täpne kategoorias Ab.

TÕESTUS. Olgu $\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} N_R \xrightarrow{f} K_R \xrightarrow{g} L_R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$ lühike täpne jada kategoorias Mod_R.

Võtame $\alpha \in \operatorname{Ker}(\_ \circ g)$, siis $\alpha \circ g = \mathbf{0}$. Homomorfismi g sürjektiivsusest järeldame, et $\alpha = \mathbf{0}$. Järelikult $\operatorname{Ker}(\_ \circ g) = \{\mathbf{0}\}$ ehk $\_ \circ g$ on injektiivne.

Paneme tähele, et

$$(\_ \circ f) \circ (\_ \circ g) = \_ \circ g \circ f = \_ \circ \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

mistõttu $\operatorname{Im}(\_ \circ g) \subseteq \operatorname{Ker}(\_ \circ f)$. Valime $\beta \in \operatorname{Ker}(\_ \circ f)$. Paneme tähele, et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} \beta$, kuna $\beta \circ f = (\_ \circ f)(\beta) = \mathbf{0}$. Kasutades teoreemi 2.64 saame, et leidub homomorfism γ nii, et $\beta = \gamma \circ g$. Nüüd

$$\beta = \gamma \circ g = (\_ \circ g)(\gamma) \in \operatorname{Im}(\_ \circ g).$$

Järelikult $\operatorname{Im}(\_ \circ g) = \operatorname{Ker}(\_ \circ f)$. Sellega oleme näidanud, et jada (2.48) on täpne. ■

Meie jaoks on erilise tähtsusega hom-funktor $\operatorname{Hom}_R(R, \_)$, mis on seotud kinniste moodulitega nagu me hiljem näeme. Kogume järgnevasse lausesse mõningad omadused selle funktori kohta.

Lause 2.77. *Olgu R ring. Leidub vasakult eksaktne funktor*

$$\mathbf{K}' = \operatorname{Hom}_R(R, \_) \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_R, \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_R(R, M), \ f \mapsto f \circ \_.$$

Lisaks sellele, leidub loomulik teisendus $\lambda = (\lambda_M)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)} \colon \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}_R} \xrightarrow{\bullet} \mathbf{K}'$, kus $\lambda_M \colon M \to \operatorname{Hom}_R(R, M)$, $m \mapsto (r \mapsto mr)$.

TÕESTUS. Eelnevast teame, et $\mathbf{K}'$ on funktor ning iga $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ korral on λ_M parempoolsete R-moodulite homomorfism. Järeldusest 2.75 teame, et $\mathbf{K}'$ on vasakult eksaktne.

Olgu $M_R, N_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ ja $f \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$. Vaatleme allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
M_R \arrow[r, "\lambda_M"] \arrow[d, "f"'] & \operatorname{Hom}_R(R, M) \arrow[d, "f \circ _"] \\
N_R \arrow[r, "\lambda_N"'] & \operatorname{Hom}_R(R, N)
\end{tikzcd}$$

Paneme tähele, et iga $m \in M$ ja $r \in R$ korral kehtib

$$\begin{aligned}((f \circ \_) \circ \lambda_M)(m)(r) &= (f \circ \lambda_M(m))(r) = f(\lambda_M(m)(r)) = f(mr) = f(m)r \\ &= \lambda_N(f(m))(r) = (\lambda_N \circ f)(m)(r).\end{aligned}$$

Seega näeme, et $\lambda = (\lambda_M)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)}$ on tõepoolest loomulik teisendus. ■

Peatükk 3

Moodulite tensorkorrutis

Selles peatükis tutvustame põhjalikult moodulite tensorkorrutise mõistet ja tõestame mitmeid tensorkorrutise omadusi. Lõpuks defineerime püsivad ringid ja moodulid ning anname näite idempotentsest, kuid mitte-püsivast ringist. Siinne käsitlus moodulite tensorkorrutisest on edasiarendus autori magistritöös [14] esitatust. Pikemalt võib moodulite tensorkorrutiste teemal lugeda inglise keeles raamatust [18] (ptk 19).

Märgime, et käesolevas raamatus vaatleme just moodulite tensorkorrutist, mida autorile teadaolevalt eesti keeles varem tehtud ei ole. Siiski on eesti keeles suhteliselt põhjalikult käsitletud moodulite tensorkorrutise üht laialt levinud erijuhtu – vektorruumide tensorkorrutist. Seda on tehtud näiteks raamatutes [3] ja [12]. Kuid nendes raamatutes esitatud käsitlus on märkimisväärselt erinev siinkohal toodust, paljuski kuna neis on rõhku pandud just füüsikas esinevate rakenduste jaoks olulistele aspektidele, kuid käesolevas raamatus vaatleme tensorkorrutist puhtalt algebralisest vaatepunktist.

3.1 Tensorkorrutise definitsioon ja konstruktsioon

Olgu R ring, M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN$ vasakpoolne R-moodul. Kõigepealt vajame R-tasakaalustatud kujutuse mõistet.

Definitsioon 3.1. Olgu A Abeli rühm. Kujutust $\beta\colon M \times N \to A$ nimetatakse **R-tasakaalustatuks** (või **R-tensoriaalseks**), kui kehtivad järgmised tingimused:

1. $\forall m, m' \in M\, \forall n \in N\colon \quad \beta(m + m', n) = \beta(m, n) + \beta(m', n)$;
2. $\forall m \in M\, \forall n, n' \in N\colon \quad \beta(m, n + n') = \beta(m, n) + \beta(m, n')$;
3. $\forall m \in M\, \forall n \in N\, \forall r \in R\colon \quad \beta(mr, n) = \beta(m, rn)$.

R-tasakaalustatuse definitsiooni tingimusi 1 ja 2 nimetatakse **aditiivsuseks** vastavalt esimese ja teise argumendi suhtes. Nüüd oleme valmis andma moodulite tensorkorrutise definitsiooni.

Definitsioon 3.2. Olgu T Abeli rühm ja $\tau : M \times N \to T$ R-tasakaalustatud kujutus. Paari (T, τ) nimetatakse moodulite M_R ja ${}_RN$ **tensorkorrutiseks**, kui iga Abeli rühma A ja iga R-tasakaalustatud kujutuse $\beta \colon M \times N \to A$ korral leidub parajasti üks Abeli rühmade homomorfism $f \colon T \to A$ nii, et $\beta = f \circ \tau$.

Näitame, et eelmises definitsioonis antud tensorkorrutis on (isomorfismi täpsuseni) üheselt määratud.

Lause 3.3. *Kui (T, τ) ja (T', τ') on kaks moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutist, siis leidub Abeli rühmade isomorfism $f \colon T \to T'$ nii, et $\tau' = f \circ \tau$.*

TÕESTUS. Olgu (T, τ) ja (T', τ') kaks moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutist. Seega leiduvad ühesed Abeli rühmade homomorfismid f ja g nii, et järgnevad diagrammid kommuteeruvad.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ T \arrow[rr, "f"'] & & T' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau'"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ T' \arrow[rr, "g"'] & & T \end{tikzcd}$$

Seepärast kommuteeruvad (ülemised) kolmnurgad järgmises diagrammis.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[d, "\tau'"] \arrow[dr, "\tau"] & \\ T \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_T"'] & T' \arrow[r, "g"] & T \end{tikzcd}$$

Kuna (T, τ) on tensorkorrutis, siis ühesuse nõude tõttu $g \circ f = \mathrm{id}_T$. Analoogiliselt saame paari (T', τ') tensorkorrutiseks olemisest ka $f \circ g = \mathrm{id}_{T'}$. Järelikult on Abeli rühmad T ja T' isomorfsed. ∎

Nüüd, kus oleme veendunud R-moodulite tensorkorrutise ühesuses, toome sisse natuke tähistusi. Olgu (T, τ) R-moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis, siis tähistame

$$M \otimes_R N := T, \qquad \otimes := \tau \colon M \times N \to M \otimes_R N, \quad \tau(m, n) =: m \otimes n,$$

kus $m \in M$ ja $n \in N$. Nende uute tähistustega sõnastame tensorkorrutise definitsiooni ümber omadusena, mida tavaliselt nimetatakse tensorkorrutise *universaalomaduseks*. Mainime, et edaspidi nimetame tensorkorrutiseks lihtsalt Abeli rühma $M \otimes_R N$ ning ei märgi tavaliselt kujutust $\otimes$.

Tensorkorrutise universaalomadus: Iga Abeli rühma A ja R-tasakaalustatud kujutuse $\beta\colon M \times N \to A$ korral leidub üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism $\overline{\beta}\colon M \otimes_R N \to A$ nii, et allolev diagramm on kommutatiivne.

$$\begin{tikzcd} & M \times N \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ M \otimes_R N \arrow[rr, dashed, "\overline{\beta}"'] & & A \end{tikzcd}$$

Moodulite tensorkorrutise konstruktsioon

Nüüdseks oleme defineerinud moodulite tensorkorrutise ning näidanud, et kui ta leidub, siis on ta ühene. Järgnevalt näitame, et R-moodulite tensorkorrutis tõepoolest eksisteerib. Selleks anname talle konstruktsiooni. Kõigepealt meenutame, et iga Abeli rühm on vaadeldav $\mathbb{Z}$-moodulina (näite 2.7 (3)).

Olgu R ring ning M_R parempoolne R-moodul ja $_RN$ vasakpoolne R-moodul. Vaatleme vaba Abeli rühma

$$\mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)} = \bigoplus_{(m,n)\in M\times N} \mathbb{Z},$$

mille baasiks on hulk $\mathcal{B} := \{x_{(m,n)} \mid (m,n) \in M \times N\}$, kus

$$x_{(m,n)} = \left(\xi^{(m,n)}_{m'n'}\right)_{\substack{m'\in M\\ n'\in N}}, \qquad \xi^{(m,n)}_{m'n'} = \begin{cases} 1, & (m',n') = (m,n),\\ 0, & (m',n') \neq (m,n). \end{cases}$$

Vabadest Abeli rühmadest saab pikemalt lugeda lisast A. Vastavalt lausele A.3 läheme üle esitusele

$$\mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)} = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} z_k x_{(m_k,n_k)} \;\middle|\; \begin{array}{l} k^* \in \mathbb{N}_1,\ (\forall k \in \{1,\dots,k^*\}\colon \\ z_k \in \mathbb{Z},\ (m_k,n_k) \in M \times N) \end{array} \right\}. \tag{3.1}$$

Vaatleme rühma $\mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}$ alamrühma H, mis on moodustatud järgnevate elementide poolt (st $H \subseteq \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}$ on vähim alamrühm, mis sisaldab kõiki alltoodud elemente):

$$\begin{aligned} &x_{(m+m',n)} - x_{(m,n)} - x_{(m',n)}, \\ &x_{(m,n+n')} - x_{(m,n)} - x_{(m,n')}, \\ &x_{(mr,n)} - x_{(m,rn)}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kus $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$.

Vaatleme faktorrühma (ehk faktor-$\mathbb{Z}$-moodulit)

$$T := \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}/H = \left\{[\xi] \middle| \xi \in \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}\right\},$$

kus $[\xi] = \xi + H$. Paneme tähele, et iga $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$ korral on real (3.2) toodud elementidele vastavad ekvivalentsiklassid võrdsed Abeli rühma T nullelemendiga. Näitame seda esimese rea näitel:

$$[\mathbf{0}] = H = [x_{(m+m',n)} - x_{(m,n)} - x_{(m',n)}] = [x_{(m+m',n)}] - ([x_{(m,n)}] + [x_{(m',n)}]).$$

Seega kehtib $[x_{(m+m',n)}] = [x_{(m,n)}] + [x_{(m',n)}]$. Kokkuvõttes saame, et faktorrühmas T kehtivad iga $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$ korral võrdused

$$\begin{aligned} [x_{(m+m',n)}] &= [x_{(m,n)}] + [x_{(m',n)}], \\ [x_{(m,n+n')}] &= [x_{(m,n)}] + [x_{(m,n')}], \\ [x_{(mr,n)}] &= [x_{(m,rn)}]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nüüd defineerime veel kujutuse $\tau\colon\ M \times N \to T$ võrdusega

$$\tau(m, n) := [x_{(m,n)}] = x_{(m,n)} + H$$

ja tõestame, et paar $(\mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}/H, \tau)$ on R-moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis.

Lause 3.4. *Eelnevalt konstrueeritud paar (T, τ) on moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis.*

TÕESTUS. Vaatleme eelnevalt defineeritud paari (T, τ). Paneme tähele, et kujutus τ on R-tasakaalustatud, sest iga $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$ korral

$$\begin{aligned} \tau(m + m', n) &= [x_{(m+m',n)}] = [x_{(m,n)}] + [x_{(m',n)}] = \tau(m, n) + \tau(m', n), \\ \tau(mr, n) &= [x_{mr,n}] = [x_{m,rn}] = \tau(m, nr) \end{aligned}$$

ja analoogiliselt kehtib ka $\tau(m, n + n') = \tau(m, n) + \tau(m, n')$.

Olgu A Abeli rühm ja $\beta\colon M \times N \to A$ R-tasakaalustatud kujutus. Defineerime kujutuse

$$\iota\colon M \times N \to \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}, \qquad (m, n) \mapsto x_{(m,n)}.$$

Paneme tähele, et kujutus ι on injektiivne. Lisaks defineerime kujutuse

$$\varphi\colon \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)} \to A, \qquad x_{(m,n)} \mapsto \beta(m,n).$$

Nagu näha, on φ antud Abeli rühma baasi elementidel, ilmselt saame siis kujutuse laiendada kogu Abeli rühmale $\mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}$, kuna kõik tema elemendid avalduvad üheselt baasielementide lineaarkombinatsioonidena (lause A.4). Ühesõnaga näeme, et φ on korrektselt defineeritud. Paneme tähele, et ülemine kolmnurk joonisel 3.1

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[dr, "\iota"] \arrow[drr, "\beta"] \arrow[dd, "\tau"'] & & \\
& \mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, "\kappa_H"'] & A \\
T = \dfrac{\mathbb{Z}^{\oplus(M\times N)}}{H} \arrow[urr, dashed, "\overline{\beta}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Joonis 3.1

kommuteerub, kuna iga $(m,n) \in M \times N$ korral

$$(\varphi \circ \iota)(m,n) = \varphi(\iota(m,n)) = \varphi(x_{(m,n)}) = \beta(m,n).$$

Ilmselt kommuteerub ka vasakpoolne kolmnurk joonisel 3.1

Vaatleme nüüd alamrühma H moodustajaid ridadest (3.2) ning märkame, et suvaliste $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ ja $r \in R$ korral

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{(m_1+m_2,n)} - x_{(m_1,n)} - x_{(m_2,n)}) &= \varphi(x_{(m_1+m_2,n)}) - \varphi(x_{(m_1,n)}) - \varphi(x_{(m_2,n)}) \\
&= \beta(m_1+m_2,n) - (\beta(m_1,n) + \beta(m_2,n)) \\
&= \beta(m_1+m_2,n) - \beta(m_1+m_2,n) = 0, \\
\varphi(x_{(m,n_1+n_2)} - x_{(m,n_1)} - x_{(m,n_2)}) &= 0, \\
\varphi(x_{(mr,n)} - x_{(m,rn)}) &= \beta(mr,n) - \beta(m,nr) = 0.
\end{aligned}$$

Seega $H \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Homomorfismiteoreemist 2.62[1] saame, et leidub üheselt määratud homomorfism $\overline{\beta}\colon T \to A$ nii, et alumine kolmnurk joonisel 3.1 kommuteerub. Seega kommuteerub kogu diagramm joonisel 3.1, mistõttu kehtib $\overline{\beta} \circ \tau = \beta$. Sellega oleme tõestanud, et (T, τ) on R-moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis. ■

Tänu lausele 3.4 võime edaspidi eeldada, et R-moodulite M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis $M \otimes_R N$ on saadud just siin alapeatükis tutvustatud konstruktsiooni abil.

[1]Märgime, et siinkohal kasutame Homomorfismiteoreemi 2.62 Abeli rühmade jaoks (vt märkust enne teoreemi 2.62).

Märkus 3.5. Märkuses 2.37 toodud arutluses nägime, et kommutatiivse ringi R korral langevad vasak- ja parempoolse mooduli mõisted kokku. Seega sel juhul räägitakse lihtsalt kahe R-mooduli M_R ja N_R tensorkorrutisest $M \otimes_R N$. (Siinolev tähelepanek muutub meile kasulikuks lisas B.)

3.2 Tensorkorrutise omadusi ja moodulstruktuur

Nüüd tutvume mõningate tensorkorrutise omadustega ning näitame, et kui tensorkorrutises vähemalt üks tegur on bimoodul, siis saab ka tensorkorrutise peal defineerida mooduli struktuuri. Järgnev lause annab erakordselt kasuliku kirjelduse tensorkorrutisele, mis kirjeldab ära tema elemendid üldisel juhul.

Lause 3.6. *Olgu R ring, M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN$ vasakpoolne R-moodul. Tensorkorrutise $M \otimes_R N$ suvaline element ν on esitatav lõpliku summana moodustajatest:*

$$\nu = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, \quad (k^* \in \mathbb{N}_1,\ m_k \in M,\ n_k \in N). \tag{3.4}$$

Lisaks kehtivad järgnevad omadused:

1. $\forall m, m' \in M\, \forall n \in N\colon \quad (m + m') \otimes n = (m \otimes n) + (m' \otimes n)$;
2. $\forall m \in M\, \forall n, n' \in N\colon \quad m \otimes (n + n') = (m \otimes n) + (m \otimes n')$;
3. $\forall m \in M\, \forall n \in N\, \forall r \in R\colon \quad mr \otimes n = m \otimes rn$;
4. *iga $m \in M$ ja $n \in N$ korral on $0 \otimes 0 = m \otimes 0 = 0 \otimes n$ Abeli rühma $M \otimes_R N$ nullelement;*
5. $\forall m \in M\, \forall n \in N\colon \quad -(m \otimes n) = (-m) \otimes n = m \otimes (-n)$.

TÕESTUS. Vaatleme tensorkorrutist $M \otimes_R N$. Vastavalt lausele 3.3 võime eeldada, et see on saadud kasutades konstruktsiooni eelmisest paragrahvist. Seega on tensorkorrutis $M \otimes_R N$ faktorrühm $\mathbb{Z}^{\oplus(M \times N)}/H$ eelmises paragrahvis kirjeldatud alamrühma H järgi. Järelikult iga element ν avaldub kujul

$$\nu = \left[\sum_{k=1}^{k^*} z_k x_{(m_k, n_k)}\right] = \sum_{k=1}^{k^*} z_k [x_{(m_k,n_k)}] = \sum_{k=1}^{k^*} z_k \tau(m_k, n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} z_k (m_k \otimes n_k),$$

kus $k^* \in \mathbb{N}_1$, $z_k \in \mathbb{Z}$ ja $(m_k, n_k) \in M \times N$. Lisaks, kui mingi $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral $z_k \neq 1$, siis võime liidetavat $m_k \otimes n_k$ lisada summasse $|z_k|$ korda ning vajadusel saab miinusmärgi viia liidetava $m_k \otimes n_k$ sisse (vastavalt omadusele 5).

Vastavalt definitsioonile on kujutus $\tau = \otimes\colon M \times N \to M \otimes_R N$ R-tasakaalustatud. Seega kehtivad omadused 1, 2 ja 3.

Vaatleme omadust 4. Olgu $m \in M$ ja $n \in N$, siis

$$\begin{aligned} m \otimes n + 0 \otimes 0 &= m \otimes n + 0 \otimes (0n) = m \otimes n + (0 \cdot 0) \otimes n = m \otimes n + 0 \otimes n \\ &= (m + 0) \otimes n = m \otimes n. \end{aligned}$$

Seega $0 \otimes 0$ on Abeli rühma $M \otimes_R N$ nullelement. Lisaks kehtib

$$m \otimes 0 = m \otimes 0 \cdot 0 = m0 \otimes 0 = 0 \otimes 0$$

ja analoogiliselt $0 \otimes n = 0 \otimes 0$.

Vaatleme omadust 5. Olgu $m \in M$ ja $n \in N$, siis

$$m \otimes n + (-m) \otimes n = (m + (-m)) \otimes n = 0 \otimes n = 0 \otimes 0.$$

Seega $-(m \otimes n) = (-m) \otimes n$. ■

Tuleb märkida, et iga tensorkorrutise $M \otimes_R N$ element avaldub summana kujul (3.4), kuid see esitus ei ole üldiselt ühene. Mainime, et tensorkorrutise $M \otimes_R N$ elemente nimetatakse (vahel) **tensoriteks**. Kujust (3.4) on selge, et hulk

$$\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\} \subseteq M \otimes_R N$$

on Abeli rühma $M \otimes_R N$ moodustajate süsteem (vt lisa A). Selle hulga elemente $m \otimes n$ nimetatakse tensorkorrutise $M \otimes_R N$ **elementaartensoriteks**. Seega võib väita, et *tensorkorrutise $M \otimes_R N$ iga element avaldub elementaartensorite lõpliku summana.*

Nüüd, kui me teame, kuidas tensorkorrutise elemendid avalduvad, saame täpsustada universaalomaduses oleva Abeli rühmade homomorfismi $\overline{\beta}$ kuju.

Lemma 3.7. *Olgu R ring, M_R ja ${}_RN$ R-moodulid, A Abeli rühm ning $\beta : M \times N \to A$ R-tasakaalustatud kujutus. Siis defineerib eeskiri*

$$\overline{\beta}\colon M \otimes_R N \to A, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \beta(m_k, n_k) \tag{3.5}$$

Abeli rühmade homomorfismi.

TÕESTUS. Kehtigu lemma eeldused. Tensorkorrutise universaalomaduse tõttu leidub üheselt määratud Abeli rühmade homomorfism $\overline{\beta}\colon M \otimes_R N \to A$ nii, et $\beta = \overline{\beta} \circ \otimes$. Arvestades, et $\overline{\beta}$ on homomorfism, saame, et suvalise elemendi $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$ (kasutades kuju (3.4)) korral kehtib

$$\overline{\beta}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} \overline{\beta}(m_k \otimes n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} (\overline{\beta} \circ \otimes)(m_k, n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} \beta(m_k, n_k).$$

See tõestabki, et homomorfism $\overline{\beta}$ avaldub kujul (3.5). ■

Mõnes mõttes eelmise lemma ümber pööramiseks toome sisse järgneva tähistuse. Olgu $\gamma\colon M \otimes_R N \to A$ Abeli rühmade homomorfism. Tähistame

$$\hat{\gamma} := \gamma \circ \otimes. \tag{3.6}$$

Paneme tähele, et $\hat{\gamma}\colon M \times N \to A$, $(m, n) \mapsto \gamma(m \otimes n)$ on R-tasakaalustatud kujutus. Seega kehtib $\overline{\hat{\gamma}} = \gamma$.

Eelnevalt nägime, et moodulite tensorkorrutis koosneb elementaartensorite summades kujul (3.4). Järgnev lemma aga näitab, tihti piisab meile vaid elementaartensorite vaatlemisest.

Lemma 3.8. *Olgu R ring, M_R ja ${}_RN$ R-moodulid ja A Abeli rühm. Kui kahe Abeli rühmade homomorfismi $f, g\colon M \otimes_R N \to A$ korral, iga $m \in M$ ja $n \in N$ korral,*

$$f(m \otimes n) = g(m \otimes n),$$

siis kehtib $f = g$.

TÕESTUS. Olgu $f, g\colon M \otimes_R N \to A$ Abeli rühmade homomorfismid, mis kõigil elementaartensoritel langevad kokku. Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$, siis

$$f\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} f(m_k \otimes n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} g(m_k \otimes n_k) = g\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right).$$

Siit näeme, et kujutused f ja g langevad kõigil tensoritel kokku, mistõttu $f = g$. ■

Nüüd oleme valmis tutvuma tensorkorrutise moodulstruktuuriga. Nimelt näeme, et kui tensorkorrutises on emb-kumb tegur bimoodul, siis saab temas defineerida vastavale poole mooduli struktuuri.

Lause 3.9. *Olgu R ja S ringid ning M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN_S$ (R, S)-bimoodul. Tensorkorrutist $M \otimes_R N$ saab kanoonilisel viisil vaadelda parempoolse S-moodulina, defineerides S-toime*

$$(M \otimes_R N) \times S \to M \otimes_R N, \qquad \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) s := \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k s.$$

TÕESTUS. Olgu R, S ringid, M_R parempoolne R-moodul ja ${}_RN_S$ (R, S)-bimoodul. Vaatleme tensorkorrutist $M \otimes_R N$. Vastavalt tensorkorrutise definitsioonile on algebraline struktuur $(M \otimes_R N; +)$ Abeli rühm. Olgu $s \in S$. Vaatleme kujutust

$$\beta_s\colon\; M \times N \to M \otimes_R N, \quad \beta_s(m, n) = m \otimes ns.$$

Olgu $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $r \in R$ ja $s \in S$, siis

$$\begin{aligned}
\beta_s(m+m', n) &= (m+m') \otimes ns = m \otimes ns + m' \otimes ns = \beta_s(m,n) + \beta_s(m', n),\\
\beta_s(m, n+n') &= m \otimes (n+n')s = m \otimes (ns + n's) = m \otimes ns + m \otimes n's\\
&= \beta_s(m,n) + \beta_s(m,n'),\\
\beta_s(mr, n) &= mr \otimes ns = m \otimes r(ns) = m \otimes (rn)s = \beta_s(m, rn).
\end{aligned}$$

Seega kujutus β_s on R-tasakaalustatud. Lemma 3.7 põhjal leidub Abeli rühmade homomorfism

$$\overline{\beta_s} \colon M \otimes_R N \to M \otimes_R N, \quad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k s.$$

Kusjuures $\overline{\beta_s}$ on defineeritud iga $s \in S$ korral.

Nüüd defineerime kujutuse

$$(M \otimes_R N) \times S \to M \otimes_R N, \qquad \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, s\right) \mapsto \overline{\beta_s}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right).$$

Paneme tähele, et see kujutus langeb kokku lause sõnastuses toodud S-toimega. Mooduli definitsiooni tingimus M2 kehtib, kuna $\overline{\beta_s}$ on Abeli rühmade homomorfism iga $s \in S$ korral. Olgu $\nu = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$ ja $s, s' \in S$. Siis kehtivad

$$\begin{aligned}
\nu(s+s') &= \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right)(s+s') = \sum_{k=1}^{k^*} (m_k \otimes n_k(s+s'))\\
&= \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k s + n_k s') = \sum_{k=1}^{k^*} (m_k \otimes n_k s + m_k \otimes n_k s')\\
&= \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) s + \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) s' = \nu s + \nu s',\\
\nu(ss') &= \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right)(ss') = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k(ss') = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k s)s'\\
&= \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k s\right) s' = (\nu s)s'.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes on $M \otimes_R N$ parempoolne S-moodul. ■

Täpselt analoogiliselt eelmise lausega saab tõestada ka järgneva lause.

Lause 3.10. *Olgu R ja S ringid ning ${}_RN$ vasakpoolne R-moodul ja ${}_SM_R$ (S,R)-bimoodul. Tensorkorrutist $M \otimes_R N$ saab kanoonilisel viisil vaadelda vasakpoolse S-moodulina, defineerides S-toime*

$$S \times (M \otimes_R N) \to M \otimes_R N, \qquad s\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) := \sum_{k=1}^{k^*} sm_k \otimes n_k.$$

Saame eelnevad kaks lauset kombineerida ja jõuda järgmise järelduseni.

Järeldus 3.11. *Olgu R, S ja T ringid ning ${}_SM_R$ ja ${}_RN_T$ vastavalt (S,R)- ja (R,T)-bimoodulid. Tensorkorrutist $M \otimes_R N$ saab kanoonilisel viisil vaadelda (S,T)-bimoodulina.*

TÕESTUS. Kehtigu järelduse eeldused. Lausete 3.9 ja 3.10 tõttu on $M \otimes_R N$ parempoolne T-moodul ja vasakpoolne S-moodul. Olgu $s \in S$, $t \in T$ ja $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$. Siis

$$\left(s\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right)\right)t = \left(\sum_{k=1}^{k^*} sm_k \otimes n_k\right)t = \sum_{k=1}^{k^*} sm_k \otimes n_k t = s\left(\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right)t\right),$$

mis tõestab, et $M \otimes_R N$ on (S,T)-bimoodul. ■

Näitame, et kui Abeli rühmade homomorfism kahe mooduli vahel, mille lähtemoodul esitub kahe mooduli tensorkorrutisena, on kooskõlas toimega elementaartensoritel, siis ta on tegelikult moodulite homomorfism.

Lemma 3.12. *Olgu R ja S ringid; $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, ${}_RN_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$ ja $A_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ ning $f\colon N \otimes_R M \to A$ Abeli rühmade homomorfism. Kui iga $m \in M$, $n \in N$ ja $s \in S$ korral kehtib*

$$f((m \otimes n)s) = f(m \otimes n)s, \tag{3.7}$$

siis on f S-moodulite homomorfism.

TÕESTUS. Olgu $f\colon N \otimes_R M \to A$ Abeli rühmade homomorfism, mis iga elementaartensori korral rahuldab tingimust (3.7). Sel juhul, iga tensori $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$ ja $s \in S$ korral,

$$\begin{aligned} f\left(\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right)s\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{k^*} (m_k \otimes n_k)s\right) = \sum_{k=1}^{k^*} f((m_k \otimes n_k)s) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} f(m_k \otimes n_k)s = \left(\sum_{k=1}^{k^*} f(m_k \otimes n_k)\right)s = f\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right)s. \end{aligned}$$

Siit näeme, et f on S-moodulite homomorfism. ■

Märgime, et kehtivad ka eelneva lemmaga analoogilised tulemused vasakpoolsete moodulite ja bimoodulite jaoks.

Nüüd tõestame, et tensorkorrutamine unitaarse mooduliga säilitab unitaarsuse.

Lemma 3.13. *Olgu R ja S ringid ja ${}_RN_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$ selline, et N_S on unitaarne S-moodul. Iga R-mooduli M_R korral on $M \otimes_R N$ unitaarne S-moodul.*

TÕESTUS. Kehtigu lemma eeldused. Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$. Kuna N_S on unitaarne, siis leiduvad iga $k \in \{1, \dots, k^*\}$ korral $n_{k1}, \dots, n_{kh^*} \in N$ ja $s_{k1}, \dots, s_{kh^*} \in S$ nii, et $n_k = n_{k1}s_{k1} + \ldots + n_{kh^*}s_{kh^*}$. Nüüd

$$\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes \left(\sum_{h=1}^{h^*} n_{kh} s_{kh} \right) = \sum_{h=1}^{h^*} \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_{kh} \right) s_{kh} \in (M \otimes_R N)S.$$

Seega, $M \otimes_R N$ on unitaarne parempoolne S-moodul. ■

Järgnevalt näeme, et moodulite tensorkorrutis on isomorfismi täpsuseni assotsiatiivne eeldusel, et vastavaid tensorkorrutisi leida saab.

Lause 3.14. *Olgu R ja S ringid, M_R parempoolne R-moodul, ${}_RN_S$ (R, S)-bimoodul ja ${}_SP$ vasakpoolne S-moodul. Siis leidub Abeli rühmade isomorfism*

$$\alpha\colon\ (M \otimes_R N) \otimes_S P \to M \otimes_R (N \otimes_S P), \qquad (m \otimes n) \otimes p \mapsto m \otimes (n \otimes p).$$

TÕESTUS. Olgu R, S ringid ning $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, ${}_RN_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$, ${}_SP \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$. Tensorkorrutise definitsioonist teame, et $M \otimes_R (N \otimes_S P)$ on Abeli rühm. Fikseerime elemendi $p \in P$. Defineerime kujutuse

$$\gamma_p\colon M \times N \mapsto M \otimes_R (N \otimes_S P), \qquad (m, n) \mapsto m \otimes (n \otimes p).$$

Paneme tähele, et iga $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}
\gamma_p(m + m', n) &= (m + m') \otimes (n \otimes p) = m \otimes (n \otimes p) + m' \otimes (n \otimes p) \\
&= \gamma_p(m, n) + \gamma_p(m', n), \\
\gamma_p(m, n + n') &= m \otimes ((n + n') \otimes p) = m \otimes (n \otimes p + n' \otimes p) \\
&= m \otimes (n \otimes p) + m \otimes (n' \otimes p) = \gamma_p(m, n) + \gamma_p(m, n'), \\
\gamma_p(mr, n) &= mr \otimes (n \otimes p) = m \otimes r(n \otimes p) = m \otimes (rn \otimes p) = \gamma_p(m, rn).
\end{aligned}$$

Järelikult on γ_p R-tasakaalustatud. Kasutades tensorkorrutise universaalomadust saame, et kujutus

$$\overline{\gamma_p}\colon M \otimes_R N \to M \otimes_R (N \otimes_S P), \qquad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p)$$

on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism (suvalise $p \in P$ korral).

Järgnevalt defineerime kujutuse $\delta\colon (M \otimes_R N) \times P \to M \otimes_R (N \otimes_S P)$,

$$\delta\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p\right) = \overline{\gamma_p}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right).$$

Kuna $\overline{\gamma_p}$ on Abeli rühmade homomorfism iga $p \in P$ korral, siis on kujutus δ aditiivne esimese argumendi suhtes (st rahuldab tingimust 1 definitsioonis 3.1). Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$, $p, p' \in P$ ja $s \in S$. Paneme tähele, et kehtivad

$$\begin{aligned}
\delta\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p + p'\right) &= \overline{\gamma_{p+p'}}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes (p + p')) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p + n_k \otimes p') \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p) + \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes p') \\
&= \overline{\gamma_p}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) + \overline{\gamma_{p'}}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) \\
&= \delta\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p\right) + \delta\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, p'\right), \\
\delta\left(\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) s, p\right) &= \delta\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k s, p\right) = \overline{\gamma_p}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k s\right) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k s \otimes p) = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes (n_k \otimes sp) \\
&= \overline{\gamma_{sp}}\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) = \delta\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k, sp\right).
\end{aligned}$$

Seega, δ on S-tasakaalustatud. Nüüd, kasutades taaskord tensorkorrutise universaalomadust, saame, et leidub korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism $\alpha := \overline{\delta}\colon (M \otimes_R N) \otimes_S P \to M \otimes_R (N \otimes_S P)$,

$$\alpha\left(\sum_{h=1}^{h^*} (m_h \otimes n_h) \otimes p_h\right) = \sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes (n_h \otimes p_h).$$

Analoogilise aruteluga saame, et ka $\beta\colon M\otimes_R(N\otimes_S P)\to(M\otimes_R N)\otimes_S P$,

$$\beta\left(\sum_{h=1}^{h^*} m_h\otimes(n_h\otimes p_h)\right)=\sum_{h=1}^{h^*}(m_h\otimes n_h)\otimes p_h$$

on Abeli rühmade homomorfism.

Nüüd, iga $m\in M$, $n\in N$ ja $p\in P$ korral kehtib

$$(\beta\circ\alpha)((m\otimes n)\otimes p))=\beta(m\otimes(n\otimes p))=(m\otimes n)\otimes p.$$

Lemmast 3.8 saame, et $\beta\circ\alpha=\mathrm{id}_{(M\otimes N)\otimes P}$ ja analoogiliselt $a\circ\beta=\mathrm{id}_{M\otimes(N\otimes P)}$, mis tõestab, et α on tõepoolest Abeli rühmade isomorfism. ■

On lihtne näha, et kehtib järgmine järeldus.

Järeldus 3.15. *Kui M_R ja/või $_RN$ on bimoodul(id), siis kujutus α lausest 3.14 on vastavate (bi)moodulite isomorfism.*

Nüüd näitame, et moodulite tensorkorrutise ja otsesumma tehete vahel kehtivad distributiivsuse tingimused.

Lause 3.16. *Olgu R ring, $M_R, M'_R\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ ja $_RN, {_RN'}\in\mathrm{Ob}({_R\mathsf{Mod}})$. Kehtivad isomorfsused*

$$(M_R\oplus M'_R)\otimes_R N\cong(M\otimes_R N)\oplus(M'\otimes_R N),$$
$$M_R\otimes_R({_RN}\oplus{_RN'})\cong(M\otimes_R N)\oplus(M\otimes_R N').$$

TÕESTUS. Tõestame ainult esimese isomorfsuse. Vaatleme kujutust

$$\hat{\varphi}\colon(M_R\oplus M'_R)\times N\to(M\otimes_R N)\oplus(M'\otimes_R N),$$
$$((m,m'),n)\mapsto(m\otimes n,m'\otimes n).$$

Paneme tähele, et iga $m,m_1,m_2\in M$, $m',m'_1,m'_2\in M'$, $n,n_1,n_2\in N$ ja $r\in R$ korral

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}((m,m'),n_1+n_2)&=(m\otimes(n_1+n_2),m'\otimes(n_1+n_2))\\&=(m\otimes n_1,m'\otimes n_1)+(m\otimes n_2,m'\otimes n_2);\\\hat{\varphi}((m,m')r,n)&=(mr\otimes n,m'r\otimes n)=(m\otimes nr,m'\otimes nr)\end{aligned}$$

ja analoogiliselt $\hat{\varphi}((m_1,m'_1)+(m_2,m'_2),n)=\hat{\varphi}((m_1,m'_1),n)+\hat{\varphi}((m_2,m'_2),n)$. Kasutades tensorkorrutise universaalomadust saame, et leidub korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism

$$\varphi\colon(M_R\oplus M'_R)\otimes_R N\to(M\otimes_R N)\oplus(M'\otimes_R N),$$

$$\sum_{k=1}^{k^*}(m_k, m'_k)\otimes n_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*}(m_k\otimes n_k, m'_k\otimes n_k).$$

On lihtne näha, et φ on R-moodulite homomorfism.

Teisest küljest, vaatleme kujutusi

$$\begin{aligned}
\hat{f}\colon M\times N &\to (M_R\oplus M'_R)\otimes_R N, && (m,n)\mapsto (m,0)\otimes n,\\
\hat{g}\colon M'\times N &\to (M_R\oplus M'_R)\otimes_R N, && (m',n)\mapsto (0,m')\otimes n.
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et iga $m, m_1, m_2 \in M$ ja $n, n_1, n_2 \in N$ ja $r\in R$ korral

$$\begin{aligned}
\hat{f}(m_1+m_2,n) &= (m_1+m_2,0)\otimes n = (m_1,0)\otimes n + (m_2,0)\otimes n,\\
\hat{f}(mr,n) &= (mr,0)\otimes n = (mr,0r)\otimes n = (m,0)r\otimes n = (m,0)\otimes rn
\end{aligned}$$

ja $\hat{f}(m, n_1+n_2) = \hat{f}(m,n_1)+\hat{f}(m,n_2)$. Järelikult on $\hat{f}$ R-tasakaalustatud. Analoogiliselt on ka $\hat{g}$ R-tasakaalustatud. Seega leiduvad Abeli rühmade homomorfismid

$$\begin{aligned}
f\colon\ M\otimes_R N &\to (M_R\oplus M'_R)\otimes_R N, & \sum_{k=1}^{k^*} m_k\otimes n_k &\mapsto \sum_{k=1}^{k^*}(m_k,0)\otimes n_k,\\
g\colon\ M'\otimes_R N &\to (M_R\oplus M'_R)\otimes_R N, & \sum_{k=1}^{k^*} m'_k\otimes n_k &\mapsto \sum_{k=1}^{k^*}(0,m'_k)\otimes n_k.
\end{aligned}$$

Kasutades otsesumma universaalomadust II (vt (2.33)) saame, et leidub R-moodulite homomorfism

$$\begin{aligned}
&\psi\colon (M\otimes_R N)\oplus(M'\otimes_R N)\to (M_R\oplus M'_R)\otimes_R N,\\
&\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k\otimes n_k, \sum_{h=1}^{h^*} m'_h\otimes n'_h\right)\mapsto \sum_{k=1}^{k^*} f(m_k\otimes n_k)+\sum_{h=1}^{h^*} g(m'_h\otimes n'_h).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (M_R\oplus M'_R)\otimes_R N & \\
M\otimes_R N \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & M'\otimes_R N \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "\iota_2"] \\
 & (M\otimes_R N)\oplus(M'\otimes_R N) \arrow[uu, dashed, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

Paneme tähele, et iga $m\in M$, $m'\in M'$ ja $n, n'\in N$ korral

$$(\varphi\circ\psi)(m\otimes n, m'\otimes n') = \varphi(f(m\otimes n)+g(m'\otimes n'))$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi((m,0)\otimes n + (0,m')\otimes n') \\
&= (m\otimes n, 0) + (0, m'\otimes n') = (m\otimes n, m'\otimes n'), \\
(\psi\circ\varphi)((m,m')\otimes n) &= \psi(m\otimes n, m'\otimes n) = f(m\otimes n) + g(m'\otimes n) \\
&= (m,0)\otimes n + (0,m')\otimes n = (m,m')\otimes n.
\end{aligned}
$$

Siit näeme, et φ on tõepoolest R-moodulite isomorfism. ■

Järgnevalt toome ühe levinud näite tensorkorrutisest.

Näide 3.17 (Jäägiklassirühmade tensorkorrutis). Olgu $a, b \in \mathbb{N}_1$ naturaalarvud. Vaatleme Abeli rühmasid $(\mathbb{Z}_a; +)$ ja $(\mathbb{Z}_b; +)$ $\mathbb{Z}$-moodulitena (vastavalt näitele 2.7 (3)). Kuna ring $\mathbb{Z}$ on kommutatiivne, siis pole vaja eristada vasak- või parempoolseid $\mathbb{Z}$-mooduleid (märkus 2.37). Kehtib Abeli rühmade isomorfsus

$$\mathbb{Z}_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_b \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{SÜT}(a,b)}, \tag{3.8}$$

kus $\mathrm{SÜT}(a,b)$ on arvude a ja b suurim ühistegur (def 6.12.6 raamatus [5]).

Defineerime kujutuse $\hat{f}\colon \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b \to \mathbb{Z}_{\mathrm{SÜT}(a,b)}$, $(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto \overline{xy}$. Näitame, et $\hat{f}$ on korrektselt defineeritud, selleks võtame $(\overline{x}, \overline{y}), (\overline{z}, \overline{w}) \in \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$ nii, et $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{z}, \overline{w})$. Sel juhul leiduvad $l, h \in \mathbb{Z}$ nii, et $x - z = la$ ja $y - w = hb$. Nüüd

$$xy - zw = xy - zy + zy - zw = (x-z)y + z(y-w) = lay + zhb.$$

Vastavalt suurima ühisteguri definitsioonile leiduvad $c, d \in \mathbb{Z}$ nii, et $a = c\,\mathrm{SÜT}(a,b)$ ja $b = d\,\mathrm{SÜT}(a,b)$. Seega kehtib $xy - zw = (lyc + zhd)\,\mathrm{SÜT}(a,b)$. Siit aga saame $\overline{xy} = \overline{zw}$ hulgas $\mathbb{Z}_{\mathrm{SÜT}(a,b)}$, mistõttu kujutus $\hat{f}$ on korrektselt defineeritud nagu soovitud.

On lihtne kontrollida, et $\hat{f}$ on $\mathbb{Z}$-tasakaalustatud. Järelikult leidub tänu moodulite tensorkorrutise universaalomadusele (või lemmale 3.7) Abeli rühmade homomorfism

$$f\colon \mathbb{Z}_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_b \to \mathbb{Z}_{\mathrm{SÜT}(a,b)}, \quad \sum_{k=1}^{k^*} \overline{x_k} \otimes \overline{y_k} \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \overline{x_k y_k}.$$

Näitame, et f on bijektiivne. Kõigepealt olgu $\sum_{k=1}^{k^*} \overline{x_k} \otimes \overline{y_k} \in \operatorname{Ker} f$. Sel juhul kehtib $\sum_{k=1}^{k^*} \overline{x_k y_k} = \overline{0}$, st $\sum_{k=1}^{k^*} x_k y_k = d\,\mathrm{SÜT}(a,b)$ mingi $d \in \mathbb{Z}$ korral. Bézout'[2] lemmast (lause 6.3.5 raamatus [5]) teame, et leiduvad $u, v \in \mathbb{Z}$ nii, et $\mathrm{SÜT}(a,b) = au + bv$. Paneme tähele, et

$$\sum_{k=1}^{k^*} \overline{x_k} \otimes \overline{y_k} = \overline{\sum_{k=1}^{k^*} x_k y_k} \otimes \overline{1} = \overline{d\,\mathrm{SÜT}(a,b)} \otimes \overline{1} = \overline{d(au+bv)} \otimes \overline{1}$$

[2] Étienne Bézout (1730–1783) – prantsuse matemaatik.

$$= \overline{dua} \otimes \overline{1} + \overline{dvb} \otimes \overline{1} = \overline{0} \otimes \overline{1} + \overline{dv} \otimes \overline{b} = 0 \otimes 0.$$

Seega kehtib $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ ning f on injektiivne. Teisalt, võttes $\overline{w} \in \mathbb{Z}_{\text{SÜT}(a,b)}$, näeme, et $\overline{w} = f(\overline{w} \otimes \overline{1})$, mistõttu saame, et f on sürjektiivne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et f on Abeli rühmade isomorfism.

Erijuhuna saame, et kui a ja b on ühistegurita (st $\text{SÜT}(a,b) = 1$), siis kehtib $\mathbb{Z}_a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_b \cong \{0\}$. □

3.3 Moodulite homomorfismide tensorkorrutis

Olgu R ring; M_R, M'_R parempoolsed R-moodulid; ${}_RN$, ${}_RN'$ vasakpoolsed R-moodulid ning $f\colon\ M_R \to M'_R$ ja $g\colon\ {}_RN \to {}_RN'$ R-moodulite homomorfismid. Defineerime kujutuse $(f;g)\colon M \times N \to M' \otimes_R N'$ võrdusega

$$(f;g)(m,n) := f(m) \otimes g(n).$$

Näitame, et kujutus $(f;g)$ on R-tasakaalustatud. Olgu $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$, siis

$$\begin{aligned}
(f;g)(m+m',n) &= f(m+m') \otimes g(n) = (f(m)+f(m')) \otimes g(n)\\
&= f(m)\otimes g(n) + f(m')\otimes g(n) = (f;g)(m,n) + (f;g)(m',n),\\
(f;g)(m,n+n') &= (f;g)(m,n) + (f;g)(m,n'),\\
(f;g)(mr,n) &= f(mr) \otimes g(n) = f(m)r \otimes g(n) = f(m) \otimes rg(n)\\
&= f(m) \otimes g(rn) = (f;g)(m,rn).
\end{aligned}$$

Kuna kujutus $(f;g)$ on R-tasakaalustatud, siis tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest leidub Abeli rühmade homomorfism $\overline{(f;g)}\colon M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ nii, et $\overline{(f;g)} \circ \otimes = (f;g)$. Järelikult

$$\overline{(f;g)}(m \otimes n) = \overline{(f;g)}(\otimes(m,n)) = (f;g)(m,n) = f(m) \otimes g(n).$$

$$\begin{tikzcd}
 & M \times N \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "(f;g)"] & \\
M \otimes_R N \arrow[rr, "\overline{(f;g)} =: f \otimes g"'] & & M' \otimes_R N'
\end{tikzcd}$$

Homomorfismi $\overline{(f;g)}$ nimetame **moodulite homomorfismide** f **ja** g **tensorkorutiseks** ning tähistame $f \otimes g$. Nagu nägime, kehtib arvutusvalem

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n),$$

kus $m \in M$ ja $n \in N$. Kuna $f \otimes g$ Abeli rühmade homomorfism, siis iga $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k \in M \otimes_R N$ korral, kehtib

$$(f \otimes g)\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} (f \otimes g)(m_k \otimes n_k) = \sum_{k=1}^{k^*} f(m_k) \otimes g(n_k).$$

Olgu R, S ja T ringid. On lihtne näha, et kui ${}_SM_R, {}_SM'_R \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod}_R)$ ja ${}_RN_T, {}_RN'_T \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_T)$ ning $f\colon {}_SM_R \to {}_SM'_R$ ja $g\colon {}_RN_T \to {}_RN'_T$ on bimoodulite homomorfismid, siis homomorfismide tensorkorrutis

$$f \otimes g\colon\ {}_S(M \otimes_R N)_T \to {}_S(M' \otimes_R N')_T$$

on (S,T)-bimoodulite homomorfism. Analoogiliselt, kui vaid f või g on bimoodulite homomorfism, siis tensorkorrutis $f \otimes g$ on vastava poolsete moodulite homomorfism.

Järgnevas kahes lauses esitame ja tõestame mitmed kasulikud moodulite homomorfismide tensorkorrutise omadused.

Lause 3.18. *Olgu R ring, M_R, M'_R, ${}_RN$ ja ${}_RN'$ R-moodulid ning $f, f' \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ja $g, g' \in {}_R\mathrm{Hom}(N, N')$. Siis kehtivad järgnevad omadused:*
1. $(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g$,
2. $f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g'$,
3. $f \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0} \otimes g = \mathbf{0}$,
4. $\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$.

TÕESTUS. Olgu R ring; M_R, M'_R, ${}_RN$ ja ${}_RN'$ R-moodulid ning $f, f' \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ ja $g, g' \in {}_R\mathrm{Hom}(N, N')$. Näitame, et lause omadused kehtivad tensorkorrutise $M \otimes_R N$ moodustajatel $m \otimes n$ ehk elementaartensoritel. Sellest piisab, et antud omadused kehtiksid kõigil Abeli rühma $M \otimes_R N$ elementidel.Olgu $m \otimes n \in M \otimes_R N$.

1. Kehtib

$$\begin{aligned}((f + f') \otimes g)(m \otimes n) &= (f + f')(m) \otimes g(n) = (f(m) + f'(m)) \otimes g(n)\\ &= f(m) \otimes g(n) + f'(m) \otimes g(n)\\ &= (f \otimes g)(m \otimes n) + (f' \otimes g)(m \otimes n)\\ &= (f \otimes g + f' \otimes g)(m \otimes n).\end{aligned}$$

2. Analoogiline eelneva omadusega.
3. Kehtib

$$(f \otimes \mathbf{0})(m \otimes n) = f(m) \otimes 0 = f(m) \otimes 00 = f(m)0 \otimes 0 = 0 \otimes 0,$$

st kujutus $f \otimes \mathbf{0}$ viib elemendi $m \otimes n$ Abeli rühma $M' \otimes_R N'$ nullelemendiks. Järelikult viib ta kõik $M \otimes_R N$ elemendid nulliks. Seega $f \otimes \mathbf{0}$ on nullkujutus.
Võrdus $\mathbf{0} \otimes g = \mathbf{0}$ kehtib analoogiliselt.

4. Kehtib

$$(\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N)(m \otimes n) = \mathrm{id}_M(m) \otimes \mathrm{id}_N(n) = m \otimes n = \mathrm{id}_{M \otimes N}(m \otimes n).$$

Sellega on kõik lause tingimused tõestatud. ■

Lause 3.19. *Olgu R ring, M_R, M'_R, M''_R, ${}_RN$, ${}_RN'$ ja ${}_RN''$ R-moodulid ning olgu $f\colon M_R \to M'_R$, $f'\colon M'_R \to M''_R$, $g\colon {}_RN \to {}_RN'$ ja $g'\colon {}_RN' \to {}_RN''$ R-moodulite homomorfismid, siis kehtib võrdus*

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

TÕESTUS. Olgu $m \otimes n \in M \otimes_R N$. Sel juhul

$$\begin{aligned}((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(m \otimes n) &= (f' \otimes g')(f(m) \otimes g(n)) = f'(f(m)) \otimes g'(g(n)) \\ &= (f' \circ f)(m) \otimes (g' \circ g)(n) \\ &= ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(m, n).\end{aligned}$$

Sellega on lause tõestatud. ■

Nüüd on lihtne näha, et kuna homomorfismide tensorkorrutiste komponeerimine toimub komponenthaaval, kehtib järgmine järeldus.

Järeldus 3.20. *Olgu R ring, M_R, M'_R, ${}_RN$ ja ${}_RN'$ R-moodulid. Kui homomorfismid $f\colon M_R \to M'_R$ ja $g\colon {}_RN \to {}_RN'$ on retraktsioonid, koretraktsioonid või isomorfismid, siis on seda ka $f \otimes g$. Isomorfismide korral kehtib*

$$(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}.$$

Näitame, et homomorfismide tensorkorrutis säilitab sürjektiivsust.

Lause 3.21. *Olgu R ring, M_R, M'_R, N_R ja N'_R R-moodulid. Kui homomorfismid $f\colon M_R \to M'_R$ ja $g\colon N_R \to N'_R$ on sürjektiivsed, siis on $f \otimes g$ on samuti sürjektiivne.*

TÕESTUS. Olgu $f\colon M_R \to M'_R$ ja $g\colon N_R \to N'_R$ sürjektiivsed homomorfismid ja $\sum_{k=1}^{k^*} m'_k \otimes n'_k \in M' \otimes_R N'$. Tänu sürjektiivsusele leiduvad iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral $m_k \in M$ ja $n_k \in N$ nii, et $m'_k = f(m_k)$ ja $n'_k = g(n_k)$. Nüüd

$$\sum_{k=1}^{k^*} m'_k \otimes n'_k = \sum_{k=1}^{k^*} f(m_k) \otimes g(n_k) = (f \otimes g)\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes n_k\right).$$

Seega, $f \otimes g\colon M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ on sürjektiivne. ■

Lõpetame selle alapeatüki konstrueerides ühe S-moodulite homomorfismi, mida hiljem vajame.

Lause 3.22. *Olgu R, S, T ringid ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, ${}_TP_S \in \mathrm{Ob}({}_T\mathsf{Mod}_S)$ ja ${}_RN_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$. Leidub parempoolsete T-moodulite homomorfism*

$$\begin{aligned} \psi := \psi_{M,P,N} \colon\ & M \otimes_R \mathrm{Hom}_S(P,N) \to \mathrm{Hom}_S(P, M \otimes_R N), \\ & \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes f_k \mapsto \left(p \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes f_k(p) \right). \end{aligned}$$

TÕESTUS. Olgu R, S ja T ringid. Vaatleme kujutust

$$\hat{\psi} \colon M \times \mathrm{Hom}_S(P,N) \to \mathrm{Hom}_S(P, M \otimes_R N), \quad (m,f) \mapsto (p \mapsto m \otimes f(p)).$$

Paneme tähele, et iga $(m,f) \in M \times \mathrm{Hom}_S(P,N)$, $p, p' \in P$ ja $s \in S$ korral

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(m,f)(p+p') &= m \otimes f(p+p') = m \otimes (f(p) + f(p')) \\ &= m \otimes f(p) + m \otimes f(p') = \hat{\psi}(m,f)(p) + \hat{\psi}(m,f)(p'), \\ \hat{\psi}(m,f)(ps) &= m \otimes f(ps) = m \otimes f(p)s = (m \otimes f(p))s = (\hat{\psi}(m,f)(p))s. \end{aligned}$$

Seega kehtib $\mathrm{Im}\,\hat{\psi} \subseteq \mathrm{Hom}_S(P, M \otimes_R N)$.

Iga $m, m' \in M$, $f, f' \in \mathrm{Hom}_S(P,N)$, $r \in R$ ja $p \in P$ korral

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(m+m', f)(p) &= (m+m') \otimes f(p) = m \otimes f(p) + m' \otimes f(p) \\ &= \hat{\psi}(m,f)(p) + \hat{\psi}(m',f)(p) = (\hat{\psi}(m,f) + \hat{\psi}(m',f))(p), \\ \hat{\psi}(m, f+f')(p) &= m \otimes (f+f')(p) = m \otimes (f(p) + f'(p)) \\ &= m \otimes f(p) + m \otimes f'(p) = (\hat{\psi}(m,f) + \hat{\psi}(m,f'))(p), \\ \hat{\psi}(mr, f)(p) &= mr \otimes f(p) = m \otimes rf(p) = m \otimes (rf)(p) = \hat{\psi}(m, rf)(p). \end{aligned}$$

Seega $\hat{\psi}$ on R-tasakaalustatud. Tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest on ψ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism.

Lõpetuseks paneme tähele, et iga $m \in M$, $f \in \mathrm{Hom}_S(P,N)$, $t \in T$ ja $p \in P$ korral

$$\begin{aligned} \psi((m \otimes f)t)(p) &= \psi(m \otimes ft)(p) = m \otimes (ft)(p) = m \otimes f(tp) \\ &= \psi(m \otimes f)(tp) = (\psi(m \otimes f)t)(p). \end{aligned}$$

Järelikult on ψ parempoolsete T-moodulite homomorfism (lemma 3.12). ■

3.4 Tensorfunktorid

Järgnevalt näeme, et mingi bimooduliga tensorkorrutamine annab tegelikult funktori teatavate moodulite kategooriate vahel.

Lause 3.23. *Olgu R ja S ringid ja ${}_RN_S$ (R,S)-bimoodul. Siis alljärgnev eeskiri*

$$\begin{tikzcd} M_R \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_N"] \\ M'_R \arrow[r, mapsto] & M' \otimes_R N \end{tikzcd}$$

Joonis 3.2

defineerib funktori $\_\_ \otimes_R N \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_S$.

TÕESTUS. Olgu $\mathbf{F}$ eeskiri, mille määrab diagramm joonisel 3.2. Iga $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ korral leidub tensorkorrutis $M \otimes_R N$, mis on lause 3.9 järgi parempoolne S-moodul, seega on eeskiri $\mathbf{F}\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ kujutus. Näitame, et kujutus $\mathbf{F}$ rahuldab funktori definitsiooni 1.11 tingimusi.

1. Iga morfismi $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M, M') = \mathrm{Hom}_R(M, M')$ korral leidub homomorfismide tensorkorrutis $\mathbf{F}(f) = f \otimes \mathrm{id}_N \colon M \otimes_R N \to M' \otimes_R N$, mis on morfism kategoorias Mod_S.
2. Olgu $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M, M')$ ja $g \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M', M'')$, siis, lausest 3.19 tulenevalt,
$$\begin{aligned}\mathbf{F}(g \circ f) &= (g \circ f) \otimes \mathrm{id}_N = (g \circ f) \otimes (\mathrm{id}_N \circ \mathrm{id}_N) = (g \otimes \mathrm{id}_N) \circ (f \otimes \mathrm{id}_N) \\ &= \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f).\end{aligned}$$
3. Olgu $M_R \in \mathsf{Mod}_R$. Sel juhul, tulenevalt lause 3.18 väitest 4, kehtib
$$\mathbf{F}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes N}\,.$$

Kokkuvõttes on eeskiri $\mathbf{F}$ funktor, mida edaspidi tähistame $\_\_ \otimes_R N$. ■

Analoogiliselt saame järeldusest 3.11 tensorkorrutamise funktori ka bimoodulite kategooriate vahel.

Järeldus 3.24. *Olgu R, S, T ringid ja ${}_RN_S$ (R,S)-bimoodul. Siis leidub funktor*
$$\_\_ \otimes_R N \colon\ {}_T\mathsf{Mod}_R \to {}_T\mathsf{Mod}_S.$$

Ilmselt saab analoogiliselt vaadelda ka nn vasakult tensorkorrutamise funktoreid.

Järeldus 3.25. *Olgu R, S, T ringid ja ${}_TM_R$ (T,R)-bimoodul. Siis leiduvad funktorid*

$$\begin{aligned} M\otimes_R \_\_ &\colon\ {}_R\mathsf{Mod} \to {}_T\mathsf{Mod},\\ M\otimes_R \_\_ &\colon\ {}_R\mathsf{Mod}_S \to {}_T\mathsf{Mod}_S. \end{aligned}$$

On selge, et kui me võtame aluseks „ühepoolse“ mooduli, siis saame ka funktorid, kuid sellised, mille kujutised on ilma mooduli struktuurita.

Järeldus 3.26. *Olgu R ring ning $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ ja ${}_RN \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Leiduvad funktorid*

$$M\otimes_R \_\_\colon {}_R\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}, \tag{3.9}$$

$$\_\_\otimes_R N\colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Ab}. \tag{3.10}$$

Märkus (Veelkord tensorkorrutise assotsiatiivsusest). Lausest 3.14 teame, et leidub isomorfism

$$\alpha_{M,N,P}\colon (M\otimes_R N)\otimes_S P \to M\otimes_R (N\otimes_S P).$$

Nüüd – kus oleme tutvunud tensorfunktoritega – on paslik mainida, et see isomorfism indutseerib tegelikult mitmeid loomulikke isomorfisme tensorfunktorite kompositsioonide vahel:

$$\begin{aligned} (\alpha_{M,N,P})_{M\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})}\colon &\quad (\_\_\otimes_R N)\otimes_S P \xrightarrow{\bullet} \_\_\otimes_R (N\otimes_S P),\\ (\alpha_{M,N,P})_{N\in\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)}\colon &\quad (M\otimes_R \_\_)\otimes_S P \xrightarrow{\bullet} M\otimes_R (\_\_\otimes_S P),\\ (\alpha_{M,N,P})_{P\in\mathrm{Ob}(\mathcal{B})}\colon &\quad (M\otimes_R N)\otimes_S \_\_ \xrightarrow{\bullet} M\otimes_R (N\otimes_S \_\_), \end{aligned}$$

kus $\mathcal{A} \in \{\mathsf{Mod}_R, {}_T\mathsf{Mod}_R\}$ ja $\mathcal{B} \in \{{}_S\mathsf{Mod}, {}_S\mathsf{Mod}_Q\}$ (T ja Q on ringid).

Järgnevalt tõestame, et tensorfunktor on paremalt eksaktne.

Teoreem 3.27. *Olgu R ring ja ${}_RN \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ R-moodul. Tensorfunktor $\_\_\otimes_R N\colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Ab}$ on paremalt eksaktne.*

TÕESTUS. Olgu $\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} M_R \xrightarrow{f} K_R \xrightarrow{g} L_R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$ lühike täpne jada kategoorias Mod_R. Vaatleme kategoorias Ab jada

$$M\otimes_R N \overset{f\otimes \mathrm{id}_N}{\longrightarrow} K\otimes_R N \overset{g\otimes \mathrm{id}_N}{\longrightarrow} L\otimes_R N \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}. \tag{3.11}$$

Tulenevalt lausest 3.21 on $g\otimes \mathrm{id}_N$ sürjektiivne. Kasutades lauseid 3.18 ja 3.19 ning valemit (2.39) paneme tähele, et kehtib

$$(g\otimes \mathrm{id}_N)\circ(f\otimes \mathrm{id}_N) = (g\circ f)\otimes(\mathrm{id}_N\circ \mathrm{id}_N) = \mathbf{0}\otimes \mathrm{id}_N = \mathbf{0}.$$

Seega $\mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{id}_N) \subseteq \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_N)$.

Homomorfismiteoreemist 2.62[3] saame sürjektiivse homomorfismi α, mille korral allolev diagramm kommuteerub,

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_R N \arrow[rr, "g \otimes \mathrm{id}_N"] \arrow[dr, "\kappa"'] & & L \otimes_R N \\
& \dfrac{K \otimes_R N}{\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_N)} \arrow[ur, dashed, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

kus κ on kanooniline sürjektsioon. Kusjuures kehtib $\alpha\colon \sum_{h=1}^{h^*}[k_h \otimes n_h] \mapsto \sum_{h=1}^{h^*} g(k_h) \otimes n_h$. Defineerime kujutuse

$$\beta\colon L \times N \to \frac{K \otimes_R N}{\mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{id}_N)}, \qquad (l, n) \mapsto [k \otimes n],$$

kus $g(k) = l$ (element k leidub tänu g sürjektiivsusele). Näitame, et β on korrektselt defineeritud. Võttes $k, k' \in K$ nii, et $g(k) = g(k') = l$ mingi $l \in L$ korral, siis $k' - k \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f$, tänu lemmale 2.26. Seega $(k' - k) \otimes n \in \mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{id}_N)$. Nüüd

$$\begin{aligned}
[k \otimes n] &= [k \otimes n] + [0] = [k \otimes n] + [(k' - k) \otimes n] = [(k + k' - k) \otimes n] \\
&= [k' \otimes n].
\end{aligned}$$

Järelikult on β korrektselt defineeritud. Järgnevalt olgu $l, l' \in L$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$. Lisaks olgu $k, k' \in K$ sellised, et $g(k) = l$ ja $g(k') = l'$. Nüüd

$$\begin{aligned}
\beta(l + l', n) &= [(k + k') \otimes n] = [k \otimes n] + [k' \otimes n] = \beta(l, n) + \beta(l, n'), \\
\beta(l, n + n') &= [k \otimes (n + n')] = [k \otimes n] + [k \otimes n'] = \beta(l, n) + \beta(l, n'), \\
\beta(lr, n) &= [kr \otimes n] = [k \otimes rn] = \beta(l, rn),
\end{aligned}$$

kus viimane rida kehtib, kuna $lr = g(k)r = g(kr)$. Seega on β R-tasakaalustatud. Tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest saame, et leidub Abeli rühmade homomorfism

$$\overline{\beta}\colon L \otimes_R N \to \frac{K \otimes_R N}{\mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{id}_N)}, \qquad \sum_{h=1}^{h^*} l_h \otimes n_h \mapsto \sum_{h=1}^{h^*}[k_h \otimes n_h],$$

kus $l_h = g(k_h)$. Paneme tähele, et iga $\sum_{h=1}^{h^*}[k_h \otimes n_h] \in (K \otimes_R N)/\mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{id}_N)$ korral

$$(\overline{\beta} \circ \alpha)\left(\sum_{h=1}^{h^*}[k_h \otimes n_h]\right) = \overline{\beta}\left(\sum_{h=1}^{h^*} g(k_h) \otimes n_h\right) = \sum_{h=1}^{h^*}[k_h \otimes n_h].$$

[3] Märgime, et ka siin tõestuses kasutame Homomorfismiteoreemi 2.62 Abeli rühmade jaoks (vt märkus enne teoreemi 2.62).

Seega $\overline{\beta} \circ \alpha = \mathrm{id}$. Teisalt, iga $l \in L$ ja $n \in N$ korral

$$(\alpha \circ \overline{\beta})(l \otimes n) = \alpha([k \otimes n]) = g(k) \otimes n = l \otimes n.$$

Seega kehtib ka $\alpha \circ \overline{\beta} = \mathrm{id}_{L \otimes N}$ (lemma 3.8). Järelikult on α isomorfism. Homomorfismiteoreemi 2.62 viimasest väitest saame nüüd, et

$$\{0\} = \operatorname{Ker} \alpha = \frac{\operatorname{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_N)}{\operatorname{Im}(f \otimes \mathrm{id}_N)}.$$

Siit näeme, et kehtib $\operatorname{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_N) = \operatorname{Im}(f \otimes \mathrm{id}_N)$.

Kokkuvõttes oleme saanud, et jada (3.11) on täpne. ■

Järeldus 3.28. *Olgu R ja S ringid ning ${}_R N_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$ (R, S)-bimoodul ja $K_S \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$ S-moodul. Tensorfunktorid $\_\_ \otimes_R N \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_S$, $K \otimes_S \_\_ \colon {}_S\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$ ja $N \otimes_S \_\_ \colon {}_S\mathsf{Mod} \to {}_R\mathsf{Mod}$ on paremalt eksaktsed.*

Järgnevalt näitame, et tensorfunktorid on lähedalt seotud hom-funktoritega.

Teoreem 3.29. *Olgu R, S ringid ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, ${}_R U_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$, $N_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ vastavad (bi)moodulid. Leidub Abeli rühmade isomorfism*

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_{M,U,N} \colon \ & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(U, N)) \to \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R U, N), \\ & f \mapsto \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes u_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} f(m_k)(u_k) \right). \end{aligned}$$

TÕESTUS. Kehtigu teoreemi eeldused. Fikseerime R-moodulite homomorfismi $f \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(U, N))$. Vaatleme kujutust $\hat{\varphi}(f) \colon M \times U \to N$, $(m, u) \mapsto f(m)(u)$. Paneme tähele, et iga $m, m' \in M$, $u, u' \in U$ ja $r \in R$ korral kehtivad

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(f)(m + m', u) &= f(m + m')(u) = (f(m) + f(m'))(u) = f(m)(u) + f(m')(u), \\ \hat{\varphi}(f)(m, u + u') &= f(m)(u + u') = f(m)(u) + f(m)(u'), \\ \hat{\varphi}(f)(mr, u) &= f(mr)(u) = (f(m)r)(u) = f(m)(ru) = \hat{\varphi}(f)(m, ru), \end{aligned}$$

mistõttu näeme, et $\hat{\varphi}(f)$ on R-tasakaalustatud. Järelikult on kujutus $\varphi(f)$: $M \otimes_R U \to N_S$ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Lisaks märkame, et iga $s \in S$, $m \in M$ ja $u \in U$ korral

$$\varphi(f)((m \otimes u)s) = \varphi(f)(m \otimes us) = f(m)(us) = (f(m)(u))s = \varphi(f)(m \otimes u)s,$$

mistõttu $\varphi(f)$ on S-moodulite homomorfism (lemma 3.12). Seega on φ korrektselt defineeritud.

Vaatleme kujutust

$$\begin{aligned}\beta\colon \operatorname{Hom}_S(M\otimes_R U, N) &\to \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Hom}_S(U,N)),\\ g &\mapsto (m\mapsto (u\mapsto g(m\otimes u))).\end{aligned}$$

Paneme tähele, et iga $g\in \operatorname{Hom}_S(M\otimes_R U, N)$, $m\in M$, $u\in U$, $s\in S$ ja $r\in R$ korral

$$\begin{aligned}\beta(g)(m)(us) &= g(m\otimes us) = g((m\otimes u)s) = g(m\otimes u)s = \beta(g)(m)(u)s,\\ \beta(g)(mr)(u) &= g(mr\otimes u) = g(m\otimes ru) = \beta(g)(m)(ru) = (\beta(g)(m)r)(u).\end{aligned}$$

Lisaks sellele on lihtne veenduda, et $\beta(g)(m)$, $\beta(g)$ ja β säilitavad liitmist. Seega tõesti $\operatorname{Im}\beta\subseteq \operatorname{Hom}_R(M,\operatorname{Hom}_S(U,N))$.

Nüüd näeme, et iga $g\in\operatorname{Hom}_S(M\otimes_R U,N)$, $f\in \operatorname{Hom}_R(M,\operatorname{Hom}_S(U,N))$, $m\in M$ ja $u\in U$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}(\varphi\circ\beta)(g)(m\otimes u) &= (\varphi(\beta(g)))(m\otimes u) = \beta(g)(m)(u) = g(m\otimes u)\\ &= \operatorname{id}(g)(m\otimes u),\\ (\beta\circ\varphi)(f)(m)(u) &= (\beta(\varphi(f)))(m)(u) = \varphi(f)(m\otimes u) = f(m)(u)\\ &= \operatorname{id}(f)(m)(u).\end{aligned}$$

Seega φ on isomorfism pöördmorfismiga β (lemma 3.8). ■

Märkus 3.30. Olgu R, S ringid ja ${}_RU_S\in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$ bimoodul. On lihtne – kuid natuke tüütu – kontrollida, et iga $M_R, M'_R\in\operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, $N_S, N'_S\in \operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$, $f\in\operatorname{Hom}_R(M,M')$ ja $g\in\operatorname{Hom}_S(N,N')$ korral on allolevad diagrammid kommutatiivsed.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] & \operatorname{Hom}_R(M,\operatorname{Hom}_S(U,N)) \arrow[r, "\varphi_{M,U,N}"] & \operatorname{Hom}_S(M\otimes_R U,N) \\ M' & \operatorname{Hom}_R(M',\operatorname{Hom}_S(U,N)) \arrow[u, "\_\circ f"] \arrow[r, "\varphi_{M',U,N}"'] & \operatorname{Hom}_S(M'\otimes_R U,N) \arrow[u, "\_\circ(f\otimes\operatorname{id}_U)"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, "g"'] & \operatorname{Hom}_R(M,\operatorname{Hom}_S(U,N)) \arrow[d, "(g\circ\_)\circ\_"'] \arrow[r, "\varphi_{M,U,N}"] & \operatorname{Hom}_S(M\otimes_R U,N) \arrow[d, "g\circ\_"] \\ N' & \operatorname{Hom}_R(M,\operatorname{Hom}_S(U,N')) \arrow[r, "\varphi_{M,U,N'}"'] & \operatorname{Hom}_S(M\otimes_R U,N') \end{tikzcd}$$

Teisisõnu saame, et iga M_R ja N_S korral leiduvad loomulikd teisendused

$$(\varphi_{M',U,N})_{M'\in\operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}_R)}\colon\ \operatorname{Hom}_R(\_,\operatorname{Hom}_S(U,N)) \dashrightarrow \operatorname{Hom}_S(\_\otimes_R U, N),$$

$$(\varphi_{M,U,N'})_{N'\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)}\colon\ \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_S(U,\_\_)) \xrightarrow{\bullet} \mathrm{Hom}_S(M\otimes_R U,\_\_).$$

Need diagrammid koos teoreemiga 3.29 ütlevad, et tensorfunktor $\_\_\otimes_R U\colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_S$ on hom-funktori $\mathrm{Hom}_S(U,\_\_)\colon \mathsf{Mod}_S \to \mathsf{Mod}_R$ *vasakpoolne kaasfunktor*. See on võrdlemisi oluline omadus. Siiski jääb kaasfunktori mõiste käesolevas raamatu mahust välja. Huvilised võivad kaasfunktoritega tutvuda näiteks raamatust [4] (definitsioon III.6.1).

Selle osa lõpetuseks teeme veel ühe tähelepaneku, nimelt annab tensorkorrutamine bifunktorid erinevate kategooriate vahel. Järgnev lause järeldub otse moodulite homomorfismide tensorkorrutise konstruktsioonist ja omadustest, analoogiliselt lausega 3.23.

Lause 3.31. *Olgu R, S ja T ringid. Leiduvad bifunktorid*

$$\begin{aligned}
\otimes_R = __\otimes_R__\colon &\qquad \mathsf{Mod}_R \times {}_R\mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab},\\
\otimes_R = __\otimes_R__\colon &\qquad \mathsf{Mod}_R \times {}_R\mathsf{Mod}_T \to \mathsf{Mod}_T,\\
\otimes_R = __\otimes_R__\colon &\qquad {}_S\mathsf{Mod}_R \times {}_R\mathsf{Mod} \to {}_S\mathsf{Mod},\\
\otimes_R = __\otimes_R__\colon &\qquad {}_S\mathsf{Mod}_R \times {}_R\mathsf{Mod}_T \to {}_S\mathsf{Mod}_T.
\end{aligned}$$

3.5 Püsivad moodulid ja ringid

Käesolevas alapeatükis tutvume Morita teooria seisukohalt väga oluliste moodulitega – püsivate moodulitega.

Kõigepealt meenutame näitest 2.70 (1), et iga ringi R võib vaadelda bimoodulina ${}_RR_R$. Olgu nüüd M_R mingi parempoolne R-moodul. Lausest 3.9 teame, et $M\otimes_R R$ on samuti parempoolne R-moodul. Näitame, et iga R-mooduli M_R jaoks leidub *kanooniline homomorfism* $M\otimes_R R\to M$.

Lemma 3.32. *Olgu R ring ja M_R parempoolne R-moodul. Leidub R-moodulite homomorfism*

$$\mu_M\colon\ M\otimes_R R\to M,\qquad \sum_{k=1}^{k^*} m_k\otimes r_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} m_k r_k.$$

Kusjuures, $\mu = (\mu_M)_{M\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)}\colon (\_\_\otimes_R R)\xrightarrow{\bullet}\mathrm{id}_{\mathsf{Mod}_R}$ on loomulik teisendus.

