määravad Hilberti ja Einsteini mõjufunktsionaalid sama lokaalse aegruumi geomeetria, kuid erinevad selles, kuidas see geomeetria „kinnitub“ lõpliku piirkonna äärtes.

Idee oleks konstrueerida selline gravitatsiooniline mõju S_{Grav} mis tingimusel $\delta S_{Grav} \stackrel{!}{=} 0$ annaks meile Einsteini võrrandid vaakumis kui väljade väärtused on integratsioonirajades

[9] Hulgateoreetilises keeles võiksime öelda, et reaalsus on „tükeldatud“ ekvivalentsiklassideks.

fikseeritud. Seega otsime mõju kujul $S_{Grav} = S_H + S_{HB}$, milles S_{HB} on mingi pinnaliige, mis tuleb veel määratleda. Kuna

$$\delta S_{Grav} = \delta S_H + \delta S_{HB} = \int_\Omega \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}}\, \delta g^{\mu\nu} + B_H + \delta S_{HB}\,,$$

on piisav tingimus selle pinnaliikme leidmiseks

$$\big(B_H + \delta S_{HB}\big)\Big|_{\delta g=0} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

või alternatiivselt, kuna ääreliiget B_H saab avaldada läbi Einsteini mõju ääreliikme (2.22), mis mille jaoks juba kehtib $B_E|_{\delta g=0} = 0$,

$$\big(\delta S_B + \delta S_{HB}\big)\Big|_{\delta g=0} \stackrel{!}{=} 0\,.$$

See tingimus ei määra unikaalset pinnaliiget, kuna $(\delta S_B + \delta S_{HB})$ väljaspool ääreala $\partial\Omega$ nullist erinev.

J.W. York, G. Gibbons ja S. Hawking näitasid [15][16], et üks võimalik liige Hilberti mõju modifitseerimiseks oleks

$$S_{HB} := S_{GHY} = 2\int_{\partial\Omega} d^3x\,\sqrt{\epsilon h}\,K\,. \tag{2.23}$$

Selles Gibbonsi-Hawkingi-Yorki (GHY) ääreliikmes näeme ääreala $\partial\Omega$ väliskõveruse jälge K, indutseeritud meetrika determinanti h koos teguriga $\epsilon = +1$, kui ääreala-hüperpinna ühiknormaal on ruumisarnane, $\epsilon = -1$ kui see on ajasarnane. GHY ääreliige on üldiselt aktsepteeritud kui korrektne Einsteini-Hilberti mõju modifikatsioon. Huvitaval kombel ilmub ta ka muudes üldrelatiivsusteooria kontekstides (nt üldrelatiivsusteooria Hamiltoni formalismis või mustade aukude entroopia uurimisel).

Lagranžiaaniga $\mathcal{L}(Q^\alpha, \partial Q^\alpha)$ väljateoorias on Q suhtes lahendi-ekvivalentseks lagranžiaaniks

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \partial_\lambda\left[Q^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda Q^\alpha)}\right]\,,$$

mis on üldistuseks tulemusele (B.12) klassikalises mehhaanikas. Üldrelatiivsusteoorias, kui me identifitseerime ülalolevas suuruse $\mathcal{L}$ lagranžiaani mahuosaga valemis (2.18), saame üheselt määratleda pinna-lagranžiaani kui

$$\mathcal{L}_{pind} = -\partial_\lambda\left[g_{\mu\nu}\frac{\partial\mathcal{L}_{maht}}{\partial(\partial_\lambda g_{\mu\nu})}\right]\,.$$

Mahu- ega pinnaliige eraldivõetult ei teisene skalaartihedustena, vaid ainult nende summa. See tähendab, et pinna-lagranžiaani saab leida mahuosast nõudes difeomorfismi invariantsust. Samas aga saab ka mahuliikme tuletada pinnaliikmest spetsiifilisel eeldusel, et viimane esindab musta augu horisondi entroopiat. See viitab gravitatsiooni „holograafilisele“ olemusele.

2.2 Aktiivsed ja passiivsed difeomorfismid

Meetrilise gravitatsiooni korral on mõju (2.4) invariantne järgnevate teisenduste suhtes:

$$x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x), \tag{2.24a}$$

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu}(x); \qquad g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x(x')), \tag{2.24b}$$

$$Q_\alpha \to Q'_\alpha(x); \qquad Q'_\alpha(x') = t^\beta_\alpha Q_\beta(x). \tag{2.24c}$$

Meetrika teiseneb kui $(0,2)$-tensor, aineväjad teisenevad tensoriaalselt suurusega t^β_α, st näiteks skalaarväljade juhul kui $\varphi'(x') = \varphi(x)$ ning vektorväljade korral kui $A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\mu(x)$. Teisendus (2.24b) on interpreteeritav nii *aktiivse*- kui ka *passiivse* difeomorfismi invariantsusena.

Passiivne difeomorfism kujutab endas lihtsalt koordinaadistiku ümbernimetamist, kus mingit spetsiifilist objekti, näiteks meetrikat, kirjeldatakse erinevates koordinaatsüsteemides $\{x\}$ ja $\{x'\}$. Sel juhul $g_{\mu\nu}$ ja $g'_{\mu\nu}(x')$ esitavad (2.24b) järgi samat meetrikat antud muutkonnal M ehk tegemist on baasivahetusega puutujakimbus. Olgu meil punkt $P \in M$ mida me kirjeldame kahe kaardiga. Tensorid selles punktis on küll esitatavad kaardivahetuse jakobiaaniga, samas allolev kujutus on identsus muutkonnal M.

Teisest küljest, **aktiivne difeomorfism** seob omavahel erinevaid objekte samal muutkonnal ja koordinaatsüsteemis. $\{x'(x)\}$ on nüüd käsitletav kui kujutus muutkonnal ühelt punktilt teisele. Me nihutame igat punkti $p \to \phi(p)$; väljad asuvad samal koordinaadistikul, kuid nende väärtusi veetakse mööda $\phi^\star$-t. Olgu näiteks kaks punkti $P, P' \in M$ ning kaks meetrilist tensorit $g_{\mu\nu}(x)$ ja $g'_{\mu\nu}(x)$. Oletagem ka, et mõlemad meetrilised tensorid on väljavõrrandite lahenditeks. Juhul, kui need kaks meetrikat on omavahel seotud kui (2.24b), on tegemist aktiivse difeomorfismi invariantsusega.

Teisendused (2.24) infinitesimaalsel kujul (vrdl. (1.62)):

$$\delta_\xi x^\mu = \xi^\mu \tag{2.25a}$$

$$\bar{\delta}_\xi g^{\mu\nu} = g^{\lambda\nu}\xi^\mu_{,\lambda} + g^{\mu\lambda}\xi^\nu_{,\lambda} - g^{\mu\nu}_{,\lambda}\xi^\lambda = D^\mu\xi^\nu + D^\nu\xi^\mu \tag{2.25b}$$

$$\bar{\delta}_\xi \varphi = -\varphi_{,\lambda}\xi^\lambda = -(D_\lambda\varphi)\xi^\lambda \tag{2.25c}$$

$$\bar{\delta}_\xi A_\mu = -A_\lambda\xi^\lambda_{,\mu} - A_{\mu,\lambda}\xi^\lambda = -(D_\lambda A_\mu)\xi^\lambda - A_\lambda(D_\mu\xi^\lambda), \tag{2.25d}$$

kus üldiselt $\bar{\delta}_\xi Q = \delta_\xi Q - Q_{,\mu}\delta x^\mu = -\pounds_\xi Q$, st aktiivse variatsiooni all mõistame negatiivse märgiga Lie tuletist.

Esimate siinkohal ka seostuse variatsiooni (tuletuskäik on lisas F.5):

$$\bar{\delta}_\xi \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -D_{(\mu}D_{\nu)}\xi^\lambda + R^\lambda_{(\mu\nu)\sigma}\xi^\sigma. \tag{2.26}$$

2.3 Noetheri samasused ja jäävusseadused

2.3.1 Üldised Kleini-Noetheri samasused

Üldiselt vastab igale vektorälja ξ poolt genereeritud sümmetriateisendusele (2.25) invariantsuse võrrand:

$$0 \equiv [\mathcal{L}]_A \bar{\delta}_\xi Q^A + \partial_\mu J^\mu_\xi = [\mathcal{L}]_{\mu\nu} \bar{\delta}_\xi g^{\mu\nu} + [\mathcal{L}]_\alpha \bar{\delta}_\xi Q^\alpha + \partial_\mu J^\mu_\xi \,. \tag{2.27}$$

Siinkohal tähistab Q^A kõiki dünaamilisi välju, Q^α ainevälju. Ilma Noetheri voolu J^μ_ξ või teooriat ennast täpsustamata annab see seos meile teisenduste $\bar{\delta}_\xi Q^A = \mathcal{A}^A_\mu \xi^\mu + \mathcal{B}^{A\nu}_\mu (\partial_\nu \xi^\mu)$ korral:

$$\begin{aligned} 0 \equiv [\mathcal{L}]_A \bar{\delta}_\xi Q^A + \partial_\mu J^\mu_\xi &= [\mathcal{L}]_A \mathcal{A}^A_\mu \xi^\mu + [\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\nu}_\mu (\partial_\nu \xi^\mu) + \partial_\mu J^\mu_\xi \\ &= [\mathcal{L}]_A \mathcal{A}^A_\mu \xi^\mu + \partial_\nu \{[\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\nu}_\mu \xi^\mu\} - \partial_\nu \{[\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\nu}_\mu\} \xi^\mu + \partial_\mu J^\mu_\xi . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Esimene ja kolmas liige on tänu Noetheri samasusele (1.72) nullid, seega $\partial_\nu \{[\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\nu}_\mu \xi^\mu\} + \partial_\mu J^\mu_\xi \equiv 0$, mis võimaldab meil suvalise vektorväljaga ξ seotud Noetheri voolu kirja panna kui

$$J^\mu_\xi = -[\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\mu}_\nu \xi^\nu + \partial_\nu U^{\mu\nu}_\xi \,, \tag{2.29}$$

milles $U^{\mu\nu}_\xi$ on superpotentsiaal (vt (1.70)). 2.29 kujutab endas avaldist, mis koosneb väljavõrrandite kehtivuse korral nulliga-võrduvast liikmest ning teisest, identselt null-divergentsiga liikmest. See tähendab, et J^μ_ξ divergents võrdub massi pinnal nulliga, mis omakorda ütleb meile, et igasugune lokaalne „laeng“, mida me võiksime tahta defineerida, peaks ilmselt tulenema äärepiirkonnast.

Kuna üldrelatiivsusteooria lagranžiaan sisaldab kuni-teist järku tuletisi muutujatest, peab Noetheri voolu üldine kuju olema

$$J^\mu_\xi = j^\mu_\lambda \xi^\lambda + k^{\mu\rho}_\lambda \partial_\rho \xi^\lambda + l^{\mu\rho\sigma}_\lambda \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\lambda \,. \tag{2.30}$$

Sisestades selle koos üldiste väljavariatsioonidega avaldisse (2.27), saame

$$0 \equiv [\mathcal{L}]_A \mathcal{A}^A_\lambda \xi^\lambda + [\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\rho}_\lambda (\partial_\rho \xi^\lambda) + \partial_\mu \left(j^\mu_\lambda \xi^\lambda + k^{\mu\rho}_\lambda \partial_\rho \xi^\lambda + l^{\mu\rho\sigma}_\lambda \partial_\rho \partial_\sigma \xi^\lambda \right) \,, \tag{2.31}$$

milles kohtame kuni kolmandat järku tuletisi generaatorist ξ. Et need nulliga võrduksid, nõuame jällegi avaldise üldise kehtivuse kaalutlustel, et iga tuletise ees olev koefitsient eraldi nulliga võrduks, mis annab meile järjekordse Kleini-Noetheri kaskaadi:

$$0 \equiv [\mathcal{L}]_A \mathcal{A}^A_\lambda + \partial_\mu j^\mu_\lambda \,, \tag{2.32a}$$

$$0 \equiv [\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\rho}_\lambda + j^\rho_\lambda - \partial_\mu k^{\rho\mu}_\lambda \,, \tag{2.32b}$$

$$0 \equiv k^{(\rho\sigma)}_\lambda + \partial_\mu l^{\mu(\rho\sigma)}_\lambda \,, \tag{2.32c}$$

$$0 \equiv l^{(\mu\rho\sigma)}_\lambda \,. \tag{2.32d}$$

Kuigi need samasused sõltuvad voolu komponentidest, nendest tulenevad Noetheri samasused sõltuvad ainult Euleri tuletistest ja väljade Q^A sümmetriateisendustest. Ülalolev kehtib kõikide kuni-teist järku väljatuletisi sisaldavate lagranžiaanide jaoks. Järgnevalt uurime neid aga just üldrelatiivsusteooria raames.

2.3.2 Kovariantsed samasused üldrelatiivsusteoorias

Tuletamaks voolude ja Kleini-Noetheri samasuste konkreetseid kujusid võiksime proovida leida Noetheri voolu J^μ_ξ kujul (1.82). See üldisem kuju oleks ootuspärane, kuna lagranžiaan sisaldab teist järku tuletisi dünaamilistest väljadest. See osutub õigeks kujuks. [17, 18]

Voolu J^μ_ξ määravad pinnaliikmed. Meetrilise gravitatsiooni korral leiame nad järgnevalt:

- Tuletasime varasemalt (2.14), et Einsteini-Hilberti lagranžiaani varieerimine annab meile

$$\delta\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}(-G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + D_\lambda \delta w^\lambda), \quad \text{milles} \quad \delta w^\lambda = g^{\mu\nu}(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \delta^\lambda_\nu \delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu})\,.$$

- Lisaks, mateeria lagranžiaani $\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_M(Q_\alpha, D_\mu Q_\alpha, g_{\mu\nu})$ üldine variatsioon toob kaasa

$$\delta\mathcal{L}_M = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + [\mathcal{L}]^\alpha \delta Q_\alpha + D_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(D_\mu Q_\alpha)}\delta Q_\alpha\right)\,,$$

  milles võime viimase liikme ümber kirjutada kui

$$\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(D_\mu Q_\alpha)} = \sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}^\eta_M}{\partial(\partial_\mu Q_\alpha)} = \sqrt{-g}\Pi^{\mu\alpha}\,. \tag{2.33}$$

- Difeomorfismide $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$ korral teiseneb lagranžiaan kui kaaluga $w = 1$ tensortihedus, st $\bar{\delta}_\xi\mathcal{L} = -\partial_\mu(\mathcal{L}\xi^\mu)$, tuues kaasa kolmanda pinnaliikme.

- Võib tekkida veel üks lisaliige kui tuletaksime väljavõrrandid koos mõistlike ääretingimustega, tulenedes näiteks GHY-liikmest (2.23). Edasises me sellega aga ei arvesta.

Võttes need erinevad panused arvesse, jõuame tulemuseni

$$[\mathcal{L}]_{\mu\nu}\bar{\delta}_\xi g^{\mu\nu} + [\mathcal{L}]^\alpha\bar{\delta}_\xi Q_\alpha + \sqrt{-g}D_\mu\left[\frac{1}{2\kappa}\bar{\delta}_\xi w^\mu + \Pi^{\mu\alpha}\bar{\delta}_\xi Q_\alpha + \frac{1}{\sqrt{-g}}\mathcal{L}\xi^\mu\right] \equiv 0\,. \tag{2.34}$$

Teades, et $\sqrt{-g}D_\mu v^\mu = \partial_\mu(\sqrt{-g}v^\mu)$, avaldame valemis (2.27) esinevad suurused kui:

$$J^\mu_\xi = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\bar{\delta}_\xi w^\mu + \sqrt{-g}\Pi^{\mu\alpha}\bar{\delta}_\xi Q_\alpha + \mathcal{L}\xi^\mu\,. \tag{2.35}$$

Järgnevalt seletame selle liikmeid lahti. Kõigepealt, (2.25b) ja (2.26) abil saame (minnes $\delta \to \bar{\delta}_\xi$)

$$\bar{\delta}_\xi w^\mu = -(g^{\lambda\nu}\delta^\mu_\rho - g^{\lambda\mu}\delta^\nu_\rho)D_{(\nu}D_{\lambda)}\xi^\rho - \frac{3}{2}R^\mu_\rho\xi^\rho = -(D_\nu D^\nu\xi^\mu - D_\nu D^\mu\xi^\nu) - 2R^\mu_\rho\xi^\rho. \tag{2.36}$$

Kuna nii väljade kui ka $\bar{\delta}_\xi w^\mu$ variatsioonid on avaldatud kovariantsete tuletiste kaudu, otime ka Kleini-Noetheri samasusi, mis on avaldatud voolude kovariantsete tuletiste kaudu. Seega soovime leida vooludele J^μ_ξ kuju, mille liikmed on proportsionaalsed suurustega ξ, $D\xi$ ja $DD\xi$,

$$J^\mu_\xi = \bar{j}^\mu_\nu \xi^\nu + \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_\lambda \xi^\nu + \bar{l}^{\mu\rho\sigma}_\nu D_{(\rho} D_{\sigma)} \xi^\nu \,. \tag{2.37}$$

Kasutame seost $D_\rho D_\sigma = D_{(\rho} D_{\sigma)} + D_{[\rho} D_{\sigma]}$, et avaldada suurustega $D_{[\rho} D_{\sigma]}$ proportsionaalsed liikmed kõverustensori kaudu. Lähtudes seosest (C.76), jätame meelde

$$D_{[\mu} D_{\nu]} u^\lambda = \frac{1}{2}[D_\mu, D_\nu] u^\lambda = \frac{1}{2} R^\lambda_{\sigma\mu\nu} u^\sigma \,, \tag{2.38a}$$

$$D_{[\mu} D_{\nu]} u^\mu = \frac{1}{2} R^\mu_{\sigma\mu\nu} u^\sigma = \frac{1}{2} R_{\sigma\nu} u^\sigma \,. \tag{2.38b}$$

Samuti eeldame aineväljade Q_α teisenemist kujuga

$$\bar{\delta}_\xi Q_\alpha = \mathcal{U}_{\alpha\lambda} \xi^\lambda + \mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} D_\mu \xi^\lambda \,. \tag{2.39}$$

Sisestades seosed (2.36) ja (2.39) valemisse (2.35), saame J^μ_ξ komponendid,

$$\bar{j}^\mu_\nu = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \frac{3}{2} R^\mu_\nu + \sqrt{-g} \Pi^{\mu\alpha} \mathcal{U}_{\alpha\nu} + \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \,, \tag{2.40a}$$

$$\bar{k}^{\mu\lambda}_\nu = \sqrt{-g} \Pi^{\mu\alpha} \mathcal{V}^\lambda_{\alpha\nu}, \tag{2.40b}$$

$$\bar{l}^{\mu\rho\sigma}_\nu = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \Big(g^{\rho\sigma} \delta^\mu_\nu - g^{\mu\rho} \delta^\sigma_\nu \Big). \tag{2.40c}$$

Järgnevalt tegeleme seosega (2.34), mille jaotame Kleini-Noetheri samasuste komplektidesse. Selle jaoks on meil vaja teostada valemis (2.34) meetrika variatsioon (2.25b) ja aineväljade variatsioon (2.39). Tulemuseks saame

$$\begin{aligned} 2[\mathcal{L}]_{\mu\nu} D^\mu \xi^\nu + [\mathcal{L}]^\alpha \mathcal{U}_{\alpha\lambda} \xi^\lambda + [\mathcal{L}]^\alpha \mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} D_\mu \xi^\lambda + (D_\mu \bar{j}^\mu_\nu) \xi^\nu + \bar{j}^\mu_\nu D_\mu \xi^\nu + (D_\mu \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu) D_\lambda \xi^\nu \\ + \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_\mu D_\lambda \xi^\nu + D_\mu \Big(\bar{l}^{\mu\rho\sigma}_\nu D_{(\rho} D_{\sigma)} \xi^\nu \Big) \equiv 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Harutamaks nüüd ka selle kenasti lahti vektorväljade ξ^λ, selle tuletiste $D_\mu \xi^\lambda$ ning sümmeetrilise grupeeringi $D_{(\mu} D_{\nu)} \xi^\lambda$ järgi, kasutame viimase kahe liikme jaoks järgnevaid avaldisi:

$$\bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_\mu D_\lambda \xi^\nu = \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_{(\mu} D_{\lambda)} \xi^\nu + \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_{[\mu} D_{\lambda]} \xi^\nu = \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_{(\mu} D_{\lambda)} \xi^\nu + \frac{1}{2} \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu R^\nu_{\rho\mu\lambda} \xi^\rho, \tag{2.42a}$$

$$D_\mu \Big(\bar{l}^{\mu\rho\sigma}_\nu D_{(\rho} D_{\sigma)} \xi^\nu \Big) = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \frac{1}{2} \Big(\big(D^\mu R_{\mu\rho} \big) \xi^\rho + R_{\mu\rho} D^\mu \xi^\rho \Big). \tag{2.42b}$$

(2.42a) tuletamine on lihtne:

$$\bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_\mu D_\lambda \xi^\nu = \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu \Big(D_{(\mu} D_{\lambda)} + D_{[\mu} D_{\lambda]} \Big) \xi^\nu \overset{(2.38b)}{=} \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_{(\mu} D_{\lambda)} \xi^\nu + \frac{1}{2} \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu R^\nu{}_{\rho\mu\lambda} \xi^\nu \,.$$

Avaldiseni (2.42b) jõudmiseks kulub rohkem vaeva; tuleb üles leida ja osavalt ära kasutada lisaks juba tuttavatele $[D_\mu, D_\nu]$-liikmetele ka $[D_\mu, D^\nu D_\nu] = [D_\mu, \Box]$-liikmeid. Seosest (2.42b) ilmneb, et $\bar{l}^{\mu\rho\sigma}_\nu$ liikmed ei panusta valemisse (2.41) kolmandat järku kovariantseid tuletisi. Avaldisest (2.42a) nähtub, et valemis (2.41) on ainult üks liige, mis sisaldab $D_{(\mu}D_{\lambda)}$ liiget. Kuna see peab võrduma nulliga, saame esimese komplekti Kleini-Noetheri samasusi

$$\bar{k}^{\mu\lambda}_\nu + \bar{k}^{\lambda\mu}_\nu \equiv 0\,. \tag{2.43}$$

Ülejäänud samasused saame, kui kogume kordajatega $D_\mu\xi^\lambda$ ja ξ^λ proportsionaalsed liikmed. Kõigepealt kordaja $D_\mu\xi^\lambda$ ees olevad liikmed:

$$\begin{aligned}
0 &= 2[\mathcal{L}]_{\mu\nu}D^\mu\xi^\nu + \big([\mathcal{L}]^\alpha\mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} + \bar{j}^\mu_\lambda\big)D_\mu\xi^\lambda + \big(D_\mu\bar{k}^{\mu\lambda}_\nu\big)D_\lambda\xi^\nu - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}R_{\mu\rho}D^\mu\xi^\rho \\
&= \underbrace{2[\mathcal{L}]_{\nu\lambda}g^{\nu\mu}D_\mu\xi^\lambda}_{\substack{\nu\to\lambda\\ \mu\to\nu}} + \big([\mathcal{L}]^\alpha\mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} + \bar{j}^\mu_\lambda\big)D_\mu\xi^\lambda + \underbrace{\big(D_\nu\bar{k}^{\nu\mu}_\lambda\big)D_\mu\xi^\lambda}_{\substack{\mu\to\sigma\\ \lambda\to\mu\\ \nu\to\lambda\\ \sigma\to\nu}} - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}\underbrace{R^\mu_\lambda D_\mu\xi^\lambda}_{(\text{♪})} \\
&= \Big(2[\mathcal{L}]_{\nu\lambda}g^{\nu\mu} + [\mathcal{L}]^\alpha\mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} + \bar{j}^\mu_\lambda + D_\nu\bar{k}^{\nu\mu}_\lambda - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}R^\mu_\lambda\Big)D_\mu\xi^\lambda\,,
\end{aligned}$$

kus (♪)-tähistusega kohas toimisime järgnevalt:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\rho}D^\mu\xi^\rho &\overset{\substack{\mu\to\sigma\\ \rho\to\lambda}}{\Longrightarrow} R_{\sigma\lambda}D^\sigma\xi^\lambda = \big(R^\alpha_\lambda g_{\alpha\sigma}\big)\big(g^{\sigma\mu}D_\mu\big)\xi^\lambda \\
&= R^\alpha_\lambda\big(g_{\alpha\sigma}g^{\sigma\mu}\big)D_\mu\xi^\lambda = R^\alpha_\lambda\big(\delta^\mu_\alpha\big)D_\mu\xi^\lambda = \big(\delta^\mu_\alpha R^\alpha_\lambda\big)D_\mu\xi^\lambda = R^\mu_\lambda D_\mu\xi^\lambda\,.
\end{aligned}$$

Sama strateegiaga korjame valemist (2.41) kokku ja grupeerime ka kordaja ξ^λ ees olevad liikmed. Niisiis saame juurde kaks Kleini-Noetheri samasust:

$$2[\mathcal{L}]_{\nu\lambda}g^{\nu\mu} + [\mathcal{L}]^\alpha\mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} + \bar{j}^\mu_\lambda + D_\nu\bar{k}^{\nu\mu}_\lambda - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}R^\mu_\lambda \equiv 0\,, \tag{2.44a}$$

$$[\mathcal{L}]^\alpha\mathcal{U}_{\alpha\lambda} + D_\mu\bar{j}^\mu_\lambda + \frac{1}{2}\bar{k}^{\mu\rho}_\nu R^\nu_{\lambda\mu\rho} - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}D_\mu R^\mu_\lambda \equiv 0\,. \tag{2.44b}$$

Defineerime nüüd uue voolu.

$$c^\mu_\lambda := \bar{j}^\mu_\lambda + D_\nu\bar{k}^{\nu\mu}_\lambda - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}R^\mu_\lambda\,, \tag{2.45}$$

mille kovariantne tuletis on

$$D_\mu c^\mu_\lambda = D_\mu\bar{j}^\mu_\lambda + \frac{1}{2}\bar{k}^{\mu\rho}_\nu R^\nu_{\lambda\mu\rho} - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}D_\mu R^\mu_\lambda\,, \tag{2.46}$$

kus kasutasime $D_\mu D_\mu\bar{k}^{\nu\mu}_\lambda \overset{(2.43)}{=} D_{[\mu}D_{\nu]}\bar{k}^{\nu\mu}_\lambda \overset{(2.38b)}{=} \frac{1}{2}\bar{k}^{\mu\rho}_\nu R^\nu_{\lambda\mu\rho}$.

Seega samasused (2.44) saab nüüd kompaktsemalt ümber kirjutada kui

$$2[\mathcal{L}]_{\nu\lambda}g^{\nu\mu} + [\mathcal{L}]^\alpha\mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} + c^\mu_\lambda \equiv 0\,, \tag{2.47a}$$

$$[\mathcal{L}]^\alpha\mathcal{U}_{\alpha\lambda} + D_\mu c^\mu_\lambda \equiv 0\,. \tag{2.47b}$$

Paneme need kaks valemit kokku võttes kovariantse tuletise samasusest (2.47a), ilmutades $D_\mu c^\mu_\lambda$ ning sisestades selle valemisse (2.47b). Jõuame Noetheri samasuse lõpliku kujuni:

$$\mathcal{N} = [\mathcal{L}]^\alpha \mathcal{U}_{\alpha\lambda} - D_\mu \left([\mathcal{L}]^\alpha \mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda}\right) - 2D_\mu [\mathcal{L}]_{\nu\lambda} g^{\nu\mu} \equiv 0\,. \tag{2.48}$$

Käsitleme nüüd erijuhte.

Esiteks, gravitatsioonivälja puudumisel või mitte-dünaamilises aegruumis on meil $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu},\ D_\mu = \partial_\mu, [\mathcal{L}]_{\mu\nu} = 0, \bar{j}, \bar{k} = 0$, seega taanduvad eesolevad samasused aineväljasid käsitlevale osale, nimelt Kleini-Noetheri kaskaadidele (1.67) ja Noetheri samasustele (1.72). Valem (2.41) võtab kuju:

$$[\mathcal{L}]^\alpha \mathcal{U}_{\alpha\lambda}\xi^\lambda + [\mathcal{L}]^\alpha \mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} D_\mu \xi^\lambda = 0\,.$$

Paar sõna $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{V}$ rollidest: nad on põhimõtteliselt Lie tuletise komponendid, nendesse on sisse kodeeritud aineväljade teisenemine difeomorfismidel, $\bar{\delta}_\xi Q_\alpha = \mathcal{U}_{\alpha\lambda}\xi^\lambda + \mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} D_\mu \xi^\lambda$, nende täpne kuju sõltub teiseneva välja tüübist, näiteks:

1. skalaarvälja φ korral: $\mathcal{U}_{\alpha\lambda} = -\partial_\lambda \varphi$ ja $\mathcal{V}^\mu_{\alpha\lambda} = 0$;
2. vektorvälja A_ν korral: $\mathcal{U}_{\nu\lambda} = -\partial_\lambda A_\nu$ ja $\mathcal{V}^\mu_{\nu\lambda} = -\delta^\mu_\nu A_\lambda$, sest $(\pounds_\xi A)_\alpha = \xi^\lambda \partial_\lambda A_\lambda + A_\lambda \partial_\alpha \xi^\lambda$;
3. Diraci spiinorite ψ või Weyli spiinorite $\psi_{L/R}$ korral on $\mathcal{U}_{\mathcal{A}\lambda} = -\xi^\lambda \partial_\lambda \psi$ ja $\mathcal{V}^\mu_{A\lambda}$ on seotud Lorentzi generaatoritega $\Sigma^{\mu\nu}$, mis kannab informatsiooni spinnist impulsimomendist ja sisemistest sümmeetriatest (vt nt (1.56), (1.60)).

Teiseks, aineväljade Q_α puudumisel on meil $\mathcal{U} = \mathcal{V} = 0$ ja $\bar{k} = 0$. Ühest küljest on meil $[\mathcal{L}]_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\Big)$. Teisalt, valem (2.40a) annab

$$\bar{j}^\mu_\nu = -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{3}{2}R^\mu_\nu + \delta^\mu_\nu\left(\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big(R - 2\Lambda\Big)\right),$$

mille sisestame valemisse (2.45), saades

$$\begin{aligned} c^\mu_\nu &= -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\Big)R^\mu_\nu + \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big(R - 2\Lambda\Big)\delta^\mu_\nu \\ &= -\frac{2\sqrt{-g}}{2\kappa}\Big(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\nu + \Lambda\delta^\mu_\nu\Big) = -\frac{\sqrt{-g}}{\kappa}\Big(G^\mu_\nu + \Lambda\delta^\mu_\nu\Big) = -2[\mathcal{L}]_{\nu\lambda}g^{\lambda\mu}\,. \end{aligned}$$

Seega esimest järku samasus (2.47a) annab identselt nulli ning ühtlasi samasus (2.47b) on

$$0 = D_\mu c^\mu_\nu = D_\mu(-2[\mathcal{L}]_{\nu\lambda}g^{\lambda\mu}) = -\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}D_\mu(G_{\nu\lambda} + \Lambda g_{\nu\lambda})g^{\lambda\mu}$$

mis on nähtavasti proportsionaalne ahendatud Bianchi samasusega $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Kusjuures, kuna Bianchi samasus kehtib Einsteini tensori kui väljavõrranditest sõltumatu geomeetrilise objekti jaoks, saab (2.34) kirjutada kui

$$\begin{aligned} 0 &\equiv D_\lambda \left\{ 2g^{\lambda\nu}[\mathcal{L}]_{\mu\nu}\xi^\mu + \delta^\lambda_\mu \frac{1}{2\kappa}\bar{\delta}_\xi w^\mu + \delta^\lambda_\mu \mathcal{L}\xi^\mu \right\} \\ &= D_\lambda \left\{ 2g^{\lambda\nu}\Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\Big)\xi^\mu + \delta^\lambda_\mu \frac{1}{2\kappa}\bar{\delta}_\xi w^\mu + \delta^\lambda_\mu \Big(R - 2\Lambda\Big)\xi^\mu \right\} \\ &= D_\lambda \left\{ 2R^\lambda_\mu \xi^\mu + \delta^\lambda_\mu \frac{1}{2\kappa}\bar{\delta}_\xi w^\mu \right\} := D_\lambda \bar{J}^\lambda_\xi \,, \end{aligned} \tag{2.49}$$

demonstreerides, et $\bar{J}^\mu_\xi$ on kovariantselt jääv suurus.

Järelikult ei anna difeomorfismi invariantsusest tuletatud Noetheri vool meile jäävusseadust gravitatsiooni jaoks; ta lihtsalt taasesitab geomeetrilise fakti, et $G^{\mu\nu}$ on divergentsivaba. Sellest tulenevalt ongi raske leida lokaalset, kalibratsiooni-invariantset gravitatsioonivälja energiatihedust - jäävusseadus on juba geomeetriasse sisse kodeeritud ja seda saab alati avaldada läbi superpotentsiaali (antisümmeetrilise pinnaliikme): olgu meil $J^\mu_\xi = D_\nu U^{[\mu\nu]}_\xi$, milles superpotentsiaal $U^{[\mu\nu]}_\xi = -U^{[\nu\mu]}_\xi$ on antisümmeetriline. Seega $D_\mu J^\mu_\xi \equiv 0$, kuna $D_\mu D_\nu U^{[\mu\nu]}_\xi = 0$. Üldrelatiivsusteoorias saame näiteks defineerida $U^{[\mu\nu]}_\xi = \frac{1}{2\kappa} D^{[\mu}\xi^{\nu]}$ ehk Komari superpotentsiaali

Kolmandaks vaatame veel juhtu, kus gravitatsioon on paaritud skalaarväljaga φ. Nüüd on $\mathcal{U}_\nu = -\partial_\nu\varphi$ ja kuna $\mathcal{V} = 0$ ning samuti $\bar{k}^{\mu\lambda}_\nu = 0$ (vt (2.40)). Seega samasused (2.47) taanduvad erijuhule:

$$2[\mathcal{L}]_{\nu\lambda}g^{\nu\mu} + c^\mu_\lambda \equiv 0 \,, \qquad -[\mathcal{L}]^\varphi \partial_\lambda\varphi + D_\mu c^\mu_\lambda \equiv 0 \,, \tag{2.50}$$

milles

$$\begin{aligned} c^\mu_\lambda &= j^\mu_\lambda - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}R^\mu_\lambda \\ &= \left(-\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{3}{2}R^\mu_\lambda + \delta^\mu_\lambda \mathcal{L}_G\right) + \left(-\sqrt{-g}\frac{\partial\mathcal{L}^\eta_M}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\lambda\varphi + \delta^\mu_\lambda\sqrt{-g}\mathcal{L}^\eta_M\right) - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\frac{1}{2}R^\mu_\lambda \\ &= -2\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(G^\mu_\lambda + \Lambda\delta^\mu_\lambda) - \sqrt{-g}\Theta^\mu_\lambda = -2[\mathcal{L}]_{\lambda\nu}g^{\nu\mu} + 2\frac{\delta S_M}{\delta g^{\lambda\nu}}g^{\nu\mu} - \sqrt{-g}\Theta^\mu_\lambda \,. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Siin tähistab Θ kanoonilist energia-impulsi tensorit skalaarvälja jaoks. Kui avaldis (2.51) on sisestatud valemisse (2.50) , leiame, et vastavalt valemile (2.16) on $T^{\mu\nu}_H = \Theta^{\mu\nu}$. Juhime eraldi tähelepanu sellele, mis siin juhtus: Noetheri teisest teoreemist tulenevad samasused tõestasid Hilberti ja kanoonilise energia-impulsi tensori ühtelangevuse. See on üldine tulemus ja kehtib ka teiste väljade korral. Tänu Bianchi samasusele, $D_\mu G^{\mu\nu} \equiv 0$, on võrrand (2.50) ekvivalentne samasusega

$$D_\mu \Theta^\mu_\lambda = -\frac{1}{\sqrt{-g}}[\mathcal{L}]^\varphi \partial_\lambda\varphi \,, \tag{2.52}$$

millest nähtub, et aineväljade energia-impulsi tensor on kovariantselt jääv suurus sõltumata sellest, kas aineväljade liikumisvõrrandid kehtivad.

2.4 Jäävusseadused

Püstitatud küsimus, kas energia on üldrelatiivsusteoorias jääv suurus, jääb lahtiseks. Samuti pole selge, mida me üldse mõistame energiana. Võime otsida nt kinnise süsteemi koguenergiat, tõkestatud piirkonna kvaasi-lokaalset energiat või lokaalset energiat ehk energiatihedust.

Minkowski aegruumis on energia-impulsi tensori jäävus nihete ja Lorentzi teisenduste tagajärjeks. Kuna need on globaalsed teisendused, rakendub Noetheri esimene teoreem. Üldrelatiivsusteoorias me käsitleme lokaalseid koordinaatteisendusi, millest tulenevalt annab Noetheri teine teoreem meile ülekülluslikku valiku jäävaid laenguid, mille interpreteerimine ei ole triviaalne küsimus. Aineväljade gravitatsiooniga paarimine võimaldab defineerida „õige“ mateeria energia-impulsi tensori (2.17). Puhta gravitatsioonivälja korral juhatavad väljavõrrandid meid aga identselt nulliga võrduva energia-impulsi tensorini.

Jätkame sellega, mis tuleneb otseselt difeomorfismisümmetriast. Üldrelatiivsusteooria täieliku mõjufunktsionaali $S_{GR}[g,Q] = S_G[g] + S_M[g,Q]$ variatsioon on

$$\delta S = \int d^4x \frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \frac{\delta S_M}{\delta Q^\alpha} \delta Q^\alpha \,.$$

Sellest on tuletatavad gravitatsiooni- ja aineväljade liikumisvõrrandid. Eeldame, et aineväljade liikumisvõrrandid kehtivad ja nõuame difeomorfismisümmetriat:

$$\begin{aligned}
0 = \delta_\xi S &= \int d^4x \left(\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} \bar{\delta}_\xi g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \bar{\delta}_\xi g_{\mu\nu} + \underbrace{\frac{\delta S_M}{\delta Q^\alpha}}_{[\mathcal{L}]_\alpha \doteq 0} \bar{\delta}_\xi Q^\alpha \right) \\
&= \int d^4x \left(\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \Big(\underbrace{\overset{(2.25b)}{-D_\mu \xi_\nu - D_\nu \xi_\mu}}_{\substack{\text{sümmeetriline } (\mu\nu) \\ \Downarrow \\ \bar{\delta}_\xi g_{\mu\nu} = -2D_{(\mu}\xi_{\nu)}}} \Big) = \dots \\
&= -2 \int d^4x \, \frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} (D_\mu \xi_\nu) - 2 \int d^4x \, \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} (D_\mu \xi_\nu) \\
&= -2 \int d^4x \, \underbrace{D_\mu \left[\left(\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \xi_\nu \right]}_{\int_V D_\mu(\dots) = \oint_{\partial V} n_\nu (\dots) dS = 0} + 2 \int d^4x \, D_\mu \left(\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \xi_\nu = \dots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ldots &= 2\int d^4x\, D_\mu\left(\frac{\delta S_G}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\xi_\nu + 2\int d^4x\, D_\mu\overset{(2.16)}{\left(\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}\right)}\xi_\nu \\
&= \frac{1}{\kappa}\int d^4x\, D_\mu\Big[\sqrt{-g}\Big(G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} + \kappa T^{\mu\nu}\Big)\Big]\xi_\nu\,.
\end{aligned}
$$

Esimene integrand on identselt null tänu ahendatud Bianchi samasusele ${G^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$ ja teine tänu meetrilisusele ${g^{\mu\nu}}_{;\mu} = 0$. Invariantsuse korral peab $\delta_\xi S = 0$ kehtima suvalise ξ korral, seega ka $D_\mu\left(\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}\right) = 0$ ehk $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ eeldusel, et aineväljade liikumisvõrrandid kehtivad. Teisest küljest, aineväljade energia-impulsi tensori $T^{\mu\nu}$ kovariantse tuletise nulliga võrdumine tuleneb ka gravitatsioonilistest väljavõrranditest, $G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}$, mis on kooskõlas üldrelatiivsusteooriaga.

Kuna energia-impulsi tensor T^μ_ν on kovariantselt jääv, st

$$
D_\mu\sqrt{-g}T^\mu_\nu = \partial_\mu\sqrt{-g}T^\mu_\nu - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\sqrt{-g}T^\mu_\lambda = 0, \tag{2.53}
$$

ei ole pidevuse võrrandi puudumise tõttu võimalik tuletada globaalselt jäävat suurust. See tähendab, et üldiselt ei ole gravitatsioonilistes süsteemides aineväljade impulss ja energia eraldiseisvalt jäävad suurused. Tõepoolest, võib tunduda loomuliku eeldusena, et kuna aineväljad vahetavad lokaalselt energia-impulssi gravitatsiooniväljaga, peaks viimane ka ise käituma gravitatsiooniallikana. Sellest tulenevalt võiks otsida mingit suurust t^μ_ν, tähistamaks gravitatsioonivälja enda energia-impulssi, mille liitmisel aineväljade energia-impulsi tensorile saaksime null-divergentsiga võrrandi,

$$
\partial_\mu\sqrt{-g}\,(T^\mu_\nu + t^\mu_\nu) = 0\,. \tag{2.54}
$$

Einstein, lähtudes enda mõjust (2.19), defineeris gravitatsioonivälja energia-impulsi kui

$$
(2\kappa)\,{}_E t^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\rho\sigma,\mu}}g_{\rho\sigma,\nu} - \delta^\mu_\nu\mathcal{G}\,, \tag{2.55}
$$

mis võib tunduda loomuliku sammuna, olles konstrueeritud sarnaselt kanoonilise energia-impulsi tensoriga. Väljavõrrandid saab nüüd kirja panna kui

$$
{}_E\mathcal{T}^\mu_\nu = T^\mu_\nu + {}_E t^\mu_\nu = -\partial_\rho\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g^{\sigma\nu}_{,\rho}}g^{\sigma\mu}\right)\,, \tag{2.56}
$$

milles osatuletis ∂_μ avaldise paremal poolel on identselt null, seega saame pidevuse võrrandi $\partial_\mu\left({}_E\mathcal{T}^\mu_\nu\right) \equiv 0$. Samas ilmselgelt ei ole ${}_E\mathcal{T}^\mu_\nu$ tensoriaalne suurus. Arutelu selle **pseudotensori** tähenduse üle leidis aset juba Einsteini ja Kleini vahel, mis oligi üheks põhiliseks ajendiks Noetherile võtmaks ette tööd enda teoreemide kirjapanemiseks.

On välja pakutud ka mitmeid teisi pseudotensoreid $\mathcal{T}^{\mu}_{\nu}$, näiteks Landau-Lifschitzi, Papapetrou, Bergmanni, Moelleri, Weinbergi ja Penrose'i poolt, millest osad on ka sümmeetrilised ning seega impulsimomendina defineeritavad. Probleem ei seisnegi matemaatiliselt korrektsete pseudotensoritite leidmises. Tõsiasi on, et eksisteerib lõpmatu hulk pseudotensoreid! Tehes valiku mingi sobiva antisümmeetrilise superpotentsiaali $U^{\mu\lambda}_{\nu} = U^{[\mu\lambda]}_{\nu}$ kohta saame defineerida sellest tuleneva gravitatsioonilise energia-impuplsi tensori kui

$$\kappa\sqrt{-g}\, t^{\mu}_{\nu} := \sqrt{-g}\, G^{\mu}_{\nu} + \frac{1}{2}\partial_{\lambda} U^{\mu\lambda}_{\nu}\,. \tag{2.57}$$

Seejärel leiame väljavõrrandite $G^{\mu\nu} = -\kappa T^{\mu\nu}$ abil, et kogu energia-impulsi pseudotensori divergents

$$2\kappa\sqrt{-g}\mathcal{T}^{\mu}_{\nu} = 2\kappa\sqrt{-g}(T^{\mu}_{\nu} + t^{\mu}_{\nu}) = \partial_{\lambda} U^{\mu\lambda}_{\nu}, \tag{2.58}$$

on üheselt null tänu antisümmeetriale superpotentsiaali ülemistes indeksides. Eelnevat saab üldistada veelgi, tuues sisse sobivate indeksi-sümmeetriatega objektidest $U^{\mu\lambda\rho}_{\nu}$ tuletatud superpotentsiaalid. Need osutuvad vajalikeks sümmeetriliste pseudotensorite defineerimisel.