TÕESTUS. Olgu R ring ja $M_R\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Defineerime kujutuse $\hat\mu : M\times R\to M$, $(m,r)\mapsto mr$. Paneme tähele, et iga $m,m'\in M$, $r,r'\in R$ korral kehtivad

$$\hat\mu(m+m',r) = (m+m')r = mr+m'r = \hat\mu(m,r)+\hat\mu(m',r),$$

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(m, r + r') &= m(r + r') = mr + mr' = \hat{\mu}(m, r) + \hat{\mu}(m, r'),\\ \hat{\mu}(mr, r') &= (mr)r' = m(rr') = \hat{\mu}(m, rr').\end{aligned}$$

Järelikult on $\hat{\mu}$ R-tasakaalustatud ning nüüd järeldub tensorkorrutise universaalomadusest (ja lemmast 3.7), et $\mu_M = \overline{\hat{\mu}}$ on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Pannes tähele, et iga $m \in M$ ja $r, r' \in R$ korral

$$\mu_M((m \otimes r)r') = \mu_M(m \otimes rr') = m(rr') = (mr)r' = \mu_M(m \otimes r)r'.$$

Seega μ_M on parempoolsete R-moodulite homomorfism nagu soovitud (lemma 3.12).

Olgu $M_R, N_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ ja $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Vaatleme allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R R \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_R"'] & M \arrow[d, "f"] \\ N \otimes_R R \arrow[r, "\mu_N"'] & N \end{tikzcd}$$

Valime suvalised elemendid $m \in M$ ja $r \in R$. Nüüd

$$\begin{aligned}(f \circ \mu_M)(m \otimes r) &= f(mr) = f(m)r = \mu_N(f(m) \otimes r)\\ &= \mu_N((f \otimes \mathrm{id}_R)(m \otimes r)) = (\mu_N \circ (f \otimes \mathrm{id}_R))(m \otimes r).\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et $\mu = (\mu_M)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)}$ on tõepoolest loomulik teisendus (lemma 3.8). ■

Järgmisena tõestame veel kaks pisikest, kuid kasulikku lemmat kanoonilise homomorfismi μ_M kohta.

Lemma 3.33. *Olgu R ring. Iga $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ korral* $(\mathrm{Ker}\,\mu_M)R = \{0\}$. *Kui R on idempotentne ring, siis kehtib* $\mathbf{U}(\mathrm{Ker}\,\mu_M) = \{0\}$.

TÕESTUS. Olgu R ring. Valime $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes r_k \in \mathrm{Ker}\,\mu_M$ ja $r \in R$, siis

$$\left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes r_k\right) r = \sum_{k=1}^{k^*} m_k r_k \otimes r = \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k r_k\right) \otimes r = 0 \otimes r = 0,$$

mistõttu $(\mathrm{Ker}\,\mu_M)R = \{0\}$. Kui R on idempotentne, siis kehtib $(\mathrm{Ker}\,\mu_M)R = \mathbf{U}(\mathrm{Ker}\,\mu_M)$. ■

Lemma 3.34. *Olgu R ring ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{UMod}_R)$. Kanooniline homomorfism $\mu_M \colon M \otimes_R R \to M_R$ on monomorfism kategoorias UMod_R.*

TÕESTUS. Olgu $N_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{UMod}_R)$ ja olgu $f \colon N_R \to M \otimes_R R$ selline, et $\mu_M \circ f = \mathbf{0}$. Seega $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, \mu_M$. Lemmast 3.33 teame, et kehtib $(\mathrm{Ker}\, \mu_M)R = \{0\}$.

Olgu $n \in N$. Kuna N_R on unitaarne, siis leiduvad $n_1, \ldots, n_{k^*} \in N$ ja $r_1, \ldots, r_{k^*} \in R$ nii, et $n = n_1 r_1 + \ldots + n_{k^*} r_{k^*}$. Vastavalt eeldusele kehtib iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral, et $f(n_k) \in \mathrm{Ker}\, \mu_M$, siis kehtib $f(n_k) r_k = 0$. Nüüd

$$f(n) = f\left(\sum_{k=1}^{k^*} n_k r_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k) r_k = 0.$$

Seega $f = \mathbf{0}$ ja tänu lausele 2.61 on μ_M monomorfism. ■

Nüüd oleme valmis defineerima püsivad moodulid.

Definitsioon 3.35. Olgu R ring. Parempoolset R-moodulit M_R nimetatakse **püsivaks**[4], kui kanooniline homomorfism μ_M on isomorfism.

Kõikvõimalikud püsivad parempoolsed R-moodulid moodustavad kategooria Mod_R täieliku alamkategooria, mida tähistame sümboliga FMod_R. Duaalselt öeldakse, et vasakpoolne R-moodul ${}_R M \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ on **püsiv**, kui homomorfism $\nu_M \colon R \otimes_R M \to M$, $r \otimes m \mapsto rm$ on isomorfism. Püsivate vasakpoolsete R-moodulite kategooriat tähistame sümboliga ${}_R\mathsf{FMod}$.

Paneme tähele, et iga püsiv moodul on unitaarne. Veelgi enam, parempoolse R-mooduli M_R unitaarsus on samaväärne kanoonilise homomorfismi μ_M sürjektiivsusega. Kuna selgelt $\mathrm{Im}\,(\mu_M) = MR$.

Näide 3.36 (Püsivad moodulid üle ühikelemendiga ringi). Olgu S ühikelemendiga ring. Iga „klassikaline“ S-moodul M_S (st $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$) on püsiv. Tõestame selle. On selge, et μ_M on sürjektiivne, kuna M_S on unitaarne. Nimelt, iga $m \in M$ korral

$$m = m1 = \mu_M(m \otimes 1).$$

Teisalt, olgu tensor $\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes s_k \in M \otimes_S S$ selline, et $\sum_{k=1}^{k^*} m_k s_k = 0$. Nüüd

$$\sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes s_k = \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes s_k 1 = \left(\sum_{k=1}^{k^*} m_k s_k\right) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0.$$

Seega, $\mathrm{Ker}\, \mu_M = \{0\}$. Järelikult on μ_M ka injektiivne ja seetõttu S-moodulite isomorfism. □

[4]Märgime, et ingliskeelses kirjanduses kasutatakse püsivate moodulite kohta termineid *firm*, *coclosed* või *regular module*. Tundub, et viimasel ajal on populaarseimaks terminiks jäänud *firm*.

Eelnevast näitest saame, et iga ühikelemendiga ringi S korral kehtib

$$\mathsf{Mod}_S^1 = \mathsf{FMod}_S. \tag{3.12}$$

Märkus 3.37. Märgime, et nüüdseks oleme saanud juba viis erinevat viisi, kuidas üldistada „klassikalisi“ mooduleid ühikelemendita ringide juhule (definitsioon 2.6, võrdused (2.11), (2.25), (2.28) ja (3.12)). See asjaolu üksi näitab autori meelest, et ühikelemendita ringid väärivad uurimist. Kuna moodulite teooria üle ühikelemendita ringide on mitmes mõttes nüansirohkem „klassikalisest“ moodulite teooriast, tulenevalt kasvõi kõigist neist loomulikest ja huvitavatest moodulite kategooriatest UMod_R, TfMod_R, CMod_R ja FMod_R, mis kõik klassikalisel juhul võrdsed on (vt mõttekäiku lk 39).

Tõestame järgmiseks kaks lihtsat tulemust püsivate moodulite kategooria kohta, mis väidavad, et FMod_R on kinnine tensorkorrutiste ja lõplike otsesummade suhtes.

Lemma 3.38. *Olgu R ja S ringid, $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_{R)}$ ja ${}_RN_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$. Kui N_S on püsiv, siis $M \otimes_R N$ on püsiv parempoolne S-moodul.*

TÕESTUS. Olgu $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_{R)}$ ja ${}_RN_S \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$ selline, et N_S on püsiv. Paneme tähele, et $\mu_{M\otimes N} \colon M \otimes_R N \otimes_S S \to M \otimes_R N$ avaldub kahe isomorfismi kompositsioonina:

$$\mu_{M\otimes N} = \mathrm{id}_M \circ \mu_N.$$

Järelikult on $\mu_{M\otimes N}$ ise ka isomorfism ja $M \otimes_R N$ on püsiv (järeldus 3.20).■

Lause 3.39. *Olgu R ring. Kategooria FMod_R on lõplike otsesummade suhtes kinnine.*

TÕESTUS. Olgu R ring ja $M_R, M'_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$. Paneme tähele, et leidub R-moodulite isomorfism

$$(\mu_M \oplus \mu_{M'}) \circ \varphi \colon\ (M_R \oplus M'_R)\otimes_R R \to (M \otimes_R R) \oplus (M' \otimes_R R) \to M_R \oplus M'_R,$$
$$\sum_{k=1}^{k^*} (m_k, m'_k) \otimes r_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} (m_k r_k, m'_k r_k).$$

Isomorfism φ leidub tulenevalt lausest 3.16 ning $\mu_M \oplus \mu_{M'}$ on isomorfism tänu lemmale 2.51. Seega kehtib $M_R \oplus M'_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$. ■

Nüüd tõestame ühe suhteliselt tehnilise kirjelduse püsivatele moodulitele, üle idempotentsete ringide, diagrammide abil, mida järgmises peatükis vaja läheb.

Lause 3.40. *Olgu R idempotentne ring ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. R-moodul M_R on püsiv parajasti siis, kui M_R on unitaarne ja kehtib tingimus*[5]*: iga lühikese täpse jada korral kategoorias Mod_R*

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} X_R \xrightarrow{f} Y_R \xrightarrow{g} Z_R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\},$$

kus $\mathbf{U}(X_R) = XR = \{0\}$ ja iga homomorfismi $a\colon M_R \to Z_R$ korral leidub homomorfism $b\colon M_R \to Y_R$ nii, et $g \circ b = a$.

Eelnevas lauses sisalduvat tingimust iseloomustab allolev kommutatiivne diagramm.

$$\begin{tikzcd}
& & & M_R \arrow[dl, dashed, "b"'] \arrow[d, "a"] & \\
\{0\} \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & X_R \arrow[r, "f"'] & Y_R \arrow[r, "g"'] & Z_R \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu M_R püsiv R-moodul. Sel juhul on M_R unitaarne R-moodul. Vaatleme diagrammi

$$\begin{tikzcd}
& & & M_R \arrow[d, "a"] & \\
\{0\} \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & X_R \arrow[r, "f"'] & Y_R \arrow[r, "g"'] & Z_R \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & \{0\}
\end{tikzcd},$$

kus alumine rida on täpne ja kehtib $XR = \{0\}$. Rakendame eelnevale diagrammile tensorfunktorit $\_ \otimes_R R\colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_R$. Tulenevalt lausest 3.27 ja μ loomulikkusest saame, et alloleva diagrammi pidevate nooltega osa on kommutatiivne ning mõlemad read on täpsed.

[5]Seda tingimust nimetatakse $\mathbf{U}$-*kojaguvuseks* (vt [39] ja [46]). Mainime, et kinnistele moodulitele leidub analoogiline kirjeldus. Nimelt, olgu R idempotentne ring ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$; sel juhul on M_R kinnine parajasti siis, kui M_R on väändeta ja leidub diagrammi

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "\mathbf{0}"] & X_R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & Y_R \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "b"] & Z_R \arrow[r, "\mathbf{0}"] & \{0\} \\
& M_R & & &
\end{tikzcd}$$

kommuteeriv homomorfism b, kus $ZR = \{0\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes_R R \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}_R"] \arrow[d, "\mu_X"'] \arrow[dr, "f \circ \mu_X"] & Y \otimes_R R \arrow[r, "g \otimes \mathrm{id}_R"] \arrow[d, "\mu_Y"] & Z \otimes_R R \arrow[r] \arrow[d, "\mu_Z"] \arrow[dl, dashed, "h"] & \{0\} & M \otimes_R R \arrow[ll, "a \otimes \mathrm{id}_R"'] \arrow[d, shift right, "\mu_M"'] \\
\{0\} \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & X_R \arrow[r, "f"'] & Y_R \arrow[r, "g"'] & Z_R \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & \{0\} & M_R \arrow[u, shift right, "\mu_M^{-1}"'] \arrow[ll, "a"']
\end{tikzcd}$$

Joonis 3.3

Vastavalt eeldusele saame, et $\mathrm{Im}\,\mu_X = XR = \{0\}$, mistõttu $\mu_X = \mathbf{0}$ ning seetõttu ka $f \circ \mu_X = \mathbf{0}$. Tänu ülemise rea täpsusele on $g \otimes \mathrm{id}_R$ sürjektiivne. Seega, iga $\zeta \in Z \otimes_R R$ korral leidub element $\upsilon_\zeta \in Y \otimes_R R$ nii, et $\zeta = (g \otimes \mathrm{id}_R)(\upsilon_\zeta)$. Nüüd defineerime

$$h\colon Z \otimes_R R \to Y, \qquad \zeta \mapsto \mu_Y(\upsilon_\zeta).$$

Olgu $\zeta \in Z \otimes_R R$ ja $\upsilon, \upsilon' \in Y \otimes_R R$ sellised, et $(g \otimes \mathrm{id}_R)(\upsilon) = (g \otimes \mathrm{id}_R)(\upsilon') = \zeta$. Nüüd

$$0 = (g \otimes \mathrm{id}_R)(\upsilon) - (g \otimes \mathrm{id}_R)(\upsilon') = (g \otimes \mathrm{id}_R)(\upsilon - \upsilon').$$

Seega $\upsilon - \upsilon' \in \mathrm{Ker}(g \otimes \mathrm{id}_R) = \mathrm{Im}\,(f \otimes \mathrm{id}_R)$. Järelikult leidub $\xi \in X \otimes_R R$ nii, et $(f \otimes \mathrm{id}_R)(\xi) = \upsilon - \upsilon'$. Nüüd

$$0 = \mathbf{0}(\xi) = (f \circ \mu_X)(\xi) = (\mu_Y \circ (f \otimes \mathrm{id}_R))(\xi) = \mu_Y(\upsilon - \upsilon') = \mu_Y(\upsilon) - \mu_Y(\upsilon'),$$

mistõttu $\mu_Y(\upsilon) = \mu_Y(\upsilon')$. Siit näeme, et h on korrektselt defineeritud. On võimalik näidata, et h on parempoolsete R-moodulite homomorfism.

Paneme tähele, et iga $\zeta \in Z \otimes_R R$ korral

$$\mu_Z(\zeta) = \mu_Z((g \otimes \mathrm{id}_R)(\upsilon_\zeta)) = g(\mu_Y(\upsilon_\zeta)) = g(h(\zeta)).$$

Seega $\mu_Z = g \circ h$. Järelikult, diagramm joonisel 3.3 kommuteerub.

Kokkuvõttes on meie otsitav homomorfism $h \circ (a \otimes \mathrm{id}_R) \circ \mu_M^{-1} \colon M_R \to Y_R$.

Piisavus. Olgu M_R unitaarne R-moodul ja kehtigu tingimus lause sõnastusest. Sel juhul on μ_M sürjektiivne. Vaatleme allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
 & & & M_R \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & \\
\{0\} \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & \mathrm{Ker}\,\mu_M \arrow[r, "\iota_{\mathrm{Ker}\,\mu_M}"'] & M \otimes_R R \arrow[r, "\mu_M"'] & M_R \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Siin on alumine rida ilmselt täpne. Lemmast 3.33 teame, et $\mathbf{U}(\mathrm{Ker}\,\mu_M) = \{0\}$. Kasutades eeldust, saame, et leidub homomorfism $g\colon M_R \to M \otimes_R R$

nii, et $\mu_M \circ g = \mathrm{id}_M$. Nüüd, komponeerides homomorfismi g mõlemalt poolt homomorfismiga μ_M, saame

$$\mu_M \circ g \circ \mu_M = \mathrm{id}_M \circ \mu_M = \mu_M = \mu_M \circ \mathrm{id}_{M\otimes R}\,.$$

Kuna μ_M on monomorfism (lemma 3.34), siis $g \circ \mu_M = \mathrm{id}_{M\otimes R}$. Järelikult, μ_M on isomorfism (pöördmorfismiga g) ja M_R on püsiv R-moodul. ■

Märkus 3.41 (Püsivad bimoodulid). Hiljem, rääkides Morita kontekstidest. läheb meil vaja ka püsivaid bimooduleid. Bimoodulite alapeatükis 2.5 mainisime, et tihti öeldakse, et bimoodulil ${}_RM_S$ on omadus P siis kui ühepoolsed moodulid ${}_RM$ ja M_S on omadusega P. Püsivus on üks sellistest omadustest. Nimelt, öeldakse, et (R,S)-bimoodul ${}_RM_S$ on **püsiv** parajasti siis kui vasakpoolne R-moodul ${}_RM$ ja parempoolne S-moodul M_S on mõlemad püsivad. Samas kehtib ka, et kui (R,S)-bimoodul ${}_RM_S$ on püsiv, siis homomorfism $\mathbf{m}_M$ on isomorfism, kus

$$\mathbf{m}_M\colon R\otimes_R M\otimes_S S \to {}_RM_S, \quad \sum_{k=1}^{k^*} r_k\otimes m_k\otimes s_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r_k m_k s_k. \tag{3.13}$$

Homomorfismi $\mathbf{m}_M$ isomorfsus järeldub võrdusest $\mathbf{m}_M = \nu_{{}_RM}\circ(\mathrm{id}_R\otimes\mu_{M_S})$, kus $\nu_{{}_RM}\colon R\otimes_R M \to {}_RM$ ja $\mu_{M_S}\colon M\otimes_S S\to M_S$. Sarnaselt ühepoolsete moodulite juhule, on (R,S)-bimoodul ${}_RM_S$ unitaarne parajasti siis, kui $\mathbf{m}_M$ on sürjektiivne.

Järgnevalt pöörame oma tähelepanu püsivatele ringidele.

Definitsioon 3.42. Ringi R nimetatakse **püsivaks**, kui moodul R_R on püsiv, st kujutus

$$\mu_R\colon\ R\otimes_R R\mapsto R, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} r_k\otimes r'_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r_k r'_k$$

on bijektiivne.

Analoogiliselt püsivate R-moodulite juhuga on selge, et iga püsiv ring R on idempotentne, kuna ringi R idempotentsus on samaväärne kujutuse μ_R sürjektiivsusega. Järgnevalt tõestame lause, mis selgitab püsivate ringide tähtsust ringiteoorias näidates, et püsivad ringid on väga levinud.

Lause 3.43. *Iga vasakult (paremalt) s-unitaalne ring on püsiv.*

TÕESTUS. Olgu R vasakult s-unitaalne ring. Kujutus $\mu_R\colon R\otimes_R R\to R$ on sürjektiivne, kuna iga $r\in R$ on esitatav kujul $r = vr$, mingi $v\in R$ korral, ning $r = vr = \mu_R(v\otimes r)$.

Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes r'_k \in \mathrm{Ker}(\mu_R)$, siis $\sum_{k=1}^{k^*} r_k r'_k = 0$. Teoreemi 2.19 põhjal leidub $v \in R$ nii, et $r_k = vr_k$ iga $k \in \{1, \dots, k^*\}$ korral. Nüüd

$$\sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes r'_k = \sum_{k=1}^{k^*} vr_k \otimes r'_k = \sum_{k=1}^{k^*} v \otimes r_k r'_k = v \otimes \left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k r'_k\right) = v \otimes 0 = 0.$$

Seega $\mathrm{Ker}(\mu_R) = \{0\}$ ning μ_R on injektiivne. Kokkuvõttes on μ_R bijektiivne, mistõttu R on püsiv ring. ■

Nüüdseks oleme defineerinud mitmeid tingimusi, mis on nõrgemad ringis ühikelemendi olemasolust. Täpsemalt oleme saanud järgneva tingimuste hierarhia, mis on esitatud selliselt, et ülevalt alla liikudes liigume alati kitsamalt tingimuselt üldisemale, st et kui ringil R on mõni allpool toodud omadustest, siis on tal ka kõik sellest omadusest allpool olevad omadused:

$$\left.\begin{array}{c} \text{ühikelemendiga ring,} \\ \text{lokaalsete ühikutega ring,} \\ \text{s-unitaalne ring.} \\ \text{vasakult (paremalt) s-unitaalne ring,} \\ \text{püsiv ring,} \\ \text{idempotentne ring,} \\ \text{ring.} \end{array}\right\Downarrow \tag{3.14}$$

Paneme tähele, et ükski neist implikatsioonidest pole pööratav. Ainsana pole me veel näinud idempotentset mitte-püsivat ringi. Sellise ringi konstrueerime järgmises alapeatükis.

Vaatleme veel täpsemalt Abeli rühma $R \otimes_R R$. Tuleb välja, et seda võib vaadelda ringina defineerides korrutamise $\cdot\colon (R \otimes_R R) \times (R \otimes_R R) \to R \otimes_R R$,

$$\left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes r'_k\right) \cdot \left(\sum_{h=1}^{h^*} r''_h \otimes r'''_h\right) \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{h=1}^{h^*} r_k r'_k \otimes r''_h r'''_h. \tag{3.15}$$

Tulenevalt lausetest 3.9 ja 3.10 on $R \otimes_R R$ nii parem- kui ka vasakpoolne R-moodul, mistõttu kujutust μ_R võib vaadelda nii vasak- kui ka parempoolsete R-moodulite homomorfismina. Kujutus (3.15) on korrektselt defineeritud, kuna ta on esitatav homomorfismide tensorkorrutisena $\mu_R \otimes \mu_R$. Assotsiatiivsuse tingimuse R5 kehtivust kontrollime elementaartensoritel. Nimelt, iga $r, r', s, s', t, t' \in R$ korral

$$\begin{aligned} ((r \otimes r') \cdot (s \otimes s')) \cdot (t \otimes t') &= (rr' \otimes ss') \cdot (t \otimes t') = rr'ss' \otimes tt' = rr' \otimes ss'tt' \\ &= (r \otimes r') \cdot (ss' \otimes tt') = (r \otimes r') \cdot ((s \otimes s') \cdot (t \otimes t')). \end{aligned}$$

Tingimuse R6 kehtivus tuleb lause 3.18 tingimustest 1 ja 2 võttes $f = f' = g = g' = \mu_R$. Kokkuvõttes näeme, et $R \otimes_R R$ on ring korrutamisega (3.15). On lihtne näha, et vaadeldes tensorkorrutist $R \otimes_R R$ ringina eespool kirjeldatud viisil, on μ_R ringide homomorfism. Näeme, et analoogiliselt saame suvalist tensorkorrutist kujul $R \otimes_R R \otimes_R \ldots \otimes_R R$ vaadelda ringina.

Kokkuvõttes võime öelda, et ring R on püsiv, kui μ_R on isomorfism kategoorias Ab, Set, ${}_R\mathsf{Mod}$, Mod_R, ${}_R\mathsf{Mod}_R$ või Rng.

Märgime, et kui R on püsiv ring, siis võib iga (parempoolset) R-moodulit M_R vaadelda (parempoolse) $(R \otimes_R R)$-moodulina defineerides iga $m \in M$ ja $\sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes r'_k \in R \otimes_R R$ korral

$$m\left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes r'_k\right) = m\,\mu_R\left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes r'_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} m r_k r'_k$$

(vt näide 2.10).

Nüüd oleme valmis tooma näite, millest näeme, et mooduli unitaarsus on tõepoolest nõrgem tingimus kui püsivus. Antud näide on võetud Caenepeeli ja Grandjeani artiklist [23] (näide 1.2).

Näide 3.44 (Unitaarne mitte-püsiv moodul). Olgu $R := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$. Defineerime hulgal R liitmise komponenthaaval ja korrutamise võrdusega

$$(\overline{z_1}, a_1)(\overline{z_2}, a_2) := (a_1\overline{z_2}, a_1 a_2).$$

Selliste tehetega on R idempotentne ring, kuna kehtib

$$(\overline{0}, 1)(\overline{z}, a) = (1\overline{z}, 1a) = (\overline{z}, a),$$

kus $(\overline{z}, a) \in R$. Järelikult on R_R unitaarne moodul.

Fikseerime elemendi $c = (\overline{0}, 2) \in R$. Vaatleme parempoolset ideaali

$$cR = \{(\overline{0}, 2b) \mid b \in \mathbb{Z}\} \cong 2\mathbb{Z}$$

kui parempoolset R-moodulit. Paneme tähele, et suvalise $(\overline{0}, 2b) \in cR$ korral

$$(\overline{0}, 2b) = (\overline{0}, 2)(\overline{0}, b) = c(\overline{0}, b) = c(\overline{0}, 1)(\overline{0}, b) \in (cR)R,$$

mistõttu cR on unitaarne R-moodul.

Vaatleme tensorit $(\overline{0}, 2) \otimes (\overline{1}, 0) \in cR \otimes_R R$. Ilmselt kehtib

$$\mu_{cR}((\overline{0}, 2) \otimes (\overline{1}, 0)) = (\overline{0}, 2)(\overline{1}, 0) = (\overline{0}, 0).$$

Defineerime kujutuse

$$f\colon\ cR \times R \to \mathbb{Z}_2, \qquad ((\overline{0}, 2b), (\overline{z}, a)) \mapsto b\overline{z}.$$

Paneme tähele, et iga $(\overline{0},2b),(\overline{0},2b')\in cR$ ja $(\overline{z},a),(\overline{z'},a')\in R$ korral

$$\begin{aligned}
f((\overline{0},2b)+(\overline{0},2b'),(\overline{z},a)) &= f((\overline{0},2(b+b')),(\overline{z},a)) = (b+b')\overline{z} = b\overline{z}+b'\overline{z},\\
f((\overline{0},2b),(\overline{z},a)+(\overline{z'},a')) &= f((\overline{0},2b),(\overline{z}+\overline{z'},a+a')) = b(\overline{z}+\overline{z'}) = b\overline{z}+b\overline{z'},\\
f((\overline{0},2b)(\overline{z'},a'),(\overline{z},a)) &= f((0,2ba'),(\overline{z},a)) = ba'\overline{z} = f((\overline{0},2b),(a'\overline{z},a'a))\\
&= f((\overline{0},2b),(\overline{z'},a')(\overline{z},a)),
\end{aligned}$$

mistõttu f on R-tasakaalustatud. Tensorkorrutise universaalomadusest saame, et

$$\overline{f}\colon\ cR\otimes_R R\to\mathbb{Z}_2,\qquad \sum_{k=1}^{k^*}(\overline{0},2b_k)\otimes(\overline{z_k},a_k)\mapsto\sum_{k=1}^{k^*}b_k\overline{z_k}$$

on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Nüüd

$$\overline{f}((\overline{0},2)\otimes(\overline{1},0)) = 1\cdot\overline{1} = \overline{1}\neq\overline{0}.$$

Seega ei ole $(\overline{0},2)\otimes(\overline{1},0)$ Abeli rühma $cR\otimes_R R$ nullelement, kuna iga Abeli rühmade homomorfism viib nullelemendi nullelemendiks. See aga tähendab, et μ_{cR} ei ole injektiivne, kuna $(\overline{0},2)\otimes(\overline{1},0)\in\operatorname{Ker}\mu_{cR}$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et cR on unitaarne, kuid mitte püsiv, R-moodul. □

Esimeses peatükis on kirjutatud, et monomorfismid on väga lähedalt seotud injektiivsusega. Nimelt, igas kategoorias kehtib lause 1.9. Veel nägime, et moodulite kategoorias Mod_R on monomorfismid parajasti injektiivsed homomorfismid (lause 2.60). Näide 3.44 annab aga võimaluse konstrueerida unitaarsete moodulite kategoorias UMod_R mitte-injektiivse monomorfismi. See konstruktsioon on järgmises näites läbi tehtud.

Näide 3.45 (Mitte-injektiivne monomorfism). Vaatleme veelkord ringi $R:=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}$ eelmisest näitest. Teame, et $M_R=(\overline{0},2)R$ on unitaarne aga mitte-püsiv parempoolne R-moodul. Kuna M_R on unitaarne, siis on μ_R sürjektiivne. Samas teame, et μ_M pole isomorfism. Seetõttu ei saa μ_M olla injektiivne. Lemmast 3.34 teame aga, et μ_M on monomorfism. Seega peab μ_M olema mitte-injektiivne monomorfism kategoorias UMod_R. Siit järeldame, et kategoorias UMod_R leidub mitte-injektiivseid monomorfisme.

Kuna μ_M on sürjektiivne, siis tänu lausele 1.9 on ta ka epimorfism. Seega, kategoorias UMod_R leidub ka morfisme, mis on monomorfismid ja epimorfismid, kuid pole isomorfismid. □

Viimase tähelepanekuna moodulite tensorkorrutise kohta toome näite, millest järeldub, et alammoodulite tensorkorrutistega tuleb olla ettevaatlik.

Näide 3.46 (Alammoodulite tensorkorrutis). Olgu $n > 1$ naturaalarv. Vaatleme Abeli rühmasid $(\mathbb{Z}_n; +)$ ja $(\mathbb{Q}; +)$ $\mathbb{Z}$-moodulitena (vastavalt näitele 2.7 (3)). Analoogiliselt näitega 3.17 pole siin vaja eristada vasak- või parempoolseid $\mathbb{Z}$-mooduleid. On selge, et $\mathbb{Z}$-moodul $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ on $\mathbb{Z}$-mooduli $\mathbb{Q}_\mathbb{Z}$ alammoodul. Samas kehtivad

$$\mathbb{Z}_n \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n, \tag{3.16}$$

$$\mathbb{Z}_n \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = \{0\}. \tag{3.17}$$

Isomorfsus (3.16) kehtib tulenevalt näitest 3.36, kuna $\mathbb{Z}$-moodul $(\mathbb{Z}_n)_\mathbb{Z}$ on püsiv. Teisalt, iga $\overline{z} \in \mathbb{Z}_n$ ja $q \in \mathbb{Q}$ korral,

$$\overline{z} \otimes q = \overline{z} \otimes 1q = \overline{z} \otimes (nn^{-1})q = \overline{z} \otimes n(n^{-1}q) = \overline{z}n \otimes \frac{q}{n} = \overline{0} \otimes \frac{q}{n} = 0,$$

mis tõestabki võrduse (3.17). □

Näitest 3.46 näeme, et sisalduvustest $M_R \subseteq M'_R$ ja ${}_RN \subseteq {}_RN'$ ei saa üldiselt teha mingeid järeldusi tensorkorrutiste $M \otimes_R N$ ja $M' \otimes_R N'$ omavahelise sisalduvuse kohta.

3.6 Idempotentne mitte-püsiv ring

Selles alapeatükis konstrueerime ringi, mis on idempotentne, kuid pole püsiv. Selleks on meil vaja kõigepealt tutvuda mõne mõistega poolrühmateooriast.

Poolrühmadega seotud mõisteid

Selles alapeatükis defineerime polügoonid üle poolrühma ning tutvume vajalike mõistetega, et saaksime defineerida püsivad polügoonid. Polügoonidest üle monoidide võib eesti keeles lugeda pikemalt raamatust [6] (peatükk 7).

Definitsioon 3.47. Olgu G poolrühm. Paari $(A; \cdot)$ nimetatakse **parempoolseks G-polügooniks**, kui A on hulk ja $\cdot \colon A \times G \to A$ on kujutus, mis rahuldab omadust

$$\forall a \in A\, \forall g, g' \in G \colon \quad (a \cdot g) \cdot g' = a \cdot (gg').$$

Nagu näha, siis on G-polügoonid R-moodulite analoogid poolrühmateoorias. Kuid kuna poolrühmas pole Abeli rühma struktuuri, on polügooni definitsioonis palju vähem tingimusi kui mooduli omas.

Sarnaselt moodulite juhule, tähistame G-polügooni $(A; \cdot)$ tavaliselt sümboliga A_G ning lühendame $ag := a \cdot g$. Samuti nimetame kujutust $\cdot$ **(parempoolseks) G-toimeks** hulgal A.

Mainime, et kui H on monoid, siis nõutakse tavaliselt, et parempoolne H-polügoon A_H rahuldaks täiendavalt tingimust

$$\forall a \in A\colon \quad a1 = a. \tag{3.18}$$

Meie aga seda tingimust ei nõua. (Vajadusel nimetame M-polügoone, milles (3.18) kehtib, „klassikalisteks".) Sarnaselt moodulite juhule saame sellest olukorrast üle rääkides ka üle monoidi vaadeldavate polügoonide korral unitaarsetest polügoonidest. Nimelt, G-polügooni A_G, kus G on poolrühm, nimetatakse **unitaarseks**, kui iga $a \in A$ korral leiduvad elemendid $a' \in A$ ja $g \in G$ nii, et $a = a'g$. Samuti kehtib lausega 2.13 analoogiline lause unitaarsete polügoonide jaoks.

Märgime, et poolrühma G nimetatakse **faktoriseeruvaks**[6], kui polügoon G_G on unitaarne, st iga $g \in G$ korral leiduvad $g', g'' \in G$ nii, et $g = g'g''$.

Duaalselt parempoolsele G-polügoonile, defineeritakse ka **vasakpoolne G-polügoon $_GA$** kui hulk koos teatud kujutusega $G \times A \to A$. Olgu G ja H poolrühmad. Kolmikut $(A; \cdot_G, \cdot_H)$ nimetatakse **(G,H)-bipolügooniks $_GA_H$**, kui $_GA = (A; \cdot_G)$ on vasakpoolne G-polügoon, $A_H = (A; \cdot_H)$ on parempoolne H-polügoon ning iga $g \in G$, $a \in A$ ja $h \in H$ korral kehtib

$$(g \cdot_G a) \cdot_H h = g \cdot_G (a \cdot_H h).$$

Olgu A_G ja B_G parempoolsed G-polügoonid. Kujutust $f\colon A \to B$ nimetatakse **G-polügoonide homomorfismiks**, kui iga $a \in A$ ja $g \in G$ korral kehtib

$$f(ag) = f(a)g.$$

Analoogiliselt defineeritakse ka vasakpoolsete polügoonide ja ka bipolügoonide homomorfismid.[7]

Järgmisena vaatleme G-polügoonide tensorkorrutise mõistet.

[6]Alternatiivselt võib öelda, et poolrühm G on *faktoriseeruv*, kui kehtib $GG = G$, kus $GG = \{gg' \mid g, g' \in G\}$. Seetõttu võiks analoogiliselt ringiteooriaga nimetada faktoriseeruvat poolrühma idempotentseks. Seda aga ei tehta, kuna *idempotentseks poolrühmaks* nimetatakse tavaliselt poolrühma G, kus iga elemendi $g \in G$ korral kehtib $gg = g$.

[7]Märgime, et parempoolsed G-polügoonid moodustavad kategooria, mille morfismideks on parempoolsete G-polügoonide homomorfismid. Seda kategooriat tähistatakse tavaliselt Act_G. Analoogiliselt leiduvad ka vasakpoolsete G-polügoonide ja (G,H)-bipolügoonide kategooriad $_G\mathsf{Act}$ ja $_G\mathsf{Act}_H$. Siinkohal peaks lugejale selge olema, et polügoonide teooria on väga sarnane moodulite teooriaga. Siiski on ka nende teooriate vahel mitmeid märkimisväärseid erinevusi, kuid kahjuks käesolevas raamatus neid vaadelda pole võimalik.

Definitsioon 3.48. Olgu G poolrühm, A_G parempoolne G-polügoon ja ${}_GB$ vasakpoolne G-polügoon. Olgu $\vartheta \subseteq (A \times B)^2$ vähim ekvivalentsiseos, mis sisaldab hulka

$$\{((ag, b), (a, gb)) \mid a \in A, b \in B, g \in G\}.$$

Polügoonide A_G ja ${}_GB$ **tensorkorrutiseks** nimetatakse faktorhulka

$$A \otimes_G B := (A \times B)/\vartheta.$$

Sarnaselt moodulite tensorkorrutisele nimetame polügoonide tensorkorrutise $A \otimes_G B$ elemente **tensoriteks**[8] ning tähistame $a \otimes b := [(a, b)]$, kus $a \in A$ ja $b \in B$. Polügoonide tensorkorrutise tähtsaim omadus on, et iga $a \in A$, $b \in B$ ja $g \in G$ korral kehtib

$$ag \otimes b = a \otimes gb.$$

Eelnev omadus on polügoonide tensorkorrutise analoog lausele 3.6.[9]

Mainime, et erinevalt moodulite tensorkorrutisest saame polügoonide tensorkorrutises anda mõistlikult lihtsa kirjelduse, millal kaks tensorit on võrdsed. Selleks on aga vaja meenutada välise ühikelemendiga poolrühma $G^{\mathbf{1}} = G \sqcup \{\mathbf{1}\}$ näitest 1.12 (4). Paneme tähele, et iga G-polügooni A_G võib vaadelda „klassikalise“ $G^{\mathbf{1}}$-polügoonina $A_{G^{\mathbf{1}}}$, kui defineerida iga $a \in A$ ja $g \in G^{\mathbf{1}}$ korral

$$a \cdot g = \begin{cases} ag, & g \in G, \\ a, & g = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Lause 3.49 (lemma 7.5.2 raamatus [6]). *Olgu G poolrühm, A_G parempoolne ja ${}_GB$ vasakpoolne G-polügoon. Siis*

$$a \otimes b = a' \otimes b',$$

[8]Paneme tähele, et polügoonide tensorkorrutise $A \otimes_G B$ kõik elemendid on kujul $a \otimes b$, kus $a \in A$ ja $b \in B$. Seepärast pole polügoonide tensorkorrutise juures mõtet eraldi rääkida „elementaartensoritest“, kuna kõik tensorid on „elementaartensorid.“

[9]Mainime, et ka polügoonide tensorkorrutise võib üles ehitada analoogiliselt moodulite tensorkorrutisega alustades universaalomadusest. Selle lähenemise eelis on, et sealt paistab hõlpsasti, et nii polügoonide kui ka moodulite tensorkorrutis on üldisema kategooriateoreetilise konstruktsiooni erijuhud. Kuid kuna meil seda tähelepanekut vaja ei lähe ning polügoonide tensorkorrutise konstruktsioon on väga lihtne, siis me piirdume praegu sellega. (Polügoonide tensorkorrutise universaalomadus on toodud lisas B, kus vaatleme toda üldisemat kategooriateoreetilist konstruktsiooni.)

kus $a, a' \in A$ *ja* $b, b' \in B$ *parajasti siis, kui leiduvad elemendid* $g_1, \ldots, g_n$*,* $h_1, \ldots, h_n \in G^{\mathbf{1}}$*,* $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ *ja* $b_1, \ldots, b_n \in B$ *nii, et*

$$\begin{aligned} & & g_1 b_1 &= b, \\ a g_1 &= a_1 h_1, & g_2 b_2 &= h_1 b_1, \\ a_1 g_2 &= a_2 h_1, & g_3 b_3 &= h_2 b_2, \\ &\ldots & &\ldots \\ a_{n-1} g_n &= a' h_n, & b' &= h_n b_n. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Märgime, et kui G, H ja K on poolrühmad ning ${}_GA_H$ ja ${}_HB_K$ vastavalt (G, H)- ja (H, K)-bipolügoonid, siis, analoogiliselt lausega 3.9 ja täpsemalt järeldusega 3.11, saab tensorkorrutist $A \otimes_H B$ vaadelda (G, K)-bipolügoonina, kus G- ja H-toimed on defineeritud võrdustega

$$g(a \otimes b) := (ga) \otimes b \qquad \text{ja} \qquad (a \otimes b)k := a \otimes (bk) \tag{3.20}$$

suvaliste $g \in G$, $k \in K$ ja $a \otimes b \in A \otimes_H B$ korral. On selge, et kui vaid üks polügoonidest A ja B on bipolügoon, siis saab tensorkorrutist $A \otimes_H B$ vaadelda vaid ühepoolse polügoonina.

Ka polügoonide tensorkorrutisega on seotud kujutused, mida nimetatakse tasakaalustatuks. Kuna aga siin pole Abeli rühma struktuuri, on poolrühmade tasakaalustatud kujutuse definitsioon palju lihtsam ringide omast.

Definitsioon 3.50. Olgu G poolrühm, X hulk ning A_G ja ${}_GB$ G-polügoonid. Kujutust $\beta\colon A \times B \to X$ nimetatakse **G-tasakaalustatuks** (või **G-tensoriaalseks**), kui kehtib tingimus

$$\forall a \in A\, \forall b \in B\, \forall g \in G\colon \quad \beta(ag, b) = \beta(a, gb).$$

Paneme tähele, et sarnaselt moodulite juhule, saab iga poolrühma G vaadelda kui (vasak- või) parempoolset G-polügooni G_G (${}_GG$), kus polügooni toimeks on poolrühma G tehe.

Definitsioon 3.51. Olgu G poolrühm ja A_G G-polügoon. Polügooni A_G nimetatakse **püsivaks** kui kujutus

$$\mu_A\colon A \otimes_G G \to A, \qquad a \otimes g \mapsto ag$$

on bijektiivne.

Veendume, et kujutus μ_A eelnevast definitsioonist on korrektselt defineeritud. Selleks valime $a \otimes g, a' \otimes g' \in A \otimes_G G$ nii, et $a \otimes g = a' \otimes g'$. Lausest

3.49 teame, siis, et leiduvad $h_1, h_1', \ldots, h_n, h_n' \in G^1$, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ ja $g_1, \ldots, g_n \in G$ nii, et

$$\begin{aligned} & & h_1 g_1 &= g, \\ a h_1 &= a_1 h_1', & h_2 g_2 &= h_1' g_1, \\ &\ldots & &\ldots \\ a_{n-1} h_n &= a' h_n', & g' &= h_n' g_n. \end{aligned}$$

Nüüd paneme tähele, et

$$ag = ah_1 g_1 = a_1 h_1' g_1 = a_1 h_2 g_2 = \ldots = a_{n-1} h_n g_n = a' h_n' g_n = a' g'.$$

Siit näeme, et μ_A on korrektselt defineeritud kujutus.

On lihtne näha, et iga G-polügooni A_G korral on μ_A tegelikult G-polügoonide homomorfism. Märgime, et poolrühma G nimetatakse **püsivaks**, kui G-polügoon G_G on püsiv.

Poolrühmaringid

Järgnevalt tutvume poolrühmaringi konstruktsiooniga. See konstruktsioon annab võimaluse, kuidas segada kokku ring ja poolrühm saades uue ringi. Analoogilist konstruktsiooni monoidide ja ühikelementidega ringide jaoks on vaadeldud raamatus [56] (paragrahv 5.3).

Definitsioon 3.52. Olgu G (multiplikatiivne) poolrühm ja R ring. Tähistame

$$R[G] := \{f \colon G \to R \mid f(g) \neq 0 \text{ lõpliku arvu elementide } g \in G \text{ korral}\}.$$

Defineerime hulgal $R[G]$ liitmise ja korrutamise:

$$\begin{aligned} (f+h)(g) &:= f(g) + h(g), \\ (f \cdot h)(g) &:= \sum_{g_1 g_2 = g} f(g_1) h(g_2). \end{aligned}$$

Osutub, et nende tehetega on $R[G]$ ring. Ringi $(R[G]; +, \cdot)$ nimetatakse poolrühma G **poolrühmaringiks** üle ringi R.

Järgnevalt näitame, et poolrühmaringi $R[G]$ elementidele on võimalik anda lihtsam kuju. Olgu $f \in R[G]$. Tähistame iga $g \in G$ korral $f_g := f(g) \in R$. Nüüd tähistame elemendi f (formaalse) summana

$$f =: \sum_{g \in G} f_g g. \tag{3.21}$$

Paneme tähele, et eelnev summa koosneb lõplikust arvust nullist erinevatest liidetavatest, kuna vastavalt definitsioonile on kordajad f_g nullist erinevad vaid lõpliku arvu elementide $g \in G$ korral. Kusjuures, kui G on lõplik poolrühm, siis on summas (3.21) ülimalt $\#(G)$ nullist erinevat liidetavat.[10] Liitmine ja korrutamine ringis $R[G]$ toimuvad sarnaselt tavalisele hulkliikmete liitmisele ja korrutamisele, st

$$f + h = \sum_{g \in G} (f_g + h_g) g,$$
$$f \cdot h = \sum_{g,x \in G} f_g h_x g x.$$

Edaspidi eeldame üldiselt, et poolrühmaringi $R[G]$ elemendid on alati antud kujul (3.21), st hulk $R[G]$ koosneb kõikvõimalikest lõplikest summadest, mille iga liidetav on kujul rg, kus $r \in R$ ja $g \in G$ (kusjuures igas summas vastab igale elemendile $g \in G$ ülimalt üks liidetav) ning n-ö tühjast summast, mida tähistame sümboliga 0 ja mis vastab nullkujutusele $\mathbf{0}\colon G \to R$. Element 0 on ringi $R[G]$ nullelement. Märgime, et iga elemendi $f \in R[G]$ esitus kujul (3.21) on ühene.

Paneme tähele, et kui R ja G on lõplikud, siis ka $R[G]$ on lõplik ning kehtib valem

$$\#(R[G]) = \#(R)^{\#(G)}. \tag{3.22}$$

Mainime, et iga poolrühmaringi $R[G]$ korral leidub ringide homomorfism

$$\eta\colon R[G] \to R, \qquad \sum_{g \in G} r_g g \mapsto \sum_{g \in G} r_g,$$

mida nimetatakse poolrühmaringi $R[G]$ **augmentatsiooniks**.

Järgnevalt tõestame lause, mis muuhulgas ütleb, et poolrühmaringi konstruktsioon säilitab ringi idempotentsust.

Lause 3.53. *Olgu G faktoriseeruv poolrühm. Ring R on idempotentne parajasti siis, kui ring $R[G]$ on idempotentne.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu G faktoriseeruv poolrühm ja R idempotentne ring. Valime $f = \sum_{g \in G} f_g g \in R[G]$. Olgu $\tilde{G}$ see lõplik hulk, mis koosneb sellistest elementidest $g \in G$, mille korral $f_g \neq 0$. Tulenevalt ringi R

[10] Lugeja võib panna tähele, et poolrühmaringi elementidel on sarnasus polünoomidega, ainult, et muutujate asemel on poolrühma G elemendid. Veelgi täpsemalt: polünoomide ring $R[X]$ on vaba monoidi $\{1, X, X^2, \ldots\}$ (siin on korrutamine defineeritud valemiga $X^k X^h = X^{k+h}$) poolrühmaring üle ringi R. (vt lisa A näide A.6 (2))

idempotentsusest leiduvad iga $g \in \tilde{G}$ korral $r_{g1}, r'_{g1}, \ldots, r_{gk^*}, r'_{gk^*} \in R$ nii, et $f_g = r_{g1}r'_{g1} + \ldots + r_{gk^*}r'_{gk^*}$ (vajadusel lisame nulliga võrdseid liidetavaid, et saada kõigile summadele võrdne lõppindeks k^*). Tulenevalt poolrühma G faktoriseeruvusest leiduvad $g', g'' \in G$ nii, et $g = g'g''$, iga $g \in G$ korral. Nüüd

$$f = \sum_{g \in G} f_g g = \sum_{g \in \tilde{G}} f_g g = \sum_{g \in \tilde{G}} \sum_{k=1}^{k^*} r_{gk} r'_{gk} (g'g'') = \sum_{g \in \tilde{G}} \sum_{k=1}^{k^*} (r_{gk} g') \cdot (r'_{gk} g'').$$

Kokkuvõttes näeme, et $R[G]$ on idempotentne ring.[11]

Piisavus. Olgu G faktoriseeruv poolrühm ja $R[G]$ idempotentne ring. Valime elemendi $r \in R$ ja $g' \in G$. Tulenevalt ringi $R[G]$ idempotentsusest leiduvad $f_1, h_1, \ldots, f_{k^*}, h_{k^*} \in R[G]$ nii, et

$$rg' = \sum_{k=1}^{k^*} f_k \cdot h_k = \sum_{k=1}^{k^*} \left(\sum_{g \in G} f_{kg} g \right) \cdot \left(\sum_{x \in G} h_{kx} x \right) = \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{g,x \in G} f_{kg} h_{kx} gx,$$

kus iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral $f_k = \sum_{g \in G} f_{kg} g$ ja $h_k = \sum_{x \in G} h_{kx} x$. Nüüd

$$r = \eta(rg') = \eta \left(\sum_{k=1}^{k^*} \sum_{g,x \in G} f_{kg} h_{kx} gx \right) = \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{g,x \in G} \eta(f_{kg} h_{kx} gx) = \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{g,x \in G} f_{kg} h_{kx},$$

mistõttu $r \in RR$ ning ring R on idempotentne. ■

Toome nüüd ühe näite poolrühmaringidest. Valemist (3.22) teame, et poolrühmaringis on tavaliselt väga palju elemente, seega valime väga väikese ringi ja poolrühma, et saada mõistliku suurusega – kuid mittetriviaalne – näide.

Näide 3.54 (Poolrühmaring). Vaatleme ringi $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ ja poolrühma $G = \{x, y, z\}$, mille tehe on antud Cayley[12] tabeliga:

G	x	y	z
x	x	x	x
y	y	y	y
z	x	y	z

.

[11] Märgime, et summa $\sum_{g \in \tilde{G}} \sum_{k=1}^{k^*} (r_{gk} g') \cdot (r'_{gk} g'')$ ei ole üldiselt kujul (3.21). Kujule (3.21) viimiseks oleks vaja koondada kõik poolrühma igale elemendile $g \in G$ vastavad kordajad. Kuna aga iga elemendi kuju (3.21) on ühene, siis selle korrastuse lõpuks oleme saanud esialgse summa $\sum_{g \in G} f_g g$.

[12] Arthur Cayley (1821 – 1895) – briti matemaatik. (Loeme Cayley tabelit nii, et esimene operand tuleb reast ja teine operand veerust. Näiteks käesolevas tabelis $yx = y$.)

Poolrühmaringi $\mathbb{Z}_3[G]$ elementide kirjutamisel teeme lühiduse huvides järgmise kokkuleppe, mida selgitame näite varal: elementi $\overline{0}x+\overline{1}y+\overline{2}z =: y+\overline{2}z$ ning nullelementi tähistame lihtsalt $0 := \overline{0}x+\overline{0}y+\overline{0}z$. Valemist 3.22 teame, et poolrühmaringis $\mathbb{Z}_3[G]$ on 27 elementi:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_3[G] = \{&0,\ x,\ y,\ z,\ \overline{2}x,\ \overline{2}y,\ \overline{2}z,\ x+y,\ x+z,\ y+z,\ \overline{2}x+y,\ \overline{2}x+z,\ \overline{2}y+z,\\ &x+\overline{2}y,\ x+\overline{2}z,\ y+\overline{2}z,\ \overline{2}x+\overline{2}y,\ \overline{2}x+\overline{2}z,\ \overline{2}y+\overline{2}z,\\ &x+y+z,\ x+\overline{2}y+z,\ x+y+\overline{2}z,\ \overline{2}x+y+z,\ \overline{2}x+\overline{2}y+z,\\ &\overline{2}x+y+\overline{2}z,\ x+\overline{2}y+\overline{2}z,\ \overline{2}x+\overline{2}y+\overline{2}z\}.\end{aligned}$$

Toome mõned näited, kuidas ringis $\mathbb{Z}_3[G]$ käivad liitmine ja korrutamine:

$$\begin{aligned}x+(\overline{2}y) &= x+\overline{2}y,\\ (x+y)+(\overline{2}x+z) &= (\overline{1}+\overline{2})x+y+z = y+z,\\ (y+\overline{2}z)+(\overline{2}x+y+z) &= \overline{2}x+(\overline{1}+\overline{1})y+(\overline{2}+\overline{1})z = \overline{2}+\overline{2}y,\\ (x+\overline{2}y+\overline{2}z)+(\overline{2}x+\overline{2}y+\overline{2}z) &= (\overline{1}+\overline{2})x+(\overline{2}+\overline{2})y+(\overline{2}+\overline{2})z = y+z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\cdot(\overline{2}y) &= \overline{2}(xy) = \overline{2}x,\\ (x+y)\cdot(\overline{2}x+z) &= \overline{2}(xx)+xz+\overline{2}(yx)+yz = \overline{2}x+x+\overline{2}y+y\\ &= (\overline{2}+\overline{1})x+(\overline{2}+\overline{1})y = 0,\\ (y+\overline{2}z)\cdot(\overline{2}x+y+z) &= \overline{2}(yx)+yy+yz+(\overline{2}\cdot\overline{2})(zx)+\overline{2}(zy)+\overline{2}(zz)\\ &= \overline{2}y+y+y+\overline{1}x+\overline{2}y+\overline{2}z = x+\overline{2}z,\\ (x+\overline{2}y+\overline{2}z)\cdot(\overline{2}x+\overline{2}y+\overline{2}z) &= \overline{2}(xx)+\overline{2}(xy)+\overline{2}(xz)+(\overline{2}\cdot\overline{2})(yx)\\ &\quad+(\overline{2}\cdot\overline{2})(yy)+(\overline{2}\cdot\overline{2})(yz)+(\overline{2}\cdot\overline{2})(zx)\\ &\quad+(\overline{2}\cdot\overline{2})(zy)+(\overline{2}\cdot\overline{2})(zz)\\ &= \overline{2}x+\overline{2}x+\overline{2}x+y+y+y+x+y+z =\\ &= x+y+z.\end{aligned}$$

Nüüd peaks arusaadav olema, kuidas poolrühmaringis aritmeetika käib. Eelnevast on näha, et poolrühmaring ei pruugi pärida oma aluseks oleva ringi kõiki häid omadusi. Näiteks ringis $\mathbb{Z}_3[G]$ leidub nullitegureid, kuigi $\mathbb{Z}_3$ on korpus. □

Poolrühmaringide teema lõpetuseks tõestame lemma, mida vajame hiljem idempotentse mitte-püsiva ringi konstrueerimisel.

Lemma 3.55. *Olgu G, H poolrühmad, $\varphi\colon G\times G\to H$ G-tasakaalustatud kujutus ning R ring. Sel juhul leidub $R[G]$-tasakaalustatud kujutus*

$$\tilde{\varphi}\colon R[G]\times R[G]\to R[H],\quad \left(\sum_{g\in G} r_g g, \sum_{g'\in G} r'_{g'}g'\right)\mapsto \sum_{(g,g')\in G\times G} r_g r'_{g'}\varphi(g,g').$$

TÕESTUS. Kehtigu lemma eeldused. Paneme tähele, et kujutus $\tilde{\varphi}$ on korrektselt defineeritud, kuna iga elemendi $f \in R[G]$ esitus summana on ühene. Paneme tähele, et iga $\sum_{g\in G} r_g g, \sum_{g\in G} r'_g g, \sum_{x\in G} s_x x, \sum_{y\in G} t_y y \in R[G]$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}\left(\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} r'_g g, \sum_{x\in G} s_x x\right) = \tilde{\varphi}\left(\sum_{g\in G}(r_g + r'_g)g, \sum_{x\in G} s_x x\right)\\
&\quad= \sum_{(g,x)\in G\times G} (r_g + r'_g)s_x\varphi(g,x) = \sum_{(g,x)\in G\times G} r_g s_x \varphi(g,x) + \sum_{(g,x)\in G\times G} r'_g s_x\varphi(g,x)\\
&\quad= \tilde{\varphi}\left(\sum_{g\in G} r_g g, \sum_{x\in G} s_x x\right) + \tilde{\varphi}\left(\sum_{g\in G} r'_g g, \sum_{x\in G} s_x x\right);\\
&\tilde{\varphi}\left(\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\cdot\left(\sum_{y\in G} t_y y\right), \sum_{x\in G} s_x x\right) = \tilde{\varphi}\left(\sum_{g,y\in G} r_g t_y gy, \sum_{x\in G} s_x x\right)\\
&\quad= \sum_{g,y,x\in G} (r_g t_y)s_x\varphi(gy,x) = \sum_{g,y,x\in G} r_g(t_y s_x)\varphi(g,yx)\\
&\quad= \tilde{\varphi}\left(\left(\sum_{g\in G} r_g g\right), \left(\sum_{y\in G} t_y y\right)\cdot\left(\sum_{x\in G} s_x x\right)\right)
\end{aligned}$$

ning analoogiliselt $\tilde{\varphi}(f, f' + f'') = \tilde{\varphi}(f, f') + \tilde{\varphi}(f, f'')$, kus $f, f', f'' \in R[G]$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\tilde{\varphi}$ on tõepoolest $R[G]$-tasakaalustatud. ■

Pikalt lubatud näide

Nüüd oleme lõpuks valmis esitama näite ringist, mis on idempotentne, kuid mitte püsiv. Selle näite leidis Ülo Reimaa.

Näide 3.56 (Idempotentne mitte-püsiv ring). Vaatleme kahte poolrühma $S = \{z, a, b, e\}$ ja $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, mille Cayley tabelid on

S	z	a	b	e
z	z	z	z	z
a	z	z	z	z
b	z	z	z	b
e	z	a	z	e

ja

B	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	2	1
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	3	4

.

Paneme tähele, et poolrühm S ei ole püsiv, kuna $b \otimes a = \{(b, a)\} \in S \otimes_S S$, mistõttu $b \otimes a \neq z \otimes z$; teisalt aga

$$\mu_S(b \otimes a) = ba = z = zz = \mu_S(z \otimes z).$$

Seega ei saa kujutus μ_S olla injektiivne. Samas, S on faktoriseeruv, kuna $z = zz$, $a = ea$, $b = be$ ja $e = ee$.

Vaatleme nüüd kujutust $\varphi\colon S \times S \to B$, mis on antud järgneva tabeliga:

$$\begin{array}{c|cccc} \varphi & z & a & b & e \\ \hline z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 2 & 0 & 1 \\ e & 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}.$$

Vahetu kontroll annab, et φ on S-tasakaalustatud.

Konstrueerime poolrühmaringid

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_2[S] = \{0, \quad & z, a, b, e, \\ & z+a, z+b, z+b, a+b, a+e, b+e, \\ & z+a+b, z+a+e, z+b+e, a+b+e, \\ & z+a+b+e\} \end{aligned}$$

ja $\mathbb{Z}_2[B]$ (sarnaselt näitega 3.54 kirjutame poolrühmaringi elemente lühemalt, näiteks $\overline{1}z + \overline{1}a + \overline{0}b + \overline{0}e =: z + a$). Vastavalt lemmale 3.55 indutseerib φ kujutuse

$$\tilde{\varphi}\colon\ \mathbb{Z}_2[S] \times \mathbb{Z}_2[S] \to \mathbb{Z}_2[B],$$

mis on $\mathbb{Z}_2[S]$-tasakaalustatud. Nüüd saame moodulite tensorkorrutise universaalomadusest, et leidub korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism

$$\begin{gathered} \overline{\tilde{\varphi}}\colon\ \mathbb{Z}_2[S] \otimes_{\mathbb{Z}_2[S]} \mathbb{Z}_2[S] \to \mathbb{Z}_2[B], \\ \sum_{k=1}^{k^*} \left(\sum_{g \in G} r_{gk} g \right) \otimes \left(\sum_{x \in G} r'_{xk} x \right) \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{(g,x) \in G \times G} r_{gk} r'_{xk} \varphi(g,x). \end{gathered}$$

Paneme tähele, et

$$\overline{\tilde{\varphi}}(b \otimes a) = \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \varphi(b \otimes a) = \overline{1} \cdot 2 = 2 \neq 0 = \overline{1} \cdot 0 = \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \varphi(b \otimes b) = \overline{\tilde{\varphi}}(b \otimes b),$$

mistõttu $b \otimes a \neq b \otimes b$ Abeli rühmas $\mathbb{Z}_2[S] \otimes_{\mathbb{Z}_2[S]} \mathbb{Z}_2[S]$. Teisest küljest

$$\mu_{\mathbb{Z}_2[S]}(b \otimes a) = ba = z = bb = \mu_{\mathbb{Z}_2[S]}(b \otimes b).$$

Järelikult ei ole homomorfism $\mu_{\mathbb{Z}_2[S]}$ injektiivne, mistõttu ei ole ring $\mathbb{Z}_2[S]$ püsiv. Samas, ring $\mathbb{Z}_2[S]$ on idempotentne tulenevalt lausest 3.53.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\mathbb{Z}_2[S]$ on idempotentne, kuid mitte-püsiv ring. $\square$

Peatükk 4

Morita teooria

Ilmselt üks suuremaid algebraalaseid saavutusi viimase saja aasta jooksul on lõplike lihtsate rühmade täielik klassifikatsioon isomorfismiklasside täpsuseni. Lõplike lihtsate rühmade klassifikatsiooni loomisesse panustas üle 100 matemaatiku ning täielikult sai see tõestatud alles 2008. aastal (täpsemalt saab lugeda raamatust [28]). See saavutus andis paljudele algebraistidele lootust, et algebralisi struktuure võiks proovida täielikult kirjeldada. Kahjuks on osutunud, et üldisemate struktuuride – näiteks ringide või rühmade – klassifitseerimine isomorfismi täpsuseni on suhteliselt lootusetu eesmärk. Seetõttu on hakatud panema rõhku isomorfsusseosest nõrgemate seoste uurimisele. Üks sellistest seostest on nn Morita ekvivalentsus, millega tutvume käesolevas peatükis.

Morita teooria on alguse saanud Kiiti Morita[1] 1958. aastal ilmunud olulisest artiklist [43], kus on defineeritud teatav ekvivalentsiseos ühikelemendiga ringide klassil, mida hiljem on hakatud kutsuma Morita ekvivalentsuseks. Kõigepealt võtame kokku klassikalise Morita teooria, see tähendab ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsusega seonduva. Seejärel näitame, miks ühikelemendita ringide Morita ekvivalentsuse defineerimine on mõnevõrra keerulisem ühikelemendiga ringide juhust, et saada mõistlik ekvivalentsuse mõiste. Lõpuks näitame, et kolm loomulikku viisi, kuidas ühikelemendita ringide Morita ekvivalentsust defineerida, langevad kokku idempotentsete ringide korral ning esitame mõningaid tulemusi idempotentsete ringide Morita teooriast. See osa põhineb eeskätt Marín'i[2] ja Garcia[3] töödel.

[1]Kiiti Morita (1915–1995) – jaapani matemaatik.
[2]Leandro Marín Muñoz (1971–2024) – hispaania matemaatik.
[3]José Luis García Hernández – hispaania matemaatik.

4.1 Ühikelemendiga ringide Morita teooria

Käesolevas alapeatükis tutvume nn klassikalise Morita teooriaga, st ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse mõiste ja sellega seonduvaga. Kahjuks on siinne kokkuvõte küllaltki põgus, kuid siiski anname põhilise Morita ekvivalentsuse kirjelduse põhjaliku tõestuse. See alapeatükk põhineb eeskätt A. W. Andersoni ja K. R. Fulleri raamatul [18] (alaptk 21 ja 22) ning T. Y. Lami raamatul [35] (ptk 7).

Alustame ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse definitsioonist.

Definitsioon 4.1. Öeldakse, et kaks ühikelemendiga ringi S ja T on **Morita ekvivalentsed**, kui kehtib kategooriate ekvivalentsus $\mathsf{Mod}^1_S \approx \mathsf{Mod}^1_T$.

Asjaolu, et kaks (ühikelemendiga) ringi S ja T on Morita ekvivalentsed, tähistame $S \approx_{\mathrm{ME}} T$. Ühesõnaga, kaks ühikelemendiga ringi on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui parempoolsete „klassikaliste“ moodulite kategooriad üle nende ringide on ekvivalentsed. Hiljem näeme, et tegelikult ei ole Morita ekvivalentsuse definitsioonis oluline, kas kasutatakse parem- või vasakpoolseid mooduleid.

Tulenevalt lausest 1.22 on selge, et Morita ekvivalentsus on ühikelemendiga ringide klassil ekvivalentsiseos. On selge, et kui S ja T on isomorfsed ringid, siis on nad ka Morita ekvivalentsed. Kusjuures, on võimalik näidata, et kui S ja T on kommutatiivsed, siis nende Morita ekvivalentsusest $S \approx_{\mathrm{ME}} T$ järeldub isomorfsus $S \cong T$ (tõestame hiljem järeldusena 6.28). Siiski, mittekommutatiivsete ringide klassil on Morita ekvivalentsus isomorfsusseosest nõrgem ning seetõttu väärib eraldiseisva mõistena uurimist. Käesoleva raamatu jooksul näeme mitmeid näiteid mitte-isomorfsetest, kuid Morita ekvivalentsetest ringidest.

Kuigi Morita ekvivalentsus on isomorfsusest nõrgem, säilitab ta siiski mitmeid omadusi. Allpool on toodud nimekiri mõnedest sellistest omadustest, kahjuks jääb kõigi nende mõistete defineerimine käesoleva raamatu mahust välja. Selgituseks, kui ringil S on mõni järgnevatest omadustest ja $S \approx_{\mathrm{ME}} T$, siis on ka ring T selle omadusega (taolisi omadusi nimetatakse *Morita invariantideks*):

> (pool)lihtne, von Neumanni mõttes regulaarne, (vasakult või paremalt) Artini[4] ring, (vasakult või paremalt) Noetheri[5] ring, primitiivne, kvaasi-Frobeniuse[6] ring, (pool)algring jpt.[7]

[4]Emil Artin (1898–1962) – austria matemaatik.
[5]Amalie Emmy Noether (1882–1935) – saksa matemaatik.
[6]Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) – saksa matemaatik.
[7]Nende mõistete definitsioonid saab leida raamatutest [18] ja [35].

Kokkuvõttes, kui ring S on teada ja kehtib $S \approx_{\mathrm{ME}} T$, siis saab päris palju öelda ringi T kohta.

Aditiivsed funktorid

Kuigi meie suur eesmärk käesolevas alapeatükis on vaadelda ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsust, vaatleme esialgu moodulite kategooriate ekvivalentsust üle suvaliste ringide. Olgu R ring. Meenutame, et iga $M_R, M'_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ korral on hulk $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ Abeli rühm (tehte (2.6) suhtes).

Näitame, et Morita ekvivalentsust määravad funktorid on aditiivsed. Olgu R ja S ringid ning $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Mod}_R$ ja $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{Mod}_S$ alamkategooriad. Funktorit $\mathbf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ nimetatakse **aditiivseks**, kui iga $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja iga $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A')$ korral kehtib

$$\mathbf{F}(f+g) = \mathbf{F}(f) + \mathbf{F}(g).$$

Samaväärselt võib väita, et funktor $\mathbf{F}$ on aditiivne parajasti siis, kui iga $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on ahend $\mathbf{F}_1^{A,A'}\colon \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, A') \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(A'))$ Abeli rühmade homomorfism.

Tõestame, et iga ekvivalentsifunktor (lõplike otsesummade suhtes kinniste) moodulite kategooriate vahel on aditiivne. Meenutame, et kategooriad CMod_R ja FMod_R on lõplike otsesummade suhtes kinnised (järeldus 2.56 ja lause 3.39).

Teoreem 4.2. *Olgu R ja S ringid ning $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Mod}_R$ ja $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{Mod}_S$ lõplike otsesummade suhtes kinnised alamkategooriad. Kui $\mathbf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on ekvivalentsifunktor, siis $\mathbf{F}$ on aditiivne funktor.*

TÕESTUS. Olgu $\mathbf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ekvivalentsifunktor. Valime $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja vaatleme homomorfisme $f, g\colon A \to A'$. Paneme tähele, et $f+g$ on esitatav kompositsioonina

$$f+g = \nabla_{A'} \circ (f,g) \circ \Delta_A\colon \qquad A \to A \oplus A \to A' \oplus A' \to A', \tag{4.1}$$

kus

$$\begin{aligned} \Delta_A\colon A &\to A \oplus A, & a &\mapsto (a,a), & (4.2)\\ (f,g)\colon A \oplus A &\to A' \oplus A', & (a,b) &\mapsto (f(a), g(b)), & (4.3)\\ \nabla_{A'}\colon A' \oplus A' &\to A', & (a',b') &\mapsto a'+b'. & (4.4) \end{aligned}$$

Mainime, et edaspidi vaatleme analoogilisi kujutusi $\Delta_B\colon B \to B \oplus B$ ja $\nabla_B\colon B \oplus B \to B$, kus B muutub üle mingi moodulite hulga.

Vaatleme allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(A) \arrow[r, "\mathbf{F}(\Delta_A)"] \arrow[dr, "\Delta_{\mathbf{F}(A)}"'] & \mathbf{F}(A \oplus A) \arrow[r, "\mathbf{F}((f,g))"] \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] & \mathbf{F}(A' \oplus A') \arrow[r, "\mathbf{F}(\nabla_{A'})"] \arrow[d, "\beta"', "\cong"] & \mathbf{F}(A') \\
& \mathbf{F}(A) \oplus \mathbf{F}(A) \arrow[r, "(\mathbf{F}(f), \mathbf{F}(g))"'] & \mathbf{F}(A') \oplus \mathbf{F}(A') \arrow[ur, "\nabla_{\mathbf{F}(A')}"'] &
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.1

Isomorfismid α ja β leiduvad tänu lausele 2.53. Paneme tähele, et homomorfismid $(\mathbf{F}(f), \mathbf{F}(g))$ ja (f, g) on üheselt määratud homomorfismid, mis teevad vastavalt diagrammid 4.2 ja 4.3 kommutatiivseks.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(A) \arrow[r, "\mathbf{F}(f)"] & \mathbf{F}(A') \\
\mathbf{F}(A) \oplus \mathbf{F}(A) \arrow[u, "\rho_{\mathbf{F}_1}"] \arrow[d, "\rho_{\mathbf{F}_2}"'] \arrow[r, "(\mathbf{F}(f), \mathbf{F}(g))"] & \mathbf{F}(A') \oplus \mathbf{F}(A') \arrow[u, "\rho_{\mathbf{F}'_1}"'] \arrow[d, "\rho_{\mathbf{F}'_2}"] \\
\mathbf{F}(A) \arrow[r, "\mathbf{F}(g)"'] & \mathbf{F}(A')
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.2

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & A' \\
A \oplus A \arrow[u, "\rho_1"] \arrow[d, "\rho_2"'] \arrow[r, "(f,g)"] & A' \oplus A' \arrow[u, "\rho'_1"'] \arrow[d, "\rho'_2"] \\
A \arrow[r, "g"'] & A'
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.3

Nüüd, kasutades valemeid (2.37), saame

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(f) \circ \rho_{\mathbf{F}_1} &= \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(\rho_1) \circ \alpha^{-1} = \mathbf{F}(f \circ \rho_1) \circ \alpha^{-1} = \mathbf{F}(\rho'_1 \circ (f,g)) \circ \alpha^{-1} \\
&= \mathbf{F}(\rho'_1) \circ \mathbf{F}((f,g)) \circ \alpha^{-1} = \rho_{\mathbf{F}'_1} \circ \beta \circ \mathbf{F}((f,g)) \circ \alpha^{-1}
\end{aligned}$$

ja samuti $\mathbf{F}(g) \circ \rho_{\mathbf{F}_2} = \rho_{\mathbf{F}'_2} \circ \beta \circ \mathbf{F}((f,g)) \circ \alpha^{-1}$. Tänu ühesusele saame siit, et $(\mathbf{F}(f), \mathbf{F}(g)) = \beta \circ \mathbf{F}((f,g)) \circ \alpha^{-1}$. Sellega oleme näidanud, et keskmine ruut diagrammil 4.1 on kommutatiivne.

Järgmisena vaatleme vasakut kolmnurka diagrammil 4.1. Paneme tähele, et iga $a \in A$ korral kehtib

$$(\rho_1 \circ \Delta_A)(a) = \rho_1(a, a) = a = \mathrm{id}_A(a) = (\rho_2 \circ \Delta_A)(a).$$

Seega kehtib $\rho_1 \circ \Delta_A = \mathrm{id}_A = \rho_2 \circ \Delta_A$. Niisamuti kehtib

$$\rho_{\mathbf{F}_1} \circ \Delta_{\mathbf{F}(A)} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(A)} = \mathbf{F}(\mathrm{id}_A) = \mathbf{F}(\rho_1 \circ \Delta_A) = \mathbf{F}(\rho_1) \circ \mathbf{F}(\Delta_A)$$

$$= \rho_{\mathbf{F}_1} \circ \alpha \circ \mathbf{F}(\Delta_A)$$

ja $\rho_{\mathbf{F}_2} \circ \Delta_{\mathbf{F}(A)} = \rho_{\mathbf{F}_2} \circ \alpha \circ \mathbf{F}(\Delta_A)$. Nüüd, tänu ühesuse nõudele universaalomaduses I saame, et $\Delta_{\mathbf{F}(A)} = \alpha \circ \mathbf{F}(\Delta_A)$, mistõttu vasak kolmnurk diagrammis 4.1 on kommutatiivne. Duaalselt on ka parem kolmnurk joonisel 4.1 kommutatiivne. Kokkuvõttes on kogu diagramm joonisel 4.1 kommutatiivne.

Lõpetuseks paneme tähele, et tänu esitusele (4.1) ja diagrammi 4.1 kommutatiivsusele kehtib

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(f+g) &= \mathbf{F}(\nabla_{A'} \circ (f,g) \circ \Delta_A) = \mathbf{F}(\nabla_{A'}) \circ \mathbf{F}((f,g)) \circ \mathbf{F}(\Delta_A)\\ &= \nabla_{\mathbf{F}(A')} \circ (\mathbf{F}(f), \mathbf{F}(g)) \circ \Delta_{\mathbf{F}(A)} = \mathbf{F}(f) + \mathbf{F}(g),\end{aligned}$$

mistõttu näeme, et funktor $\mathbf{F}$ on aditiivne. ■

Märkame, et tänu teoreemile 1.23 saame järgmise järelduse.

Järeldus 4.3. *Olgu R ja S ringid, $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Mod}_R$ ja $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{Mod}_S$ lõplike otsesummade suhtes kinnised alamkategooriad ning $\mathbf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ekvivalentsifunktor. Siis on iga $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral ahend*

$$\mathbf{F}_1^{A,A'} \colon \mathrm{Hom}_R(A, A') \to \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(A'))$$

Abeli rühmade isomorfism. Kusjuures, iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on $(\mathbf{F}_1^{A,A'})_{A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \colon \mathrm{Hom}_R(A, \_) \xrightarrow{\bullet} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(\_))$ loomulik isomorfism.

TÕESTUS. Teoreemist 1.23 teame, et iga paari $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on kujutus $\mathbf{F}_1^{A,A}$ bijektiivne, teoreemi 4.2 tõttu on $\mathbf{F}_1^{A,A}$ Abeli rühmade homomorfism. Kokkuvõttes on $\mathbf{F}_1^{A,A}$ Abeli rühmade isomorfism.

Fikseerime objektid $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $B, B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ning $f \in \mathrm{Hom}_R(B, B')$. Vaatleme allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_R(A,B) \arrow[r, "\mathbf{F}_1^{A,B}"] \arrow[d, "f \circ \_"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B)) \arrow[d, "\mathbf{F}(f) \circ \_"] \\ B' & \mathrm{Hom}_R(A,B') \arrow[r, "\mathbf{F}_1^{A,B'}"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B')) \end{tikzcd}$$

Võtame $g \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}_1^{A,B'} \circ (f \circ \_))(g) &= \mathbf{F}_1^{A,B'}(f \circ g) = \mathbf{F}(f \circ g) = \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g)\\ &= \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}_1^{A,B}(g) = ((\mathbf{F}(f) \circ \_) \circ \mathbf{F}_1^{A,B})(g).\end{aligned}$$

Siit järeldame, et $(\mathbf{F}_1^{A,B})_{B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})} \colon \mathrm{Hom}_R(A, \_) \xrightarrow{\bullet} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(\_))$ on loomulik isomorfism. ■

Olgu $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Meenutame, et endomorfismide hulka $\mathrm{End}(M_R) = \mathrm{Hom}_R(M, M)$ võib vaadelda ühikelemendiga ringina, kus korrutamiseks on kompositsioon ja ühikelemendiks on samasusteisendus. Kasutades järeldust 4.3 ja funktori definitsiooni, saame veel järgmisegi järelduse.