Mõned superpotentsiaalid on olnud erilise tähelepanu all: P. von Freud avastas, et Einsteini pseudotensori saab tuletada järgnevast superpotentsiaalist,

$${}_{F}\mathcal{U}^{\mu\nu}_{\lambda} := (-g)^{\frac{1}{2}} g_{\lambda\rho}\partial_{\sigma}\left[(-g)(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma})\right]\,. \tag{2.59}$$

A. Komar avastas „kovariantse“ superpotentsiaali, mida oleme juba eelnevalt ka maininud,

$${}_{K}U^{\mu\nu}_{\xi} := \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\,(D^{\mu}\xi^{\nu} - D^{\nu}\xi^{\mu}). \tag{2.60}$$

See avaldis on kovariantne, kuid selle hinnaks on sõltuvus suvalistest vektorväljadest ξ. Veel üks näide on nimetatud selle avastajate initsiaalide (J. Katz, J. Bicak ja D. Lynden-Bell) järgi KBL-pseudopotentsiaaliks. See on defineeritud taustmeetrika $\bar{g}_{\mu\nu}$ kaudu, mille suhtes omakorda on defineeritud kovariantne tuletis $\bar{D}_{\mu}$. Taustmeetrika muudab võimalikuks defineerida tensoreid läbi seostuste vahede nagu $\Delta\Gamma = \Gamma - \bar{\Gamma}$. KBL-superpotentsiaali saab siis avaldada läbi Komari superpotentsiaali ja lisaliikmete kui

$$\begin{aligned} {}_{KBL}U^{\mu\nu}_{\xi} &= {}_{K}U^{\mu\nu}_{\xi} - {}_{K}\bar{U}^{\mu\nu}_{\xi} + S^{\mu}\xi^{\nu} - S^{\nu}\xi^{\mu}\,, \\ S^{\mu} &:= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\left(\Delta\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma} - \Delta\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}\right)\,. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Superpotentsiaalid on seotud Noetheri invariantsue tingimusega. Oleme näidanud, et kui väljade sümmeetriavariatsioonid on kujul $\delta_{\xi}Q^{A} = \mathcal{A}^{A}_{\mu}\xi^{\mu} + \mathcal{B}^{A\nu}_{\mu}(\partial_{\nu}\xi^{\mu})$, saame Noetheri voolud

vastavalt valemile (2.29) avaldada kui $J^\mu_\xi = -[\mathcal{L}]_A \mathcal{B}^{A\mu}_\nu \xi^\nu + \partial_\nu U^{\mu\nu}_\xi$ ehk avaldisena, mis koosneb massi pinnal kaduvast liikmest ja identselt null-divergentsiga liikmest ehk superpotentsiaalist.

Me saame tuvastada superpotentsiaali, kirjutades voolu komponentide kaupa lahti nagu valemis (2.40), $J^\mu_\xi = \bar{j}^\mu_\nu \xi^\nu + \bar{k}^{\mu\lambda}_\nu D_\lambda \xi^\nu + \bar{l}^{\mu\rho\sigma}_\nu D_{(\rho} D_{\sigma)} \xi^\nu$. Võtame näiteks vaakumgravitatsiooni: difeomorfismisümmeetria korral võtab eelnev avaldis järgneva kuju

$$ {}_G J^\mu_\xi = -\frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \left(G^\mu_\nu + \Lambda \delta^\mu_\nu\right) \xi^\nu + \partial_\nu \left({}_G \mathcal{U}^{\mu\nu}_\xi\right) . \tag{2.62} $$

Teisest küljest, valemist (2.40) on võimalik tuletada

$$ \begin{aligned} {}_G J^\mu_\xi &= -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left(D_\nu D^\nu \xi^\mu - D_\nu D^\mu \xi^\nu\right) + 2 \left(G^\mu_\nu + \Lambda \delta^\mu_\nu\right) \xi^\nu \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{\kappa} \left(G^\mu_\nu + \Lambda \delta^\mu_\nu\right) \xi^\nu + \frac{1}{2\kappa} \partial_\nu \left(\sqrt{-g} (D^\mu \xi^\nu - D^\nu \xi^\mu)\right) , \end{aligned} \tag{2.63} $$

milles esineva superpotentsiaali saame identifitseerida kui Komari superpotentsiaali. Seda näitasid ka D. Bak, D. Cangemi ja R. Jackiw [19], kes järgnevalt taastuletasid ka Papapetrou pseudotensori Noetheri teoreemi ja Belinfante sümmetriseerimisprotseduuri abil.

Oleme näinud kuidas Noetheri teoreemide abil saab defineerida jäävaid laenguid, olles leidnud füüsikalise süsteemi sümmeetriad. Näitasime, et nii Noetheri vool J^μ_ξ kui ka selle komponendid j^μ_r on massi pinnal jäävad. Üldrelatiivsusteooria vaakumjuhul saame määratleda voolu j^μ_r lähtuvalt valemist (2.62) kui

$$ j^\mu_\nu = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \left((R - 2\Lambda)\delta^\mu_\nu + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho,\nu}\, g^{\rho\mu} - \Gamma^\mu_{\lambda\rho,\nu}\, g^{\lambda\rho}\right) . \tag{2.64} $$

On ilmne, et see vool sõltub koordinaadistiku valikust, kuna selle puhul kehtib $\partial_\mu j^\mu_\nu \doteq 0$ aga mitte $D_\mu j^\mu_\nu \doteq 0$. Seega pole see ka sobiv suurus jäävusseaduse defineerimiseks. Kusjuures see „pseudovool“ on proportsionaalne Einsteini energia-impulsi tensoriga.

Uurime, et millest tulenevalt üldse saab Noetheri voolusid massi pinnal superpotentsiaalist tuletada. Olgu meil 4-mõõtmelises aegruumis mingi piirkond M, piiritletud ∂M poolt, mis on ajasarnane silinder koos kahe ruumisarnase pinnaga rajades t_0 ja t_1. Noetheri gravitatsiooniliste voolude ${}_G J^\mu_\xi$ massi pinnal jäävusest saame Stokesi teoreemi abil:

$$ \begin{aligned} \int_M d^4x \, \left(\partial_\mu \, {}_G J^\mu_\xi\right) = 0 \iff & \int_{\partial M} d^3x \, n_\mu \, {}_G J^\mu_\xi = 0 \\ \iff & \int_{t=t_1} d^3x \, J^0_\xi - \int_{t=t_0} d^3x \, {}_G J^0_\xi + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S d^2x \, n_i \, {}_G J^i_\xi = 0 . \end{aligned} $$

S on siinkohal 2-mõõtmeline sfäär lõpmatuses ja n_i selle ühikvektor lõpmatuse suunas. Kui viimane liige muutub nulliks, saame tuletada jäävad laengud,

$$ Q_\xi = \int_S d^2x \, n_i U^{0i}_\xi , \tag{2.65} $$

kuna ${}_G J^0_\xi = \partial_i U^{0i}_\xi$. Kuna nii voolud ${}_G J^\mu_\xi$ kui ka superpotentsiaal (2.60) sõltuvad vektorväljast ξ, sõltuvad ka laengud Q_ξ. Seda võib interpreteerida nii lõpmatu hulga jäävusseadustena või kui ebaõnnestumisena *tõelise* jäävusseaduse leidmisel. Me teame, et tasases aegruumis on energia- ja impulsimomendi (laengu) jäävus seotud vastavalt nende invariantsusega ajaliste nihete ja ruumiliste pöörete all. Sellest tulenevalt piirdutakse (2.65) käsitlusel juhtudega, kus eksisteerivad Killingi sümmeetriad, mis seavad vektorväljadele piiravaid ξ tingimusi.

Kui energia-impulssi ei saa lokaalselt defineerida, siis ehk võiks proovida seda defineerida lõplikus piirkonnas. Idee seisneks mingi aegruumi piirkonna hüperpinnaga piiritlemises, kinnitades sellele energia-impulsi 4-vektori. Selline idee sai tuntuks tänu J. Browni ja J. Yorkile. [20, 21] Sellest lähenemisest saadavad avaldised on osutunud kasulikuks teisteski rakendustes, nt mustade aukude füüsikas. Tänaseks tuntakse väga paljusid avaldisi kvaasi-lokaalse energia jaoks. Paraku aga selgub siingi, et on olemas lõpmatu hulk võimalikke avaldisi kvaasi-lokaalse gravitatsiooni jaoks.

Gravitatsioonilise energia-impulsi jäävuse mõistmisel on ääreliikmed kesksel kohal. Täheldasime seda juba GHY-ääreliikmega seonduvas arutelus (vt 2.1.1). Erinevad ääretingimused nõuavad teooria seesmise sidususe tagamiseks ka erinevaid pinnaliikmeid. Siinkohal peame tõdema, et mida kutsutakse gravitatsioonilise süsteemi „energiaks“, sõltub samuti ääretingimustest. See ei ole kusjuures vaid gravitatsiooni eripäraks - näiteks termodünaamikas on samuti mitmeid mõisteid energia jaoks, nagu nt siseenergia, vabaenergia jne, seejuures igaüks neist on defineeritud spetsiifiliste ääretingimuste suhtes. Ning neil kõigil on ka füüsikaline sisu.

On ehk huvitav märkida, et paisuvas universumis muutub olukord veelgi keerulisemaks. Ilma ajaasarnase Killingi vektorita pole ka globaalset jäävusseadust, mille faktuaalseks tõestuseks on kosmoloogiline punanihe (lokaalselt on energi-impulsi tensor endiselt null-nivergentsiga; probleem seisneb globaalse laengu integreerimises). See on kooskõlas Noetheri teoreemiga.

Noetheri teoreemid jäävad ka edaspidi keskseks tööriistaks teoreetilises füüsikas. Nende rakendamine üldrelatiivsusteooriale demonstreerib nii nende võimsust kui ka piire, pakkudes väärtuslikke õppetunde sümmeetriate rollist loodusseadustes ning ajendades meid sügavamalt mõtlema energia, jäävusseaduste ja füüsikalise reaalsuse olemuse üle.

Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärk oli kaheosaline: (i) anda didaktiline ja matemaatiliselt range ülevaade Noetheri kahest teoreemist ning (ii) rakendada teist teoreemi üldrelatiivsusteooria kontekstis, heitmaks valgust probleemidele, mis kerkivad gravitatsioonienergia defineerimisel lokaalse difeomorfismisümmeetria korral.

Esimeses peatükis tutvustasime klassikalist väljateooriat ja tuletasime variatsiooniprintsiibist lähtudes Euleri-Lagrange'i liikumisvõrrandid, mis oli eelduseks määratlemaks jäävaid suuruseid. Seejärel defineerisime sümmeetria variatsiooni ning tuletasime lagranžiaani kvaasi-invariantsuse tingimuse, mis kehtib *iga* väljakonfiguratsiooni korral. Järgnevalt esitasime ja tõestasime Noetheri kaks teoreemi. Esimese teoreemi rakendamist demonstreerisime ka Minkowski aegruumis. Kõrvutasime seda Noetheri teise teoreemiga, tuues esile selle rakendusalaga—lokaalsed teisendused—seotud eripära, nimelt asjaolu, et globaalselt jääva suuruse asemel leiame hoopis diferentsiaalseosed liikumisvõrrandite vahel - nn Noetheri samasused.

Teist peatükki alustasime samuti Einsteini väljavõrrandite tuletamisega, mille käigus tõstsime esile ääreliikmetete olulisust ka juba variatsiooniprintsiibi järgimisel. Selle käigus tutvustasime Gibbonsi-Hawkingi-Yorki ääreliiget ning võrdlesime Hilberti teist- Einsteini esimest-järku mõjufunktsionaaliga. Ilmnes, et need on küll lahendi-ekvivalentsed, kuid nende variatsiooniprintsiibid omavad erinevaid ääretingimusi. Just see nüanss osutus võtmeküsimuseks gravitatsioonienergia defineerimisel. Järgnevalt konstrueerisime Noetheri teise teoreemi järgi kovariantsed Kleini-Noetheri samasused üldrelatiivsusteoorias. Näitasime, et vaakumgravitatsiooni erijuhul taanduvad need samasused ahendatud Bianchi samasusele, mis—olles matemaatiline identsus—ei kätke endas loodetud *füüsikalist* sisu. Järgnevalt tutvustasime selle probleemi lahendamiseks väljapakutud lähenemisi, peatudes pisut pikemalt pseudotensoritel, selgitades seejuures nende puudujääke. Rõhutasime taas ääreliikmete keskset rolli jäävate suuruste, sh energia, defineerimisel. Gravitatsioonienergia probleem püsib aktiivse uurimisvaldkonnana. Ühest küljest pakuvad näiteks kvantgravitatsiooni teooriad—stringiteooria, silmuskvantgravitatsioon—uusi perspektiive energia mõiste käsitlemiseks. Samuti osutavad teisedki kaasaegsed aegruumiteooriad just ääretingimuste olulisusele, nagu näiteks holograafilistes lähenemistes (AdS/CFT). Teisest küljest võib olla kasulik veelgi fundamentaalsemal tasemel ümber mõtestada seda, kuidas me üldse konseptualiseerime jäävusseadusi, gravitatsiooni, energiat, aegruumi, või koguni reaalsust-kui-sellist, pannes küsimuse alla milliseid objekte—konkreetseid või abstraktseid—me ontoloogiliselt esmaseks loeme. Ma arvan, et need kaks suunda võiksid käia käsikäes.

Tänuavaldused

Soovin südamest tänada Laur Järve, kes on olnud väga abivalmis, kannatlik ja sõbralik juhendaja. Tema toetav hoiak ja empaatiline meel aitas tohutult kaasa selle töö valmimisele. Lisaks olen äärmiselt tänulik, et sain kirjutada niivõrd huvitaval teemal; nii sellekohased kui ka laiemalt lendlevad arutelud on olnud äärmiselt huvitavad.

Samuti soovin tänada Kalev Tarkpead, kes on mulle pikalt ja kindlalt väga suureks toeks olnud.

Alexander Vein

Kirjandus

[1] Kurt Sundermeyer, *Symmetries in Fundamental Physics*, vol. 176 of *Fundamental Theories of Physics*. Springer, Cham, DE, 2. ed., 2014.

[2] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2. ed., 2019.

[3] L. Järv, "Klassikaline väljateooria." 2019. Kursuse LOFY04.061 konspekt Tartu Ülikooli füüsika instituudis.

[4] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1. ed., 2017. 1973. aasta väljaande kordustrükk.

[5] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[6] R. Wald, *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, IL, USA, 1984.

[7] D. Tong, "Lectures on general relativity." 2017. `https://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/gr.html`. Lecture notes, University of Cambridge.

[8] D. Baumann, "General relativity." 2019. `http://cosmology.amsterdam/wp-content/uploads/2021/10/GR-Oct19.pdf`. Lecture notes, University of Amsterdam.

[9] S. De Haro, "Noether's theorems and energy in general relativity," in *The Philosophy and Physics of Noether's Theorems: A Centenary Volume*, N. J. T. James Read, ed., pp. 197–256. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2022.

[10] Kosmann-Schwarzbach, Yvette, *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*. Springer, New York, NY, USA, 2011.

[11] E. Noether, "Invariant variational problems," in *The Noether Theorems: Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*, Y. Kosmann-Schwarzbach, ed., pp. 3–22. Springer, New York, 2011. Orig. "Invariante Variationsprobleme" (1918).

[12] E. Bessel-Hagen, "On the conservation laws of electrodynamics," Online PDF, neo-classical-physics.info, 1921. https://neo-classical-physics.info/uploads/3/4/3/6/34363841/bessel-hagen_-_invariance_of_em.pdf. Tõlk. D. H. Delphenich. Originaal "Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik," *Mathematische Annalen* **84** (1921), 258–276.

[13] K. Brading, E. Castellani, ed., *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.

[14] J. M. Pons, "Noether symmetries, energy-momentum tensors and conformal invariance in classical field theory," *arXiv preprint arXiv:0902.4871* (2009) , arXiv:arXiv:0902.4871 [hep-th]. https://arxiv.org/abs/0902.4871.

[15] G. W. Gibbons, S. W. Hawking, "Action integrals and partition functions in quantum gravity," *Physical Review D* **15** no. 10, (1977) 2752–2756.

[16] J. W. York, "Boundary terms in the action principles of general relativity," *Foundations of Physics* **16** no. 3, (1986) 249–257.

[17] B. Julia, S. Silva, "Currents and superpotentials in classical gauge-invariant theories: I. local results with applications to perfect fluids and general relativity," *Classical and Quantum Gravity* **15** (1998) 2173–2215. https://arxiv.org/abs/gr-qc/9804029.

[18] B. Julia, S. Silva, "Currents and superpotentials in classical gauge theories: II. Global aspects and the example of affine gravity," *Classical and Quantum Gravity* **17** (2000) 4733–4743. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0005127v2.

[19] D. Bak, D. Cangemi, and R. Jackiw, "Energy-momentum conservation in gravity theories," *Physical Review D* **49** no. 10, (1994) 5173–5181. Erratum: Phys. Rev. D **52**, 3753 (1995).

[20] J. D. Brown and J. W. York, "Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action," *Physical Review D* **47** no. 4, (1993) 1407–1419.

[21] J. D. Brown, S. R. Lau, and J. W. York, "Action and energy of the gravitational field." 2000. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0010024. arXiv preprint, version 3.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Alexander Vein**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   Noetheri teoreem ja gravitatsioonienergia üldrelatiivsusteoorias, mille juhendaja on Laur Järv,

   reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Alexander Vein
05.06.2025

A Tähistused ja akronüümid

GR	Üldrelatiivsusteooria (ing. k. *general relativity*)
EL	Euler-Lagrange
EH / E / H	Einstein-Hilbert / Einstein / Hilbert
X_D	D-mõõtmeline diferentseeruv muutkond
V_D	Riemanni ruum
M_D	Minkowski ruum meetrikaga $\mathrm{diag}(\eta_{\mu\nu}) = (+1, -1, \ldots, -1)$
Q	üldine väli
$\{Q^\alpha(x)\}$	välja komponendid
φ	skalaarväli
$i, j, k, \ldots$	lõpliku-mõõtmelises süsteemis tähistamaks vabadusastmeid
$\mu, \nu, \lambda, \ldots$	koordinaatindeksid X_4-s
$\alpha, \beta, \ldots$	üldised indeksid
$r, s, \ldots$	indeksid tähistamaks sümmeetria parameetreid
$\mathcal{L}(Q^\alpha, \partial_\mu Q^\alpha, x)$	väljadest ja nende tuletistest koosnev lagranžiaani tihedus
$S[Q] = \int_\Omega d^D x \mathcal{L}$	mõjufunktsionaal
$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$	lineaarne (afiinne) seostus
$D_\mu = D_\mu(\Gamma)$	kovariantne tuletis Γ suhtes: $D_\mu(\Gamma)u^\nu = \partial_\mu u^\nu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\nu$
$Q_{,\mu} := \frac{\partial Q}{\partial x^\mu} = \partial_\mu Q$	Q osatuletis x^μ järgi
$\left\{ {\mu \atop \lambda\nu} \right\}$	Christoffeli sümbol ehk V_4-seostus: $\left\{ {\mu \atop \lambda\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} \left(g_{\lambda\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\lambda} - g_{\lambda\nu,\rho} \right)$
$F_{;\mu} = D_\mu(\{\})$	kovariantne tuletis suurusest F Riemanni (Levi-Civita) seostuse suhtes
$[\mathcal{L}]_\alpha$	Euleri tuletised $[\mathcal{L}]_\alpha := \frac{\delta S}{\delta Q^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha_{,\mu\nu}} + \ldots$
$\pounds_X Y$	Lie tuletis suurusest Y suuruse X suhtes
δF	üldine funktsiooni variatsioon
$\delta_S F$	infinitesimaalne sümmeetria variatsioon
$\mathcal{J}^\mu_\nu$	Jacobi maatriks: $\mathcal{J}^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ koordinaatteisenduste $x \to x'(x)$ jaoks
	Pöördmaatriks: $\mathcal{K}^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$
$\doteq$	massi pinnal (*on-shell*) kehtiv samasus ehk antud võrdsus kehtib EL lahenditel
$[F, G]$	F ja G kommutaator $[F, G] = FG - GF$
$F_{(\alpha\beta)}$, $F_{[\alpha\beta]}$	sümmetrisatsioon $F_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha})$,
	antisümmetrisatsioon $F_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha})$ ja
	dekompositsioon $F_{\alpha\beta} = F_{(\alpha\beta)} + F_{[\alpha\beta]}$

B Lagrange'i formalism klassikalises mehhaanikas

B.1 Statsionaarse mõju printsiip ja Euler-Lagrange'i liikumisvõrrandid

Klassikalise mehaanika füüsikaliste süsteemide dünaamika on kodeeritud lagranžiaani funktsiooni L või lihtsalt **lagranžiaani**, mis on funktsioon süsteemi muutujatest ja nende parameetritest,

$$L = L(q^k, \dot{q}^k, t), \tag{B.1}$$

milles muutujad q^k tähistavad üldistatud koordinaate, $\dot{q}^k$ nende ajalisi täistuletisi vastavalt tähistuse kokkuleppele

$$d_t f := \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \ddot{q}^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} + \dots \right) f \,, \tag{B.2}$$

indeks $k = (1 \dots n)$ süsteemi vabadusastmeid ja parameeter t antud juhul aega, mis võib lagranžiaanis esineda nii ilmutatud, nagu avaldises (B.1), või ilmutamata kujul: $L = L(q^k, \dot{q}^k)$. Süsteemi liikumisvõrrandid saame leida **mõjufunktsionaali** või lihtsalt **mõju** S

$$S[q^k; t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t^2} dt \, L(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{B.3}$$

optimeerimisülesande kaudu. Nimelt valib süsteem sellise dünaamika, või „ajaloo“, mille korral mõju S on statsionaarne: $\delta S = 0$. Seda postulaati kutsutakse nii **Hamiltoni printsiibiks**, **statsionaarse mõju printsiibiks** kui ka lihtsalt **variatsiooniprintsiibiks**, kuna matemaatiliselt me lahendame variatsioonülesannet, mida tähistab δ-operaator. Olemuslikult paistab see aga olevat üks tõelisi looduse alusprintsiipe.

Mõju varieerimine algab teisenduse täpsustamisest, mille all süsteemi varieeritakse. Võtame selleks üldistatud koordinaadiga tähistatud punktosakese teisenemise, mille käigus $q^k(t) \to q^k(t) + \delta q^k(t)$, kus $\delta q^k(t)$ tähistab q^k infinitesimaalset variatsiooni. Samuti tuleb täpsustada määramispiirkond, antud juhul $[t_1, t_2]$, ning rajatingimused, $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$. Seega, statsionaarse mõju printsiipi väljendab võrrand

$$\delta S = \int_{t_1}^{t^2} dt \, \delta L = \int_{t_1}^{t^2} dt \left[L(q^k + \delta q, \dot{q}^k + \delta \dot{q}^k, t) - L(q^k, \dot{q}^k, t) \right] \stackrel{!}{=} 0 \,. \tag{B.4}$$

Infinitesimaalse δq^k jaoks,

$$\begin{aligned} L(q^k + \delta q^k, \dot{q}^k + \delta \dot{q}^k, t) = L(q^k, \dot{q}^k, t) + \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j} \delta q^i \delta q^j + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \delta q^i \delta \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}^i \delta \dot{q}^j \right) + \mathcal{O}((\delta q)^3) \,. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Lagranžiaani variatsioon kuni esimese järguni teisendusel $q^k(t) + \delta q^k(t)$ on seega

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \frac{d}{dt} \delta q^k \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \delta q^k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \, [L]_k \, \delta q^k + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2} \stackrel{!}{=} 0 \,,
\end{aligned} \tag{B.6}$$

kus oleme ära kasutanud ära variatsiooni operaatori kommuteeruvust ajalise tuletise operaatoriga, $\delta \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta)$, ning ositi integreerinud; samuti oleme siin tähistanud $[L]_k = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$. Avaldises (B.6) on viimane liige null, kuna me oleme fikseerinud $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$. Seega, kuna variatsooniprintsiip $\delta S = 0$ peab kehtima suvalise δq^k korral, peab kehtima $[L]_k = 0$, ehk

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) = 0 \,, \tag{B.7}$$

mida kutsutakse **Euleri-Lagrange'i** (EL) **liikumisvõrranditeks**. Pisut etteruttavalt, objekti $[L]_k$ nimetatakse **Euleri tuletiseks**. Märgime ka ära, et vahest me võime eraldi nõuda, et lagranžiaani variatsioon oleks täistuletis,

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right) \,. \tag{B.8}$$

See osutub oluliseks väljateoorias, kus me saame täistuletisi muuta ääreliikmeteks, ning Noetheri teoreemi kontekstis, kus täistuletisest saab tuletada jäävaid suuruseid.

Lubades langranžiaanis sisalduda ka kõrgemaid kui esimest-järku tuletisi koordinaatidest, st nt $L = L(q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k)$, saame valemiga (B.6) sarnase arvutuskäigu kaudu

$$\begin{aligned}
\delta L &= \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^k} \right) \delta q^k + \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^k} \right) \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^k} \delta \dot{q}^k \right] \\
&= [L]_k \, \delta q^k + \frac{d}{dt} B \,,
\end{aligned} \tag{B.9}$$

milles nüüd

$$[L]_k := \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^k} \,, \tag{B.10}$$

ning

$$B = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^k} \right) \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}^k} \delta \dot{q}^k \,. \tag{B.11}$$

Valemist (B.9) on tuletatavad neljandat-järku liikumisvõrrandid kui nii δq^k ja $\delta \dot{q}^k$ on punktides t_1 ja t_2 nullid. Küll aga leidub ka erandeid: võtame näiteks funktsioonist $\bar{L}(q^k, \dot{q}^k)$ tuletatud

lagranžiaani $L(q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k)$ kujul

$$L(q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k) = \bar{L}(q^k, \dot{q}^k) - \frac{d}{dt}\left(q^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^k}\right) . \tag{B.12}$$

Sel juhul on liikumisvõrrandid taaskord teist järku, kuna kõrgemat järku liikmed tühistavad üksteist ositi integreerimise käigus

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial \bar{L}}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k\right] - \delta\left(q^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^k}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^k}\right)\delta q^k + \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \delta\left(q^k \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^k}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\, [\bar{L}]_k \delta q^k - q^k \delta p_k \Big|_{t_1}^{t_2} \stackrel{!}{=} 0 ,
\end{aligned} \tag{B.13}$$

kus $p_k = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^k}$ on kanooniline impulss. Kui nõuame, et δp_k on rajades null, saame teist järku liikumisvõrrandid $[\bar{L}]_k$. Lagranžiaan kujuga (B.12) on meie jaoks oluline, kuna ta evib sarnast struktuuri üldrelatiivsusteoorias kasutatavate Hilberti mõju S_H ja Einsteini mõju S_E vahel (vt (2.18)).

Lisaks me oleme näinud ja veendunud selles, et mõjule täistuletise liitmine ei muuda liikumisvõrrandeid, kuid võib nõuda spetsiifilisi ääretingimusi (siinkohal käsitletud juhtu kus $\delta p_k|_{t_1}^{t_2} = 0$), et variatsiooniülesanne oleks hästi-püstitatud. Üldiselt on äärepiirkonna andmete ja lagranžiaani teist järku muutujate vaheline seos leitav järgneval viisil: olgu meil teist järku lagranžiaan kujul

$$L_C(q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k) = L_q(q^k, \dot{q}^k) - \frac{df(q^k, \dot{q}^k)}{dt} , \tag{B.14}$$

kus L_q on esimest järku lagranžiaan, mille integreerimisel fikseeritakse rajapiirkonnas muutujad q^k ehk $\delta q^k|_{t_1}^{t_2}$ ning L_C on lagranžiaan, mille jaoks fikseeritakse antud funktsioon $C(q^k, \dot{q}^k)$. Lagranžiaanidest L_C ja L_q on tuletatavad samad (teist järku) liikumisvõrrandid, kui

$$f(q^k, C) = \int p_k(q^k, C)\, dq^k + F(C) , \tag{B.15}$$

kus $F(C)$ on suvaline funktsioon. Siinkohal on eeldatud, et on võimalik avaldada $C = C(q^k, \dot{q}^k)$, seejärel ilmutada $\dot{q} = \dot{q}(q^k, C)$ ning avaldada impulsid kui $p_k = p_k(q^k, C)$. Valem (B.12) on seega üheks sellekohaseks näiteks, kus $C = p$.

B.2 Sümmeetriateisendused ja esmapilk Noetheri teoreemile

Noetheri teoreemid kehtivad mõju pidevate sümmeetriateisenduste korral. Käsitleme alustuseks punkteisendusi,

$$q^k \mapsto \hat{q}^k(q, t) , \qquad t \mapsto \hat{t}(t, q) , \tag{B.16}$$

milles milles oleme kasutusele võtnud kübaraga tähistuse, $q \to \hat{q}$, väljendamaks, et $\hat{q}$ on q kujutis pärast sümmeetriavariatsiooni-kujutust

$$\delta_S : (q, t) \mapsto (\hat{q}, \hat{t}) \,.$$

Nende teisenduste all muutub algne mõjufunktsionaal,

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L[q] \,, \qquad L[q] := L(q^k, \dot{q}^k, t), \tag{B.17}$$

järgnevalt:

$$S[q] = \int_{\hat{t}(t_1)}^{\hat{t}(t_2)} d\hat{t} \left(\frac{dt}{d\hat{t}}\right) L[q(\hat{q}, \hat{t})] := \hat{S}[\hat{q}] \,, \tag{B.18}$$

ehk teisisõnu, oleme kirjutanud *sama* integraali *uutes* koordinaatides; jakobiaan $\left(\frac{dt}{d\hat{t}}\right)$ ilmub, kuna muutsime integratsiooni elementi dt. Kusjuures $\hat{S}[\hat{q}] = S[\hat{q}]$, kuna nende ainus erinevus seisneb fiktiivses integreerimise muutujas t: kübaraga $\hat{S}$ tähendab, et integreeritav muutuja on $\hat{t}$.
Kui nõuame $S[\hat{q}] \stackrel{!}{=} S[q]$, ehk

$$\underbrace{\int_{\hat{t}(t_1)}^{\hat{t}(t_2)} d\hat{t}\, L[\hat{q}]}_{A=\hat{S}[\hat{q}]} \stackrel{!}{=} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, L[q]}_{B=S[q]} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\hat{t}}{dt} L[\hat{q}]}_{C=S[\hat{q}]} \,, \tag{B.19}$$

kus $A \to C$ on lihtsalt integreerimise elemendi teisendus $t \to \hat{t}$, $A \stackrel{!}{=} B$ on *nõudmine*, st tingimus variatsioonilise sümmeetria jaoks, mille all peab mõju väärtus püsima muutumatuna, $S[\hat{q}] \stackrel{!}{=} S[q]$. Seega, kui me lahutame $C - B$,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d\hat{t}}{dt} L[\hat{q}] - L[q]\right) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{d}{dt} \Sigma_S(q, t)\right) \,,$$

ehk teisisõnu, vahe saab olla ainult funktsiooni, nimetagem selle Σ_S, täisdivergents, et see rajades nulliks läheks. Niisiis,

$$\left(\frac{d\hat{t}}{dt}\right) L[\hat{q}] \stackrel{!}{=} L[q] + \frac{d}{dt} \Sigma_S(q, t) \,, \tag{B.20}$$

tohib erinevus olla maksimaalselt täisdivergents ehk ääreliige, mis juhul on meil tegemist **variatsioonisümmeetriaga**. Lagranžiaan on **invariantne** *siis ja ainult siis* kui $\Sigma_S = 0$, muul juhul **kvaasi-invariantne**, Noetheri teoreem rakendub mõlemal juhul.

Noetheri teoreemid kehtivad ainult selliste sümmeetriateisenduste jaoks, mis on pidevalt arendatavad identsusest, seega me saame teisenduste kuju piirata järgnevatele kujudele:

$$\hat{q}^k = q^k + \delta_S q^k(q, t) = q^k + \epsilon \eta^k(q, t) \,, \qquad \hat{t} = t + \delta_S(t, q) = t + \epsilon \xi(t, q) \,, \tag{B.21}$$

milles igat sümmetriateisendust kirjeldavad parameeter ϵ ja funktsioonid $\eta^k(q,t)$ ja $\xi(t,q)$. Tingimus (B.20) infinitesimaalsete teisenduste jaoks annab meile

$$\left(1+\frac{d}{dt}\delta_S t\right) L[\hat{q}] \stackrel{!}{=} L[q] + \frac{d}{dt}\sigma_S(q,t)\,, \tag{B.22}$$

milles oleme $\Sigma_S(q,t)$ asmemel kirjutanud $\sigma_S(q,t)$ lihtsalt ilmestamaks, et meie käsitlus on infinitesimaalne. Koos sümmeetriateisenduse definitsiooniga

$$\delta_S L := L[\hat{q}] - L[q] \tag{B.23}$$

saame valemi (B.22) ümber kirjutada:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{d}{dt}\delta_S t\right) L[\hat{q}] &= \left(1+\frac{d}{dt}\delta_S t\right)(L[q]+\delta_S L) \\
&= \underbrace{L[q]}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{\delta_S L}_{\mathcal{O}(\epsilon)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\delta_S t\right) L[q]}_{\mathcal{O}(\epsilon)} + \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\delta_S t\right)\left(\delta_S L\right)}_{\mathcal{O}(\epsilon^2)} \\
&\stackrel{!}{=} L[q] + \frac{d}{dt}\sigma_S(q,t)\,,
\end{aligned}$$

ehk kui viskame $\mathcal{O}(\epsilon^2)$-järku liikmed ära, saame

$$\delta_S L + L[q]\frac{d}{dt}\delta_S t \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}\sigma_S(q,t)\,. \tag{B.24}$$

Ahelareeglit kasutades, $L\frac{d}{dt}\delta_S t = \frac{d}{dt}\left(L\delta_S t\right) - \frac{dL}{dt}\,\delta_S t$, saame

$$\delta_S L - \frac{dL}{dt}\delta_S t \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}(\sigma_s - L\delta_S t)\,, \tag{B.25}$$

milles vasaku poole liikmed on lahtikirjutatuna

$$\begin{aligned}
\delta_S L &= \frac{\partial L}{\partial q}\delta_S q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta_S \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\delta_S t\,, \\
\frac{dL}{dt}\delta_S t &= \left(\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta_S t\,.
\end{aligned}$$

Valemi (B.25) vasakust poolest saab seega

$$\begin{aligned}
\delta_S L - \frac{dL}{dt}\,\delta_S t &= \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta_S q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta_S \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta_S t\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta_S t \\
&= \frac{\partial L}{\partial q}\,(\delta_S q - \dot{q}\,\delta_S t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,(\delta_S \dot{q} - \ddot{q}\,\delta_S t) + \left(\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta_S t \\
&= \frac{\partial L}{\partial q}\,(\delta_S q - \dot{q}\,\delta_S t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,(\delta_S \dot{q} - \ddot{q}\,\delta_S t) \\
&= \frac{\partial L}{\partial q}\,\bar{\delta}_S q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\bar{\delta}_S \dot{q}\,,
\end{aligned} \tag{B.26}$$

milles

$$\bar{\delta}_S q := \delta_S q - \dot{q}\delta_S t = \epsilon(\eta - \dot{q}\xi)\,, \qquad \bar{\delta}_S \dot{q} := \delta_S \dot{q} - \ddot{q}\delta_S t\,. \tag{B.27}$$

$\bar{\delta}$-variatsioon kirjeldab muutujate erinevust kahel erineval ajahetkel t ja $t + \delta t$:[10]

$$\bar{\delta} q := \hat{q}(t) - q(t)\,.$$

Võrdluseks, kogu variatsioon δq on erinevus muutujate vahel *samal* ajahetkel: $\delta q = \hat{q}(\hat{t}) - q(t)$. $\bar{\delta}$-variatsioon, erinevalt δ-variatsiooniga, kommuteerub tuletistega:

$$\bar{\delta}\frac{d}{dt}q = \frac{d}{dt}\bar{\delta} q\,. \tag{B.28}$$

Kontrollime, kuidas see tuleneb. Lähtudes definitsioonist $\delta q = \hat{q}(\hat{t}) - q(t)$, saame

$$\begin{aligned}(\dot{\delta q}) &= \frac{d}{dt}\delta q = \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\frac{d\hat{t}}{dt} - \frac{dq}{dt} = \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} + \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\frac{d}{dt}\delta t - \frac{dq}{dt} \\ &= \delta\frac{d}{dt}q + \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\frac{d}{dt}\delta t = \delta\dot{q} + \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}(\dot{\delta t})\,,\end{aligned} \tag{B.29}$$

seega $\frac{d}{dt}\delta q = \delta\frac{d}{dt}q + \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}(\dot{\delta t})$ ehk $\frac{d}{dt}\delta q \neq \delta\frac{d}{dt}q$. Teisest küljest aga, lähtudes valemist (B.27), saame:

$$\frac{d}{dt}\bar{\delta} q = \frac{d}{dt}(\bar{\delta} q) = \frac{d}{dt}\left(\delta q - \dot{q}\delta t\right)\,, \qquad \bar{\delta}\frac{d}{dt}q = \bar{\delta}\dot{q} = \delta\dot{q} - \ddot{q}\delta t\,, \tag{B.30}$$

leiame nende vahe:

$$\frac{d}{dt}\bar{\delta} q - \bar{\delta}\frac{d}{dt}q = \frac{d}{dt}(\delta q) - \frac{d}{dt}(\dot{q}\delta t) - \delta\dot{q} + \ddot{q}\delta t = \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}(\dot{\delta t}) - \dot{q}(\dot{\delta t}) = \delta\dot{q}(\dot{\delta t}) \sim 0\,, \tag{B.31}$$

mis on teist järku infinitesimaalne suurus, ehk $\frac{d}{dt}\bar{\delta} q = \bar{\delta}\frac{d}{dt}q$.

$\bar{\delta}$-variatsiooni kaudu saab tingimusest (B.25), kuna $\bar{\delta}_S L = \delta_S L - \frac{dL}{dt}\,\delta_S t$ (vt (B.27))

$$\Delta_S L := \bar{\delta}_S L - \frac{d}{dt}\left(\sigma_S - L\delta_S t\right) \stackrel{!}{=} 0\,, \tag{B.32}$$

mis on üks viis väljendamaks lagranžiaani invariatsust sümmeetriateisenduse δ_S all. Teine viis, mis osutub kasulikuks just Noetheri teoreemide kontekstis on kirjutada (B.26) ümber Euleri tuletiste kaudu:

$$\begin{aligned}\delta L - \frac{dL}{dt}\delta t &= \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}\right)\delta t \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}\left(\delta q - \dot{q}\,\delta t\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\left(\delta\dot{q} - \ddot{q}\,\delta t\right) = \frac{\partial L}{\partial q}\,\bar{\delta} q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\bar{\delta}\dot{q} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}\,\bar{\delta} q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bar{\delta} q\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\bar{\delta} q \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)}_{[L]_q}\bar{\delta} q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bar{\delta} q\right) = [L]_q\bar{\delta} q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\bar{\delta} q\right)\,.\end{aligned} \tag{B.33}$$

[10] Väljateoorias vastavalt aegruumi koordinaadis, kuna me oleme siis läinud üle $t \to x^\mu$.

Nüüd saab valemi (B.25) ümber kirjutada kui

$$[L]_q \bar{\delta}_S q + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}_S q + L\delta_S t - \sigma_S\right) \equiv 0\,. \tag{B.34}$$

Pannes nüüd muutujatesse q indeksid ka sisse tagasi,

$$[L]_k \bar{\delta}_S q^k + \frac{d}{dt} J_S \equiv 0\,, \tag{B.35}$$

milles J_S on jääv suurus

$$J_S(t, q, \dot{q}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \bar{\delta}_S q^k + L\delta_S t - \sigma_S\,. \tag{B.36}$$

Avaldises (B.36) näeme kolme liiget, millest igaühte on võimalik mõista võrdluses varieerimisprotseduuriga, mis tõi meid algselt EL võrranditeni (B.6). Selles tuletuses aega t ei varieeritud, seega liiget σ_S ei ilmunud. Samuti kuna $\delta t = 0$, siis ka $\bar{\delta} = \delta$ ja valem (B.36) taandub valemile (B.6), erijuhuga $\delta = \delta_S$. Seega kokkuvõttes, **sümmeetria variatsioon** on infinitesimaalne teisendus,

$$(t, q^k) \mapsto (t + \epsilon\xi, q^k + \epsilon\eta^k)\,,$$

mille korral lagranžiaan muutub (maksimaalselt) täistuletise võrra:

$$\delta_S L = \begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma_S(q, \dot{q}, t) & \text{kvaasi-invariantsus,} \\ 0 & \text{invariantsus,} \end{cases} \tag{B.37}$$

kus σ_S on infinitesimaalne ääreliikme komponent; me kasutame (väljateoorias) selle asemel suurust Σ_S^μ lõpliku pinnaliikmena. Samasus

$$[L]_k\, \bar{\delta}_S q^k + \frac{d}{dt} J_S = 0$$

on puhtalt algebraline, EL võrrandite kehtivust $[L]_k = 0$ ei ole eeldatud. *Kui* me eeldame $[L]_k = 0$, peab kehtima ka $\dot{J}_S = 0$ ehk J_S on jääv suurus.