Järeldus 4.4. *Olgu R ja S ringid, $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{Mod}_R$ ja $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{Mod}_S$ lõplike otsesummade suhtes kinnised alamkategooriad ning $\mathbf{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ekvivalentsifunktor. Siis on iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral ahend*

$$\mathbf{F}_1^{A,A}\colon \mathrm{End}(A_R) \to \mathrm{End}(\mathbf{F}(A)_S)$$

ringide isomorfism. Kusjuures, iga objekti $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ korral on morfismide pere $(\mathbf{F}_1^{A,A})_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})}\colon \mathrm{End}(\_\_) \dashrightarrow \mathrm{End}(\mathbf{F}(\_\_))$ loomulik isomorfism.

Promoodustajad ja täpselt balansseeritud bimoodulid

Nüüd soovime me anda ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse kirjeldusi, mis ei oleks kategoorsed. See tähendab anda tarvilikke ja piisavaid tingimusi ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsusele, mis ei sisaldaks kategooria ega funktori mõisteid.

Kõigepealt läheb meil vaja *promoodustaja* mõistet. Selle mõiste sisse toomiseks peame aga defineerima mõningad sissejuhatavad mõisted moodulite teooriast. Nimelt tutvume *lõplikult moodustatud*, *projektiivsete* moodulite ja *moodustajatega* ning tõestame mõningad nende mõistetega seotud tulemused.

Olgu S ühikelemendiga ring. Ütleme, et moodul $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$ on **lõplikult moodustatud**, kui leidub lõplik hulk $A \subseteq M$ nii, et $AS = M$.

Olgu $(U_k)_{k \in \mathfrak{K}}$ parempoolsete S-moodulite pere ja $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$. Defineerime kujutuse

$$\iota_{\mathfrak{L}}\colon \bigoplus_{\ell \in \mathfrak{L}} U_\ell \to \bigoplus_{k \in \mathfrak{K}} U_k,$$

mis igale üldistatud jadale $a = (a_\ell)_{\ell \in \mathfrak{L}}$ seab vastavusse üldistatud jada $\iota_{\mathfrak{L}}(a) = (\alpha_k)_{k \in \mathfrak{K}}$, kus

$$\alpha_k = \begin{cases} a_k, & (k \in \mathfrak{L}), \\ 0, & (k \notin \mathfrak{L}). \end{cases}$$

Kujutus $\iota_{\mathfrak{L}}$ on ilmselt injektiivne S-moodulite homomorfism. Vajadusel tähistame täpsemalt $\iota_{U_{\mathfrak{L}}} := \iota_{\mathfrak{L}}$. Paneme tähele, et homomorfism $\iota_{\mathfrak{L}}$ on universaalomaduse I tõttu selline üheselt määratud homomorfism, mis muudab diagrammi joonisel 4.4 kommutatiivseks (siin on $\iota_{\mathfrak{L}}$ märgitud isomorfismiga komponeerimise täpsuseni).

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus\limits_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell \arrow[dl, "\mathbf{0}"'] \arrow[d, dashed, "\iota_{\mathfrak{L}}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\bigoplus U_\ell}"] & \\
\bigoplus\limits_{k\in\mathfrak{K}\setminus\mathfrak{L}} U_k & \left(\bigoplus\limits_{k\in\mathfrak{K}\setminus\mathfrak{L}} U_k\right) \oplus \left(\bigoplus\limits_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell\right) \arrow[l, "\rho_{\bigoplus U_k}"] \arrow[r, "\rho_{\bigoplus U_\ell}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \bigoplus\limits_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell \\
 & \bigoplus\limits_{k\in\mathfrak{K}} U_k &
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.4

Tõestame lõplikult moodustatud S-moodulite kirjelduse.

Lause 4.5. *Olgu S ühikelemendiga ring. S-moodul $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$ on lõplikult moodustatud parajasti siis, kui iga S-moodulite pere $(U_k)_{k\in\mathfrak{K}}$ ja sürjektiivse homomorfismi $f\colon \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} U_k \twoheadrightarrow M_S$ jaoks leidub lõplik hulk $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$ ja sürjektiivne homomorfism $\bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell \twoheadrightarrow M_S$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$ lõplikult moodustatud. Seega leidub lõplik hulk $A = \{a_1, \dots, a_{h^*}\} \subseteq M$ nii, et $AS = M$. Olgu pere $(U_k)_{k\in\mathfrak{K}}$ selline, et leidub sürjektiivne homomorfism $f\colon \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} U_k \twoheadrightarrow M_S$. Kuna f on sürjektiivne, siis igal elemendil $a_h \in A$ leidub originaal $\upsilon_h \in \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} U_k$. Vastavalt otsesumma definitsioonile, $\upsilon_h \in \prod_{k\in\mathfrak{K}} U_k$, kus vaid lõplik arv liikmeid on nullist erinevad. Tähistame selle indeksite hulga, millele vastavad liikmed üldistatud jadas υ_h on nullist erinevad, $\mathfrak{L}_h \subseteq \mathfrak{K}$. Leiame iga elemendi $a_h \in A$ korral hulga $\mathfrak{L}_h$ ning tähistame

$$\mathfrak{L} := \bigcup_{h\in\{1,\dots,h^*\}} \mathfrak{L}_h \subseteq \mathfrak{K}.$$

Hulk $\mathfrak{L}$ on selgelt lõplik, kuna esitub lõplike hulkade ühendina. Tähistame homomorfismi

$$f' := f \circ \iota_{\mathfrak{L}}\colon \bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell \to M_S.$$

Iga $h \in \{1, \dots, h^*\}$ korral kehtib $f'(\upsilon'_h) = a_h$, kus $\upsilon'_h \in \bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell$ on üldistatud jada, mis on saadud üldistatud jadast υ_h jättes ära kõik nullelemendiga võrdsed liikmed. Kuna $M = AS$, siis iga $m \in M$ korral leiduvad $s_1, \dots, s_{h^*} \in S$ nii, et

$$m = \sum_{h=1}^{h^*} a_h s_h = \sum_{h=1}^{h^*} f'(\upsilon'_h) s_h = f'\left(\sum_{h=1}^{h^*} \upsilon'_h s_h\right),$$

mistõttu f' on sürjektiivne.

Piisavus. Kehtigu tingimus, et iga sürjektsiooni $\bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} U_k \twoheadrightarrow M_S$ jaoks saab leida lõpliku hulga $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$ ja sürjektsiooni $\bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell \twoheadrightarrow M_S$. Vaatleme ilmselt sürjektiivset homomorfismi

$$f\colon \bigoplus_{m\in M} mS \to M_S, \qquad (ms_m)_{m\in M} \mapsto \sum_{m\in M} ms_m.$$

Eeldusest tulenevalt leidub lõplik hulk $A = \{m_1, \dots, m_{h^*}\} \subseteq M$ nii, et $f' := f \circ \iota_A\colon \bigoplus_{a\in A} aS \to M_S$ on sürjektsioon. Seega kehtib

$$M = \operatorname{Im}(f') = \left\{ \sum_{h=1}^{h^*} m_h s_h \,\middle|\, s_1, \dots, s_{h^*} \in S \right\},$$

mistõttu $M = AS$. ■

Olgu S ühikelemendiga ring. Moodulit $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$ nimetatakse **moodustajaks**, kui iga $N_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$ korral leidub hulk $\mathfrak{K}$ ja sürjektiivne homomorfism

$$\bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} M \twoheadrightarrow N_S.$$

Öeldakse, et moodul M_S on **projektiivne**, kui suvaliste S-moodulite $N_S, N'_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$, S-moodulite homomorfismi $g\colon M_S \to N_S$ ja sürjektiivse S-moodulite homomorfismi $f\colon N'_S \twoheadrightarrow N_S$ korral leidub S-moodulite homomorfism $h\colon M_S \to N_S$ nii, et $f\circ h = g$. Mooduli M_S projektiivsust illustreerib allolev kommutatiivne diagramm.

$$\begin{tikzcd} & N'_S \arrow[d, "f"] \\ M_S \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & N_S \end{tikzcd}$$

Joonis 4.5

Tõestame huvitava projektiivse mooduli M_S kirjelduse, mida nimetatakse *duaalse baasi lemmaks.* See nimetus tuleb asjaolust, et vasakpoolset S-moodulit $\mathrm{Hom}_S(M, S)$ nimetatakse vahel mooduli M_S **duaalseks** mooduliks. Siiski ei saa öelda, et siin lemmas konstrueeritaks baas selle sõna tavalises mõttes vaid teatavad hulgad, mis natuke käituvad nagu baas.

Lemma 4.6 (Duaalse baasi lemma). *Olgu S ühikelemendiga ring ning $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$. S-moodul M_S on projektiivne parajasti siis, kui leiduvad* *hulgad $\mathfrak{K}$, $\{m_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq M$ ja $\{f_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq \mathrm{Hom}_S(M, S)$ nii, et iga $m \in M$ korral $f_k(m) \neq 0$ vaid lõpliku arvu indeksite $k \in \mathfrak{K}$ korral ning*

$$m = \sum_{k\in\mathfrak{K}} m_k f_k(m).$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_R)$ projektiivne. Kuna M_S on „klassikaline“ moodul, siis kehtib $MS = M$ (lause 2.13). Nüüd vaatleme pidevate nooltega tähistatud osa diagrammist joonisel 4.6.

$$\begin{tikzcd}
& S^{\oplus M} \arrow[d, "g\colon (s_m)_{m\in M} \mapsto \sum_{m\in M} ms_m"] \\
M_S \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & MS
\end{tikzcd}$$

Joonis 4.6

On lihtne näha, et g joonisel 4.6 on sürjektiivne homomorfism. Tänu M_S projektiivsusele leidub homomorfism $f\colon M_S \to S^{\oplus M}$, mis muudab diagrammi joonisel 4.6 kommutatiivseks. Tähistame iga $M \in M$ korral $f_m := \rho_m \circ f \in \mathrm{Hom}_S(M, S)$, kus $\rho_m\colon S^{\oplus M} \to S$ on projektsioon (vt (2.30)). Tulenevalt otsesumma definitsioonist on iga $m' \in M$ korral $f_m(m') \neq 0$ vaid lõpliku arvu indeksite $m \in M$ korral. Paneme tähele, et iga $m' \in M$ korral kehtib

$$\begin{aligned} m' &= \mathrm{id}_M(m') = (g \circ f)(m') = g(((\rho_m \circ f)(m'))_{m\in M}) \\ &= g((f_m(m'))_{m\in M}) = \sum_{m\in M} m f_m(m'). \end{aligned}$$

Eelnev summa on korrektselt defineeritud, kuna $mf_m(m') \neq 0$ vaid lõpliku arvu $m \in M$ korral. Sellega oleme leidnud soovitud omadusega hulgad M ja $\{f_m \mid m \in M\}$.

Piisavus. Leidugu hulgad $\{m_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq M$ ja $\{f_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq \mathrm{Hom}_S(M, S)$, mis rahuldavad lemma tingimust. Olgu $N_S, N'_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$, $f\colon N'_S \twoheadrightarrow N_S$ sürjektiivne homomorfism ja $g\colon M_S \to N_S$ homomorfism (vt joonis 4.5). Valikuaksioomi[8] abil valime iga $k \in \mathfrak{K}$ korral elemendi $n'_k \in N'$

[8]Nagu nägime, kasutab duaalse baasi lemma piisavuse osa tõestus valikuaksioomi (vt par 1.1 raamatus [1], par 1.9 raamatus [5] või par 1.3 raamatus [11]). Valikuaksioomi sõnastus: olgu $\mathfrak{K}$ suvaline hulk ja iga $k \in \mathfrak{K}$ korral A_k samuti mittetühi hulk; leidub kujutus $f\colon \mathfrak{K} \to \bigcup_{k\in\mathfrak{K}} A_k$ (nn *valikufunktsioon*) nii, et iga $k \in \mathfrak{K}$ korral $f(k) \in A_k$. (Meie tõestuses on iga $k \in \mathfrak{K}$ korral hulga A_k rollis $\{n'_k \mid f(n'_k) = g(m_k)\}$, millest „valime“ ühe esindaja.) Õnneks läheb meil edaspidi vaja vaid duaalse lemma tarvilikkuse osa, mistõttu siinkohal pikemalt peatuma ei hakka. Mainime vaid, et valikuaksioomi lisamise õigustatus hulgateooria aksioomide sekka on matemaatikute hulgas vastuoluline küsimus.

nii, et $f(n'_k) = g(m_k)$ (selline n'_k leidub, kuna f on sürjektiivne). Defineerime

$$h\colon M_S \to N'_S, \qquad m = \sum_{k\in\mathfrak{K}} m_k f_k(m) \mapsto \sum_{k\in\mathfrak{K}} n'_k f_k(m).$$

Paneme tähele, et iga $m, m' \in M$ ja $s \in S$ korral

$$h(m+m') = \sum_{k\in\mathfrak{K}} n'_k f_k(m+m') = \sum_{k\in\mathfrak{K}} n'_k f_k(m) + \sum_{k\in\mathfrak{K}} n'_k f_k(m') = h(m+m'),$$
$$h(ms) = \sum_{k\in\mathfrak{K}} n'_k f_k(ms) = \sum_{k\in\mathfrak{K}} n'_k f_k(m)s = h(m)s.$$

Seega h on parempoolsete S-moodulite homomorfism. Lõpetuseks valime $m \in M$ ja märkame, et

$$(f\circ h)(m) = f\left(\sum_{k\in\mathfrak{K}} n'_k f_k(m)\right) = \sum_{k\in\mathfrak{K}} f(n'_k) f_k(m) = \sum_{k\in\mathfrak{K}} g(m_k) f_k(m) = g(m).$$

Järelikult kehtib $f \circ h = g$ ja M_S on projektiivne S-moodul. ∎

Järeldus 4.7. *Olgu S ühikelemendiga ring ning $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$. Moodul M_S on lõplikult moodustatud ja projektiivne parajasti siis, kui leidub naturaalarv $k^* \in \mathbb{N}_1$ ning hulgad $\{m_1, \ldots, m_{k^*}\} \subseteq M$ ja $\{f_1, \ldots, f_{k^*}\} \subseteq \mathrm{Hom}_S(M,S)$ nii, et iga $m \in M$ korral*

$$m = \sum_{k=1}^{k^*} m_k f_k(m).$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus* Olgu M_S lõplikult moodustatud ja projektiivne. Lemmast 4.6 teame, et leiduvad $\mathfrak{K}$, $\{m_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq M$ ja $\{f_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq \mathrm{Hom}_S(M,S)$ nii, et iga $m \in M$ korral $m = \sum_{k\in\mathfrak{K}} m_k f_k(m)$. Lisaks leidub lõplik hulk A nii, et $AS = M$. Olgu $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{K}$ selline alamhulk, et iga $a \in A$ avaldub kujul $a = \sum_{h\in\mathfrak{H}} m_h f_h(a)$. Hulk $\mathfrak{H}$ on ilmselt lõplik. Olgu $m \in M$. Leiduvad $a_1, \ldots, a_{j^*} \in A$ ja $s_1, \ldots, s_{j^*} \in S$ nii, et $m = a_1 s_1 + \ldots + a_{j^*} s_{j^*}$. Nüüd,

$$m = \sum_{j=1}^{j^*} a_j s_j = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{h\in\mathfrak{H}} m_h f_h(a_j) s_j = \sum_{h\in\mathfrak{H}} m_h f_h\left(\sum_{j=1}^{j^*} a_j s_j\right) = \sum_{h\in\mathfrak{H}} m_h f_h(m).$$

Sellega oleme elemendi m esitanud soovitud kujul.

Piisavus. Leidugu hulgad $A = \{m_1, \ldots, m_{k^*}\} \subseteq M$ ja $\{f_1, \ldots, f_{k^*}\} \subseteq \mathrm{Hom}_S(M,S)$ nii, et iga $m \in M$ korral $m = \sum_{k=1}^{k^*} m_k f_k(m)$. Lemma 4.6 põhjal on M_S projektiivne.[9] Ilmselt kehtib $AS = M$, mistõttu M_S on lõplikult moodustatud. ∎

[9]Kuna siinkohal on kõik hulgad lõplikud, ei toimu siin valikuaksioomi kasutamist.

Edasi tõestame, et lauses 3.22 defineeritud homomorfism $\varphi_{M,Q,T}$ on lõplikult moodustatud ja projektiivse mooduli Q_T korral isomorfism.

Lause 4.8. *Olgu S, T ühikelemendiga ringid ja ${}_SQ_T \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod}^1_T)$. Kui Q_T on lõplikult moodustatud ja projektiivne T-moodul, siis iga $M_T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_T)$ korral on S-moodulite homomorfism*

$$\psi = \psi_{M,Q,T} \colon \ M \otimes_T \mathrm{Hom}_T(Q,T) \to \mathrm{Hom}_T(Q, M \otimes_T T)$$

lausest 3.22 isomorfism.

TÕESTUS. Kehtigu lause eeldused. Kuna Q_T on lõplikult moodustatud ja projektiivne, siis järeldusest 4.7 teame, et leiduvad $p_1, \dots, p_{k^*} \in Q$ ja $f_1, \dots, f_{k^*} \in \mathrm{Hom}_T(Q,T)$ nii, et iga $q \in Q$ korral $q = \sum_{k=1}^{k^*} p_k f_k(q)$. Märkame, et iga $g \in \mathrm{Hom}_T(Q,T)$ ja $q \in Q$ korral

$$g(q) = g\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k f_k(q)\right) = \sum_{k=1}^{k^*} g(p_k) f_k(q) = \left(\sum_{k=1}^{k^*} g(p_k) f_k\right)(q)$$

ehk $g = \sum_{k=1}^{k^*} g(p_k) f_k$ (vt mooduli $\mathrm{Hom}_T(Q,T)$ vasakpoolset T-toimet tabelist 2.1 (lk 85)).

Defineerime kujutuse

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_T(Q, M \otimes_T T) \to M \otimes_T \mathrm{Hom}_T(Q,T), \quad g \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M(g(p_k)) \otimes f_k.$$

Paneme tähele, et iga $m \in M$ ja $g \in \mathrm{Hom}_T(Q,T)$ korral

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(m \otimes g) = \varphi(m \otimes g(\_\_)) &= \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M(m \otimes g(p_k)) \otimes f_k = \sum_{k=1}^{k^*} m g(p_k) \otimes f_k \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} m \otimes g(p_k) f_k = m \otimes \left(\sum_{k=1}^{k^*} g(p_k) f_k\right) = m \otimes g.\end{aligned}$$

Seega $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ (lemma 3.8). Teisalt, iga $g \in \mathrm{Hom}_T(Q, M \otimes_T T)$ ja $q \in Q$ korral,

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(g)(q) &= \psi\left(\sum_{k=1}^{k^*} \mu_M(g(p_k)) \otimes f_k\right)(q) = \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M(g(p_k)) \otimes f_k(q) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M(g(p_k)) f_k(q) \otimes 1 = \mu_M\left(\sum_{k=1}^{k^*} g(p_k) f_k(q)\right) \otimes 1\end{aligned}$$

$$= \mu_M(g(q)) \otimes 1 = g(q).$$

(viimane võrdus kehtib, kuna iga $\nu \in M \otimes_T T$ korral $\nu = \mu_M(\nu) \otimes 1$). Järelikult ka $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ kehtib, mistõttu ψ on bijektiivne. ■

Duaalselt defineeritakse **lõplikult moodustatus**, **projektiivsus** ja **moodustajaks olemine** ka vasakpoolsete „klassikaliste“ S-moodulite korral. Nüüd defineerime lõpuks promoodustaja mõiste.

Definitsioon 4.9. Olgu S ühikelemendiga ring. Parempoolset S-moodulit $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ nimetatakse parempoolseks **promoodustajaks**, kui M_S on lõplikult moodustatud projektiivne moodustaja.

Duaalselt defineeritakse ka **vasakpoolsed promoodustajad**.

Näide 4.10 (Promoodustaja). Olgu S ühikelemendiga ring. Moodul S_S on promoodustaja kategoorias Mod^1_S. Nimelt, S_S on lõplikult moodustatud, kuna kehtib $S = \{1\}S$.

Nüüd, olgu $N_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$. Iga $n \in N$ korral vaatleme homomorfisme

$$\lambda_N(n) \colon S \to N, \quad s \mapsto ns$$

definitsioonist 2.46. Tähistame

$$f := \nabla_N \circ \bigoplus_{n \in N} \lambda_N(n) \colon \bigoplus_{n \in N} S \to \bigoplus_{n \in N} N \to N_S,$$

kus

$$\nabla_N \colon \bigoplus_{n \in N} N \to N_S, \qquad (k_n)_{n \in N} \mapsto \sum_{n \in N} k_n,$$

mis on korrektselt defineeritud homomorfism, kuna otsesumma $\bigoplus_{n \in N} N$ koosneb sellistest üldistatud jadadest, milles on vaid lõplik arv nullist erinevaid komponente. Homomorfism f on selgelt sürjektiivne, mistõttu S_S on moodustaja.

Viimaks, olgu $g \colon S_S \to N_S$ homomorfism ja $f \colon N'_S \twoheadrightarrow N_S$ sürjektiivne homomorfism. Vaatleme elementi $g(1) \in N$. Tänu homomorfismi f sürjektiivsusele leidub element $n' \in N$ nii, et $f(n') = g(1)$. Nüüd defineerime

$$h \colon S_S \to N'_S, \qquad s \mapsto n's,$$

st $f = \lambda_{N'}(n')$ ja varasemast teame, et h on S-moodulite homomorfism. Lisaks kehtib iga $s \in S$ korral

$$(f \circ h)(s) = f(h(s)) = f(n's) = f(n')s = g(1)s = g(1s) = g(s),$$

mistõttu $f \circ h = g$ ja S_S on projektiivne. Kokkuvõttes on S_S promoodustaja. □

Anname ka kirjelduse mooduli M moodustajaks olemisele. Kuid selleks peame defineerima jälgideaali. S-mooduli $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ (üle ühikelemendiga ringi S) **jälgideaaliks** nimetatakse hulka

$$\mathrm{Tr}(M_S) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_S(M,S)} \mathrm{Im}\, f = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} s_k \;\middle|\; \begin{array}{l} k^* \in \mathbb{N}_1,\ (\forall k \in \{1, \ldots, k^*\} \\ \exists f_k \in \mathrm{Hom}_S(M,S)\colon\ s_k \in \mathrm{Im}\, f_k) \end{array} \right\}.$$

Näitame, et jälgideaal on ringi S ideaal.

Lemma 4.11. *Olgu S ühikelemendiga ring ja $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$. Jälgideaal $\mathrm{Tr}(M_S)$ on ringi S ideaal.*

TÕESTUS. Olgu S ühikelemendiga ring ja $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$. Vaatleme jälgideaali $\mathrm{Tr}(M_S)$. Olgu $\sigma \in \mathrm{Tr}(M_S)$. Sel juhul leiduvad $m_1, \ldots, m_{k^*} \in M$ ja $f_1, \ldots, f_{k^*} \in \mathrm{Hom}_S(M,S)$ nii, et $\sigma = f_1(m_1) + \ldots + f_{k^*}(m_{k^*})$.

Olgu $s \in S$. Paneme tähele, et

$$\sigma s = \left(\sum_{k=1}^{k^*} f_k(m_k) \right) s = \sum_{k=1}^{k^*} f_k(m_k) s = \sum_{k=1}^{k^*} f_k(m_k s) \in \sum_{k=1}^{k^*} \mathrm{Im}\, f_k \subseteq \mathrm{Tr}(M_S),$$
$$s\sigma = s \sum_{k=1}^{k^*} f_k(m_k) = \sum_{k=1}^{k^*} s(f_k(m_k)) = \sum_{k=1}^{k^*} (sf_k)(m_k) \in \mathrm{Tr}(M_S),$$

kuna $sf_k \in \mathrm{Hom}_S(M,S)$ iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral (vt mooduli $\mathrm{Hom}_S(M,S)$ vasakpoolset S-toimet tabelist 2.1 (lk 85)). Kokkuvõttes näeme, et kehtib $\mathrm{Tr}(M_S) \trianglelefteq S$. ■

Nüüd oleme valmis moodustajaks olemise kirjelduse andmiseks.

Lause 4.12. *Olgu S ühikelemendiga ring. S-moodul $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ on moodustaja parajasti siis, kui kehtib*

$$\mathrm{Tr}(M_S) = S.$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ moodustaja. Vastavalt definitsioonile leidub hulk $\mathfrak{K}$ ja sürjektiivne homomorfism $f\colon \bigoplus_{k \in \mathfrak{K}} M_S \twoheadrightarrow S$. Seega leidub üldistatud jada $(m_k)_{k \in \mathfrak{K}}$ nii, et $f((m_k)_{k \in \mathfrak{K}}) = 1$. Vaatleme hulka $\mathfrak{L} = \{k \mid m_k \neq 0\} \subseteq \mathfrak{K}$. Otsesumma definitsiooni kohaselt on hulk $\mathfrak{L}$ lõplik. Paneme tähele, et

$$1 = f((m_k)_{k \in \mathfrak{K}}) = \sum_{\ell \in \mathfrak{L}} (f \circ \iota_\ell)(m_\ell) \in \sum_{\ell \in \mathfrak{L}} \mathrm{Im}\, (f \circ \iota_\ell) \subseteq \mathrm{Tr}(M_S),$$

kus $\iota_\ell \colon M_S \to \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} M_S$ (vt (2.29)). Kuna ringi S ideaal $\operatorname{Tr}(M_S)$ sisaldab ühikelementi, siis $\operatorname{Tr}(M_S) = S$.

Piisavus. Kehtigu $\operatorname{Tr}(M_S) = S$. Näitest 4.10 teame, et S_S on moodustaja. Kasutades lauset 2.50, saame vaadelda ilmselt sürjektiivset homomorfismi

$$\nabla \circ \bigoplus_{f\in \operatorname{Hom}_S(M,S)} f \colon \quad \bigoplus_{f\in \operatorname{Hom}_S(M,S)} M \twoheadrightarrow \bigoplus_{f\in \operatorname{Hom}_S(M,S)} \operatorname{Im} f \twoheadrightarrow \sum_{f\in \operatorname{Hom}_S(M,S)} \operatorname{Im} f = S,$$

kus $\nabla \colon (f(a_f))_f \mapsto \sum_f f(a_f)$. Nüüd on selge, et M_S on samuti moodustaja.■

Järgnevalt vaatleme promoodustaja kirjeldust. Käesolevas raamatus tõestame sellest ainult tarvilikkuse osa, kuna piisavus jääb mahust välja. Piisavuse osa tõestus on leitav raamatust [18] (järeldus 17.3 ja lause 17.6).

Lause 4.13. *Olgu S ühikelemendiga ring. Moodul $M_S \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ on promoodustaja parajasti siis, kui leiduvad naturaalarvud $n, m \in \mathbb{N}_1$ nii, et kehtivad tingimused*

$$S^{\oplus n} \cong M_S \oplus M'_S, \tag{4.5}$$

$$M_S^{\oplus m} \cong S \oplus N_S, \tag{4.6}$$

kus M'_S ja N_S on mingid S-moodulid.

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu $M_S \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ promoodustaja. Kuna S on moodustaja ja M_S on lõplikult moodustatud, siis tulenevalt lausest 4.5 leidub naturaalarv $n \in \mathbb{N}_1$ ja sürjektiivne homomorfism $f \colon S^{\oplus n} \twoheadrightarrow M_S$. Tulenevalt mooduli M_S projektiivsusest leidub allolevat diagrammi kommuteeriv homomorfism g.

$$\begin{tikzcd} & S^{\oplus n} \arrow[d, "f"] \\ M_S \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "\mathrm{id}_M"'] & M_S \end{tikzcd}$$

Seega kehtib $f \circ g = \mathrm{id}_M$. Nüüd, vaadeldes lühikest täpset jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\iota_{\operatorname{Ker} f}} S^{\oplus n} \xrightarrow{f} M_S \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\},$$

saame lemmast 2.67, et kehtib $S^{\oplus n} \cong M_S \oplus \operatorname{Ker} f$. Sellega on (4.5) tõestatud.[10]

Teisalt, kuna $S_S \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ on samuti promoodustaja (näide 4.10), siis analoogiliselt kehtib ka tingimus (4.6). ■

[10]Märgime, et isomorfismi (4.5) tõestamisel ei kasutanud me tegelikult eeldust, et M_S on moodustaja, vaid ainult eeldusi, et ta on lõplikult moodustatud ja projektiivne. Seevastu isomorfismi (4.6) tõestamiseks on vaja ainult eeldust, et M_S on moodustaja.

Järgnevalt tõestame lemma, mis ütleb, et ekvivalentsifunktorid moodulite kategooriate vahel säilitavad promoodustajad.

Lemma 4.14. *Olgu S ja T Morita ekvivalentsed ühikelemendiga ringid, kusjuures $\mathbf{F}\colon \mathsf{Mod}^1_S \to \mathsf{Mod}^1_T$ on ekvivalentsifunktor ja $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$. Siis kehtivad tingimused:*

1. *M_S on projektiivne parajasti siis, kui $\mathbf{F}(M_S)$ on projektiivne;*
2. *M_S on moodustaja parajasti siis, kui $\mathbf{F}(M_S)$ on moodustaja;*
3. *M_S on lõplikult moodustatud parajasti siis, kui $\mathbf{F}(M_S)$ on lõplikult moodustatud;*
4. *M_S on promoodustaja parajasti siis, kui $\mathbf{F}(M_S)$ on promoodustaja.*

TÕESTUS. Alustuseks paneme tähele, et kõigis lemma tingimustes piisab vaid tarvilikkuse tõestamisest. Nimelt, kehtigu tingimus, et kui moodulil M_S on omadus P, siis ka moodulil $\mathbf{F}(M_S)$ on omadus P. Nüüd saame, et kui moodulil $\mathbf{F}(M_S)$ on omadus P, siis ka moodulil $(\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(M_S) \cong M_S$ on omadus P, kus $\mathbf{G}\colon \mathsf{Mod}^1_T \to \mathsf{Mod}^1_S$ on funktorile $\mathbf{F}$ vastav inversne ekvivalentsifunktor.

1. Olgu S-moodul M_S projektiivne. Vaatleme olukorda joonisel 4.7.

$$\begin{tikzcd} & N'_T \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{F}(M_S) \arrow[r, "g"'] & N_T \end{tikzcd}$$

Joonis 4.7

$$\begin{tikzcd} & A'_S \arrow[d, "\hat{f}"] \\ M_S \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "\hat{g}"'] & A_S \end{tikzcd}$$

Joonis 4.8

Tulenevalt teoreemist 1.23 on funktor $\mathbf{F}$ tihe. Seega võime üldisust kitsendamata eeldada, et leiduvad S-moodulid $A_S, A'_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ nii, et $\mathbf{F}(A_S) = N_T$ ja $\mathbf{F}(A'_S) = N_T$. Lisaks on funktor $\mathbf{F}$ täielik, seega leiduvad morfismid $\hat{g}\colon M_S \to A_S$ ja $\hat{f}\colon A'_S \to A_S$ nii, et $\mathbf{F}(\hat{g}) = g$ ja $\mathbf{F}(\hat{f}) = f$ (joonis 4.8). Tulenevalt funktori $\mathbf{F}$ täpsusest ja lausest 1.15 saame, et $\hat{f}$ on sürjektiivne, kuna kategoorias Mod^1_S langevad sürjektiivsed homomorfismid ja epimorfismid kokku (järeldus 2.59). Nüüd, kuna M_S on projektiivne, leidub homomorfism $h\colon M_S \to A'_S$, mille korral $\hat{f}\circ h = \hat{g}$. Seega leidub homomorfism $\mathbf{F}(h)\colon \mathbf{F}(M_S) \to N'_T$. Nüüd

$$f\circ\mathbf{F}(h) = \mathbf{F}(\hat{f})\circ\mathbf{F}(h) = \mathbf{F}(\hat{f}\circ h) = \mathbf{F}(\hat{g}) = g.$$

Kokkuvõttes on $\mathbf{F}(M_S)$ projektiivne.

2. Olgu M_S moodustaja. Vaatleme T-moodulit $N_T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_T)$. Tulenevalt teoreemist 1.23 on funktor $\mathbf{F}$ tihe, mistõttu leidub $A_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$

nii, et $\mathbf{F}(A_S) \cong N_T$. Kuna M_S on moodustaja, siis leidub hulk $\mathfrak{K}$ ja sürjektiivne homomorfism $f\colon \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} M \twoheadrightarrow A_S$. Kasutades lauset 2.53 ja lemmat 1.13, saame

$$\bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} \mathbf{F}(M_S) \cong \mathbf{F}\left(\bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} M_S\right) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A_S) \cong N_T.$$

Järelikult on $\mathbf{F}(M_S)$ moodustaja.

3. Olgu M_S lõplikult moodustatud. Lisaks olgu $\mathfrak{K}$ hulk, $(U_k)_{k\in\mathfrak{K}}$ parempoolsete T-moodulite pere ja $f\colon \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} U_k \twoheadrightarrow \mathbf{F}(M_S)$ sürjektiivne homomorfism. Leiduvad S-moodulid V_k, $k \in \mathfrak{K}$, nii, et $\mathbf{F}(V_k) \cong U_k$, iga $k \in \mathfrak{K}$ korral, ning sürjektsioon $\hat{f}\colon \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} V_k \twoheadrightarrow M_S$ nii, et $\mathbf{F}(\hat{f}) = f$ (teoreem 1.23 ja lause 1.15). Kuna M_S on lõplikult moodustatud, siis tulenevalt lausest 4.5 leidub lõplik hulk $\mathfrak{L}$ nii, et $\hat{f} \circ \iota_{V_\mathfrak{L}}\colon \bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} V_\ell \to M_S$ on sürjektiivne. Kasutades järeldust 2.54 ja lauset 1.24, saame

$$\bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} U_\ell \cong \bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} \mathbf{F}(V_\ell) \cong \mathbf{F}\left(\bigoplus_{\ell\in\mathfrak{L}} V_\ell\right) \xrightarrow{\mathbf{F}(\hat{f}\circ\iota_{V_\mathfrak{L}})=f\circ\mathbf{F}(\iota_{V_\mathfrak{L}})} \mathbf{F}(M_S).$$

Siit näeme, et $\mathbf{F}(M_S)$ on lõplikult moodustatud tänu lausele 4.5.

4. Võttes punktid 1, 2 ja 3 kokku näeme, et kui M_S on promoodustaja kategoorias Mod^1_S, siis on $\mathbf{F}(M_S)$ promoodustaja kategoorias Mod^1_T. ∎

Ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse kirjelduse andmiseks peame defineerima täpselt balansseeritud bimooduli mõiste.

Definitsioon 4.15. Öeldakse, et bimoodul ${}_SM_T \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod}^1_T)$ on **täpselt balansseeritud**, kui (ühikelemendiga) ringide homomorfismid

$$\mathfrak{l}_M\colon S \to \mathrm{End}(M_T), \qquad s \mapsto (m \mapsto sm), \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{r}_M\colon T \to \mathrm{End}({}_SM), \qquad t \mapsto (m \mapsto mt) \tag{4.8}$$

on isomorfismid.

Paneme tähele, et kui S on ühikelemendiga ring, siis on bimoodul ${}_SS_S$ täpselt balansseeritud tulenevalt näitest 2.47 võttes $M := S$.

Morita kontekst

Nüüd tutvume Morita konteksti mõistega. Anname üldise meetodi, kuidas lähtudes ühikelemendiga ringist S ja moodulist P_S konstrueerida ringiga S Morita ekvivalentne ring. Seejuures tekivad loomulikul viisil kaks bimoodulit ja kaks bimoodulite homomorfismi. Kõigi nende objektide kuuikut hakkame nimetama *Morita kontekstiks*. Hiljem näeme, et selline lähenemine on üldjuhul kasulik Morita ekvivalentsuse uurimisel.

Olgu S ühikelemendiga ring ja $P_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ S-moodul. Tähistame

$$Q := \mathrm{Hom}_S(P, S) \qquad \text{ja} \qquad T := \mathrm{End}(P_S).$$

Teame, et $(T; +, \circ)$ on ühikelemendiga ring. Nüüd saame moodulit P_S vaadelda (T, S)-bimoodulina, defineerides vasakpoolse T-toime iga $t \in T$ ja $p \in P$ korral

$$tp := t(p).$$

Lisaks saame hulka Q vaadelda (S, T)-bimoodulina, kus T- ja S-toime on defineeritud iga $q \in Q$, $t \in T$ ja $s \in S$ korral võrdustega

$$(sq)(p) := sq(p), \tag{4.9}$$
$$(qt)(p) := q(tp) = q(t(p)) = (q \circ t)(p), \tag{4.10}$$

kus $p \in P$ on suvaline.

Lemma 4.16. *Kasutades eelpool sissetoodud tähistusi, leiduvad bimoodulite homomorfismid*

$$\theta\colon {}_T(P \otimes_S Q)_T \to {}_T T_T, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} p_k q_k(\_), \tag{4.11}$$

$$\phi\colon {}_S(Q \otimes_T P)_S \to {}_S S_S, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} q_k(p_k). \tag{4.12}$$

TÕESTUS. Näitame, et kujutus θ on korrektselt defineeritud. Kõigepealt uurime, kas selline eeskiri tegutseb hulgast $P \otimes_S Q$ hulka $T = \mathrm{End}(P_S)$. Paneme tähele, et kui $p \in P$ ja $q \in Q = \mathrm{Hom}_S(P, S)$, siis iga $p', p'' \in P$ ja $s \in S$ korral

$$p(q(\_))(p' + p'') = p(q(p' + p'')) = p(q(p') + q(p'')) = pq(p') + pq(p''),$$
$$p(q(\_))(p's) = p(q(p's)) = p(q(p')s) = (p(q(p')))s,$$

mistõttu $p(q(\_)) \in T = \mathrm{End}(P_S)$ ning, kuna T on ringina liitmise suhtes kinnine, kehtib $\mathrm{Im}\,(\theta) \subseteq T$. Tulenevalt järeldusest 3.11 on $P \otimes_S Q$ (T, T)-bimoodul, mistõttu on mõttekas küsida, kas θ on (T, T)-bimoodulite homomorfism.

Nüüd vaatleme kujutust $\hat{\theta}\colon P\times Q\to T$, $(p,q)\mapsto p(q(\_))$. Paneme tähele, et iga $p\in P$ korral

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(p'+p'',q)(p)&=(p'+p'')q(p)=p'q(p)+p''q(p)=\hat{\theta}(p',q)(p)+\hat{\theta}(p'',q)(p),\\ \hat{\theta}(p',q+q')(p)&=p'((q+q')(p))=p'q(p)+p'q'(p)=\hat{\theta}(p',q)(p)+\hat{\theta}(p',q')(p),\\ \hat{\theta}(p's,q)(p)&=(p's)q(p)=p'(sq(p))=p'((sq)(p))=\hat{\theta}(p',sq)(p),\end{aligned}$$

kus $p',p''\in P$, $q,q'\in Q$ ja $s\in S$. Seega $\hat{\theta}$ on S-tasakaalustatud, mistõttu, tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest (ja lemmast 3.7), on θ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Paneme tähele, et iga $t\in T$, $p\in P$ ja $q\in Q$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}\theta(t(p\otimes q))(p')&=\theta(t(p)\otimes q)(p')=t(p)q(p')=t(pq(p'))\\ &=t(\theta(p\otimes q)(p'))=(t\circ\theta(p\otimes q))(p');\\ \theta((p\otimes q)t)(p')&=\theta(p\otimes(q\circ t))(p')=p((q\circ t)(p'))=p(q(t(p')))\\ &=\theta(p\otimes q)(t(p'))=(\theta(p\otimes q)\circ t)(p'),\end{aligned}$$

mistõttu θ on ka (T,T)-bimoodulite homomorfism (lemma 3.12).

Analoogiliselt saab näidata, et ϕ on (S,S)-bimoodulite homomorfism. ■

Lemma 4.17. *Kasutades lemma 4.16 tähistusi, kehtivad iga $p,p'\in P$ ja $q,q'\in Q$ korral võrdused*

$$\theta(p\otimes q)p'=p\phi(q\otimes p'),\tag{4.13}$$

$$q'\theta(p\otimes q)=\phi(q'\otimes p)q.\tag{4.14}$$

TÕESTUS. Olgu $p,p'\in P$ ja $q,q'\in Q$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}&\theta(p\otimes q)p'=(p(q(\_)))(p')=pq(p')=p\phi(q\otimes p'),\\ &q'\theta(p\otimes q)=q'\circ\theta(p\otimes q)=q'\circ pq(\_)=q'(p)q(\_)=\phi(q'\otimes p)q.\end{aligned}$$

Sellega on lemma tõestatud. ■

Kuuikut $(T,S,{}_TP_S,{}_SQ_T,\theta,\phi)$ nimetatakse „klassikalisele“ S-moodulile P_S vastavaks **Morita kontekstiks**. Hiljem vaatame Morita kontekste üldisemalt ühikelemendita ringide korral ning siis saab selgeks, miks Morita konteksti liikmed natuke imelikult järjestatud on. Kuid praegu jätkame eelpool toodud kirjeldustega. Tõestame mõningad Morita konteksti omadused.

Lause 4.18. *Olgu S ühikelemendiga ring, $P_S\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ ja $(T,S,{}_TP_S,{}_SQ_T,\theta,\phi)$ moodulile P_S vastav Morita kontekst.*

1. *S-moodul P_S on moodustaja parajasti siis, kui homomorfism ϕ on sürjektiivne.*
2. *Olgu P_S moodustaja. Siis kehtivad tingimused:*
   (a) *homomorfism ϕ on (S,S)-bimoodulite isomorfism;*
   (b) *$Q \cong {}_T\mathrm{Hom}(P,T)$ kui (S,T)-bimoodulid;*
   (c) *$P \cong \mathrm{Hom}_T(Q,T)$ kui (T,S)-bimoodulid;*
   (d) *$S \cong \mathrm{End}({}_TP) \cong \mathrm{End}(Q_T)$ kui ringid.*

TÕESTUS. 1. Paneme tähele, et

$$\operatorname{Im}\phi = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} q_k(p_k) \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_1, q_k \in \mathrm{Hom}_S(P,S), p_k \in P \right\} = \mathrm{Tr}(P_S).$$

Tulenevalt lausest 4.12 kehtib $\mathrm{Tr}(P_S) = S$ parajasti siis, kui P_S on moodustaja.

2. Olgu P_S moodustaja. Vastavalt eelnevale on ϕ sürjektiivne. Seega leiduvad $q'_1, \dots, q'_{h^*} \in Q$ ja $p'_1, \dots, p'_{h^*} \in P$ nii, et $\phi(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h) = 1_S$.
   (a) Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Sel juhul, kasutades tingimusi (4.13) ja (4.14),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k &= \sum_{k=1}^{k^*} 1q_k \otimes p_k = \sum_{k=1}^{k^*} \phi\left(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h\right) q_k \otimes p_k \\ &= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} \phi\left(q'_h \otimes p'_h\right) q_k \otimes p_k = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} q'_h\theta(p'_h \otimes q_k) \otimes p_k \\ &= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes \theta(p'_h \otimes q_k)p_k = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h\phi(q_k \otimes p_k) \\ &= \sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h \phi\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k\right) = \sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h 0 = 0.\end{aligned}$$

   Seega, $\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k = 0$, mistõttu ϕ on injektiivne. Sürjektiivsus on juba teada.

   (b) Vaatleme kujutust $\mathfrak{l}\colon Q \to {}_T\mathrm{Hom}(P,T)$, $q \mapsto \theta(\_ \otimes q)$. On lihtne näha, et iga $q \in Q$ korral on $\theta(\_ \otimes q)$ on vasakpoolsete T-moodulite homomorfism. Samuti pole väga keeruline näha, et $\mathfrak{l}$ on (S,T)-bimoodulite homomorfism. Näitame näiteks, et $\mathfrak{l}$ on vasakpoolsete S-moodulite homomorfism. Selleks paneme tähele, et iga $s \in S$, $q \in Q$ ja $p \in P$ korral kehtib

$$\mathfrak{l}(sq)(p) = \theta(p \otimes sq) = \theta(ps \otimes q) = \mathfrak{l}(q)(ps) = (s\mathfrak{l}(q))(p).$$

Olgu nüüd $q \in \operatorname{Ker} \mathfrak{l}$, siis $\theta(p \otimes q) = 0$ iga $p \in P$ korral. Nüüd

$$q = 1q = \phi\left(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h\right) q = \sum_{h=1}^{h^*} q'_h \theta(p'_h \otimes q) = \sum_{h=1}^{h^*} q'_h 0 = 0, \tag{4.15}$$

millest näeme, et $\mathfrak{l}$ on injektiivne. Sürjektiivsuse näitamiseks valime suvalise $f \in {}_T\mathrm{Hom}(P, T)$ ja paneme tähele, et iga $p \in P$ korral

$$\begin{aligned} f(p) = f(p1) = f\left(p\phi\left(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h\right)\right) &= \sum_{h=1}^{h^*} f(\theta(p \otimes q'_h)p'_h) \\ = \sum_{h=1}^{h^*} \theta(p \otimes q'_h) f(p'_h) &= \theta\left(p \otimes \sum_{h=1}^{h^*} q'_h f(p'_h)\right) \\ = \mathfrak{l}\left(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h f(p'_h)\right)(p). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Kokkuvõttes on $\mathfrak{l}$ bimoodulite isomorfism.

(c) Vaatleme kujutust $\mathfrak{r}\colon P \to \mathrm{Hom}_T(Q, T)$, $p \mapsto \theta(p \otimes \_)$. Kujutus $\mathfrak{r}$ on analoogiliselt eelmise punktiga (T, S)-bimoodulite isomorfism.

(d) Vaatleme kujutusi

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_P\colon S \to \mathrm{End}({}_TP), &\quad s \mapsto \_s, \\ \mathfrak{l}_Q\colon S \to \mathrm{End}(Q_T), &\quad s \mapsto s\_. \end{aligned}$$

Kujutused $\mathfrak{r}_P$ ja $\mathfrak{l}_Q$ on ringide homomorfismid. Võrdustele (4.15) ja (4.16) analoogiliste võrduste abil näeme, et $\mathfrak{r}_P$ ja $\mathfrak{l}_Q$ on bijektiivsed nagu soovitud. ■

Lausele 4.18 leidub järgnev „analoog“ lõplikult moodustatud ja projektiivsete moodulite jaoks.

Lause 4.19. *Olgu S ühikelemendiga ring, $P_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ ja $(T, S, {}_TP_S, {}_SQ_T, \theta, \phi)$ moodulile P_S vastav Morita kontekst.*

1. *S-moodul P_S on lõplikult moodustatud ja projektiivne parajasti siis, kui $\theta\colon {}_T(P \otimes_S Q)_T \to {}_TT_T$ on sürjektiivne.*
2. *Olgu P_S lõplikult moodustatud ja projektiivne. Siis kehtivad tingimused*
   (a) $\theta\colon {}_T(P \otimes_S Q)_T \to {}_TT_T$ on (T, T)-bimoodulite isomorfism;
   (b) $Q \cong \mathrm{Hom}_S(P, S)$ kui (S, T)-bimoodulid;
   (c) $P \cong {}_S\mathrm{Hom}(Q, S)$ kui (T, S)-bimoodulid;

(d) $T \cong \mathrm{End}(P_S) \cong \mathrm{End}({}_SQ)$ *kui ringid.*

TÕESTUS. 1. *Tarvilikkus.* Olgu P_S lõplikult moodustatud ja projektiivne. Tulenevalt järeldusest 4.7 teame, et leiduvad $p'_1, \dots, p'_{k^*} \in P$ ja $q'_1, \dots, q'_{k^*} \in \mathrm{Hom}_S(P, S) = Q$ nii, et iga $p \in P$ korral $p = \sum_{k=1}^{k^*} p'_k q'_k(p)$. Nüüd

$$\mathrm{id}_P(p) = p = \sum_{k=1}^{k^*} p'_k q'_k(p) = \sum_{k=1}^{k^*} \theta(p'_k \otimes q'_k)(p) = \theta\left(\sum_{k=1}^{k^*} p'_k \otimes q'_k\right)(p).$$

Siit näeme, et $\theta(\sum_{k=1}^{k^*} p'_k \otimes q'_k) = \mathrm{id}_P = 1_T$. Kuna kehtib $1_T \in \mathrm{Im}\,\theta$ ja $\mathrm{Im}\,\theta$ on ringi T ideaal, siis kehtib $\mathrm{Im}\,\theta = T$, mistõttu on θ sürjektiivne. *Piisavus.* Olgu θ sürjektiivne. Siis leiduvad $p'_1, \dots, p'_{k^*} \in P$ ja $q'_1, \dots, q'_{k^*} \in Q$ nii, et $\theta(\sum_{k=1}^{k^*} p'_k \otimes q'_k) = 1_T = \mathrm{id}_P$. Iga $p \in P$ korral kehtib

$$p = 1_T p = \theta\left(\sum_{k=1}^{k^*} p'_k \otimes q'_k\right) p = \sum_{k=1}^{k^*} p'_k \phi(q'_k \otimes p).$$

$$\begin{tikzcd} & N_S \arrow[d, two heads, "f"] \\ P_S \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & N'_S \end{tikzcd}$$

Siit näeme, et S-moodul P_S on lõplikult moodustatud, kuna tähistades $P' = \{p'_1, \dots, p'_{k^*}\}$ kehtib $P = P'\mathrm{Im}\,(\phi) \subseteq P'S$ (alati kehtib $P'S \subseteq P$). Nüüd, olgu $N_S, N'_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$, $f\colon N_S \twoheadrightarrow N'_S$ sürjektiivne homomorfism ja $g\colon P_S \to N'_S$ homomorfism. Vaatleme elemente $g(p'_1), \dots, g(p'_{k^*}) \in N'$. Tänu homomorfismi f sürjektiivsusele leiduvad elemendid $n_1, \dots, n_{k^*} \in N$ nii, et $f(n_1) = g(p'_1), \dots, f(n_{k^*}) = g(p'_{k^*})$. Defineerime

$$h\colon P_S \to N_S, \qquad p = \sum_{k=1}^{k^*} p'_k \phi(q'_k \otimes p) \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} n_k \phi(q'_k \otimes p).$$

Paneme tähele, et iga $p, p' \in P$ ja $s \in S$ korral kehtib

$$\begin{aligned} h(p + p') &= \sum_{k=1}^{k^*} n_k \phi(q'_k \otimes (p + p')) = \sum_{k=1}^{k^*} n_k \phi(q'_k \otimes p) + \sum_{k=1}^{k^*} n_k \phi(q'_k \otimes p') \\ &= h(p) + h(p'), \\ h(ps) &= \sum_{k=1}^{k^*} n_k \phi(q'_k \otimes ps) = \sum_{k=1}^{k^*} n_k \phi(q'_k \otimes p)s = h(p)s. \end{aligned}$$

Siit näeme, et h on S-moodulite homomorfism. Lõpetuseks paneme tähele, et iga $p \in P$ korral kehtib

$$\begin{aligned}(f \circ h)(p) &= f\left(\sum_{k=1}^{k^*} n_k \phi(q'_k \otimes p)\right) = \sum_{k=1}^{k^*} f(n_k)\phi(q'_k \otimes p) \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} g(p'_k)\phi(q'_k \otimes p) = g\left(\sum_{k=1}^{k^*} p'_k \phi(q'_k \otimes p)\right) = g(p).\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et P_S on ka projektiivne.

2. Olgu P_S lõplikult moodustatud ja projektiivne. Vastavalt eelnevale on θ sürjektiivne. Punktide 2a, 2c ja 2d tõestused on nüüd täpselt analoogilised vastavate punktide tõestustega lauses 4.18. Punkt 2b on täiesti triviaalne, kuid demonstreerib Morita teooria sümmeetrilisust. ■

Paneme tähele, et lausete 4.18 ja 4.19 punktid 2d annavad järgneva järelduse.

Järeldus 4.20. *Olgu S ühikelemendiga ring, $P_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ ja $(T, S, {}_TP_S, {}_SQ_T, \theta, \phi)$ moodulile P_S vastav Morita kontekst. Kui P_S on promoodustaja, siis on bimoodulid ${}_TP_S$ ja ${}_SQ_T$ täpselt balansseeritud.*

Järgnevalt tõestame lause, mis ütleb, et kui Morita konteksti moodul P_S on promoodustaja, siis on seda ka tema kõik ülejäänud moodulid.

Lause 4.21. *Olgu S ühikelemendiga ring, $P_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ ja $(T, S, {}_TP_S, {}_SQ_T, \theta, \phi)$ moodulile P_S vastav Morita kontekst. Kui S-moodul P_S on promoodustaja, siis on ka moodulid ${}_TP$, ${}_SQ$ ja Q_T promoodustajad.*

TÕESTUS. Olgu P_S promoodustaja. Tänu lausetele 4.18 ja 4.19, on θ ja ϕ bimoodulite isomorfismid. Vaatleme moodulit Q_T. Lause 4.18 osast 2 saame isomorfsused $P_S \cong \mathrm{Hom}_T(Q, T)$ ja $S \cong \mathrm{End}(Q_T)$. Siit näeme, et moodulile Q_T vastav Morita kontekst on $(S, T, {}_SQ_T, {}_TP_S, \phi, \theta)$. Kuna ϕ on sürjektiivne, siis tingimusest 4.18 (1) saame, et Q_T on moodustaja. Tänu tingimusele 4.19 (1) on Q_T lõplikult moodustatud ja projektiivne, tulenevalt θ sürjektiivsusest.

Analoogiliselt saab näidata, et ka ${}_TP$ ja ${}_SQ$ on promoodustajad. ■

Viimase tulemusena Morita kontekstide kohta tõestame, et kui kuuik $(T, S, {}_TP_S, {}_SQ_T, \theta, \phi)$ on promoodustajale P_S vastav Morita kontekst, siis on ringid T ja S Morita ekvivalentsed.

Lause 4.22 (Morita I). *Olgu S ühikelemendiga ring ja $P_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ promoodustaja, millele vastab Morita kontekst $(T, S, {}_TP_S, {}_SQ_T, \theta, \phi)$.*

1. *Funktorid* $\_\_ \otimes_S Q\colon \mathsf{Mod}^1_S \to \mathsf{Mod}^1_T$ *ja* $\_\_ \otimes_T P\colon \mathsf{Mod}^1_T \to \mathsf{Mod}^1_S$ *on inverssed ekvivalentsifunktorid.*
2. *Funktorid* $P \otimes_S \_\_\colon {}_S\mathsf{Mod}^1 \to {}_T\mathsf{Mod}^1$ *ja* $Q \otimes_T \_\_\colon {}_T\mathsf{Mod}^1 \to {}_S\mathsf{Mod}^1$ *on inverssed ekvivalentsifunktorid.*

TÕESTUS. 1. Paneme tähele, et iga $M_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ korral kehtivad, lausetest 3.14, 4.18 (1) ja näitest 3.36 tulenevalt, isomorfsused

$$\begin{aligned}((\_\_ \otimes_T P) \circ (\_\_ \otimes_S Q))(M) &= (M \otimes_S Q) \otimes_T P \\ &\cong M \otimes_S (Q \otimes_T P) \cong M \otimes_S S \cong M = \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}^1_S}(M).\end{aligned} \tag{4.17}$$

On lihtne näha, et allolev diagramm on kommutatiivne iga $M_S, M'_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ ja $f \in \mathrm{Hom}_S(M, M')$ korral,

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_S Q) \otimes_T P \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_Q \otimes \mathrm{id}_P"'] & M_S \arrow[d, "f"] \\
(M' \otimes_S Q) \otimes_T P \arrow[r, "\cong"'] & M'_S
\end{tikzcd}$$

kus isomorfismimärgi $\cong$ taga peitub loomulik isomorfism $(\_\_ \otimes_T P) \circ (\_\_ \otimes_S Q) \stackrel{\centerdot}{\to} \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}^1_S}$, mille komponentideks on real (4.17) saadud isomorfism, mistõttu kehtib $(\_\_ \otimes_T P) \circ (\_\_ \otimes_S Q) \cong \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}^1_S}$. Analoogiliselt kehtib ka $(\_\_ \otimes_S Q) \circ (\_\_ \otimes_T P) \cong \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}^1_T}$.

2. Duaalne vasakpoolsete moodulite suhtes. ∎

Morita ekvivalentsuse kirjeldusi

Nüüd tõestame lause, kus on toodud mitmeid Morita ekvivalentsete ringide omadusi.

Lause 4.23. *Olgu S ja T Morita ekvivalentsed ühikelemendiga ringid, kusjuures* $\mathbf{F}\colon \mathsf{Mod}^1_T \to \mathsf{Mod}^1_S$ *ja* $\mathbf{G}\colon \mathsf{Mod}^1_S \to \mathsf{Mod}^1_T$ *on inverssed ekvivalentsifunktorid. Tähistame*

$$P := \mathbf{F}(T) \qquad \textit{ja} \qquad Q := \mathbf{G}(S).$$

Siis on P ja Q loomulikult vaadeldavad bimoodulitena ${}_TP_S$ ja ${}_SQ_T$, mis rahuldavad järgnevaid tingimusi:

1. *moodulid P_S, ${}_TP$, Q_T ja ${}_SQ$ on kõik promoodustajad;*
2. *bimoodulid ${}_TP_S$ ja ${}_SQ_T$ on täpselt balansseeritud;*

3. $T \cong \mathrm{End}(P_S) \cong \mathrm{End}({}_SQ)$ *ja* $S \cong \mathrm{End}({}_TP) \cong \mathrm{End}(Q_T)$ *kui ringid;*
4. ${}_TP_S \cong \mathrm{Hom}_T(Q,T) \cong {}_S\mathrm{Hom}(Q,S)$ *ja* ${}_SQ_T \cong {}_T\mathrm{Hom}(P,T) \cong \mathrm{Hom}_S(P,S)$ *kui bimoodulid;*
5. $\mathbf{F} \cong \mathrm{Hom}_T(Q, \_\_)$ *ja* $\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(P, \_\_)$*;*
6. $\mathbf{F} \cong \_\_ \otimes_T P$ *ja* $\mathbf{G} \cong \_\_ \otimes_S Q$.

TÕESTUS. Olgu S ja T Morita ekvivalentsed ühikelemendiga ringid. Ilmselt kehtib $P = \mathbf{F}(T) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$. Seega on meil vaja defineerida hulgal P vasak T-toime, mida teeme järgnevalt:

$$T \times P \mapsto P, \qquad (t,p) \mapsto \mathbf{F}(\mathfrak{l}_T(t))(p) =: tp, \tag{4.18}$$

kus $\mathfrak{l}_T \colon T \to \mathrm{End}(T_T)$ on real (4.7) defineeritud ringide isomorfism (T_T on täpselt balansseeritud). Analoogiliselt näeme, et Q on (S,T)-bimoodul, kus vasak S-toime on defineeritud kujutuste $\mathbf{G}(\mathfrak{r}_S(s))$, $s \in S$, abil.

Kasutades järeldust 4.4, saame ringide isomorfismi

$$T \cong \mathrm{End}(T_T) \cong \mathrm{End}(\mathbf{F}(T)_S) = \mathrm{End}(P_S). \tag{4.19}$$

Paneme tähele, et kehtivad järgnevad parempoolsete T-moodulite isomorfismid (viimane isomorfism tuleneb näitest 2.47)

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(P,S) &\underset{(*)}{\cong} \mathrm{Hom}_T(\mathbf{G}(P), \mathbf{G}(S)) = \mathrm{Hom}_T((\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(T), Q) \\ &\cong \mathrm{Hom}_T(T,Q) \cong Q_T. \end{aligned}$$

Märkus 4.24. Isomorfism $(*)$ tuleb järeldusest 4.3 ja on meile seni teadaolevalt Abeli rühmade isomorfism $\mathbf{G}_1^{P,S} \colon \mathrm{Hom}_S(P,S) \to \mathrm{Hom}_T(\mathbf{G}(P), \mathbf{G}(S))$. Veendume, et ta on kooskõlas parempoolse T-toimega vastavatel hom-hulkadel (vt tabel 2.1 (lk 85)). Olgu $f \in \mathrm{Hom}_S(P,S)$ ja $t \in T$, sümboliga $t_{\_\_P}$ tähistame endomorfismi $(p \mapsto tp) \in \mathrm{End}(P_S)$ ning sümboliga $t_{\_\_T}$ tähistame endomorfismi $(t' \mapsto tt') \in \mathrm{End}(T_T)$. Kasutades mooduli ${}_TP$ T-toime definitsiooni (4.18) ja funktori definitsiooni, saame

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1^{P,S}(ft) &= \mathbf{G}(ft) = \mathbf{G}(f \circ (t\underset{P}{\_\_})) = \mathbf{G}(f \circ \mathbf{F}(\mathfrak{l}_T(t))) = \mathbf{G}(f) \circ \mathbf{G}(\mathbf{F}(\mathfrak{l}_T(t))) \\ &= \mathbf{G}(f) \circ (\zeta_T^{-1} \circ \mathfrak{l}_T(t) \circ \zeta_T) = \mathbf{G}(f) \circ (\zeta_T^{-1} \circ (t\underset{T}{\_\_}) \circ \zeta_T) = \mathbf{G}_1^{P,S}(f)t, \end{aligned}$$

kus $\zeta \colon (\mathbf{G} \circ \mathbf{F}) \xrightarrow{\cdot} \mathrm{id}_{\mathsf{Mod}^1_T}$ on loomulik isomorfism. Alloleval diagrammil on illustreeritud eelnevat toimet

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(T_T) \arrow[r, "\zeta_T"] \arrow[d, "(\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(\mathfrak{l}_T(t))"'] & T_T \arrow[d, "t\underset{T}{\_\_} = \mathfrak{l}_T(t)"] \\ (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(T_T) \arrow[r, bend left, "\zeta_T"] & T_T \arrow[l, bend left, "\zeta_T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

.

Mõistmaks T-toimet moodulil $\mathrm{Hom}_T(\mathbf{G}(P), \mathbf{G}(S))$ tasub vaadata märkust 2.11 ja esitust (2.45). Järelikult on $\mathbf{G}_1^{P,S}$ parempoolsete T-moodulite isomorfism, mistõttu kehtib $(\mathrm{Hom}_S(P,S))_T \cong Q_T$ (kui parempoolsed T-moodulid).

Varasemast teame, et mooduli P_S Morita kontekst on kuuik $(\mathrm{End}(P_S), S, {}_{\mathrm{End}(P_S)}P_S, {}_S\mathrm{Hom}_S(P,S)_{\mathrm{End}(P_S)}, \theta', \phi')$, kus θ' ja ϕ' on vastavad bimoodulite homomorfismid. Asendades $\mathrm{End}(P_S)$, ${}_{\mathrm{End}(P_S)}P_S$ ja ${}_S(\mathrm{Hom}_S(P,S))_{\mathrm{End}(P_S)}$ isomorfsete struktuuridega saame Morita konteksti

$$(T, S, {}_TP_S, {}_SQ_T, \theta, \phi),$$

kus θ ja ϕ on taaskord vastavad homomorfismid.

1. Moodul T_T on promoodustaja tänu näitele 4.10. Tulenevalt lemmast 4.14 on ka $P_S = \mathbf{F}(T_T)$ promoodustaja. Moodulite ${}_TP$, Q_T ja ${}_SQ$ promoodustajaks olemine järeldub lausest 4.21.
2. Järeldus 4.20.
3. Isomorfism $T \cong \mathrm{End}(P_S)$ on eelnevalt juba tõestatud. Ülejäänud isomorfismid tulevad lausete 4.18 ja 4.19 tingimustest 2d.
4. Küsitud bimoodulite isomorfismid tulevad lausete 4.18 ja 4.19 tingimustest 2b ja 2c.
5. Olgu $M_T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_T^1)$, siis $\mathbf{F}(M_T) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S^1)$. Näitest 2.47 saame, et kehtib S-moodulite isomorfsus

$$\mathbf{F}(M_T) \cong \mathrm{Hom}_S(S, \mathbf{F}(M)) \underset{(**)}{\cong} \mathrm{Hom}_T(\mathbf{G}(S), \mathbf{G}(\mathbf{F}(M))) \cong \mathrm{Hom}_T(Q, M). \tag{4.20}$$

Märgime, et isomorfism $(**)$ on S-moodulite isomorfism tänu analoogilisele arutelule märkuses 4.24 tooduga. On lihtne näha, et allolev diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(M_T) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] & \mathrm{Hom}_T(Q, M) \arrow[d, "f \circ _"] \\
\mathbf{F}(M'_T) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_T(Q, M')
\end{tikzcd}$$

kommuteerub iga $M_T, M'_T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_T^1)$ ja $f \in \mathrm{Hom}_T(M, M')$ korral (isomorfsuse märgi $\cong$ taga peitub siin isomorfism realt (4.20)), mistõttu näeme, et isomorfismi (4.20) abil saame konstrueerida loomuliku isomorfismi $\mathbf{F} \dot{\to} \mathrm{Hom}_T(Q, \_)$.
Analoogiliselt saab näidata, et $\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(P, \_)$.

6. Olgu $M_T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_T)$. Defineerime kujutuse

$$\beta_M\colon M \otimes_T P \to \mathrm{Hom}_T(Q, M), \quad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes p_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} m_k\theta(p_k \otimes \_).$$

Lause 4.18 osa 2c põhjal teame, et kujutus $\mathfrak{r}\colon P \to \mathrm{Hom}_T(Q, T)$, $p \mapsto \theta(p \otimes \_)$ on (T, S)-bimoodulite isomorfism. Paneme tähele, et iga $m \in M$ ja $p \in P$ korral kehtib

$$\begin{aligned} \beta_M(m \otimes p) &= m\theta(p \otimes \_) = m\mathfrak{r}(p) = \mu_M(m \otimes \mathfrak{r}(p)) \\ &= (\mu_M \circ (\mathrm{id}_M \otimes \mathfrak{r})(m \otimes p)) \\ &= ((\mu_M \circ \_) \circ \psi_{M,Q,T} \circ (\mathrm{id}_M \otimes \mathfrak{r}))(m \otimes p), \end{aligned}$$

kus $\psi_{M,Q,T}$ on lausest 3.22.

$$\begin{tikzcd} M \otimes_T P \arrow[r, "\beta_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \otimes \mathfrak{r}"'] & \mathrm{Hom}_T(Q, M) \\ M \otimes_T \mathrm{Hom}_T(Q, T) \arrow[r, "\psi_{M,Q,T}"'] & \mathrm{Hom}_T(Q, M \otimes_T T) \arrow[u, "\mu_M \circ \_"'] \end{tikzcd}$$

Järelikult kehtib $\beta_M = (\mu_M \circ \_) \circ \psi_{M,Q,T} \circ (\mathrm{id}_M \otimes \mathfrak{r})$ ja β_M on korrektselt defineeritud S-moodulite homomorfism. Homomorfismide tensorkorrutis $\mathrm{id}_M \otimes \mathfrak{r}$ on isomorfism tänu järeldusele 3.20. Lausest 4.8 teame, et $\psi_{M,Q,T}$ on isomorfism. Tulenevalt näitest 3.36 on μ_M isomorfism ja $\mu_M \circ \_ = \mathrm{Hom}_T(Q, \_)(\mu_M)$ on isomorfism tänu lemmale 1.13. Seega, β_M on isomorfism.
Lõpetuseks olgu $M_T, M'_T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_T)$ ja $f \in \mathrm{Hom}_T(M, M')$ ning vaatleme allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd} M \otimes_T P \arrow[r, "\beta_M"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_P"'] & \mathrm{Hom}_T(Q, M) \arrow[d, "f \circ \_"] \\ M' \otimes_T P \arrow[r, "\beta_{M'}"'] & \mathrm{Hom}_T(Q, M') \end{tikzcd}$$

Paneme tähele, et iga elementaartensori $m \otimes p \in M \otimes_T P$ korral kehtib

$$\begin{aligned} ((f \circ \_) \circ \beta_M)(m \otimes p) &= (f \circ \_)(m\theta(p \otimes \_)) = f \circ (m\theta(p \otimes \_)) \\ &= f(m\theta(p \otimes \_)) = f(m)\theta(p \otimes \_) \\ &= \beta_{M'}(f(m) \otimes p) = (\beta_{M'} \circ (f \otimes \mathrm{id}_P))(m \otimes p). \end{aligned}$$

Järelikult on ülalolev diagramm kommutatiivne ja $\beta = (\beta_M)_{M\in\mathsf{Ob}(\mathsf{Mod}^1_T)}$: $M\otimes_T \_ \dashrightarrow \mathrm{Hom}_T(Q,\_)$ on loomulik isomorfism. Kokkuvõttes oleme tõestanud, et

$$\mathbf{F} \cong \mathrm{Hom}_T(Q,\_) \cong \_\otimes_T P.$$

Analoogiliselt saame ka loomuliku isomorfismi $\mathbf{G} \cong \_\otimes_S Q$. ■

Lõpuks oleme valmis tõestama ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse kirjelduse promoodustajate kaudu.

Teoreem 4.25 (Morita II). *Olgu S ja T ühikelemendiga ringid ning $\mathbf{F}$: $\mathsf{Mod}^1_T \to \mathsf{Mod}^1_S$ ja $\mathbf{G}\colon \mathsf{Mod}^1_S \to \mathsf{Mod}^1_T$ funktorid. Funktorid $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ on inverssed ekvivalentsifunktorid parajasti siis, kui leidub (T,S)-bimoodul ${}_TP_S$ nii, et kehtivad tingimused:*

1. *${}_TP$ ja P_S on promoodustajad;*
2. *${}_TP_S$ on täpselt balansseeritud;*
3. *$\mathbf{F} \cong \_\otimes_T P$ ja $\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(P,\_)$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Järeldub lausest 4.23.

Piisavus. Leidugu (T,S)-bimoodul ${}_TP_S$, mis rahuldab tingimusi 1, 2 ja 3. Lause 4.23 tingimustest 4, 5 ja 6 saame, et leidub (S,T)-bimoodul ${}_SQ_T \cong \mathrm{Hom}_T(P,T)$ nii, et

$$\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(P,\_) \cong \_\otimes_S Q \cong \_\otimes_S ({}_T\mathrm{Hom}(P,T)).$$

Lausest 4.22 saame nüüd, et $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ on inverssed ekvivalentsifunktorid. ■

Nüüd saame väga lihtsalt tõestada, et Morita ekvivalentsuse defineerimisel oleksime samahästi võinud kasutada ka vasakpoolsete moodulite kategooriaid.

Järeldus 4.26. *Olgu S ja T ühikelemendiga ringid. Kehtib $\mathsf{Mod}^1_S \approx \mathsf{Mod}^1_T$ parajasti siis, kui ${}_S\mathsf{Mod}^1 \approx {}_T\mathsf{Mod}^1$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Kehtigu $\mathsf{Mod}^1_S \approx \mathsf{Mod}^1_T$. Tulenevalt teoreemist 4.25 leidub täpselt balansseeritud (T,S)-bimoodul ${}_TP_S$ nii, et ${}_TP$ ja P_S on promoodustajad ning inverssed ekvivalentsifunktorid

$$\_\otimes_T P\colon \mathsf{Mod}^1_T \to \mathsf{Mod}^1_S, \qquad \mathrm{Hom}_S(P,\_)\colon \mathsf{Mod}^1_S \to \mathsf{Mod}^1_T.$$

Tulenevalt lausest 4.23 on $\mathrm{Hom}_S(P,S) =: {}_SQ_T$ samuti täpselt balansseeritud bimoodul nii, et ${}_SQ$ ja Q_T on promoodustajad. Seega võime me hulka Q vaadelda $(T^{\mathrm{op}},S^{\mathrm{op}})$-bimoodulina ${}_{T^{\mathrm{op}}}Q_{S^{\mathrm{op}}}$ (vt kommentaar pärast definitsiooni 2.36). On lihtne näha, et ka ${}_{T^{\mathrm{op}}}Q_{S^{\mathrm{op}}}$ on täpselt balansseeritud ning ${}_{T^{\mathrm{op}}}Q$ ja $Q_{S^{\mathrm{op}}}$ on promoodustajad. Nüüd saame tänu teoreemile 4.25, et ${}_S\mathsf{Mod}^1 \cong \mathsf{Mod}^1_{S^{\mathrm{op}}} \approx \mathsf{Mod}^1_{T^{\mathrm{op}}} \cong {}_T\mathsf{Mod}^1$.

Piisavus. Täpselt analoogiline eelmise punktiga. ■

Järgnevalt toome veel kaks kirjeldust ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsusele. Esimene neist seob ekvivalentseid ringe mingi progeneraatori endomorfismide ringiga.

Lause 4.27. *Olgu S ja T ühikelemendiga ringid. Järgnevad väited on samaväärsed:*

1. *ringid S ja T on Morita ekvivalentsed;*
2. *leidub promoodustaja P_S nii, et $T \cong \mathrm{End}(P_S)$;*
3. *leidub promoodustaja ${}_SQ$ nii, et $T \cong \mathrm{End}({}_SQ)$.*

TÕESTUS. ($1 \implies 2$). Järeldub lause 4.23 tingimustest 1 ja 3.

($2 \implies 1$). Olgu S-moodul P_S promoodustaja. Vastavalt eelmisele alapeatükile saame konstrueerida Morita konteksti $(\mathrm{End}(P_S), S, P, \mathrm{Hom}_S(P, S), \theta, \phi)$, kus θ ja ϕ on vastavad ringide homomorfismid. Nüüd saame teoreemist 4.25, et $S \approx_{\mathrm{ME}} \mathrm{End}(P_S)$. On selge, et sel juhul on S Morita ekvivalentne iga ringiga T, mille korral $T \cong \mathrm{End}(P_S)$.

($1 \iff 3$). Analoogiline eelmise kahe punktiga. ■

Järgnevalt vaatleme veel ühte olulist ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse kirjeldust, mis kasutab maatriksringe ja idempotente. Antud kirjeldus saab meile oluliseks hiljem, kui hakkame vaatlema ringide laiendeid. Kõigepealt tõestame kaks sissejuhatavat abilemmat. Esimene neist on lineaaralgebrast tuntud asjaolu, et lõplikumõõtmelise vektorruumi lineaarteisenduste ring on üksüheses vastavuses ruutmaatriksite ringiga (teoreem 4.2.12 raamatus [5]), üldistus.