Tuleme tagasi funktsioonide η ja ξ juurde (vt (B.21)). Defineerime

$$\delta_\epsilon t = \epsilon\, \xi(t, q)\,, \quad \delta_\epsilon q^k = \epsilon\, \eta^k(t, q)\,, \quad \bar{\delta}_\epsilon q^k = \epsilon\, (\eta^k - \dot{q}^k \xi) =: \epsilon\chi^k\,. \tag{B.38}$$

Infinitesimaalseid teisendusi genereerib operaator

$$X = \xi(t, q)\frac{\partial}{\partial t} + \eta^k(t, q)\frac{\partial}{\partial q^k}\,, \tag{B.39}$$

millega $Xt = \xi$ ja $Xq^k = \eta^k$. Me leiame funktsiooni $F(t,q)$ variatsiooni läbi toimingu $\delta_\epsilon F = \epsilon XF$. Võime seda üldistada funktsioonidele $G(t,q,\dot{q},\ddot{q},\dots)$ kui $\delta_\epsilon G = \epsilon \overline{X} G$, milles esineb nn „pikenduse“ vektorväli

$$\overline{X} = X + \eta^k_{(1)}(t,q,\dot{q})\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} + \eta^k_{(2)}(t,q,\dot{q},\ddot{q})\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^k} + \dots \,. \tag{B.40}$$

Koefitsientfunktsioonid $\eta^k_{(a)}$ tuleb valida järjepidevalt: olgu kõigepealt

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{t}} \overset{\text{(B.38)}}{=} \frac{dq + \epsilon d\eta}{dt + \epsilon d\xi} = \frac{\dot{q} + \epsilon\dot{\eta}}{1 + \epsilon\dot{\xi}} = (\dot{q} + \epsilon\dot{\eta})\left(1 - \epsilon\dot{\xi} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) = \dot{q} + \epsilon\dot{\eta} - \epsilon\dot{q}\dot{\xi} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,. \tag{B.41}$$

Seega, et (q^k, t) teiseneksid vastavalt eeskirjale (B.38), peab $\dot{q}^k$ teisenemine alluma tingimustele

$$\delta_\epsilon \dot{q}^k = \epsilon\eta^k_{(1)}(t,q) \qquad \text{kus} \qquad \eta^k_{(1)} = \dot{\eta}^k - \dot{q}^k\dot{\xi}\,. \tag{B.42}$$

Kõrgemat järku liikmete jaoks valemis (B.40) saame

$$\eta^k_{(I)} = d_t\eta^k_{(I-1)} - (d_t^I q^k)(d_t\xi) \qquad \text{kus} \qquad \eta^k_{(0)} = \eta^k\,. \tag{B.43}$$

Kasutades seda valemit, saab valemi (B.40) ümber kirjutada kui

$$\overline{X} = \xi d_t + \chi^k\frac{\partial}{\partial q^k} + (d_t\chi^k)\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} + (d_t d_t\chi^k)\frac{\partial}{\partial \ddot{q}^k} + \dots\,, \tag{B.44}$$

milles suurust $\chi^k = \eta^k - \dot{q}^k\xi$ nägime juba $\bar{\delta}$ defineerimise kontekstis (B.38). Nagu juba öeldud, generaatorit $\overline{X}$ nimetatakse sümmeetria generaatori X pikenduseks. Kõikvõimalikud objektid $I(t,q,\dot{q},\ddot{q},\dots)$ on **invariantsed**, kui $\overline{X}I = 0$.

Tulles tagasi Noetheri teoreemide konteksti, arendades avaldise (B.20) paremat poolt ritta, saame:

$$\xi\frac{\partial L}{\partial t} + \eta^k\frac{\partial L}{\partial q^k} + \eta^k_{(1)}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + L\frac{d}{dt}\xi = \overline{X}L + Ld_t\xi = d_t\sigma\,. \tag{B.45}$$

Noetheri laengud

Kirjutades $J_\epsilon = \epsilon C$, on meil

$$C(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\chi^k + L\xi - \sigma\,, \tag{B.46}$$

mis on liikumisvõrrandite lahendite korral ($[L]_k = 0$) jääv tänu valemile (B.35). Teisisõnu on see liikumisintegraal, nimetagem seda ka **Noetheri laenguks**. Saab tuletada sümmeetria generaatori X abil: tingimus (B.45) olemaks Noetheri sümmetria on, koos definitsiooniga (B.44):

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\xi d_t L + \chi^k\frac{\partial L}{\partial q^k} + (d_t\chi^k)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right] + Ld_t\xi - d_t\sigma \\ &= d_t\left[L\xi - \sigma - \left(\chi^k\frac{\partial L}{\partial q^k}\right)\right] + \chi^k\frac{\partial L}{\partial q^k} - \chi^k d_t\left(\frac{\partial L}{\partial q^k}\right) \\ &= d_t\left(L\xi - \sigma + \chi^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) + \chi^k[L]_k \doteq d_t C \end{aligned} \tag{B.47}$$

Jäävana mõistamegi suurust, mille täistuletis aja suhtes on null.

Üleminek väljateooriasse

Minnes üle punktosakestega klassikalise mehhaanika formulatsioonist tasase aegruumiga väljateooriasse, jäävad siin lisas tuletatud järeldused üldiselt kehtima, kuid muutujad vahetuvad järgnevalt:

$$
\begin{aligned}
\{t\} &\quad\Rightarrow\quad \{x^\mu\} \\
\{q^k(t)\} &\quad\Rightarrow\quad \{Q^\alpha(x)\} \\
L(q^k, \dot{q}^k, t) &\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}(Q^\alpha, \partial_\mu Q^\alpha, x) \\
S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L &\quad\Rightarrow\quad S[Q] = \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L} \\
[L]_k := \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) &\quad\Rightarrow\quad [\mathcal{L}]_\alpha := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q^\alpha)}
\end{aligned}
$$

C Diferentsiaalgeomeetria elemente

C.1 Taustsüsteemid ja gravitatsioon

Olgu meil Minkowski aegruumis $M = M_4 \equiv \mathbb{R}^{1,3}$ ühtlaselt liikuv punktmass. Valime inertsiaalse koordinaatkaardi $(\mathbf{x})$, milles liikumist kirjeldavad võrrandid

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0\,, \tag{C.1a}$$

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\,, \tag{C.1b}$$

kus $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ on Minkowski meetrika. Neid võrrandeid saab teisendada teise koordinaatsüsteemi $(\mathbf{x}')$ järgnevate teisendusmaatriksite (ehk jakobiaanide) kaudu:

$$\mathcal{J}^\mu_\nu := \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \qquad \mathcal{K}^\mu_\nu := \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}. \tag{C.2}$$

Näeme, et $\mathcal{K}$ ja $\mathcal{J}$ on teineteise pöördmaatriksid, st $\mathcal{K}^\mu_\lambda\mathcal{J}^\lambda_\nu = \delta^\mu_\nu$. Teisendusmaatriksite tuletisi tähistame kui

$$\frac{\partial\mathcal{J}^\mu_\nu}{\partial x^\lambda} =: \mathcal{J}^\mu_{\lambda\nu} = \mathcal{J}^\mu_{\nu\lambda}\,, \qquad \frac{\partial\mathcal{K}^\mu_\nu}{\partial x'^\lambda} =: \mathcal{K}^\mu_{\lambda\nu} = \mathcal{K}^\mu_{\nu\lambda}\,. \tag{C.3}$$

Siis,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{dx'^\nu}{d\tau} = \mathcal{K}^\mu_\nu\frac{dx'^\nu}{d\tau}. \tag{C.4}$$

Liikumisvõrrandeid (C.1a) saab seega avaldada kui

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \mathcal{K}^\mu_\nu\frac{d^2x'^\nu}{d\tau^2} + \mathcal{K}^\mu_{\nu\lambda}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\nu}, \tag{C.5}$$

mille läbikorrutamine Jacobi maatriksiga $\mathcal{J}^\rho_\mu$ annab

$$\frac{d^2x'^\rho}{d\tau^2} + \left\{{\rho \atop \lambda\nu}\right\}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\nu} = 0, \tag{C.6}$$

kus oleme sisse toonud **Christoffeli sümboli**[11],

$$\left\{{\rho \atop \lambda\nu}\right\} := \mathcal{J}^\rho_\mu\mathcal{K}^\mu_{\nu\lambda} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{K}^\mu_{\nu\lambda} = \mathcal{K}^\mu_\rho\left\{{\rho \atop \lambda\nu}\right\}, \tag{C.7}$$

mis on sümmeetriline alumistes indeksites ν ja λ. Pärast (C.1a) avaldamist uues koordinaadistikus näeme valemist (C.6), et liikumine ei ole enam ühtlane, kuna tekivad inertsiaaljõud t^ρ:

$$\frac{du'^\rho}{d\tau} =: t^\rho = -\left\{{\rho \atop \lambda\nu}\right\}u'^\lambda u'^\nu\,. \tag{C.8}$$

[11] $\left\{{\rho \atop \lambda\nu}\right\}$ on juhtumisi *teist liiki* Christoffeli sümbol. Mitterangel viisil kasutame Lisas [F.4] ka *esimest liiki* Christoffeli sümbolit.

See on teadaolev effekt ka klassikalises mitterelativistlikus mehhaanikas: minnes inertsiaalsest taustsüsteemist pöörlevasse, tekivad tsentrifugaal- ja Coriolise jõud.

Võrrand (C.1b) avaldub uutes koordinaatides kui

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} \,, \tag{C.9}$$

meetrikaga

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \mathcal{K}^{\rho}_{\mu} \mathcal{K}^{\sigma}_{\nu} \,. \tag{C.10}$$

Pärast mõningaid algebralisi manipulatsioone (näidatud lisas F), saame avaldada Christoffeli sümbolid kui

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \left\{ {\sigma \atop \mu\lambda} \right\} g_{\sigma\nu} + \left\{ {\sigma \atop \nu\lambda} \right\} g_{\mu\sigma} \tag{C.11a}$$

$$\left\{ {\sigma \atop \lambda\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu} \right) \,. \tag{C.11b}$$

C.2 Jooned ja kõverad muutkonnal

Olgu $I \subset \mathbb{R}$ lahtine intervall. Sile joon punktis $p \in M$ on C^{∞}-kujutus

$$\gamma : I \to M, \quad \gamma(0) = p, \quad \gamma(\lambda) \equiv x^{\mu}(\lambda). \tag{C.12}$$

Joone γ **puutujavektor** parameetri λ korral on

$$\gamma'(\lambda) := \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \, \partial_{\mu}|_{\gamma(\lambda)} \in \mathrm{T}_{\gamma(\lambda)} M, \tag{C.13}$$

kus $\mathrm{T}_{\gamma(\lambda)} M$ on puutujaruum punktis $\gamma(\lambda) = p \in M$.

Ekvivalentsusprintsiibi[12] tõttu on valem

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \tag{C.14}$$

gravitatsiooniväljas (vabalt langeva) liikuva punktosakese liikumisvõrrandiks.

Joont $\gamma(\lambda)$ nimetatakse **autoparalleelseks** mingi seostuse Γ suhtes kui see allub võrrandile

$$\frac{d^2 x^{\rho}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} = 0 \,. \tag{C.15}$$

Need võrrandid on invariantsed teisenduste $\lambda \to a\lambda + b$ all, kus a ja b on konstandid; λ on **afiinne parameeter**. Parameetri teisendusel $\lambda \to \tau(\lambda)$ muutub võrrand (C.15) järgnevalt:

$$\frac{d^2 x^{\rho}}{d\tau^2} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = \left(\alpha - \left(\frac{d^2\tau}{d\lambda} \right) \left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^{-2} \right) \frac{dx^{\rho}}{d\tau} =: \tilde{\alpha}(\tau) \frac{dx^{\rho}}{d\tau} \tag{C.16}$$

[12] Võimetus lokaalselt eristada gravitatsiooniväljа efekti ja kiirendusega liikumist (so vabat langemist).

mis on geodeetilise jooni võrrand. Lahendades võrrandi

$$\frac{d^2\tau}{d\lambda} - \alpha(\lambda)\left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 = 0\,, \tag{C.17}$$

saab leida parametrisatsiooni, kus $\tilde{\alpha} = 0$.

Vähima pikkusega joon saadakse kaare pikkuse võrrandi ekstreemumülesande lahendamisest:

$$\delta \int_A^B ds = 0 \qquad \text{milles} \qquad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu\,. \tag{C.18}$$

Ümberdefineerimise $x'^\mu := \frac{dx^\mu}{d\lambda} = v^\mu$ järel saame

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu} = 0\,. \tag{C.19}$$

C.3 Vektorid, tensorid

Erirelatiivsusteoorias ehk M_4 geomeetriaga relativistlikus väljateoorias on tensorid defineeritud Lorentzi invariantsuse kaudu: Lorentzi tensor teiseneb kui

$$A'^{\alpha\beta\ldots}{}_{\mu\nu\ldots} = \Lambda^\alpha{}_\rho \Lambda^\beta{}_\sigma \ldots A^{\rho\sigma\ldots}{}_{\gamma\zeta\ldots} \bar{\Lambda}^\gamma_\mu \bar{\Lambda}^\zeta_\nu \ldots\,, \tag{C.20}$$

milles konstantsetesse teisendusmaatrikstitesse $\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$ on sisse kirjutatud aegruumi pöörded ja Lorentzi tõukeid. Kaasates ka aegruumi nihked a^μ, saame erirelatiivsusteooria isomeetriarühma kõik teisendused ehk Poincaré teisendused $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$. Lubades nüüd ka üldisi (lokaalseid) koordinaatteisendusi, tuleb tensori mõistet laiendada. **Tensor** on multilineaarne kujutus, mis üldistab skalaare, vektoreid ja lineaarseid teisendusi.

Diferentseeruval D-mõõtmelisel muutkonnal X_D on tensorid defineeritud nende lokaalsete teisenemisomaduste kaudu koordinaatteisendustel $x^\mu \to x'^\mu$. Esitame need järgnevalt.

- Skalaari ehk $(0,0)$-tensori teisenemine:

$$S'(x') = S(x) \quad \longleftrightarrow \quad \delta S = 0. \tag{C.21}$$

- Kontravariantse vektori ehk $(1,0)$-tensori teisenemine:

$$u'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} u^\nu = \mathcal{J}^\mu_\nu(x) u^\nu(x) \quad \longleftrightarrow \quad \delta u^\mu = \left(\mathcal{J}^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu\right) x^\nu. \tag{C.22}$$

  Kontravariantsed vektorid on käsitletavad kui **puutujavektorid**, mille näiteks oli juba (C.13). Puutujavektorid on objektid, mis võtavad punktis $p \in M$ mingist siledast funktsioonist $f \in C^\infty$ tuletise. Kui funktsiooniks on koordinaatfunktsioon ehk $f = x^\mu$, saame:

$$u_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}, \quad u_p(f) = u_p(x^\mu) \frac{\partial f}{\partial x^\mu}|_p.$$

Selles pildis on puutujavektor avaldatav kui $u = u^\mu \partial_\mu$, kus osatuletise operaator ∂_μ on baasivektoriks; puutujavektorite ülesanne on seega funktsioonidest suunatuletise võtmine antud punktis.

Vektori u komponendid teisenevad vastavalt eeskirjale (C.22), mis on ka eelduspäraseks ühenduslüliks kahe vaatenurga vahel, seega korrektsem oleks olnud algusest peale kõnelda „kontravariantsete *komponentidega* vektori teisenemisest“. Kõikide puutujavektorite hulk punktis p moodustab *puutujaruumi* $\mathrm{T}_p M$. Muutkonna M kõikide puutujaruumide hulk moodustab omakorda *puutujakimbu* $\mathrm{T}M$.

- Kovariantse(*-te komponentidega*) vektori ehk $(0,1)$-tensori teisenemine:

$$v'_\mu = v_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = v_\nu \, \mathcal{K}^\nu_\mu \,. \tag{C.23}$$

Sarnaselt kontravariantsete vektoritega, saab ka kovektoreid käsitleda mitmeti[13]. **Kaasvektorid** on lineaarsed kujutused vektorruumist V reaalarvude hulgale $\mathbb{R}$. Määramispiirkonnaks V on antud juhul $\mathrm{T}_p M$, seega kaasvektori v jaoks:

$$v_p : \mathrm{T}_p M \to \mathbb{R}, \quad v_p(u_p(x^\mu)) = v_\mu u^\mu .$$

Seda silmas pidades leidub lihtne viis kaasvektori konstrueerimiseks. Sileda funktsiooni $f : M \to \mathbb{R}$ jaoks defineerime kaasvektori $\mathrm{d}f$ kui $\mathrm{d}f(u)$, kus $u \in \mathrm{T}_p(M)$. Võttes $u = \partial_\nu$ ja $f = x^\mu$, saame $\mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu(x^\mu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$, millest tuvastame $\mathrm{d}x^\mu$ kui baasivektori. Järelikult on kaasvektor avaldatav kui $v_\mu \mathrm{d}x^\mu$, mille komponentide teisenemise eeskiri vastab täpselt valemile (C.23). Kõikide kaasvektorite hulk punktis p moodustab *kaasruumi* $\mathrm{T}^*_p M$ ning kõikide kaasruumide hulk moodustab omakorda jällegi *puutujakimbu* $\mathrm{T}^* M$.

- Üldise- ehk (m,n)-tensori komponentide teisenemise eeskiri on eelnevat otseselt üldistav:

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\rho_1 \dots \rho_n} = \mathcal{J}^{\mu_1}_{\nu_1} \mathcal{J}^{\dots}_{\dots} \mathcal{J}^{\mu_m}_{\nu_m} \, T^{\nu_1 \dots \nu_m}_{\sigma_1 \dots \sigma_n} \, \mathcal{K}^{\sigma_1}_{\rho_1} \mathcal{K}^{\dots}_{\dots} \mathcal{K}^{\sigma_n}_{\rho_n} \,. \tag{C.24}$$

(m,n)-järku tensor on seega multilineaarne kujutus:

$$T : \underbrace{T^*_p(M) \times \dots T^*_p(M)}_{m \text{ korda}} \times \underbrace{T_p(M) \times T_p(M)}_{n \text{ korda}} \to \mathbb{R} \,.$$

Kusjuures kui $\mathcal{J}^\mu_\nu(x)$ on konstantne, taandub Lorentzi teisendusmaatriksi $\Lambda^\mu{}_\nu$ erijuhule.

[13] $(0,1)$-tensorid on kõigele lisaks käsitletavad ka kui 1-*vormid*. Kuigi vorme kaasav formalism on mugav ja intuitiivne viis geomeetrilise füüsika rakenduses, töötame mahu- ja ulatusepiiranguid silmas pidades käesolevas töös tensorite formalismis.

C.4 Meetrika

Lähtume võrranditest (C.12) ja (C.19). Vastavalt on kaugus joone γ punktide $\gamma(0) = p$ ja $\gamma(1) = q$ vahel defineeritud kui

$$d(p,q) = \int_0^1 d\lambda \sqrt{\frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda}} = \int_0^1 d\lambda \sqrt{v \cdot v}\,, \tag{C.25}$$

milles tunneme ära $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ kui puutujavektori mööda joont $\gamma(\lambda)$. See pikkus ei sõltu parameetri λ valikust, seega peab „ulatuse“ mõiste olema kätketud milleski muus. Füüsikalistest ruumidest kõneldes olemegi seni vaikimisi eeldanud, et meil on tegemist **meetriliste ruumidega**, so ruumidega, milles on defineeritud elementide-vaheline kaugus ja nurk. Nimelt, meetriline on taglastatud sisekorrutisega $(\cdot,\cdot)$.

Sisekorrutis on tehe, mis kujutab kaks vektorit arvule. Punktis p on see antud kui

$$g_p : \mathrm{T}_pM \times \mathrm{T}_pM \to \mathbb{R}, \quad (v,\omega) \mapsto g_p(v,\omega). \tag{C.26}$$

Kujutus g ongi **meetriline tensor** ehk meetrika; see on sümmeetriline ja mitte-kidunud $(0,2)$-tensor. Mitte-kiduvus võimaldab meil defineerida **pöördmeetrika** $g^{\mu\nu}$ seose

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda \tag{C.27}$$

kaudu. Sümmeetrilisus tagab, et meetrilist tensorit saab alati diagonaliseerida, mis võimaldab meil määrata signatuuri. **Signatuur** on meetrikale omane järjestatud paar (p,q), mille saab välja lugeda pärast selle diagonaliseerimist kujule $\mathrm{diag}(\underbrace{+1,\ldots,+1,-1}_{p},\underbrace{-1\ldots,-1}_{q})$, kus $p+q=N$ annab meile muutkonna mõõtme. $(0,N)$ korral on meil tegemist Riemanni-, $(1,N-1)$ korral Lorentzi-, muul juhul (p,q) pseudo-Riemanni signatuuriga. Vastava signatuuriga meetrikaga taglastatud muutkonnad (M,g) on samuti kas Riemanni-, Lorentzi- või pseudo-Riemanni muutkonnad. Tasase Minkowski aegruumiga väljateoorias on meil meetrikaks $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$, mis lihtsaimaks Lorentzi muutkonna näiteks. Üldrelatiivsusteoorias kasutame samuti Lorentzi muutkonda, milles $g_{\mu\nu}$ aga ei ole enam konstantne „taustruum“, vaid dünaamiline väli.

Tulles nüüd tagasi joone (C.25) juurde, saame joone pikkuse defineerida kui

$$d(p,q) = \int_0^1 d\lambda \sqrt{|g(v,v)|}\,, \tag{C.28}$$

milles oleme sisekorrutisest võtnud absoluutväärtuse, kuna $g(v,v)$ ei pruugi olla positiivne, seevastu füüsikaline pikkus on reaalarvuline. Lorentzi signatuuri korral ütleme, et joon on

ruumisarnane, kui puutuja vektori v jaoks $g(v,v) < 0$, ajasarnane kui $g(v,v) > 0$ ning valgusesarnane kui $g(v,v) = 0$. Lorentzi muutkondadel on massiivsete osakeste puutujavektorid kõikjal ajasarnased, mis tõttu defineeritaksegi omaaja $d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu > 0$, mille integreerimine mööda joont $\gamma(\lambda)$ annab

$$\tau = \int_0^1 d\lambda \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\,. \tag{C.29}$$

Võttes joone parameetriks τ, oleks puutujavektoriks 4-kiirus U komponentidega $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$.

Meetrika annab meile isomorfismi vektorite ja kaasvektorite vahel läbi juba varasemalt tuttava indeksite „tõstmise ja langetamise“ operatsiooni: $V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu$. Seda nimetatakse ka **muusikaliseks isomorfismiks** $\flat$:

$$\begin{aligned} \flat : \mathrm{T}M &\to \mathrm{T}^*M \\ v = v^\mu\partial_\mu &\mapsto v^\flat = \flat(v) := g(v,\cdot) = g_{\mu\nu}v^\nu dx^\mu\,. \end{aligned} \tag{C.30}$$

Pöördoperatsioon ehk indeksite tõstmine on loomulikult $\flat^{-1} = \sharp$.