Lemma 4.28. *Olgu S ühikelemendiga ring ja $n \in \mathbb{N}_1$ naturaalarv. Leidub ringide isomorfism $\mathrm{Mat}_n(S) \to \mathrm{End}(S^{\oplus n})$, kus hulka $S^{\oplus n}$ vaadeldakse parempoolse S-moodulina.*

TÕESTUS. Olgu S ühikelemendiga ring ja $n \in \mathbb{N}_1$. Defineerime kujutuse

$$\varphi\colon \mathrm{Mat}_n(S) \to \mathrm{End}\left(S^{\oplus n}\right), \quad [s_{hk}]_{h,k=1}^n \mapsto \left((s'_j)_{j=1}^n \mapsto \left(\sum_{t=1}^n s_{jt} s'_t \right)_{j=1}^n \right).$$

Vaadeldes (lõplike) jadade hulka $S^{\oplus n}$ kui veerumaatriksite hulka $\mathrm{Mat}_{n,1}(S)$ näeme, et φ definitsioonis on lihtsalt maatriksite korrutamine (2.22). Seega, iga $M \in \mathrm{Mat}_n(S)$ korral $\varphi(M)\colon \sigma \mapsto M \cdot \sigma$. Siit näeme kohe, et φ on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Olgu $M, M' \in \mathrm{Mat}_n(S)$ ja $\sigma \in S^{\oplus n}$, siis

$$\varphi(M \cdot M')(\sigma) = (M \cdot M') \cdot \sigma = M \cdot (M' \cdot \sigma) = \varphi(M)(M' \cdot \sigma)$$

$$= \varphi(M)(\varphi(M')(\sigma)) = (\varphi(M) \circ \varphi(M'))(\sigma).$$

Seega, φ on ringide homomorfism. Olgu $M = [m_{kh}]_{k,h=1}^{n} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Valime indeksi $j \in \{1, \ldots, n\}$. Paneme tähele, et

$$\varphi(M)((0, \ldots, \underset{j.\ \text{koht}}{1}, \ldots, 0)) = (m_{1j}, \ldots, m_{nj}) = (0, \ldots, 0).$$

Kokkuvõttes saame, et $M = [m_{kh}]_{k,h=1}^{n} = 0$ ja φ on injektiivne.

Olgu $f \in \operatorname{End}(S^{\oplus n})$. Paneme tähele, et iga $h, k \in \{1, \ldots, n\}$ korral kehtib $\rho_h \circ f \circ \iota_k \in \operatorname{End}(S_S)$, kus $\iota_k \colon S \to S^{\oplus n}$ ja $\rho_h \colon S^{\oplus n} \to S$ on vastavalt otsesumma sisestused ja projektsioonid. Suvalise $\sigma = (s_j)_{j=1}^{n} \in S^{\oplus n}$ korral

$$\begin{aligned}
f(\sigma) &= (\rho_j(f(\sigma)))_{j=1}^{n} = ((\rho_j \circ f)(\mathrm{id}_{S^{\oplus n}}(\sigma)))_{j=1}^{n} \\
&= \left((\rho_j \circ f)\left(\sum_{k=1}^{n} (\iota_k \circ \rho_k)(\sigma)\right)\right)_{j=1}^{n} = \left(\sum_{k=1}^{n} (\rho_j \circ f \circ \iota_k)(\rho_k(\sigma))\right)_{j=1}^{n} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (\rho_j \circ f \circ \iota_k)(s_k)\right)_{j=1}^{n} = \left(\sum_{k=1}^{n} (\rho_j \circ f \circ \iota_k)(1)s_k\right)_{j=1}^{n} \\
&= \varphi\left([(\rho_h \circ f \circ \iota_k)(1)]_{h,k=1}^{n}\right)(\sigma)
\end{aligned}$$

Seega, φ on sürjektiivne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et φ on ringide isomorfism. ■

Lemma 4.29. *Olgu S ühikelemendiga ring, $n \in \mathbb{N}_1$, $e = [e_{hk}]_{h,k=1}^{n} \in \operatorname{Mat}_n(S)$ idempotent. Sel juhul kehtivad võrdused*

$$\operatorname{Tr}(eS^{\oplus n}) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} S e_{hk} S \quad \text{ja} \quad \operatorname{Mat}_n(S) e \operatorname{Mat}_n(S) = \operatorname{Mat}_n(\operatorname{Tr}(eS^{\oplus n})).$$

TÕESTUS. Kehtigu lause eeldused. Vaatleme hulka $S^{\oplus n}$ kui veerumaatriksite hulka $\operatorname{Mat}_{n,1}(S)$. Olgu $\sigma \in eS^{\oplus n}$. Tähistame maatriksi e veeruvektorid $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in S^{\oplus n}$. Sel juhul leidub $\sigma' \in S^{\oplus n}$ nii, et $\sigma = e\sigma'$. Seega $e\sigma = ee\sigma = e\sigma' = \sigma$. Nüüd

$$\sigma = e\sigma = \begin{bmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & \ldots & e_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11}\sigma_1 + \ldots + e_{1n}\sigma_n \\ \vdots \\ e_{n1}\sigma_1 + \ldots + e_{nn}\sigma_n \end{bmatrix} = \sum_{h=1}^{n} \begin{bmatrix} e_{1h} \\ \vdots \\ e_{nh} \end{bmatrix} \sigma_h$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \epsilon_h \sigma_h = \sum_{h=1}^{n} \epsilon_h \rho_h(\sigma),$$

kus $\rho_k\colon S^{\oplus n} \to S$ on projektsioon. Paneme tähel, et iga $f \in \mathrm{Hom}_S(eS^{\oplus n}, S)$ korral

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= f\left(\sum_{h=1}^{n} \epsilon_h \rho_h(\sigma)\right) = \sum_{h=1}^{n} f(\epsilon_h)\rho_h(\sigma) = \sum_{h=1}^{n} f(\epsilon_h)\rho_h\left(\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \rho_k(\sigma)\right) \\ &= \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\epsilon_h)\rho_h(\epsilon_k)\rho_k(\sigma) = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(\epsilon_h)e_{hk}\rho_k(\sigma) \in \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} Se_{hk}S. \end{aligned}$$

Eelnevas kasutasime asjaolu, et $\epsilon_h = ez_h \in eS^{\oplus n}$, kus z_h on vektor, mille h. kohal on 1 ja 0 kõigil ülejäänud kohtadel. See tähelepanek on vajalik, et saaks vaadelda objekti $f(\epsilon_h)$.

Tähistades $s_1 := f(\epsilon_1), \ldots, s_n := f(\epsilon_n)$ näeme, et $f = s_1\rho_1 + \ldots + s_n\rho_n$. Teisest küljest paneme tähele, et iga $s, s' \in S$ ja $h, k \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$se_{hk}s' = s\rho_h(\epsilon_k)s' = s\rho_h(\epsilon_k s') \in \mathrm{Im}\,(s\rho_h).$$

Seega näeme, et

$$\mathrm{Tr}(eS^{\oplus n}) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_S(eS^{\oplus n}, S)} \mathrm{Im}\, f = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} Se_{hk}S.$$

Tähistame sümboliga E_{jk} maatriksi hulgast $\mathrm{Mat}_n(S)$, mille (j,k)-komponent on 1 ja ülejäänud komponendid on kõik nullelemendid. Paneme tähele, et iga $s, s' \in S$ ja $j, k, h, l \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$sE_{hk} \cdot e \cdot s'E_{jl} = se_{kj}s'E_{hl} \in \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Tr}(eS^{\oplus n})).$$

Pannes tähele, et iga maatriks $M \in \mathrm{Mat}_n(S)$ esitub kujul sE_{hk} olevate maatriksite summana saame, et $\mathrm{Mat}_n(S)e\,\mathrm{Mat}_n(S) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Tr}(eS^{\oplus n}))$. Teisest küljest, vaadeldes maatriksit $se_{hk}s'E_{jl}$, kus $s, s' \in S$ ja $j, k, h, l \in \{1, \ldots, n\}$ näeme, et

$$se_{hk}s'E_{jl} = (sE_{jh})e(s'E_{kl}) \in \mathrm{Mat}_n(S)e\,\mathrm{Mat}_n(S).$$

Pannes tähele, et hulk $\mathrm{Mat}_n(\mathrm{Tr}(eS^{\oplus n}))$ esitub eelpool toodud maatriksite summana, siis oleme lemma tõestatud. ■

Nüüd oleme valmis esitama ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse kirjelduse, kasutades maatriksringe ja idempotente. Praegu tõestame sellest kirjeldusest ainult tarvilikkuse osa. Tõestamaks järgneva kirjelduse piisavuse osa klassikaliste meetoditega peaksime siinkohal ühikelemendiga ringide teooriat veel märkimisväärselt edasi arendama. Siiski saame selle piisavuse osa tõestuse peatükis 6 üldisemast juhust hõlpsasti kätte (vt lk 245). Märgime, et kui e on ringi S idempotent, siis on lihtne näha, et alamhulk $eSe = \{eSe \mid s \in S\}$ on ringi S alamring (definitsiooni 2.28 mõttes). Lisaks defineerime, et ringi S idempotenti $e \in S$ nimetatakse **täisidempotendiks**, kui $S = SeS$. On selge, et ühikelement 1 on täisidempotent.

Teoreem 4.30. *Olgu S ja T ühikelemendiga ringid. Ringid S ja T on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub naturaalarv $n \in \mathbb{N}_1$ ja täisidempotent $e \in \mathrm{Mat}_n(S)$ nii, et $T \cong e(\mathrm{Mat}_n(S))e$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu ühikelemendiga ringid S ja T Morita ekvivalentsed. Tulenevalt lausest 4.27 leidub promoodustaja P_S nii, et $T \cong \mathrm{End}(P_S)$. Tänu lausele 4.13 saame leida $n \in \mathbb{N}_1$ ja $P'_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_S)$ nii, et $S^{\oplus n} \cong P_S \oplus P'_S$ parempoolsete S-moodulitena. Teisalt kehtib ringide isomorfism $\mathrm{End}(S^{\oplus n}) \cong \mathrm{Mat}_n(S)$ tulenevalt lemmast 4.28. Järelikult leidub ringide isomorfism $\mathrm{End}(P_S \oplus P'_S) \cong \mathrm{Mat}_n(S)$. Olgu $e \in \mathrm{Mat}_n(S)$ endomorfismile

$$\varepsilon\colon P_S \oplus P'_S \to P_S \oplus P'_S, \qquad (p, p') \mapsto (p, 0)$$

vastav maatriks. Ilmselt kehtib $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$, mistõttu e on idempotent ringis $\mathrm{Mat}_n(S)$. Endomorfism ε on täpselt lauses 2.57 esinev idempotent, mistõttu kehtib $P_S \cong \mathrm{Im}\,\varepsilon \cong eS^{\oplus n}$. Lemmast 4.29 saame nüüd, et

$$\mathrm{Mat}_n(S)e\,\mathrm{Mat}_n(S) = \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Tr}(eS^{\oplus n})) = \mathrm{Mat}_n(S),$$

kus viimane võrdus järeldub lausest 4.12, kuna $P_S \cong eS^{\oplus n}$ on moodustaja. Siit näeme, et $e \in \mathrm{Mat}_n(S)$ on täisidempotent.

Defineerime kujutuse

$$\varphi\colon\ \mathrm{End}(P_S) \to \varepsilon\,\mathrm{End}(P_S \oplus P'_S)\varepsilon, \qquad f \mapsto ((p, p') \mapsto (f(p), 0)).$$

Iga $f \in \mathrm{End}(P_S)$ korral ilmselt kehtib $\varphi(f) \in \mathrm{End}(P_S \oplus P'_S)$. Lisaks, suvalise (p, p') korral,

$$(\varepsilon \circ \varphi(f) \circ \varepsilon)(p, p') = \varepsilon(\varphi(f)(p, 0)) = \varepsilon(f(p), 0) = (f(p), 0).$$

Seega $\varphi(f) \in \varepsilon\,\mathrm{End}(P_S \oplus P'_S)\varepsilon$.

Olgu $g \in \mathrm{End}(P_S \oplus P'_S)$. Sel juhul, iga $(p, p') \in P_S \oplus P'_S$ korral,

$$\begin{aligned}(\varepsilon \circ g \circ \varepsilon)(p, p') &= \varepsilon(g(p, 0)) = (\rho_P(g(p, 0)), 0) = ((\rho_P \circ g \circ \iota_P)(p), 0)\\ &= \varphi(\rho_P \circ g \circ \iota_P)(p, p').\end{aligned}$$

Kuna $\rho_P \circ g \circ \iota_P \in \mathrm{End}(P_S)$, siis näeme, et φ on korrektselt defineeritud sürjektiivne kujutus. On lihtne näha, et φ on ringide homomorfism. Kui $f \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, siis iga $p \in P$ korral $(f(p), 0) = (0, 0)$ ehk $f = \mathbf{0}$ ja φ on injektiivne. Seega kehtib $T \cong \mathrm{End}(P_S) \cong \varepsilon\,\mathrm{End}(P_S \oplus P'_S)\varepsilon \cong e\,\mathrm{Mat}_n(S)e$. ∎

Eelnevast teoreemist saame järgmise tuntud järelduse, mille „puhtjuhuslikult“ tõestame hiljem lausa kaks korda (järeldustena 5.11 ja 6.11).

Järeldus 4.31. *Olgu S ühikelemendiga ring ja $n \in \mathbb{N}_1$ naturaalarv. Ringid S ja $\mathrm{Mat}_n(S)$ on Morita ekvivalentsed.*

4.2 Probleemid ühikelemendita ringide Morita ekvivalentsuse defineerimisel

Eelmises alapeatükis vaatlesime ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsust. Teadupoolest on käesoleva raamatu eesmärk siiski uurida ja vaadelda just ühikelemendita ringide Morita ekvivalentsust. Selleks oleks vaja laiendada Morita ekvivalentsuse definitsiooni. Esmapilgul tundub, et kõige loomulikum oleks nõuda, et kaks ringi R ja S on ekvivalentsed parajasti siis, kui kõikide (parempoolsete) moodulite kategooriad Mod_R ja Mod_S on ekvivalentsed. Sellisest definitsioonist tulevad aga mitmed probleemid, mida käesolevas alapeatükis selgitame. Siinne mõttekäik on inspireeritud Maríni magistritööst [39].

Esiteks, kuna meie eesmärk on üldistada ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsust, siis sooviksime, et kui ühikelemendiga ringid S ja T on ekvivalentsed (kui ringid), siis kehtib $S \approx_{\mathrm{ME}} T$ (definitsiooni 4.1 järgi). Kuid uurime kõikide moodulite kategooriat üle ühikelemendiga ringi natuke täpsemalt.

Olgu S ühikelemendiga ring ning $M_S \in \mathsf{Mod}_S$. Vaatleme kujutust

$$\epsilon\colon M \to \mathbf{t}(M) \oplus M/\mathbf{t}(M), \quad m \mapsto (m - m1, [m1]).$$

Ilmselt kehtib iga $m \in M$ ja $s \in S$ korral

$$(m - m1)s = ms - (m1)s = ms - m(1s) = ms - ms = 0,$$

mistõttu tõesti kehtib $m - m1 \in \mathbf{t}(M)$ ja ϵ on korrektselt defineeritud kujutus. Paneme tähele, et iga $m, m' \in M$ ja $s \in S$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}
\epsilon(m + m') &= (m + m' - (m + m')1, [(m + m')1]) \\
&= ((m - m1) + (m' - m'1), [m1] + [m'1]) \\
&= (m - m1, [m1]) + (m' - m'1, [m'1]) = \epsilon(m) + \epsilon(m'); \\
\epsilon(ms) &= (ms - (ms)1, [(ms)1]) = (ms - m((1s)1), [m((1s)1)]) \\
&= (ms - (m1)(s1), [(m1)(s1)]) = (ms - (m1)s, [(m1)s]) \\
&= ((m - m1)s, [m1]s) = (m - m1, [m1])s = \epsilon(m)s,
\end{aligned}$$

millest näeme, et ϵ on S-moodulite homomorfism. Kuid kehtib veel rohkemat: olgu $m \in \operatorname{Ker}\epsilon$, siis $m - m1 = 0$ ehk $m = m1$, ning $m \in \mathbf{t}(M)$, kuna $[m] = [m1] = [0] = \mathbf{t}(M)$. Seega $m = m1 = 0$, mistõttu ϵ on injektiivne. Teisalt, olgu $(m, [m']) \in \mathbf{t}(M) \oplus M/\mathbf{t}(M)$. Paneme tähele, et $m1 = 0$ (sest $m \in \mathbf{t}(M)$),

$$(m + m'1) - (m + m'1)1 = m + m'1 - m1 - m'(1 \cdot 1) = m + m'1 - m'1 = m$$

ja $[m + m'1] = [m] + [m'1] = [0] + [m'1] = [m'1]$. Seega näeme, et kehtib $\epsilon(m + m'1) = (m, [m'1]) = (m, [m'])$, mistõttu on ϵ sürjektiivne. Kokkuvõttes nägime, et ϵ on S-moodulite isomorfism. Ilmselt kehtib $M/\mathbf{t}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{TfMod}_S)$.

Lisaks näeme, et iga $f \in \mathrm{Hom}_S(M, N)$ korral kehtib

$$f = \epsilon^{-1} \circ (f|_{\mathbf{t}(M)}, f') \circ \epsilon, \quad M \to \mathbf{t}(M) \oplus M/\mathbf{t}(M) \to \mathbf{t}(N) \oplus N/\mathbf{t}(N) \to N,$$

kus $f' \colon M/\mathbf{t}(M) \to N/\mathbf{t}(N)$, $[m] \mapsto [f(m)]$, st $f' = \mathbf{T}(f)$ (vt lause 2.43). Nüüd näeme, et (isomorfismi täpsuseni) kehtib sisalduvus

$$\mathsf{Mod}_S \subseteq \mathsf{TMod}_S \times \mathsf{TfMod}_S = \mathsf{TMod}_S \times \mathsf{Mod}^1_S, \tag{4.21}$$

kus TMod_S on väändega parempoolsete S-moodulite kategooria.

Seosest (4.21) näeme, et kui me vaatleme ühikelemendiga ringide S ja T korral olukorda $\mathsf{Mod}_S \approx \mathsf{Mod}_T$, siis mängivad suurt rolli väändega moodulite otsetegurid TMod_S ja TMod_T. Paneme tähele, et kui me ühikelemendiga ringide S ja T korral nõuame, et $\mathsf{Mod}^1_S \approx \mathsf{Mod}^1_T$, siis üldjuhul ei ole meil mingit informatsiooni, kuidas on omavahel seotud kategooriad TMod_S ja TMod_T. Need väändega moodulite otsetegurid ei lase meil Morita ekvivalentsust ühikelemendita ringide jaoks üldistada kasutades kategooriaid Mod_S ja Mod_R.

Teiseks, järgnevalt näitame, et ringi R moodulite kategooria Mod_R on väga tugevalt seotud „klassikaliste“ $(R\times\mathbb{Z})$-moodulite kategooriaga $\mathsf{Mod}^1_{R\times\mathbb{Z}}$, kuid kategooria $\mathsf{Mod}^1_{R\times\mathbb{Z}}$ on suhteliselt halbade omadustega. (Meenutame ringi R Dorroh' laiendi mõistet näitest 2.5.) Tõestame järgneva teoreemi, mis natuke avab põhjuseid, miks kõigi moodulite kategooria Mod_R ei ole hea ringide ekvivalentsuse defineerimiseks.

Teoreem 4.32. *Olgu R ring ja $R' = R \times \mathbb{Z}$ tema Dorroh' laiend. Kõikide R-moodulite kategooria Mod_R on ekvivalentne kategooriaga $\mathsf{Mod}^1_{R'}$.*

TÕESTUS. Olgu R ring. Vaatleme R-moodulit $M_R \in \mathsf{Mod}_R$. Defineerime R'-toime kujul

$$M \times R' \to M, \qquad m(r,z) := mr + zm = mr + \underbrace{m + \ldots + m}_{z \text{ liidetavat}}.$$

Sellise toimega saame mooduli $M_{R'}$. Paneme tähele, et iga $m \in M$ korral kehtib

$$m = m0 + 1m = m(0,1) \in MR',$$

mistõttu saame, et $M_{R'}$ on unitaarne R'-moodul. Nüüd defineerime funktori

$$\mathbf{F} \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}^1_{R'}, \qquad M_R \mapsto M_{R'}, \quad f \mapsto f.$$

Paneme tähele, et iga $m \in M$ ja $(r,z) \in R'$ ja R-moodulite homomorfismi $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ korral kehtib

$$\mathbf{F}(f)(m(r,z)) = f(mr + zm) = f(m)r + zf(m) = f(m)(r,z),$$

mistõttu kehtib $\mathbf{F}(f) = f \in \mathrm{Hom}_{R'}(M_{R'}, N_{R'})$. Siit näeme, et $\mathbf{F}$ on tõepoolest funktor.

Teisalt näeme, et ring $\hat{R} = \{(r,0) \mid r \in R\} \cong R$ on ideaal ringis R'. Võttes R'-mooduli $N_{R'} \in \mathsf{Mod}^1_{R'}$, saame vaadelda $\hat{R}$-moodulit $N_{\hat{R}}$, mille $\hat{R}$-toime on lihtsalt mooduli $N_{R'}$ R'-toime ahendatuna hulgale $N \times \hat{R}$, mille saame samastada R-mooduliga N_R, kuna iga $n \in N$ ja $r \in R$ korral kehtib $nr = n(r,0)$. Nüüd võime defineerida funktori

$$\mathbf{G} \colon \mathsf{Mod}^1_{R'} \to \mathsf{Mod}_R, \qquad N_{R'} \mapsto N_R, \quad f \mapsto f.$$

On selge, et funktorid $\mathbf{F}$ ja $\mathbf{G}$ on inverssed ekvivalentsifunktorid. ∎

Ühtlasi saame teoreemist 4.32, et kui nõuda ringide R ja S ekvivalentsuseks kategooriate Mod_R ja Mod_S ekvivalentsust, siis on see samaväärne ühikelemendiga ringide R' ja S' Morita ekvivalentsusega. Samas teame, et ring R' on üldiselt võrdlemisi viletsate omadustega isegi siis, kui R on heade omadustega.

Toome näiteks von Neumanni[11] regulaarsuse: ringi R nimetatakse **von Neumanni mõttes regulaarseks**, kui iga elemendi $r \in R$ korral leidub $x \in R$ nii, et $r = rxr$. Eelnevalt mainisime, et ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsus säilitab alati von Neumanni regulaarsuse (selle fakti

[11] John von Neumann (1903–1957) – ungari-USA matemaatik, loogik, füüsik, arvutiteadlane ja insener.

tõestus jääb käesoleva raamatu mahust välja). Samas, kui R on von Neumanni mõttes regulaarne, siis Dorroh' laiend R' seda kindlasti ei ole. Kuna võttes $(r, z) \in R'$, kus $z \notin \{-1, 0, 1\}$, siis ei leidu täisarvu $x \in \mathbb{Z}$ nii, et $z = zxz$. Järelikult ei säilita kõikide moodulite kategooriate abil defineeritud ringide ekvivalentsus kindlasti von Neumanni regulaarsust, kuigi definitsiooni 4.1 abil defineeritud ekvivalentsus seda alati teeb. Selliseid omadusi, mida kõikide moodulite kategooriatega defineeritud ekvivalentsus ei säilita, on veel mitmeid, kuid ka nende pikem selgitus jääb käesoleva raamatu mahust välja.

Kokkuvõttes on nüüdseks loodetavasti lugeja veendunud, et kõigi moodulite kategooriate abil pole mõistlik defineerida ühikelemendita ringide ekvivalentsust.

Märkus 4.33. Märgime siinkohal, et teoreemi 4.32 tõestusest saab teha ühe kasuliku järelduse. Nimelt, kui R on ring ning M_R ja ${}_RN$ R-moodulid, siis kehtib võrdus

$$M \otimes_R N = M \otimes_{R'} N. \tag{4.22}$$

Eelneva võrduse tõestuseks näitame, et R- ja R'-tasakaalustatuse mõisted langevad kokku. Olgu A Abeli rühm ja $\beta \colon M \times N \to A$ mõlema argumendi suhtes aditiivne kujutus. Oletame, et β on R-tasakaalustatud kujutus. Paneme tähele, et iga $m \in M$, $n \in N$ ja $(r, z) \in R'$ korral

$$\begin{aligned}\beta(m(r, z), n) &= \beta(mr + zm, n) = \beta(mr, n) + \beta(zm, n) = \beta(m, rn) + z\beta(m, n)\\ &= \beta(m, rn) + \beta(m, zn) = \beta(m, rn + zn) = \beta(m, (r, z)n),\end{aligned}$$

mistõttu β on R'-tasakaalustatud. Teisalt oletame nüüd, et β on R'-tasakaalustatud. Iga $m \in M$, $n \in N$ ja $r \in R$ korral

$$\beta(mr, b) = \beta(mr + 0m, n) = \beta(m(r, 0), n) = \beta(m, (r, 0)n) = \beta(m, rn),$$

mistõttu β on R-tasakaalustatud.

Võrdus (4.22) järeldub nüüd otse tensorkorrutise definitsioonist 3.2.

4.3 Püsivate, kinniste ja unitaarsete-väändeta moodulite kategooriate ekvivalentsus

Olgu R ring. Eelnevalt nägime, et kategooria Mod_R ei sobi Morita ekvivalentsuse üldistamiseks ühikelemendita ringidele. Siiski leidub kategooriaid, mille abil defineeritud ekvivalentsus, üldistab ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsust mõistlikul viisil. Käesolevas alapeatükis uurime neist mitmeid. Seosest (4.21) näeme, et kõikide moodulite kategooriate ekvivalentsust nõudes, rikuvad olukorda väändega moodulid. Seepärast vaatleme edaspidi just väändeta mooduleid.

Sümboliga UTfMod_R tähistame kõikide parempoolsete R-moodulite kategooria Mod_R täielikku alamkategooriat, mis koosneb unitaarsetest ja väändeta moodulitest, mida nimetamegi *unitaarseteks-väändeta* R-mooduliteks, st

$$\mathsf{UTfMod}_R := \mathsf{TfMod}_R \cap \mathsf{UMod}_R.$$

Eelnevalt oleme tutvunud veel kahe olulise moodulite kategooriaga: püsivate R-moodulite kategooria FMod_R ja kinniste R-moodulite kategooria CMod_R. Teame ka, et kui S on ühikelemendiga ring, siis kehtib

$$\mathsf{Mod}^1_S = \mathsf{UTfMod}_S = \mathsf{FMod}_S = \mathsf{CMod}_S.$$

Osutub, et kõik need kolm kategooriat sobivad hästi ühikelemendita ringide Morita ekvivalentsuse defineerimiseks. Käesolevas alapeatükis näeme, et idempotentse ringi R korral on nad ka omavahel ekvivalentsed kategooriad.

Järgnevalt näitame, et kui R on idempotentne ring, siis igasse kategooriasse UTfMod_R, FMod_R ja CMod_R leidub mittetriviaalne funktor kategooriast Mod_R. Selle alapeatüki tulemused ilmusid esimest korda artiklis [40]. Kõigepealt tutvustame kõiki kolme vajaminevat funktorit.

Kõigepealt vaatleme funktorit kategooriasse UTfMod_R.

Lause 4.34. *Olgu R idempotentne ring. Leidub mittetriviaalne funktor*

$$\mathbf{Q} := \mathbf{T} \circ \mathbf{U} = (\_/\mathbf{t}(\_)) \circ (\_R) \colon \; \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{UTfMod}_R.$$

Seejuures kehtib $\mathbf{Q} \cong \mathbf{U} \circ \mathbf{T}$.

Selgituseks ütleme, et oleme siin kasutanud sama sümbolit funktorite ja nende ahendite jaoks. Teisisõnu, loomulik isomorfsus $\mathbf{T} \circ \mathbf{U} \cong \mathbf{U} \circ \mathbf{T}$ tähendab tegelikult alloleva diagrammi kommutatiivsust (loomuliku isomorfismi täpsuseni).

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Mod}_R \arrow[r, "\mathbf{U}"] \arrow[d, "\mathbf{T}"'] \arrow[dr, "\mathbf{Q}"] & \mathsf{UMod}_R \arrow[d, "\mathbf{T}|_{\mathsf{UMod}_R}"] \\
\mathsf{TfMod}_R \arrow[r, "\mathbf{U}|_{\mathsf{TfMod}_R}"'] & \mathsf{UTfMod}_R
\end{tikzcd}$$

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Lausetest 2.16 ja 2.43 teame, et $\mathbf{U} = \_R \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{UMod}_R$ ja $\mathbf{T} = \_/\mathbf{t}(\_) \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{TfMod}_R$ on funktorid. Järelikult on ka nende kompositsioon $\mathbf{T} \circ \mathbf{U} \colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{TfMod}_R$ funktor.

Lausest 2.27 saame, et funktorit $\mathbf{Q} = \mathbf{T} \circ \mathbf{U}$ saab vaadelda kujul $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{TfMod}_R \cap \mathsf{UMod}_R = \mathsf{UTfMod}_R$.

Fikseerime R-mooduli $M_R \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ ja vaatleme kanoonilist sürjektsiooni $\kappa\colon M_R \to M/\mathbf{t}(M)$, $m \mapsto [m]$. Ilmselt kehtib $\mathbf{t}(MR) \subseteq \mathbf{t}(M) = \operatorname{Ker}\kappa$. Lausest 2.27 näeme, et kehtib $\operatorname{Im}\kappa|_{MR} \subseteq (M/\mathbf{t}(M))R = (\mathbf{U} \circ \mathbf{T})(M)$. Homomorfismiteoreemist 2.62 saame alloleva kommutatiivse diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
MR \arrow[rr, "\kappa|_{MR}"] \arrow[dr, "\kappa'"'] & & \left(\frac{M}{\mathbf{t}(M)}\right)R \\
& \frac{MR}{\mathbf{t}(MR)} \arrow[ur, dashed, "\alpha_M"'] &
\end{tikzcd}$$

Kirjutame homomorfismi $\alpha_M\colon (\mathbf{T} \circ \mathbf{U})(M) \to (\mathbf{U} \circ \mathbf{T})(M)$ välja:

$$\alpha_M\colon \sum_{k=1}^{k^*} m_k r_k + \mathbf{t}(MR) \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} (m_k + \mathbf{t}(M)) r_k.$$

Homomorfismi α_M sürjektiivsus on ilmne. Kuna kehtib $\mathbf{t}(MR) = \operatorname{Ker}(\kappa|_{MR})$, siis on α_M ka injektiivne. Kokkuvõttes on α_M R-moodulite isomorfism.

Tõestuse lõpetamiseks näitame, et $\alpha\colon \mathbf{T} \circ \mathbf{U} \stackrel{\cdot}{\to} \mathbf{U} \circ \mathbf{T}$ on loomulik teisendus. Olgu $M_R, N_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ ja $f\colon M_R \to N_R$. Võtame suvalise $[\sum_{k=1}^{k^*} m_k r_k]_{\mathbf{t}(MR)} \in MR/\mathbf{t}(MR) = \mathbf{Q}(M)$. Paneme tähele, et iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral,

$$\begin{aligned}
((\mathbf{U} \circ \mathbf{T})(f) \circ \alpha_M)\left([m_k r_k]_{\mathbf{t}(MR)}\right) &= [f]|_{(\frac{M}{\mathbf{t}(M)})R}\left([m_k]_{\mathbf{t}(M)}\, r_k\right) \\
&= [f(m_k) r_k]_{\mathbf{t}(N)} = [f(m_k)]_{\mathbf{t}(N)} r_k, \\
(\alpha_N \circ (\mathbf{T} \circ \mathbf{U})(f))\left([m_k r_k]_{\mathbf{t}(MR)}\right) &= \alpha_N\left([f|_{MR}]\left([m_k r_k]_{\mathbf{t}(MR)}\right)\right) \\
&= \alpha_N\left([f(m_k) r_k]_{\mathbf{t}(NR)}\right) = [f(m_k)]_{\mathbf{t}(N)} r_k.
\end{aligned}$$

Kuna $(\mathbf{U} \circ \mathbf{T})(f) \circ \alpha_M$ ja $\alpha_N \circ (\mathbf{T} \circ \mathbf{U})(f)$ on homomorfismid, siis kehtib $(\mathbf{U} \circ \mathbf{T})(f) \circ \alpha_M = \alpha_N \circ (\mathbf{T} \circ \mathbf{U})(f)$. Kokkuvõttes oleme saanud loomuliku isomorfismi $\alpha = (\alpha_M)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)}\colon \mathbf{T} \circ \mathbf{U} = \mathbf{Q} \stackrel{\cdot}{\to} \mathbf{U} \circ \mathbf{T}$. ■

Nüüd vaatleme funktorit kategooriasse FMod_R.

Lause 4.35. *Olgu R idempotentne ring. Leidub mittetriviaalne funktor*

$$\mathbf{P} := (\_ \otimes_R R) \circ \mathbf{U}\colon \quad \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{UMod}_R \to \mathsf{FMod}_R.$$

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Lausetest 3.23 ja 2.16 teame, et $\_\otimes_R R$ ja $\mathbf{U}$ on funktorid, mistõttu nende kompositsioon on samuti korrektselt defineeritud funktor $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_R$.

Olgu $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{UMod}_R)$. Näitame, et $M \otimes_R R = (\_\otimes_R R)(M_R)$ on püsiv moodul, selleks uurime R-moodulite homomorfismi

$$\mu_{M\otimes R}\colon M \otimes_R R \otimes_R R \to M \otimes_R R, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes r_k \otimes r'_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} m_k \otimes r_k r'_k.$$

Vaatleme lühikest täpset jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathrm{Ker}(\mu_M) \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Ker}}} M \otimes_R R \xrightarrow{\mu_M} M_R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}.$$

Teoreemist 3.27 teame, et funktor $\_\otimes_R R$ on paremalt eksaktne. Seetõttu on ka jada

$$\mathrm{Ker}(\mu_M) \otimes_R R \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Ker}}\otimes \mathrm{id}_R} M \otimes_R R \otimes_R R \xrightarrow{\mu_M \otimes \mathrm{id}_R} M \otimes_R R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\} \tag{4.23}$$

täpne. Paneme tähele, et iga $m \in M$ ja $r, r' \in R$ korral kehtib

$$(\mu_M \otimes \mathrm{id}_R)(m \otimes r \otimes r') = mr \otimes r' = m \otimes rr' = \mu_{M\otimes R}(m \otimes r \otimes r'),$$

mistõttu $\mu_M \otimes \mathrm{id}_R = \mu_{M\otimes R}$ (lemma 3.8). Tulenevalt jada (4.23) täpsusest saame nüüd, et $\mu_{M\otimes R}$ on sürjektiivne ja kehtib $\mathrm{Ker}(\mu_{M\otimes R}) = \mathrm{Ker}(\mu_M) \otimes_R R$.

Olgu $m \otimes r \in \mathrm{Ker}(\mu_M)$ ja $r' \in R$. Tulenevalt ringi R idempotentsusest leiduvad elemendid $r_1, r'_1, \ldots, r_{k^*}, r'_{k^*} \in R$ nii, et $r'_h = r_1 r'_1 + \ldots + r_{k^*} r'_{k^*}$. Nüüd

$$\begin{aligned}(m \otimes r) \otimes r' &= m \otimes r \otimes \left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k r'_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} m \otimes r r_k \otimes r'_k = \sum_{k=1}^{k^*} mr \otimes r_k \otimes r'_k \\ &= \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M(m \otimes r) \otimes r_k \otimes r'_k = \sum_{k=1}^{k^*} 0 \otimes r_k \otimes r'_k = 0.\end{aligned}$$

Seega $\mathrm{Ker}(\mu_{M\otimes R}) = \mathrm{Ker}(\mu_M) \otimes_R R = \{0\}$. Kokkuvõttes oleme saanud, et $\mu_{M\otimes R}$ on isomorfism ja $M \otimes_R R$ on püsiv R-moodul. Järelikult on funktor $\mathbf{P}$ tõepoolest kujul $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{FMod}_R$. ■

Järeldus 4.36. *Olgu R idempotentne ring. Kehtib loomulik isomorfsus*

$$\mathbf{P} \cong \mathbf{P} \circ \mathbf{J}_{\mathsf{FMod}_R} \circ \mathbf{P}.$$

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Arvutame

$$\begin{aligned}(\mathbf{P} \circ \mathbf{J}_{\mathsf{FMod}_R} \circ \mathbf{P})(M_R) &= \mathbf{P}(MR \otimes_R R) = MR \otimes_R RR \otimes_R R \\ &= MR \otimes_R R \otimes_R R \overset{\mu_{MR\otimes R}}{\longrightarrow} MR \otimes_R R = \mathbf{P}(M_R).\end{aligned}$$

Lausest 4.35 teame, et $\mu_{MR\otimes R}$ on isomorfism ning μ on loomulik teisendus tulenevalt lemmast 3.32. ■

Järgnevalt anname veel ühe alternatiivse kirjelduse funktorile $\mathbf{P}$.

Lause 4.37. *Olgu R idempotentne ring ja $\mathbf{P}\colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{FMod}_R$ funktor lausest 4.35. Kehtib loomulik isomorfsus*

$$\mathbf{P} \cong \_ \otimes_R R \otimes_R R.$$

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Kuna kehtib $\mathrm{Im}\,(\mu_M) = MR$ võime vaadelda lühikest täpset jada

$$\{0\} \overset{\mathbf{0}}{\longrightarrow} \mathrm{Ker}(\mu_M) \overset{\iota_{\mathrm{Ker}}}{\longrightarrow} M \otimes_R R \overset{\mu_M|^{MR}}{\longrightarrow} MR \overset{\mathbf{0}}{\longrightarrow} \{0\},$$

kus $\mu_M|^{MR}\colon \nu \mapsto \mu_M(\nu)$. Teoreemist 3.27 teame, et

$$\mathrm{Ker}(\mu_M)\otimes_R R \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Ker}}\otimes \mathrm{id}_R} M\otimes_R R\otimes_R R \xrightarrow{\mu_M|^{MR}\otimes \mathrm{id}_R} MR\otimes_R R = \mathbf{P}(M_R) \overset{\mathbf{0}}{\longrightarrow} \{0\}$$

on samuti täpne jada. Siit näeme, et $\mu_M|^{MR}\otimes \mathrm{id}_R$ on sürjektiivne ning kehtib

$$\mathrm{Ker}(\mu_M|^{MR} \otimes \mathrm{id}_R) = \mathrm{Im}\,(\iota_{\mathrm{Ker}(\mu_M)} \otimes \mathrm{id}_R) = \mathrm{Ker}(\mu_M) \otimes_R R.$$

Samas, suvaliste $a \in \mathrm{Ker}(\mu_M)$ ja $r \in R$ korral leiduvad tänu ringi R idempotentsusele $r_{k1}, r'_{k1}, \ldots, r_{kh^*}, r_{kh^*} \in R$ nii, et $r = r_1 r'_1 + \ldots + r_{h^*} r_{h^*}$. Nüüd, tensorkorrutises $\mathrm{Ker}(\mu_M) \otimes_R R$,

$$a \otimes r = a \otimes \left(\sum_{h=1}^{h^*} r_h r'_h\right) = \sum_{h=1}^{h^*} (a r_h) \otimes r'_h = \sum_{h=1}^{h^*} 0 \otimes r'_h = 0,$$

kuna $(\mathrm{Ker}(\mu_M))R = \{0\}$ (lemma 3.33). Seega $\mathrm{Ker}(\mu_M|^{MR} \otimes \mathrm{id}_R) = \{0\}$. Kokkuvõttes saame, et $\mu_M|^{MR} \otimes \mathrm{id}_R$ on isomorfism. (Muuhulgas näeme, et kehtib $M \otimes_R R \otimes_R R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$.)

On lihtne näha, et iga $M_R, M'_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ ja $f\colon M_R \to M'_R$ korral on allolev diagramm kommutatiivne.

$$
\mathsf{Mod}_R\colon
\begin{tikzcd}
M_R \arrow[d, "f"] \\
M'_R
\end{tikzcd}
\qquad
\mathsf{FMod}_R\colon
\begin{tikzcd}
M_R \otimes_R R \otimes_R R \arrow[r, "\mu_M|^{MR} \otimes \mathrm{id}_R"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_{R\otimes R}"] & MR \otimes_R R = \mathbf{P}(M_R) \arrow[d, "f|_{MR} \otimes \mathrm{id}_R"] \\
M'_R \otimes_R R \otimes_R R \arrow[r, "\mu_{M'}|^{M'R} \otimes \mathrm{id}_R"'] & M'R \otimes_R R = \mathbf{P}(M'_R)
\end{tikzcd}
$$

Seega saime, et $(\mu_M|^{MR} \otimes \mathrm{id}_R)_{M \in \mathsf{Mod}_R}\colon \mathbf{P} \overset{\bullet}{\to} \_ \otimes_R R \otimes_R R$ on loomulik isomorfism. ■

Lausest 4.35 teeme ühe järelduse. Nimelt saab iga idempotentse ringi abil leida püsiva ringi.

Järeldus 4.38. *Olgu R idempotentne ring. Sel juhul on ring $R \otimes_R R$ püsiv.*

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Meenutame, et $R \otimes_R R$ on ring korrutamisega (3.15). Lausest 4.35 teame, et

$$\mu_{\mathbf{P}(R)_R}\colon\ \mathbf{P}(R_R) \otimes_R R = R \otimes_R R \otimes_R R \to \mathbf{P}(R_R) = R \otimes_R R$$

on R-moodulite isomorfism. Rakendades veelkord lauset 4.35 saame, et ka

$$\mu_{\mathbf{P}(\mathbf{P}(R))_R}\colon\ \mathbf{P}(\mathbf{P}(R_R)) \otimes_R R = R \otimes_R R \otimes_R R \otimes_R R \to \mathbf{P}(\mathbf{P}(R_R)) = R \otimes_R R \otimes_R R$$

on R-moodulite isomorfism. Järelikult on $\mu_{\mathbf{P}(R)_R} \circ \mu_{\mathbf{P}(\mathbf{P}(R))_R}$ bijektiivne.

Paneme tähele, et iga $r, r', r'', r''' \in R$ korral

$$
\begin{aligned}
(\mu_{\mathbf{P}(R)_R} \circ \mu_{\mathbf{P}(\mathbf{P}(R))_R})(r \otimes r' \otimes r'' \otimes r''') &= \mu_{\mathbf{P}(R)_R}(r \otimes r' \otimes r'' r''') \\
&= r_k \otimes r' r'' r''' = rr' \otimes r'' r''' = \mu_{(R\otimes R)_{R\otimes R}}(r \otimes r' \otimes r'' \otimes r''').
\end{aligned}
$$

Seega $\mu_{\mathbf{P}(R)_R} \circ \mu_{\mathbf{P}(\mathbf{P}(R))_R} = \mu_{(R\otimes R)_{R\otimes R}}$ (lemma 3.8). Siit järeldame, et $(R \otimes_R R)$-moodulite homomorfism $\mu_{R\otimes R}$ on bijektiivne. Järelikult on $R \otimes_R R$ püsiv ring. ■

Ühtlasi järeldame eelnevast, et idempotentse ringi R korral on iga naturaalarvu $n \in \{2, 3, \ldots\}$ puhul ring $R \otimes_R R \otimes_R \ldots \otimes_R R$, kus R esineb tegurina n korda, püsiv ring.

Viimasena vaatleme funktorit kategooriasse CMod_R.

Lause 4.39. *Olgu R idempotentne ring. Leidub mittetriviaalne funktor*

$$\mathbf{K} := \mathbf{K}_R := \mathrm{Hom}_R(R, \_) \circ \mathbf{T}\colon \quad \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{TfMod}_R \to \mathsf{CMod}_R.$$

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Lausetest 2.77 ja 2.43 teame, et $\mathbf{K}' = \mathrm{Hom}_R(R, \_)$ ja $\mathbf{T}$ on funktorid, mistõttu nende kompositsioon on samuti korrektselt defineeritud funktor $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Mod}_R$.

Olgu $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{TfMod}_R)$. Näitame, et $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ on kinnine R-moodul. Selleks uurime R-moodulite homomorfismi

$$\lambda_{\mathrm{Hom}(R,M)} \colon \mathrm{Hom}_R(R, M) \to \mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_R(R, M)), \qquad f \mapsto (r \mapsto fr).$$

Meenutame, et leidub R-moodulite isomorfism $\varphi \colon \mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_R(R, M)) \to \mathrm{Hom}_R(R \otimes_R R, M)$ (teoreem 3.29). Tähistame $\lambda_H := \lambda_{\mathrm{Hom}(R,M)}$. Paneme tähele, et iga $f \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ ja $r, r' \in R$ korral kehtib

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \lambda_H)(f)(r_k \otimes r') &= \lambda_H(f)(r)(r') = (fr)(r') = f(rr') = f(\mu_R(r \otimes r')) \\ &= (f \circ \mu_R)(r \otimes r') = (\_ \circ \mu_R)(f)(r \otimes r'),\end{aligned}$$

kus $\mu_R \colon R \otimes_R R \to R$, $r_k \otimes r'_k \mapsto r_k r'_k$. Seega, lemma 3.8 tõttu, kehtib $\varphi \circ \lambda_H = \_ \circ \mu_R$.

Vaatleme lühikest täpset jada $\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathrm{Ker}(\mu_R) \xrightarrow{\iota_{\mathrm{Ker}}} R \otimes_R R \xrightarrow{\mu_R} R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$, kus $\iota_{\mathrm{Ker}} = \iota_{\mathrm{Ker}(\mu_R)} \colon \mathrm{Ker}(\mu_R) \to R \otimes_R R$ on sisestus. Tulenevalt lausest 2.76 on ka jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathrm{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\_\circ\mu_R} \mathrm{Hom}_R(R \otimes_R R, M) \xrightarrow{\_\circ\iota_{\mathrm{Ker}}} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(\mu_R), M) \tag{4.24}$$

täpne. Muuhulgas saame siit, et $\_ \circ \mu_R$ on injektiivne.

Olgu $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(\mu_R), M)$. Lemmast 3.33 teame, et $(\mathrm{Ker}(\mu_R))R = \{0\}$. Seega, iga $\rho \in \mathrm{Ker}(\mu_R)$ ja $r \in R$ korral kehtib

$$f(\rho)r = f(\rho r) = f(0) = 0,$$

mistõttu $f(\rho) \in \mathbf{t}(M) = \{0\}$. Järelikult $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(\mu_R), M) = \{\mathbf{0}\}$. Tänu lausele 2.65 on $\_ \circ \mu_R$ sürjektiivne. Kokkuvõttes on $\_ \circ \mu_R$ isomorfism.

Nüüd näeme, et kehtib

$$\lambda_H = \varphi^{-1} \circ (\_ \circ \mu_R).$$

Seega on $\lambda_H = \lambda_{\mathrm{Hom}(R,M)}$ isomorfism, kuna ta on esitatav kahe isomorfismi kompositsioonina. Kokkuvõttes oleme näidanud, et funktor $\mathbf{K}$ on kujul $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{CMod}_R$. ■

Järeldus 4.40. *Olgu R idempotentne ring. Kehtib loomulik isomorfsus*

$$\mathbf{K} \cong \mathbf{K} \circ \mathbf{J}_{\mathsf{CMod}_R} \circ \mathbf{K}.$$

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Arvutame

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(M_R) &= \mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(M_R)) \xrightarrow{\lambda_{\mathrm{Hom}(R,\mathbf{T}(M))}} \mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(M_R))) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(\mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(M_R)))) = (\mathbf{K} \circ \mathbf{J}_{\mathsf{CMod}_R} \circ \mathbf{K})(M_R),\end{aligned}$$

kuna $\mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(M))$ on kinnine tänu lausele 4.39 ja seetõttu ka väändeta kehtib $\mathbf{T}(\mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(M))) \cong \mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(M))$. Lausest 4.39 saame veel ka, et $\lambda_{\mathrm{Hom}(R,\mathbf{T}(M))}$ on isomorfism ning λ on loomulik tulenevalt lausest 2.77. ■

Järeldused 2.17, 2.44, 4.36 ja 4.40 esitavad kõik sisuliselt sama mõtet: funktorid, mis loomulikul viisil annavad R-moodulile, kus R on idempotentne ring, ühe vaadeldud „headest“ omadustest, on idempotentsed selles mõttes, et kui seda funktorit veelkord rakendada, siis see moodul enam ei muutu (isomorfismi täpsuseni).

Järgnevalt toome lemma funktori $\mathbf{Q}$ (lausest 4.34) ahendite kohta, mis järeldub lausetest 2.27 ja 2.45.

Lemma 4.41. *Olgu R idempotentne ring.*
1. *Iga $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$ korral on $\mathbf{U}(M_R) = MR$ väändeta.*
2. *Iga $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$ korral on $\mathbf{T}(M_R) = M/\mathbf{t}(M)$ unitaarne.*

Nüüd oleme valmis tõestama, et idempotentse ringi R korral on kategooriad UTfMod_R, FMod_R ja CMod_R ekvivalentsed.

Teoreem 4.42. *Olgu R idempotentne ring. Leiduvad ekvivalentsifunktorid*

$$\begin{aligned}\mathbf{U}' = \_R&\colon\ \mathsf{CMod}_R \to \mathsf{UTfMod}_R,\\ \mathbf{K}' = \mathrm{Hom}_R(R,\_)&\colon\ \mathsf{UTfMod}_R \to \mathsf{CMod}_R,\\ \mathbf{T}' = \_/\mathbf{t}(\_)&\colon\ \mathsf{FMod}_R \to \mathsf{UTfMod}_R,\\ \mathbf{P}' = \_ \otimes_R R&\colon\ \mathsf{UTfMod}_R \to \mathsf{FMod}_R.\end{aligned}$$

Neid ekvivalentsusi realiseerivad järgnevad loomulikud isomorfismid

$$\begin{aligned}\alpha_C := \lambda_C^{-1} \circ \mathrm{Hom}_R(R, \iota_{CR}) = \lambda_C^{-1} \circ (\iota_{CR} \circ \_)&\colon\ \mathrm{Hom}_R(R, CR) \to C,\\ \beta_N := \lambda_N|_{NR} = \lambda_N&\colon\ N \to \mathrm{Hom}_R(R, N)R,\\ \gamma_N := \mathbf{T}(\mu_N) = [\mu_N]&\colon\ (N \otimes_R R)/\mathbf{t}(N \otimes_R R) \to N,\\ \delta_A := (\kappa_{\mathbf{t}(A)} \otimes \mathrm{id}_R) \circ \mu_A^{-1}&\colon\ A \to A/\mathbf{t}(A) \otimes_R R,\end{aligned}$$

kus $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$, $N_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{UTfMod}_R)$, $A_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$; $\iota_{CR}\colon CR \to C_R$ on sisestus ja $\kappa_{\mathbf{t}(A)}\colon A \to A/\mathbf{t}(A)$ on kanooniline sürjektsioon.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathsf{CMod}_R \arrow[r, bend left, "\mathbf{U}' = _R"] \arrow[r, phantom, "\approx"] & \mathsf{UTfMod}_R \arrow[l, bend left, "\mathbf{K}' = \mathrm{Hom}_R(R, _)"] \arrow[r, bend left, "\mathbf{P}' = _ \otimes_R R"] \arrow[r, phantom, "\approx"] & \mathsf{FMod}_R \arrow[l, bend left, "\mathbf{T}' = _/\mathbf{t}_R(_)"]
\end{tikzcd}$$

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Lausetest 4.35, 4.39 ja lemmast 4.41 teame, et $\mathbf{U}'$, $\mathbf{K}'$, $\mathbf{T}'$ ja $\mathbf{P}'$ on korrektselt defineeritud funktorid (funktorid $\mathbf{U}'$ ja $\mathbf{T}'$ on vastavalt funktorite $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{T}$ ahendid). On lihtne veenduda, et homomorfismide pered

$$\begin{aligned}
\alpha = (\alpha_C)\colon &\ \mathbf{K}' \circ \mathbf{U}' \xrightarrow{\bullet} \mathrm{id}_{\mathsf{CMod}_R},\\
\beta = (\beta_N)\colon &\ \mathrm{id}_{\mathsf{UTfMod}_R} \xrightarrow{\bullet} \mathbf{U}' \circ \mathbf{K}',\\
\gamma = (\gamma_N)\colon &\ \mathbf{T}' \circ \mathbf{P}' \xrightarrow{\bullet} \mathrm{id}_{\mathsf{UTfMod}_R},\\
\delta = (\delta_A)\colon &\ \mathrm{id}_{\mathsf{FMod}_R} \xrightarrow{\bullet} \mathbf{P}' \circ \mathbf{T}'
\end{aligned}$$

on loomulikud teisendused. Peame aga veenduma, et α, β, γ ja δ on isomorfismid.

α**:** Olgu $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$. Sel juhul on $\lambda_C\colon C_R \to \mathrm{Hom}_R(R, C)$ isomorfism, mistõttu λ_C^{-1} eksisteerib ja on samuti isomorfism. Näitame, et $\iota_{CR} \circ \_$ on injektiivne. Olgu $f \in \mathrm{Ker}(\iota_{CR} \circ \_) \subseteq \mathrm{Hom}_R(R, CR)$. Nüüd, iga $r \in R$ korral,

$$0 = (\iota_{CR} \circ \_)(f)(r) = (\iota_{CR} \circ f)(r) = \iota_{CR}(f(r)) = f(r).$$

Seega, $f(r) = 0$ iga $r \in R$ ehk $f = \mathbf{0}$. Järelikult kehtib $\mathrm{Ker}(\iota_{CR} \circ \_) = \{\mathbf{0}\}$ ja $\iota_{CR} \circ \_$ on injektiivne.

Teisalt, olgu $g \in \mathrm{Hom}_R(R, C)$. Kuna C_R on kinnine, siis leidub $c \in C$ nii, et $g = \lambda_C(c) = c\_$. Siit näeme, et iga $r \in R$ korral $g(r) = cr$, mistõttu $\mathrm{Im}\,(g) \subseteq CR$. Järelikult saame vaadelda homomorfismi $g|^{CR}\colon R \to CR$, $r \mapsto g(r)$. Nüüd paneme tähele, et $g = \iota_{CR} \circ g|^{CR}$, millest näeme, et $\iota_{CR} \circ \_$ on sürjektiivne. Kokkuvõttes saime, et $\iota_{CR} \circ \_$ on isomorfism. Seega ka kompositsioon $\alpha = \lambda_C^{-1} \circ (\iota_{CR} \circ \_)$ on isomorfism.

β**:** Olgu $N_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{UTfMod}_R)$. Tulenevalt lausest 2.16 teame, et $\mathrm{Im}\,(\lambda_N|_{NR}) = \mathrm{Im}\,(\mathbf{U}(\lambda_N)) \subseteq \mathrm{Hom}_R(R, N)R$. Samas, kuna N_R on unitaarne, siis kehtib $\lambda_N|_{NR} = \lambda_N$. Olgu $n \in \mathrm{Ker}(\lambda_N)$. Iga $r \in R$ korral

$$0 = \lambda_N(n)(r) = nr.$$

Seega $\mathrm{Ker}(\lambda_N) \subseteq \mathbf{t}(N) = \{0\}$, mistõttu on β_N injektiivne.

Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} f_k r_k \in \mathrm{Hom}_R(R, N)R$. Tänu ringi R idempotentsusele saame, et iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral leiduvad $r_{k1}, r'_{k1}, \ldots, r_{kh^*}, r'_{kh^*} \in R$ nii, et $r_k = r_{k1}r'_{k1} + \ldots + r_{kh^*}r_{kh^*}$. Iga $r \in R$ korral

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{k^*} f_k r_k\right)(r) &= \sum_{k=1}^{k^*}(f_k r_k)(r) = \sum_{k=1}^{k^*} f_k(r_k r) = \sum_{k=1}^{k^*} f_k(r_k) r \\ &= \left(\sum_{k=1}^{k^*} f_k(r_k)\right) r = \lambda_N \left(\sum_{k=1}^{k^*} f_k(r_k)\right)(r) = \\ &= \lambda_N \left(\sum_{k=1}^{k^*} f_k \left(\sum_{h=1}^{h^*} r_{kh} r'_{kh}\right)\right)(r).\end{aligned}$$

Siit näeme, et $\beta_N = \lambda_N$ on sürjektiivne. Kokkuvõttes on β_N isomorfism.

γ**:** Olgu jätkuvalt $N_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{UTfMod}_R)$, siis $N_R \cong N/\mathbf{t}(N) = N/\{0\}$. Seega on $\gamma_N = [\mu_N]\colon [\sum_{k=1}^{k^*} n_k \otimes r_k] \mapsto [\sum_{k=1}^{k^*} n_k r_k]$ korrektselt defineeritud. Tulenevalt lemmast 3.33 teame, et $\mathrm{Ker}(\mu_N)R = \{0\}$, mistõttu $\mathrm{Ker}(\mu_N) \subseteq \mathbf{t}(N \otimes_R R)$. Siit näeme, et $\mathrm{Ker}([\mu_N]) = \{0\}$.
Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} n_k r_k \in NR = N$. Nüüd

$$\sum_{k=1}^{k^*} n_k r_k = \mu_N \left(\sum_{k=1}^{k^*} n_k \otimes r_k\right) = [\mu_N]\left(\left[\sum_{k=1}^{k^*} n_k \otimes r_k\right]\right),$$

millest näeme, et $[\mu_N]$ on sürjektiivne. Kokkuvõttes on γ_N isomorfism.

δ**:** Olgu $A_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$. Seega on μ_A isomorfism ja seetõttu on ka μ_A^{-1} isomorfism. Vaatleme lühikest täpset jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{t}(A) \xrightarrow{\iota_{\mathbf{t}(A)}} A_R \xrightarrow{\kappa_{\mathbf{t}(A)}} A/\mathbf{t}(A) \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}.$$

Järeldusest 3.28 teame, et jada

$$\mathbf{t}(A) \otimes_R R \xrightarrow{\iota_{\mathbf{t}(A)} \otimes \mathrm{id}_R} A \otimes_R R \xrightarrow{\kappa_{\mathbf{t}(A)} \otimes \mathrm{id}_R} A/\mathbf{t}(A) \otimes_R R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$$

on samuti täpne. Võtame $a \in \mathbf{t}(A)$ ja $r \in R$. Tänu ringi R idempotentsusele leiduvad $r_1, r'_1, \ldots, r_{h^*}, r'_{h^*} \in R$ nii, et $r = r_1 r'_1 + \ldots + r_{h^*} r_{h^*}$. Nüüd

$$a \otimes r = a \otimes \left(\sum_{h=1}^{h^*} r_h r'_h\right) = \sum_{h=1}^{h^*} a r_h \otimes r'_h = 0.$$

Seega $\mathbf{t}(A) \otimes_R R = \{0\}$ ning tulenevalt lausest 2.65 saame, et $\kappa_{\mathbf{t}(A)} \otimes \mathrm{id}_R$ on isomorfism. Kokkuvõttes oleme saamud, et $\delta_A = (\kappa_{\mathbf{t}(A)} \otimes \mathrm{id}_R) \circ \mu_A^{-1}$ on isomorfism. ■

Kokkuvõttes oleme saanud alloleva pildi kategooria Mod_R alamkategooriatest CMod_R, FMod_R ja UTfMod_R.

$$
\begin{tikzcd}
& \mathsf{CMod}_R \arrow[dr, bend left, "\mathbf{U}' = \_R"] \arrow[dr, phantom, "\approx"] & \\
\mathsf{Mod}_R \arrow[ur, "\mathbf{K} = \mathrm{Hom}_R(R, \_/\mathbf{t}(\_))"] \arrow[rr, "\mathbf{Q}"] \arrow[dr, "\mathbf{P} = \_R \otimes_R R"'] & & \mathsf{UTfMod}_R \arrow[ul, bend left, "\mathbf{K}'"] \arrow[dl, bend left, "\mathbf{P}'"] \\
& \mathsf{FMod}_R \arrow[ur, bend left, "\mathbf{T}' = \_/\mathbf{t}(\_)"'] \arrow[ur, phantom, "\approx"] &
\end{tikzcd}
$$

Joonis 4.9

4.4 Idempotentsete ringide Morita ekvivalentsuse definitsioon ja kirjeldus

Praeguseks oleme vaadelnud viise, kuidas ei ole võimalik defineerida ringide Morita ekvivalentsust üldisel juhul. Ometi mingil moel ta ikkagi defineeritakse ning nüüd ongi paras aeg seda teha. Me kasutame García ja Simóni poolt artiklis [27] antud definitsiooni.

Definitsioon 4.43. Olgu R ja S ringid. Öeldakse, et ringid R ja S on **Morita ekvivalentsed** (ja tähistatakse $R \approx_{\mathrm{ME}} S$), kui kategooriad UTfMod_R ja UTfMod_S on ekvivalentsed.

Üldjuhul on sama loomulik defineerida ringid R ja S Morita ekvivalentsed olevaks, kui kategooriad FMod_S ja FMod_R või CMod_S ja CMod_R on ekvivalentsed. Mõlemat viisi on kirjanduses kasutatud üldise Morita ekvivalentsuse defineerimiseks. Need kolm viisi annavad kolm erinevat „Morita ekvivalentsuse“ mõistet kõikvõimalike ringide klassil, mis ei lange omavahel kokku. (Ringide Morita ekvivalentsusest kõige üldisemal juhul saab lugeda artiklitest [25] ja [26].) Teoreemist 4.42 nägime aga, et idempotentsete ringide R ja S korral langevad need kolm tingimust kokku, seega võiksime idempotentsete ringide Morita ekvivalentsuse definitsiooniks võtta ükskõik millise eelnevast kolmest tingimusest. See on üks põhjendusi, miks meie vaatleme käesolevas raamatus just idempotentseid ringe ja nende Morita ekvivalentsust.

Samas on käesoleva raamatu üks eesmärkidest uurida idempotentsete ringide Morita ekvivalentsust, kasutades algebralisi meetodeid ja võimalikult palju vältida kategooriateooriat. Ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse korral oli meil selleks abi Morita kontekstist. Ka üldisel juhul osutuvad erakordselt kasulikuks just Morita kontekstid, mis me järgnevalt defineerime. Võib öelda, et järgnevates peatükkides me uurimegi põhiliselt just Morita kontekste.

Definitsioon 4.44. Olgu R ja S ringid. Ringe R ja S ühendavaks **Morita kontekstiks** nimetatakse kuuikut $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$, kus ${}_RP_S$ ja ${}_SQ_P$ on bimoodulid ning

$$\theta\colon {}_R(P \otimes_S Q)_R \to {}_RR_R \qquad \text{ja} \qquad \phi\colon {}_S(Q \otimes_R P)_S \to {}_SS_S$$

on sellised bimoodulite homomorfismid, mis rahuldavad iga $p, p' \in P$ ja $q, q' \in Q$ korral võrdusi

$$\theta(p \otimes q)p' = p\phi(q \otimes p'), \tag{4.25}$$

$$q'\theta(p \otimes q) = \phi(q' \otimes p)q. \tag{4.26}$$

Morita konteksti $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ nimetatakse **unitaarseks** (**püsivaks**), kui bimoodulid ${}_RP_S$ ja ${}_SQ_R$ on unitaarsed (püsivad); ja **sürjektiivseks** (**bijektiivseks**), kui homomorfismid θ ja ϕ on sürjektiivsed (bijektiivsed).

Nägemaks, et Morita kontekste tõpoolest leidub, toome ühe väga tuntud näite Morita kontekstist.

Näide 4.45 (Morita kontekst). Olgu R ring ja $e \in R$ idempotent. Sel juhul $eRe = \{ere \mid r \in R\}$ on ring ühikelemendiga $e = eee \in eRe$. Ring eRe on ringi R alamring.[12] Vaatleme kuuikut

$$\Gamma = (R, eRe, {}_RRe_{eRe}, {}_{eRe}eR_R, \theta, \phi),$$

kus moodulite ${}_RRe_{eRe}$ ja ${}_{eRe}eR_R$ toimed on defineeritud ringi R korrutamise abil ning

$$\theta\colon\ Re \otimes_{eRe} eR \to R, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} r_k e \otimes e r'_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r_k e r'_k,$$

[12] Märgime, et kui ring S on ühikelemendiga $1 \in S$, siis juhul $1 \neq e$ ei ole ring eSe „klassikalises“ mõttes ringi S alamring. Kuna ringi eSe ühikelement e erineb ringi S ühikelemendist 1.

$$\phi\colon\ eR\otimes_R Re \to eRe, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} er_k\otimes r'_k e \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} er_k r'_k e.$$

On lihtne näha, et θ ja ϕ on bimoodulite homomorfismid. Paneme tähele, et iga $re, r'e \in Re$ ja $e\rho, e\rho' \in eR$ korral

$$\theta(re\otimes e\rho)r'e = (re\rho)r'e = ree\rho r'e = re(e\rho r'e) = re\phi(e\rho\otimes r'e),$$
$$e\rho'\theta(re\otimes e\rho) = e\rho'(re\rho) = e\rho' ree\rho = (e\rho' re)e\rho = \phi(e\rho'\otimes re)e\rho.$$

Järelikult on Γ Morita kontekst.

Kui R on idempotentne ring, siis kehtib $Re = RRee \subseteq R(Re)eRe$, mistõttu Re – ja analoogiliselt ka eR – on unitaarne bimoodul. Sel juhul on homorfism ϕ sürjektiivne. Kui e on täisidempotent (st ringis R leidub idempotent $e \in R$ nii, et $R = ReR$), siis on ka θ sürjektiivne. Lisaks, kui ringis R leidub täisidempotent, siis on ring R idempotentne ($R = ReR \subseteq RR$). Kokkuvõttes, kui e on täisidempotent, siis on Morita kontekst Γ unitaarne ja sürjektiivne. □

Järgnevalt tõestame, et unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst saab ühendada vaid idempotentseid ringe.

Lause 4.46. *Kui Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ on unitaarne ja sürjektiivne, siis on ringid S ja R idempotentsed.*

TÕESTUS. Olgu $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Fikseerime elemendi $r \in R$. Tulenevalt θ sürjektiivsusest leidub tensor $\sum_{k=1}^{k^*} p_k\otimes q_k \in P\otimes_S Q$ nii, et $r = \theta(\sum_{k=1}^{k^*} p_k\otimes q_k)$. Kuna ${}_RP$ on unitaarne, siis leiduvad iga $k \in \{1,\dots,k^*\}$ korral $p_{k1},\dots,p_{kh^*} \in P$ ja $r_{k1},\dots,r_{kh^*} \in R$ nii, et $p_k = r_{k1}p_{k1} + \ldots + r_{kh^*}p_{kh^*}$. Nüüd

$$\begin{aligned} r &= \theta\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k\otimes q_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*}\theta(p_k\otimes q_k) = \sum_{k=1}^{k^*}\theta\left(\sum_{h=1}^{h^*} r_{kh}p_{kh}\otimes q_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\theta(r_{kh}p_{kh}\otimes q_k) = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} r_{kh}\theta(p_{kh}\otimes q_k) \in RR. \end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et R on idempotentne. Analoogiliselt on ka ring S idempotentne. ■

Järgmisest teoreemist osutub, et idempotentsete ringide Morita ekvivalentsus on samaväärne unitaarse ja sürjektiivse Morita konteksti leidumisega. Tänu sellele tingimusele võime idempotentsete ringide Morita ekvivalentsuse uurimisel vältida kategooriateooriat ja funktoreid ning piirduda vaid Morita kontekstis olevate bimoodulite ja homomorfismidega tegelemisega.

Teoreem 4.47. *Olgu R ja S idempotentsed ringid. Ringid R ja S on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$.*

Teoreemi 4.47 üksikasjaline tõestus on järgnevas paragrahvis toodud, kuid ta on võrdlemisi keeruline. Seega võib käesoleva raamatu esmakordsel lugemisel selle osa vahele jätta ning võtta teoreemi 4.47 kui idempotentsete ringide Morita ekvivalentsuse definitsiooni. Järgnevate peatükkide eesmärk ongi uurida idempotentsete ringide Morita ekvivalentsust, võttes aluseks just tema kirjelduse unitaarsete ja sürjektiivsete Morita kontekstide abil.

Näitest 4.45 näeme, et kui ringis R leidub täisidempotent $e \in R$, siis on ringid R ja eRe idempotentsed ja Morita ekvivalentsed. Sellest näitest näeme, et ühikelemendi olemasolu ei ole Morita invariant, kuna ringis eRe on alati ühikelement.

Nüüd aga uurime Morita kontekste natuke lähemalt. Nimelt, järgmises lauses esitame konstruktsiooni, mis sisuliselt annab Morita kontekstide komponeerimise.

Lause 4.48. *Olgu R, S ja T ringid ning $\Gamma_1 = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ ja $\Gamma_2 = (S, T, {}_SU_T, {}_TV_S, \psi, \varphi)$ Morita kontekstid. Sellisel juhul on kuuik $\Gamma_2 \circ \Gamma_1 := (R, T, {}_R(P \otimes_S U)_T, {}_T(V \otimes_S Q)_R, \alpha, \beta)$, kus*

$$\alpha\colon \sum_{k=1}^{k^*} (p_k \otimes u_k) \otimes (v_k \otimes q_k) \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \theta(p_k \otimes \psi(u_k \otimes v_k) q_k),$$
$$\beta\colon \sum_{k=1}^{k^*} (v_k \otimes q_k) \otimes (p_k \otimes u_k) \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \varphi(v_k \otimes \phi(q_k \otimes p_k) u_k),$$

samuti Morita kontekst. Kui Γ_1 ja Γ_2 on unitaarsed (ja sürjektiivsed), siis ka $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ on unitaarne (ja sürjektiivne).

TÕESTUS. Kehtigu lause eeldused. Tensorkorrutised $P \otimes_S U$ ja $V \otimes_S Q$ on ilmselt (R, T)- ja (T, R)-bimoodulid. Kujutus $\hat{\alpha}\colon (P \otimes_S U) \times (V \otimes_S Q) \to R$ on ilmselt T-tasakaalustatud. Seega $\alpha\colon (P \otimes_S U) \otimes_T (V \otimes_S Q) \to R$ on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism ning lihtne on näha, et ta on ka (R, R)-bimoodulite homomorfism. Analoogiliselt on ka β korrektselt defineeritud (T, T)-bimoodulite homomorfism.

Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes u_k, \sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes u'_h \in P \otimes_S U$ ja $\sum_{j=1}^{j^*} v_j \otimes q_j \in V \otimes_S Q$. Paneme tähele, et

$$\alpha\left(\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes u_k\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{j^*} v_j \otimes q_j\right)\right) \sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes u'_h$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{h=1}^{h^*} \theta(p_k \otimes \psi(u_k \otimes v_k) q_k)(p'_h \otimes u'_h) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{h=1}^{h^*} p_k \psi(u_k \otimes v_k) \phi(q_k \otimes p'_h) \otimes u'_h \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{h=1}^{h^*} p_k \otimes \psi(u_k \otimes v_k) \phi(q_k \otimes p'_h) u'_h \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{h=1}^{h^*} p_k \otimes u_k \varphi(v_k \otimes \phi(q_k \otimes p'_h) u'_h) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes u_k \right) \beta \left(\left(\sum_{j=1}^{j^*} v_k \otimes q_k \right) \otimes \left(\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes u'_h \right) \right).
\end{aligned}
$$

Seega kehtib tingimus (4.25). Analoogiliselt kehtib ka tingimus (4.26). Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ on tõepoolest Morita kontekst.

On selge, et kui ${}_R P_S$, ${}_S Q_R$, ${}_S U_T$ ja ${}_T V_S$ on unitaarsed bimoodulid, siis on seda ka tensorkorrutised $P \otimes_S U$ ja $V \otimes_S Q$. Samuti, kui θ, ϕ, ψ ja φ on sürjektiivsed, siis on lihtne näha, et ka α ja β on sürjektiivsed. ■

Vastavalt definitsioonile 4.43 näeme tänu lausele 1.22 otse, et Morita ekvivalentsus on ekvivalentsiseos kõikide ringide hulgal. Mitmetes tõestustes osutub eriti kasulikuks just Morita ekvivalentsuse transitiivsus. Eelmine lause annab võimaluse tõestada idempotentsete ringide Morita ekvivalentsuse ekvivalentsiseoseks olemine ka võttes aluseks teoreemi 4.47.

Järeldus 4.49. *Morita ekvivalentsus on ekvivalentsiseos kõigi idempotentsete ringide klassil.*

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Siis kuuik $(R, R, R \otimes_R R, R \otimes_R R, \mu, \mu)$, kus $\mu\colon (r \otimes r') \otimes (r'' \otimes r''') \mapsto r r' r'' r'''$, on unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst, mistõttu Morita kontekstiga ühendatud olemine on refleksiivne. Kui $(R, S, {}_R P_S, {}_S Q_R, \theta, \phi)$ on unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst, siis on seda ka $(S, R, {}_S Q_R, {}_S P_R, \phi, \theta)$. Unitaarse ja sürjektiivse Morita kontekstiga ühendatud olemise transitiivsus järeldub lausest 4.48. Järelduse väide tuleneb nüüd otse teoreemist 4.47. ■

Nüüd tõestame veel, et kahe isomorfse idempotentse ringi vahel leidub unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Teoreemi 4.47 valguses järeldame siit, et kõikide idempotentsete ringide klassil on Morita ekvivalentsus isomorfsusest nõrgem ekvivalentsiseos, mis pole eriti üllatav.

Lause 4.50. *Olgu R ja S idempotentsed ringid ning $\alpha\colon R \to S$ ringide isomorfism. Leidub ringe R ja S ühendav unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid ning $\alpha\colon R \to S$ ringide isomorfism. Vaatleme mooduleid ${}_RR$ ja ${}_SS$ ning defineerime neil vastavalt parempoolse S- ja parempoolse R-toime järgnevalt:

$$\begin{aligned} r \cdot s &:= r\alpha^{-1}(s) \in R, \\ s \cdot r &:= s\alpha(r) \in S, \end{aligned}$$

kus $r \in R$ ja $s \in S$. On lihtne näha, et selliste toimetega saame bimoodulid ${}_RR_S$ ja ${}_SS_R$. Kuna R ja S on idempotentsed, on bimoodulid ${}_RR_S$ ja ${}_SS_R$ unitaarsed.

Defineerime kujutused

$$\begin{aligned} \theta\colon\ R \otimes_S S \to R, \qquad & \sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes s_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r_k\alpha^{-1}(s_k) = \sum_{k=1}^{k^*} r_k \cdot s_k, \\ \phi\colon S \otimes_R R \to S, \qquad & \sum_{k=1}^{k^*} s_k \otimes r_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} s_k\alpha(r_k) = \sum_{k=1}^{k^*} s_k \cdot r_k. \end{aligned}$$

On lihtne näha, et θ ja ϕ on korrektselt defineeritud bimoodulite homomorfismid ning nad on sürjektiivsed, kuna R ja S on idempotentsed ringid ja α on bijektiivne.

Viimaks paneme tähele, et iga $r, r' \in R$ ja $s, s' \in S$ korral kehtivad

$$\begin{gathered} \theta(r \otimes s)r' = (r\alpha^{-1}(s))r' = r(\alpha^{-1}(s)r') = r \cdot (s \cdot \alpha(r')) = r \cdot \phi(s \otimes r'), \\ s' \cdot \theta(r \otimes s) = s' \cdot (r\alpha^{-1}(s)) = s'(\alpha(r)s) = (s'\alpha(r))s = \phi(s' \otimes r)s. \end{gathered}$$

Kokkuvõttes oleme näinud, et $(R, S, {}_RR_S, {}_SS_R, \theta, \phi)$ on unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. ■

Morita ekvivalentsuse kirjeldus Morita konteksti abil*

Nüüd esitame üksikasjaliku tõestuse teoreemile 4.47. See tõestus on jaotatud kaheks lauseks ja kolmeks lemmaks. Kõigepealt näitame, et unitaarse Morita konteksti leidumisest järeldub püsiva Morita konteksti leidumine.

Lemma 4.51. *Ringe R ja S ühendab unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst parajasti siis, kui neid ühendab püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Lausest 4.35 (ja tema vasakpoolsest duaalsest lausest) saame, et $R \otimes_R P \otimes_S S$ ja $S \otimes_S Q \otimes_R R$ on püsivad bimoodulid.