Meetrika komponendid antud koordinaadistikus saab tuletada, kui rakendame definitsiooni (C.26) puutujaruumi T_pM baasivektoritele:

$$g_{\mu\nu}(x) = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)\,. \tag{C.31}$$

Viimaks, meetrika teisenemist oleme me tegelikult juba mitmel korral näinud. Kõigepealt valemis (C.10) ja seejärel üldisemalt valemi (C.24) järgi $(0,2)$-tensori ehk *bilineaarvormi* juhul. Spetsiifiliselt, meetrika komponendid teisenevad kui

$$g'_{\mu\nu} = g_{\lambda\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} = g_{\lambda\sigma}\mathcal{K}^\lambda_\mu\mathcal{K}^\lambda_\mu\,, \tag{C.32}$$

millest tulenevalt on joonelement

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{C.33}$$

invariantne suurus (vrdl (C.1b)).

C.5 Tensortihedused, vektorväljad

C.5.1 Tensortihedused ja lokaalsed inertsiaalsed koordinaadid

Koordinaatteisendusel $x \to x'$ 4-mõõtmelisel pseudo-Riemanni muutkonnal kaasneb ka ruumalaelemendi d^4x teisenemise vastavalt valemile (C.2)

$$d^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| d^4x = \det\left(\mathcal{J}\right)\, d^4x. \tag{C.34}$$

Teisest küljest, meetrika teiseneb eeskirja (C.32) järgi, seega meetrika determinant $g := \det(g_{\mu\nu})$ teiseneb kui

$$g' = g\,[\det(\mathcal{K})]^2 = g\,[\det(\mathcal{J})]^{-2}, \tag{C.35}$$

mis näitab meile, et see determinant ei ole skalaar. Sellest tulenevalt oleks vaja teisendatavat suurust invariantsuse säilitamiseks kuidagi modifitseerida. Teades aga, et Lorentzi muutkond näeb lokaalselt välja nagu Minkowski ruum

$$g_{\mu\nu}\big|_p = \eta_{\mu\nu}\,, \tag{C.36}$$

saame alati leida koordinaadistiku, kus $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}(p)$. Seda nimetatakse **lokaalseks inertsiaalkoordinaadistikuks**. Seega, kui $\det(\eta_{\mu\nu}) =: \eta \overset{!}{=} \eta' = -1$, saame seose (C.35) kaudu järeldada, et $\det(\mathcal{J}) = \sqrt{-g}$. Järelikult on invariantseks ruumelemendiks 4-mõõtmelisel pseudo-Riemanni muutkonnal $\sqrt{-g}\,d^4x$, millega peame edaspidi alati arvestama üle muutkonna invariantsete integraalide (nagu näiteks mõjufunktsionaali S) defineerimisel. Üldise funktsiooni $f(x)$ integreerimiseks muutkonnal kasutame seega valemit

$$I = \int d^4x\sqrt{-g}\,f(x), \tag{C.37}$$

kus $\sqrt{-g}$ tühistab täpselt ruumielemendi teisenemisel kaasatuleva teguri.
Sellest kõigest ajendatult defineerime nüüd (m,n)-**tensortiheduse** $\mathcal{T}$ kaaluga w kui järgnevalt teiseneva objekti:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(w)\prime}{}^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n} &= \left|\det\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-w}\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\rho_m}}\,\mathcal{T}^{\rho_1\ldots\rho_m}_{\sigma_1\ldots\sigma_m}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x'^{\nu_n}}\\ &= \Big(\det\mathcal{J}\Big)^{-w}\,\mathcal{J}^{\mu_1}{}_{\rho_1}\ldots\mathcal{J}^{\mu_m}{}_{\rho_m}\,\mathcal{T}^{\rho_1\ldots\rho_m}_{\sigma_1\ldots\sigma_n}\,\mathcal{K}^{\sigma_1}{}_{\mu_1}\ldots\mathcal{K}^{\sigma_n}{}_{\mu_n}\end{aligned} \tag{C.38}$$

Näeme seejuures, et ruumielemendi on jaoks $w = 1$ ja meetrika determinandi jaoks $w = -2$.

C.5.2 Vektorväljad

Nägime eespool, et puutujavektorid X_p (C.22) on alati defineeritud mingis punktis p, kujutades sileda funktsiooni reaalarvule läbi tuletise[14] võtmise antud punktis:

$$\begin{aligned}X_p : C^\infty(M) &\to \mathbb{R}\\ f &\mapsto X_p(f) = X^\mu(p)\,\partial_\mu f|_p.\end{aligned} \tag{C.39}$$

[14]Tähistuse järjepidevuse huvides $u_p = X_p$. Teisest küljest, meetrilises ruumis saame muusikalise isomorfismi kaudu ka 1-vormidele leida vastava puutujavektori.

Meil oleks tarvis objekti, mis ei piirduks vaid ühe punktiga, vaid defineeriks tuletise kogu muutkonnal ehk *igale* punktile $p \in M$. Selliseks objektiks on **vektorväli** X:

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \\ f &\mapsto X(f), \end{aligned} \tag{C.40}$$

milles funktsioonid $X(f)$ on defineeritud kui$X(f)(p) = X_p(f)$, lokaalses koordinaadistikus kui

$$X(f)(x) = X^\mu(x)\partial_\mu f(x). \tag{C.41}$$

X^μ tähistab siledaid funktsioone muutkonnal M. Seega vektorväljast võib mõtelda kui siledast omistusest $p \mapsto X_p \in \mathrm{T}_p M$.

Vektorvälja teisenemine on täpselt analoogne puutujavektori teisenemisega (C.22), ehk

$$X'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} X^\nu = \mathcal{J}^\mu_\nu(x) X^\nu(x). \tag{C.42}$$

Kõikide vektorväljade ruum on $\mathfrak{X}(M)$, mis ei ole suletud korrutamise all.

C.5.3 Lie sulg

Et saada kahest vektorväljast $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uue, defineerime kommutaatori ehk **Lie sulu** $[X, Y]$:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)). \tag{C.43}$$

Mingis antud koordinaadistikus avaldub Lie sulg kui

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(Y^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\Big) - Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(X^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\Big) \\ &= \Big(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\Big) \frac{\partial f}{\partial x^\nu}. \end{aligned}$$

See kehtib $\forall f \in C^\infty(M)$, seega saame kirjutada

$$[X, Y] = \Big(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\Big) \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \tag{C.44}$$

Komponentide kaupa

$$[X, Y]^\nu = X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu. \tag{C.45}$$

Kuna osatuletised kommuteeruvad, on puutujavektorite koordinaatbaasis $\{\partial_\mu\}$ esitatud vektorväljade kommutaator alati null.

Kuna Lie sulg allub Jacobi identsusele

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \tag{C.46}$$

saame teada, et kõikide vektorväljade hulgal $\mathfrak{X}(M)$ on Lie algebra struktuur.

C.5.4 Vektorvood ja Lie tuletis

Vektorvälja mõiste lubab meil defineerida vektorvälja **voo** $\Phi_t : M \to M$, mis on ühe-parameetriline $t \in \mathbb{R}$ difeomorfismide[15] parv muutkonnal M. Voo Φ_t olulised *rühmateoreetilised* omadused on $(1)\ \Phi_{t=0} = \mathrm{id}_M$, $(2)\ \Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$ ja eelnevatest tulenevalt $(3)\ \Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$; kujutus $t \mapsto \Phi_t$ moodustab ühe-parameetrilise alamrühma lõpmatu-mõõtmelisest Lie rühmast $\mathrm{Diff}(M)$.
Vektorvälja saab avaldada kui selle voo puutujat igas punktis

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi_t(p) = X_p,$$

mille komponendid saame antud koordinaadistikus $\{x^\mu\}$ esitada kui

$$X^\mu(x^\mu(\Phi_t)) = \frac{dx^\mu(\Phi_t)}{dt}, \tag{C.47}$$

mis teiseneb koordinaatteisendusel $x^\mu \to x'^\mu$ kui

$$X'^\mu\big(x'(\Phi_t)\big) = \frac{dx'^\mu(\Phi_t)}{dt} = \left.\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right|_{\Phi_t} \frac{dx^\nu(\Phi_t)}{dt} = \mathcal{J}^\mu_\nu X^\nu\big(x(\Phi_t)\big), \tag{C.48}$$

kus tuleb jakobiaani $\mathcal{J}^\mu_\nu$ väärtuse võtta „punktis“[16] $\Phi_t(p)$.

Alternatiivselt, integreerides sobivate rajatingimustega $x^\mu(\Phi_0) = x^\mu(0) = x^\mu_0$ vektorvälja $X^\mu(x)$ (C.47), saame X poolt *genereeritud* integraaljooned.

Seega vektorväljad on difeomorfismide infinitesimaalsed generaatorid, ehk $X \to e^{tX}$.
Vektorvälja X poolt genereeritud infinitesimaalse voo saame seega avaldada kui

$$x^\mu(t) = x^\mu(0) + tX^\mu(x) + \mathcal{O}(t^2). \tag{C.49}$$

Enne kui me saame defineerida tuletise üle kogu muutkonna, on meil vaja meetodit võrdlemaks puutujavektoreid naabruspunktides, kuna teatavasti on igas punktis p *oma* puutujaruum $\mathrm{T}_p(M)$.
Olgu meil vektorväli X muutkonnal M. See vektorväli genereerib voo $\Phi_t : M \to M$. Me saame kasutada edasilüket, kus võtame lihtsalt $N = M$, konstrueerimaks kujutuse $\mathrm{T}_pM \to \mathrm{T}_{\Phi_t(p)}M$.
Nüüd saame defineerida **Lie tuletise** funktsioonist f[17]:

$$\pounds_X f = X^\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X(f), \tag{C.50}$$

[15] Difeomorfismid ehk üldised koordinaatteisendused on struktuuri-säilitavad kujutused ehk isomorfismid sidelate muutkondade vahel.

[16] Jutumärkides, et mitte segamini ajada punktiga p.

[17] See on erakordselt üldine tulemus, kuna ainuke tingimus funktsioonile f on see, et ta on sile, st $f \in C^\infty(M)$.

kus näeme, et funktsioonist Lie tuletise võtmine langeb kokku vektorvälja rakendamisega sellele funktsioonile.

Võttes Lie tuletise baasivektorist $\{\partial_\mu\}$, saame

$$\pounds_X \partial_\mu = -\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\partial_\nu. \tag{C.51}$$

Lie tuletise võtmine vektorväljast $Y = Y^\mu \partial_\mu$ annab meile

$$\pounds_X (Y^\mu \partial_\mu) = (\pounds_X Y^\mu)\partial_\mu + Y^\mu (\pounds_X \partial_\mu),$$

kus esimene liige on juba teada valemist (C.50) ning teise jaoks kasutame valemit (C.51). Tulemuseks saame

$$\pounds_X (Y^\mu \partial_\mu) = X^\nu \frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu}\partial_\mu - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\partial_\nu, \tag{C.52}$$

mis näeb täpselt välja nagu kommutaator. Seega Lie tuletis $\pounds_X$ rakendatuna vektorväljale Y on

$$\pounds_X Y = [X, Y]. \tag{C.53}$$

Vektorvälja Y Lie tuletis $\pounds_X Y$ sõltub ainult vektorväljast X ja allolevast muutkonnast M, kuid mitte koordinaatsüsteemi valikust, mis teeb temast olemuslikult puht-geomeetrilise objekti.

Üldise (m, n)-tensorvälja jaoks, komponentidega $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n}$, defineerime Lie tuletise $\pounds_X$, kus $X = X^\lambda \partial_\lambda \in \mathfrak{X}(M)$, järgnevalt

$$\begin{aligned}\left(\pounds_X T\right)^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \beta_n} &= X^\lambda\, \partial_\lambda T^{\alpha_1 \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots, \beta_n} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{m} T^{\alpha_1 \ldots \lambda \ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots\ldots\ldots \beta_n}\, \partial_\lambda X^{\alpha_k} + \sum_{\ell=1}^{n} T^{\alpha_1 \ldots\ldots\ldots \alpha_m}{}_{\beta_1 \ldots \lambda \ldots \beta_n}\, \partial_{\beta_\ell} X^\lambda.\end{aligned} \tag{C.54}$$

Esimene liige on lihtsalt komponentide suunatuletis, teine (miinusega) liige „parandab“ kontravariantseid indekseid ja kolmas (plussiga) liige kovariantseid indekseid.

Skalaarvälja juhul taandub see erijuhule (C.50) ehk harilikule suunatuletisele; vektorväljade korral, mille komponendid on teatavasti kontravariantsed, valemile (C.53). Peatselt huvitab meid aga spetsiifiliselt meetrika teisenemine, seega esitame ka selle eksplitsiitselt, tähistades seejuures genereeriva vektorvälja kui $X \to \xi$:

$$(\pounds_\xi g)_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}\partial_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda}\partial_\mu \xi^\lambda. \tag{C.55a}$$

$$(\pounds_\xi g)^{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\partial_\nu \xi^\lambda - g_{\nu\lambda}\partial_\mu \xi^\lambda. \tag{C.55b}$$

Geomeetrilisest aspektist vaadatuna mõõdab $\pounds_\xi$ kuivõrd mingi tensorväli hälbib invariantsusest ξ^μ poolt tekitatud nihkel („tirimisel“ ehk tagasitõmbel või „vedamisel“ ehk edasilükkel). Kui

$\pounds_\xi T = 0$ mingi objekti T jaoks, siis tähendab see, et T on invariantne ξ^μ poolt genereeritud voolus. Meie jaoks on siinkohal tähtis täheldada, et vektorvälja ξ^μ leidmine, mille suhtes rakendatud teatud väljade Lie tuletised on nullid, viitab süsteemi sümmeetriale. Konkreetseks näiteks oleks $\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0$, mille kohaselt ξ^μ on isomeetria, st aegruumi sümmeetria, generaatoriks. Sel juhul nimetatakse suurust ξ^μ **Killingi vektorväljaks** ja avaldist $\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0$ **Killingi võrrandiks**. Need sümmeetriad on Noetheri *esimese* teoreemi kaudu otseselt seotud jäävate suurustega: näiteks sümmetria ajaliste nihete all (genereeritud ajasarnaste Killingi vektorite poolt) on seotud energia jäävusega, sümmeetria ruumiliste nihete all (genereeritud ruumisarnaste Killingi vektorite poolt) seevastu aga impulsi jäävusesega. Minkowski aegruumis genereerib $\xi^\mu = \partial_t$ ajanihkeid, $\xi^\mu = \partial_x$ genereerib ruuminihkeid.

Killingi sümmeetriad viitavad aga *fikseeritud* taustale, mis on juba iseenneses vaidlusalune küsimus. Difeomorfismisümmeetriaid uurides me käsitleme meetrikat, seeläbi aegruumi ehk tausta, millel kogu füüsika aset leiab, dünaamilisena.

Lõpetuseks mainime ära, et siin töös rohkelt figureerivate *aktiivsete difeomorfismide* tõlgendus kätkeb endas *negatiivset* Lie tuletist, kuna me soovime „tirida“ teisenenud tensorid (nagu näiteks meetrika!) tagasi *samale* koordinaadile - st, et lisaks samas aegruumi punkti p fikseerimisele (mida me loeme justkui *a priori* igasuguse koordinaadistiku suhtes), fikseerime seejärel („aktiivselt“) ka koordinaadi (ehk „sildi“, millega me punkti mingis kaardis tähistame) - „tirime kaasa“. Matemaatilises mõttes pole intuitiivne arusaam siinkohal (veel) oluline, kuna meie jaoks olulised tulemused sellest ei muutu. Jätame lihtsalt meelde, et meie jaoks

$$\bar{\delta}_\xi T := -\pounds_\xi T, \tag{C.56}$$

milles $\bar{\delta}$ tähistab aktiivset variatsiooni.

Viimaks, märgime ära, et Lie tuletises saame vabalt asendada osatuletise kovariantse tuletisega, $\partial \to D = \partial + \Gamma$, kuna praktikas tühistavad kõik Γ-liikmed teineteist. See asendus osutub mugavaks, kuna läbi kovariantsete tuletiste kommutaatorite avalduvad ka teised suurused, nagu näiteks Riemanni tensor. Samuti on kirjapilt puhtam.

C.6 Afiinne seostus ja kovariantne tuletis

Uurime kontravariantse vektori u^μ osatuletise teisenemist.

$$\frac{\partial u'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\left(\mathcal{J}^\mu{}_\nu\, u^\nu\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}\mathcal{J}^\mu{}_\nu\right)u^\nu + \mathcal{J}^\mu{}_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x'^\lambda}u^\nu\right) \tag{C.57}$$

$$= \left(\frac{\mathcal{J}^\mu{}_\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\right)u^\nu + \mathcal{J}^\mu{}_\nu\left(\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda}\right) \underset{(C.2),(C.3)}{=} \mathcal{J}^\mu{}_{\nu\rho}\,\mathcal{K}^\rho{}_\lambda\, u^\nu + \mathcal{J}^\mu{}_\nu\left(\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\rho}\right)\mathcal{K}^\rho{}_\lambda$$

Tasases geomeetrias taanduksid jakobiaanid $\mathcal{J}$ ja $\mathcal{K}$ konstantsete Lorentzi teisendusmaatriksite Λ piirjuhule, seega oleks esimene liige valemi (C.57) viimases reas null ning teine $\Lambda^\mu{}_\nu\,\partial_\rho u^\nu\,\Lambda_\lambda{}^\rho = (\partial_\lambda u^\mu)'$, mis on kinnituseks, et osatuletise operaator teiseneb Minkowski aegruumis kui Lorentzi vektor.

Üldises geomeetrias aga takistab nimetatud esimene liige sel tensorina teisenemast - teisenenud suuruse kuju sõltub aegruumi punktist. Intuitiivselt, see tensor „triivib“ kõrvale; oleks tarvis, et ta püsiks iseendaga samas sihis, teisisõnu *autoparalleelsena*. See on vihjeks, et abi võiks valemist (C.15) olla. Tõepoolest, kui oletame, et tensori „triiv“ kahe punkti vahel on kujul $\Delta u^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}\, u^\rho dx^\sigma$, ehk

$$Du^\mu := du^\mu - \Delta u^\mu = (\partial_\sigma u^\mu - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}u^\rho)dx^\sigma,$$

saame selle parandusliikme kaudu defineerida vektori u^μ **kovariantse tuletise**:

$$D_\sigma(\Gamma)\, u^\mu := \partial_\sigma u^\mu + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}u^\rho. \tag{C.58}$$

Kovariantne tuletis on defineeritud Γ kaudu, mida nimetame **afiinseks seostuseks**. Seostus on kujutus $\Gamma : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Peale vaadates võib tunduda, et seostuse komponendid $\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}$ on $(1,2)$-tensorid. Selle kontrolliks on jällegi tarvis uurida teisenemist, mis on läbi tehtud lisas F.2. Tulemuseks on

$$\Gamma'^\mu{}_{\lambda\nu} = \mathcal{J}^\mu{}_\rho\,\Gamma^\rho{}_{\sigma\tau}\,\mathcal{K}^\sigma{}_\lambda\mathcal{K}^\tau{}_\nu + \mathcal{J}^\mu{}_\rho\mathcal{K}^\rho{}_{\nu\lambda}, \tag{C.59}$$

milles esimene liige eraldivõetuna vastaks täpselt $(1,2)$-tensori teisenemiseeskirjale (C.24), teise liikme olemasolu rikub aga vastavuse ära. Teisest küljest, kuna see teine liige sõltub ainult koordinaatteisendustest ja mitte seostusest-endast, on seostuste *vahe* tensor.

Kovariantse vektori v_μ komponentide kovariantne tuletis avaldub kui

$$D_\lambda(\Gamma)\, v_\mu := \partial_\lambda v_\mu - \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda}v_\sigma, \tag{C.60}$$

ning üldise (k,l)-tensori $T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l}$ oma kui

$$\begin{aligned} D_\lambda(\Gamma)\, T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} &= \partial_\lambda T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \\ &\quad + \Gamma^{\mu_1}{}_{\lambda\rho}\, T^{\rho\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} + \ldots + \Gamma^{\mu_k}{}_{\lambda\rho}\, T^{\mu_1\ldots\rho}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} \\ &\quad - \Gamma^{\rho}{}_{\nu_1\lambda}\, T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\rho\ldots\nu_l} - \ldots - \Gamma^{\rho}{}_{\nu_l\lambda}\, T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\rho} \end{aligned} \tag{C.61}$$

Infinitesimaalsete teisenduste $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ korral teiseneb seostus kui

$$\delta\Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\nu} = \Gamma'^{\rho}{}_{\lambda\nu}\, \xi^\mu_{,\rho} - \Gamma'^{\mu}{}_{\rho\nu}\, \xi^\rho_{,\lambda} - \Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\rho}\, \xi^\rho_{,\nu} - \xi^\mu_{,\lambda\nu}. \tag{C.62}$$

Nagu äsja mainitud, ei ole afiinne seostus tensor. Küll aga on selle antisümmeetriline osa. Defineerime **väändetensori**,

$$T^{\lambda}{}_{\mu\nu}(\Gamma) := \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} = 2\Gamma^{\lambda}{}_{[\mu\nu]} \tag{C.63}$$

ja viimase kaudu ka **kontorsiooni tensori**,

$$K^{\lambda}{}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\Big(T^{\lambda}{}_{\mu\nu} - T_\mu{}^{\lambda}{}_{\nu} - T_\nu{}^{\lambda}{}_{\mu}\Big) = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}\Big(T_{\sigma\mu\nu} - T_{\mu\sigma\nu} - T_{\nu\sigma\mu}\Big) = -K_\mu{}^{\lambda}{}_{\nu}. \tag{C.64}$$

Paneme tähele, et väändetensor (C.63) on antisümmeetriline kahes viimases ning kontorsiooni tensor (C.64) kahes esimeses indeksis. Paralleelnihutame mingit vektorit v_ν mööda väikest silmust pindalaelemendiga $\Delta\sigma^{\lambda\rho}$. Sel juhul on vektori muut avaldatav kui

$$\Delta v_\nu = \oint \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\, v_\mu\, dx^\rho = \frac{1}{2} R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\, v_\mu(\Gamma)\, \Delta\sigma^{\lambda\rho}$$

milles $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\,(\Gamma)$ on **Riemanni-Cartani kõverustensor**

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho}\,(\Gamma) := \partial_\lambda \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\lambda}\, \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} - (\lambda \leftrightarrow \rho). \tag{C.65}$$

Kovariantsete tuletiste mittekommuteeruvuse kaudu saame kasuliku omaduse mõistmaks kõverustensorit ja väänet:

$$[D_\mu, D_\nu]u^\rho = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} u^\sigma - T^{\sigma}{}_{\mu\nu} D_\sigma u^\rho, \tag{C.66}$$

milles u^ρ on vektorväli. Tulemus on aga üldisem, kehtides igasuguse Lorentzi objektina teiseneva suuruse jaoks.

Kõverustensori ahendamisel saame **Ricci tensori**,

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \tag{C.67}$$

mille omakorda ahendamine (st jälje võtmine) annab meile **Ricci skalaari**,

$$R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu}. \tag{C.68}$$

Esitame siinkohal juba ka **Einsteini tensori**,

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}. \tag{C.69}$$

Meetrikast kovariantse tuletise võtmisel saame **mittemeetrilisuse tensori**,

$$Q_{\mu\nu\lambda}(\Gamma) := -D_\mu(\Gamma)\, g_{\nu\lambda} = -\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}\, g_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu}\, g_{\nu\sigma}, \tag{C.70}$$

mille kaudu defineerime **disformatsiooni tensori**

$$L^\sigma{}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(Q_{\mu\lambda\nu} + Q_{\nu\lambda\mu} + Q_{\lambda\mu\nu} \right) = L^\sigma{}_{\nu\mu}. \tag{C.71}$$

Saame nüüd **afiinse seostuse** komponendid avaldada kui

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} + K^\lambda{}_{\mu\nu} + L^\lambda{}_{\mu\nu}. \tag{C.72}$$

C.6.1 Levi-Civita seostus

Riemanni fundamentaalteoreemi kohaselt eksisteerib unikaalne, väändevaba $K^\lambda{}_{\mu\nu} = 0$ ja meetriline $L^\lambda{}_{\mu\nu} = 0$ seostus, st

$$\Gamma^\lambda{}_{[\mu\nu]} = 0\,, \tag{C.73a}$$

$$D_\lambda g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{C.73b}$$

See on Levi-Civita seostus ning selle komponendid ongi Christoffeli sümbolid. Varasemalt kohtasime neid üldiste koordinaatteisenduste ja geodeetilise joone kontekstis.

Seostuse dekompositsiooni (C.72) järgi saab eristada erinevaid ruume: kui seostus on meetriline (C.73b), on tegemist Riemanni-Cartani ruumiga U_4; kui seostus on ka väändevaba (C.73a), on tegemist Riemanni ruumiga V_4. Alternatiivselt, kui seostus on meetriline ja väändega, nimelt spetsiifiliselt konstrueeritud Weitzenböcki seostus ${}_{\mathrm{w}}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, on kõverustensor (C.65) null[18] ja meil on tegemist Weitzenböcki teleparalleelse ruumiga T_4.
Kui nii vääne, kõverus ja mittemeetrilisus on nullid, oleme tasases Minkowski ruumis M_4. Kontseptuaalselt tasub meil seejuures eelkõige silmas pidada võrrandit (C.73b), mis sisuliselt väljendab tugevat ekvivalentsusprintsiipi, mille kohaselt on lokaalselt leitav tasane inertsiaalsüsteem, kus meetrika kovariantne tuletis on null. Teisisõnu, me ei saa eristada „tõelise“ gravitatsioonijõu ja „pseudo“ Coriolise jõu vahel.

[18] See kätkeb endas tetraadide formalismi kasutuselevõttu, kus tetraad $e^\lambda{}_\mu(x)$ on defineeritud läbi seose $g_{\mu\nu} = e^\lambda{}_\mu e^\sigma{}_\nu \eta_{\lambda\sigma}$ ning Weitzenböcki seostus ${}_{\mathrm{w}}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} - K^\lambda{}_{\mu\nu}$ konstrueeritakse nii, et kõverustensor $\tilde{R}\,({}_{\mathrm{w}}\Gamma) = 0$.

C.7 Riemanni geomeetria

Edaspidises töötame Riemanni geomeetrias V_4 milles kovariantne tuletis $D(\Gamma)$ (C.58) on defineeritud Levi-Civita seostuse kaudu, tähistatud kui lihtsalt D või semikooloniga järgneval viisil:

$$D_\sigma \left(\overset{\text{L.C. seos.}}{\Gamma} \right) u^\mu = D_\sigma \, u^\mu := u^\mu_{;\sigma} = u^\mu_{,\sigma} + \left\{ {\mu \atop \sigma\lambda} \right\} u^\lambda \, .$$

Sel juhul koosneb seostus vaid Christoffeli sümbolitest, $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$, millest lähtuvalt võime neid üldiselt siin töös ka sünonüümsetena käsitleda. Vastavalt täpsustub kõverustensor (C.65) **Riemanni kõverustensori** erijuhule,

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\sigma} = \partial_\lambda \left\{ {\mu \atop \sigma\nu} \right\} + \left\{ {\mu \atop \lambda\tau} \right\} \left\{ {\tau \atop \sigma\nu} \right\} - (\lambda \leftrightarrow \sigma) \, , \tag{C.74a}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = g_{\mu\rho} R^\rho{}_{\nu\lambda\sigma} = g_{\mu\rho} \left(\left(\partial_\lambda \left\{ {\rho \atop \nu\sigma} \right\} + \left\{ {\rho \atop \tau\lambda} \right\} \left\{ {\tau \atop \nu\sigma} \right\} \right) - (\lambda \leftrightarrow \sigma) \right) . \tag{C.74b}$$

Tulenevalt Christoffeli sümboli sümmeetriatest, kehtivad Riemanni kõverustensori jaoks järgmised algebralised seosed:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\mu\nu}, \tag{C.75a}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\lambda} = R_{\nu\mu\sigma\lambda} = -R_{\nu\mu\lambda\sigma}, \tag{C.75b}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} + R_{\mu\lambda\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\lambda} = 0, \tag{C.75c}$$

millest tulenevalt on sel vaid 20 sõltumatut komponenti, mitte $4^4 = 256$.
Lisaks taandub valem (C.66) nüüd veelgi lihtsamale kujule:

$$[D_\mu, D_\nu] u^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} u^\sigma \tag{C.76}$$

Ahendusel saadav **Ricci tensor** $R_{\mu\nu}$ on samuti sümmeetriline.

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\lambda \atop \mu\lambda} \right\} + \left\{ {\lambda \atop \lambda\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - \left\{ {\lambda \atop \nu\rho} \right\} \left\{ {\rho \atop \mu\lambda} \right\} . \tag{C.77}$$

Riemanni muutkondadel saame alati punkti $p \in V_4$ ümbruses leida koordinaadistiku, kus

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} \, , \tag{C.78a}$$

$$g_{\mu\nu,\lambda}(p) = 0 \, . \tag{C.78b}$$

Need ongi **normaalkoordinaadid** (vt (C.36)). Kuna meetrika esimest järku tuletised punktis p on nullid (C.78b), on seda ka Christoffeli sümbolid (C.11). Samas kuna *teist* järku tuletised ei pruugi nullid olla, võib ka kõverus (C.74) nullist erineda. See ongi sisuliselt Einsteini ekvivalentsusprintsiibi aluseks, mille järgi ühtlase kiirendusega („vabas languses“) vaatleja liigub geodeetilisel

trajektooril (vt (C.14), (C.15) ja (C.15)); sellest tulenevalt me nimetamegi normaalkoordinaate lokaalseks inertsiaalseks taustsüsteemiks.

Riemanni tensori oluliseks omaduseks on allumine (algebralistele[19]) **Bianchi samasustele**:

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma;\rho} + R_{\mu\nu\sigma\rho;\lambda} + R_{\mu\nu\rho\lambda;\sigma} = 0\,. \tag{C.79}$$

Tõestuse visand: olgu punkt $p \in V_4$. Kasutame normaalkoordinaate. Seega on seostuse komponendid selles punktis nullid. Kõveruse tensor avaldub ainult seostuse tuletistega liikmete kaudu kui

$$R_{\mu\nu\sigma\rho}\Big|_p = \frac{1}{2}\Big(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu,\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\nu\rho,\mu\sigma}\Big)\,.$$

Sellest avaldisest kovariantse tuletise võtmine annab punktis p sama tulemuse, mis osatuletiste võtmine,

$$R_{\mu\nu\sigma\rho;\lambda}\Big|_p = \frac{1}{2}\Big(g_{\mu\sigma,\nu\rho\lambda} - g_{\nu\sigma,\mu\rho\lambda} - g_{\mu\rho,\nu\sigma\lambda} + g_{\nu\rho,\mu\sigma\lambda}\Big)\,,$$

mis tsüklilisuse kaudu annabki meile tulemiseks Bianchi samasuse (C.79). Sellest tulenevalt annab Einsteini tensor (C.69), mis on Riemanni geomeetrias samuti sümmeetriline, meile **ahendatud Bianchi samasused**,

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0\,. \tag{C.80}$$

Need on ekvivalentsed Noetheri samasustega üldrelatiivsusteooria vaakumis, tulenedes gravitatsioonivälja difeomorfismisümmeetriast.

Esitame siinkohal valitud tensoriaalsete objektide teisenemised infinitesimaalsete koordinaatteisenduste korral,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{J}^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \xi^{\mu}_{,\nu}, \qquad \mathcal{K}^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \xi^{\mu}_{,\nu}\,.$$

Nimelt:

$$\begin{aligned}
\delta S &= 0 & \bar{\delta} S &= -S_{,\mu}\xi^{\mu} \\
\delta u^{\mu} &= \xi^{\mu}_{,\nu} u^{\nu} & \bar{\delta} u^{\mu} &= \xi^{\mu}_{,\nu} u^{\nu} - u^{\mu}_{,\nu}\xi^{\nu} \\
\delta v_{\mu} &= -\xi^{\lambda}_{,\mu} v_{\lambda} & \bar{\delta} v_{\mu} &= -\xi^{\lambda}_{,\mu} v_{\lambda} - v_{\mu,\lambda}\xi^{\lambda} \\
\delta g_{\mu\nu} &= -\xi^{\lambda}_{,\mu} g_{\lambda\nu} - \xi^{\lambda}_{,\nu} g_{\mu\lambda} & \bar{\delta} g_{\mu\nu} &= -\xi^{\lambda}_{,\mu} g_{\lambda\nu} - \xi^{\lambda}_{,\nu} g_{\mu\lambda} - g_{\mu\nu,\lambda}\xi^{\lambda} \\
\delta g &= -2g\xi^{\lambda}_{,\lambda} & \bar{\delta} g &= -2g\xi^{\lambda}_{,\lambda} - g_{,\lambda}\xi^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{C.81}$$

[19]Bianchi samasusi saab tuletada mitmel viisil, mis on käesolevas töös oluline tähelepanek.

D Hilberti mõjufunktsionaali varieerimine

D.1 Meetrika determinandi ruutjuure varieerimine

Olgu A pööratav ja diagonaliseeritav $n \times n$ maatriks. Eksisteerib pööratav maatriks P ja diagonaalne maatriks $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, mille korral

$$A = P\Lambda P^{-1}\,. \tag{D.1}$$

Ühtlasi teame, et A determinant on tema omaväärtuste korrutis. Võtame avaldisest (D.1) determinandi:

$$\det A = \det\big(P\big)\Big(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)\det\big(P^{-1}\big) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i, \tag{D.2}$$

sest $\det\big(P\big)\cdot\det\big(P^{-1}\big) = 1$.

Võtame nüüd valemist (D.2) logaritmi, mille tulemusel saame

$$\ln\det A = \sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i, \tag{D.3}$$

tänu naturaallogaritmi omadusele $\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$.

Defineerime diagonaliseeritava maatriksi A jaoks:

$$\ln A := P\,\mathrm{diag}(\ln\lambda_1, \ldots, \ln\lambda_n)\,P^{-1}. \tag{D.4}$$

Võtame sellest jälje:

$$\mathrm{tr}(\ln A) := \mathrm{tr}\big(P\,\mathrm{diag}(\ln\lambda_i)\,P^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{diag}(\ln\lambda_i)\,P^{-1}P\big) = \sum_{i=1}^{n}\ln\lambda_i, \tag{D.5}$$

kus oleme kasutanud ära jälje tsüklilisust $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, et nihutada $P^{-1}P = \mathbb{I}$ paremale.

Võrreldes nüüd valemit (D.3) valemiga (D.5), saame:

$$\ln(\det A) = \mathrm{tr}(\ln A). \tag{D.6}$$

Alternatiivselt, oleks saanud näidata, lähtudes seosest $\det(e^B) = e^{\mathrm{trB}}$ ja võttes $B = \ln A$:

$$\det A = \det(e^{\ln A}) = e^{\mathrm{tr}(\ln A)} \implies \ln\det A = \mathrm{tr}\ln A,$$

mis ühtib varasemalt saadud tulemusega.

Maatriksi naturaallogaritmi varieerimine toimub ootuspärasel moel:

$$\delta(\ln A) = A^{-1}\delta A. \tag{D.7}$$

Varieerimise operaator kommuteerub jäljevõtmise operaatoriga. Seega kõike eelnevat kokku võttes saame

$$\delta(\operatorname{tr}\ln A) = \operatorname{tr}(\delta\ln A) = \operatorname{tr}(A^{-1}\delta A) = \delta(\ln\det A) = \frac{1}{\det A}\delta(\det A), \tag{D.8}$$

milles meie jaoks oluline samasus on just $\operatorname{tr}(A^{-1}\delta A) = \frac{1}{\det A}\delta(\det A)$. Korrutades mõlemat poolt suurusega $\det A$, saame

$$\delta(\det A) = (\det A)\operatorname{tr}(A^{-1}\delta A), \tag{D.9}$$

mis on tuntud kui Jacobi valem.

Meil oli tarvis leida $\delta\sqrt{-g}$. Meetriline tensor g on pööratav ja diagonaliseeritav, seega eelnevaga võrreldes on meil nüüd $A = g_{\mu\nu}$, $A^{-1} = g^{\mu\nu}$ ning $\det A = g$. Sisestades need valemisse (D.9), saame

$$\delta(-g) = -g\operatorname{tr}(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -g\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \tag{D.10}$$

kus jälje-operatsioon kaob ära, kuna see kujutab endas indeksite ahendamist, samas suurus $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ on juba ahendatud indeksitega. Teisisõnu, $\operatorname{tr}(g^{-1}\delta g) = (g^{-1})^{\mu}{}_{\nu}(\delta g)^{\nu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ ehk sisuliselt, $\operatorname{tr}(\text{skalaar}) = \text{skalaar}$. Kogu variatsioon on seega

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}(-g)\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{D.11}$$

D.2 Ricci tensori varieerimine

Arvutame Ricci tensori (C.68), (C.77) variatsiooni $\delta R_{\mu\nu}$.

Kuna Levi-Civita seostuse ainukesed komponendid on Christoffeli sümbolid, lähtume võrrandist (C.11b). Teatavasti pole küll Christoffeli sümbolid ise tensorid, nende variatsioonid aga on. See tuleneb asjaolust, et varieerimisel me leiame vahe $g_{\mu\nu}$ jaoks arvutatud ning $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ jaoks arvutatud Christoffeli sümbolite vahel. Valemis (C.59) on tensorina teisenemist takistav liige meetrikast sõltumatu ning seega läbi lahutamise ka tühistatav.
Kasutame ära teadmist, et me võime punktis $p \in V_4$ valida arvutuste lihtsustamiseks normaalkoordinaadistiku, milles $\partial_\rho g_{\mu\nu} = 0$, sellest tulenevalt ka $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = 0$.
Christoffeli sümbolite variatsioonid punktis p kuni esimese järguni on

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(D_\mu \delta g_{\sigma\nu} + D_\nu \delta g_{\sigma\mu} - D_\sigma \delta g_{\mu\nu} \right) , \end{aligned} \tag{D.12}$$

kus võime asendada osatuletised kovariantsete tuletistega, sest endiselt—$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = 0$. Samas aga kuna võrrandi (D.12) mõlemad pooled on tensorid ja p on suvaline, peab see kehtima üldiselt.

Käsitleme nüüd Riemanni tensori variatsiooni. Normaalkoordinaatides lihtsustub valem (C.74a) järgnevalt:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}, \tag{D.13}$$

mille varieerimine annab

$$\delta R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \big(\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} \big) - \partial_\nu \big(\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} \big) = D_\mu \big(\delta\Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} \big) - D_\nu \big(\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} \big) \tag{D.14}$$

kus oleme taaskord kasutanud vabadust asendada osatuletised kovariantsete tuletistega.
Indeksite ahendusel saame

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\rho \, \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - D_\nu \, \delta\Gamma^\rho{}_{\mu\rho} \tag{D.15}$$

mis ühtib tulemusega (2.11).

E Einsteini mõjufunktsionaal

Einsteini mõju S_E erineb Hilberti mõjust S_H täisdivergentsist $\partial_\mu W^\mu$ lähtuva ääreliikme võrra:

$$\begin{aligned} S_H &= S_E + \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu W^\mu = \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}_{\text{maht}} + \int_\Omega d^4x\, \mathcal{L}_{\text{pind}} \\ &= \int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\big(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\big) + \int_\Omega d^4x\, \partial_\mu\Big(\sqrt{-g}\, g_{\lambda\rho,\nu}\big(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\big)\Big), \end{aligned} \tag{E.1}$$

milles $\mathcal{L}_{\text{maht}}$ avaldub järgnevalt:

$$\mathcal{L}_{\text{maht}} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\big(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}\big) =: \sqrt{-g}\, \mathcal{G}\,. \tag{E.2}$$

Idee on seega Hilberti mõju lagranžiaanist $\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}\, R$ eraldada $\Gamma\Gamma$-osa. Hilberti mõju on väljakirjutuna:

$$\sqrt{-g}\, R = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\right)\,, \tag{E.3}$$

mille meil tuleb jagada täisdivergentsi liikmeks $\partial_\lambda W^\lambda$ ja $\Gamma\Gamma$-liikmeks, ehk siis otsime valemis (E.2) esinevat suurust $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}R &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\right) \\ &= \partial_\lambda\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right] - \partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right] + \partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \\ &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\right) \\ &= \underbrace{\partial_\lambda\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right] - \partial_\nu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right]}_{\text{täisdivergents}} - \left[\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right] \\ &\quad + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\right) \\ &= \partial_\lambda\Big[\underbrace{\sqrt{-g}\big(g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\nu}\Gamma^\sigma_{\nu\sigma}\big)}_{:=W^\lambda}\Big] + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\right) \\ &\quad - \underbrace{\left[\partial_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right]}_{(\clubsuit)}\,. \end{aligned} \tag{E.4}$$

Käsitleme ($\clubsuit$) liiget.

Meil vaja leida $\partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})$:

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}) = \partial_\lambda(\sqrt{-g})g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right). \tag{E.5}$$

Vaatame teist liiget, milles meil on $\partial_\lambda g^{\mu\nu}$.