Märkusest 3.41 teame, et leiduvad sürjektiivsed bimoodulite homomorfismid $\mathbf{m}_P \colon {}_R(R \otimes_R P \otimes_S S)_S \to {}_RP_S$ ja $\mathbf{m}_Q \colon {}_S(S \otimes_S Q \otimes_R R)_R \to {}_SQ_R$. Vaatleme kompositsioone

$$\begin{aligned} \theta' = \theta \circ (\mathbf{m}_P \otimes \mathbf{m}_Q) \colon &\quad (R \otimes_R P \otimes_S S) \otimes_S (S \otimes_S Q \otimes_R R) \to R, \\ \phi' = \phi \circ (\mathbf{m}_Q \otimes \mathbf{m}_P) \colon &\quad (S \otimes_S Q \otimes_R R) \otimes_R (R \otimes_R P \otimes_S S) \to S. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et θ' ja ϕ' on sürjektiivsed bimoodulite homomorfismid, kuna esituvad sürjektiivsete homomorfismide kompositsioonidena (lause 3.21).

Olgu $r, r', r'' \in R$, $s, s', s'' \in S$, $p, p'' \in P$ ja $q' \in Q$. Näeme, et

$$\begin{aligned} &\theta'((r \otimes p \otimes s) \otimes (s' \otimes q' \otimes r'))(r'' \otimes p'' \otimes s'') = \theta(rps \otimes s'q'r')(r'' \otimes p'' \otimes s'') \\ &\quad = r\theta(ps \otimes s'q'r')r'' \otimes p'' \otimes s'' = r \otimes \theta(ps \otimes s'q'r')r''p'' \otimes s'' \\ &\quad = r \otimes ps\phi(s'q'r' \otimes r''p'') \otimes s'' = r \otimes p \otimes s\phi(s'q'r' \otimes r''p'')s'' \\ &\quad = r \otimes p \otimes s\phi(s'q'r' \otimes r''p''s'') = (r \otimes p \otimes s)\phi'((s' \otimes q' \otimes r') \otimes (r'' \otimes p'' \otimes s'')). \end{aligned}$$

Seega kehtib homomorfismide θ' ja ϕ' jaoks tingimus (4.25), analoogiliselt ka (4.26). Kokkuvõttes on $(R, S, R \otimes_R P \otimes_S S, S \otimes_S Q \otimes_R R, \theta', \phi')$ püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst.

Piisavus. Ilmne. ■

Nüüd näitame, et püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst tõesti tekitab ekvivalentsifunktorid moodulite kategooriate vahel.

Lause 4.52. *Olgu R ja S ringid ning $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst. Siis on funktorid*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \_ \otimes_R P \colon \ \mathsf{FMod}_R \to \mathsf{FMod}_S, \\ \mathbf{B} &:= \_ \otimes_S Q \colon \ \mathsf{FMod}_S \to \mathsf{FMod}_R \end{aligned}$$

inverssed ekvivalentsifunktorid.

TÕESTUS. Olgu R, S ringid ja $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Tulenevalt lausest 4.46 on R ja S idempotentsed ringid. Tänu bimoodulite P ja Q püsivusele ja lemmale 3.38 on funktorid $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B}$ tõepoolest funktorid kujul vastavalt $\mathsf{FMod}_R \to \mathsf{FMod}_S$ ja $\mathsf{FMod}_S \to \mathsf{FMod}_R$.

Vaatleme (R, R)-bimoodulite lühikest täpset jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \operatorname{Ker}\theta \xrightarrow{\iota_{\operatorname{Ker}\theta}} P \otimes_S Q \xrightarrow{\theta} R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}.$$

Olgu $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$. Tulenevalt järeldusest 3.28 on ka parempoolsete R-moodulite jada

$$M \otimes_R \operatorname{Ker}\theta \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \iota_{\operatorname{Ker}\theta}} M \otimes_R P \otimes_S Q \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \theta} M \otimes_R R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$$

täpne.

Vaatleme R-moodulit $M \otimes_R \operatorname{Ker}\theta$. Meie eesmärk on näidata, et see on nullmoodul. Olgu $\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k \in \operatorname{Ker}\theta$ ja $r \in R$. Tänu θ sürjektiivsusele leidub $\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h \in P \otimes_S Q$ nii, et kehtib $r = \theta(\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h)$. Nüüd

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k\right) r &= \left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k\right)\theta\left(\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h\right) = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} p_k \otimes q_k\theta(p'_h \otimes q'_h) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} p_k \otimes \phi(q_k \otimes p'_h)q'_h = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} p_k\phi(q_k \otimes p'_h) \otimes q'_h \\
&= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} \theta(p_k \otimes q_k)p'_h \otimes q'_h = \theta\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k\right)\left(\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h\right) \\
&= 0\left(\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h\right) = 0.
\end{aligned}$$

Seega $(\operatorname{Ker}\theta)R = \{0\}$. Analoogiliselt kehtivad $R(\operatorname{Ker}\theta) = \{0\}$ ja $S(\operatorname{Ker}\phi) = (\operatorname{Ker}\phi)S = \{0\}$.

Nüüd olgu $m \in M$ ja $t \in \operatorname{Ker}\theta$. Kuna M_R on püsiv – ja seetõttu ka unitaarne – leiduvad $m_1, \ldots, m_{h^*} \in M$ ja $r_1, \ldots, r_{h^*} \in R$ nii, et $m = m_1 r_1 + \ldots + m_{h^*} r_{h^*}$. Paneme tähele, et

$$m \otimes t = \left(\sum_{h=1}^{h^*} m_h r_h\right) \otimes t = \sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes r_h t = \sum_{h=1}^{h^*} m_h \otimes 0 = 0.$$

Seega kehtib $M \otimes_R \operatorname{Ker}\theta = \{0\}$. Lausest 2.65 saame nüüd, et $\mathrm{id}_M \otimes \theta$ on isomorfism.

Mistahes $M'_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$ ja $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ korral vaatleme allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R P \otimes_S Q \arrow[r, "\mathrm{id}_M \otimes \theta"] \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_P \otimes \mathrm{id}_Q"'] & M \otimes_R R \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}_R"] \\
M' \otimes_R P \otimes_S Q \arrow[r, "\mathrm{id}_{M'} \otimes \theta"'] & M' \otimes_R R
\end{tikzcd}$$

Olgu $m \in M$, $p \in P$ ja $q \in Q$. Nüüd

$$\begin{aligned}
((f \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_M \otimes \theta))(m \otimes p \otimes q) &= f(m) \otimes \theta(p \otimes q) \\
&= ((\mathrm{id}_{M'} \otimes \theta) \circ (f \otimes \mathrm{id}_P \otimes \mathrm{id}_Q))\,(m \otimes p \otimes q).
\end{aligned}$$

Siit saame loomuliku isomorfismi $\mathrm{id} \otimes \theta \colon \mathbf{B} \circ \mathbf{A} \xrightarrow{\cdot} \_ \otimes_R R$. Analoogiliselt saame, et $\mathrm{id} \otimes \phi$ on samuti loomulik isomorfism.

Nüüd iga $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_R)$ ja $N_S \in \mathrm{Ob}(\mathsf{FMod}_S)$ korral kehtivad

$$(\mathbf{B} \circ \mathbf{A})(M_R) = M \otimes_R P \otimes_S Q \cong M \otimes_R R \cong M_R = \mathrm{id}_{\mathsf{FMod}_R}(M_R),$$
$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})(N_S) = N \otimes_S Q \otimes_R P \cong M \otimes_S S \cong N_S = \mathrm{id}_{\mathsf{FMod}_S}(N_S).$$

Siit näeme, et $\mathbf{B} \circ \mathbf{A} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{FMod}_R}$ ja $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \cong \mathrm{id}_{\mathsf{FMod}_S}$ nagu soovitud. ■

Kasutades lemmat 4.51 ning lauseid 4.52 ja 4.46 saame järgneva järelduse.

Järeldus 4.53. *Olgu R ja S ringid ning leidugu neid ühendav unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Siis on R ja S idempotentsed ning Morita ekvivalentsed ringid.*

Märgime, et analoogiliselt lausega 4.52 saab veel tõestada, et kui $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ on püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst, siis kõik järgnevad funktorite paarid

$$\begin{array}{rlcl}
\mathrm{Hom}_S(P, _)\colon & \mathsf{CMod}_R \to \mathsf{CMod}_S & \text{ja} & \mathrm{Hom}_R(Q, _)\colon\ \mathsf{CMod}_S \to \mathsf{CMod}_R; \\
P \otimes_S _\colon & {}_S\mathsf{FMod} \to {}_R\mathsf{FMod} & \text{ja} & Q \otimes_R _\colon\ {}_R\mathsf{FMod} \to {}_S\mathsf{FMod}; \\
{}_R\mathrm{Hom}(P, _)\colon & {}_S\mathsf{CMod} \to {}_R\mathsf{CMod} & \text{ja} & {}_S\mathrm{Hom}(Q, _)\colon\ {}_R\mathsf{CMod} \to {}_S\mathsf{CMod}
\end{array}$$

on omavahel inverssed ekvivalentsifunktorid. Vaadates neid funktorite paare, on alust arvata, et ka ühikelemendita ringide korral pole oluline, kas Morita ekvivalentsus defineerida vastavate parem- või vasakpoolsete moodulite kategooriate kaudu. See väide tõepoolest kehtib, kuid käesolevas raamatus me teda siiski eksplitsiitselt ei tõesta. Tõestuse sellele väitele saab leida artiklist [27] (järeldus 2.9).

Järgnevalt hakkame kategooriate CMod_R ja CMod_S ekvivalentsuse abil tekitama Morita konteksti, kus R ja S on idempotentsed ringid. Esimeses lemmas tekitame ringide R ja S abil ühikelemendiga ringid ning tõestame mitmeid nende omavahelisi seoseid, mida hiljem kasutame.

Lemma 4.54. *Olgu R idempotentne ring. Tähistame*

$$R' := R/\mathbf{t}(R) \qquad \text{ja} \qquad R'' := \mathrm{Hom}_R(R, R') = \mathbf{K}(R_R).$$

Kehtivad omadused:

1. *kehtib parempoolsete R-moodulite isomorfsus $R'' \cong \mathrm{End}(R') = \mathrm{Hom}_R(R', R')$, mistõttu moodulit R'' saab vaadelda kui ühikelemendiga ringi;*
2. *leidub injektiivne parempoolsete R-moodulite homomorfism $R' \rightarrowtail R''$, mistõttu saame moodulit R' vaadelda kui ringi R'' alamringi;*
3. *iga $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$ korral on C vaadeldav kui parempoolne R'- või R''-moodul, kusjuures $C_{R''} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_{R''})$;*
4. *iga $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$ on kinnine R''-moodul;*
5. *$R''R' \subseteq R'$ (isomorfismi täpsuseni);*

6. iga $M_R, C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$ *korral kehtib*

$$\mathrm{Hom}_R(M,C) = \mathrm{Hom}_{R'}(M,C) = \mathrm{Hom}_{R''}(M,C).$$

TÕESTUS. 1. Vaatleme parempoolsete R-moodulite lühikest täpset jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathbf{t}(R) \xrightarrow{\iota_{\mathbf{t}(R)}} R \xrightarrow{\kappa_{\mathbf{t}(R)}} R/\mathbf{t}(R) \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}.$$

Tulenevalt lausest 2.76 saame, et parempoolsete R-moodulite jada

$$\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \mathrm{Hom}_R(R',R') \xrightarrow{\_\circ\kappa_{\mathbf{t}(R)}} \mathrm{Hom}_R(R,R') \xrightarrow{\_\circ\iota_{\mathbf{t}(R)}} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{t}(R),R')$$

on samuti täpne.
Olgu $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{t}(R), R/\mathbf{t}(R))$. Siis iga $t \in \mathbf{t}(R)$ ja $r \in R$ korral kehtib

$$f(t)r = f(tr) = f(0) = 0.$$

Seega $f(t) \in \mathbf{t}(R/\mathbf{t}(R)) = \{0\}$, mistõttu $f = \mathbf{0}$. Järelikult kehtib võrdus $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{t}(R),R') = \{\mathbf{0}\}$. Seega saame lausest 2.65, et

$$\mathrm{End}(R') = \mathrm{Hom}_R(R/\mathbf{t}(R), R/\mathbf{t}(R)) \cong \mathrm{Hom}_R(R, R/\mathbf{t}(R)) = R''$$

parempoolsete R-moodulitena, kus isomorfismiks on $\_\circ\kappa_{\mathbf{t}(R)} =: \alpha$. Märgime, et iga $f \in R'' = \mathrm{Hom}_R(R,R')$ korral kehtib

$$\alpha^{-1}(f) = (\_\circ\kappa_{t(R)})^{-1}(f)\colon\ [r] \mapsto f(r).$$

Ilmselt on $\mathrm{End}(R')$ ühikelemendiga ring, mille ühikelemendiks on $\mathrm{id}_{R'}$. Tänu eelnevale isomorfismile $\alpha\colon \mathrm{End}(R') \to R''$ saame moodulit R'' vaadelda kui ühikelemendiga ringi, mis saab oma korrutamise ringist $\mathrm{End}(R')$, st et iga $f,g \in R''$ korral

$$fg := \alpha(\alpha^{-1}(f) \circ \alpha^{-1}(g)).$$

Ilmselt kehtib iga $f,g \in R''$ korral $fg \in R''$. Näitame, et nii muutub R'' tõepoolest ringiks. Kuna R'' on parempoolne R-moodul, siis on ta ka Abeli rühm. Lisaks, paneme tähele, et iga $f,g,h \in R''$ korral

$$\begin{aligned}
(fg)h &= (\alpha(\alpha^{-1}(f)\circ\alpha^{-1}(g)))h = \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(f)\circ\alpha^{-1}(g)))\circ\alpha^{-1}(h))\\
&= \alpha((\alpha^{-1}\circ\alpha)(\alpha^{-1}(f)\circ\alpha^{-1}(g))\circ\alpha^{-1}(h))\\
&= \alpha((\alpha^{-1}(f)\circ\alpha^{-1}(g))\circ\alpha^{-1}(h)) = \alpha(\alpha^{-1}(f)\circ(\alpha^{-1}(g)\circ\alpha^{-1}(h)))\\
&= \alpha(\alpha^{-1}(f)\circ\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(g)\circ\alpha^{-1}(h)))) = f(\alpha(\alpha^{-1}(g)\circ\alpha^{-1}(h)))\\
&= f(gh),\\
(f+g)h &= \alpha(\alpha^{-1}(f+g)\circ\alpha^{-1}(h)) = \alpha((\alpha^{-1}(f)+\alpha^{-1}(g))\circ\alpha^{-1}(h))\\
&= \alpha(\alpha^{-1}(f)\circ\alpha^{-1}(h)+\alpha^{-1}(g)\circ\alpha^{-1}(h))\\
&= \alpha(\alpha^{-1}(f)\circ\alpha^{-1}(h))+\alpha(\alpha^{-1}(g)\circ\alpha^{-1}(h)) = fh+gh
\end{aligned}$$

ning analoogiliselt $f(g+h) = fg + fh$. Seega R'' on tõepoolest ring.
Vaatleme nüüd, kuidas ringi R'' korrutamine ilmutatud kujul välja näeb. Iga $[r] \in R'$ korral

$$\alpha^{-1}(f) \circ \alpha^{-1}(g)([r]) = \alpha^{-1}(f)(g(r)) = f(\widehat{g(r)}),$$

kus $\widehat{g(r)}$ on ekvivalentsiklassi $g(r)$ mingi esindaja. Siit näeme, et

$$fg\colon R \to R', \quad r \mapsto f\left(\widehat{g(r)}\right), \tag{4.27}$$

kus $\widehat{g(r)}$ on jätkuvalt ekvivalentsiklassi $g(r)$ mingi esindaja.
Ringi R'' ühikelemendiks on loomulik sürjektsioon $\kappa := \kappa_{\mathbf{t}(M)}$, kuna $\kappa = \mathrm{id}_{R'} \circ \kappa = (\_ \circ \kappa)(\mathrm{id}_{R'}) = \alpha(\mathrm{id}_{R'})$ ning $\mathrm{id}_{R'}$ on ringi $\mathrm{End}(R')$ ühikelement.

2. Defineerime parempoolsete R-moodulite homomorfismi

$$j\colon R/\mathbf{t}(R) = R' \to R'' = \mathrm{Hom}_R(R, R'), \qquad [r] \mapsto [r]\underset{R}{\_}.$$

Olgu $[r] \in \operatorname{Ker} j$. Siis iga $r_1 \in R$ korral $rr_1 \in \mathbf{t}(R)$. Valime suvalise $r' \in R$. Tänu ringi R idempotentsusele leiduvad $r_1', r_1'', \ldots, r_{k^*}', r_{k^*}'' \in R$ nii, et $r' = r_1'r_1'' + \ldots + r_{k^*}'r_{k^*}''$. Nüüd

$$rr' = r\sum_{k=1}^{k^*} r_k'r_k'' = \sum_{k=1}^{k^*}(rr_k')r_k'' = \sum_{k=1}^{k^*} 0 = 0.$$

Seega $r \in \mathbf{t}(R)$ ehk $[r] = [0]$. Järelikult on j injektiivne.
Olgu $[r], [r'] \in R'$. Sel juhul $j([r][r']) = j([rr']) = [rr']\_{R}$. Teiselt poolt, iga $\rho \in R$ korral

$$(j([r])j([r']))(\rho) = (([r]\underset{R}{\_})([r']\underset{R}{\_}))(\rho) \underset{(*)}{=} [r](r'\rho) = [rr']\rho = ([rr']\underset{R}{\_})(\rho),$$

Võrduse $(*)$ saamiseks kasutasime asjaolu, et $j([r'])(\rho) = [r']\rho = [r'\rho]$, mistõttu $r'\rho$ on ekvivalentsiklassi $j([r'])(\rho) \in R'$ esindaja, ning ringi R'' korrutamise kirjeldust (4.27). Järelikult kehtib $j([r][r']) = j([r])j([r'])$.
Seega näeme, et j on injektiivne ringide homomorfism, mistõttu kehtib ringide isomorfsus $R' \cong \operatorname{Im} j$. Kokkuvõttes võime hulka $R' \cong \operatorname{Im} j$ vaadelda kui ringi R'' alamringi.

3. Olgu $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$. Defineerime iga $c \in C$ ja $[r] \in R/\mathbf{t}(R) = R'$ korral

$$c \cdot' [r] := cr. \tag{4.28}$$

Olgu $r', r'' \in R$ sellised, et $[r'] = [r'']$, siis $r' - r'' \in \mathbf{t}(R)$. Iga $r \in R$ korral kehtib

$$(cr' - cr'')r = c(r' - r'')r = c((r' - r'')r) = c0 = 0.$$

Seega $cr - cr' \in \mathbf{t}(C) = \{0\}$, mistõttu $cr = cr'$ ja parempoolne $R/\mathbf{t}(R)$-toime (4.28) on korrektselt defineeritud. On lihtsasti võimalik näidata, et nii saame R'-mooduli $C_{R'}$.
Nüüd iga $c \in C_{R'}$ ja $b \in R'' = \mathrm{Hom}_R(R, R')$ korral defineerime kujutuse

$$cb\colon\ R \to C, \quad r \mapsto c \cdot' b(r). \tag{4.29}$$

Paneme tähele, et iga $r, r' \in R$ korral

$$\begin{aligned} cb(r + r') &= c \cdot' b(r + r') = c \cdot' (b(r) + b(r')) = c \cdot' b(r) + c \cdot' b(r') \\ &= cb(r) + cb(r'), \\ cb(rr') &= c \cdot' b(rr') = c \cdot' b(r)r' = c(\widehat{b(r)}r') = (c\widehat{b(r)})r' = (c \cdot' b(r))r' \\ &= (cb(r))r', \end{aligned}$$

kus $\widehat{b(r)}$ on ekvivalentsiklassi $b(r)$ esindaja. Seega $cb \in \mathrm{Hom}_R(R, C) \cong C_R$ (meenutame, et siinkohal on isomorfismiks λ_C definitsioonist 2.46). Näitame, et selliselt saame R''-mooduli. Olgu $c, c' \in C$, $b, b' \in R''$. Näeme, et iga $r, r' \in R$ korral kehtivad

$$\begin{aligned} ((c + c')b)(r) &= (c + c') \cdot' b(r) = c \cdot' b(r) + c' \cdot' b(r) = (cb + c'b)(r); \\ (c(b + b'))(r) &= c \cdot' ((b + b')(r)) = c \cdot' (b(r) + b'(r)) = c \cdot' b(r) + c \cdot' b'(r) \\ &= (cb + cb')(r); \\ ((cb)b')(r)(r') &= ((cb) \cdot' b'(r))(r') && ((cb)b' \text{ def } (4.29)) \\ &= \left((cb)\widehat{b'(r)}\right)(r') && (R'\text{-toime } (4.28)) \\ &= (cb)\left(\widehat{b'(r)}r'\right) && (R\text{-toime moodulil } \mathrm{Hom}_R(R, C)) \\ &= c \cdot' b\left(\widehat{b'(r)}r'\right) && (cb \text{ def } (4.29)) \\ &= c \cdot' \left(b\left(\widehat{b'(r)}\right)r'\right) && (b \text{ on homomorfism}) \\ &= c \cdot' ((bb')(r)r') && (\text{korrutamine ringis } R'' \ (4.27)) \\ &= c \cdot' (bb')(rr') && (bb' \text{ on homomorfism}) \\ &= (c(bb'))(rr') && (c(bb') \text{ def } (4.29)) \\ &= (c(bb')r)(r') && (R\text{-toime moodulil } \mathrm{Hom}_R(R, C)) \\ &= \lambda_{\mathrm{Hom}(R,C)}(c(bb'))(r)(r'). \end{aligned}$$

kus $\widehat{b'(r)}$ on ekvivalentsiklassi $b'(r) \in R'$ esindaja. Siit näeme, et (isomorfismi $\lambda_{\mathrm{Hom}(R,C)}$ täpsuseni) kehtivad kõik parempoolse R-mooduli tingimused, kui kinnist moodulit C_R vaadelda parempoolse R''-moodulina defineerides iga $c \in C$ ja $b \in R''$ korral

$$c \cdot'' b := \lambda_C^{-1}(cb), \tag{4.30}$$

kus $cb \in \mathrm{Hom}_R(R, C)$ on defineeritud real (4.29).

Näeme, et iga $c \in C$ ja $r \in R$ korral

$$(c1_{R''})(r) = (c\kappa)(r) = c \cdot' \kappa(r) = c \cdot' [r] = cr = \lambda_C(c)(r),$$

mistõttu $c \cdot'' 1_{R''} = \lambda_C^{-1}(\lambda_C(c)) = c$. Seega $C_{R''} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}^1_{R''})$. [13]

4. Olgu $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$. Kuna C_R on vaadeldav „klassikalise“ parempoolse R'' moodulina ja R'' on ühikelemendiga ring, siis tänu näitele 2.47 on $C_{R''}$ kinnine R''-moodul.
5. Lausest 4.39 teame, et R'' on kinnine parempoolne R-moodul. Osast 3 teame, et võime vaadelda teda kui parempoolset R'-moodulit toimega $\cdot'$ (4.28). Olgu $b \in R''$ ja $[r'] \in R'$, siis iga $r \in R$ korral

$$(b \cdot' [r'])(r) = (br')(r) = b(r'r) = b(r')r = (b(r')_{\overline{R}})(r) = j(b(r'))(r).$$

Seega, $b \cdot' [r'] = j(b(r')) \in \mathrm{Im}\, j$. Osast 2 teame, et kehtib (ringide) isomorfsus $\mathrm{Im}\, j \cong R'$. Kokkuvõttes saame, et $R''R' \subseteq \mathrm{Im}\, j \cong R'$.
Selle osa lõpetuseks tõestame veel ühe kasuliku arvututsvalemi. Olgu $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$. Iga $c \in C$, $b \in R''$ ja $[r] \in R'$ korral kehtib

$$c \cdot'' (b \cdot' [r]) = c \cdot' b(r). \tag{4.31}$$

Tõepoolest, paneme tähele, et

$$\begin{aligned} c \cdot'' (b \cdot' [r]) &= (c \cdot'' j(b(r))) = \lambda_C^{-1}(c \cdot' j(b(r))) = \lambda_C^{-1}(c \cdot' b(r)_{\overline{R}}) \\ &= \lambda_C^{-1}(c\widehat{b(r)}_{\overline{R}}) = c\widehat{b(r)} = c \cdot' b(r), \end{aligned}$$

kus $\widehat{b(r)}$ on ekvivalentsiklassi $b(r)$ mingi esindaja.
6. Olgu $M_R, C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$. Valime $f \in \mathrm{Hom}_R(M, C)$. Iga $m \in M$ ja $[r] \in R'$ korral kehtib

$$f(m \cdot' [r]) = f(mr) = f(m)r = f(m) \cdot' [r],$$

mistõttu $\mathrm{Hom}_R(M, C) \subseteq \mathrm{Hom}_{R'}(M, C)$. Teistpidine sisalduvus on analoogiline. Seega $\mathrm{Hom}_R(M, C) = \mathrm{Hom}_{R'}(M, C)$.
Olgu $g \in \mathrm{Hom}_{R''}(M, C)$. Iga $m \in M$ ja $[r] \in R'$ korral

$$\begin{aligned} g(m \cdot' [r]) &= g(m \cdot' \kappa(r)) && ((\kappa\colon r \mapsto [r]) \in R'' \text{ sissetoomine}) \\ &= g(m \cdot'' (\kappa \cdot' [r])) && (\text{rida } (4.31)) \end{aligned}$$

[13] Märgime siinkohal, et toimed $\cdot'$ ja $\cdot''$ on omavahel kooskõlas. See tähendab et iga $c \in C$, $b \in R''$ ja $[r] \in R'$ korral kehtib

$$(c \cdot'' b) \cdot' [r] = \lambda_C^{-1}(cb) \cdot' [r] = \lambda_C^{-1}(cb)r = \lambda_C^{-1}((cb)r) = \lambda_C^{-1}(c(br)) = c \cdot'' (br) = c \cdot'' (b \cdot' [r]).$$

$$= g(m) \cdot'' (\kappa \cdot' [r]) \qquad (g \text{ on } R''\text{-homomorfism})$$
$$= g(m) \cdot' \kappa(r) = g(m) \cdot' [r], \qquad (\text{rida (4.31) ja } \kappa \text{ def})$$

mistõttu $\mathrm{Hom}_{R''}(M,C) \subseteq \mathrm{Hom}_{R'}(M,C)$.
Teisalt, võttes $h \in \mathrm{Hom}_{R'}(M,C)$, $b \in R'' = \mathrm{Hom}_R(R,R')$ ja $m \in M$, saame, et

$$\begin{aligned}
(h(m \cdot'' b) - h(m) \cdot'' b) \cdot' [r] &= h(m \cdot'' b) \cdot' [r] - (h(m) \cdot'' b) \cdot' [r] && (\cdot' \text{ dist.})\\
&= h((m \cdot'' b) \cdot' [r]) - h(m) \cdot' b(r) && (h\ R'\text{-homo. ja valem (4.31)})\\
&= h(m \cdot' b(r)) - h(m) \cdot' b(r) && (\text{valem (4.31)})\\
&= h(m) \cdot' b(r) - h(m) \cdot' b(r) = 0 && (h\ R'\text{-homo.})
\end{aligned}$$

iga $[r] \in R'$ korral. Seega $h(m \cdot'' b) - h(m) \cdot'' b \in \mathbf{t}(C_{R'}) = \{0\}$, millest saame soovitud võrduse $\mathrm{Hom}_{R'}(M,C) = \mathrm{Hom}_{R''}(M,C)$. ■

Järgmises lemmas võtame ette kaks Morita ekvivalentset idempotentset ringi R ja S ning konstrueerime eelmises lemmas tutvustatud viisil ringid R', R'', S' ja S''. Kuna R'' ja S'' on ühikelemendiga ringid, saame klassikalist ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse kirjeldust kasutades leida neid ühendava Morita konteksti.

Lemma 4.55. *Olgu R ja S idempotentsed ringid ning $\mathbf{F}\colon \mathsf{CMod}_R \to \mathsf{CMod}_S$ ja $\mathbf{G}\colon \mathsf{CMod}_S \to \mathsf{CMod}_R$ inverssed ekvivalentsifunktorid. Kasutades eelmise lemma tähistusi, tähistame*

$$R' := R/\mathbf{t}(R), \qquad S' := S/\mathbf{t}(S),$$
$$R'' := \mathrm{Hom}_R(R,R') = \mathbf{K}_R(R_R), \qquad S'' := \mathrm{Hom}_S(S,S') = \mathbf{K}_S(S_S).$$

Kehtivad tingimused:
1. *$\mathbf{F}(R'')$ on (R,S)-bimoodul ja $\mathbf{G}(S'')$ on (S,R)-bimoodul.*
2. *$\mathbf{F} \cong \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}(S''), \_)$ ja $\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(\mathbf{F}(R''), \_)$.*
3. *Leidub Morita kontekst $(R'', S'', {}_{R''}\mathbf{F}(R'')_{S''}, {}_{S''}\mathbf{G}(S'')_{R''}, \theta', \phi')$.*

TÕESTUS. 1. Moodul $R''_R = \mathbf{K}_R(R_R)$ on kinnine tulenevalt lausest 4.39. Järelikult on $\mathbf{F}(R'')$ kinnine parempoolne S-moodul. Vaatleme ringide homomorfismi

$$f = \mathbf{F}_1^{R'',R''} \circ \mathfrak{l}_{R''}\colon\ R \to \mathrm{End}(R'') \to \mathrm{End}(\mathbf{F}(R'')) = \mathrm{Hom}_S(\mathbf{F}(R''), \mathbf{F}(R'')),$$

kus $\mathfrak{l}_{R''}(r)(r'') = rr''$,[14] $r \in R$ ja $r'' \in R''$. Siit saame moodulile $\mathbf{F}(R'')_S$ vasakpoolse R-toime:

$$R \times \mathbf{F}(R'') \to \mathbf{F}(R''), \qquad rp := f(r)(p) = \mathbf{F}(r\underset{R''}{\_})(p),$$

[14]korrutis rr'' on defineeritud tabelis 2.1 (lk 85) teisel real, kuna R' on vaadeldav vasakpoolse R-moodulina

kus $r\_\_{R''} = \mathfrak{l}_{R''}(r) \in \mathrm{End}(R'')$. Paneme tähele, et iga $r \in R$, $p \in \mathbf{F}(R'')$ ja $s \in S$ korral kehtib

$$(rp)s = f(r)(p)s = f(r)(ps) = r(ps),$$

mistõttu näeme, et $\mathbf{F}(R'')$ on tõesti (R,S)-bimoodul. Analoogiliselt saame, et $\mathbf{G}(S'')$ on (S,R)-bimoodul.

2. Olgu $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$. Paneme tähele, et kasutades lemmat 4.54 (6), järeldust 4.3 ja märkust 4.24, kehtib parempoolsete S-moodulite isomorfsus

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(C_R) &\underset{\lambda_{\mathbf{F}(C)}}{\cong} \mathrm{Hom}_{S''}(S'', \mathbf{F}(C)) = \mathrm{Hom}_S(S'', \mathbf{F}(C)) \\ &\underset{\mathbf{G}_1^{S'',\mathbf{F}(C)}}{\cong} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}(S''), (\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(C)) \underset{\zeta\circ\_\_}{\cong} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}(S''), \mathrm{id}_{\mathsf{CMod}_R}(C)) \\ &= \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}(S''), C)\end{aligned}$$

(eelnevalt on isomorfsust realiseeriv isomorfism märgitud sümboli $\cong$ alla ning $\zeta\colon \mathbf{G}\circ\mathbf{F} \xrightarrow{\bullet} \mathrm{id}_{\mathsf{CMod}_R}$ on loomulik ismomorfism ekvivalnetsusfunktorite definitsioonist). Eelnev isomomorfsus tekitab loomuliku isomorfismi kujul $\mathbf{F} \xrightarrow{\bullet} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}(S''), \_\_)$, kuna on esitatud loomulike isomorfismide kompositsioonina.
Analoogiliselt saame loomuliku isomorfismi $\mathbf{G} \xrightarrow{\bullet} \mathrm{Hom}_S(\mathbf{F}(R''), \_\_)$.

3. Arvestades eelmist punkti, tähistame ${}_RA_S := \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}(S''), R'') \cong \mathbf{F}(R'')$ (on võimalik näidata, et eelmises punktis näidatud parempoolsete S-moodulite isomorfsus on siinkohal kooskõlas parempoolse R-toimega, selleks saab kasutada märkusega 4.24 analoogilist arutelu ja tabelit 2.1 (lk 85)). Paneme tähele, et tänu järeldusele 4.4 ja ekvivalentsifunktorite definitsioonile kehtib ringide isomorfismide jada

$$\mathrm{End}(\mathbf{F}(R'')) \cong \mathrm{End}((\mathbf{G}\circ\mathbf{F})(R'')) \cong \mathrm{End}(R'') \cong R'',$$

kus viimane isomorfsus kehtib tänu definitsioonile 4.15 järgnevale märkusele. Vastavalt lemma 4.54 tingimusele 3 kehtib ${}_RA_S \in \mathrm{Ob}({}_{R''}\mathsf{Mod}^1_{S''})$. Nüüd on meil täpselt enne lemmat 4.16 kirjeldatud olukord. Tähistame ${}_{S''}B_{R''} := \mathrm{Hom}_S(A, S'') \cong \mathbf{G}(S'')$. Leidub Morita kontekst $(R'', S'', B, A, \theta', \phi')$, kus homomorfismid θ' ja ϕ' on defineeritud lemmas 4.16. ■

Järgmises lauses võtame ette eelmises lemmas leitud ühikelemendiga ringe ühendava Morita konteksti ning näitame, et tema abil on võimalik konstrueerida ringe R ja S ühendav unitaarne (isegi püsiv) ja sürjektiivne Morita kontekst.

Lause 4.56. *Olgu R ja S idempotentsed ringid ning $\mathbf{F}\colon \mathsf{CMod}_R \to \mathsf{CMod}_S$ ja $\mathbf{G}\colon \mathsf{CMod}_S \to \mathsf{CMod}_R$ inverssed ekvivalentsifunktorid. Leidub püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$, kusjuures $\mathbf{F} \cong \mathrm{Hom}_R(Q, \_\_)$ ja $\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(P, \_\_)$.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid. Lemma 4.55 põhjal kasutame tähistusi ${}_RA_S := \mathbf{F}(R'')$ ja ${}_SB_R := \mathbf{G}(S'')$ ning teame, et kehtivad loomulikud isomorfsused $\mathbf{F} \cong \mathrm{Hom}_R(B, \_)$ ja $\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(A, \_)$. Tähistame

$$ {}_RP_S := R \otimes_R R \otimes_R A \otimes_S S \otimes_S S, \tag{4.32} $$

$$ {}_SQ_R := S \otimes_S S \otimes_S B \otimes_R R \otimes_R R. \tag{4.33} $$

Parempoolne S-moodul $P_S = (R \otimes_R R \otimes_R A) \otimes_S S \otimes_S S$ on püsiv tulenevalt lausest 4.37. Tänu duaalsele lausele on ka vasakpoolne R-moodul ${}_RP$ püsiv. Kokkuvõttes on ${}_RP_S$ püsiv bimoodul (ning seetõttu ka unitaarne bimoodul). Analoogiliselt on ka ${}_SQ_R$ püsiv bimoodul.

Defineerime kujutused

$$ \xi_P\colon {}_RP_S \to A, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} r_k \otimes r'_k \otimes a_k \otimes s'_k \otimes s_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r_k r'_k a_k s'_k s_k, $$

$$ \xi_Q\colon {}_SQ_R \to B, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} s_k \otimes s'_k \otimes b_k \otimes r'_k \otimes r_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} s_k s'_k b_k r'_k r_k, $$

On lihtne näha, et ξ_P ja ξ_Q on korrektselt defineeritud bimoodulite homomorfismid. Defineerime bimoodulite homomorfismid

$$ \theta'' := \theta' \circ (\xi_P \otimes \xi_Q)\colon\ P \otimes_S Q \to R'', $$
$$ \phi'' := \phi' \circ (\xi_Q \otimes \xi_P)\colon\ Q \otimes_R P \to S'', $$

kus θ' ja ϕ' on defineeritud lemmas 4.55 (3). Paneme tähele, et iga $r, r', \tilde{r}, \tilde{r}' \in R$, $s, s', \tilde{s}, \tilde{s}' \in S$, $a \in A$ ja $b \in B$ korral

$$ \begin{aligned} \theta''((r \otimes r' \otimes a \otimes s' \otimes s) \otimes (\tilde{s} \otimes \tilde{s}' \otimes b \otimes \tilde{r}' \otimes \tilde{r})) &= \theta'(rr'as's \otimes \tilde{s}\tilde{s}'b\tilde{r}'\tilde{r}) \\ = \theta'(rr'as's \otimes \tilde{s}\tilde{s}'b\tilde{r}')\tilde{r} &= \theta'(rr'as's \otimes \tilde{s}\tilde{s}'b\tilde{r}') \cdot' [\tilde{r}] \in R''R'. \end{aligned} $$

(Toime $\cdot'$ on defineeritud real (4.28)). Lemma 4.54 (5) järgi $R''R' \subseteq R'$. Seega $\mathrm{Im}\,\theta'' \subseteq R'$. Analoogiliselt $\mathrm{Im}\,\phi'' \subseteq S'$.

Vaatleme joonisel 4.10 oleva diagrammi pidevate nooltega osa. Seal joonisel on alumine rida täpne jada ning ilmselt $\mathbf{t}(R)R = \{0\}$.

$$ \begin{tikzcd} & & & P \otimes_S Q \arrow[dl, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "\theta''"] & \\ \{0\} \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & \mathbf{t}(R) \arrow[r, "\iota_{\mathbf{t}(R)}"'] & R \arrow[r, "\kappa_{\mathbf{t}(R)}"'] & R/\mathbf{t}(R) = R' \arrow[r, "\mathbf{0}"'] & \{0\} \end{tikzcd} $$

Joonis 4.10

Paneme tähele, et (R,R)-bimoodul ${}_R(P\otimes_S Q)_R$ on püsiv (kuna $\mu_{P\otimes Q}=\mathrm{id}_P\otimes\mu_Q$). Seega, tänu lausele 3.40 (täpsemalt tema analoogile bimoodulite jaoks) leidub homomorfism $\theta\colon P\otimes_S Q\to R$ nii, et diagramm joonisel 4.10 on kommutatiivne. Analoogiliselt saame ka (S,S)-bimoodulite homomorfismi $\phi\colon Q\otimes_R P\to S$ nii, et $\kappa_{\mathbf{t}(S)}\circ\phi=\phi''$.

Paneme tähele, et iga $p,p'\in P$ ja $q\in Q$ korral

$$\begin{aligned}\xi_P(\theta(p\otimes q)p') &= \theta(p\otimes q)\xi_P(p') = [\theta(p\otimes q)]\cdot'\xi_P(p') = (\kappa_{\mathbf{t}(R)}\circ\theta)(p\otimes q)\cdot'\xi_P(p')\\ &= \theta''(p\otimes q)\cdot'\xi_P(p') = (\theta'\circ(\xi_P\otimes\xi_Q))(p\otimes q)\cdot'\xi_P(p')\\ &= \theta'(\xi_P(p)\otimes\xi_Q(q))\cdot'\xi_P(p') = \xi_P(p)\cdot'\phi'(\xi_Q(q)\otimes\xi_P(p'))\\ &= \xi_P(p)\cdot'(\phi'\circ(\xi_Q\otimes\xi_P))(q\otimes p') = \xi_P(p)\cdot'\phi''(q\otimes p')\\ &= \xi_P(p)\cdot'(\kappa_{t(S)}\circ\phi)(q\otimes p') = \xi_P(p)\cdot'[\phi(q\otimes p')] = \xi_P(p)\phi(q\otimes p')\\ &= \xi_P(p\phi(q\otimes p')).\end{aligned}$$

Siit saame, et $\theta(p\otimes q)p'-p\phi(q\otimes p')\in\mathrm{Ker}(\xi_P)$. Vaatleme kujutust

$$f\colon P\otimes_S Q\to P,\quad p\otimes q\mapsto\theta(p\otimes q)p'-p\phi(q\otimes p').$$

Lisaks vaatleme kujutust

$$\hat f\colon P\times Q\to P,\quad (p,q)\mapsto\theta(p\otimes q)p'-p\phi(q\otimes p').$$

Paneme tähele, et iga $p,p_1,p_2\in P$, $q,q_1,q_2\in Q$ ja $s\in S$ korral

$$\begin{aligned}\hat f(p_1+p_2,q) &= \theta((p_1+p_2)\otimes q)p'-(p_1+p_2)\phi(q\otimes p') = \hat f(p_1,q)+\hat f(p_2,q),\\ \hat f(p,q_1+q_2) &= \theta(p\otimes(q_1+q_2))p'-p\phi((q_1+q_2)\otimes p') = \hat f(p,q_1+q_2),\\ \hat f(ps,q) &= \theta(ps\otimes q)p'-ps\phi(q\otimes p') = \theta(p\otimes sq)p'-p\phi(sq\otimes p') = \hat f(p,sq).\end{aligned}$$

Järelikult $\hat f$ on S-tasakaalustatud, mistõttu f on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Ilmselt kehtib $\xi_P\circ f=\mathbf{0}$ (ning $f\in\mathrm{Mor}({}_R\mathsf{UMod}_S)$).

Ilmselt kehtib $\mathrm{Im}\,(\xi_P)\subseteq RAS$. Seega võime vaadelda kategooria ${}_R\mathsf{UMod}_S$ morfismi $\xi_P|^{RAS}\colon P\to RAS$, $p\mapsto\xi_P(p)$. Lemmaga 3.34 analoogiline lemma ütleb, et $\xi_P|^{RAS}$ on monomorfism kategoorias ${}_R\mathsf{UMod}_S$ [15] (paneme tähele, et $\xi_P=$

[15] Märkuses 3.41 vaatlesime põgusalt loomulikku teisendust

$$\mathbf{m}=(\mathbf{m}_M)_{M\in\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)}\colon\ R\otimes_R \_\_\otimes_S S\to\mathrm{id}_{{}_R\mathsf{Mod}_S},$$

mis iga $M\in\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$ korral on defineeritud $\mathbf{m}_M\colon\sum_{k=1}^{k^*}r_k\otimes m_k\otimes s_k\mapsto\sum_{k=1}^{k^*}r_km_ks_k$. Loomulikul teisendusel $\mathbf{m}$ on paljuski väga sarnased omadused loomuliku teisendusega μ. Siinkohal kasutame lemma 3.34 (ja 3.13) analoogi: olgu R, S idempotentsed ringid ja ${}_RM_S\in\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}_S)$; homomorfism $\mathbf{m}_M|^{RMS}\colon R\otimes_R M\otimes_S S\to RMS$ on monomorfism kategoorias ${}_R\mathsf{UMod}_S$. Selle lemma tõestus on täpselt analoogiline lemma 3.32 tõestusega (kasutades lemma 3.13 analoogi) ning autor soovitab lugejal proovida seda ise tõestada.

$\mathbf{m}_A \circ \mathbf{m}_{R\otimes A\otimes S}$). Nüüd aga saame lausest 2.61, et $f = \mathbf{0}$. Seega $\theta(p\otimes q)p' = p\phi(q\otimes p')$. Analoogiliselt saame, et $q'\theta(p\otimes q) = \phi(q'\otimes p)q$.

Paneme tähele, et iga $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$ korral kehtib tänu lausele 3.29

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(Q, C) &= \mathrm{Hom}_R(S\otimes_S S\otimes_S B\otimes_R R\otimes_R R, C) && \text{(tähistus (4.33))}\\
&\cong \mathrm{Hom}_R(S\otimes_S S\otimes_S B\otimes_R R, \mathrm{Hom}_R(R, C)) && \text{(lause 3.29)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_R(S\otimes_S S\otimes_S B\otimes_R R, C) && (C_R \text{ kinnine})\\
&\cong \mathrm{Hom}_R(S\otimes_S S\otimes_S B, \mathrm{Hom}_R(R, C)) && \text{(lause 3.29)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_R(S\otimes_S S\otimes_S B, C) && (C_R \text{ kinnine})\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(S\otimes_S S, \mathrm{Hom}_R(B, C)) && \text{(lause 3.29)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(S\otimes_S S, \mathbf{F}(C_R)) && \text{(lemma 4.55 (2))}\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(S, \mathrm{Hom}_S(S, \mathbf{F}(C_R))) && \text{(lause 3.29)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_S(S, \mathbf{F}(C_R)) && (\mathbf{F}(C_R) \text{ kinnine})\\
&\cong \mathbf{F}(C_R). && (\mathbf{F}(C_R) \text{ kinnine})
\end{aligned}$$

Siit saame loomuliku ismomorfismi $\mathbf{F} \cong \mathrm{Hom}_R(Q, \_)$ (too isomorfism on loomulik, kuna oleme ta esitanud loomulike isomorfismide kompositsioonina, siinkohal kasutame muuhulgas märkust 3.30). Analoogiliselt ka $\mathbf{G} \cong \mathrm{Hom}_S(P, \_)$.

Lõpetuseks veendume, et θ ja ϕ on sürjektiivsed. Selleks kasutame eelnevalt tõestatud asjaolu, et $\mathrm{Hom}_R(Q, \_)$ ja $\mathrm{Hom}_S(P, \_)$ on inverssed ekvivalentsifunktorid. Seega, tänu lausele 3.29,

$$\mathrm{id}_{\mathsf{CMod}_R} \cong \mathrm{Hom}_S(P, \_)\circ \mathrm{Hom}_R(Q, \_) \cong \mathrm{Hom}_R(P\otimes_S Q, \_).$$

Samas, tänu kinnisusele kehtib $\mathrm{id}_{\mathsf{CMod}_R} \cong \mathrm{Hom}_R(R, \_)$. Siit aga järeldub, et loomulik teisendus

$$\alpha := \_\circ\theta\colon \mathrm{Hom}_R(R, \_) \to \mathrm{Hom}_R(P\otimes_S Q, \_)$$

on isomorfism. Seega, iga $C_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CMod}_R)$ korral,

$$\{\mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(\alpha_C) = \{g\colon R_R \to C_R \mid g\circ\theta = \mathbf{0}\} \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\,\theta, C).$$

Sel juhul ka $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}\,\theta, \mathbf{K}'(\mathrm{Coker}\,\theta)) = \{\mathbf{0}\}$, (kus $\mathbf{K}' = \mathrm{Hom}_R(R, \mathbf{T}(\_))$ on funktor lausest 4.39). Järelikult ka homomorfism

$$\gamma\colon [r]_{\mathrm{Im}\,\theta} \mapsto \big(r' \mapsto [[r]_{\mathrm{Im}\,\theta}]_{\mathbf{t}(\mathrm{Coker}\,\theta)}r' = [[r]_{\mathrm{Im}\,\theta}r']_{\mathbf{t}(\mathrm{Coker}\,\theta)}\big)$$

on võrdne nullkujutusega. Seega $\mathbf{U}(\mathrm{Coker}\,\theta) = (\mathrm{Coker}\,\theta)R \subseteq \mathbf{t}(\mathrm{Coker}\,\theta)$. Samas, kuna ring R on idempotentne, siis $\mathrm{Coker}\,\theta = R/\mathrm{Im}\,\theta$ on unitaarne, mistõttu

$$\mathrm{Coker}\,\theta = (\mathrm{Coker}\,\theta)R = (\mathrm{Coker}\,\theta)RR \subseteq \mathbf{t}(\mathrm{Coker}\,\theta)R = \{0\}.$$

Seega, θ on sürjektiivne. Analoogiliselt on ka ϕ sürjektiivne.

Kokkuvõttes oleme saanud, et $(R, S, P, Q, \theta, \phi)$ on püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst. ■

Sellega oleme lõpuks tõestanud teoreemi 4.47 (arvestades kategooriate ekvivalentsusi teoreemist 4.42). Paneme tähele, et tegelikult oleme tõestanud isegi rohkem. Koondame tõestatu allolevasse teoreemi.

Teoreem. *Olgu R ja S idempotentsed ringid. Järgnevad väited on samaväärsed.*
1. *Ringid R ja S on Morita ekvivalentsed.*
2. *Leidub unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$.*
3. *Leidub püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP'_S, {}_SQ'_R, \theta', \phi')$.*

Morita ring

Järgnevalt näitame, et iga Morita kontekst tekitab teatava ringi, mida nimetatakse Morita ringiks, ning mille abil saab vastavat Morita konteksti kirjeldada.

Definitsioon 4.57. Olgu $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ Morita kontekst. Konteksti Γ **Morita ringiks** $\overline{\Gamma}$ nimetatakse maatriksite hulka

$$\overline{\Gamma} := \left\{ \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} \middle| \, r \in R, s \in S, p \in P, q \in Q \right\},$$

millel liitmine on defineeritud komponenthaaval ja korrutamine võrdusega

$$\begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r' & p' \\ q' & s' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} rr' + \theta(p \otimes q') & rp' + ps' \\ qr' + sq' & \phi(q \otimes p') + ss' \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Vahetu kontroll näitab, et selliselt defineeritud $\overline{\Gamma}$ on tõepoolest ring. Näitame, et Morita konteksti $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ Morita ring $\overline{\Gamma}$ sisaldab struktuuridega R, S, ${}_RP_S$ ja ${}_SQ_R$ isomorfseid koopiaid. Nimelt, alamhulgad

$$\overline{R} := \left\{ \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, r \in R \right\} \subseteq \overline{\Gamma},$$
$$\overline{S} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \middle| \, s \in S \right\} \subseteq \overline{\Gamma}$$

on $\overline{\Gamma}$ alamringid, mis on vastavalt isomorfsed ringidega R ja S. Tänu sellele võime me ringi $\overline{\Gamma}$ vaadelda nii (R, S)- kui ka (S, R)-bimoodulina, defineerides vasakpoolse R- ja S-toimed iga $r' \in R$, $s' \in S$ ja $\left[\begin{smallmatrix} r & p \\ q & s \end{smallmatrix}\right] \in \overline{\Gamma}$ korral vastavalt võrdustega

$$r' \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} r' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'r & r'p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

$$s'\begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s'q & s's \end{bmatrix}; \tag{4.36}$$

ning parempoolsed R- ja S-toimed analoogiliselt. Nüüd näeme, et kujutused

$$\beta\colon P \to \overline{\Gamma}, \quad p \mapsto \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \gamma\colon Q \to \overline{\Gamma}, \quad q \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}$$

on injektiivsed bimoodulite homomorfismid. Järelikult ${}_RP_S \cong \operatorname{Im}\beta =: {}_R\overline{P}_S$ ja ${}_SQ_R \cong \operatorname{Im}\gamma =: {}_S\overline{Q}_R$. Seega näeme, et kogu Morita kontekstis Γ peituv informatsioon on leitav ka Morita ringist $\overline{\Gamma}$.

Näitame, et Morita ekvivalentsetele idempotentsetele ringidele R ja S vastav Morita ring on samuti idempotentne.

Lause 4.58. *Olgu R ja S Morita ekvivalentsed idempotentsed ringid ja Γ neid ühendav unitaarne Morita kontekst. Siis on Morita ring $\overline{\Gamma}$ idempotentne.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid, $R \approx_{\mathrm{ME}} S$ ja $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ unitaarne Morita kontekst. Valime $\left[\begin{smallmatrix} r & p \\ q & s \end{smallmatrix}\right] \in \overline{\Gamma}$. Paneme tähele, et

$$\begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \overline{R} + \overline{P} + \overline{Q} + \overline{S}.$$

Kuna R ja S on idempotentsed, siis leiduvad $r_1, r_1', \ldots, r_{k^*}, r_{k^*}' \in R$ ja $s_1, s_1', \ldots, s_{h^*}, s_{h^*}' \in S$ nii, et $r = r_1r_1' + \ldots + r_{k^*}r_{k^*}'$ ja $s = s_1s_1' + \ldots + s_{h^*}s_{h^*}'$. Tänu ${}_RP$ ja ${}_SQ$ unitaarsusele leiduvad $r_1'', \ldots, r_{t^*}'' \in R$, $p_1, \ldots, p_{t^*} \in P$, $s_1'', \ldots, s_{j^*}'' \in S$ ja $q_1, \ldots, q_{j^*} \in Q$ nii, et $p = r_1''p_1 + \ldots + r_{t^*}''p_{t^*}$ ja $q = s_1''q_1 + \ldots + s_{j^*}''q_{j^*}$. Nüüd

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} r_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_k' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \sum_{h=1}^{h^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_h' \end{bmatrix} \in \overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^{t^*} \begin{bmatrix} r_t'' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & p_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{j^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_j'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_j & 0 \end{bmatrix} \in \overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma}.$$

Kokkuvõttes näeme, et $\left[\begin{smallmatrix} r & p \\ q & s \end{smallmatrix}\right] \in \overline{\Gamma}\,\overline{\Gamma}$, mistõttu ring $\overline{\Gamma}$ on idempotentne. ■

Püsivate ringide Morita ekvivalentsus

Selle peatüki lõpetuseks tõestame, et püsivate ringide Morita ekvivalentsust on võimalik kirjeldada bijektiivsete Morita kontekstide abil. Mainime, et järgnev lause kasutab lemmat 4.51, mis asub tärniga paragrahvis. Kuid kuna see lemma on märkimisväärselt lihtsama sisuga kui ülejäänud tulemused selles paragrahvis, siis loodetavasti lugeja ei pahanda.

Lause 4.59. *Olgu R ja S püsivad ringid. Ringid R ja S on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub püsiv ja bijektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu R ja S püsivad ringid ning $R \approx_{\mathrm{ME}} S$. Tulenevalt teoreemist 4.47 leidub unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP'_S, {}_SQ'_R, \theta', \phi')$. Defineerime bimoodulid

$$\begin{aligned} {}_RP_S &:= R \otimes_R RP'S \otimes_S S = R \otimes_R P' \otimes_S S, \\ {}_SQ_R &:= S \otimes_S SQ'R \otimes_R R = S \otimes_S Q' \otimes_R R \end{aligned}$$

ja homomorfismid[16]

$$\begin{aligned} \theta'' &:= \theta' \circ (\mathbf{m}_{P'} \otimes \mathbf{m}_{Q'}) \colon && P \otimes_S Q \to P' \otimes_S Q' \to R, \\ \phi'' &:= \phi' \circ (\mathbf{m}_{Q'} \otimes \mathbf{m}_{P'}) \colon && Q \otimes_R P \to Q' \otimes_R P' \to S. \end{aligned}$$

Lemmast 4.51 teame, et $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta'', \phi'')$ on püsiv ja sürjektiivne Morita kontekst.

Vaatleme lühikest täpset jada $\{0\} \xrightarrow{\mathbf{0}} \operatorname{Ker}\theta'' \xrightarrow{\iota_{\operatorname{Ker}\theta''}} P \otimes_S Q \xrightarrow{\theta''} R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$. Tulnevalt järeldusest 3.28 saame, et jada

$$\operatorname{Ker}\theta'' \otimes_R R \xrightarrow{\iota_{\operatorname{Ker}\theta''} \otimes \mathrm{id}_R} (P \otimes_S Q) \otimes_R R \xrightarrow{\theta'' \otimes \mathrm{id}_R} R \otimes_R R \xrightarrow{\mathbf{0}} \{0\}$$

on samuti täpne.

Olgu $p \otimes q \in \operatorname{Ker}\theta''$ ja $r \in R$. Kuna R on idempotentne, siis leiduvad $r_1, r'_1, \ldots, r_{h^*}, r'_{h^*} \in R$ nii, et $r = r_1 r'_1 + \ldots + r_{h^*} r'_{h^*}$. Kuna θ'' on sürjektiivne, siis iga $h \in \{1, \ldots, h^*\}$ korral leidub $\sum_{j=1}^{j^*} p'_{hj} \otimes q'_{hj} \in P \otimes_S Q$ nii, et $r_h = \theta''(\sum_{j=1}^{j^*} p'_{hj} \otimes q'_{hj})$. Nüüd

$$\begin{aligned} (p \otimes q) \otimes r &= \sum_{h=1}^{h^*} (p \otimes q) \otimes r_h r'_h = \sum_{h=1}^{h^*} (p \otimes q) r_h \otimes r'_h \\ &= \sum_{h=1}^{h^*} \sum_{j=1}^{j^*} (p \otimes q\theta''(p'_{hj} \otimes q'_{hj})) \otimes r'_h \\ &= \sum_{h=1}^{h^*} \sum_{j=1}^{j^*} (p \otimes \phi''(q \otimes p'_{hj}) q'_{hj}) \otimes r'_h \\ &= \sum_{h=1}^{h^*} \sum_{j=1}^{j^*} (p\phi''(q \otimes p'_{hj}) \otimes q'_{hj}) \otimes r'_h \end{aligned}$$

[16] homomorfismide $\mathbf{m}_{P'}$ ja $\mathbf{m}_{Q'}$ tähendus ilmneb märkusest 3.41.

$$= \sum_{h=1}^{h^*} \sum_{j=1}^{j^*} \theta''(p \otimes q)(p'_{hj} \otimes q'_{hj}) \otimes r'_h$$
$$= \sum_{h=1}^{h^*} \sum_{j=1}^{j^*} (0 \otimes q'_{hj}) \otimes r'_h = \sum_{h=1}^{h^*} 0 \otimes r'_h = 0.$$

Seega, $\operatorname{Ker} \theta'' \otimes_R R = \{0\}$, mistõttu $\theta'' \otimes \mathrm{id}_R$ on isomorfism. Analoogiliselt saame, et $\phi'' \otimes \mathrm{id}_S$ on isomorfism. Defineerime

$$\begin{aligned} \theta &:= \mu_R \circ (\theta'' \otimes \mathrm{id}_R) \circ (\mathrm{id}_P \otimes \mu_Q^{-1})\colon && P \otimes_S Q \to R, \\ \phi &:= \mu_S \circ (\phi'' \otimes \mathrm{id}_S) \circ (\mathrm{id}_Q \otimes \mu_P^{-1})\colon && Q \otimes_R P \to S. \end{aligned}$$

Homomorfismid θ ja ϕ on isomorfismid, kuna esituvad kolme isomorfismi kompositsioonina (vt järeldust 3.20). Olgu $p, p' \in P$ ja $q \in Q$. Kuna Q_R on unitaarne, siis leiduvad $q_1, \ldots, q_{k^*} \in Q$ ja $r_1, \ldots, r_{k^*} \in R$ nii, et $q = q_1 r_1 + \ldots + q_{k^*} r_{k^*}$. Nüüd

$$\theta(p \otimes q)p' = \theta\left(p \otimes \sum_{k=1}^{k^*} q_k r_k\right) p' = \sum_{k=1}^{k^*} (\mu_R \circ (\theta'' \otimes \mathrm{id}_R))(p \otimes q_k \otimes r_k) p'$$
$$= \sum_{k=1}^{k^*} \mu_R(\theta''(p \otimes q_k) \otimes r_k) p' = \sum_{k=1}^{k^*} \theta''(p \otimes q_k) r_k p'$$
$$= \sum_{k=1}^{k^*} p\phi''(q_k \otimes r_k p') = p\phi''\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k r_k \otimes p'\right) = p\phi''(q \otimes p').$$

Samas, kuna ka P_S on unitaarne, siis leiduvad $p'_1, \ldots, p'_{h^*} \in P$ ja $s'_1, \ldots, s'_{h^*} \in S$ nii, et $p' = p'_1 s'_1 + \ldots + p'_{h^*} s'_{h^*}$. Nüüd, aga

$$p\phi(q \otimes p') = p\phi\left(q \otimes \sum_{h=1}^{h^*} p'_h s'_h\right) = \sum_{h=1}^{h^*} p(\mu_S \circ (\phi'' \otimes \mathrm{id}_S))\,(q \otimes p'_h \otimes s'_h)$$
$$= \sum_{h=1}^{h^*} p\phi''(q \otimes p'_h s'_h) = p\phi''\left(q \otimes \sum_{h=1}^{h^*} p'_h s'_h\right) = p\phi''(q \otimes p').$$

Seega, kehtib $\theta(p \otimes q)p' = p\phi(q \otimes p')$. Analoogiliselt kehtib ka tingimus (4.26).

Kokkuvõttes, oleme saanud, et $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ on püsiv ja bijektiivne Morita kontekst.

Piisavus. Kuna püsivad bimoodulid on samuti unitaarsed ja bijektiivsed homomorfismid on sürjektiivsed, siis see implikatsioon järeldub otse teoreemist 4.47. ∎

Peatükk 5

Reesi maatriksringid ja tensorkorrutisringid

Käesolevas peatükis defineerime Reesi maatriksringid ja tensorkorrutisringid suvaliste ringide jaoks. Seejärel näitame, et mõlemat konstruktsiooni saab edukalt kasutada idempotentsete ringide Morita ekvivalentsuse uurimisel. Lisaks defineerime ja vaatleme pseudo-sürjektiivseid duaalseid kujutusi ning näeme, et nad tekivad suhteliselt loomulikult, uurides s-unitaalsete ringide Morita ekvivalentsust. Kahes viimases alapeatükis uurime Reesi maatriksringide ja tensorkorrutiseringide omavahelisi seoseid ning kirjeldame püsivate ja s-unitaalsete ringide Morita ekvivalentsuse, kasutades tensorkorrutisringe ja duaalseid kujutusi. Siin peatükis toodud tulemused ilmusid esmakordselt artiklis [54].

5.1 Reesi maatriksringid

Järgnevalt defineerime ja uurime Reesi maatriksringe üle suvaliste ringide. Analoogiline konstruktsioon ilmus ühikelemendiga ringide korral esimest korda Ánhi[1] ja Márki[2] artiklis [20]. Alustuseks defineerime n-ö *lõplikumõõtmelised* Reesi maatriksringid[3], kuna nad on üldjuhust lihtsamad ja aitavad paremini mõista Reesi maatriksringide olemust.

Olgu R ring, $m, n \in \mathbb{N}_1$ naturaalarvud ja $M \in \mathrm{Mat}_{n,m}(R)$ mingi fikseeritud maatriks. Vaatleme ringi

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}(R; m, n; M) := (\mathrm{Mat}_{m,n}; +, *),$$

[1]Pham Ngoc Ánh (s. 1956) – vietnami matemaatik.
[2]László Márki (s. 1947) – ungari matemaatik.
[3]David Rees (1918–2013) – briti matemaatik.

kus liitmine $+$ on tavaline maatriksite liitmine (2.21) ja korrutamine $*$ on suvaliste maatriksite $X, Y \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$ korral defineeritud võrdusega

$$X * Y := X \cdot M \cdot Y,$$

kus $\cdot$ on tavaline maatriksite korrutamine (2.22). Ringi $\mathcal{M}$ nimetatakse (lõplikumõõtmeliseks) **Reesi maatriksringiks** üle ringi R.

Nüüd oleme valmis üldistama eelnevat mõistet juhule, kus vaadeldavad maatriksid ei ole lõplikud, saades nii üldise Reesi maatriksringi mõiste.

Definitsioon 5.1. Olgu R ring; Λ, Ξ mittetühjad hulgad ja $M\colon \Xi \times \Lambda \to R$ kujutus. Vaatleme hulka $\mathcal{M} := \mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$, mis koosneb sellistest kujutustest $\Lambda \times \Xi \to R$, millel on vaid lõplik arv nullelemendist erinevaid väärtusi – need kujutused vastavad $\Lambda \times \Xi$ maatriksitele üle ringi R, kus on vaid lõplik arv nullelemendist erinevaid komponente. Hulgal $\mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$ defineeritakse liitmine komponenthaaval ja korrutamine $*$ on defineeritud võrdusega

$$X * Y := X \cdot M \cdot Y, \tag{5.1}$$

kus korrutamine $\cdot$ on analoogiline tavalise maatriksite korrutamisega. Hulka $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$ koos eelnevalt defineeritud tehetega nimetatakse **Reesi maatriksringiks**.

Anname korrutamisele (5.1) ka eksplitsiitse arvutusvalemi. Olgu $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$ Reesi maatriksring ja $X, Y \in \mathcal{M}$, siis iga $\lambda \in \Lambda$ ja $\xi \in \Xi$ korral

$$(X * Y)(\lambda, \xi) = \sum_{k \in \Xi} \sum_{l \in \Lambda} X(\lambda, k) M(k, l) Y(l, \lambda).$$

Eelnevad summad on määratud, kuna funktsioonide X, M ja Y väärtused on nullelemendist erinevad vaid lõpliku arvu argumentide(paaride) korral ja liidetaksegi vaid selliseid korrutisi, kus $X(\lambda, k), M(k, l), Y(l, \lambda) \neq 0$. Kui selliseid korrutisi ei ole, siis loetakse, et vastav summa võrdub ringi R nullelemendiga.

Reesi maatriksringi $\mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$ elemente nimetatakse **maatriksiteks** ning kujutust M nimetatakse **võileivamaatriksiks**. On selge, et kui $\Lambda = \{1, \ldots, m\}$ ja $\Xi = \{1, \ldots, n\}$, siis kehtib $\mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M) = \mathcal{M}(R; m, n; M)$.

Paneme tähele, et iga ringi R ja hulkade Λ, Ξ korral saame vaadelda maatriksringi $\mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; \mathbf{0})$, kus $\mathbf{0}\colon \Lambda \times \Xi \to R$ on nullkujutus. Reesi maatriksringe $\mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; \mathbf{0})$ nimetatakse **triviaalseteks**. Triviaalsed Reesi maatriksringid on nullkorrutamisega ringid (näide 2.3 (2)).

Käesolevas alapeatükis anname kõik tõestused lõplikumõõtmelisel juhul, st lõplikumõõtmeliste Reesi maatriksringide jaoks, kuna neid on lihtsam jälgida ja nad illustreerivad vastavaid tõestamistehnikaid paremini. Neid tõestusi on lihtne üldistada üldjuhule. Kirjeldame järgnevalt seda üldistusprotsessi. Paneme tähele, et iga maatriksi $X \in \mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ korral saame leida vähimate mõõtmetega lõpliku alammaatriksi[4] $\sigma(X)$ nii, et kõik maatriksi X komponendid väljaspool alammaatriksit $\sigma(X)$ on nullelemendid. Maatriksit $\sigma(X)$ võib vaadelda kui hulga $\mathcal{M}(R;m_X,n_X;M')$ elementi, kus m_X ja n_X on mingid naturaalarvud ja M' on maatriksi M alammaatriks.[5] Sel juhul on ring $\mathcal{M}(R;m_X,n_X;M')$ ringi $\mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi,M)$ alamring. Lisades maatriksisse $\sigma(X)$ nullelementidest koosnevaid ridu või veerge kuhu vaja, võime öelda, et $\sigma(X)$ kuulub igasse Reesi maatriksringi $\mathcal{M}(R;m',n';M'')$, kus $m' \geq m_X$ ja $n' \geq n_X$ ning $M' \preceq M'' \preceq M$. Nüüd, vaadeldes suvalist lõplikku maatriksite $X_1,\ldots,X_{k^*} \in \mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ hulka, saame teha arvutusi lõplikumõõtmelises alamringis $\mathcal{M}(R;m,n;M') \subseteq \mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$, mille korral kehtib $\sigma(X_k) \in \mathcal{M}(R;m,n;M')$ iga $k \in \{1,\ldots,k^*\}$ korral. Selliselt saadud üldistused on antud lausete järel järeldustena.

Kõigepealt kirjeldame idempotentsed Reesi maatriksringid.

Lause 5.2. *Olgu R ring. Reesi maatriksring $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R;m,n;M)$ on idempotentne parajasti siis, kui kehtib*

$$\mathrm{Mat}_1(R) = \mathrm{Mat}_{1,n}(R)M\,\mathrm{Mat}_{m,1}(R).$$

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu Reesi maatriksring $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R;m,n;M)$ idempotentne, kus $M = [\mathfrak{m}_{kh}]_{k,h=1}^{n,m}$. Olgu $X = [x_{hk}]_{h,k=1}^{m,n} \in \mathcal{M}$. Leiduvad maatriksid $Y_1,Z_1,\ldots,Y_{k^*},Z_{k^*} \in \mathcal{M}$ nii, et $X = Y_1 * Z_1 + \ldots + Y_{k^*} * Z_{k^*}$. Seega

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} Y_k * Z_k = \sum_{k=1}^{k^*} Y_k \cdot M \cdot Z_k$$
$$= \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} y_{k11} & \ldots & y_{k1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{km1} & \ldots & y_{kmn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{m}_{11} & \ldots & \mathfrak{m}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{m}_{n1} & \ldots & \mathfrak{m}_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{k11} & \ldots & z_{k1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{km1} & \ldots & z_{kmn} \end{bmatrix}$$

[4]Siinkohal nimetatakse maatriksi $A \in \mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ *alammaatriksiks* sellist maatriksit B, mille korral leiduvad alamhulgad $\Lambda' \subseteq \Lambda$ ja $\Xi' \subseteq \Xi$ nii, et $B = A|_{\Lambda'\times\Xi'}$. Asjaolu, et B on A alammaatriks tähistame $B \preceq A$. Ütleme, et alammaatriks B on *lõplik*, kui hulgad Λ' ja Ξ' on lõplikud.

[5]Täpsemalt, olgu $\Lambda' \subseteq \Lambda$ ja $\Xi' \subseteq \Xi$ sellised hulgad, et $\mathrm{dom}(\sigma(X)) = \Lambda' \times \Xi'$. Vastavalt eelnevale on Λ' ja Ξ' lõplikud hulgad. Olgu $m_X = \#(\Lambda')$ ja $n_X = \#(\xi')$. Valime bijektsioonid $f\colon \Lambda' \to \{1,\ldots,m_X\}$ ja $g\colon \Xi' \to \{1,\ldots,n_X\}$. Nüüd samastame $\sigma(X) = \sigma(X')$, kus iga $(\lambda,\xi) \in \Lambda' \times \Xi'$ korral $\sigma(X)(\lambda,\xi) = \sigma(X)'(f(\lambda),g(\sigma))$ ja $\sigma(X)' \in \mathcal{M}(R;m_X,n_X;M')$.

$$= \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^{n} y_{k1h}\mathfrak{m}_{h1} & \cdots & \sum_{h=1}^{n} y_{k1h}\mathfrak{m}_{hn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{h=1}^{n} y_{kmh}\mathfrak{m}_{h1} & \cdots & \sum_{h=1}^{n} y_{kmh}\mathfrak{m}_{hn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{k11} & \cdots & z_{k1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{km1} & \cdots & z_{kmn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m}\sum_{h=1}^{n} y_{k1h}\mathfrak{m}_{hj}z_{kj1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m}\sum_{h=1}^{n} y_{k1h}\mathfrak{m}_{hj}z_{kjn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m}\sum_{h=1}^{n} y_{kmh}\mathfrak{m}_{h1}z_{kj1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m}\sum_{h=1}^{n} y_{kmh}\mathfrak{m}_{hn}z_{kjn} \end{bmatrix},$$

kus $Y_k = [y_{khj}]_{h,j=1}^{m,n}$ ja $Z_k = [z_{khj}]_{h,j=1}^{m,n}$ iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral.

Nüüd, iga $p \in \{1, \ldots, m\}$ ja $q \in \{1, \ldots, n\}$ korral $[x_{pq}] \in \mathrm{Mat}_1(R)$ ja

$$[x_{pq}] = \left[\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{j=1}^{m}\sum_{h=1}^{n} y_{kph}\mathfrak{m}_{hj}z_{kjq}\right] = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} y_{kp1} & \ldots & y_{kpn} \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} z_{k1q} \\ \vdots \\ z_{kmq} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

millest järeldame, et $[x_{pq}] \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R)M\,\mathrm{Mat}_{m,1}(R)$.

Piisavus. Sarnane tarvilikkuse osaga, kui tõestuse sammud teha läbi vastupidises järjekorras. ■

Järeldus 5.3. *Olgu R ring. Reesi maatriksring $\mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ on idempotentne parajasti siis, kui kehtib*

$$R = \Xi' M \Lambda',$$

kus Ξ' on kujutuste $\{1\} \times \Xi \to R$, millel on vaid lõplik arv nullist erinevaid väärtusi, hulk ja Λ' on kujutuste $\Lambda \times \{1\} \to R$, millel on vaid lõplik arv nullist erinevaid väärtusi, hulk ning kujutuste $\{1\} \times \{1\} \to R$ hulk on samastatud hulgaga R.

Lahutusest (5.2) saame järgneva lause.

Lause 5.4. *Kui Reesi maatriksring $\mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ on idempotentne, siis on ring R samuti idempotentne.*

Järgnevas näites näitame, et iga mittetriviaalne Reesi maatriksring üle kaldkorpuse[6] (definitsioon 2.2.11 raamatus [5]) on idempotentne.

[6]Kaldkorpust nimetatakse (väga) tihti *jagamisega ringiks* (vrd definitisioon 7.27 raamatus [11]).

Näide 5.5 (Idempotentne Reesi maatriksring). Olgu D kaldkorpus; $m, n \in \mathbb{N}_1$ ja $M = [\mathfrak{m}_{hk}]_{h,k=1}^{n,m} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(D)$ nullmaatriksist erinev maatriks. Reesi maatriksring $\mathcal{M}(D; m, n; M)$ on idempotentne.

Kui $\mathfrak{m}_{11} \neq 0$, siis saab iga ühe-elemendilise maatriksi $[d] \in \mathrm{Mat}_1(D)$ kirjutada kujul

$$[d] = \begin{bmatrix} \mathfrak{m}_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{m}_{11} & \dots & \mathfrak{m}_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{m}_{n1} & \dots & \mathfrak{m}_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1,n}(D) M \,\mathrm{Mat}_{m,1}(D).$$

Kui $\mathfrak{m}_{11} = 0$, siis leiduvad h ja k nii, et $\mathfrak{m}_{hk} \neq 0$. Maatriksi $[d]$ saab sel juhul esitada analoogiliselt, kasutades elementi $\mathfrak{m}_{hk}$. Ringi $\mathcal{M}(D; m, n; M)$ idempotentsus järeldub nüüd lausest 5.2. □

Järgmisena tõestame pisikese, kuid väga kasuliku lemma, mis ütleb, et iga maatriksit üle idempotetentse ringi on võimalik esitada veeru- ja reamaatriksite korrutiste summana.