Kuna me oleme meetrilises Riemanni ruumis V_4, kehtib

$$D_\lambda g^{\mu\nu} = 0 = \partial_\lambda g^{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\mu}g^{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}g^{\mu\rho},$$

millest tulenevalt:

$$\boxed{\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -\Gamma^\mu_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} g^{\mu\rho}}. \tag{E.6}$$

Ühtlasi, varasemast juba teame (vt (2.8))

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\partial_\lambda g_{\alpha\beta}), \tag{E.7}$$

Milles esinev $\partial_\lambda g_{\alpha\beta}$, analoogiliselt valemiga (E.6):

$$\partial_\lambda g_{\alpha\beta} = \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} g_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma_{\lambda\beta} g_{\alpha\sigma}. \tag{E.8}$$

Tulles nüüd avaldise (E.5) esimese liikme juurde, teame, et (vt (D.11))

$$\partial_\lambda \sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\lambda g_{\alpha\beta}. \tag{E.9}$$

Sisestades nüüd valemi (E.8) valemisse (E.9) :

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} (\Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} g_{\sigma\beta} + \Gamma^\sigma_{\lambda\beta} g_{\alpha\sigma}) \\
\substack{g^{\alpha\beta} g_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\sigma \\ g^{\alpha\beta} g_{\alpha\sigma} = \delta^\beta_\sigma} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} (\Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} \delta^\alpha_\sigma + \Gamma^\sigma_{\lambda\beta} \delta^\beta_\sigma) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g} (\Gamma^\alpha_{\lambda\alpha} + \Gamma^\beta_{\lambda\beta}) \underset{\substack{\alpha\to\sigma \\ \beta\to\sigma}}{=} \sqrt{-g}\, \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}
\end{aligned}$$

Ehk siis:

$$\boxed{\partial_\lambda \sqrt{-g} = \sqrt{-g}\, \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}}. \tag{E.10}$$

Seega:

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) &= \sqrt{-g}\, \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} (-\Gamma^\mu_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} g^{\mu\rho}) \\
&= \sqrt{-g} \left(\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} g^{\mu\rho} \right),
\end{aligned} \tag{E.11}$$

ja

$$\partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left(\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} g^{\mu\rho} \right) \Gamma^\lambda_{\mu\nu}. \tag{E.12}$$

Ning teine liige avaldises (♣):

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} = \sqrt{-g} \left(\Gamma^\sigma_{\nu\sigma} g^{\mu\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\rho} g^{\rho\nu} - \Gamma^\nu_{\nu\rho} g^{\mu\rho} \right) \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}. \tag{E.13}$$

Pannes nüüd kõik kokku, (♣) = (E.12) − (E.13):

$$\begin{aligned}
\clubsuit &= \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \\
&= \sqrt{-g} \left(g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\rho\nu} \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\nu\sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + g^{\rho\nu} \Gamma^\mu_{\nu\rho} \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + g^{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\nu\rho} \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \right) \\
&= \sqrt{-g} \Big(g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \underbrace{\left(g^{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\lambda\rho} + g^{\rho\nu} \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \right) \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}_{\diamondsuit} + \underbrace{\left(g^{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\nu\rho} - g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\nu\sigma} \right) \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}_{\heartsuit} + g^{\rho\nu} \Gamma^\mu_{\nu\rho} \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} \Big)
\end{aligned}$$

Vaatame liiget $\diamondsuit$:

$$\diamondsuit : \underbrace{g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}_{\triangle} + \underbrace{g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}_{\bowtie}$$

$$\triangle : g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \xrightarrow{\rho\to\sigma} g^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \xrightarrow{\nu\leftrightarrow\sigma} g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \xrightarrow[g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}]{\mu\leftrightarrow\nu} g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$$

$$\bowtie : g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \xrightarrow{\rho\to\sigma} g^{\sigma\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \xrightarrow{\mu\leftrightarrow\sigma} g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu} \xrightarrow{\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}=\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}} g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$$

$$\diamondsuit : \triangle + \bowtie = 2\diamondsuit = 2g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}.$$

Nüüd vaatame liiget $\heartsuit$:

$$\heartsuit : \underbrace{g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\nu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}_{\spadesuit} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$$

$$\spadesuit : g^{\mu\rho}\Gamma^{\nu}_{\nu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \xrightarrow[\rho\to\nu]{\nu\to\sigma} g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}$$

$$\heartsuit : \spadesuit - g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = 0.$$

Ehk siis oleme saanud:

$$\begin{aligned}
\clubsuit &= \sqrt{-g}\Big(g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - 2g^{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + g^{\rho\nu}\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\Big) \\
&= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \sqrt{-g}g^{\rho\nu}\,\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{smallmatrix}\lambda\to\sigma\\ \mu\to\lambda\\ \rho\to\mu\end{smallmatrix} \\
&= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - 2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} \\
&= 2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Big).
\end{aligned}$$

Naaseme nüüd algse võrrandi, (E.4), juurde:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}R &= \partial_\lambda W^\lambda + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\right) - \clubsuit \\
&= \partial_\lambda W^\lambda + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} - \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - 2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Big) \\
&= \partial_\lambda W^\lambda + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}(1-2)\big(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\big) + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\,(2-1)\big(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\big) \\
&= \partial_\lambda W^\lambda + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\Big(\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Big) = \partial_\lambda W^\lambda + \mathcal{L}_E
\end{aligned} \tag{E.14}$$

F Algebralised tuletused

F.1 Christoffeli sümbolid

Lähtume valemistest (C.7) ja (C.10), tähistame Christoffeli sümboleid $\left\{ {\rho \atop \lambda\nu} \right\}$ siinkohal kui $\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}$ ning esitame nad uuesti:

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} := \mathcal{J}^{\rho}_{\mu}\mathcal{K}^{\mu}_{\nu\lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{K}^{\mu}_{\nu\lambda} = \mathcal{K}^{\mu}_{\rho}\,\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\,, \tag{F.1}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\mathcal{K}^{\rho}_{\mu}\mathcal{K}^{\sigma}_{\nu}\,. \tag{F.2}$$

Võtame valemist (F.2) tuletise x'^{λ} järgi,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\lambda} &= \eta_{\rho\sigma}\left(\mathcal{K}^{\rho}_{\mu\lambda}\,\mathcal{K}^{\sigma}_{\nu} + \mathcal{K}^{\rho}_{\mu}\,\mathcal{K}^{\sigma}_{\nu\lambda}\right) \\ &\underset{\text{(F.1)}}{=} \eta_{\rho\sigma}\left(\mathcal{K}^{\rho}_{\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}\,\mathcal{K}^{\sigma}_{\nu} + \mathcal{K}^{\rho}_{\mu}\,\mathcal{K}^{\sigma}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\right) \\ &= \eta_{\rho\sigma}\mathcal{K}^{\rho}_{\alpha}\mathcal{K}^{\sigma}_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + \eta_{\rho\sigma}\mathcal{K}^{\rho}_{\mu}\mathcal{K}^{\sigma}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} \\ &\underset{\text{(F.2)}}{=} g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\,. \end{aligned} \tag{F.3}$$

Defineerime uue objekti,

$$g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} =: \Gamma_{\lambda\mu\nu}\,, \tag{F.4}$$

ning sisestame selle võrrandisse (F.3):

$$g_{\mu\nu,\lambda} = g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} + g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} = \Gamma_{\nu\lambda\mu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}\,. \tag{F.5}$$

Paneme kirja kolm permutatsiooni:

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\nu\lambda\mu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}\,, \tag{F.6a}$$

$$g_{\lambda\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu\mu}\,, \tag{F.6b}$$

$$g_{\nu\lambda,\mu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\lambda}\,. \tag{F.6c}$$

Teades, et $\Gamma_{\lambda\mu\nu}$ on sümmeetriline kahes viimases indeksis, saab selle võrrandisüsteemi ära lahendada, kui lahutame kahest esimesest liikmest kolmanda, saame:

$$\begin{aligned} \overset{\text{(F.6a)}}{g_{\mu\nu,\lambda}} + \overset{\text{(F.6b)}}{g_{\lambda\mu,\nu}} - \overset{\text{(F.6c)}}{g_{\nu\lambda,\mu}} &= \left(\Gamma_{\nu\lambda\mu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}\right) + \left(\Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\lambda\nu\mu}\right) - \left(\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\lambda}\right) \\ &= \underbrace{\Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\nu\lambda}}_{2\Gamma_{\mu\lambda\nu}} + \underbrace{\Gamma_{\nu\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu\lambda}}_{0} + \underbrace{\Gamma_{\lambda\nu\mu} - \Gamma_{\lambda\mu\nu}}_{0} \\ &= 2\,\Gamma_{\mu\lambda\nu} \underset{\text{(F.4)}}{=} 2\,g_{\mu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\,. \end{aligned} \tag{F.7}$$

Ehk siis, oleme saanud:

$$g_{\mu\sigma}\,\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}\,g^{\mu\sigma}\left(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}\right) \tag{F.8}$$

mis vastab valemitele (C.11).

F.2 Afiinse seostuse komponentide teiseneminemiseeskiri

F.2.1 Tuletuskäik jakobiaanidega

Lähtume valemist (C.58), esitame selle siin uuesti:

$$D_\sigma u^\mu := \partial_\sigma u^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} u^\rho. \tag{F.9}$$

Kovariantne tuletis (F.9) peab tervikuna teisenema nagu $(1,1)$-tensor,

$$D_{\sigma'} u^{\mu'} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} D_\lambda u^\kappa \underset{\text{(C.2)}}{=} \mathcal{K}^\lambda_\sigma \, \mathcal{J}^\mu_\kappa \, D_\lambda u^\kappa \,. \tag{F.10}$$

Sisestame kovariantse tuletise definitsiooni (F.9) valemisse (F.10),

$$\partial_{\sigma'} u^{\mu'} + \Gamma^{\mu'}_{\rho'\sigma'} u^{\rho'} = \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \, \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa \big(\partial_\lambda u^\kappa + \Gamma^\kappa_{\tau\lambda} \, u^\tau\big). \tag{F.11}$$

Avaldame $\partial_{\sigma'} u^{\mu'}$,

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma'} u^{\mu'} &= \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \, \partial_\lambda \big(\mathcal{J}^{\mu'}_\kappa \, u^\kappa\big) \\ &= \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \, \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa \big(\partial_\lambda u^\kappa\big) + \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \big(\partial_\lambda \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa\big) u^\kappa. \end{aligned} \tag{F.12}$$

Sisestame (F.12) valemi (F.11) vasakusse poolde,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \, \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa \big(\partial_\lambda u^\kappa\big) + \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \big(\partial_\lambda \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa\big) u^\kappa + \Gamma^{\mu'}_{\rho'\sigma'} u^{\rho'} &= \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \, \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa \big(\partial_\lambda u^\kappa + \Gamma^\kappa_{\tau\lambda} \, u^\tau\big) \\ \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \, \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa \big(\partial_\lambda u^\kappa\big) + \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \big(\partial_\lambda \mathcal{J}^{\mu'}_\rho\big) u^\rho + \Gamma^{\mu'}_{\rho'\sigma'} \, \mathcal{J}^{\rho'}_\rho \, u^\rho &= \mathcal{K}^\lambda_{\sigma'} \, \mathcal{J}^{\mu'}_\kappa \big(\partial_\lambda u^\kappa + \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} \, u^\rho\big) \\ \kappa \leftrightarrow \rho \qquad\qquad\qquad\

Mis on tegelikult juba õige valem seostuse koefitsiendi teisenemise jaoks. Näeme, et ta ei teisene kui tensor. Saame aga pisut mugavama avaldiseni jõuda, kui asendame $\mathcal{J}^{\mu'}_{\lambda\rho}$ suurusega $\mathcal{K}^{\alpha}_{\nu\sigma'}$. Teame, et $\mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}\,\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho} = \delta^{\alpha}_{\rho}$. Võtame sellest tuletise,

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda\big(\delta^{\alpha}_{\rho}\big) = 0 = \partial_\lambda\big(\mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}\,\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho}\big) &= \big(\partial_\lambda\mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}\big)\,\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho} + \mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}\,\big(\partial_\lambda\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho}\big)\,,\\
\mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}\,\big(\partial_\lambda\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho}\big) &= -\big(\partial_\lambda\mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}\big)\,\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho} \quad |\,(\mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha})\cdot\,,\\
\underbrace{\mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha}\,\mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}}_{\delta^{\mu'}_{\gamma}}\,\big(\partial_\lambda\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho}\big) &= -\mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha}\,\big(\underbrace{\partial_\lambda\mathcal{K}^{\alpha}_{\gamma}}_{\mathcal{K}^{\alpha}_{\lambda\gamma}}\big)\,\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho}\,,\\
\partial_\lambda\mathcal{J}^{\mu'}_{\rho} = \mathcal{J}^{\mu'}_{\lambda\rho} &= -\mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha}\,\mathcal{K}^{\alpha}_{\lambda\gamma}\,\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho}\,.
\end{aligned} \tag{F.16}$$

Sisestame seose (F.16) nüüd valemisse (F.15):

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu'}_{\nu\sigma'} &= \mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{J}^{\mu'}_{\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}\,\mathcal{K}^{\rho}_{\nu} - \mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{J}^{\mu'}_{\lambda\rho}\,\mathcal{K}^{\rho}_{\nu}\\
&= \mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{J}^{\mu'}_{\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}\,\mathcal{K}^{\rho}_{\nu} + \mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha}\,\mathcal{K}^{\alpha}_{\lambda\gamma}\,\underbrace{\mathcal{J}^{\gamma}_{\rho}\mathcal{K}^{\rho}_{\nu}}_{\delta^{\gamma}_{\nu}}\\
&= \mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{J}^{\mu'}_{\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}\,\mathcal{K}^{\rho}_{\nu} + \mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha}\,\mathcal{K}^{\alpha}_{\lambda\rho}\\
&= \mathcal{J}^{\mu'}_{\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}\,\mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{K}^{\rho}_{\nu} + \mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha}\,\mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma'\rho}
\end{aligned} \tag{F.17}$$

Pärast indeksite ümbernimetamist jõuamegi valemini (C.59)

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu'}_{\nu\sigma'} &= \mathcal{J}^{\mu'}_{\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}\,\mathcal{K}^{\lambda}_{\sigma'}\,\mathcal{K}^{\rho}_{\nu} + \mathcal{J}^{\mu'}_{\alpha}\,\mathcal{K}^{\alpha}_{\sigma'\rho}\\
&\Downarrow\\
\Gamma'^{\mu}_{\lambda\nu} &= \mathcal{J}^{\mu}_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\sigma\tau}\,\mathcal{K}^{\sigma}_{\lambda}\,\mathcal{K}^{\tau}_{\nu} + \mathcal{J}^{\mu}_{\rho}\,\mathcal{K}^{\rho}_{\nu\lambda}
\end{aligned} \tag{F.18}$$

F.2.2 Tuletuskäik kovariantsest tuletisest lähtuvalt

Kovariantse tuletise (C.58) teisenemine (F.9),

$$D_{\lambda'}u^{\mu'} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}D_\sigma u^\nu. \tag{F.19}$$

Teisenemine

$$\begin{aligned}
D_{\lambda'}u^{\mu'} &\overset{\text{(C.58)}}{=} \partial_{\mu'}u^{\nu'} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\sigma'}u^{\sigma'} \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\partial_\mu\left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}u^\nu\right) + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\sigma'}\frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^\sigma}u^\sigma \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\partial_\mu u^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}u^\nu + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\sigma'}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\sigma}u^\sigma \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\left(\partial_\mu u^\nu + \underbrace{\Gamma^\nu_{\mu\sigma}u^\sigma\Big) - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\mu\sigma}u^\sigma}_{+0} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\underset{\nu\to\sigma}{u^\nu} + \Gamma^{\nu'}_{\mu'\sigma'}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\sigma}u^\sigma \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}D_\mu u^\nu - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} - \Gamma^{\nu'}_{\mu'\sigma'}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\sigma}\right)u^\sigma.
\end{aligned} \tag{F.20}$$

Et (F.19) kehtiks, peab (F.20) viimane liige nulliga võrduma,

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\sigma'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\sigma}\Gamma^\nu_{\mu\sigma} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\sigma'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\sigma}$$

F.3 Seosed meetrika determinandiga

Tuletame kolm kasulikku seost:

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu} \tag{F.21a}$$

$$\left\{ {\mu \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \sqrt{-g} \tag{F.21b}$$

$$\sqrt{-g}\, v^\mu_{;\mu} = \left(\sqrt{-g}\, v^\mu\right)_{,\mu} \tag{F.21c}$$

(F.21a): $g = \det(g_{\mu\nu})$. Pööratava maatriksi A jaoks kehtib (D.9):

$$\delta \det(A) = \det(A)\, \mathrm{tr}(A^{-1} \delta A)\,.$$

Olgu nüüd $A = g_{\mu\nu}$ ja $\delta A = \delta g_{\mu\nu}$:

$$\delta g = g\, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Kuna $\delta g_{\mu\nu}$ on suvaline, saamegi

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}}$$

(F.21b): Lähtume Christoffeli sümbolite avaldisest (C.11b) ja ahendame:

$$\left\{ {\mu \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \Big(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda} \Big) = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g_{\lambda\mu,\nu},$$

kus nimetasime summeetrimisindekseid ümber. Võtame tuletise suurusest $\ln(-g)$:

$$\partial_\nu \ln(-g) = \frac{1}{-g} \partial_\nu (-g) = \frac{1}{g} g\, g^{\mu\lambda} \partial_\nu g_{\lambda\mu} = g^{\mu\lambda} \partial_\nu g_{\lambda\mu}.$$

Paneme kaks tulemust kokku,

$$\left\{ {\mu \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{2} \partial_\nu \ln(-g) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \sqrt{-g}\,,$$

kus kasutasime seost $\partial_\nu \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, \partial_\nu \ln(-g)$. Ehk siis:

$$\boxed{\left\{ {\mu \atop \mu\nu} \right\} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu \sqrt{-g}}$$

(F.21c): kontravariantsete vektori komponentide kovariantne divergents on antud kui:

$$v^\mu{}_{;\mu} = \partial_\mu v^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} v^\lambda.$$

Korrutame läbi suurusega $\sqrt{-g}$ ja kasutame seost (F.21b):

$$\sqrt{-g}\, v^\mu{}_{;\mu} = \sqrt{-g}\, \partial_\mu v^\mu + \sqrt{-g}\, \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} v^\lambda = \sqrt{-g}\, \partial_\mu v^\mu + v^\lambda \partial_\lambda \sqrt{-g}.$$

Paremal poolel on täistuletis, $\partial_\mu \big(\sqrt{-g}\, v^\mu\big)$. Ehk siis saamegi:

$$\boxed{\sqrt{-g}\, v^\mu{}_{;\mu} = \Big(\sqrt{-g}\, v^\mu\Big)_{,\mu}}$$

F.4 Meetrika variatsioon

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} &= \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho}\partial_\nu \xi^\rho + g_{\nu\rho}\partial_\mu \xi^\rho \\ &= (\pounds_\xi g)_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{F.22}$$

Teisendame valemi (F.22) kujule

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \pounds_\xi g_{\mu\nu} = D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu. \tag{F.23}$$

teisendamine.

Kasutame teadmist, et $g_{\mu\rho}\xi^\rho = \xi_\mu$:

$$\begin{aligned}g_{\mu\rho}\partial_\nu \xi^\rho &= \partial_\nu(g_{\mu\rho}\xi^\rho) - (\partial_\nu g_{\mu\rho})\xi^\rho = \partial_\nu \xi_\mu - (\partial_\nu g_{\mu\rho})\xi^\rho, \\ g_{\nu\rho}\partial_\mu \xi^\rho &= \partial_\mu(g_{\nu\rho}\xi^\rho) - (\partial_\mu g_{\nu\rho})\xi^\rho = \partial_\mu \xi_\nu - (\partial_\mu g_{\nu\rho})\xi^\rho.\end{aligned} \tag{F.24}$$

Avaldame need valemis (F.22):

$$\delta g_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu + \xi^\rho\big(- \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\big). \tag{F.25}$$

Pärast summeerimisindeksi vahetust $\lambda \leftrightarrow \rho$ esimeses liikmes, võtab (F.25) kuju:

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu + \xi^\rho\big(\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}\big). \tag{F.26}$$

Meenutame Levi-Civita seostuse komponentide avaldist läbi meetrika tuletiste,

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}\big(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\big),$$

milles langetame indeksi $\Gamma_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ ja tõstame liikmeid ümber,

$$\begin{aligned}-2\Gamma_{\rho\mu\nu} = -2g_{\rho\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} &= -\underbrace{g_{\rho\sigma}g^{\sigma\lambda}}_{\delta^\lambda_\rho}\big(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\big) \\ &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\mu g_{\nu\rho}.\end{aligned} \tag{F.27}$$

Sisestame selle nüüd valemisse (F.26) ja saame

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - 2\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\,\xi_\sigma, \tag{F.28}$$

kus viimases liikmes toimisime järgnevalt:

$$\xi^\rho\,\Gamma_{\rho\mu\nu} = \xi^\rho(g_{\sigma\rho}g^{\sigma\rho})\Gamma_{\rho\mu\nu} = (\xi^\rho g_{\sigma\rho})(g^{\sigma\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu}) = \xi_\sigma\,\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}.$$

Tuvastame kovariantsed tuletised,

$$\begin{aligned}D_\mu \xi_\nu &= \partial_\mu \xi_\nu - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\,\xi_\sigma\,, \\ D_\nu \xi_\mu &= \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\,\xi_\sigma\,,\end{aligned} \tag{F.29}$$

sisestame need valemisse (F.28). Lõpuks saamegi:

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = \pounds_\xi g_{\mu\nu} = D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu \quad .$$

F.5 Seostuse variatsioon

Tuletame seose

$$\bar{\delta}_\xi \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -D_{(\mu} D_{\nu)} \xi^\lambda + R^\lambda{}_{(\mu\nu)\sigma}\, \xi^\sigma. \tag{F.30}$$

Vaatame kõigepealt Lie tuletist kovariantsest tuletisest $D_\mu u^\lambda$ ehk $(1,1)$-tensorist, $(Du)^\lambda_\mu$, milles võtame $u^\lambda = \xi^\lambda$,

$$\begin{aligned} \pounds_\xi (D_\mu \xi^\lambda) &= \xi^\nu D_\nu (D_\mu \xi^\lambda) - \underbrace{(D_\mu \xi^\nu) D_\nu \xi^\lambda + (D_\nu \xi^\lambda) D_\mu \xi^\nu}_{0} \\ &= \xi^\nu D_\nu D_\mu \xi^\lambda \underset{\text{(C.76)}}{=} \xi^\nu \Big(D_\mu D_\nu \xi^\lambda - R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \xi^\sigma \Big)\,, \end{aligned} \tag{F.31}$$

ning samas ka

$$\pounds_\xi (D_\mu \xi^\lambda) = D_\mu (\underbrace{\pounds_\xi \xi^\lambda}_{=0}) + (\pounds_\xi \Gamma)^\lambda{}_{\mu\nu}\, \xi^\nu = (\pounds_\xi \Gamma)^\lambda{}_{\mu\nu}\, \xi^\nu. \tag{F.32}$$

Paneme (F.31) ja (F.32) kokku,

$$(\pounds_\xi \Gamma)^\lambda{}_{\mu\nu} = D_\mu D_\nu \xi^\lambda - R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \xi^\sigma\,. \tag{F.33}$$

Oleme aktiivse difeomorfismi defineerinud kui negatiivse Lie tuletise

$$\bar{\delta}_\xi \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -(\pounds_\xi \Gamma)^\lambda{}_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \xi^\lambda + R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} \xi^\sigma. \tag{F.34}$$

Teisendame Riemanni tensorit: kõigepealt kasutame tsüklilisust viimases kolmes indeksis, seejärel antisümmeetriat kahes viimases indeksis, viimaks jaotust sümmeetriliseks ja antisümmeetriliseks osaks,

$$R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} = -R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} - R^\lambda{}_{\nu\sigma\mu} = -R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} + R^\lambda{}_{\nu\mu\sigma} = -R^\lambda{}_{[\mu\nu]\sigma} = R^\lambda{}_{(\mu\nu)\sigma} - R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma}. \tag{F.35}$$

Seega meil on nüüdseks tuletatud

$$\bar{\delta}_\xi \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -D_\mu D_\nu \xi^\lambda + \big(R^\lambda{}_{(\mu\nu)\sigma} - R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma} \big) \xi^\sigma. \tag{F.36}$$

Korjame nüüd üles ainult sümmeetrilised osad indeksites μ ja ν. Christoffeli sümbol juba on sümmeetriline, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$, samuti on seda $D_\mu D_\nu = D_{(\mu} D_{\nu)}$, viimases liikmes viskame mitte-sümmeetrilise osa lihtsalt minema, mille järel jõuamegi valemini (F.30)=(2.26).