Lemma 5.6. *Olgu R idempotentne ring ja $m, n \in \mathbb{N}_1$. Kehtib valem*

$$\mathrm{Mat}_{m,n}(R) = \mathrm{Mat}_{m,1}(R) \,\mathrm{Mat}_{1,n}(R).$$

TÕESTUS. Ilmselt kehtib $\mathrm{Mat}_{m,1}(R) \,\mathrm{Mat}_{1,n}(R) \subseteq \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$ iga ringi R korral. Olgu R idempotentne ring. Valime $X = [x_{pq}]_{p,q=1}^{m,n} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$. Iga $(p, q) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ korral, tulenevalt ringi R idempotentsusest, leiduvad $x_1, x_1', \dots, x_{k_{pq}}, x_{k_{pq}}' \in R$ nii, et $x_{pq} = x_1 x_1' + \ldots + x_{k_{pq}} x_{k_{pq}}'$. Tähistame sümboliga $A_{pq}(r)$ $(m \times n)$-maatriksi, kus positsioonil (p, q) on r ja kõikjal mujal on nullelemendid. Nüüd,

$$A_{pq}(x_{pq}) = \sum_{k=1}^{k_{pq}} A_{pq}(x_k x_k') = \sum_{k=1}^{k_{pq}} \begin{bmatrix} 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ x_k & (p.\text{ rida}) \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \underset{(q.\text{ veerg})}{x_k'} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Seega, kehtib $A_{pq}(x_{pq}) \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R) \,\mathrm{Mat}_{1,n}(R)$. Nüüd, paneme tähele, et kehtib

$$X = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq}(x_{pq}) \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R) \,\mathrm{Mat}_{1,n}(R).$$

Sellega oleme näidanud, et $\mathrm{Mat}_{m,n}(R) = \mathrm{Mat}_{m,1}(R) \,\mathrm{Mat}_{1,n}(R)$. ■

Järeldus 5.7. *Olgu $\mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ Reesi maatriksring üle idempotentse ringi R. Iga $f \in \mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ korral leidub $k^* \in \mathbb{N}_1$, $g_1,\dots,g_{k^*}\colon \Lambda \to R$ ja $h_1,\dots,h_{k^*}\colon \Xi \to R$ nii, et iga $\lambda \in \Lambda$ ja $\xi \in \Xi$ korral kehtib*

$$f(\lambda,\xi) = \sum_{k=1}^{k^*} g_k(\lambda)h_k(\xi).$$

Nüüd oleme valmis tõestama selle alapeatüki põhiteoreemi.

Teoreem 5.8. *Olgu R ring. Ringi R ja Reesi maatriksringi $\mathcal{M}(R;m,n;M) = \mathcal{M}$ ühendab unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst parajasti siis, kui ring $\mathcal{M}$ on idempotentne.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Leidugu ringe R ja $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R;m,n;M)$ ühendav unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Tulenevalt lausest 4.46 on ring $\mathcal{M}$ idempotentne.

Piisavus. Olgu Reesi maatriksring $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R;m,n;M)$ idempotentne. Vaatleme vasakpoolset R-moodulit ${}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))$ ja parempoolset R-moodulit $(\mathrm{Mat}_{m,1}(R))_R$, kus iga $r \in R$ korral on R-toimed defineeritud vastavalt:

$$r\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} rx_1 & \dots & rx_n \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R),$$
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} r := \begin{bmatrix} y_1 r \\ \vdots \\ y_m r \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R).$$

Kuna ring $\mathcal{M}$ on idempotentne, on seda ka ring R (lause 5.4). Seega, iga $Y \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$ korral, saame kirjutada

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{k^*} y_{1k}y'_{1k} \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} y_{1k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} y'_{1k} + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

kus $y_1,\dots,y_m,y_{11},y'_{11},\dots,y_{1k^*},y'_{1k^*} \in R$ ja $y_1 = y_{11}y'_{11} + \dots + y_{1k^*}y'_{1k^*}$. Sarnaselt jätkates saame maatriksi Y iga komponendi esitada ringi R elementide korrutiste summana ja nii kogu maatriksi Y esitada veerumaatriksite ja ringi elementide korrutiste summana. Siit järeldame, et parempoolne R-moodul $(\mathrm{Mat}_{m,1}(R))_R$ on unitaarne. Analoogiliselt on unitaarne ka vasakpoolne R-moodul ${}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))$.

Defineerime R-moodulitel ${}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))$ ja $(\mathrm{Mat}_{m,1}(R))_R$ vastavalt parem- ja vasakpoolse $\mathcal{M}$-toime järgnevalt:

$$\begin{aligned} XZ &:= X * Z := X \cdot M \cdot Z \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R), \\ ZY &:= Z * Y := Z \cdot M \cdot Y \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R), \end{aligned}$$

kus $Z \in \mathcal{M}$, $X \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ ja $Y \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$. Bimooduli aksioomide vahetu kontroll näitab, et ${}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))_{\mathcal{M}}$ ja ${}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Mat}_{m,1}(R))_R$ on bimoodulid. Olgu $Y = [y_k]_{k=1}^m \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$. Tulenevalt lausest 5.2 leiduvad maatriksid $X_1 = [x_{1h}]_{h=1}^n, \dots, X_{k^*} = [x_{k^*h}]_{h=1}^n \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ ja $Y_1, \dots, Y_{k^*} \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$ nii, et $y_1 = X_1 * Y_1 + \ldots + X_{k^*} * Y_{k^*}$. Nüüd

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{k^*} X_k * Y_k \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} x_{k1} & \ldots & x_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} * Y_k + \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Jätkates seda protsessi iga elemendi $y_2, \dots, y_m$ jaoks, saame, et vasakpoolne $\mathcal{M}$-moodul ${}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Mat}_{m,1}(R))$ on unitaarne. Analoogiliselt on parempoolne $\mathcal{M}$-moodul $(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))_{\mathcal{M}}$ samuti unitaarne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et bimoodulid ${}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))_{\mathcal{M}}$ ja ${}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Mat}_{m,1}(R))_R$ on unitaarsed.

Defineerime kujutuse

$$\theta\colon\ {}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R) \otimes_{\mathcal{M}} \mathrm{Mat}_{m,1}(R))_R \to {}_R R_R, \quad \sum_{k=1}^{k^*} X_k \otimes Y_h \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} X_k \cdot M \cdot Y_k.$$

Vaatleme kujutust $\hat{\theta}\colon\ \mathrm{Mat}_{1,n}(R) \times \mathrm{Mat}_{m,1}(R) \to R$, $(X, Y) \mapsto XMY$. Kujutus $\hat{\theta}$ on selgelt mõlema argumendi suhtes aditiivne ning iga $Z \in \mathcal{M}$ korral

$$\hat{\theta}(X * Z, Y) = (X * Z)MY = (XMZ)MY = XM(ZMY) = \hat{\theta}(X, Z * Y).$$

Järelikult on $\hat{\theta}$ $\mathcal{M}$-tasakaalustatud ning tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest on θ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Iga $r \in R$, $X \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ ja $Y \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$ korral kehtib

$$\theta(r(X \otimes Y)) = \theta((rX) \otimes Y) = rXMY = r\theta(X \otimes Y).$$

Analoogiliselt kehtib ka $\theta((X \otimes Y)r) = \theta(X \otimes Y)r$, mistõttu θ on (R, R)-bimoodulite homomorfism (lemma 3.12). Tulenevalt lausest 5.2 on θ sürjektiivne.

Nüüd defineerime kujutuse

$$\phi\colon\ {}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Mat}_{m,1}(R) \otimes_R \mathrm{Mat}_{1,n}(R))_{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}, \quad \sum_{k=1}^{k^*} Y_k \otimes X_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} X_k \cdot Y_k.$$

Maatriksite korrutamine on liitmise suhtes distributiivne ning iga $r \in R$, $Y \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$ ja $X \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ korral $(Xr)Y = X(rY)$, mistõttu kujutus $\hat{\phi}\colon \mathrm{Mat}_{m,1}(R) \times \mathrm{Mat}_{1,n}(R) \to \mathcal{M}$, $(Y, X) \mapsto X \cdot Y$ on R-tasakaalustatud ning ϕ on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Iga $Z \in \mathcal{M}$, $Y \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$ ja $X \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ korral

$$\phi(Z * (Y \otimes X)) = \phi((Z * Y) \otimes X) = (Z * Y)X = Z * (YX) = Z * \phi(Y \otimes X).$$

Analoogiliselt kehtib ka $\phi((Y \otimes X) * Z) = \phi(Y \otimes X) * Z$, mistõttu ϕ on $(\mathcal{M}, \mathcal{M})$-bimoodulite homomorfism (lemma 3.12). Tulenevalt lausest 5.4 on ring R idempotentne ning nüüd, tänu lemmale 5.6, on ϕ sürjektiivne.

Lõpetuseks paneme tähele, et iga $X, X' \in \mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ ja $Y, Y' \in \mathrm{Mat}_{m,1}(R)$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}\theta(X \otimes Y)X' &= (XMY)X' = XM(YX') = X * (YX') = X * \phi(Y \otimes X'),\\ Y'\theta(X \otimes Y) &= Y'(XMY) = (Y'X)MY = (Y'X) * Y = \phi(Y' \otimes X) * Y.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et kuuik

$$(R, \mathcal{M}, {}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))_{\mathcal{M}}, {}_{\mathcal{M}}(\mathrm{Mat}_{m,1}(R))_R, \theta, \phi)$$

on unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. ∎

Järeldus 5.9. *Ringi R ja Reesi maatriksringi $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$ ühendab unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst parajasti siis, kui $\mathcal{M}$ on idempotentne.*

Kasutades teoreemi 4.47, saame järgneva järelduse.

Järeldus 5.10. *Kui Reesi maatriksring $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$ on idempotentne, siis ringid R ja $\mathcal{M}$ on Morita ekvivalentsed.*

Reesi maatriksringide alapeatüki lõpetuseks paneme tähele, et teoreemist 5.8 saab järeldada ühe klassikalise tulemuse, nimelt järelduse 4.31.

Järeldus 5.11. *Olgu S ühikelemendiga ring ja $n \in \mathbb{N}_1$. Ring S ja Reesi maatriksring $\mathcal{M}(S; n, n; E) = \mathrm{Mat}_n(S)$ on Morita ekvivalentsed, kus E on ühikmaatriks.*

5.2 Tensorkorrutisringid

Selles alapeatükis tutvume tensorkorrutisringi mõistega. Me näitame, kuidas defineerida korrutamist R-moodulite tensorkorrutisel üle suvalise ringi R.

Olgu R ring ning ${}_RP$ ja Q_R R-moodulid. Lisaks olgu meil antud (R, R)-bilineaarne kujutus

$$\langle\, , \,\rangle\colon\ P \times Q \to R.$$

Siinkohal tähendab **(R, R)-bilineaarsus** seda, et iga $p, p' \in P$, $q, q' \in Q$ ja $r \in R$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}
\langle p + p', q\rangle &= \langle p, q\rangle + \langle p', q\rangle,\\
\langle p, q + q'\rangle &= \langle p, q\rangle + \langle p, q'\rangle,\\
\langle rp, q\rangle &= r\langle p, q\rangle,\\
\langle p, qr\rangle &= \langle p, q\rangle r.
\end{aligned}$$

Mainime, et (R, R)-bilineaarne kujutus on olemuslikult skalaarkorrutamise (definitsioonid 9.1.1 ja 9.4.1 raamatus [5]) üldistus. Siiski leidub bilineaarseid kujutusi, mis pole vaadeldavad skalaarkorrutamisena. Toome ühe küllalt üldise näidete pere, mille abil saab moodustada palju (R, R)-bilineaarseid kujutusi.

Näide 5.12 ((R, R)-bilineaarne kujutus). Olgu R ring; ${}_RM$ ja N_R R-moodulid ning $f\colon {}_RM \to {}_RR$ ja $g\colon N_R \to R_R$ R-moodulite homomorfismid. Kujutus

$$\alpha\colon\ M \times N \to R, \qquad (m, n) \mapsto f(m)g(n)$$

on (R, R)-bilineaarne.

Paneme tähele, et iga $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ ja $r \in R$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}
\alpha(m + m', n) &= f(m + m')g(n) = (f(m) + f(m'))g(n)\\
&= f(m)g(n) + f(m')g(n) = \alpha(m, n) + \alpha(m', n),\\
\alpha(rm, n) &= f(rm)g(n) = rf(m)g(n) = r\alpha(m, n)
\end{aligned}$$

ja $\alpha(m, n + n') = \alpha(m, n) + \alpha(m, n')$ ning $\alpha(m, nr) = \alpha(m, n)r$. Seega, α on tõepoolest (R, R)-bilineaarne kujutus. $\square$

Hiljem kohtame veel bilineaarseid kujutusi (nt näited 5.33 ja 5.34).

Jätkame tensorkorrutisringi konstrueerimisega. Abeli rühma $Q \otimes_R P$ moodustajate – st elementaartensorite – hulgal defineerime korrutise $\star$ võrdusega

$$(q \otimes p) \star (q' \otimes p') := q \otimes \langle p, q'\rangle p' \tag{5.3}$$

ja laiendame selle kasutades distributiivsust kõigile tensorkorrutise $Q \otimes_R P$ elementidele.

Paneme tähele, et iga paari $(q, p) \in Q \times P$ jaoks saame defineerida kujutuse

$$f_{q,p}\colon\ Q \times P \to Q \otimes_R P, \qquad (q', p') \mapsto q' \otimes \langle p', q\rangle p. \tag{5.4}$$

Kujutused $f_{q,p}$ on kõik R-tasakaalustatud, kuna iga $q_1, q_2 \in Q$, $p_1, p_2 \in P$ ja $r \in R$ korral kehtivad

$$\begin{aligned} f_{q,p}(q_1 + q_2, p_1) &= (q_1 + q_2) \otimes \langle p_1, q\rangle p = q_1 \otimes \langle p_1, q\rangle p + q_2 \otimes \langle p_1, q\rangle p \\ &= f_{q,p}(q_1, p_1) + f_{q,p}(q_2, p_1), \\ f_{q,p}(q_1 r, p_1) &= q_1 r \otimes \langle p_1, q\rangle p = q_1 \otimes r\langle p_1, q\rangle p = q_1 \otimes \langle r p_1, q\rangle p = f_{q,p}(q_1, r p_1) \end{aligned}$$

ja, analoogiliselt, $f_{q,p}(q_1, p_1 + p_2) = f_{q,p}(q_1, p_1) + f_{q,p}(q_1, p_2)$. Seega – tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest – leiduvad Abeli rühma $Q \otimes_R P$ endomorfismid

$$\overline{f_{q,p}}\colon\ Q \otimes_R P \to Q \otimes_R P, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes \langle p_k, q\rangle p. \tag{5.5}$$

Järgnevalt defineerime kujutuse

$$\hat{\tau}\colon\ Q \times P \to \operatorname{End}(Q \otimes_R P), \qquad (q, p) \mapsto \overline{f_{q,p}}. \tag{5.6}$$

Paneme tähele, et iga $q, q', \xi \in Q$, $p, p', \beta \in P$ ja $r \in R$ korral

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(q + q', p)(\xi \otimes \beta) &= \overline{f_{q+q',p}}(\xi \otimes \beta) = \xi \otimes \langle \beta, q + q'\rangle p \\ &= \xi \otimes \langle \beta, q\rangle p + \xi \otimes \langle \beta, q'\rangle p = (\hat{\tau}(q, p) + \hat{\tau}(q', p))(\xi \otimes \beta), \\ \hat{\tau}(qr, p)(\xi \otimes \beta) &= \overline{f_{qr,p}}(\xi \otimes \beta) = \xi \otimes \langle \beta, qr\rangle p = \xi \otimes \langle \beta, q\rangle rp = \hat{\tau}(q, rp)(\xi \otimes \beta) \end{aligned}$$

ja, analoogiliselt, $\hat{\tau}(q, p + p') = \hat{\tau}(q, p) + \hat{\tau}(q, p')$ (lemma 3.8). Seega, $\hat{\tau}$ on R-tasakaalustatud ja tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest saame, et leidub Abeli rühmade homomorfism

$$\tau\colon\ Q \otimes_R P \to \operatorname{End}(Q \otimes_R P), \qquad \sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \overline{f_{q_k,p_k}}. \tag{5.7}$$

Nüüd saame defineerida kujutuse

$$\tilde{\tau}\colon\ (Q \otimes_R P) \times (Q \otimes_R P) \to Q \otimes_R P, \qquad (x, y) \mapsto \tau(x)(y). \tag{5.8}$$

Iga $q, q' \in Q$ ja $p, p' \in P$ korral kehtib

$$\tilde{\tau}(q \otimes p, q' \otimes p') = \tau(p \otimes q)(p' \otimes q') = \overline{f_{q,p}}(p' \otimes q') = q \otimes \langle p, q'\rangle p'.$$

Siit näeme, et kujutus $\tilde{\tau}$ langeb kokku korrutamisega $\star$, mis on defineeritud võrdusega (5.3), mis tähendab, et $\star$ on korrektselt defineeritud.

Viimaks, paneme tähele, et mistahes elementaartensorite $q_1 \otimes p_1, q_2 \otimes p_2, q_3 \otimes p_3 \in Q \otimes_R P$ korral kehtib

$$\begin{aligned}((q_1 \otimes p_1) \star (q_2 \otimes p_2)) \star (q_3 \otimes p_3) &= (q_1 \otimes \langle p_1, q_2\rangle p_2) \star (q_3 \otimes p_3)\\ &= q_1 \otimes \langle \langle p_1, q_2\rangle p_2, q_3\rangle p_3\\ &= q_1 \otimes \langle p_1, q_2\rangle \langle p_2, q_3\rangle p_3\\ &= (q_1 \otimes p_1) \star (q_2 \otimes \langle p_2, q_3\rangle p_3)\\ &= (q_1 \otimes p_1) \star ((q_2 \otimes p_2) \star (q_2 \otimes p_3)).\end{aligned}$$

Siit järeldame, et korrutamine $\star$ on assotsiatiivne ning seega $(Q \otimes_R P; +, \star)$ on ring.[7]

Definitsioon 5.13. Olgu R ring, Q_R, ${}_RP$ R-moodulid ja $\langle\, ,\, \rangle\colon P \times Q \to R$ (R, R)-bilineaarne kujutus. Abeli rühma $Q \otimes_R P$ koos korrutamisega

$$\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k\right) \star \left(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h\right) := \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{h=1}^{h^*} q_k \otimes \langle p_k, q'_h\rangle p'_h$$

nimetatakse kujutuse $\langle\, ,\, \rangle = \beta$ poolt defineeritud **tensorkorrutisringiks** ja tähistatakse $Q \otimes_R^\beta P$.

Mainime, et kui tensorkorrutisringi $Q \otimes_R^\beta P$ korral on kujutus β kontekstist selge, siis jäetakse tähis β ära ehk kirjutatakse $Q \otimes_R P := Q \otimes_R^\beta P$.

Järgnevalt defineerime pseudo-sürjektiivse kujutuse mõiste. Kuid eelnevalt tutvustame natuke tähistusi: ringi R ja alamhulga $A \subseteq R$ korral tähistame sümboliga $\langle A\rangle_{\mathrm{s}}$ ringi R aditiivse rühma $(R; +)$ vähimat alamrühma, mis sisaldab hulka A. Lihtne on veenduda, et

$$\langle A\rangle_{\mathrm{s}} = \{\pm a_1 \pm \ldots \pm a_{k^*} \mid k^* \in \mathbb{N}_1, a_1, \ldots, a_{k^*} \in A\} \cup \{0\}.$$

Definitsioon 5.14. Olgu R ring ja B hulk. Nimetame kujutust $f\colon B \to R$ **pseudo-sürjektiivseks**, kui $\langle \operatorname{Im} f\rangle_{\mathrm{s}} = R$, st vähim kujutist $\operatorname{Im} f$ sisaldav alamrühm Abeli rühmas $(R; +)$ on R ise.

[7] Järgnevalt vaatleme me põhiliselt tensorkorrutisi $Q \otimes_R P$, kus ${}_SQ_R$ ja ${}_RP_S$ on bimoodulid. Eelnevast teame, et ${}_S(Q \otimes_R P)_S$ on bimoodul. Nüüd, kui $\beta\colon P \times Q \to R$ on (R, R)-bilineaarne kujutus, siis ${}_S(Q \otimes_R^\beta P)_S$ on (S, S)-bimoodul ja ka ring. Struktuure, mis on nii ringid, kui ka R-moodulid mingi ringi R korral nimetatakse tavaliselt *algebrateks* (vrd definitsioon 7.1 raamatus [11], kus on küll vaadeldud algebraid vaid üle korpuste). Seepärast võime öelda, et kui Q ja P on bimoodulid, siis $Q \otimes_R^\beta P$ on algebra. See tähelepanek pole meile siiski tulevikus eriti oluline.

Ilmselt iga sürjektiivne kujutus on ka pseudo-sürjektiivne. Paneme tähele, et kui R on ring ning M_R ja ${}_RN$ R-moodulid, siis tensorkorutise definitsioonis olev kujutus $\otimes\colon M \times N \to M \otimes_R N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ on pseudo-sürjektiivne. Järgnevalt toome veel mõned näited pseudo-sürjektiivsetest kujutustest, mis pole sürjektiivsed.

Näide 5.15 (Pseudo-sürjektiivsed mitte-sürjektiivsed kujutused).

1. Vaatleme kõigi täisarvude ringi $\mathbb{Z}$ ja sisestust $\iota_1\colon \{1\} \to \mathbb{Z}$. Kujutus ι_1 ilmselt ei ole sürjektiivne. Samas, kuna $\langle \operatorname{Im} \iota_1 \rangle_{\mathrm{s}} = \langle \{1\} \rangle_{\mathrm{s}}$ on (aditiivne) alamrühm, siis $-1 \in \langle \operatorname{Im} \iota_1 \rangle_{\mathrm{s}}$. Nüüd, iga $z \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ korral
$$z = a(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{|z| \text{ tegurit}}) \in \langle \operatorname{Im} \iota_1 \rangle_{\mathrm{s}},$$
kus $a \in \{1, -1\}$. Lisaks kehtib $0 = 1 + (-1) \in \langle \operatorname{Im} \iota_1 \rangle_{\mathrm{s}}$. Kokkuvõttes näeme, et $\langle \operatorname{Im} \iota_1 \rangle_{\mathrm{s}} = \mathbb{Z}$, mistõttu saame, et ι_1 on pseudo-sürjektiivne.
2. Vaatleme kõigi reaalarvude korpust $\mathbb{R}$ ja kujutust $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Teadupoolest kehtib $\operatorname{Im} \sin = [-1, 1]$. Eelmisest näitest saame, et kehtib $\mathbb{Z} \subseteq \langle \operatorname{Im} \sin \rangle_{\mathrm{s}}$. Lisaks, iga $r \in R$ korral
$$r = \lfloor r \rfloor + \{r\} \in \langle [-1, 1] \rangle_{\mathrm{s}},$$
kus $\lfloor\ \rfloor\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ on põrandafunktsioon ($\lfloor r \rfloor$ on suurim täisarv, mille korral $\lfloor r \rfloor \leq r$) ja $\{r\}$ on reaalarvu r murdosa ($0 \leq \{r\} < 1$). Seega, sin on pseudo-sürjektiivne.[8] □

Nüüd tõestame lemma, mis iseloomustab pseudo-sürjektiivseid bilineaarseid kujutusi.

Lemma 5.16. *Olgu R ring, ${}_RP$, Q_R R-moodulid ja $\beta\colon P \times Q \to R$ (R, R)-bilineaarne kujutus. Siis $\langle \operatorname{Im} \beta \rangle_{\mathrm{s}}$ koosneb hulga $\operatorname{Im} \beta$ elementide kõikvõimalikest lõplikest summadest.*

TÕESTUS. Olgu $\beta\colon P \times Q \to R$ (R, R)-bilineaarne kujutus. Kuna iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral $\beta(0p, q) = 0\beta(p, q) = 0$, siis $0 \in \operatorname{Im} \beta \subseteq \langle \operatorname{Im} \beta \rangle_{\mathrm{s}}$.

Olgu $r \in \langle \operatorname{Im} \beta \rangle_{\mathrm{s}} \backslash \{0\}$. Sel juhul leiduvad $k^* \in \mathbb{N}_1$, $p_1, \ldots, p_{k^*} \in P$ ja $q_1, \ldots, q_{k^*} \in Q$ nii, et
$$r = \pm\beta(p_1, q_1) \pm \ldots \pm \beta(p_{k^*}, q_{k^*}).$$

[8] Märgime, et iga kujutus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille korral leiduvad erinevad $a, b \in \mathbb{R}$ nii, et $(a, b) \subseteq \operatorname{Im} f$, on pseudo-sürjektiivne.

Paneme tähele, et iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral

$$\beta(p,q) + \beta(-p,q) = \beta(p-p,q) = \beta(0,q) = \beta(0 \cdot 0, q) = 0\beta(0,q) = 0,$$

mis tõestab, et $-\beta(p,q) = \beta(-p,q)$. Seega, leiduvad elemendid $p'_1, \ldots, p'_{k^*} \in P$ nii, et $r = \beta(p'_1, q_1) + \ldots + \beta(p'_{k^*}, q_{k^*}) = \sum_{k=1}^{k^*} \beta(p'_k, q_k)$. ■

Siinkohal märgime, et ring R on idempotentne parajasti siis, kui tema korrutamine $\cdot\colon R \times R \to R$ on pseudo-sürjektiivne.

Olgu Q_R, ${}_RP$ R-moodulid, A Abeli rühm ja $\gamma\colon Q \otimes_R P \to A$ Abeli rühmade homomorfism. Eelnevalt tähistasime $\hat{\gamma} = \gamma \circ \otimes\colon Q \times P \to A$ (võrdus (3.6)). Kui γ on sürjektiivne, siis $\hat{\gamma}$ on pseudo-sürjektiivne, kuna iga $a \in A$ korral leidub $\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \in Q \otimes_R P$ nii, et

$$a = \gamma\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} \gamma(q_k \otimes p_k) = \sum_{k=1}^{k^*} \hat{\gamma}(q_k, p_k) \in \langle \operatorname{Im} \hat{\gamma} \rangle_{\mathrm{s}}.$$

Lisaks paneme tähele, et kui S on ring, ${}_SQ_R$, ${}_RP_S$ vastavad bimoodulid ja $\psi\colon {}_S(Q \otimes_R P)_S \to {}_SS_S$ (S,S)-bimoodulite homomorfism, siis $\hat{\psi}\colon Q \times P \to S$ on (S,S)-bilineaarne kujutus.

Kui (R,R)-bilineaarne kujutus β on pseudo-sürjektiivne (sürjektiivne), siis ütleme, et vastav tensorkorrutisring $Q \otimes_R^\beta P$ on **pseudo-sürjektiivselt** (**sürjektiivselt**) **defineeritud**. Toome näite sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringidest.

Näide 5.17 (Sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringid). Olgu R idempotentne ring ja $n \in \mathbb{N}_1$. Vaatleme maatriksringi $\mathrm{Mat}_n(R)$ ning hulki $\mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ ja $\mathrm{Mat}_{n,1}(R)$. Hulgad $\mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ ja $\mathrm{Mat}_{n,1}(R)$ on loomulikul viisil vaadeldavad bimoodulitena ${}_R(\mathrm{Mat}_{1,n}(R))_{\mathrm{Mat}_n(R)}$ ja ${}_{\mathrm{Mat}_n(R)}(\mathrm{Mat}_{n,1}(R))_R$ (vt näited 2.39 (1) ja (3)). Kuna maatriksite korrutamine on assotsiatiivne ja distributiivne, siis kujutused

$$\beta\colon \mathrm{Mat}_{n,1}(R) \times \mathrm{Mat}_{1,n}(R) \to \mathrm{Mat}_n(R),$$
$$\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}\right) \mapsto \begin{bmatrix} y_1x_1 & \ldots & y_1x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_nx_1 & \ldots & y_nx_n \end{bmatrix},$$
$$\gamma\colon \mathrm{Mat}_{1,n}(R) \times \mathrm{Mat}_{n,1}(R) \to R,$$
$$\left(\begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_ky_k$$

on vastavalt ($\mathrm{Mat}_n(R)$,$\mathrm{Mat}_n(R)$)- ja (R,R)-bilineaarsed. Kuna R on idempotentne, siis γ on sürjektiivne ning β sürjektiivsus järeldub lemmast 5.6. Seega,

$$\mathrm{Mat}_{n,1}(R) \otimes^{\beta}_{\mathrm{Mat}_n(R)} \mathrm{Mat}_{1,n}(R) \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{Mat}_{1,n}(R) \otimes^{\gamma}_{R} \mathrm{Mat}_{n,1}(R)$$

on sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringid. □

Tõestame, et iga (pseudo-)sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisring, mille tegurid on unitaarsed moodulid, on idempotentne.

Lause 5.18. *Olgu R idempotentne ring ja ${}_RP$, Q_R unitaarsed R-moodulid. Iga pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisring $Q \otimes^{\beta}_{R} P$ on idempotentne.*

TÕESTUS. Kehtigu lause eeldused ja olgu $\beta = \langle\, ,\, \rangle\colon P \times Q \to R$ pseudo-sürjektiivne (R,R)-bilineaarne kujutus. Valime $\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \in Q \otimes_R P$. Kuna R-moodul ${}_RP$ on unitaarne, siis iga $k \in \{1,\ldots,k^*\}$ korral leiduvad elemendid $p_{k1},\ldots,p_{kh^*} \in P$ ja $r_{k1},\ldots,r_{kh^*} \in R$ nii, et $p_k = r_{k1}p_{k1} + \ldots + r_{kh^*}p_{kh^*}$. Tänu $\langle\, ,\, \rangle$ pseudo-sürjektiivsusele leiduvad $p_{kh1},\ldots,p_{khj^*} \in P$ ja $q_{kh1},\ldots,q_{khj^*} \in Q$ nii, et $r_{kh} = \sum_{j=1}^{j^*} \langle p_{khj}, q_{khj}\rangle$. Nüüd

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k &= \sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes \left(\sum_{h=1}^{h^*} r_{kh}p_{kh}\right) = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} q_k \otimes r_{kh}p_{kh}\\
&= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} q_k \otimes \left(\sum_{j=1}^{j^*} \langle p_{khj}, q_{khj}\rangle\right) p_{kh}\\
&= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*} q_k \otimes \langle p_{khj}, q_{khj}\rangle p_{kh}\\
&= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*} (q_k \otimes p_{khj}) \star (q_{khj} \otimes p_{kh}) \in (Q \otimes_R P) \star (Q \otimes_R P),
\end{aligned}$$

millest järeldub, et $Q \otimes^{\beta}_{R} P$ on idempotentne ring. ■

Järgnevalt tõestame selle alapeatüki põhiteoreemi. Autor soovitab lugejale jälgida järgneva teoreemi tõestuses sarnasusi tehnikaga, mida kasutasime ühikelemendiga ringide Morita konteksti ülesehitamisel alapeatükis 4.1.

Teoreem 5.19. *Olgu R, ${}_RP$ ja Q_R unitaarsed R-moodulid ning $\beta = \langle\, ,\, \rangle$: $P \times Q \to R$ pseudo-sürjektiivne (R,R)-bilineaarne kujutus. Tensorkorrutisring $Q \otimes^{\beta}_{R} P$ on Morita ekvivalentne ringiga R.*

TÕESTUS. Kehtigu teoreemi eeldused. Defineerime R-moodulitel ${}_RP$ ja Q_R vastavalt parem- ja vasakpoolse $(Q \otimes_R^\beta P)$-toime võrdustega

$$p\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k\right) := \sum_{k=1}^{k^*} \langle p, q_k\rangle p_k, \tag{5.9}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k\right) q := \sum_{k=1}^{k^*} q_k \langle p_k, q\rangle, \tag{5.10}$$

kus $p \in P$, $q \in Q$ ja $\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \in Q \otimes_R P$. Näitame, et toime (5.9) on korrektselt defineeritud. Vaatleme kujutust

$$Q \times P \to \mathrm{End}({}_RP), \qquad (q,p) \mapsto \langle \_, q\rangle p.$$

See kujutus on korrektselt defineeritud ja R-tasakaalustatud, kuna $\langle\, ,\, \rangle$ on (R,R)-bilineaarne. Tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest, leidub Abeli rühmade homomorfism

$$\tau\colon Q \otimes_R P \to \mathrm{End}({}_RP), \qquad \sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \langle \_, q_k\rangle p_k.$$

Toime (5.9) on nüüd iga $p \in P$ ja $\delta \in Q \otimes_R P$ esitatav kujul $p\delta = \tau(\delta)(p)$, mistõttu (5.9) on korrektselt defineeritud. Analoogiliselt on ka toime (5.10) korrektselt defineeritud.

Iga $r \in R$, $p' \in P$ ja $\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \in Q \otimes_R P$ korral

$$(rp')\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} \langle rp, q_k\rangle p_k = r\sum_{k=1}^{k^*} \langle p, q_k\rangle p_k = r\left(p'\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k\right)\right).$$

Seega oleme saanud bimooduli ${}_RP_{Q\otimes P}$ ja analoogiliselt ka bimooduli ${}_{Q\otimes P}Q_R$.

Olgu $p \in P$. Kuna P on unitaarne, leiduvad $p_1, \ldots, p_{k^*} \in P$ ja $r_1, \ldots, r_{k^*} \in R$ nii, et $p = r_1p_1 + \ldots + r_{k^*}p_{k^*}$. Tulenevalt $\langle\, ,\, \rangle$ pseudo-sürjektiivsusest, leiduvad iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral $p_{k1}, \ldots, p_{kh^*} \in P$ ja $q_{k1}, \ldots, q_{kh^*} \in Q$ nii, et $r_k = \sum_{h=1}^{h^*} \langle p_{kh}, q_{kh}\rangle$. Nüüd

$$p = \sum_{k=1}^{k^*} r_kp_k = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} \langle p_{kh}, q_{kh}\rangle p_k = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} p_{kh}(q_{kh} \otimes p_k) \in P(Q \otimes_R^\beta P),$$

millest järeldub, et $P_{Q\otimes P}$ on unitaarne parempoolne $(Q \otimes_R^\beta P)$-moodul, mistõttu ${}_RP_{Q\otimes P}$ on unitaarne bimoodul. Analoogiliselt on ka ${}_{Q\otimes P}Q_R$ unitaarne bimoodul.

Defineerime kujutuse

$$\theta\colon {}_R(P\otimes_{Q\otimes P} Q)_R \to {}_RR_R, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} p_k\otimes q_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*}\langle p_k, q_k\rangle .$$

Kuna $\langle\, ,\,\rangle$ on mõlema argumendi suhtes aditiivne ja, iga $p,p'\in P$ ja $q,q'\in Q$ korral, kehtib

$$\langle p(q'\otimes p'), q\rangle = \langle\langle p,q'\rangle p', q\rangle = \langle p,q'\rangle\langle p',q\rangle = \langle p, q'\langle p',q\rangle\rangle = \langle p,(q'\otimes p')q\rangle,$$

mistõttu kujutus $\hat{\theta}\colon P\times Q\to R$, $(p,q)\mapsto\langle p,q\rangle$ on $(P\otimes_R Q)$-tasakaalustatud. Seega, tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest on θ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Kujutuse $\langle\, ,\,\rangle$ (R,R)-bilineaarsusest ja pseudo-sürjektiivsusest saame, et θ on sürjektiivne (R,R)-bimoodulite homomorfism.

Paneme tähele, et iga $p,p'\in P$ ja $q,q'\in Q$ korral

$$\begin{aligned}\theta(p\otimes q)p' &= \langle p,q\rangle p' = p(q\otimes p') = p\,\mathrm{id}_{P\otimes Q}(q\otimes p'),\\ q'\theta(p\otimes q) &= q'\langle p,q\rangle = (q'\otimes p)q = \mathrm{id}_{P\otimes Q}(q'\otimes p)q.\end{aligned}$$

Oleme näidanud, et kuuik $(R, Q\otimes_R^{\beta} P, P, Q, \theta, \mathrm{id}_{Q\otimes P})$ on unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Tulenevalt lausest 4.46 on ringid R ja $Q\otimes_R^{\beta} P$ idempotentsed ja teoreemi 4.47 tõttu Morita ekvivalentsed. ∎

Märgime, et eelneva teoreemi eeldustest järeldub tegelikult otse, et ring R on idempotentne, kuna ringi idempotentsus järeldub pseudo-sürjektiivse (R,R)-bilineaarse kujutuse $P\times Q\to R$ olemasolust, kus ${}_RP$ ja Q_R on idempotentsed R-moodulid.

Järeldus 5.20. *Olgu R idempotentne ring. Ringid R ja $R\otimes_R^{\hat{\mu}_R} R$ on Morita ekvivalentsed. Kusjuures $(R, R\otimes_R^{\hat{\mu}_R} R, R, R, \mu_R, \mathrm{id}_{R\otimes R})$ on unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst.*

Paneme tähele, et kujutuse $\hat{\mu}_R\colon R\times R\to R$, $(r,r')\mapsto rr'$ abil defineeritud tensorkorrutisringi $R\otimes_R^{\hat{\mu}_R} R$ korrutamine langeb kokku ringi $R\otimes_R R$ võrduse (3.15) abil defineeritud korrutamisega. Kui R on idempotentne ring, siis teame järeldusest 4.38, et $R\otimes_R R$ on püsiv. Nüüd aga saame järeldusest 5.20, et iga idempotentne ring on Morita ekvivalentne mingi püsiva ringiga. Seega püsivus ei ole Morita ekvivalentsuse suhtes invariantne omadus.

Järgnevalt näitame, et ühe unitaarse ja sürjektiivse Morita konteksti abil saab konstrueerida mitu Morita ekvivalentsete ringide paari.

Lause 5.21. *Olgu* $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ *unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst ning* $Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P$ *ja* $P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q$ *vastavalt* $\hat{\theta}$ *ja* $\hat{\phi}$ *poolt defineeritud tensorkorrutisringid. Ringid* R, S, $Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P$ *ja* $P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q$ *on kõik Morita ekvivalentsed.*

TÕESTUS. Lemmale 5.16 järgneva märkuse tõttu saame, et $\hat{\theta}$ ja $\hat{\phi}$ on pseudo-sürjektiivsed ja bilineaarsed kujutused, mistõttu $Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P$ ja $P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q$ on pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringid. Tulenevalt teoreemist 5.19 saame Morita ekvivalentsused $R \approx_{\mathrm{ME}} Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P$ ja $S \approx_{\mathrm{ME}} P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q$. Teoreemi 4.47 ja järelduse 4.49 abil näeme, et $R \approx_{\mathrm{ME}} S$ ja $Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P \approx_{\mathrm{ME}} P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q$ (ja kõikvõimalikud muud paarid). ■

Lokaalselt injektiivsed homomorfismid

Nüüd defineerime lokaalselt injektiivse homomorfismi ja range lokaalse isomorfismi mõiste ringide jaoks. Ranged lokaalsed isomorfismid defineerisid poolrühmade jaoks esimest korda Márki ja Steinfeld[9] artiklis [41]. Märgime, et kui R on ring ja $a, b \in R$, siis hulk $aRb \subseteq R$ on ringi R alamring.

Definitsioon 5.22. Olgu R ja S ringid. Ütleme, et ringide homomorfism $f \colon R \to S$ on **lokaalselt injektiivne**, kui tema ahend suvalisele alamringile kujul aRb, kus $a \in Ra$ ja $b \in bR$, on injektiivne.

Lokaalselt injektiivset homomorfismi, mis on lisaks sürjektiivne, nimetame **rangeks lokaalseks isomorfismiks**.

Iga injektiivne ringide homomorfism on ilmselt lokaalselt injektiivne. Leidub lokaalselt injektiivseid homomorfisme, mis pole injektiivsed, kusjuures selliseid homomorfisme pole väga raske leida. Näites 5.25 tutvume ühe sellise homomorfismiga.

Esmalt aga uurime lokaalselt injektiivseid homomorfisme natuke lähemalt. Nimelt anname selliste lokaalselt injektiivsete homomorfismide kirjelduse, mille lähtering on s-unitaalne.

Lemma 5.23. *Olgu* S *s-unitaalne ring ja* $f \colon S \to R$ *ringide homomorfism. Järgnevad väited on samaväärsed.*

1. *Homomorfism* f *on lokaalselt injektiivne.*
2. *Ahend* $f|_{sS}$ *on injektiivne iga* $s \in S$ *korral.*
3. *Ahend* $f|_{Ss}$ *on injektiivne iga* $s \in S$ *korral.*

[9] Ottó Steinfeld (1924–1990) – ungari matemaatik.

TÕESTUS. ($1 \implies 2$). Olgu S s-unitaalne ring ja $f\colon S \to R$ lokaalselt injektiivne ringide homomorfism. Valime $s \in S$ ja vaatleme ahendit $f|_{sS}$. Tänu ringi S vasakult s-unitaalsusele $s \in Ss$. Olgu $ss' \in \mathrm{Ker}(f|_{sS})$. Kuna S on paremalt s-unitaalne, siis leidub $u \in S$ nii, et $ss' = ss'u$. Nüüd, lisaks leidub ka $v \in S$ nii, et $u = uv \in uS$ ja kehtib

$$ss' = ss'u \in \mathrm{Ker}(f|_{sSu}) = \{0\}.$$

(Viimane võrdus tuleneb homomorfismi f lokaalsest injektiivsusest.) Seega $ss' = 0$, mis tõestab, et $f|_{sS}$ on injektiivne.

($2 \implies 1$). Olgu $s \in S$ ja $f|_{sS}$ injektiivne. Paneme tähele, et iga $s' \in S$ korral kehtib

$$sSs' \subseteq sS.$$

Seega, $f|_{sSs'}$ on homomorfismi $f|_{sS}$ ahend ja seetõttu samuti injektiivne. Järelikult, f on lokaalselt injektiivne. Märgime, et see implikatsioon ei nõudnud ringilt S midagi, mistõttu kehtib suvalise ringi S korral.

($1 \iff 3$). Analoogiline eelnevaga. ■

Järgnevalt tõestame väga kasuliku lause lokaalselt injektiivsete homomorfismide ja rangete lokaalsete isomorfismide kohta. Laias laastus näeme sealt muuhulgas, et ranged lokaalsed isomorfismid käituvad sarnaselt lineaarsetele funktsionaalidele (definitsioon 10.1.1 raamatus [5]).

Lause 5.24. *Olgu R ring, M_R R-moodul ja $f\colon M_R \to R_R$ R-moodulite homomorfism. Kui me defineerime Abeli rühmal M korrutamise võrdusega*

$$m \bullet m' := mf(m'), \qquad m, m \in M, \tag{5.11}$$

siis saame ringi ja f osutub lokaalselt injektiivseks ringide homomorfismiks. Kui S on s-unitaalne, siis on kõik ranged lokaalsed isomorfismid kujul $S \to R$ saadavad eelneva konstruktsiooni abil.

TÕESTUS. Olgu R ring, M_R R-moodul ja $f\colon M_R \to R_R$ R-moodulite homomorfism. Olgu $m, m', m'' \in M$, siis

$$\begin{aligned}
(m \bullet m') \bullet m'' &= mf(m')f(m'') = mf(m'f(m'')) = m \bullet (m' \bullet m''),\\
(m + m') \bullet m'' &= (m + m')f(m'') = mf(m'') + m'f(m'') = m \bullet m'' + m' \bullet m'',\\
m \bullet (m' + m'') &= mf(m' + m'') = mf(m') + mf(m'') = m \bullet m' + m \bullet m''.
\end{aligned}$$

Nüüd, arvestades et $(M; +)$ on Abeli rühm, saame, et $(M; +, \bullet)$ on tõepoolest ring. Lisaks paneme tähele, et iga $m, m' \in M$ korral

$$f(m \bullet m') = f(mf(m')) = f(m)f(m'),$$

mistõttu f on tõepoolest ringide homomorfism.

Olgu $a = a' \bullet a \in M \bullet a$ ja $b = b \bullet b' \in b \bullet M$. Lisaks olgu $\rho = a \bullet \rho' \bullet b \in M$ selline, et $f(\rho) = 0$. Nüüd

$$\begin{aligned}\rho &= a \bullet \rho' \bullet b = (a' \bullet a) \bullet \rho' \bullet (b \bullet b') = a' \bullet (a \bullet \rho' \bullet b) \bullet b' = a' \bullet \rho \bullet b' \\ &= a' f(\rho \bullet b') = a' f(\rho f(b')) = a' f(\rho) f(b') = a' 0 f(b') = 0.\end{aligned}$$

Seega $\operatorname{Ker}(f|_{a \bullet M \bullet b}) = \{0\}$, mistõttu f on lokaalselt injektiivne.

Nüüd, olgu S s-unitaalne ring ja $g\colon S \to R$ range lokaalne isomorfism. Vaatleme Abeli rühma $(S;+)$ parempoolse R-moodulina, defineerides R-toime võrdusega

$$s \cdot r := ss',$$

kus $r \in R$, $s, s' \in S$ ja $g(s') = r$ (selline s' leidub, kuna g on sürjektiivne). Oletame, et $s'' \in S$ on samuti selline, et $g(s'') = r$, siis $g(ss') = g(s)g(s') = g(s)g(s'') = g(ss'')$. Lemma 5.23 tõttu on $g|_{sS}$ injektiivne, mistõttu $ss' = ss''$. Seega, R-toime $\cdot$ on korrektselt defineeritud. On võimalik näidata, et nii saame R-mooduli S_R. Pannes tähele, et iga $s, s' \in S$ ja sellise $r \in R$ korral, et $g(s') = r$, kehtib

$$g(s \cdot r) = g(ss') = g(s)g(s') = g(s) \cdot r,$$

näeme, et $g\colon S_R \to R_R$ on R-moodulite homomorfism. Nüüd, defineerides korrutamise $\bullet$ R-moodulil S_R kasutades R-moodulite homomorfismi g võrdusega (5.11) langeb see kokku ringi S korrutamisega, kuna iga $s, s' \in S$ korral kehtib $s \bullet s' = s \cdot g(s') = ss'$. ■

Eelnev lause annab retsepti, kuidas konstrueerida lokaalselt injektiivseid ringide homomorfisme. Üks selline homomorfism on konstrueeritud järgnevas näites.

Näide 5.25 (Lokaalselt injektiivne mitte-injektiivne homomorfism). Olgu S mittetriviaalne s-unitaalne ring (näiteks ring $\mathbb{Z}$). Vaatleme S-moodulite otsesummat $S_S \oplus S_S$ parempoolse S-moodulina (definitsioon 2.48). Projektsioon

$$\rho_1\colon S_S \oplus S_S \to S_S, \qquad (s, s') \mapsto s$$

on ilmselt mitte-injektiivne S-moodulite homomorfism. Me saame S-moodulite otsesumma $S_S \oplus S_S$ muuta ringiks $(S_S \oplus S_S; \bullet)$, defineerides korrutamise võrdusega (5.11), st $(s_1, s_2) \bullet (s_3, s_4) = (s_1, s_2)s_3 = (s_1 s_3, s_2 s_3)$. Lausest 5.24 saame nüüd, et $\rho_1\colon (S_S \oplus S_S; \bullet) \to S$ on lokaalselt injektiivne ringide homomorfism. Kuna ρ_1 on sürjektiivne, siis on ρ_1 ka range lokaalne ringide isomorfism.

Märgime, et ring $(S_S \oplus S_S; \bullet)$ erineb „tavalisest“ ringide otsesummast (näide 2.15 (3)), kuna korrutamine on teistmoodi defineeritud. Küll aga langeb ring $(S_S \oplus S_S; \bullet)$ kokku paremalt s-unitaalse ringiga (2.14). $\square$

Nüüd oleme valmis tõestama teoreemi, mis väidab, et kui R ja S on ringid ja $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ Morita kontekst (mitte ilmtingimata unitaarne ega sürjektiivne), siis leiduvad lokaalselt injektiivsed ringide homomorfismid $P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q \to R$ ja $Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P \to S$.

Teoreem 5.26. *Olgu R ja S ringid, mida ühendab Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$. Kujutused $\theta\colon P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q \to R$ ja $\phi\colon Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P \to S$ on lokaalselt injektiivsed ringide homomorfismid.*

TÕESTUS. Olgu $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ Morita kontekst. Paneme tähele, et iga $\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k, \sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h \in P \otimes_S Q$ korral

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k\right) \star \left(\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h\right) &= \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{h=1}^{h^*} p_k \otimes \hat{\phi}(q_k, p'_h) q'_h \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{h=1}^{h^*} p_k \otimes \phi(q_k \otimes p'_h) q'_h = \sum_{k=1}^{k^*} \sum_{h=1}^{h^*} p_k \otimes q_k \theta(p'_h \otimes q'_h) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k\right) \theta \left(\sum_{h=1}^{h^*} p'_h \otimes q'_h\right).
\end{aligned}$$

Seega, ringi $P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q$ korrutamine $\star$ on defineeritud parempoolsete R-moodulite homomorfismi $\theta\colon (P \otimes_S Q)_R \to R_R$ abil (võrdus (5.11)). Lause 5.24 järgi on θ lokaalselt injektiivne ringide homomorfism.

Analoogiliselt saame, et ka $\phi\colon Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P \to S$ on lokaalselt injektiivne ringide homomorfism. $\blacksquare$

Järeldus 5.27. *Olgu R ja S idempotentsed Morita ekvivalentsed ringid. Leiduvad pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringid $Q \otimes_R P$ ja $P \otimes_S Q$ ning ranged lokaalsed isomorfismid $P \otimes_S Q \to R$ ja $Q \otimes_R P \to S$.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid ning $R \approx_{\mathrm{ME}} S$. Tulenevalt teoreemist 4.47 leidub unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$. Nüüd, teoreemist 5.26 teame, et kujutus $\theta\colon P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q \to R$ on lokaalselt injektiivne ringide homomorfism. Kuna θ on lisaks ka sürjektiivne, on θ range lokaalne isomorfism. Analoogiliselt on ka $\phi\colon Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P \to S$ range lokaalne ringide isomorfism. $\blacksquare$

Osutub, et kui kumbki kujutustest $P \otimes_S Q \to R$ või $Q \otimes_R P \to S$ on isomorfism, siis kehtib ka eelneva järelduse pöördväide.

Lause 5.28. *Olgu R ja S idempotentsed ringid. Kui ring R on isomorfne mingi pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringiga $P \otimes_S Q$, kus P_S ja ${}_SQ$ on unitaarsed S-moodulid, siis on R ja S Morita ekvivalentsed.*

TÕESTUS. Olgu R isomorfne mingi pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringiga $P \otimes_S Q$. Tulenevalt teoreemist 5.19 kehtib $P \otimes_S Q \approx_{\mathrm{ME}} S$. Kuna isomorfsed ringid on Morita ekvivalentsed (lause 4.50) ja Morita ekvivalentsus on transitiivne (järeldus 4.49), kehtib $R \approx_{\mathrm{ME}} S$. ∎

5.3 Tensorkorrutisringid ja kaasendomorfismid

Nüüd järgmisena uurime, kuidas on omavahel seotud tensorkorrutisringid ja moodulite kaasendomorfismide ringid. Analoogiliste küsimustega üle lokaalsete ühikutega ringide on tegelenud Ánh artiklis [19].

Olgu R ring, ${}_RP$ ja Q_R R-moodulid ning $\beta = \langle\, , \,\rangle \colon P \times Q \to R$ (R, R)-bilineaarne kujutus. Defineerime kaasendomorfismi mõiste, see on eukleidilise ruumi kaasteisenduse (raamatu [2] definitsioon 5 lk 430) mõiste üldistus.

Definitsioon 5.29. Moodulite endomorfisme $f \in \mathrm{End}({}_RP)$ ja $g \in \mathrm{End}(Q_R)$ nimetatakse **kaasendomorfismideks** (kujutuse $\beta = \langle\, , \,\rangle$ suhtes), kui iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral kehtib

$$\langle f(p), q\rangle = \langle p, g(q)\rangle.$$

Kõikide kujutuse β suhtes leiduvate kaasendomorfismide paaride (f,g) hulka tähistame sümboliga Ω^β. Hulk Ω^β on ringi $(\mathrm{End}({}_RP))^{\mathrm{op}} \oplus \mathrm{End}(Q_R); +, \circ)$ alamring, kus iga $f, f' \in \mathrm{End}({}_RP)$ ja $g, g' \in \mathrm{End}(Q_R)$ korral

$$(f, g) + (f', g') = (f + f', g + g'),$$
$$(f, g) \circ (f', g') = (f' \circ f, g \circ g').$$

Järgnevalt tutvume ülimalt oluliste kaasendomorfismidega.

Lemma 5.30. *Olgu R ring, ${}_RP$ ja Q_R R-moodulid ja $\beta = \langle\, , \,\rangle \colon P \times Q \to R$ (R, R)-bilineaarne kujutus. Iga $k^* \in \mathbb{N}_1$, $p_1, \dots, p_{k^*} \in P$ ja $q_1, \dots, q_{k^*} \in Q$ korral on*

$$f := \sum_{k=1}^{k^*} \langle \_\_, q_k\rangle p_k \colon {}_RP \to {}_RP \quad \text{ja} \quad g := \sum_{k=1}^{k^*} q_k\langle p_k, \_\_\rangle \colon Q_R \to Q_R \qquad (5.12)$$

on kaasendomorfismid.

TÕESTUS. Kujutused f ja g on selgelt moodulite endomorfismid, kuna β on (R,R)-bilineaarne. Paneme tähele, et iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral

$$\langle f(p), q\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{k^*} \langle p, q_k\rangle p_k, q \right\rangle = \sum_{k=1}^{k^*} \langle p, q_k\rangle \langle p_k, q\rangle = \left\langle p, \sum_{k=1}^{k^*} q_k \langle p_k, q\rangle \right\rangle = \langle p, g(q)\rangle,$$

mis tähendab, et f ja g on kaasendomorfismid. Seega $(f,g) \in \Omega^\beta$. ■

Lemmas 5.30 vaadeldud endomorfisme f ja g nimetatakse **β-elementaarendomorfismideks**. Järgnevalt uurime kõikide β-elementaarendomorfismide ringi. Tähistame

$$\Sigma^\beta := \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} (\langle \_\_, q_k\rangle p_k, q_k \langle p_k, \_\_\rangle) \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_1; \forall k\colon\ q_k \in Q, p_k \in P \right\}.$$

Lemmast 5.30 on lihtne järeldada, et hulk Σ^β on ringi Ω^β alamring.

Teoreem 5.31. *Olgu R ring ja ${}_RP$, Q_R R-moodulid. Iga (R,R)-bilineaarse kujutuse $\beta = \langle\, , \,\rangle\colon P \times Q \to R$ korral leidub range lokaalne ringide isomorfism $Q \otimes_R^\beta P \to \Sigma^\beta$.*

TÕESTUS. Olgu R ring ja $\beta = \langle\, , \,\rangle\colon P \times Q \to R$ (R,R)-bilineaarne kujutus. Defineerime kujutuse

$$\varphi\colon\ Q \otimes_R^\beta P \to \Sigma^\beta, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} (\langle \_\_, q_k\rangle p_k, q_k \langle p_k, \_\_\rangle). \tag{5.13}$$

Vaatleme kujutust $\hat{\varphi}\colon Q \times P \to \Sigma^\beta$, $(q,p) \mapsto (\langle \_\_, q\rangle p, q\langle p, \_\_\rangle)$. On lihtne näha, et $\hat{\varphi}$ on R-tasakaalustatud, mistõttu φ on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest.

Olgu $q \otimes p, q' \otimes p' \in Q \otimes_R^\beta P$ suvalised elementaartensorid, siis

$$\begin{aligned}
\varphi((q \otimes p) \star (q' \otimes p')) &= \varphi(q \otimes \langle p, q'\rangle p') = (\langle __, q\rangle \langle p, q'\rangle p', q\langle \langle p, q'\rangle p', __\rangle) \\
&= (\langle \langle __, q\rangle p, q'\rangle p', q\langle p, q'\langle p', __\rangle\rangle) \\
&= (\langle __, q'\rangle p' \circ \langle __, q\rangle p, q\langle p, __\rangle \circ q'\langle p', __\rangle) \\
&= (\langle __, q\rangle p, q\langle p, __\rangle) \circ (\langle __, q'\rangle p', q'\langle p', __\rangle) \\
&= \varphi(q \otimes p) \circ \varphi(q' \otimes p').
\end{aligned}$$

Seega, kasutades distributiivsuse omadusi, saame, et φ on ringide homomorfism. Lisaks sellele, φ on ilmselt sürjektiivne.

Jääb veel näidata, et φ on lokaalselt injektiivne. Olgu

$$\kappa = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*}(a_k \otimes b_k) \star (q_h \otimes p_h) \star (c_j \otimes d_j) \in \alpha \star (Q \otimes_R^\beta P) \star \gamma,$$

kus

$$\alpha = \sum_{k=1}^{k^*} a_k \otimes b_k = \sum_{x=1}^{x^*}\sum_{k=1}^{k^*}(a'_x \otimes b'_x) \star (a_k \otimes b_k) \in (Q \otimes_R^\beta P) \star \alpha$$

ja $\gamma = \sum_j c_j \otimes d_j \in \gamma \star (Q \otimes_R^\beta P)$, selline, et $\varphi(\kappa) = 0$. Nüüd

$$\begin{aligned}\varphi(\kappa) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*}(a_k \otimes b_k) \star (q_h \otimes p_h) \star (c_j \otimes d_j)\right)\\ &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*} a_k \otimes \langle b_k, q_h\rangle\langle p_h, c_j\rangle d_j\right)\\ &= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*}(\langle \_, a_k\rangle\langle b_k, q_h\rangle\langle p_h, c_j\rangle d_j, a_k\langle b_k, q_h\rangle\langle p_h, c_j\rangle\langle d_j, \_\rangle) = 0.\end{aligned}$$

Seega, iga $x \in \{1, \dots, x^*\}$ korral

$$\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*}\langle b'_x, a_k\rangle\langle b_k, q_h\rangle\langle p_h, c_j\rangle d_j = 0,$$

mistõttu

$$\begin{aligned}\kappa &= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*}(a_k \otimes b_k) \star (q_h \otimes p_h) \star (c_j \otimes d_j)\\ &= \sum_{x=1}^{x^*}\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*}(a'_x \otimes b'_x) \star (a_k \otimes b_k) \star (q_h \otimes p_h) \star (c_j \otimes d_j)\\ &= \sum_{x=1}^{x^*}\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{j=1}^{j^*} a'_x \otimes \langle b'_x, a_k\rangle\langle b_k, q_h\rangle\langle p_h, c_j\rangle d_j\\ &= \sum_{x=1}^{k^*} a'_x \otimes 0 = 0.\end{aligned}$$

Järelikult, kehtib $\mathrm{Ker}(\varphi|_{\alpha\star(Q\otimes P)\star\gamma}) = \{0\}$, mis tähendab, et φ on lokaalselt injektiivne. Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\varphi\colon Q \otimes_R^\beta P \to \Sigma^\beta$ on range lokaalne ringide isomorfism. ■

Selleks, et eelneva teoreemi väidet tugevdada, defineerime duaalse kujutuse mõiste.

Definitsioon 5.32. Olgu R ring. Ütleme, et (R, R)-bilineaarne kujutus $\langle\, ,\rangle :$ $P \times Q \to R$ on **duaalne**, kui kehtivad tingimused:

(1) iga $q \in Q$ korral leiduvad $p_1, \dots, p_{k^*} \in P$ ja $q_1, \dots, q_{k^*} \in Q$ nii, et

$$q = \sum_{k=1}^{k^*} q_k \langle p_k, q\rangle;$$

(2) iga $p \in P$ korral leiduvad $p_1, \dots, p_{h^*} \in P$ ja $q_1, \dots, q_{h^*} \in Q$ nii, et

$$p = \sum_{h=1}^{h^*} \langle p, q_h\rangle p_h.$$

Nagu näha, võiks eelmise definitsiooni sõnastada ka järgnevalt: (R, R)-bilineaarset kujutust $\beta : P \times Q \to R$ nimetatakse duaalseks, kui iga $p \in P$ ja $q \in Q$ on mingite β-elementaarendomorfismide püsipunktid.[10]

Järgnevalt toome kaks näidet duaalsetest kujutustest, mis esinevad algebras loomulikult.

Näide 5.33 (Duaalne kujutus I). Olgu V eukleidiline[11] ruum (st vektorruum, millel on antud skalaarkorrutamine; definitsioon 9.1.1 raamatus [5]). Kuna V on vektorruum võime vaadelda teda nii parem- kui ka vasakpoolse $\mathbb{R}$-moodulina. Eukleidilise ruumi V skalaarkorrutamine on $\langle\, ,\,\rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$-bilineaarne kujutus. Olgu $\{e_1, \dots, e_n\}$ ruumi V ortonormeeritud baas. Iga $x \in V$ korral

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{n} e_k \langle e_k, x\rangle$$

(lause 9.1.12 raamatus [5]). Seega duaalse kujutuse definitsiooni tingimused (1) ja (2) on rahuldatud iga $x \in V$ korral. Järelikult on $\langle\, ,\,\rangle$ duaalne kujutus.□

Järgmisest näitest näeme, et iga unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst, mis ühendab s-unitaalseid ringe, tekitab kaks duaalset kujutust.

[10] Olgu X hulk. Punkti $x \in X$ nimetatakse kujutuse $f \colon X \to X$ **püsipunktiks** kui kehtib $f(x) = x$. (Püsipunktid mängivad olulist rolli funktsionaalanalüüsis, vt nt paragrahv 2.3 raamatus [10].)

[11] Eukleides (elas aasta 300 eKr paiku) – kreeka matemaatik. Koondas peaaegu kõik tolle aja matemaatilised teadmised märgilisse raamatusse „Elemendid“. „Elemente“ kasutati matemaatikaõpikuna kuni 18. sajandini.

Näide 5.34 (Duaalne kujutus II). Olgu R ja S s-unitaalsed ringid, mis on ühendatud unitaarse ja sürjektiivse Morita konteksti $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ poolt. Näitame, et (R, R)-bilineaarne kujutus

$$\hat{\theta} \colon P \times Q \to R, \qquad (p, q) \mapsto \theta(p \otimes q)$$

on duaalne kujutus. Sarnane tõestus kehtib ka kujutuse $\hat{\phi}$ korral.

Fikseerime elemendi $y \in Q$. Kuna ${}_SQ$ on unitaarne, siis leiduvad elemendid $s_1, \ldots, s_{h^*} \in S$ ja $q_1, \ldots, q_{h^*} \in Q$ nii, et $y = s_1q_1 + \ldots + s_{k^*}q_{k^*}$. Tulenevalt ringi S on vasakult s-unitaalsusest leidub $u \in S$ nii, et $s_k = us_k$ iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral.

Kuna ϕ on sürjektiivne, siis leidub $\sum_{j=1}^{j^*} q_j \otimes p_j \in Q \otimes_R P$ nii, et

$$u = \phi\left(\sum_{j=1}^{j^*} q_j \otimes p_j\right) = \sum_{j=1}^{j^*} \phi(q_j \otimes p_j).$$

Nüüd

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=1}^{k^*} s_kq_k = \sum_{k=1}^{k^*} us_kq_k = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{j=1}^{j^*} \phi(q_j \otimes p_j)s_kq_k \\ &= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{j=1}^{j^*} q_j\theta(p_j \otimes s_kq_k) = \sum_{j=1}^{j^*} q_j\theta\left(p_j \otimes \sum_{k=1}^{k^*} s_kq_k\right) \\ &= \sum_{j=1}^{j^*} q_j\theta\left(p_j \otimes y\right) = \sum_{j=1}^{j^*} q_j\hat{\theta}\left(p_j, y\right). \end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud duaalse kujutuse definitsiooni tingimuse (1) kehtimist. Tingimuse (2) tõestus on analoogiline, kasutades ringi S paremalt s-unitaalsust. □

Järgnevalt näitame, et pseudo-sürjektiivsed duaalsed kujutused indutseerivad unitaarse ja sürjektiivse Morita konteksti.

Lause 5.35. *Olgu R ring, ${}_RP$ ja Q_R R-moodulid ning $\beta = \langle\, , \,\rangle : P \times Q \to R$ pseudo-sürjektiivne duaalne kujutus. Siis on ring R idempotentne ning ringid R ja Σ^β on Morita ekvivalentsed.*

TÕESTUS. Olgu R ring, ${}_RP$, Q_R R-moodulid ja $\beta = \langle\, , \,\rangle : P \times Q \to R$ pseudo-sürjektiivne duaalne kujutus. Kuna β on duaalne, siis iga $p \in P$ korral leiduvad $q_1, \ldots, q_{h^*} \in Q$ ja $p_1, \ldots, p_{h^*} \in P$ nii, et $p = \sum_{h=1}^{h^*} \langle p, q_h\rangle p_h \in RP$. Seega ${}_RP$ – ja analoogiliselt ka Q_R – on unitaarne R-moodul.

Defineerime R-moodulitel ${}_RP$ ja Q_R vastavalt parem- ja vasakpoolse Σ^β-toime järgnevalt:

$$\begin{aligned} p(f,g) &:= f(p),\\ (f,g)q &:= g(q), \end{aligned}$$

kus $(f,g) \in \Sigma^\beta$, $p \in P$ ja $q \in Q$. Need Σ^β-toimed on ilmselt korrektselt defineeritud ja tekitavad Σ^β-moodulid P_{Σ^β} ja ${}_{\Sigma^\beta}Q$. Olgu $(f,g) \in \Sigma^\beta$, $r \in R$ ja $p \in P$. Nüüd

$$(rp)(f,g) = f(rp) = rf(p) = r(p(f,g)),$$

mistõttu ${}_RP_{\Sigma^\beta}$ on (R,Σ^β)-bimoodul. Sarnaselt kehtib $(f,g)(qr) = ((f,g)q)r$ iga $q \in Q$ korral, mistõttu ${}_{\Sigma^\beta}Q_R$ on (Σ^β, R)-bimoodul.

Olgu $p \in P$. Kuna $\langle\,,\rangle$ on duaalne, siis leiduvad $q_1,\dots,q_{h^*} \in Q$ ja $p_1,\dots,p_{h^*} \in P$ nii, et $p = \sum_{h=1}^{h^*}\langle p, q_h\rangle p_h$. Nüüd

$$p = \sum_{h=1}^{h^*}\langle p, q_h\rangle p_h = p\left(\sum_{h=1}^{h^*}(\langle \_\_, q_h\rangle p_h, q_h\langle p_h, \_\_\rangle)\right) \in P\Sigma^\beta,$$

mistõttu P_{Σ^β} on unitaarne. Seega, ${}_RP_{\Sigma^\beta}$ on unitaarne (R,Σ^β)-bimoodul. Analoogiliselt on ${}_{\Sigma^\beta}Q_R$ unitaarne (Σ^β, R)-bimoodul.

Defineerime

$$\begin{aligned} &\theta\colon\ P \otimes_{\Sigma^\beta} Q \to R, &&\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*}\langle p_k, q_k\rangle,\\ &\phi\colon\ Q \otimes_R P \to \Sigma^\beta, &&\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*}(\langle \_\_, q_k\rangle p_k, q_k\langle p_k, \_\_\rangle). \end{aligned}$$

Vaatleme kujutust $\hat\theta\colon P \times Q \to R$, $(p,q) \mapsto \langle p, q\rangle$. Kujutus $\hat\theta$ on ilmselt aditiivne mõlema argumendi suhtes. Paneme tähele, et iga $p \in P$, $q \in Q$ ja $(f,g) \in \Sigma^\beta$ korral kehtib

$$\hat\theta(p(f,g),q) = \langle p(f,g), q\rangle = \langle f(p), q\rangle = \langle p, g(q)\rangle = \langle p, (f,g)q\rangle = \hat\theta(p,(f,g)q),$$

mis tõestab, et $\hat\theta$ on Σ^β-tasakaalustatud. Tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest on θ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Samas, tulenevalt β (R,R)-bilineaarsusest, on θ (R,R)-bimoodulite homomorfism. Homomorfism θ on sürjektiivne, kuna β on pseudo-sürjektiivne.

Teoreemist 5.31 saame, et ϕ on sürjektiivne (S,S)-bimoodulite homomorfism.

Lõpetuseks paneme tähele, et iga $p, p' \in P$ ja $q, q' \in Q$ korral kehtivad

$$\theta(p \otimes q)p' = \langle p, q\rangle p' = p(\langle \_, q\rangle p', q\langle p', \_\rangle) = p\phi(q, p'),$$
$$q'\theta(p \otimes q) = q'\langle p, q\rangle = (\langle \_, q'\rangle p, q'\langle p, \_\rangle)q = \phi(q', p)q.$$

Kokkuvõttes on $(R, \Sigma^\beta, {}_RP_{\Sigma^\beta}, {}_{\Sigma^\beta}Q_R, \theta, \phi)$ unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Tulenevalt lausest 4.46 on R ja Σ^β idempotentsed ning tänu teoreemile 4.47 kehtib $R \approx_{\mathrm{ME}} \Sigma^\beta$. ■

Märgime siinkohal ära, et kuna iga sürjektiivne (R, R)-bilineaarne kujutus $P \times Q \to R$ on pseudo-sürjektiivne, siis indutseerib ta unitaarse ja sürjektiivse Morita konteksti.

Järgnevalt näitame, et duaalse β korral on Σ^β isomorfne endomorfismide ringi $\mathrm{End}(Q_R)$ teatava alamringiga. Sarnaselt saab näidata, et Σ^β on samuti isomorfne ringi $(\mathrm{End}({}_RP))^{\mathrm{op}}$ analoogilise alamringiga. See lubab meil endomorfismide paaride (f, g) asemel kasutada endomorfisme g (või f).

Lause 5.36. *Olgu R ring ja $\beta = \langle\, , \rangle \colon P \times Q \to R$ duaalne kujutus. Ring Σ^β on isomorfne endomorfismide ringi $\mathrm{End}(Q_R)$ alamringiga*

$$\Pi^\beta := \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} q_k\langle p_k, \_\rangle \;\middle|\; k^* \in \mathbb{N}_1; \forall k\colon\; q_k \in Q, p_k \in P \right\}. \tag{5.14}$$

TÕESTUS. Olgu $\beta = \langle\, , \rangle \colon P \times Q \to R$ duaalne kujutus. Defineerime kujutuse

$$\psi\colon\; \Sigma^\beta \to \mathrm{End}(Q_R), \qquad (f, g) \mapsto g.$$

Kujutus ψ on ilmselt ringide homomorfism ning $\mathrm{Im}\,\psi = \Pi^\beta$.

Olgu $(f, g) \in \Sigma^\beta$ selline, et $g = \mathbf{0}$, (siis $(f, g) \in \mathrm{Ker}\,\psi$). Valime suvalise $p \in P$. Kuna $\langle\, , \rangle$ on duaalne, siis leiduvad $p_1, \dots, p_{k^*} \in P$ ja $q_1, \dots, q_{k^*} \in Q$ nii, et $f(p) = \sum_{k=1}^{k^*}\langle f(p), q_k\rangle p_k$. Nüüd

$$f(p) = \sum_{k=1}^{k^*}\langle f(p), q_k\rangle p_k = \sum_{k=1}^{k^*}\langle p, g(q_k)\rangle p_k = \sum_{k=1}^{k^*}\langle p, 0\rangle p_k = \sum_{k=1}^{k^*}\langle p, 0\rangle 0 p_k = 0.$$

Seega $f = \mathbf{0}$, mistõttu $\mathrm{Ker}\,\psi = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$. Kokkuvõttes on ψ ringide Σ^β ja Π^β vaheline isomorfism. ■

Järeldus 5.37. *Olgu R ring ja $\beta\colon P \times Q \to R$ duaalne kujutus. Siis on ring R idempotentne ning ringid R ja Π^β on Morita ekvivalentsed.*

Järgmisena näitame, et duaalse kujutuse poolt defineeritud tensorkorrutisring on s-unitaalne.

Lause 5.38. *Olgu R ring ja ${}_RP$, Q_R R-moodulid. Kui $\beta\colon P\times Q\to R$ on duaalne kujutus, siis tensorkorrutisring $Q\otimes_R^\beta P$ on s-unitaalne.*

TÕESTUS. Olgu $\beta=\langle\,,\,\rangle\colon P\times Q\to R$ duaalne kujutus. Fikseerime elementaartensori $q\otimes p\in Q\otimes_R P$. Tulenevalt β duaalsusest leiduvad elemendid $p_1,\dots,p_{h^*}\in P$ ja $q_1,\dots,q_{h^*}\in Q$ nii, et $q=\sum_{h=1}^{h^*}q'_h\langle p'_h,q\rangle$. Tähistame $a_{q\otimes p}:=\sum_{h=1}^{h^*}q'_h\otimes p'_h\in Q\otimes_R P$. Nüüd

$$\begin{aligned}q\otimes p&=\left(\sum_{h=1}^{h^*}q_h\langle p_h,q\rangle\right)\otimes p=\sum_{h=1}^{h^*}q_h\otimes\langle p_h,q\rangle p=\sum_{h=1}^{h^*}(q_h\otimes p_h)\star(q\otimes p)\\&=\left(\sum_{h=1}^{h^*}q_h\otimes p_h\right)\star(q\otimes p)=a_{q\otimes p}\star(q\otimes p).\end{aligned}$$

Siit näeme, et igale elementaartensorile $q\otimes p$ leidub $a_{q\otimes p}\in Q\otimes_R P$ nii, et $q\otimes p=a_{q\otimes p}\star(q\otimes p)$. Kuna tensorkorrutis $Q\otimes_R P$ koosneb elementaartensorite lõplikest summadest, siis leidub tulenevalt teoreemist 2.19 igale elemendile $\gamma\in Q\otimes_R P$ vasak pseudo-ühik $\alpha\in Q\otimes_R P$ (st $\alpha\star\gamma=\gamma$). Seega, $Q\otimes_R P$ on vasakult s-unitaalne ring.

Analoogiliselt on $Q\otimes_R P$ ka paremalt s-unitaalne. Kokkuvõttes on $Q\otimes_R P$ s-unitaalne. ■

Selle alapeatüki lõpetuseks näitame, et kui β on duaalne kujutus, siis β-elementaarendomorfismide ring Σ^β on isomorfne mingi tensorkorrutisringiga.

Teoreem 5.39. *Olgu R ring, Q_R R-moodulid ja $\beta\colon P\times Q\to R$ duaalne kujutus. Tensorkorrutisring $Q\otimes_R^\beta P$ on isomorfne ringidega Σ^β ja Π^β.*

TÕESTUS. Olgu $\beta=\langle\,,\,\rangle$ duaalne (R,R)-bilineaarne kujutus. Tulenevalt teoreemist 5.31 teame, et real (5.13) defineeritud kujutus $\varphi\colon Q\otimes_R^\beta P\to\Sigma^\beta$ on range lokaalne isomorfism. Seega piisab, kui näitame, et φ on injektiivne.

Olgu $\sum_{k=1}^{k^*}q_k\otimes p_k\in\operatorname{Ker}\varphi$, siis $\sum_{k=1}^{k^*}q_k\langle p_k,\_\rangle=\mathbf{0}$. Lausest 5.38 teame, et $Q\otimes_R^\beta P$ on s-unitaalne. Rakendades teoreemi 2.19, saame leida elemendi $x=\sum_{j=1}^{j^*}\kappa_k\otimes\rho_j\in Q\otimes_R P$ nii, et iga $k\in\{1,\dots,k^*\}$ korral kehtib

$$(q_k\otimes p_k)\star x=q_k\otimes p_k.$$

Paneme tähele, et

$$\sum_{k=1}^{k^*}q_k\otimes p_k=\sum_{k=1}^{k^*}(q_k\otimes p_k)\star x=\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{j=1}^{j^*}(q_k\otimes p_k)\star(\kappa_j\otimes\rho_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{j=1}^{j^*} q_k \otimes \langle p_k, \kappa_j\rangle \rho_j = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{j=1}^{j^*} q_k\langle p_k, \kappa_j\rangle \otimes \rho_j \\
&= \sum_{j=1}^{j^*}\left(\sum_{k=1}^{k^*} q_k\langle p_k, \kappa_j\rangle\right) \otimes \rho_j = \sum_{j=1}^{j^*} 0 \otimes \rho_j = 0.
\end{aligned}
$$

Seega, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Järelikult on φ injektiivne ning seetõttu ringide isomorfism. Lausest 5.36 saame, et $Q \otimes_R P$ on isomorfne ka ringiga Π^β. ∎

5.4 Püsivate ja s-unitaalsete ringide Morita ekvivalentsus

Selles alapeatükis kasutame eelmiste alapeatükkide tulemusi, et anda Morita ekvivalentsuse kirjeldus püsivatele ja seejärel s-unitaalsetele ringidele.

Teoreem 5.40. *Olgu S ja R püsivad ringid. Ringid R ja S on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui R on isomorfne mingi pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringiga $P \otimes_S Q$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Kehtigu $R \approx_{\mathrm{ME}} S$. Tulenevalt lausest 4.59 leidub püsiv ja bijektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$. Kuna ϕ on sürjektiivne, siis $\hat{\phi}$ on pseudo-sürjektiivne. Nüüd saame, et $P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q$ on pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisring. Tulenevalt teoreemist 5.31 on $\theta\colon P \otimes_S^{\hat{\phi}} Q \to R$ ringide isomorfism.

Piisavus. Olgu R isomorfne pseudo-sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringiga $P \otimes_S Q$. Teoreemi 5.19 tõttu on $P \otimes_S Q$ ja S Morita ekvivalentsed, mistõttu kehtib $R \approx_{\mathrm{ME}} S$ (lause 4.50). ∎

Järgnevalt tõestame, et kaks s-unitaalset ringi R ja S on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub teatav R-moodul Q_R nii, et S on isomorfne endomorfismide ringi $\operatorname{End}(Q_R)$ mingi alamringiga. See teoreem üldistab lauset 4.27 s-unitaalsete ringide juhule.

Teoreem 5.41. *Kaks s-unitaalset ringi R ja S on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui leiduvad R-moodulid ${}_RP$, Q_R, pseudo-sürjektiivne duaalne (R,R)-bilineaarne kujutus $\beta\colon P \times Q \to R$ ning kehtib ringide isomorfsus $S \cong \Pi^\beta$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu R ja S Morita ekvivalentsed s-unitaalsed ringid. Kuna s-unitaalsed ringid on püsivad (lause 3.43), siis leidub bijektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ (lause 4.59). Näitest 5.34 teame, et $\hat{\theta}\colon P \times Q \to R$ on duaalne (R,R)-bilineaarne kujutus. Tulenevalt teoreemist 5.39 kehtib $Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P \cong \Sigma^{\hat{\theta}}$. Järeldusest 5.27 saame, et kehtib $S \cong Q \otimes_R^{\hat{\theta}} P \cong \Sigma^{\hat{\theta}}$, kuna ϕ on bijektiivne. Lisaks kehtib $\Sigma^{\hat{\theta}} \cong \Pi^{\hat{\theta}}$ tulenevalt lausest 5.36. Lõpetuseks, olgu $r \in R$. Kuna θ on sürjektiivne, siis leidub $\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k \in P \otimes_R Q$ nii, et $r = \theta(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k)$. Nüüd

$$r = \theta\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} \theta(p_k \otimes q_k) = \sum_{k=1}^{k^*} \hat{\theta}(p_k, q_k),$$

mis tõestab, et $\hat{\theta}$ on pseudo-sürjektiivne.

Piisavus. Tulenevalt järeldusest 5.37 teame, et ringid R ja $\Pi^{\beta} \cong S$ on Morita ekvivalentsed. ∎

5.5 Reesi maatriksringide ja tensorkorrutisringide vaheline seos

Selles alapeatükis tõestame teoreemi, mis valgustab meid, kuidas Reesi maatriksringid ja tensorkorrutisringid omavahel seotud on. Olgu R ring ja Λ, Ξ mingid hulgad. Sümbolitega Λ' ja Ξ' tähistame vastavalt kõikide kujutuste $\{1\} \times \Lambda \to R$ ja $\Xi \times \{1\} \to R$, millel on vaid lõplik arv nullist erinevaid väärtusi, hulkasid. Hulgad Λ' ja Ξ' on vastavalt rea- ja veeruvektorite hulkade $\mathrm{Mat}_{1,n}(R)$ ja $\mathrm{Mat}_{m,1}(R)$ analoogid Reesi maatriksringis $\mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$.

Teoreem 5.42. *Olgu $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$ idempotentne Reesi maatriksring. Leidub range lokaalne isomorfism $\Xi' \otimes_R \Lambda' \to \mathcal{M}$, kus $\Xi' \otimes_R \Lambda'$ on sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisring.*

TÕESTUS. Vaatleme idempotentset Reesi maatriksringi $\mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M) = \mathcal{M}$ ja R-mooduleid ${}_R\Lambda'$, Ξ'_R, kus liitmine ja R-toimed on defineeritud komponenthaaval. Tulenevalt lausest 5.4 on R idempotentne ja seetõttu on R-moodulid ${}_R\Lambda'$ ja Ξ'_R unitaarsed (teoreemi 5.8 tõestus).

Defineerime kujutuse

$$\beta = \langle\, , \rangle\colon\ \Lambda' \times \Xi' \to R, \qquad \langle X, Y\rangle := X * Y = X \cdot M \cdot Y.$$

Kujutus β on ilmselt (R,R)-bilineaarne ja, tänu järeldusele 5.3, on ta sürjektiivne. Seega, võime vaadelda sürjektiivselt defineeritud tensorkorrutisringi $\Xi' \otimes_R^{\beta} \Lambda'$. Nüüd, defineerime kujutuse

$$\psi\colon\ \Xi' \otimes_R \Lambda' \to \mathcal{M}, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} Y_k \otimes X_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} Y_k \cdot X_k.$$

Kujutus ψ on korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism tänu tensorkorrutise universaalomadusele. Homomorfism ψ on sürjektiivne, kuna järeldus 5.7 väidab, et iga $Z \in \mathcal{M}$ on esitatav kujul $Z = \sum_{k=1}^{k^*} Y_k X_k$, kus $Y_k \in \Xi'$ ja $X_k \in \Lambda'$ iga $k \in \{1, \ldots, k^*\}$ korral.

Sarnaselt teoreemi 5.8 tõestusele vaatleme hulka Λ' parempoolse $\mathcal{M}$-moodulina. Sel juhul on $(\Xi' \otimes_R \Lambda')_{\mathcal{M}}$ parempoolne $\mathcal{M}$-moodul, kus $\mathcal{M}$-toime on iga $Y \in \Xi'$, $X \in \Lambda'$ ja $Z \in \mathcal{M}$ korral defineeritud võrdusega

$$(Y \otimes X) * Z := Y \otimes (X * Z).$$

Olgu $Y \in \Xi'$, $X \in \Lambda'$ ja $Z \in \mathcal{M}$, siis

$$\psi((Y \otimes X)*Z) = \psi(Y \otimes (X*Z)) = Y(X*Z) = (YX)*Z = \psi(Y \otimes X)*Z.$$

Seega, ψ on parempoolsete $\mathcal{M}$-moodulite homomorfism (lemma 3.12).

Paneme tähele, et iga $\sum_{k=1}^{k^*} Y_k \otimes X_k, \sum_{h=1}^{h^*} Y'_h \otimes X'_h \in \Xi' \otimes_R \Lambda'$ korral kehtib

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{k^*} Y_k \otimes X_k\right) \star \left(\sum_{h=1}^{h^*} Y'_h \otimes X'_h\right) &= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} Y_k \otimes \langle X_k, Y'_h\rangle X'_h \\
&= \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} Y_k \otimes (X_k * Y'_h) X'_h = \sum_{k=1}^{k^*} Y_k \otimes \left(X_k * \sum_{h=1}^{h^*} Y'_h X'_h\right) \\
&= \sum_{k=1}^{k^*} Y_k \otimes \left(X_k * \psi\left(\sum_{h=1}^{h^*} Y'_h \otimes X'_h\right)\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{k^*} Y_k \otimes X_k\right) * \psi\left(\sum_{h=1}^{h^*} Y'_h \otimes X'_h\right).
\end{aligned}$$

Siit näeme, et ringi $\Xi' \otimes_R^\beta \Lambda'$ korrutamine $\star$ langeb kokku $\mathcal{M}$-moodulite homomorfismi ψ poolt defineeritud korrutamisega. Seega, tänu lausele 5.24 saame, et ψ on lokaalselt injektiivne ringide homomorfism.

Kokkuvõttes, kuna ψ on sürjektiivne ja lokaalselt injektiivne ringide homomorfism, on ta range lokaalne ringide isomorfism. ■

Eelnevast teoreemist näeme, et teoreemi eeldustel kehtib

$$\mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M) \cong (\Xi' \otimes_R^\beta \Lambda')/\operatorname{Ker}\psi, \tag{5.15}$$

st iga idempotentne Reesi maatriksring on mingi tensorkorrutisringi faktorring.

Peatükk 6

Ringide laiendid

Käesolevas peatükis defineerime ringi laiendi mõiste ja kasutame sedagi, et uurida Morita ekvivalentsust. Eriliselt kasulikuks osutub kahe ringi ühine laiend. Nimelt, kahe ringi ühise laiendi leidumine osutub samaväärseks nende ringide Morita ekvivalentseks olemisega, mis annab meile veel ühe puhtalt algebralise viisi, mille abil Morita ekvivalentsust kirjeldada. Siin peatükis esitatud tulemused ilmusid esmakordselt artiklis [34].

6.1 Laiendi definitsioon ja lihtsamad omadused

Kõigepealt anname ringi laiendi definitsiooni. See sarnaneb poolrühmade laiendi mõistega, mis ilmus esimest korda artiklis [36].

Definitsioon 6.1. Me ütleme, et ring R on oma alamringi S **laiend**, kui kehtivad tingimused $R = RSR$ ja $S = SRS$. Niisamuti nimetame ringi R kõigi selliste ringide laiendiks, mis on isomorfsed ringiga S.

Asjaolu, et ring R on ringi S laiend tähistame $S \sqsubseteq R$. Järgnevas kahes lauses tõestame mõningad laiendite lihtsamad omadused.

Lause 6.2. *Olgu R ja S ringid ning kehtigu $S \sqsubseteq R$. Kehtivad järgmised omadused.*

1. *Ring R on idempotentne.*
2. *Kui R on kommutatiivne, siis $R \cong S$.*
3. *Kui S on ringi R ideaal, siis $R = S$.*
4. *Kui $S = \{0\}$, siis $R = \{0\}$.*

TÕESTUS. Olgu R ja S ringid ning kehtigu $S \subseteq R$ ja $S \sqsubseteq R$.

1. Paneme tähele, et

$$R = RSR = R(SR) \subseteq RR \subseteq R.$$

Seega $RR = R$ ehk R on idempotentne.

2. Olgu R kommutatiivne ring, siis

$$R = RSR = RRS = RS = R(SRS) = SRRS = SRS = S.$$

(Lisaks näeme, et suvalise sellise ringi S', mille korral kehtib $S' \cong S$, jaoks kehtib $S' \cong R$.)

3. Kehtigu $S \trianglelefteq R$. Nüüd

$$R = RSR \subseteq S \subseteq R.$$

Seega $R = S$.

4. Järeldub otse tingimusest 3. ■

Lause 6.3. *Olgu R, S ja T ringid. Kehtivad järgmised omadused.*

1. *Kui kehtivad $S \sqsubseteq R$ ja $R \sqsubseteq T$, siis $S \sqsubseteq T$.*
2. *Kui kehtib $S \sqsubseteq R$ ja $f\colon R \to T$ on sürjektiivne ringide homomorfism, siis $f(S) := \{f(s) \mid s \in S\} \sqsubseteq T$.*

TÕESTUS. Olgu R, S ja T ringid ning kehtigu $S \sqsubseteq R$.

1. Kehtigu $R \sqsubseteq T$, siis $S \subseteq T$ (isomorfismi täpsuseni). Paneme tähele, et

$$TST \subseteq TRT = T = TRSRT = (TR)S(RT) \subseteq TST,$$

millest järeldub, et $TST = T$. Lisaks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} S &= SRS \subseteq STS = (SRS)T(SRS) = SR(STS)RS \\ &\subseteq SRTRS = SRS = S, \end{aligned}$$

millest järeldub $S = STS$. Seega, oleme näidanud, et $S \sqsubseteq T$.

2. Olgu $f\colon R \to T$ sürjektiivne ringide homomorfism. Siis

$$T = f(R) = f(RSR) = f(R)f(S)f(R) = Tf(S)T,$$
$$f(S) = f(SRS) = f(S)f(R)f(S) = f(S)Tf(S).$$

Seega, kehtib $f(S) \sqsubseteq T$. ■

Eelmise lause esimene tingimus tähendab, et seos $\sqsubseteq$ on transitiivne. Seos $\sqsubseteq$ on ilmselt ka antisümmeetriline (isomorfismi täpsuseni). Iga idempotentne ring on ilmselt iseenda laiend. Siit näeme, et seos $\sqsubseteq$ on kõigi idempotentsete ringide klassil (isomorfismi täpsuseni) järjestusseos.

Järgnevalt vaatleme idempotentsete ringide laiendeid. Otse laiendi definitsioonist saame järgmise lemma, mis väidab, et idempotentsete ringide korral piisab laiendiks olemise tõestamiseks kahe – mitte nelja – sisalduvuse kontrollimisest.

Lemma 6.4. *Olgu R ja S idempotentsed ringid ning $S \subseteq R$. Ring R on ringi S laiend parajasti siis, kui kehtivad $R \subseteq RSR$ ja $SRS \subseteq S$.*

Järgnevalt tõestame veel ühe pisikese lause, mis lihtsustab idempotentsete ringide laiendite leidmist.

Lause 6.5. *Olgu R ja S ringid, S idempotentne ning $S \subseteq R$. Kui $S = SRS$, siis $S \sqsubseteq RSR$.*

TÕESTUS. Olgu R ring ja $S \subseteq R$ tema idempotentne alamring, mille korral $S = SRS$. Tähistame $R' := RSR$, mis on ringi R alamring. Siis $S = SS = SSS \subseteq RSR = R'$. Seega, S on ringi R' alamring. Paneme tähele, et

$$SR'S = S(RSR)S = SR(SRS) = SRS = S,$$
$$R'SR' = (RSR)S(RSR) = R(SRS)RSR = R(SRS)R = RSR = R'.$$

Seega, $S \sqsubseteq RSR$. ∎

Nüüd toome kaks näidet ringide laienditest, mis näitavad, et maatriksringide abil on võimalik defineerida palju laiendeid.

Näide 6.6 (Ringi laiend I). Olgu R idempotentne ring ja $n \in \mathbb{N}_1$ naturaalarv. Maatriksring $\mathrm{Mat}_n(R)$ on ringi R laiend.

Vaatleme ringi $\mathrm{Mat}_n(R) =: S$ üle idempotentse ringi R. Tähistame sümboliga $A_{hk}(r)$ $(n \times n)$-maatriksit, kus positsioonil (h, k) on element r ja kõikjal mujal on nullelemendid. Nüüd

$$R' := \{A_{11}(r) \mid r \in R\}$$

on ringi $\mathrm{Mat}_n(R)$ idempotentne alamring, mis on isomorfne ringiga R.

Olgu $r \in R$. Kuna R on idempotentne, saame kirjutada $r = \sum_{j=1}^{j^*} u_j r_j v_j$, kus iga $j \in \{1, \dots, j^*\}$ korral $u_j, r_j, v_j \in R$. Nüüd

$$A_{hk}(r) = \sum_{j=1}^{j^*} A_{hk}(u_j r_j v_j) = \sum_{j=1}^{j^*} A_{h1}(u_j) \cdot A_{11}(r_j) \cdot A_{1k}(v_j) \in SR'S.$$

Kuna iga maatriks $A \in S$ on esitatav n^2 maatriksi summana, mis on kujul $A_{hk}(r)$, kus $h, k \in \{1, \ldots, n\}$, siis järeldame, et kehtib sisalduvus $S \subseteq SR'S$.

Teisalt, kehtib sisalduvus $R'SR' \subseteq R'$, kuna

$$A_{11}(r) \cdot A \cdot A_{11}(r') = A_{11}(ra_{11}r') \in R',$$

kus $r, r' \in R$ ja $A = [a_{hk}]_{h,k=1}^{n} \in \mathrm{Mat}_n(R)$.

Kasutades lemmat 6.4 näeme, et kehtib $R \sqsubseteq \mathrm{Mat}_n(R)$. □

Enne järgmist näidet peame sisse tooma ühe mõiste. Olgu S ühikelemendiga ring. Nimetame Reesi maatriksringi $\mathcal{M}(S; \Lambda, \Xi; M)$ **unitaalseks**, kui ringi S ühikelement 1 on maatriksi M mingi komponent.

Näide 6.7 (Ringi laiend II). Olgu S ühikelemendiga ring. Iga unitaalne Reesi maatriksring $\mathcal{M}(S; \Lambda, \Xi; M)$ üle ringi S on ringi S laiend.

Vaatleme unitaalset Reesi maatriksringi $\mathcal{M} = \mathcal{M}(S; \Lambda, \Xi; M)$. Olgu $s \in S$ ja $(u, v) \in \Lambda \times \Xi$. Sümboliga $A_{uv}(s)$ tähistame $(\Lambda \times \Xi)$-maatriksit hulgast $\mathcal{M}$, mille korral $A_{uv}(s)(u, v) = s$ ja $A_{uv}(s)(i, j) = 0$ kõikide ülejäänud paaride $(i, j) \in \Lambda \times \Xi$ korral. Tulenevalt unitaalsuse eeldusest leidub $(v_0, u_0) \in \Xi \times \Lambda$ nii, et $M(v_0, u_0) = 1 \in S$. Tähistades

$$S' := \{A_{u_0v_0}(s) \mid s \in S\}$$

saame ringi $\mathcal{M}$ alamringi, mis on isomorfne ringiga S (isomorfismi realiseerib kujutus $s \mapsto A_{u_0v_0}(s)$).

Paneme tähele, et iga $s \in S$ korral

$$A_{u_0v_0}(s) = A_{u_0v_0}(s) \cdot M \cdot A_{u_0v_0}(1) = A_{u_0v_0}(s) * A_{u_0v_0}(1) \in S' * S',$$

mistõttu $S' = S' * S'$ ehk alamring S' on idempotentne.

Sisalduvus $S' * \mathcal{M} * S' \subseteq S'$ kehtib, kuna iga $B \in \mathcal{M}$ ja $s, s' \in S$ korral

$$A_{u_0v_0}(s) * B * A_{u_0v_0}(s') = A_{u_0v_0}(s) \cdot M \cdot B \cdot M \cdot A_{u_0v_0}(s')$$

ja maatriksite korrutis eelnevas reas võib sisaldada nullelemendist erinevat komponenti vaid positsioonil (u_0, v_0).

Tõestamaks sisalduvust $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} * S' * \mathcal{M}$ paneme tähele, et tulenevalt Reesi maatriksringi definitsioonist esitub iga hulga $\mathcal{M}$ maatriks lõpliku summana maatriksitest kujul $A_{uv}(s)$ ja

$$\begin{aligned} A_{u,v}(s) &= A_{u,v_0}(s) \cdot M \cdot A_{u_0,v_0}(1) \cdot M \cdot A_{u_0,v}(1) \\ &= A_{u,v_0}(s) * A_{u_0,v_0}(1) * A_{u_0,v}(1) \in \mathcal{M} * S' * \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes, kasutades lemmat 6.4 näeme, et kehtib $S \sqsubseteq \mathcal{M}(S; \Lambda, \Xi, M)$. □

Laiendite teema sissejuhatuse lõpetuseks tõestame lause, mis väidab, et kui meil on teada mingid idempotentsed ringid R ja S nii, et R on ringi S laiend, siis on meil võimalik nende abil leida mitmeid ringide paare, kus üks on teise laiend.

Lause 6.8. *Olgu R ja S on idempotentsed ringid ning $m, n \in \mathbb{N}_1$ sellised naturaalarvud, mille korral $m \leq n$. Kui R on ringi S laiend, siis ring $\mathrm{Mat}_n(R)$ on ringi $\mathrm{Mat}_m(S)$ laiend.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid ning kehtigu $S \sqsubseteq R$. Üldisust kitsendamata eeldame, et kehtib $S \subseteq R$. Vaatleme maatriksringe $\mathrm{Mat}_n(R)$ ja $\mathrm{Mat}_m(S)$, kus $m \leq n$. Tähistame sümboliga S' hulga $\mathrm{Mat}_n(R)$ alamhulka, mis koosneb sellistest maatriksitest, mille kõik elemendid on alamringist S ning nullelemendist erinevaid elemente leidub vaid esimeses m reas ja m veerus. On lihtne näha, et hulk S' on ringi $\mathrm{Mat}_n(R)$ alamring ning kehtib ringide isomorfsus $S' \cong \mathrm{Mat}_m(S)$.

Lausest 2.38 teame, et ringid S' ja $\mathrm{Mat}_n(R)$ on idempotentsed. Seega piisab näidata, et kehtivad sisalduvused $S' \cdot \mathrm{Mat}_n(R) \cdot S' \subseteq S'$ ja $\mathrm{Mat}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_n(R) \cdot S' \cdot \mathrm{Mat}_n(R)$ (lemma 6.4). Sisalduvus $S' \cdot \mathrm{Mat}_n(R) \cdot S' \subseteq S'$ järeldub maatriksite korrutamise definitsioonist (2.22) ja asjaolust, et $SRS = S$.

Analoogiliselt näitega 6.6 tähistame sümboliga $A_{hk}(r)$, kus $r \in R$ ja $h, k \in \{1, \ldots, n\}$, maatriksit hulgast $\mathrm{Mat}_n(R)$, kus positsioonil (h, k) on element r ja kõikjal mujal on nullelemendid. Iga maatriks $[r_{hk}]_{h,k=1}^n \in \mathrm{Mat}_n(R)$ avaldub summana $[r_{hk}] = A_{11}(r_{11}) + A_{12}(r_{12}) + \ldots + A_{nn}(r_{nn})$. Valime $[r_{hk}]_{h,k=1}^n \in \mathrm{Mat}_n(R)$ ja $h, k \in \{1, \ldots, n\}$. Kuna $R = RSR$, siis leiduvad elemendid $u_1, v_1, \ldots, u_{j^*}, v_{j^*} \in R$ ja $s_1, \ldots, s_{j^*} \in S$ nii, et $r_{hk} = u_1 s_1 v_1 + \ldots + u_{j^*} s_{j^*} v_{j^*}$. Nüüd

$$
\begin{aligned}
A_{hk}(r_{hk}) = A_{hk}\left(\sum_{j=1}^{j^*} u_j s_j v_j\right) &= \sum_{j=1}^{j^*} A_{hk}(u_j s_j v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{j^*} A_{h1}(u_j) \cdot A_{11}(s_j) \cdot A_{1k}(v_j) \in \mathrm{Mat}_n(R) \cdot S' \cdot \mathrm{Mat}_n(R).
\end{aligned}
$$

Siit järeldame, et kehtib sisalduvus $\mathrm{Mat}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_n(R) \cdot S' \cdot \mathrm{Mat}_n(R)$. Seega kehtib $S' \sqsubseteq \mathrm{Mat}_n(R)$.

Kokkuvõttes oleme näidanud, et kehtib $\mathrm{Mat}_m(S) \sqsubseteq \mathrm{Mat}_n(R)$. ■

Kasutades näidet 6.6 ja ringi laiendiks olemise seose transitiivsust, saame eelmisest lausest, et kui idempotentsete ringide R ja S korral kehtib $S \sqsubseteq R$, siis iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ korral kehtib $S \sqsubseteq \mathrm{Mat}_n(R)$.

6.2 Laiendid ja Morita ekvivalentsus

Käesolevas alapeatükis näitame, et idempotentsete ringide laiendid on väga lähedalt seotud nende ringide Morita ekvivalentsusega. Kõigepealt näeme, et kui ring R on idempotentse ringi S laiend, siis kehtib $R \approx_{\mathrm{ME}} S$.

Lause 6.9. *Kui R on idempotentse ringi S laiend, siis ringid R ja S on Morita ekvivalentsed.*

TÕESTUS. Olgu S idempotentne ring ja kehtigu $S \sqsubseteq R$. Kuna isomorfsed ringid on Morita ekvivalentsed (lause 4.50), siis vaatleme vaid juhtu, kus $S \subseteq R$. Vaatleme alamringi $SR \subseteq R$ kui (S,R)-bimoodulit ja alamringi $RS \subseteq R$ kui (R,S)-bimoodulit, kus toimed on defineeritud ringi R korrutamise abil. Lausest 6.2 (1) teame, et ring R on idempotentne. Seega bimoodulid SR ja RS on unitaarsed.

Defineerime kujutused[1]

$$\theta\colon\ RS \otimes_S SR \to R, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} r_k s_k \otimes s'_k r'_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r_k s_k s'_k r'_k, \tag{6.1}$$

$$\phi\colon\ SR \otimes_R RS \to SRS = S, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} s_k r_k \otimes r'_k s'_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} s_k r_k r'_k s'_k. \tag{6.2}$$

On lihtne näha, et kujutus

$$\hat{\theta}\colon RS \times SR \to R,$$

[1]Märgime, et tensorkorrutise $RS \otimes_S SR$ suvaline element σ on tegelikult kujul

$$\sigma = \sum_{t=1}^{t^*} \left(\sum_{h=1}^{h^*} r_{ht} s_{ht} \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{j^*} s'_{jt} r'_{jt} \right) = \sum_{t=1}^{t^*} \sum_{h=1}^{h^*} \sum_{j=1}^{j^*} r_{ht} s_{ht} \otimes s'_{jt} r'_{jt}.$$

Samas võime lõpliku hulga $K := \{(t,h,j) | t \in \{1,\dots,t^*\}, h \in \{1,\dots,h^*\}, j \in \{1,\dots,j^*\}\}$ järjestada (näiteks leksikograafiliselt) ning seada igale kolmikule vastavusse naturaalarvu hulgast $\{1,\dots,\#(K)\}$ (kui vastava järjekorranumbri). Iga kolmiku (t,h,j) korral, kui $(t,h,j) \mapsto k$, siis tähistame elementaartensoris $r_{ht} s_{ht} \otimes s'_{jt} r'_{jt}$ elemendid $r_{ht} := r_k$, $s_{ht} := s_k$, $s'_{jt} := s'_k$ ja $r'_{jt} := r'_k$. Lisaks tähistame $k^* := \#(K)$. Nüüd saame σ jaoks kuju

$$\sigma = \sum_{k=1}^{k^*} r_k s_k \otimes s'_k r'_k.$$

Seepärast vaatleme tensorkorrutise $RS \otimes_S SR$ (ja analoogiliselt ka $SR \otimes_R RS$) elemente just viimasel kujul.

$$\left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k s_k, \sum_{h=1}^{h^*} s'_h r'_h\right) \mapsto \left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k s_k\right)\left(\sum_{h=1}^{h^*} s'_h r'_h\right) = \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} r_k s_k s'_h r'_h$$

on S-tasakaalustatud ning seetõttu on θ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism tänu tensorkorrutise universaalomadusele.

Iga $\rho, r, r' \in R$ ja $s, s' \in S$ korral arvutame

$$\theta(\rho(rs \otimes s'r')) = \theta(\rho rs \otimes s'r') = \rho rss'r' = \rho rss'r' = \rho\theta(rs \otimes s'r')$$

ja, analoogiliselt, $\theta((rs \otimes s'r')\rho) = \theta(rs \otimes s'r')\rho$. Seega, θ on (R,R)-bimoodulite homomorfism (lemma 3.12).

Võtame suvalise $r \in R$. Kuna kehtib $S \sqsubseteq R$ ja S on idempotentne, siis $R = RSR = R(SS)R = (RS)(SR)$. Seega leiduvad $r_1, r'_1, \ldots, r_{k^*}, r'_{k^*} \in R$ ja $s_1, s'_1, \ldots, s_{k^*}, s_{k^*} \in S$ nii, et

$$r = \sum_{k=1}^{k^*} r_k s_k s'_k r_k = \theta\left(\sum_{k=1}^{k^*} r_k s_k \otimes s'_k r_k\right).$$

Järelikult on θ sürjektiivne. Analoogiliselt on ϕ korrektselt defineeritud ja sürjektiivne (S,S)-bimoodulite homomorfism.

Lõpetuseks, iga $\rho, \rho' \in RS$ ja $\sigma, \sigma' \in SR$ korral,

$$\begin{aligned}\theta(\rho \otimes \sigma)\rho' &= (\rho\sigma)\rho' = \rho(\sigma\rho') = \rho\phi(\sigma \otimes \rho'),\\ \sigma'\theta(\rho \otimes \sigma) &= \sigma'(\rho\sigma) = (\sigma'\rho)\sigma = \phi(\sigma' \otimes \rho)\sigma.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $(R, S, RS, SR, \theta, \phi)$ on unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. Tulenevalt teoreemist 4.47 kehtib $R \approx_{\mathrm{ME}} S$. ■

Eelmisest teoreemist ning näidetest 6.6 ja 6.7 saame kaks järgnevat järeldust. Esimene neist on klassikalise tulemuse – järelduse 4.31 – üldistus idempotentsete ringide juhule.

Järeldus 6.10. *Olgu R idempotentne ring ja $n \in \mathbb{N}_1$ naturaalarv. Maatriksring $\mathrm{Mat}_n(R)$ on Morita ekvivalentne ringiga R.*

Teine järeldus seob ühikelemendiga ringid oma unitaalsete Reesi maatriksringidega. See on tegelikult nõrgem versioon teoreemist 5.8, kui panna tähele, et iga unitaalne Reesi maatriksring üle ühikelemendiga ringi on idempotentne.

Järeldus 6.11. *Iga unitaalne Reesi maatriksring üle ühikelemendiga ringi S on Morita ekvivalentne ringiga S.*

Olgu R ja S ringid. Ringide R ja S **ühiseks laiendiks** nimetatakse ringi T, mis on nii ringi S kui ka ringi R laiendiks. Osutub, et Morita ekvivalentsetel idempotentsetel ringidel leidub ühine laiend.

Lause 6.12. *Kui idempotentsed ringid R ja S on ühendatud unitaarse ja sürjektiivse Morita kontekstiga $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$, siis Morita ring $\overline{\Gamma}$ on ringide R ja S ühine laiend.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid ja $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ neid ühendav unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst. On lihtne näha ja eelnevalt ka mainitud, et hulk

$$\overline{R} = \left\{ \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| r \in R \right\} \subseteq \overline{\Gamma}$$

on ringi $\overline{\Gamma}$ idempotentne alamring, mis on isomorfne ringiga R. Tõestame sisalduvused $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}$ ja $\overline{R}\,\overline{\Gamma}\,\overline{R} \subseteq \overline{R}$.

Iga maatriksit $\left[\begin{smallmatrix} r & p \\ q & s \end{smallmatrix}\right] \in \overline{\Gamma}$ saab esitada kujul

$$\begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Sisalduvuse $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}$ näitamiseks piisab, kui näidata, et viimased neli maatriksit kuuluvad hulka $\overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}$. Maatriksi $\left[\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ korral on see ilmne. Vaatleme elementi $p \in P$. Kuna ${}_RP$ on unitaarne, siis saame leida $p_1, \ldots, p_{k^*} \in P$ ja $r_1, \ldots, r_{k^*} \in R$ nii, et $p = r_1p_1 + \ldots + r_{k^*}p_{k^*}$. Seega saame

$$\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} 0 & r_kp_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} r_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & p_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \overline{R}\,\overline{\Gamma} = \overline{R}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}.$$

Analoogiliselt, iga $q \in Q$ korral $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{smallmatrix}\right] \in \overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}$. Nüüd, elemendi $s \in S$ jaoks leidub $\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k \in Q \otimes_R P$, mille korral $s = \phi(\sum_{k=1}^{k^*} q_k \otimes p_k)$, kuna ϕ on sürjektiivne. Seega

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi(q_k \otimes p_k) \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_k & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & p_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \overline{\Gamma}(\overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}) \subseteq \overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}.$$

Sellega oleme tõestanud sisalduvuse $\overline{\Gamma} \subseteq \overline{\Gamma}\,\overline{R}\,\overline{\Gamma}$.

Paneme tähele, et iga $r, r', r'' \in R$, $s \in S$, $q \in Q$ ja $p \in P$ korral kehtib

$$\begin{bmatrix} r' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r'' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'r & r'p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r'' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'rr'' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \overline{R},$$

millest järeldub sisalduvus $\overline{R}\,\overline{\Gamma}\,\overline{R} \subseteq \overline{R}$. Kasutades lemmat 6.4 näeme, et $R \cong \overline{R} \sqsubseteq \overline{\Gamma}$. Kasutades asjaolu, et $S \cong \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right] \mid s \in S\} \subseteq \overline{\Gamma}$, saab eelnevaga analoogiliselt tõestada, et $S \sqsubseteq \overline{\Gamma}$. ■

Nüüd oleme valmis tõestama käesoleva peatüki põhiteoreemi.

Teoreem 6.13. *Kaks idempotentset ringi on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui neil leidub ühine laiend.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Kui kaks idempotentset ringi R ja S on Morita ekvivalentsed, siis tulenevalt teoreemist 4.47 leidub neid ühendav unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst Γ. Nüüd on Morita ring $\overline{\Gamma}$ ringide R ja S ühine laiend tänu lausele 6.12.

Piisavus. Kui idempotentsetel ringidel R ja S leidub ühine laiend T, siis tulenevalt lausest 6.9 kehtivad $T \approx_{\mathrm{ME}} R$ ja $T \approx_{\mathrm{ME}} S$. Kuna Morita ekvivalentsus on transitiivne (järeldus 4.49), siis $R \approx_{\mathrm{ME}} S$. ■

Seega, kaks idempotentset ringi on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui neid saab ilusti sisestada mingisse ringi T. See on puhtalt algebraline tingimus Morita ekvivalentsuse kehtimiseks ja selle täidetust on tihti lihtsam kontrollida, kui vastavate moodulite kategooriate ekvivalentsust või Morita konteksti leidumist.

Järgnevalt toome ära mõningad järeldused teoreemist 6.13.

Järeldus 6.14. *Ainus idempotentne ring, mis on Morita ekvivalentne nullringiga* $\{0\}$*, on* $\{0\}$ *ise.*

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring ja $R \approx_{\mathrm{ME}} \{0\}$. Tulenevalt teoreemist 6.13 leidub ringide $\{0\}$ ja R ühine laiend T. Lausest 6.2 (2) saame, et $T = \{0\}$. Seega $R = \{0\}$. ■

Eelnev järeldus on põnev, kuna näitab, kuidas idempotentsete ringide Morita ekvivalentsus erineb poolrühmade Morita ekvivalentsusest. Nimelt, leidub palju mitteisomorfseid poolrühmi, mis on Morita ekvivalentsed ühe-elemendilise poolrühmaga (teoreem 16 artiklis [33]). Kuid – nagu näha – leidub vaid üks ring, mis on Morita ekvivalentne ühe-elemendilise ringiga.

Järgmises järelduses näeme, et kui ringid on heade omadustega, siis tihti on ka nende ühine laiend sama heade omadustega.

Järeldus 6.15. *Kaks ühikelemendiga (lokaalsete ühikutega, s-unitaalset) ringi on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui neil leidub ühine laiend, mis on ühikelemendiga (lokaalsete ühikutega, s-unitaalne) ring.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu ringid R ja S ühendatud unitaarse ja sürjektiivse Morita kontekstiga Γ. Tulenevalt teoreemist 6.13 leidub ringidel R ja S ühine laiend $\overline{\Gamma}$.

1. Kui R ja S on ühikelemendiga ringid, siis maatriks $\left[\begin{smallmatrix} 1_R & 0 \\ 0 & 1_S \end{smallmatrix}\right]$ on ühise laiendi $\overline{\Gamma}$ ühikelement.
2. Olgu R ja S lokaalsete ühikutega ringid. Vaatleme lõplikku hulka
$$G := \left\{ \begin{bmatrix} r_1 & p_1 \\ q_1 & s_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} r_n & p_n \\ q_n & s_n \end{bmatrix} \right\} \subseteq \overline{\Gamma}.$$
Iga $k \in \{1, \dots, n\}$ korral saame esitada $p_k = \sum_{h=1}^{h_k^*} r_{kh} p_{kh} s_{kh}$ ja $q_k = \sum_{t=1}^{t_k^*} s'_{kt} q_{kt} r'_{kt}$, kuna ${}_R P_S$ ja ${}_S Q_R$ on unitaarsed bimoodulid. Lõpliku hulga $\{r_1, \dots, r_n, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{nh_n^*}, r'_{11}, \dots, r'_{nt^*}\} \subseteq R$ jaoks leidub lokaalne ühik $e \in R$ ning hulga $\{s_1, \dots, s_n, s_{11}, \dots, s_{nh_n^*}, s'_{11}, \dots, s'_{nt_n^*}\} \subseteq S$ jaoks lokaalne ühik $d \in S$. Sel juhul on maatriks $\left[\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right] \cdot \left[\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right]$ hulga G lokaalne ühik.
3. Sarnane punktiga 2.

Piisavus. Järeldub otse teoreemist 6.13. ■

Laiendid ja idempotentide hulgad

Järgmisena vaatleme ringi laiendite ja selle ringi idempotentide hulkade omavahelisi seoseid. Olgu R ring, sümboliga $\mathcal{E}(R)$ tähistame ringi R kõigi idempotentide hulka. Hulk $\mathcal{E}(R)$ on alati mittetühi, kuna sisaldab nullelementi. On lihtne näha, et kui $E \subseteq \mathcal{E}(R)$ on mingi mittetühi alamhulk, siis ERE on ringi R alamring.

Lause 6.16. *Olgu R ring ja $\varnothing \neq E \subseteq \mathcal{E}(R)$. Ring R on oma alamringi ERE laiend parajasti siis, kui $R = RER$.*

TÕESTUS. Olgu R ring ja $\varnothing \neq E \subseteq \mathcal{E}(R)$.

Tarvilikkus. Olgu $ERE \sqsubseteq R$. Sel juhul
$$R = R(ERE)R = RE(RER) \subseteq RER \subseteq R.$$
Seega, $R = RER$.

Piisavus. Kehtigu $R = RER$. Sel juhul
$$(ERE)R(ERE) = (ERE)(RER)E = (ERE)RE = E(RER)E = ERE,$$
$$R(ERE)R = RE(RER) = RER = R.$$
Seega $ERE \sqsubseteq R$. ■

Järgmised kaks järeldust täpsustavad ja üldistavad näites 4.45 vaadeldud olukorda.

Järeldus 6.17. *Olgu R ring ja $e \in \mathcal{E}(R)$ idempotent. Tingimus $R = ReR$ kehtib parajasti siis, kui R on oma alamringi eRe laiend.*

Järeldus 6.18. *Olgu R ring ja $\varnothing \neq E \subseteq \mathcal{E}(R)$. Kui $R = RER$, siis ringid R ja ERE on Morita ekvivalentsed.*

Järgnevalt toome näite, kus arvutame välja ringi $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_2)$ kõik sellised alamringid, millele ta laiendiks on.

Näide 6.19 (Alamringid ja laiendid). Vaatleme ringi $R := \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}_2)$. Järeldusest 6.10 teame, et R on Morita ekvivalentne ringiga $\mathbb{Z}_2$. Autor arvutas arvuti abil välja, et ringil R on 27 pärisalamringi ja 8 idempotenti:

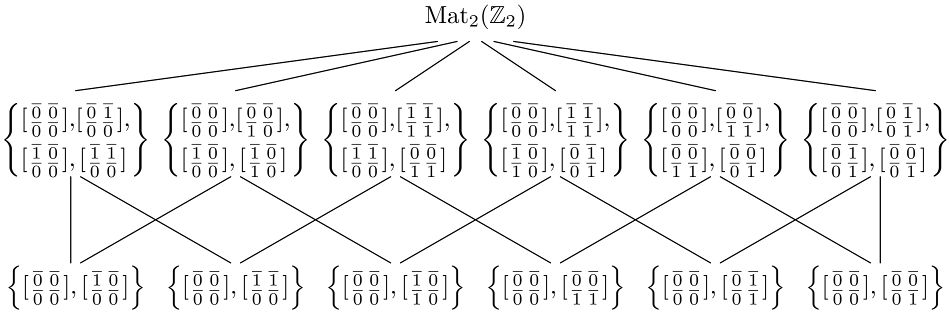
$$\mathcal{E}(R) = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\}.$$

Iga idempotent $e \in \mathcal{E}(E) \setminus \{[\begin{smallmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{smallmatrix}]\}$ rahuldab tingimust $ReR = R$ (st e on täisidempotent) ja tekitab alamringi kujul $eRe = \{[\begin{smallmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{smallmatrix}], e\}$. Järelduse 6.17 põhjal on ring R kõigi nende alamringide laiendiks.

Lisaks on ringil R veel kuus huvipakkuvat alamringi:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\},$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{bmatrix} \right\}.$$

Kõik eelnevad alamringid on kujul $\{e, e'\}R\{e, e'\} = \{[\begin{smallmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{smallmatrix}], e, e', e + e'\}$ mingite idempotentide $e, e' \in \mathcal{E}(R)$ korral. Tulenevalt lausest 6.16 on R ka kõigi nende ringide laiendiks. Kokku leidub ringil R 12 pärisalamringi, millele R on laiendiks (see on arvutuslikult tõestatud). Lisaks, kui käesoleval juhul mõni neist alamringidest sisaldub mõnes teises, siis suurem alamring on väiksemale laiendiks. Kõik ringi R alamringid, millele ta laiendiks on, on kogutud joonisele 6.1. Sellel joonisel on kaks ringi ühendatud joonega siis, kui ülemine ring on alumise laiend.



Joonis 6.1

Tulenevalt järeldusest 6.18 on kõik joonisel 6.1 toodud ringid üksteisega Morita ekvivalentsed (ja ka ringiga $\mathbb{Z}_2$). □

Ideaalid ja Morta ekvivalentsus

Nüüdseks oleme näinud mitmeid ringide paare, mis on omavahel Morita ekvivalentsed. On paras aeg tuua Morita ekvivalentne olemisele ka mõni kontranäide. Morita ekvivalentsuse kirjeldus ühise laiendi kaudu annab meile ühe lihtsa retsepti, kuidas selliseid näiteid leida. Nimelt näitame, et idempotentne ring ei saa kunagi olla Morita ekvivalentne oma idempotentse pärisideaaliga.

Lause 6.20. *Olgu R ja S Morita ekvivalentsed idempotentsed ringid ning $S \subseteq R$. Kui ring S on ringi R ideaal, siis kehtib $R = S$.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid ning kehtigu $S \approx_{\mathrm{ME}} R$ ja $S \trianglelefteq R$. Lemmast 2.30 teame, et kehtib $RSR = S$. Tänu teoreemile 6.13 näeme, et ringidel R ja S leidub ühine laiend T. Seega kehtivad muuhulgas võrdused $T = TST$ ja $R = RTR$. Paneme tähele, et

$$R = RTR = R(TST)R = RT(RSR)TR = (RTR)S(RTR) = RSR = S,$$

millest saame, et $S = R$. ■

Meenutame taaskord ringi R Dorroh' laiendit R' näidetest 2.5 ja 2.34. Eelnevalt nägime, et ring R on (isomorfismi täpsuseni) ringi R' ideaal.

Järeldus 6.21. *Idempotentne ring R ei ole Morita ekvivalentne oma Dorroh' laiendiga R'.*

6.3 Morita kontekstid tekivad laienditest

Olgu R ja S ringid ning T nende ühine laiend. On lihtne näha, et siis tekib Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$, kus ${}_RP_S = RTS$ ja ${}_SQ_R = STR$ ning

$$\theta\colon\ RTS \otimes_S STR \to R, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} r_k t_k s_k \otimes s'_k t'_k r'_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} r_k t_k s_k s'_k t'_k r'_k, \tag{6.3}$$

$$\phi\colon\ STR \otimes_R RTS \to S, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} s_k t_k r_k \otimes r'_k t'_k s'_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} s_k t_k r_k r'_k t'_k s'_k. \tag{6.4}$$

Nagu näha, on kogu informatsioon Morita konteksti $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ kohta leitav ringist T:

1. ringid R ja S on ringi T alamringid;
2. Abeli rühmad P ja Q on Abeli rühma $(T; +)$ alamrühmad;
3. bimoodulite ${}_RP_S$ ja ${}_SQ_R$ toimed on defineeritud ringi T korrutamise abil;
4. homomorfismid θ ja ϕ on defineeritud ringi T korrutamise abil.

Eelnevalt kirjeldatud Morita konteksti nimetame **ühise laiendi T poolt indutseeritud Morita kontekstiks**.

Järgmises teoreemis tõestame, et kõik idempotentsete ringide unitaarsed ja sürjektiivsed Morita kontekstid on isomorfsed eelnevalt kirjeldatud Morita kontekstiga, mis tekib nende ringide mingist ühisest laiendist. Kuid selleks peame defineerima Morita kontekstide isomorfismi mõiste.

Definitsioon 6.22. Olgu R ja S ringid. Ütleme, et Morita kontekst $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ on **isomorfne** Morita kontekstiga $\Gamma' = (R, S, {}_RP'_S, {}_SQ'_R, \theta', \phi')$, kui leidub paar (f, g), mis rahuldab tingimusi:

1. $f\colon {}_RP_S \to {}_RP'_S$ ja $g\colon {}_SQ_R \to {}_SQ'_R$ on bimoodulite isomorfismid;
2. kehtivad võrdused $\theta' \circ (f \otimes g) = \theta$ ja $\phi' \circ (g \otimes f) = \phi$.

Paari $(f, g)\colon \Gamma \to \Gamma'$ nimetatakse Morita kontekstide **isomorfismiks**.

Eelneva definitsiooni tingimust 2 illustreerivad allolevad kaks kommutatiivset diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_S Q \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f \otimes g"'] & R \\
P' \otimes_S Q' \arrow[ur, "\theta'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Q \otimes_R P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g \otimes f"'] & S \\
Q' \otimes_R P' \arrow[ur, "\phi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Teoreem 6.23. *Olgu R ja S idempotentsed ringid. Iga unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst Γ, mis ühendab ringe R ja S, on isomorfne Morita kontekstiga $(R, S, R\overline{\Gamma}S, S\overline{\Gamma}R, \psi, \varphi)$.*

TÕESTUS. Olgu R ja S idempotentsed ringid, mida ühendab unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$, ning $\overline{\Gamma}$ Morita konteksti Γ Morita ring.

Bimoodulite $R\overline{\Gamma}S$ ja $S\overline{\Gamma}R$ toimed on defineeritud kasutades ringide R ja S isomorfseid koopiaid ringis $\overline{\Gamma}$ (vt (4.35) ja (4.36)). Paneme tähele, et iga $r' \in R$, $s' \in S$ ja $\left[\begin{smallmatrix} r & p \\ q & s \end{smallmatrix}\right] \in \overline{\Gamma}$ korral

$$r' \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} s' = \begin{bmatrix} r' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & p \\ q & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r'r & r'p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r'ps' \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seega, kehtib

$$R\overline{\Gamma}S = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} 0 & r_k p_k s_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \forall k \colon r_k \in R, p_k \in P, s_k \in S \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| p \in P \right\},$$

kus viimane võrdus kehtib, kuna bimoodul ${}_RP_S$ on unitaarne. Analoogiliselt kehtib $S\overline{\Gamma}R = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{smallmatrix}\right] \mid q \in Q\}$.

Vaatleme Morita konteksti $(R, S, R\overline{\Gamma}S, S\overline{\Gamma}R, \psi, \varphi)$, kus $\psi = \iota_R \circ \psi'$ ja $\varphi = \iota_S \circ \varphi'$,

$$\psi' \colon \; R\overline{\Gamma}S \otimes_S S\overline{\Gamma}R \to \overline{R}, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} 0 & p_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_k & 0 \end{bmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} 0 & p_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_k & 0 \end{bmatrix};$$

$\varphi' \colon S\overline{\Gamma}R \otimes R\overline{\Gamma}S \to \overline{S}$ on defineeritud analoogiliselt; $\overline{R} = \{\left[\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \mid r \in R\}$, $\overline{S} = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right] \mid s \in S\}$ ning $\iota_R \colon \overline{R} \to R$, $\left[\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \mapsto r$ ja $\iota_S \colon \overline{S} \to S$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right] \mapsto s$. Kujutused ψ' ja φ' on korrektselt defineeritud bimoodulite homomorfismid, kuna (6.1) ja (6.2) on korrektselt defineeritud. Siinkohal on ringi $\overline{\Gamma}$ vaadeldud (R, S)- ja (S, R)-bimoodulina, kus toimed on defineeritud ridadel (4.35) ja (4.36).

Defineerime kujutused

$$f \colon \; P \to R\overline{\Gamma}S, \qquad p \mapsto \begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$g \colon \; Q \to S\overline{\Gamma}R, \qquad q \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}.$$

Kujutused f ja g on ilmselt bimoodulite isomorfismid. Iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral

$$(\psi \circ (f \otimes g))(p \otimes q) = (\iota_R \circ \psi') \left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} \right) = \iota_R \left(\begin{bmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \iota_R \left(\begin{bmatrix} \theta(p \otimes q) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \theta(p \otimes q).$$

$$\begin{tikzcd} P \otimes_S Q \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f \otimes g"'] & R \\ R\overline{\Gamma}S \otimes_S S\overline{\Gamma}R \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[r, "\psi'"'] & \overline{R} \arrow[u, "\iota_R"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q \otimes_R P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g \otimes f"'] & S \\ S\overline{\Gamma}R \otimes_R R\overline{\Gamma}S \arrow[ur, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi'"'] & \overline{S} \arrow[u, "\iota_S"'] \end{tikzcd}$$

Seega, kehtib $\psi \circ (f \otimes g) = \theta$ ja analoogiliselt ka $\varphi \circ (g \otimes f) = \phi$, mis tõestab, et Morita kontekst Γ on isomorfne Morita konteksitga $(R, S, R\overline{\Gamma}S, S\overline{\Gamma}R, \psi, \varphi)$.■

Järeldus 6.24. *Kui kaks idempotentset ringi on Morita ekvivalentsed, siis leidub neid ühendav Morita kontekst, mis on Morita kontekstide isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.*

6.4 Ringid, mis on Morita ekvivalentsed ühikelemendiga ringiga

Käesolevas peatükis tõestame tarviliku ja piisava tingimuse, millal vasakpoolsete (parempoolsete) lokaalsete ühikutega ring on Morita ekvivalentne ühikelemendiga ringiga. Seejärel teeme sellest tulemusest mõned järeldused ning räägime paar sõna ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsusest laiendite valguses.

Teoreem 6.25. *Vasakpoolsete lokaalsete ühikutega ring R on Morita ekvivalentne ühikelemendiga ringiga S parajasti siis, kui ringis R leidub täisidempotent $e \in R$. Kusjuures, sel juhul on ring R Morita ekvivalentne ühikelemendiga ringiga eRe.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu R vasakpoolsete lokaalsete ühikutega ring, mis on Morita ekvivalentne ühikelemendiga ringiga S. Tulenevalt teoreemist 4.47 teame, et leiduvad unitaarsed bimoodulid ${}_RP_S$ ja ${}_SQ_R$ ja sürjektiivsed bimoodulite homomorfismid $\theta\colon {}_R(P \otimes_S Q)_R \to {}_RR_R$ ja $\phi\colon {}_S(Q \otimes_R P)_S \to {}_SS_S$, mis rahuldavad tingimusi (4.25) ja (4.26).

Kuna ϕ on sürjektiivne, siis leiduvad $q'_1, \ldots, q'_{h^*} \in Q$ ja $p'_1, \ldots, p'_{k^*} \in P$ nii, et

$$1 = \phi\left(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h\right) \in S.$$

Kuna ${}_RP$ on unitaarne, siis iga $h \in \{1, \ldots, h^*\}$ korral leiduvad $r_{h1}, \ldots,$ $r_{hk^*} \in R$ ja $p_{h1}, \ldots, p_{hk^*} \in P$ nii, et $p'_h = r_{h1}p_{h1} + \ldots + r_{hk^*}p_{hk^*}$. Vaatleme lõplikku hulka $U := \{r_{hk} \mid h \in \{1, \ldots, h^*\}, k \in \{1, \ldots, k^*\}\}$. Olgu $e \in R$

hulga U vasakpoolne lokaalne ühik, st $r_{hk} = er_{hk}$ iga $r_{hk} \in U$ korral. Nüüd iga $h \in \{1, \ldots, h^*\}$ korral

$$ep'_h = e\sum_{k=1}^{k^*} r_{hk}p_{hk} = \sum_{k=1}^{k^*} er_{hk}p_{hk} = \sum_{k=1}^{k^*} r_{hk}p_{hk} = p'_h.$$

Olgu $r \in R$. Tänu θ sürjektiivsusele leiduvad $p_1, \ldots, p_{j^*} \in P$ ja $q_1, \ldots,$ $q_{j^*} \in Q$ nii, et

$$r = \theta\left(\sum_{j=1}^{j^*} p_j \otimes q_j\right) = \sum_{j=1}^{j^*} \theta(p_j \otimes q_j).$$

Võtame eelnevast summast mingi liidetava $\theta(p_j \otimes q_j)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\theta(p_j \otimes q_j) = \theta(p_j \otimes 1q_j) &= \theta\left(p_j \otimes \phi\left(\sum_{h=1}^{h^*} q'_h \otimes p'_h\right) q_j\right)\\
&= \sum_{h=1}^{h^*} \theta(p_j \otimes \phi(q'_h \otimes p'_h)q_j) = \sum_{h=1}^{h^*} \theta(p_j \otimes q'_h\theta(p'_h \otimes q_j))\\
&= \sum_{h=1}^{h^*} \theta(p_j \otimes q'_h)\theta(p'_h \otimes q_j) = \sum_{h=1}^{h^*} \theta(p_j \otimes q'_h)\theta(ep'_h \otimes q_j)\\
&= \sum_{h=1}^{h^*} \theta(p_j \otimes q'_h)e\theta(p'_h \otimes q_j) \in ReR.
\end{aligned}$$

Siit järeldub, et $r \in ReR$. Kuna sisalduvus $ReR \subseteq R$ on ilmne, oleme saanud, et $R = ReR$.

Piisavus. Kui ring R on vasakpoolsete lokaalsete ühikutega, on ta idempotentne. Olgu $e \in R$ täisidempotent. Järeldusest 6.17 saame, et $eRe \sqsubseteq R$, kus eRe on ring, mille ühikelemendiks on e. Tulenevalt lausest 6.9 saame, et ringid R ja eRe on Morita ekvivalentsed. ■

Järgmiselt paneme tähele, et ühikelemendiga ringi S jaoks leidub kuitahes suure võimsusega ringe, mis on ringiga S Morita ekvivalentsed.

Lause 6.26. *Olgu $S \neq \{0\}$ ühikelemendiga ring. Leidub kuitahes suure kardinaalsusega ring, mis on ringiga S Morita ekvivalentne.*

TÕESTUS. Olgu $S \neq \{0\}$ ühikelemendiga ring. Saame konstrueerida kuitahes suure kardinaalsusega unitaalse Reesi maatriksringi $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R; \Lambda, \Xi; M)$, valides sobiva kardinaalsusega hulgad Λ ja Ξ. Järelduse 6.11 tõttu kehtib $S \approx_{\mathrm{ME}} \mathcal{M}$. ■

Siinkohal on paslik mainida, et unitaalne Reesi maatriksring üle ühikelemendiga ringi ei pruugi ise omada ühikelementi. Lausest 6.26 järeldame muuhulgas, et kui ühikelemendiga ring S on lõpliku kardinaalsusega $c := \#(S)$, siis saame konstrueerida ringiga S Morita ekvivalentse lõpliku ringi R, mille korral $\#(R) = c^{mn}$, kus $m, n \in \mathbb{N}_1$ on suvalised naturaalarvud.

Meenutame, et meil on üleval üks võlg. Nimelt, lubasime eelnevalt, et hiljem tõestame ära teoreemi 4.30 piisavuse osa. Nüüd on selleks paras aeg. Meeldetuletuseks toome selle teoreemi sõnastuse uuesti ära.

Teoreem (4.30). *Olgu S ja T ühikelemendiga ringid. Ringid S ja T on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui leidub naturaalarv $n \in \mathbb{N}_1$ ja täisidempotent $e \in \mathrm{Mat}_n(S)$ nii, et $T \cong e(\mathrm{Mat}_n(S))e$.*

TÕESTUS. *Piisavus.* Kehtigu $T \cong e(\mathrm{Mat}_n(S))e$, kus $e \in \mathrm{Mat}_n(S)$ on täisidempotent. Tulenevalt järeldusest 6.18 saame, et $\mathrm{Mat}_n(S) \approx_{\mathrm{ME}} T$. Nüüd kehtib $S \approx_{\mathrm{ME}} T$, kuna $S \approx_{\mathrm{ME}} \mathrm{Mat}_n(S) = \mathcal{M}(S; n, n; E)$ (E on ühikmaatriks) tänu järeldusele 6.11 ja Morita ekvivalentsus on transitiivne (järeldus 4.49).■

Lause 6.26 valguses paneme tähele, et kui S on lõplik ühikelemendiga ring, siis maatriksring $\mathrm{Mat}_n(S)$ on samuti lõplik iga $n \in \mathbb{N}_1$ korral. Ammugi on siis lõplik ka alamring $e(\mathrm{Mat}_n(S))e$. Siit saame järgneva lause, millest järeldub, et lõplikkus on ühikelemendiga ringide Morita ekvivalentsuse suhtes invariant.

Lause 6.27. *Kui ühikelemendiga ring T on Morita ekvivalentne lõpliku ühikelemendiga ringiga S, siis ka T on lõplik.*

Järeldusest 6.17 näeme, et teoreemis 4.30 figureeriv ring $e(\mathrm{Mat}_n(S))e$ on tegelikult ringide S ja T ühine laiend. Siit näeme, et kui S ja T on ühikelemendiga ringid, siis nad on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui üks neist on teise laiend.

Lõpetuseks paneme tähele, et kommutatiivsed ühikelemendiga ringid on Morita ekvivalentsed parajasti siis, kui nad on isomorfsed.

Järeldus 6.28. *Olgu S ja T kommutatiivsed ühikelemendiga ringid. Kui S ja T on Morita ekvivalentsed, siis $S \cong T$.*

TÕESTUS. Olgu S ja T kommutatiivsed ühikelemendiga ringid ning kehtigu $S \approx_{\mathrm{ME}} T$. Teoreemi 4.30 ja järelduse 6.17 põhjal $S \sqsubseteq T$ või $T \sqsubseteq S$. Nüüd aga järeldub lausest 6.2 (2), et $S \cong T$. ■

6.5 Ringide laiendid ja poolrühmade tugev Morita ekvivalentsus

Käesoleva peatüki lõpetuseks tõestame, et poolrühmade tugev Morita ekvivalentsus on seotud teatavate poolrühmaringide Morita ekvivalentsusega. Selleks peame tutvustama poolrühmade tugevat Morita ekvivalentsust, mille kohta mainime, et see on paljuski analoogiline ringide Morita ekvivalentsusega. Kõigepealt, olgu A ja B poolrühmad. Neid ühendavaks **Morita kontekstiks** nimetatakse kuuikut $(A, B, {}_AP_B, {}_BQ_A, \theta, \phi)$, kus ${}_AP_B$ ja ${}_BQ_A$ on bipolügoonid ning $\theta\colon P \otimes_B Q \to A$ ja $\phi\colon Q \otimes_A P \to B$ on bipolügoonide homomorfismid, mis rahuldavad tingimustega (4.25) ja (4.26) sarnaseid tingimusi. Taaskord nimetame Morita konteksti $(A, B, {}_AP_B, {}_BQ_A, \theta, \phi)$ **unitaarseks** ja **sürjektiivseks** kui bipolügoonid ${}_AP_B$ ja ${}_BQ_A$ on unitaarsed (st polügoonid ${}_AP$, P_B, ${}_BQ$ ja Q_A on kõik unitaarsed) ning homomorfismid θ ja ϕ on sürjektiivsed.

Ütleme, et kaks poolrühma A ja B on **tugevalt Morita ekvivalentsed**, kui leidub neid poolrühmasid ühendav unitaarne ja sürjektiivne Morita kontekst $(A, B, {}_AP_B, {}_BQ_A, \theta, \phi)$. See definitsioon toodi sisse artiklis [51]. Poolrühmade korral kehtib lausega 4.46 analoogiline lause, mistõttu tugevalt Morita ekvivalentsed poolrühmad on faktoriseeruvad (lemma 7 artiklis [33]). Märgime, et sarnaselt ringide Morita ekvivalentsusega on faktoriseeruvate poolrühmade tugev Morita ekvivalentsus samaväärne teatavate polügoonide kategooriate ekvivalentsusega ning tavaliselt defineeritakse poolrühmade Morita ekvivalentsus selle abil. Kuid kuna meile piisab tugeva Morita ekvivalentsuse vaatlemiseks tema kirjeldusest Morita kontekstide abil, siis sellega me ka piirdume. Märgime veel, et monoidide Morita ekvivalentsuse kohta saab pikemalt lugeda M. Kilpi *et al.* raamatust [31] (peatükk V).

Ringide laiendi mõiste on inspireeritud sarnasest poolrühmateooria mõistest, kus seda on kasutatud poolrühmade tugeva Morita ekvivalentsuse uurimisel. Siiski pole teada, kas (faktoriseeruvate) poolrühmade tugev Morita ekvivalentsus on üldjuhul samaväärne nende poolrühmade ühise laiendi leidumisega. Samas tõestame järgnevalt teoreemi, mis väidab, et kui kaks poolrühma on tugevalt Morita ekvivalentsed, siis leiduvad kaks teatavat ringi, mis omavad ühist laiendit ja on nende poolrühmadega lähedalt seotud. Mainime, et taolist olukorda on uuritud artiklis [24].

Teoreem 6.29. *Olgu A ja B tugevalt Morita ekvivalentsed poolrühmad. Sel juhul leidub ring T, mille korral kehtivad tingimused:*

1. *poolrühmad A ja B on isomorfsed ringi T multiplikatiivse poolrühma mingite alampoolrühmadega A' ja B';*
2. *ring T on poolrühmaringide $\mathbb{Z}[A']$ ja $\mathbb{Z}[B']$ ühine laiend.*

TÕESTUS. Olgu A ja B poolrühmad, mis on ühendatud unitaarse ja sürjektiivse Morita kontekstiga $(A, B, {}_AP_B, {}_BQ_A, \theta, \phi)$. Vaatleme ringi

$$T := \left\{ \begin{bmatrix} x & f \\ g & y \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z}[A], y \in \mathbb{Z}[B], f \in \mathbb{Z}^{(P)}, g \in \mathbb{Z}^{(Q)} \right\},$$

kus $\mathbb{Z}[A]$ ja $\mathbb{Z}[B]$ on poolrühmaringid ning

$$\mathbb{Z}^{(P)} := \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} z_k p_k \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_1; z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}; p_1, \ldots, p_{k^*} \in P \right\},$$
$$\mathbb{Z}^{(Q)} := \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} z_k q_k \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_1; z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}; q_1, \ldots, q_{k^*} \in Q \right\},$$

on vabad Abeli rühmad (liitmise suhtes) baasidega vastavalt P ja Q (vt lisa A). Abeli rühmad $\mathbb{Z}^{(P)}$ ja $\mathbb{Z}^{(Q)}$ on vaadeldavad vastavate bimoodulitena üle ringide $\mathbb{Z}[A]$ ja $\mathbb{Z}[B]$. Iga $\sum_{k=1}^{k^*} z_k p_k \in \mathbb{Z}^{(P)}$, $\sum_{j=1}^{j^*} x_j a_j \in \mathbb{Z}[A]$ ja $\sum_{t=1}^{t^*} y_t b_t \in \mathbb{Z}[B]$ korral on bimooduli ${}_{\mathbb{Z}[A]}(\mathbb{Z}^{(P)})_{\mathbb{Z}[B]}$ toimed defineeritud võrdustega

$$\left(\sum_{k=1}^{k^*} z_k p_k\right)\left(\sum_{t=1}^{t^*} y_t b_t\right) := \sum_{k=1}^{k^*}\sum_{t=1}^{t^*} z_k y_t p_k b_t \in \mathbb{Z}^{(P)},$$
$$\left(\sum_{j=1}^{j^*} x_j a_j\right)\left(\sum_{k=1}^{k^*} z_k p_k\right) := \sum_{j=1}^{j^*}\sum_{k=1}^{k^*} x_j z_k a_j p_k \in \mathbb{Z}^{(P)}.$$

Analoogiliselt on defineeritud toimed $(\mathbb{Z}[B], \mathbb{Z}[A])$-bimoodulis ${}_{\mathbb{Z}[B]}(\mathbb{Z}^{(Q)})_{\mathbb{Z}[A]}$. Defineerime kujutused $\check{\theta}\colon \mathbb{Z}^{(P)} \otimes_{\mathbb{Z}[B]} \mathbb{Z}^{(Q)} \to \mathbb{Z}[A]$ ja $\check{\phi}\colon \mathbb{Z}^{(Q)} \otimes_{\mathbb{Z}[A]} \mathbb{Z}^{(P)} \to \mathbb{Z}[B]$ järgmiselt:

$$\check{\theta}\colon \sum_{j=1}^{j^*}\left(\sum_{k=1}^{k^*} z_{jk} p_{jk}\right) \otimes \left(\sum_{h=1}^{h^*} z'_{jh} q_{jh}\right) \mapsto \sum_{j=1}^{j^*}\sum_{k=1}^{k^*}\sum_{h=1}^{h^*} z_{jk} z'_{jh} \theta(p_{jk} \otimes q_{jh}),$$
$$\check{\phi}\colon \sum_{j=1}^{j^*}\left(\sum_{h=1}^{h^*} z'_{jh} q_{jh}\right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{k^*} z_{jk} p_{jk}\right) \mapsto \sum_{j=1}^{j^*}\sum_{h=1}^{h^*}\sum_{k=1}^{k^*} z'_{jh} z_{jk} \phi(q_{jh} \otimes p_{jk}).$$

Tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest näeme, et kujutused $\check{\theta}$ ja $\check{\phi}$ on korrektselt defineeritud bimoodulite homomorfismid, kuna kujutused $\hat{\check{\theta}} = \tilde{\theta}\colon \mathbb{Z}^{(P)} \times \mathbb{Z}^{(Q)} \to \mathbb{Z}[A]$ ja $\hat{\check{\phi}} = \tilde{\phi}\colon \mathbb{Z}^{(Q)} \times \mathbb{Z}^{(P)} \to \mathbb{Z}[B]$ on vastavalt $\mathbb{Z}[B]$- ja $\mathbb{Z}[A]$-tasakaalustatud kujutused tänu lemmale 3.55. On lihtne näha, et kuna θ ja ϕ on sürjektiivsed, siis ka $\check{\theta}$ ja $\check{\phi}$ on sürjektiivsed.

Ringis T on liitmine defineeritud komponenthaaval ja korrutamine analoogiliselt Morita ringi korrutamisega:

$$\begin{bmatrix} x & f \\ g & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' & f' \\ g' & y' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} xx' + \check{\theta}(f \otimes g') & xf' + fy' \\ gx' + yg' & yy' + \check{\phi}(g' \otimes f) \end{bmatrix}.$$

1. Vaatleme hulkasid
$$A' := \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in A \right\} \subseteq T \quad \text{ja} \quad B' := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| b \in B \right\} \subseteq T.$$
Iga $a, a' \in A$ korral
$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A'.$$
Järelikult on A', ja analoogiliselt ka B', ringi T multiplikatiivse poolrühma alampoolrühmad. Ilmselt kehtivad $A \cong A'$ ja $B \cong B'$.
2. Paneme tähele, et kehtib
$$\mathbb{Z}[A'] = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} z_k a'_k \middle| k^* \in \mathbb{N}, \forall k \colon z_k \in \mathbb{Z}, a'_k \in A' \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z}[A] \right\}.$$
Seega $\mathbb{Z}[A'] \subseteq T$ ja seetõttu on sisalduvus $T(\mathbb{Z}[A'])T \subseteq T$ selge. Näitame, et kehtib $T \subseteq T(\mathbb{Z}[A'])T$. Valime suvalise maatriksi $\left[\begin{smallmatrix} x & f \\ g & y \end{smallmatrix}\right] \in T$ ja esitame ta summana
$$\begin{bmatrix} x & f \\ g & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}.$$
Kuna Morita kontekst $(A, B, {}_AP_B, {}_BQ_A, \theta, \phi)$ on unitaarne ja sürjektiivne, siis A on faktoriseeruv poolrühm. Ring $\mathbb{Z}$ on ilmselt idempotentne ja tulenevalt lausest 3.53 on ka $\mathbb{Z}[A]$ idempotentne, mistõttu leiduvad elemendid $x_1, x'_1, x''_1, \ldots, x_{k^*}, x'_{k^*}, x''_{k^*} \in \mathbb{Z}[A]$ nii, et $x = x_1 x'_1 x''_1 + \ldots + x_{k^*} x'_{k^*} x''_{k^*}$. Nüüd
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} x_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x''_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\in (\mathbb{Z}[A'])(\mathbb{Z}[A'])(\mathbb{Z}[A']) \\ &\subseteq T(\mathbb{Z}[A'])T. \end{aligned}$$
Bipolügoonid ${}_AP_B$ ja ${}_BQ_A$ on unitaarsed. Seega on lihtne näha, et bipolügoonid ${}_{\mathbb{Z}[A]}(\mathbb{Z}^{(P)})_{\mathbb{Z}[B]}$ ja ${}_{\mathbb{Z}[B]}(\mathbb{Z}^{(Q)})_{\mathbb{Z}[A]}$ on samuti unitaarsed. Järelikult leiduvad elemendid $x_1, \ldots, x_{h^*} \in \mathbb{Z}[A]$ ja $f_1, \ldots, f_{h^*} \in \mathbb{Z}^{(P)}$ nii, et $f = x_1 f_1 + \ldots + x_{h^*} f_{h^*}$. Nüüd,
$$\begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} x_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & f_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in (\mathbb{Z}[A'])T = (\mathbb{Z}[A']\,\mathbb{Z}[A'])T \subseteq T(\mathbb{Z}[A'])T$$

ja analoogiliselt $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{smallmatrix}\right] \in T(\mathbb{Z}[A']) \subseteq T(\mathbb{Z}[A'])T$. Kuna $\check{\phi}$ on sürjektiivne, siis leidub element $\sum_{k=1}^{k^*} g_k \otimes f_k \in \mathbb{Z}^{(Q)} \otimes_{\mathbb{Z}[A]} \mathbb{Z}^{(P)}$ nii, et kehtib $y = \check{\phi}(\sum_{k=1}^{k^*} g_k \otimes f_k)$. Nüüd,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{k^*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g_k & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & f_k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in (T\,\mathbb{Z}[A'])(\mathbb{Z}[A']\,T) = T(\mathbb{Z}[A'])T.$$

Sellega oleme näidanud, et kehtib $T = T(\mathbb{Z}[A'])T$.
Paneme tähele, et kuna $\mathbb{Z}[A']$ on idempotentne, siis kehtib $\mathbb{Z}[A'] = \mathbb{Z}[A']\,\mathbb{Z}[A']\,\mathbb{Z}[A'] \subseteq \mathbb{Z}[A']\,T\,\mathbb{Z}[A']$. Iga $\xi, \xi', x \in \mathbb{Z}[A]$, $y \in \mathbb{Z}[B]$, $f \in \mathbb{Z}^{(P)}$ ja $g \in \mathbb{Z}^{(Q)}$ korral

$$\begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & f \\ g & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi x & \xi f \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi x \xi' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}[A'].$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\mathbb{Z}[A'] \sqsubseteq T$. Väite $\mathbb{Z}[B'] \sqsubseteq T$ tõestus on analoogiline. ■

Tulenevalt lausest 6.2 (1) saame, et ring T eelnevast teoreemist on idempotentne. Samuti on lihtne näha, et kehtib ringide isomorfsus $\mathbb{Z}[A'] \cong \mathbb{Z}[A]$. See tähelepanek annab meile järgneva järelduse.

Järeldus 6.30. *Kui poolrühmad A ja B on tugevalt Morita ekvivalentsed, siis on poolrühmaringid $\mathbb{Z}[A]$ ja $\mathbb{Z}[B]$ Morita ekvivalentsed.*

Peatükk 7

Ringide unitaarsed ideaalid

Käesolevas peatükis tuvume põgusalt võre ning kvantaali mõistega. Seejärel näitame, et ringi unitaarsete ideaalide hulk moodustab kvantaali ning kui ringid R ja S on Morita ekvivalentsed, siis on nende unitaarsete ideaalide kvantaalid isomorfsed. Lisaks näitame, et faktorringe, mis on saadud faktoriseerimisel ideaalide järgi, mis vastavad üksteisele eelpool mainitud isomorfismi kaudu, ühendab sürjektiivne Morita kontekst. Seeläbi anname viisi, kuidas Morita kontekste faktoriseerida ringi ideaali abil. Selles peatükis esinevad unitaarsete ideaalide kohta käivad tulemused ilmusid esmakordselt artiklis [55].

7.1 Võred ja kvantaalid

Selles paragrahvis defineerime võred ja kvantaalid ning toome neist mõningad loomulikud näited ringiteooria vallast. Mainime, et võrede kohta saab eesti keeles pikemalt lugeda raamatutest [6] (peatükk 8) või [1] (peatükk 1.6).

Kõigepealt meenutame üht-teist osaliselt järjestatud hulkade kohta. Olgu P hulk. Seost $\preceq \subseteq P \times P$ nimetatakse **osalise järjestuse seoseks** (vahel ka lihtsalt **järjestusseoseks**) hulgal P, kui ta on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne. **Osaliselt järjestatud hulgaks** nimetatakse paari $(P; \preceq)$, kus P on hulk ja $\preceq \subseteq P \times P$ on osalise järjestuse seos hulgal P. Tavaliselt me osaliselt järjestatud hulga korral järjestusseost eraldi välja ei too ja märgime lihtsalt $P := (P; \preceq)$. (Osaliselt järjestatud hulkade kohta saab lugeda raamatust [5] (paragrahv 1.4).)

Olgu $(P; \preceq)$ ja $(P'; \preceq')$ osaliselt järjestatud hulgad. Kujutust $f\colon P \to P'$ nimetatakse **osaliselt järjestatud hulkade homomorfismiks** kui f säilitab järjestusseost, st iga $a, b \in P$ korral kehtib implikatsioon

$$a \preceq b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \preceq' f(b).$$

Olgu $P = (P; \preceq)$ osaliselt järjestatud hulk ja $a, b \in P$. Elementide a ja b **alumiseks** (**ülemiseks**) **rajaks** nimetatakse elementi c, mis rahuldab järgnevaid tingimusi:

1. $c \preceq a$ ja $c \preceq b$ $\qquad (a \preceq c$ ja $b \preceq c)$;
2. $\forall d \in P\colon\ (d \preceq a \;\&\; d \preceq b \implies d \preceq c) \qquad (a \preceq d \;\&\; b \preceq d \implies c \preceq d)$.

Mainime, et suvalises osaliselt järjestatud hulgas ei pruugi elementide paaril $a, b \in P$ leiduda alumist ega ülemist raja. Elementide a ja b alumist raja tähistatakse[1] $\inf\{a, b\} =: a \wedge b$ ja ülemist raja $\sup\{a, b\} =: a \vee b$. Kuna meie hakkame uurima teatavate osaliselt järjestatud hulkade algebralisi omadusi, siis eelistame sümboleid $\vee$ ja $\wedge$, mida võib vaadelda kui teatavaid binaarseid tehtesümboleid $P \times P \to P$.

Nüüd oleme valmis defineerima võre.

Definitsioon 7.1. Osaliselt järjestatud hulka $P = (P; \preceq)$ nimetatakse **võreks**, kui igal elementide paaril $a, b \in P$ leidub alumine ja ülemine raja.

Märgime, et võret on võimalik defineerida ka puhtalt algebraliselt. Nimelt, hulka P nimetatakse *võreks*, kui temal on defineeritud kaks binaarset tehet $\wedge$ ja $\vee$ nii, et iga $a, b, c \in P$ korral on rahuldatud järgnevad kaheksa võrdust:

$$
\begin{array}{lll}
(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), & (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) & \text{(assotsiatiivsused)};\\
a \wedge b = b \wedge a, & a \vee b = b \vee a & \text{(kommutatiivsused)};\\
a \wedge a = a, & a \vee a = a & \text{(idempotentsused)};\\
a \wedge (a \vee b) = a, & a \vee (a \wedge b) = a & \text{(neelduvused)}.
\end{array}
$$

Need kaks viisi võret defineerida annavad tõepoolest sama mõiste. See asjaolu ilmneb järgnevast teoreemist, mille tõestuse võib leida raamatutest [6] (teoreem 8.1.4), [1] (teoreem 1.6.4) või ka [11] (teoreemid 9.24 ja 9.25). Samas on see tõestus suhteliselt vahetu ning seda võiks lugeja proovida ka ise tõestada.

Teoreem 7.2. *Võres definitsiooni 7.1 järgi rahuldavad alumise raja võtmise operaator $\wedge$ ja ülemise raja operaator $\vee$ eelpool toodud tingimusi. Kui hulgal P on antud kaks kujutust $\vee, \wedge\colon P \times P \to P$, mis rahuldavad eelpool toodud tingimusi, siis defineerides osalise järjestuse seose*

$$a \preceq b \iff a = a \wedge b$$

kus $a, b \in P$, saame võre definitsiooni 7.1 mõttes, kus $\inf\{a, b\} = a \wedge b$ ja $\sup\{a, b\} = a \vee b$.

[1] Kuna võrduses $\inf\{a, b\} =: a \wedge b$ on mõlemad tähistused uued, siis kirjutame kooloni mõlemale poole võrdusmärki.

Nagu ikka algebraliste struktuuride korral, vaadeldakse ka võrede homomorfisme.

Definitsioon 7.3. Olgu P ja P' võred. Kujutust $f\colon P \to P'$ nimetatakse **võrede homomorfismiks**, kui ta rahuldab järgmiseid tingimusi:

1. $\forall a, b \in P\colon \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$;
2. $\forall a, b \in P\colon \quad f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

Märgime, et võred koos võrede homomorfismidega moodustavad nn võrede kategooria Lat. Järgnevalt näeme, et võrede homomorfism $f\colon P \to P'$ on ühtlasi ka osaliselt järjestatud hulkade homomorfism.

Lemma 7.4. *Olgu P ja P' võred. Võrede homomorfism $f\colon P \to P'$ säilitab järjestusseost, st iga $a, b \in P$ korral kehtib implikatsioon*

$$a \preceq b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \preceq f(b).$$

TÕESTUS. Olgu P ja P' võred ning $a, b \in P$ sellised, et $a \preceq b$. Sel juhul kehtib $a = a \wedge b$. Nüüd

$$f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b),$$

millest järeldub, et $f(a) \preceq f(b)$.

(Analoogiliselt näeme, et lemma väite tõestamiseks võiks aluseks võtta ka võrduse $b = a \vee b$.) ■

Eelnevast tõestusest näeme, et järjestusseose säilitamiseks piisab definitsioonis 7.3 vaid tingimuse 1 või analoogiliselt ka tingimuse 2 kehtimisest. **Võrede isomorfismiks** nimetatakse bijektiivset võrede homomorfismi. Tõestame võrede isomorfismide kirjelduse.

Lause 7.5. *Olgu P ja P' võred ja $f\colon P \to P'$ kujutus. Järgnevad väited on samaväärsed:*

1. *kujutus f on võrede isomorfism;*
2. *kujutus f on võrede homomorfism ja leidub võrede homomorfism $g : P' \to P$ nii, et $f \circ g = \mathrm{id}_{P'}$ ja $g \circ f = \mathrm{id}_P$;*
3. *kujutus f säilitab järjestusseost ja leidub järjestusseost säilitav kujutus $g\colon P' \to P$ nii, et $f \circ g = \mathrm{id}_{P'}$ ja $g \circ f = \mathrm{id}_P$;*
4. *kujutus f on bijektiivne ning säilitab ja peegeldab järjestusseost, st iga $a, b \in P$ korral*
$$a \preceq b \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) \preceq f(b);$$
5. *kujutus f on sürjektiivne ning säilitab ja peegeldab järjestusseost.*

TÕESTUS. (1 $\Longrightarrow$ 2). Olgu f võrede isomorfism. Kuna f on bijektiivne, siis leidub kujutus $f^{-1}\colon P' \to P$, mis rahuldab soovitud tingimusi (teoreem 1.5.17 raamatus [5]). Vaja on näidata, et f^{-1} on samuti võrede homomorfism. Olgu $a, b \in P$. Sel juhul kehtib

$$f(f^{-1}(a \wedge b)) = a \wedge b = f(f^{-1}(a)) \wedge f(f^{-1}(b)) = f(f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)).$$

Kuna f on injektiivne, siis $f^{-1}(a \wedge b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$ nagu soovitud. Analoogiliselt kehtib ka $f^{-1}(a \vee b) = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$.

(2 $\Longrightarrow$ 3). Olgu f ja g vastavad võrede homomorfismid. Lemmast 7.4 teame, et f ja g säilitavad järjestusseost.

(3 $\Longrightarrow$ 4). Kehtigu tingimus 3. Sel juhul on kujutus f bijektiivne. Olgu $a, b \in P$ sellised, et $f(a) \preceq f(b)$. Nüüd, kuna g säilitab järjestusseost, siis

$$a = \mathrm{id}_P(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) \preceq g(f(b)) = (g \circ f)(b) = \mathrm{id}_P(b) = b.$$

Seega f ka peegeldab järjestusseost nagu soovitud.

(5 $\Longrightarrow$ 4). Olgu f sürjektiivne ning säilitagu ja peegeldagu järjestusseost. Vaja näidata, et f on injektiivne. Olgu $a, b \in P$ sellised, et $f(a) = f(b)$. Tulenevalt järjestusseose refleksiivsusest kehtib $f(a) \preceq f(b)$, millest kujutuse f järjestusseose peegeldamise abil saame $a \preceq b$. Teisalt aga kehtib ka $f(b) \preceq f(a)$, millest $b \preceq a$. Kuna järjestusseos on antisümmeetriline, siis $a = b$. Järelikult on f injektiivne.

(4 $\Longrightarrow$ 1). Olgu f bijektiivne kujutus, mis säilitab ja peegeldab järjestusseost. Olgu $a, b \in P$. Ilmselt kehtivad $a \preceq a \wedge b$ ja $b \preceq a \wedge b$. Kuna f säilitab järjestusseost, siis $f(a) \preceq f(a \wedge b)$ ja $f(b) \preceq f(a \wedge b)$. Valime sellise $c' \in P'$, et $f(a) \preceq c'$ ja $f(b) \preceq c'$. Kuna f on bijektiivne, siis leidub (ühene) $c \in P$ nii, et $f(c) = c'$. Kuna f peegeldab järjestusseost, siis kehtivad $a \preceq c$ ja $b \preceq c$, mistõttu kehtib ka $a \wedge b \preceq c$. Taaskord kasutades järjestusseose säilitamisest saame, et $f(a \wedge b) \preceq f(c) = c'$. Kasutades alumise raja definitsiooni saame nüüd, et $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Analoogiliselt kehtib $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

(2 $\Longrightarrow$ 1) ja (4 $\Longrightarrow$ 5). Ilmsed. ■

Olgu $(P; \wedge_P, \vee_P)$ võre. Alamhulka $B \subseteq P$ nimetatakse võre P **alamvõreks**, kui iga $b, b' \in B$ korral $b \wedge_P b', b \vee_P b' \in B$.

Järgnevalt vaatleme kahte väga olulist võrede alamklassi – modulaarseid ning täielikke võresid.

Definitsioon 7.6. Võret P nimetatakse **modulaarseks** (ehk **Dedekindi**[2] **võreks**), kui iga $a, b, c \in P$ jaoks, mille korral $a \preceq c$, kehtib tingimus

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c).$$

[2] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916) – saksa matemaatik.

Võib rääkida ka rohkema kui kahe elemendi alumisest ja ülemisest rajast. Nii võime rääkida osaliselt järjestatud hulga P alamhulga $A \subseteq P$ alumisest rajast $\bigwedge A$ ja ülemisest rajast $\bigvee A$. Nimelt, $x = \bigwedge A$ parajasti siis, kui kehtivad tingimused

1. $\forall a \in A\colon \quad x \preceq a$;
2. $\forall y \in P\colon \quad (\forall a \in A\colon\ y \preceq a \implies y \preceq x)$.

Hulga A ülemine raja $\bigvee A$ defineeritakse duaalselt.

Toome sisse järgmised mugavad tähistused:

$$\bigvee A =: \bigvee_{a \in A} a \qquad \text{ja} \qquad \bigwedge A =: \bigwedge_{a \in A} a.$$

Definitsioon 7.7. Võret P nimetatakse **täielikuks**, kui igal alamhulgal $A \in \wp(P)$ leidub alumine ja ülemine raja.[3]

Märgime, et osaliselt järjestatud hulga P **vähimaks** (**suurimaks**) elemendiks nimetatakse elementi $x \in P$, kui iga $a \in P$ korral $x \preceq a$ $(a \preceq x)$. Nagu ikka, võib, aga ei pruugi, osaliselt järjestatud hulgas olla vähimat ega suurimat elementi. Täielikus võres P on nad aga alati olemas, kuna hulga P vähim element on tühja hulga ülemine raja $\bigvee \varnothing$ ja suurim element on $\bigwedge \varnothing$. Osaliselt järjestatud hulga P vähimat elementi tähistame sümboliga $\perp$ ja suurimat elementi $\top$. Näitame, et täielike võrede isomorfismid (st sellised kujutused, mis säilitavad kõikvõimalikke rajasid) on lihtsalt võrede isomorfismid.

Lemma 7.8. *Olgu P ja P' täielikud võred. Võrede isomorfism $f\colon P \to P'$ säilitab mistahes rajasid.*

TÕESTUS. Olgu P ja P' täielikud võred ja $f\colon P \to P'$ võrede isomorfism. Vaatleme kõigepealt tühihulka $\varnothing$. Ilmselt kehtib

$$f(\varnothing) = \{f(v) \mid v \in \varnothing\} = \varnothing. \tag{7.1}$$

Iga $a \in P$ korral kehtib $\bigvee \varnothing \preceq a$. Tulenevalt lausest 7.5 on f järjestusseost säilitav ja bijektiivne. Seega kehtib $f(\bigvee \varnothing) \preceq f(a)$ iga $a \in P$ korral. Kuna f on sürjektiivne, siis iga $a' \in P'$ on esitatav kujul $a' = f(a)$ mingi $a \in P$ korral. Seega $f(\bigvee \varnothing)$ on võre P' vähim element ja seetõttu kehtib $f(\bigvee \varnothing) = \bigvee \varnothing = \bigvee f(\varnothing)$. Seega f säilitab vähimat ja analoogiliselt ka suurimat elementi.

[3]Universaalalgebra mõttes on täielikud võred väga huvitavad asjad. Nimelt, universaalalgebra uurib üldiselt algebralisi struktruure, kus on antud mingi kogus lõpliku aarsusega tehteid. Näiteks võre on kahe binaarse tehtega struktuur. Kuid, kui P on lõpmatu hulk, siis vaadeldakse täielikus võres põhimõtteliselt lõpmatu aarsusega tehteid $\bigwedge, \bigvee\colon \wp(P) \to P$.

Valime nüüd mittetühja hulga $\mathfrak{K}$ ja alamhulga $\{a_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq P$. Iga $h \in \mathfrak{K}$ korral kehtib $a_h \preceq \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} a_k$. Tulenevalt lausest 7.5 säilitab f järjestusseost, mistõttu

$$f(a_h) \preceq f\left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} a_k\right) =: x,$$

iga $h \in \mathfrak{K}$ korral.

Olgu nüüd $y \in P'$ selline, et samuti iga $h \in \mathfrak{K}$ korral $f(a_h) \preceq y$. Kuna f peegeldab järjestusseost, siis iga $h \in \mathfrak{K}$ korral $a_h \preceq f^{-1}(y)$. Sel juhul aga $\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} a_k \preceq f^{-1}(y)$. Seega kehtib

$$x = f\left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} a_k\right) \preceq f(f^{-1}(y)) = y.$$

Siit näeme, et $x = f(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} a_k) = \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} f(a_k)$, mistõttu f säilitab mistahes ülemisi rajasid.

Analoogiliselt säilitab f ka mistahes alumisi rajasid. ■

Tõestame täielike võrede kirjelduse, mis väidab, et osaliselt järjestatud hulga P täielikuks võreks olemise kontrollimiseks piisab, kui näidata, et hulga P igal mittetühjal alamhulgal on ülemine raja ja hulgas P on vähim element.

Lause 7.9. *Olgu P osaliselt järjestatud hulk. Sel juhul on järgmised väited samaväärsed.*

1. *Hulk P on täielik võre.*
2. *Hulga P igal mittetühjal alamhulgal leidub ülemine raja ja hulgas P on vähim element.*
3. *Hulga P igal mittetühjal alamhulgal leidub almumine raja ja hulgas P on suurim element.*

TÕESTUS. ($1 \implies 2$). Ilmne.

($2 \implies 1$). Kehtigu tingimus 2 ja olgu $\perp$ hulga P vähim element. Olgu $A \subseteq P$. Vaja näidata, et hulgal A leidub alumine tõke. Vaatleme hulga A kõigi alumiste tõkete hulka

$$A{\downarrow} := \{c \mid \forall a \in A\colon\ c \preceq a\} \subseteq P.$$

Hulk $A{\downarrow}$ on mittetühi, kuna $\perp \in A{\downarrow}$. Seega leidub hulgal $A{\downarrow}$ ülemine raja $x := \bigvee A{\downarrow}$. Kui $A = \varnothing$, siis x on hulga suurim element. Edaspidi oletame, et $A \neq \varnothing$ ja näitame, et x on hulga A alumine raja. Ilmselt kehtib $x \preceq a$ iga $a \in A$ korral tulenevalt ülemise raja definitsioonist (tingimus 2). Olgu $y \in P$ selline, et iga $a \in A$ korral $y \preceq a$. Seega $y \in A{\downarrow}$ ning $y \preceq x$. Sellega oleme näidanud, et $x = \bigwedge A$. Kokkuvõttes on P täielik võre.

($1 \iff 3$). Analoogiline eelnevaga. ■

Nüüd toome mõningaid näiteid võredest.

Näide 7.10 (Võred). 1. Vaatleme reaalarvude hulka $\mathbb{R}$ tavalise järjestusseosega $\leq$. Paar $(\mathbb{R}; \leq)$ on võre, kus $a \wedge b = \min\{a, b\}$ ja $a \vee b = \max\{a, b\}$ iga $a, b \in \mathbb{R}$ korral. Tulenevalt pidevuse aksioomist (teoreem 1.10 raamatus [9]) on igal hulga $\mathbb{R}$ mittetühjal alamhulgal alumine ja ülemine raja. Siiski pole $\mathbb{R}$ täielik võre, kuna tühjal hulgal pole alumist ega ülemist raja ehk hulgas $\mathbb{R}$ pole vähimat ega suurimat elementi.
Samas, iga $a, b \in \mathbb{R}$ korral on lõik $[a, b]$ täielik võre. Samuti on täielik võre nn *laiendatud reaalarvude hulk* $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

2. Vaatleme positiivsete naturaalarvude hulka $\mathbb{N}_1$. Sarnaselt eelmise näitega on $\mathbb{N}_1$ mittetäielik võre tavalise järjestusseose $\leq$ suhtes. Ka sel juhul pole ta täielik, kuna suurim element puudub. Taaskord saame vaadelda täielikku võret $\mathbb{N}_1 \cup \{\infty\}$ kui lugeda ∞ suuremaks kõigist naturaalarvudest.
   Teisalt võib naturaalarvude hulka $\mathbb{N}_1$ vaadelda võrena ka jaguvusseose $|$ suhtes (näide 1.2.5 raamatus [5]). Võre $(\mathbb{N}_1, |)$ vähim element on 1, kusjuures kõik algarvud järgnevad vahetult vähimale elemendile 1. Võres $(\mathbb{N}_1, |)$ leidub hulgaliselt võrreldamatute elementide paare (näiteks arvud 2 ja 3). Ka sel juhul pole tegemist täieliku võrega, kuna puudub suurim element. Samas, naturaalarvude hulk koos nulliga $\mathbb{N}_0$ on juba täielik võre, sest 0 on selle võre suurim element (kuna iga naturaalarv jagab nulli). See on huvitav näide, kuna järjestusseos $|$ erineb märkimisväärselt loomulikust järjestusseosest $\leq$.
3. Olgu X hulk. Kõikide tema alamhulkade hulk $\wp(X)$ on täielik võre sisalduvusseose $\subseteq$ suhtes. Iga $A \in \wp(X)$ korral

$$\bigwedge A = \bigcap_{A' \in A} A' \qquad \text{ja} \qquad \bigvee A = \bigcup_{A' \in A} A'.$$

   On selge, et võre $\wp(X)$ vähim element on $\varnothing$ ja suurim element on hulk X ise.
4. Olgu R ring ja M_R R-moodul. Hulk $\mathrm{Sub}(M_R)$ on täielik võre sisalduvusseose $\subseteq$ suhtes.
   Iga $\{A_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq \mathrm{Sub}(M_R)$, kus $\mathfrak{K}$ on mingi mittetühi hulk, korral

$$\bigwedge_{k \in \mathfrak{K}} A_k = \bigcap_{k \in \mathfrak{K}} A_k, \tag{7.2}$$

$$\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} A_k = \sum_{k \in \mathfrak{K}} A_k := \left\{ \sum_{h=1}^{h^*} a_h \,\middle|\, h^* \in \mathbb{N}_1,\ a_1, \ldots, a_{h^*} \in \bigcup_{k \in \mathfrak{K}} A_k \right\}. \tag{7.3}$$

On selge, et $\bigcap_{k\in\mathfrak{K}} A_k \in \mathrm{Sub}(M_R)$ ning valem (7.2) annab tõesti alumise raja hulgas $\mathrm{Sub}(M_R)$.
Ilmselt kehtib iga $h \in \mathfrak{K}$ korral $A_h \subseteq \sum_{k\in\mathfrak{K}} A_k$. Olgu nüüd $B \in \mathrm{Sub}(M_R)$ selline, et iga $k \in \mathfrak{K}$ korral $A_k \subseteq B$. Sel juhul suvaliste $a_1, \ldots, a_{h^*} \in \bigcup_{k\in\mathfrak{K}} A_k$ korral kehtib $a_1 + \ldots + a_{h^*} \in B$, kuna B on liitmise suhtes kinnine. Seega $\sum_{k\in\mathfrak{K}} A_k \subseteq B$. Järelikult defineerib (7.3) tõepoolest ülemise raja hulgas $\mathrm{Sub}(M_R)$. Võre $\mathrm{Sub}(M_R)$ vähim element on $\{0\}$ ja suurim element on M_R. □

Eraldi toome välja meie jaoks eriliselt olulise võrede näite: mooduli unitaarsete alammoodulite võre. Sellega seoses tähistame sümboliga $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ (S,R)-bimooduli ${}_SM_R$ kõikide unitaarsete alammoodulite hulka, kus R ja S on ringid.

Näide 7.11 (Mooduli unitaarsete alammoodulite võre). 1. Olgu R ja S ringid ning ${}_SM_R \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod}_R)$. Hulk $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ on täielik võre sisalduvusseose $\subseteq$ suhtes.
Iga $\{A_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq \mathrm{USub}({}_SM_R)$, kus $\mathfrak{K}$ on mingi mittetühi hulk, korral arvutatakse ülemine raja sarnaselt võrega $\mathrm{Sub}({}_SM_R)$ valemiga $\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} A_k = \sum_{k\in\mathfrak{K}} A_k$. Nii tõesti saab, kuna

$$\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} A_k = \sum_{k\in\mathfrak{K}} A_k = \sum_{k\in\mathfrak{K}} SA_kR = S\left(\sum_{k\in\mathfrak{K}} A_k\right) R \in \mathrm{USub}({}_SM_R).$$

Lisaks näeme, et hulgas $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ on vähim element $\{0\}$. Nüüd saame lausest 7.9, et $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ on täielik võre.
Märgime, et võre $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ ei ole võre $\mathrm{Sub}({}_SM_R)$ (vt näide 7.10 (4)) alamvõre, kuna alumised rajad arvutatakse teistmoodi.

2. Olgu R ja S idempotentsed ringid ja ${}_SM_R \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod}_R)$ (S,R)-bimoodul. Hulk $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ on täielik ja modulaarne võre.
Eelmisest näitest teame, et $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ on täielik võre. Nüüd saame alamhulga $\{A_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq \mathrm{USub}({}_SM_R)$ alumise raja eksplitsiitselt esitada kujul

$$\bigwedge_{k\in\mathfrak{K}} A_k = S\left(\bigcap_{k\in\mathfrak{K}} A_k\right) R$$

ning võre $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ suurim element on SMR. Olgu ${}_SA_R, {}_SB_R, {}_SC_R \in \mathrm{USub}({}_SM_R)$ sellised, et $A \subseteq C$. Nüüd

$$\begin{aligned}({}_SA_R \vee {}_SB_R) \wedge {}_SC_R &= S((A+B)\cap C)R = S(A\cap C + B\cap C)R \\ &= S(A + B\cap C)R = SAR + S(B\cap C)R\end{aligned}$$

$$= A + S(B \cap C)R = {}_SA_R \vee ({}_SB_R \wedge {}_SC_R).$$

Järelikult on $\mathrm{USub}({}_SM_R)$ modulaarne võre. $\square$

Järgnevalt defineerime kvantaali mõiste. Sõna „kvantaal“ esines esimest korda sellises tähenduses artiklis [45]. Kvantaalide kohta võib inglise keeles lugeda pikemalt Rosenthali[4] mahukast monograafiast [49].

Definitsioon 7.12. Täielikku võret L nimetatakse **kvantaaliks**, kui temal on defineeritud assotsiatiivne binaarne tehe $*\colon L \times L \to L$, $(p, p') \mapsto p * p'$ ning iga hulga $\mathfrak{K}$ ja elementide $a, b_k \in L$, kus $k \in \mathfrak{K}$, korral kehtivad võrdused

$$a * \left(\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} b_k \right) = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} (a * b_k) \quad \text{ja} \quad \left(\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} b_k \right) * a = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} (b_k * a).$$

Seega võib öelda, et kvantaal on nelik[5] $(L; \bigwedge, \bigvee; *)$, kus binaarne tehe $*$ distributeerub mõlemalt poolt kujutusega $\bigvee$. Kvantaali L nimetatakse **ühikuga kvantaaliks**, kui poolrühm $(L; *)$ on monoid, st leidub element $\epsilon \in L$ nii, et $a * \epsilon = \epsilon * a = a$ iga $a \in L$ korral. Ootuspäraselt nimetatakse elementi ϵ ühikuga kvantaali L **ühikelemendiks**.

Olgu L ja L' kvantaalid. Kujutust $f\colon L \to L'$ nimetatakse **kvantaalide homomorfismiks**, kui iga $a, a', a_k \in L$, kus $k \in \mathfrak{K}$ ja $\mathfrak{K}$ on mingi hulk, korral kehtivad võrdused

$$f\left(\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} a_k \right) = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} f(a_k),$$
$$f(a * a') = f(a) * f(a').$$

Bijektiivset kvantaalide homomorfismi $f\colon L \to L'$ nimetatakse **kvantaalide isomorfismiks**. Tulenevalt lemmast 7.8 võib öelda, et $f\colon L \to L'$ on kvantaalide isomorfism parajasti siis, kui $f\colon (L; \wedge, \vee) \to (L'; \wedge, \vee)$ on võrede ning $f\colon (L; *) \to (L; *)$ poolrühmade isomorfism. Kui L ja L' on ühikuga kvantaalid, siis nimetatakse kvantaalide isomorfismi $f\colon L \to L'$ **ühikuga kvantaalide isomorfismiks**, kui ta säilitab ühikelementi.

Järgnevalt toome ära ühe klassikalise kvantaalide näite.

Näide 7.13 (Kvantaal). Olgu R ring. Kõigi tema ideaalide hulk $\mathrm{Id}(R)$ on kvantaal, kus järjestusseoseks on sisalduvusseos $\subseteq$ ja tehe $*$ on defineeritud võrdusega

$$I * J := IJ = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} i_k j_k \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_1,\ i_1, \ldots, i_{k^*} \in I,\ j_1, \ldots, j_{k^*} \in J \right\}.$$

[4]Kimmo I. Rosenthal – USA matemaatik ja kirjanik.

[5]Sümbolid $\bigwedge$ ja $\bigvee$ tähistavad siin kujutusi $\bigwedge, \bigvee\colon \wp(L) \to L$.

Selles kvantaalis on hulga $\{I_k \mid k \in \mathfrak{K}\} \subseteq \mathrm{Id}(R)$ alumine ja ülemine raja defineeritud järgnevalt:

$$\bigwedge_{k\in\mathfrak{K}} I_k = \bigcap_{k\in\mathfrak{K}} I_k \qquad ja \qquad \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} I_k = \sum_{k\in\mathfrak{K}} I_k.$$

Iga $J \in \mathrm{Id}(R)$ ja $U \subseteq \mathrm{Id}(R)$ korral kehtib

$$J * \left(\bigvee U\right) = J\left(\sum_{I\in U} I\right) = \sum_{I\in U} JI = \left(\bigvee U\right) * I.$$

Analoogiliselt kehtib ka teine kooskõlatingimus kvantaali definitsioonis 7.12.

Näeme, et tegelikult moodustavad ringi R kõigi vasak- ja parempoolsete ideaalide hulgad samuti kvantaalid. □

7.2 Unitaarsete ideaalide kvantaal

Nüüd vaatleme ringi unitaarseid ideaale ning näeme, et kõikide unitaarsete ideaalide hulk moodustab kvantaali.

Olgu R ring. Eelnevast teame, et iga vasakpoolset (parempoolset) ringi R ideaali I võib vaadelda vasakpoolse (parempoolse) R-moodulina ${}_RI$ (I_R). Vasakpoolset (parempoolset) ideaali $I \subseteq R$ nimetatakse **unitaarseks** kui vasakpoolne (parempoolne) R-moodul ${}_RI$ (I_R) on unitaarne, st $RI = I$ ($IR = I$). Analoogiliselt nimetatakse ideaali $I \trianglelefteq R$ **unitaarseks**, kui (R,R)-bimoodul ${}_RI_R$ on unitaarne, st $RIR = I$ (lemma 2.73). Ringi R kõikide unitaarsete ideaalide hulka tähistame sümboliga $\mathrm{UId}(R)$. Paneme tähele, et iga ringi R korral $\{0\} \in \mathrm{UId}(R)$, seega $\mathrm{UId}(R)$ pole ühegi ringi R korral tühi. Lisaks teame lemmast 2.30, et kui ideaal on idempotentne, siis on ta ka unitaarne.

Lause 7.14. *Olgu R ring. Hulk* $\mathrm{UId}(R)$ *on kvantaal.*

TÕESTUS. Olgu R ring. Vaadeldes ringi R (R,R)-bimoodulina ${}_RR_R$ saame, et $\mathrm{UId}(R) = \mathrm{USub}({}_RR_R)$. Seega, näitest 7.11 (1) teame, et $(\mathrm{UId}(R);\subseteq)$ on täielik võre, kus iga $U \subseteq \mathrm{UId}(R)$ korral

$$\bigvee U = \sum_{I\in U} I \qquad \text{ja} \qquad \bigwedge U = \bigvee\left\{V \in \mathrm{UId}(R) \,\middle|\, V \subseteq \bigcap_{I\in U} I\right\}.$$

Sarnaselt näitega 7.13 defineerime tehte $*\colon \mathrm{UId}(R)\times\mathrm{UId}(R) \to \mathrm{UId}(R)$, $(I_1, I_2) \mapsto I_1I_2$. Näites 7.13 kasutatuga analoogilise argumendiga saamegi, et $\mathrm{UId}(R)$ on kvantaal. ■

Järgnevalt näeme, et kui ring R on idempotentne, siis on kvantaal $\mathrm{UId}(R)$ päris heade omadustega.

Lause 7.15. *Olgu R idempotentne ring. Sel juhul on $\mathrm{UId}(R)$ ühikuga kvantaal, mille ühikelemendiks on R. Kusjuures võre $\mathrm{UId}(R)$ on modulaarne.*

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Lausest 7.14 teame, et $\mathrm{UId}(R)$ on kvantaal. Tulenevalt idempotentsusest on ring R iseenda unitaarne ideaal ehk $R \in \mathrm{UId}(R)$. Unitaarsuse definitsioonist on selge, et iga $I \in \mathrm{UId}(R)$ korral $IR = RI = I$. Seega, R on tõepoolest kvantaali $\mathrm{UId}(R)$ ühikelement.

Lõpetuseks mainime, et antud juhul saab alumist raja arvutada järgneva valemi abil:

$$\bigwedge U = R\left(\bigcap_{I\in U} I\right)R,$$

kus $U \subseteq \mathrm{UId}(R)$. Näitest 7.11 (2) saame lisaks, et täielik võre $\mathrm{UId}(R)$ on modulaarne. ■

Järgmisena tahame me kirjeldada mingi hulga poolt moodustatud unitaarsed ideaalid. Selleks tutvume ideaali moodustamisega hulga poolt.

Definitsioon 7.16. Olgu R ring. Öeldakse, et ideaal $I \trianglelefteq R$ on mingi hulga $X \subseteq R$ poolt **moodustatud**, kui I on ringi R vähim ideaal, mis sisaldab hulka X. Sel juhul kirjutame $I =: (X)_{\mathrm{g}}$. Öeldakse, et I on **lõplikult moodustatud**, kui I on mingi lõpliku hulga $X \subseteq R$ poolt moodustatud.

On lihtne näha, et hulga $X \subseteq R$ poolt moodustatud ideaal avaldub kujul

$$(X)_{\mathrm{g}} = \mathbb{Z}X + RX + XR + RXR. \tag{7.4}$$

Lause 7.17. *Olgu R ring. Kui unitaarne ideaal $I \in \mathrm{UId}(R)$ on hulga $X \subseteq R$ poolt moodustatud, siis $I = RXR$.*

TÕESTUS. Olgu R ring, $X \subseteq R$ ja $I = (X)_{\mathrm{g}} \in \mathrm{UId}(R)$. Nüüd

$$\begin{aligned} I = RIR &= R(\mathbb{Z}X + RX + XR + RXR)R \\ &= \mathbb{Z}RXR + RRXR + RXRR + RRXRR \subseteq RXR. \end{aligned}$$

Teisalt, kujust (7.4) saame, et $RXR \subseteq I$. Sellega oleme tõestanud, et kehtib $I = RXR$. ■

Unitaarsed ideaalid ja s-unitaalsed ringid

Nüüd näeme, et s-unitaalseid ringe saab kirjeldada vasak- ja parempoolsete unitaarsete ideaalide abil.

Lause 7.18. *Ring R on vasakult (paremalt) s-unitaalne parajasti siis, kui ringi R kõik vasakpoolsed (parempoolsed) ideaalid on unitaarsed.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu R vasakult s-unitaalne ring ja I ringi R vasakpoolne ideaal. Võtame $a \in I$. Saame leida elemendi $v \in R$ nii, et $a = va$. Seega $I = RI$ ehk I on unitaarne vasakpoolne ideaal.

Piisavus. Olgu ringi R kõik vasakpoolsed ideaalid unitaarsed. Valime elemendi $r \in R$. Kuna vasakpoolne ideaal $I = \mathbb{Z}r + Rr$ on unitaarne, siis leiduvad $z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}$ ja $r_1, r'_1, \ldots, r_{k^*}, r'_{k^*} \in R$ nii, et

$$r = \sum_{k=1}^{k^*} r'_k(z_k r + r_k r) = \sum_{k=1}^{k^*} z_k r'_k r + r'_k r_k r = \left(\sum_{k=1}^{k^*} z_k r'_k + r'_k r_k \right) r.$$

Seega, tähistades $v := \sum_{k=1}^{k^*} z_k r'_k + r'_k r_k \in R$, saame, et $r = vr$, mistõttu R on vasakult s-unitaalne.

Paremalt s-unitaalsuse juht on täpselt analoogiline. ■

Järeldus 7.19. *Ring R on s-unitaalne parajasti siis, kui kõik tema ideaalid on unitaarsed.*

7.3 Unitaarsete ideaalide kvantaalid ja Morita kontekstid

Käesolevas peatükis uurime selliste ringide unitaarsete ideaalide kvantaale, mis on ühendatud sürjektiivse, kuid mitte tingimata unitaarse Morita konteksti poolt. Tuleb välja, et need kvantaalid on isomorfsed.

Teoreem 7.20. *Kui ringid R ja S on ühendatud sürjektiivse Morita kontekstiga $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$, siis on nende unitaarsete ideaalide kvantaalid isomorfsed. See isomorfism viib lõplikult moodustatud ideaalid lõplikult moodustatud ideaalideks. Kui ringid R ja S on idempotentsed, siis on eelolev isomorfism ühikuga kvantaalide isomorfism.*

TÕESTUS. Olgu R ja S ringid, mis on ühendatud sürjektiivse Morita konteksti $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ poolt.

1. Märgime, et iga unitaarse ideaali $J \in \mathrm{UId}(S)$ korral on hulk

$$\theta(PJ \otimes_S Q) := \left\{ \theta\left(\sum_{k=1}^{k^*} p_k j_k \otimes q_k \right) \middle| \forall k\colon\ p_k \in P,\, j_k \in J,\, q_k \in Q \right\} \subseteq R$$

ideaal, kuna θ on (R, R)-bimoodulite homomorfism.[6] Lisaks paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\theta(PJ \otimes_S Q) &= \theta(PSJS \otimes_S Q) = \theta(PSJ \otimes_S SQ)\\ &= \theta(P\mathrm{Im}\,(\phi)J \otimes_S \mathrm{Im}\,(\phi)Q) = \theta(\mathrm{Im}\,(\theta)PJ \otimes_S Q\mathrm{Im}\,(\theta))\\ &= \theta(RPJ \otimes_S QR) = R\theta(PJ \otimes_S Q)R.\end{aligned}$$

Järelikult on ideaal $\theta(PJ \otimes_S Q)$ unitaarne. Analoogiliselt saab näidata, et iga $I \in \mathrm{UId}(R)$ korral on hulk $\phi(QI \otimes_R P)$ ringi S unitaarne ideaal. Seetõttu saame defineerida kujutused

$$\Theta\colon\ \mathrm{UId}(S) \to \mathrm{UId}(R), \qquad \Theta(J) := \theta(PJ \otimes_S Q), \tag{7.5}$$

$$\Phi\colon\ \mathrm{UId}(R) \to \mathrm{UId}(S), \qquad \Phi(I) := \phi(QI \otimes_R P). \tag{7.6}$$

Olgu $J_1, J_2 \in \mathrm{UId}(S)$ sellised, et $J_1 \subseteq J_2$. Sel juhul kehtib sisalduvus $\Theta(J_1) = \theta(PJ_1 \otimes_S Q) \subseteq \theta(PJ_2 \otimes_S Q) = \Theta(J_2)$, mistõttu näeme, et kujutus Θ säilitab järjestusseost. Analoogiliselt saame, et kujutus Φ säilitab samuti järjestusseost. Iga $J \in \mathrm{UId}(S)$ korral

$$\begin{aligned}\Phi(\Theta(J)) &= \phi(Q\theta(PJ \otimes_S Q) \otimes_R P) = \phi(\phi(Q \otimes_R PJ)Q \otimes_R P)\\ &= \phi(Q \otimes_R P)J\phi(Q \otimes_R P) = SJS = J.\end{aligned}$$

Analoogiliselt kehtib $\Theta(\Phi(I)) = I$ iga $I \in \mathrm{UId}(R)$, millest näeme, et Θ ja Φ on üksteise pöördkujutused. Järelikult on Θ ja Φ võrede isomorfismid (lause 7.5). Seega Θ ja Φ säilitavad mistahes ülemisi rajasid (lemma 7.8).
Olgu $J_1, J_2 \in \mathrm{UId}(S)$. Nüüd

$$\Theta(J_1)\Theta(J_2) = \theta(PJ_1 \otimes_S Q)\theta(PJ_2 \otimes_S Q) = \theta(PJ_1 \otimes_S Q\theta(PJ_2 \otimes_S Q))$$

[6] Juhime tähelepanu asjaolule, et hulgas $\theta(PJ \otimes_S Q)$ on $PJ \otimes_S Q$ all mõeldud hulka

$$PJ \otimes_S Q := \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} p_k j_k \otimes q_k \middle| \forall k\colon\ p_k \in P,\, j_k \in J,\, q_k \in Q \right\} \subseteq P \otimes_S Q,$$

mitte alammooduli $PJ \in \mathrm{Sub}(P_S)$ ja mooduli ${}_SQ$ tensorkorrutist. Selle peatüki lõpuni järgime sellist tähistuskonventsiooni. Ühtlasi meenutame näidet 3.46, et alammoodulite tensorkorrutistega peab üldiselt ettevaatlik olema.

$$\begin{aligned}
&= \theta(PJ_1 \otimes_S \phi(Q \otimes_R PJ_2)Q) = \theta(PJ_1 \otimes_S \phi(Q \otimes_R P)J_2Q) \\
&= \theta(PJ_1 \otimes_S SJ_2Q) = \theta(PJ_1 \otimes_S J_2Q) \\
&= \theta(P(J_1J_2) \otimes_S Q) = \Theta(J_1J_2).
\end{aligned}$$

Analoogiliselt saab näidata, et iga $I_1, I_2 \in \mathrm{UId}(R)$ korral $\Phi(I_1)\Phi(I_2) = \Phi(I_1I_2)$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et Θ ja Φ on kvantaalide isomorfismid.

2. Olgu $J \in \mathrm{UId}(S)$ lõplikult moodustatud ideaal. Seega leidub lõplik hulk $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq J$ nii, et $J = SXS$ (lause 7.17). Fikseerime indeksi $k \in \{1, \dots, n\}$. Järelikult saab elemendi $x_k \in X$ kirjutada kujul

$$x_k = \sum_{h=1}^{h^*} s_{kh}x_{kh}s'_{kh},$$

kus $s_{k1}, s'_{k1}, \dots, s_{kh^*}, s'_{kh^*} \in S$ ja $x_{k1}, \dots, x_{kh^*} \in X$. Kasutades ϕ sürjektiivsust saame x_k esitada ka kujul

$$x_k = \sum_{t=1}^{t_k^*} \phi(q_{kt} \otimes p_{kt})\xi_{kt}\phi(q'_{kt} \otimes p'_{kt}),$$

kus $q_{k1}, q'_{k1}, \dots, q_{kt_k^*}, q'_{kt_k^*} \in Q$, $p_{k1}, p'_{k1}, \dots, p_{kt_k^*}, p'_{kt_k^*} \in P$ ja $\xi_{k1}, \dots, \xi_{kt_k^*} \in X$. Nüüd, iga $p \in P$ ja $q \in Q$ korral

$$\begin{aligned}
\theta(px_k \otimes q) &= \theta\left(p\sum_{t=1}^{t_k^*} \phi(q_{kt} \otimes p_{kt})\xi_{kt}\phi(q'_{kt} \otimes p'_{kt}) \otimes q\right) \\
&= \sum_{t=1}^{t_k^*} \theta(p\phi(q_{kt} \otimes p_{kt})\xi_{kt} \otimes \phi(q'_{kt} \otimes p'_{kt})q) \\
&= \sum_{t=1}^{t_k^*} \theta(\theta(p \otimes q_{kt})p_{kt}\xi_{kt} \otimes q'_{kt}\theta(p'_{kt} \otimes q)) \\
&= \sum_{t=1}^{t_k^*} \theta(p \otimes q_{kt})\theta(p_{kt}\xi_{kt} \otimes q'_{kt})\theta(p'_{kt} \otimes q) \in RYR,
\end{aligned}$$

kus

$$Y := \{\theta(p_{kt}\xi_{kt} \otimes q'_{kt}) \mid k \in \{1, \dots, n\}, t \in \{1, \dots, t_k^*\}\} \subseteq R.$$

Hulk Y on selgelt lõplik. Paneme tähele, et

$$\Theta(J) = \theta(PJ \otimes_S Q) = \left\{\theta\left(\sum_{u=1}^{u^*} p_uj_u \otimes q_u\right) \middle| \forall u\colon\ p_u \in P, q_u \in Q, j_u \in J\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \theta\left(\sum_{u=1}^{u^*} p_u \left(\sum_{h=1}^{h^*} s_{hu}x_{hu}s'_{hu}\right) \otimes q_u\right) \,\middle|\, \forall u,h\colon \begin{array}{ll} p_u \in P, & q_u \in Q, \\ x_{hu} \in X, & s_{hu}, s'_{hu} \in S \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{u=1}^{u^*} \sum_{h=1}^{h^*} \theta((p_u s_{hu})x_{hu} \otimes (s'_{hu}q_u)) \,\middle|\, \forall u,h\colon \begin{array}{ll} p_u \in P, & q_u \in Q, \\ x_{hu} \in X, & s_{hu}, s'_{hu} \in S \end{array} \right\} \\
&\subseteq RYR.
\end{aligned}
$$

Teisest küljest kehtib $Y \subseteq \Theta(J) = \theta(PJ \otimes_S Q)$. Kuna $\Theta(J)$ on ringi R ideaal, mis sisaldab hulka Y, siis

$$
(Y)_{\mathrm{g}} \subseteq \Theta(J) \subseteq RYR \subseteq (Y)_{\mathrm{g}},
$$

millest järeldub, et $\Theta(J) = (Y)_{\mathrm{g}}$. Järelikult on ideaal $\Theta(J)$ lõplikult moodustatud.

3. Olgu R ja S idempotentsed ringid. Tulenevalt lausest 7.15 on $\mathrm{UId}(R)$ ja $\mathrm{UId}(S)$ ühikuga kvantaalid, mille ühikelemendid on vastavalt R ja S. Tulenevalt lausest 7.8 säilitavad võrede isomorfismid suurimaid elemente, mistõttu $\Theta(S) = R$ ja $\Phi(R) = S$. Seega Θ ja Φ on ühikuga kvantaalide isomorfismid. ■

Eelmise teoreemi valguses teeme kaks järeldust.

Järeldus 7.21. *Olgu R idempotentne ring ja $n \in \mathbb{N}_1$ naturaalarv. Sel juhul on* $\mathrm{UId}(R)$ *ja* $\mathrm{UId}(\mathrm{Mat}_n(R))$ *isomorfsed kvantaalid.*

TÕESTUS. Olgu R idempotentne ring. Järelduse 6.10 põhjal kehtib Morita ekvivalentsus $R \approx_{\mathrm{ME}} \mathrm{Mat}_n(R)$. Ring $\mathrm{Mat}_n(R)$ on idempotentne tänu lausele 2.38. Teoreemi 4.47 põhjal on R ja $\mathrm{Mat}_n(R)$ ühendatud unitaarse ja sürjektiivse Morita konteksti poolt. Järelduse väide järeldub nüüd teoreemist 7.20. ■

Järeldus 7.22. *Olgu R s-unitaalne ring ja $n \in \mathbb{N}_1$ naturaalarv. Sel juhul on* $\mathrm{Id}(R)$ *ja* $\mathrm{Id}(\mathrm{Mat}_n(R))$ *isomorfsed kvantaalid.*

TÕESTUS. Olgu R s-unitaalne ring. Tulenevalt lausest 2.38 on $\mathrm{Mat}_n(R)$ samuti s-unitaalne. Järelduse väide järeldub nüüd järeldustest 7.21 ja 7.19. ■

Teoreemist 7.20 teame, et kui ringid R ja S on ühendatud sürjektiivse Morita konteksti $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ poolt, siis on võred $\mathrm{UId}(R)$ ja $\mathrm{UId}(S)$ isomorfsed. Järgnevas teoreemis aga näeme, et lisaks neile on ka unitaarsete alammoodulite võred $\mathrm{USub}({}_RP_S)$ ja $\mathrm{USub}({}_SQ_R)$ nendega isomorfsed.

Teoreem 7.23. *Olgu R ja S sürjektiivse Morita konteksti $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ poolt ühendatud ringid. Sel juhul on järgnevad võred isomorfsed:*
(1) $\mathrm{UId}(R)$, *(2)* $\mathrm{UId}(S)$, *(3)* $\mathrm{USub}({}_RP_S)$, *(4)* $\mathrm{USub}({}_SQ_R)$.

TÕESTUS. Olgu R ja S ringid ning $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ sürjektiivne Morita kontekst.

($\mathrm{UId}(R) \cong \mathrm{UId}(S)$). Järeldub teoreemist 7.20.

($\mathrm{UId}(R) \cong \mathrm{USub}({}_RP_S)$). Olgu $I \in \mathrm{UId}(R)$. Hulk IP on (R, S)-bimooduli ${}_RP_S$ alambimoodul. Kuna I on unitaarne, siis $R(IP) = (RI)P = IP$. Teisalt kehtib

$$\begin{aligned} IP &= (IR)P = I(RP) = I(\mathrm{Im}\,(\theta)P) = I\theta(P \otimes_S Q)P = IP\phi(Q \otimes_R P) \\ &= IP\mathrm{Im}\,(\phi) = IPS. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes näeme, et kehtib $IP = R(IP)S$, mistõttu IP on unitaarne (R, S)-bimoodul ehk $IP \in \mathrm{USub}({}_RP_S)$.

Olgu $A \in \mathrm{USub}({}_RP_S)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \theta(A \otimes_S Q) &= \theta(AS \otimes_S Q) = \theta(A \otimes_S SQ) = \theta(A \otimes_S \mathrm{Im}\,(\phi)Q) \\ &= \theta(A \otimes_S \phi(Q \otimes_R P)Q) = \theta(A \otimes_S Q\theta(P \otimes_S Q)) \\ &= \theta(A \otimes_S Q)\theta(P \otimes_S Q) = \theta(A \otimes_S Q)R. \end{aligned}$$

Teisalt saame $\theta(A \otimes_S Q) = \theta(RA \otimes_S Q) = R\theta(A \otimes_S Q)$, mistõttu $\theta(A \otimes_S Q) \in \mathrm{UId}(R)$.

Seega saame defineerida kujutused:

$$\Psi\colon\ \mathrm{UId}(R) \to \mathrm{USub}({}_RP_S), \qquad \Psi(I) := IP, \tag{7.7}$$

$$\Omega\colon\ \mathrm{USub}({}_RP_S) \to \mathrm{UId}(R), \qquad \Omega(A) := \theta(A \otimes_S Q). \tag{7.8}$$

On lihtne näha, et kujutused Ψ ja Ω säilitavad järjestusseost $\subseteq$. Lisaks kehtivad iga $I \in \mathrm{UId}(R)$ ja $A \in \mathrm{USub}({}_RP_S)$ korral

$$\begin{aligned} (\Omega \circ \Psi)(I) &= \theta(IP \otimes_S Q) = I\theta(P \otimes_S Q) = IR = I = \mathrm{id}_{\mathrm{UId}(R)}(I), \\ (\Psi \circ \Omega)(A) &= \theta(A \otimes_S Q)P = A\phi(Q \otimes_R P) = AS = A = \mathrm{id}_{\mathrm{USub}(P)}(A). \end{aligned}$$

Tulenevalt lausest 7.5 saame, et Ψ ja Ω on võrede isomorfismid.

($\mathrm{UId}(R) \cong \mathrm{USub}({}_SQ_R)$). Analoogiliselt eelnevaga saab näidata, et kujutused

$$\begin{aligned} \Psi'\colon\ & \mathrm{UId}(R) \to \mathrm{USub}({}_SQ_R), \qquad && \Psi'(I) := QI, \\ \Omega'\colon\ & \mathrm{USub}({}_SQ_R) \to \mathrm{UId}(R), \qquad && \Omega'(B) := \theta(P \otimes_S B) \end{aligned}$$

on võrede isomorfismid. ■

7.4 Ideaalid ja Morita kontekstid

Käesolevas alapeatükis näitame, kuidas ringe R ja S ühendavad Morita kontekstid on seotud ringide R ja S ideaalidega. Selleks vajame kõigepealt mooduli annullaatori mõistet.

Definitsioon 7.24. Olgu R ring ja $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Mooduli M_R **annullaatoriks** nimetatakse hulka

$$\mathrm{Ann}_R(M) := \{r \in R \mid Mr = \{0\}\} \subseteq R.$$

On lihtne näha, et iga R-mooduli M_R korral on annullaator $\mathrm{Ann}_R(M)$ ringi R ideaal. Parempoolset R-moodulit M_R nimetatakse **truuks**, kui kehtib $\mathrm{Ann}_R(M) = \{0\}$.

Lause 7.25. *Olgu R ja S s-unitaalsed ringid. Kui ringe R ja S ühendab sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$, siis leidub kvantaalide isomorfism $\Phi\colon \mathrm{Id}(R) \to \mathrm{Id}(S)$. Lisaks, iga parempoolse R-mooduli M_R korral*

- *$\Phi(\mathrm{Ann}_R(M)) = \mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P)$;*
- *R-moodul M_R on truu parajasti siis, kui parempoolne S-moodul $M \otimes_R P$ on truu.*

TÕESTUS. Olgu R ja S s-unitaalsed ringid, mida ühendab sürjektiivne Morita kontekst $(R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$. Järeldusest 7.19 teame, et $\mathrm{Id}(R) = \mathrm{UId}(R)$ ja $\mathrm{Id}(S) = \mathrm{UId}(S)$. Tulenevalt teoreemist 7.20 leidub kvantaalide isomorfism $\Phi\colon \mathrm{Id}(R) \to \mathrm{Id}(S)$, $I \mapsto \phi(QI \otimes_R P)$.

Olgu $M_R \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}(M \otimes_R P)\Phi(\mathrm{Ann}_R(M)) &= (M \otimes_R P)\phi(Q\,\mathrm{Ann}_R(M) \otimes_R P)\\ &= M \otimes_R \theta(P \otimes_S Q)\,\mathrm{Ann}_R(M)P\\ &= M \otimes_R R\,\mathrm{Ann}_R(M)P = MR\,\mathrm{Ann}_R(M) \otimes_R P\\ &\subseteq M\,\mathrm{Ann}_R(M) \otimes_R P = \{0\} \otimes_R P = \{0\}.\end{aligned}$$

Siit saame, et kehtib $\Phi(\mathrm{Ann}_R(M)) \subseteq \mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P)$. Analoogiliselt saame näidata, et $\Theta(\mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P)) \subseteq \mathrm{Ann}_R(M \otimes_R P \otimes_S Q)$, kus $\Theta\colon \mathrm{Id}(S) \to \mathrm{Id}(R)$, $J \mapsto \theta(PJ \otimes_S Q)$ on isomorfism teoreemist 7.20.

Olgu $r \in \mathrm{Ann}_R(M \otimes_R P \otimes_S Q) \subseteq R$. Kuna R on s-unitaalne, siis leidub element $v \in R$ nii, et $r = vr$ ja, tulenevalt θ sürjektiivsusest, leiduvad elemendid $p_1, \ldots, p_{k^*} \in P$ ja $q_1, \ldots, q_{k^*} \in Q$ nii, et $v = \theta(\sum_{k=1}^{k^*} p_k \otimes q_k)$. Paneme tähele, et iga $m \in M$ korral

$$mr = mvr = \mu_M(m \otimes v)r = \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M(m \otimes \theta(p_k \otimes q_k))r$$

$$= \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M((\mathrm{id}_M \otimes \theta)(m \otimes p_k \otimes q_k))r = \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M((\mathrm{id}_M \otimes \theta)((m \otimes p_k \otimes q_k)r))$$
$$= \sum_{k=1}^{k^*} \mu_M((\mathrm{id}_M \otimes \theta)(0)) = 0,$$

kus $\mu_M \colon M \otimes_R R \to R$ on homomorfism lemmast 3.32. Seega kehtib $r \in \mathrm{Ann}_R(M)$. Praeguseks oleme tõestanud sisalduvused

$$\Theta(\mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P)) \subseteq \mathrm{Ann}_R(M \otimes_R P \otimes_S Q) \subseteq \mathrm{Ann}_R(M).$$

Rakendades eelnevale reale võrede isomorfismi Φ, saame

$$\mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P) = \Phi(\Theta(\mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P))) \subseteq \Phi(\mathrm{Ann}_R(M)).$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et $\Phi(\mathrm{Ann}_R(M)) = \mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P)$.

Kui M_R on truu, siis $\{0\} = \mathrm{Ann}_R(M) = \Theta(\mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P))$, millest järeldub, et $\mathrm{Ann}_S(M \otimes_R P) = \{0\}$, kuna Θ on võrede isomorfism. Analoogiliselt järeldub $M \otimes_R P$ truudusest mooduli M_R truudus kuna Φ on isomorfism. ■

Lõpetuseks tõestame teoreemi, millest järeldub, et kui ringid R ja S on Morita ekvivalentsed, siis ringi R iga faktorring on Morita ekvivalentne teatava ringi S faktorringiga. Ühtlasi saame järgnevast teoreemist viisi, kuidas Morita konteksti faktoriseerida endas sisalduvate ringide ideaalide järgi.

Teoreem 7.26. *Olgu R ja S ringid ning $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ Morita kontekst. Sel juhul on iga ideaali $I \in \mathrm{Id}(R)$ korral faktorringid R/I ja $S/\Phi(I)$ ühendatud Morita konteksti*

$$\Gamma/I := (R/I, S/\Phi(I), P/\Psi(I), Q/\Psi'(I), \zeta, \eta)$$

poolt, kus

$$\begin{aligned} \Phi &\colon \mathrm{Id}(R) \to \mathrm{Id}(S), & \Phi(I) &:= \phi(QI \otimes_R P), \\ \Psi &\colon \mathrm{Id}(R) \to \mathrm{Sub}({}_RP_S), & \Psi(I) &:= IP, \\ \Psi' &\colon \mathrm{Id}(R) \to \mathrm{Sub}({}_SQ_R), & \Psi'(I) &:= QI. \end{aligned}$$

Kusjuures,

- *kui Γ on sürjektiivne, siis ka Γ/I on sürjektiivne;*
- *kui Γ on unitaarne, siis ka Γ/I on unitaarne.*

TÕESTUS. Olgu R ja S ringid ning $\Gamma = (R, S, {}_RP_S, {}_SQ_R, \theta, \phi)$ Morita kontekst. Fikseerime ideaali $I \in \mathrm{Id}(R)$. Näitame, et Abeli rühm $P/\Psi(I)$ on $(R/I, S/\Phi(I))$-bimoodul. Vaatleme kujutusi

$$R/I \times P/\Psi(I) \to P/\Psi(I), \qquad ([r],[p]) \mapsto [rp], \tag{7.9}$$

$$P/\Psi(I) \times S/\Phi(I) \to P/\Psi(I), \qquad ([p],[s]) \mapsto [ps]. \tag{7.10}$$

Olgu $p, p' \in P$ ja $s, s' \in S$ sellised, et $[p]_{\Psi(I)} = [p']_{\Psi(I)}$ ja $[s]_{\Phi(I)} = [s']_{\Phi(I)}$. Lemmast 2.26 saame, et $p - p' \in \Psi(I) = IP$ ja $s - s' \in \Phi(I) = \phi(QI \otimes_R P)$. Paneme tähele, et

$$\begin{gathered} ps - p's = (p-p')s \in IPS \subseteq IP, \\ p's - p's' = p'(s-s') \in P\phi(QI \otimes_R P) = \theta(P \otimes_S Q)IP \subseteq RIP \subseteq IP, \end{gathered}$$

millest järeldub, et

$$[ps]_{\Psi(I)} = [p's]_{\Psi(I)} = [p's']_{\Psi(I)}.$$

Seega kujutus (7.10) on korrektselt defineeritud. Analoogiliselt on ka kujutus (7.9) korrektselt defineeritud. Nüüd on lihtne näha, et $P/\Psi(I)$ on $(R/I, S/\Phi(I))$-bimoodul, kus toimed on defineeritud kujutuste (7.9) ja (7.10) abil.

Analoogiliselt on Abeli rühm $Q/\Psi'(I)$ $(S/\Phi(I), R/I)$-bimoodul.

Defineerime kujutused ζ ja η järgnevalt:

$$\zeta\colon\ P/\Psi(I) \otimes_{S/\Phi(I)} Q/\Psi'(I) \to R/I, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} [p_k] \otimes [q_k] \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} [\theta(p_k \otimes q_k)]_I,$$

$$\eta\colon\ Q/\Psi'(I) \otimes_{R/I} P/\Psi(I) \to S/\Phi(I), \qquad \sum_{k=1}^{k^*} [q_k] \otimes [p_k] \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} [\phi(q_k \otimes p_k)]_{\Phi(I)}.$$

Näitamaks nende kujutuste korrektselt defineeritust vaatleme kujutusi

$$\hat{\zeta}\colon\ P/\Psi(I) \times Q/\Psi'(I) \to R/I, \qquad ([p]_{\Psi(I)}, [q]_{\Psi'(I)}) \mapsto [\theta(p \otimes q)]_I,$$

$$\hat{\eta}\colon\ Q/\Psi'(I) \times P/\Psi(I) \to S/\Phi(I), \qquad ([q]_{\Psi'(I)}, [p]_{\Psi(I)}) \mapsto [\phi(q \otimes p)]_{\Phi(I)}.$$

Olgu $p, p' \in P$ ja $q, q' \in Q$ sellised, et $[p]_{\Psi(I)} = [p']_{\Psi(I)}$ ja $[q]_{\Psi'(I)} = [q']_{\Psi'(I)}$. Sel juhul $p - p' \in \Psi(I) = IP$ ja $q - q' \in \Psi'(I) = QI$, mistõttu leiduvad elemendid $p_1, \ldots, p_{k^*} \in P$, $q_1, \ldots, q_{h^*} \in Q$ ja $i_1, i'_1, \ldots, i_{k^*}, i'_{h^*} \in I$ nii, et $p - p' = i_1p_1 + \ldots + i_{k^*}p_{k^*}$ ja $q - q' = q_1i'_1 + \ldots + q_{h^*}i'_{h^*}$. Nüüd

$$\hat{\zeta}([p],[q]) - \hat{\zeta}([p'],[q]) = [\theta((p-p') \otimes q)]_I = \left[\sum_{k=1}^{k^*} i_k\theta(p_k \otimes q)\right]_I = [0]_I,$$

$$\hat{\zeta}([p'],[q]) - \hat{\zeta}([p'],[q']) = [\theta(p' \otimes (q-q'))]_I = \left[\sum_{h=1}^{h^*} \theta(p' \otimes q_h) i'_h\right]_I = [0]_I.$$

Seega kehtib

$$\hat{\zeta}([p]_{\Psi(I)},[q]_{\Psi'(I)}) = \hat{\zeta}([p']_{\Psi(I)},[q]_{\Psi'(I)}) = \hat{\zeta}([p']_{\Psi(I)},[q']_{\Psi'(I)}),$$

millest järeldub, et kujutus $\hat{\zeta}$ on korrektselt defineeritud. Kuna $\hat{\zeta}$ on $S/\Phi(I)$-tasakaalustatud, siis tulenevalt tensorkorrutise universaalomadusest on ζ korrektselt defineeritud Abeli rühmade homomorfism. Analoogiliselt on ka $\hat{\eta}$ ja η korrektselt defineeritud. Kuna θ ja ϕ on bimoodulite homomorfismid, siis on seda ka ζ ja η.

Nüüd, iga $p, p' \in P$ ja $q, q' \in Q$ korral kehtivad

$$\begin{aligned}
\zeta([p]\otimes[q])[p'] &= [\theta(p\otimes q)][p'] = [\theta(p\otimes q)p'] = [p\phi(q\otimes p')] = [p]\eta([q]\otimes[p']),\\
[q']\zeta([p]\otimes[q]) &= [q'][\theta(p\otimes q)] = [q'\theta(p\otimes q)] = [\phi(q'\otimes p)q] = \eta([q']\otimes[p])[q].
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et kuuik $(R/I, S/\Phi(I), P/\Psi(I), Q/\Psi'(I), \zeta, \eta)$ on Morita kontekst.

Kui θ ja ϕ on sürjektiivsed, on ka ζ ja η sürjektiivsed. Kui ${}_RP_S$ ja ${}_SQ_R$ on unitaarsed, siis on ka nende faktormoodulid unitaarsed (lause 2.27). ■

Järeldus 7.27. *Kui kaks idempotentset ringi R ja S on Morita ekvivalentsed, siis iga ideaali $I \in \mathrm{Id}(R)$ korral on ka faktorringid R/I ja $S/\Phi(I)$ Morita ekvivalentsed.*

Lisa A

Vaba Abeli rühm

Käesoleva raamatu põhiosas mainiti mõned korrad vaba Abeli rühma ning korra ka vaba monoidi. Moodulite tensorkorrutise konstruktsiooni juures oli teatav vaba Abeli rühm lausa keskel kohal. Seetõttu on aeg tutvuda, mida vaba Abeli rühma mõiste endast kujutab. Alustame Abeli rühma baasi mõiste tutvustamisest ning selle abil vabale Abeli rühmale abstraktse definitsiooni andmisest. Seejärel anname kolm erinevat viisi, kuidas vaba Abeli rühma konstrueerida.

Abeli rühma baas

Defineerime kõigepealt lineaarkombinatsiooni mõiste Abeli rühmas. Olgu C Abeli rühm. Suvalist avaldist[1] kujul $z_1c_1 + \ldots + z_{k^*}c_{k^*}$, kus $c_1, \ldots, c_{k^*} \in C$ ja $z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}$ nimetatakse **lineaarkombinatsiooniks** Abeli rühmas C. Hulka $B \subseteq C$ nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui suvalise lõpliku hulga $\{b_1, \ldots, b_{k^*}\} \subseteq B$ korral kehtib implikatsioon

$$z_1c_1 + \ldots + z_{k^*}c_{k^*} = 0 \implies z_1 = \ldots = z_{k^*} = 0,$$

kus $z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}$. Seega, hulk B on lineaarselt sõltumatu parajasti siis, kui suvaline lineaarkombinatsioon hulga B elementidest on võrdne nulliga vaid siis, kui kõik kordajad selles lineaarkombinatsioonis on nullid. Definitsioonist on muuhulgas näha, et nullelement 0 ei saa kuuluda lineaarselt sõltumatusse hulka.

Abeli rühma C alamhulka $B \subseteq C$ nimetatakse Abeli rühma C **moodustajate süsteemiks**, kui iga element on esitatav mingi lineaarkombinatsioo-

[1]Siinkohal on Abeli rühma C elemendi ja täisarvu korrutamine defineeritud analoogiliselt näitega 2.7 (3). Kuid täisarv kirjutatakse Abeli rühma elemendist vasakule.

nina hulga B elementidest, st iga $c \in C$ korral leiduvad $b_1, \ldots, b_{k^*} \in B$ ja $z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}$ nii, et $c = z_1 b_1 + \ldots + z_{k^*} b_{k^*}$.

Nüüd oleme valmis defineerima Abeli rühma baasi.

Definitsioon A.1. Olgu C Abeli rühm. Hulka $B \subseteq C$ nimetatakse Abeli rühma C **baasiks**, kui B on lineaarselt sõltumatu ja Abeli rühma C moodustajate süsteem.

Märgime, et kaugeltki mitte igal Abeli rühmal ei leidu baasi.

Definitsioon A.2. Abeli rühma nimetatakse **vabaks**, kui tal leidub baas.

Tõestame järgnevalt kaks olulist vaba Abeli rühma omadust.

Lause A.3. *Olgu C vaba Abeli rühm baasiga B. Sel juhul esitub iga $c \in C$ üheselt kujul*

$$c = \sum_{k=1}^{k^*} z_k b_k,$$

kus $k^* \in \mathbb{N}_1$, $z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}$ ja $b_1, \ldots, b_{k^*} \in B$ ning $k \neq h$ korral $b_k \neq b_h$.

TÕESTUS. Olgu B Abeli rühma C baas. Valime elemendi $c \in C$. Kuna B on moodustajate süsteem, siis leiduvad $k^* \in \mathbb{N}_1$, $z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z}$ ja $b_1, \ldots, b_{k^*} \in B$ nii, et

$$c = \sum_{k=1}^{k^*} z_k b_k. \tag{A.1}$$

Näitamaks, et see esitus on ühene, oletame, et leiduvad veel $h^* \in \mathbb{N}_1$, $z'_1, \ldots, z'_{h^*} \in \mathbb{Z}$ ja $b'_1, \ldots, b_{h^*} \in B$ nii, et $c = z'_1 b'_1 + \ldots + z'_{h^*} b'_{h^*}$. Koostame hulga $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_{k^*}\} \cup \{b'_1, \ldots, b'_{h^*}\}$. Hulk $\mathcal{B}$ on ilmselt lõplik. Iga elemendi $\beta \in \mathcal{B}$ korral defineerime

$$z_\beta := \begin{cases} z_k, & \beta = b_k, \\ 0, & \beta \notin \{b_1, \ldots, b_{k^*}\} \end{cases} \quad \text{ja} \quad z'_\beta := \begin{cases} z'_h, & \beta = b'_h, \\ 0, & \beta \notin \{b'_1, \ldots, b'_{h^*}\}. \end{cases}$$

Nüüd saame, et kehtib

$$c = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z_\beta \beta = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z'_\beta \beta.$$

Seega,

$$0 = c - c = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z_\beta \beta - \sum_{\beta \in \mathcal{B}} z'_\beta \beta = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} (z_\beta - z'_\beta)\beta.$$

Kuna $\mathcal{B}$ on hulga B lõplik alamhulk ning B on lineaarselt sõltumatu, siis kehtib iga $\beta \in \mathcal{B}$ korral $z_\beta - z'_\beta = 0$ ehk $z_\beta = z'_\beta$. Siit järeldame, et esitus (A.1) on ühene. ∎

Olgu C vaba Abeli rühm baasiga B. Tulenevalt eelnevast lausest saame iga $c \in C$ korral üheselt leida kordajad $c_b \in \mathbb{Z}$, $b \in B$ nii, et vaid lõplik arv kordajatest c_b, $b \in B$, on nullist erinevad ja kehtib

$$c = \sum_{b \in B} c_b b.$$

Lause A.4. *Olgu C vaba Abeli rühm baasiga B. Iga Abeli rühma A ja kujutuse $g\colon B \to A$ korral leidub täpselt üks Abeli rühmade homomorfism $f\colon C \to A$ nii, et $f|_B = g$.*

TÕESTUS. Olgu C vaba Abeli rühm baasiga B, A suvaline Abeli rühm ja $g\colon B \to A$ kujutus. Defineerime kujutuse

$$f\colon C \to A, \qquad \sum_{b \in B} c_b b \mapsto \sum_{b \in B} c_b g(b).$$

Kujutus f on korrektselt defineeritud tänu lausele A.3. Ilmselt kehtib võrdus $f|_B = g$. Paneme tähele, et iga $c, c' \in C$ korral

$$\begin{aligned} f(c + c') &= f\left(\sum_{b \in B} c_b b + \sum_{b \in B} c'_b b\right) = f\left(\sum_{b \in B} (c_b + c'_b) b\right) = \sum_{b \in B} (c_b + c'_b) g(b) \\ &= \sum_{b \in B} (c_b g(b) + c'_b g(b)) = \sum_{b \in B} c_b g(b) + \sum_{b \in B} c'_b g(b) = f(c) + f(c'). \end{aligned}$$

Seega f on Abeli rühmade homomorfism.

Olgu nüüd $h\colon C \to A$ samuti selline, et $h|_B = g$. Sel juhul, iga $c \in C$ korral,

$$h(c) = h\left(\sum_{b \in B} c_b b\right) = \sum_{b \in B} c_b h(b) = \sum_{b \in B} c_b g(b) = f(c).$$

Seega $h = f$. ■

Kasutades kujutust $\iota_B\colon B \to C$, $b \mapsto b$ näeme, et vaba Abeli rühm rahuldab allolevat universaalomadust.

Vaba Abeli rühma universaalomadus: Olgu C vaba Abeli rühm baasiga B. Iga Abeli rühma A ja kujutuse $g\colon B \to A$ korral leidub üheselt Abeli rühmade homomorfism $\overline{g}\colon C \to A$ nii, et allolev diagramm kommuteerub.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "\overline{g}"] & A \\ B \arrow[u, "\iota_B"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Otsesummad ja vaba Abeli rühm

Eelmises punktis defineerisime vaba Abeli rühma ja näitasime, et kui selline Abeli rühm eksisteerib, siis on tal mitmeid häid omadusi. Nüüd näitame, et vabasid Abeli rühmi tõepoolest eksisteerib, andes ühe võimaliku viisi, kuidas selliseid rühmi konstrueerida. Selleks kasutame alapeatükis 2.3 vaadeldud moodulite otsesumma mõistet.

Olgu A mingi hulk. Meenutame näitest 2.7 (3), et iga Abeli rühm on vaadeldav $\mathbb{Z}$-moodulina. Vaatleme $\mathbb{Z}$-moodulit

$$\mathbb{Z}^{\oplus A} = \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}.$$

Tähistame hulga $\mathcal{B} = \{\alpha_a = (\alpha_{ak})_{k \in A} \mid a \in A\} \subseteq \mathbb{Z}^{\oplus A}$, kus

$$\alpha_{ak} = \begin{cases} 1, & a = k, \\ 0, & a \neq k. \end{cases}$$

Lause A.5. *Olgu A hulk. $\mathbb{Z}$-moodul $\mathbb{Z}^{\oplus A}$ on vaba Abeli rühm baasiga $\mathcal{B}$.*

TÕESTUS. Olgu A hulk. Vaatleme Abeli rühma $\mathbb{Z}^{\oplus A}$. Olgu $\zeta = (z_a)_{a \in A} \in \mathbb{Z}^{\oplus A}$. Paneme tähele, et

$$\zeta = (z_a)_{a \in A} = \sum_{a \in A} z_a \xi_a.$$

Eelnev summa on defineeritud, kuna üldistatud jadas ζ leidub, vastavalt otsesumma definitsioonile, vaid lõplik arv nullist erinevaid komponente. Siit näeme, et hulk $\mathcal{B}$ on Abeli rühma $\mathbb{Z}^{\oplus A}$ moodustajate süsteem.

On lihtne näha, et $\mathcal{B}$ on lineaarselt sõltumatu. Järelikult on $\mathcal{B}$ Abeli rühma $\mathbb{Z}^{\oplus A}$ baas, mistõttu $\mathbb{Z}^{\oplus A}$ on vaba. ■

Siit näeme mh, et suvalise hulga A korral saab leida vaba Abeli rühma, mille baas on hulga A kardinaalsusega.

Formaalsed summad

Eelnevalt nägime, kuidas vaba Abeli rühma saab konstrueerida kasutades $\mathbb{Z}$-moodulite otsesummat. Nüüd vaatame, aga kuidas saab vabasid Abeli rühmi konstrueerida formaalsete summade abil. Autori arvates on see kõige intuitiivsem konstruktsioon, mis loodatavasti aitab vaba (Abeli) rühma mõistet paremini mõista. Kuid alustame oma konstruktsiooni kaugemalt ning kõigepealt leiame vaba poolrühma, seejärel vaba monoidi, vaba rühma ning lõpuks jõuame ka vaba Abeli rühmani.

Vaba poolrühm Olgu A mingi hulk (võib olla ka tühi). Olemuslikult annab vaba poolrühma (monoidi, (Abeli) rühma) mõiste retsepti, kuidas konstrueerida vähimat poolrühma (monoidi, (Abeli) rühma), mis sisaldab hulga A kõik elemendid. Eesmärk on hulga A elementidel defineerida mingi tehe, mida meie tähistame sümboliga $+$ ning nimetame *liitmiseks* (lisaks võtame tehtest $+$ rääkides kasutusele ka ülejäänud liitmisega seotud mõisted nagu *summa* ning ka summamärgi Σ)[2]. Nüüd vaatame hulka $\mathcal{F}(A)$, mis koosneb kõikvõimalikest lõplikest „summadest“ nagu näiteks

$$a_1 + a_2, \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_m, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

kus $a_1, a_2, \ldots, a_m, a_k \in A$ ja $m, n \in \mathbb{N}_1$. Seega,

$$\mathcal{F}(A) := \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} a_k \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_1,\ a_1, \ldots, a_{k^*} \in A \right\}.$$

Hulga $\mathcal{F}(A)$ elemente nimetatakse **formaalseteks summadeks**.

Defineerime hulgal $\mathcal{F}(A)$ tehte $+$ suvaliste $\sum_{k=1}^{k^*} a_k, \sum_{h=1}^{h^*} \alpha_h \in \mathcal{F}(A)$ korral:

$$\sum_{k=1}^{k^*} a_k + \sum_{h=1}^{h^*} \alpha_h := \sum_{k=1}^{k^*+h^*} a_k, \tag{A.2}$$

kus $a_{k^*+1} := \alpha_1, \ldots, a_{k^*+h^*} := \alpha_{h^*}$. On lihtne näha, et selliselt defineeritud $+$ on tõepoolest korrektselt defineeritud assotsiatiivne tehe, mida nimetame (**formaalseks**) **liitmiseks**.[3] Selliselt oleme saanud poolrühma $(\mathcal{F}(A); +)$, mida nimetatakse **vabaks poolrühmaks** üle hulga A.

Vaba monoid Järgmise sammuna soovime konstrueerida vaba monoidi. Selleks lisame hulka $\mathcal{F}(A)$ täiendava elemendi 0, mis vastab formaalsele summale, milles on null liidetavat. Saadud hulka tähistame $\mathcal{F}^0(A)$. Seega[4]

$$\mathcal{F}^0(A) := \mathcal{F}(A) \sqcup \{0\} = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} a_k \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_0,\ a_1, \ldots, a_{k^*} \in A \right\}.$$

[2]Siinkohal ei tasu liigselt otsida seost „tavalise“ liitmisega. Kuna meie pikem eesmärk on konstrueerida Abeli rühm, siis kasutame traditsiooniliselt plussi $+$, kuid võiksime kasutada ka ükskõik millist teist tehtesümbolit. Tavaliselt kasutatakse vabadest (pool)rühmadest rääkides korrutamissümbolit $\cdot$, mis tihti üldse kirjutamata jäetakse.

[3]Mainime siinkohal, et kui vabas poolrühmas $\mathcal{F}(A)$ kasutada plussi $+$ asemel korrutamismärki $\cdot$ – mida tavaliselt välja ei kirjutata –, siis nimetatakse hulga $\mathcal{F}(A)$ elemente tavaliselt **sõnedeks** ning poolrühma $\mathcal{F}(A)$ tehet **konkatenatsiooniks**. Mainime, et korrutamisemärgi kasutamist nimetatakse ka *multiplikatiivseks* notatsiooniks.

[4]Siinkohal kasutame kokkulepet, et $\sum_{k=1}^{0} x = 0$, mistahes objekti x korral.

Nõuame, et iga $\sum_{k=1}^{k^*} a_k \in \mathcal{F}(A)$ korral

$$0 + \sum_{k=1}^{k^*} a_k = \sum_{k=1}^{k^*} a_k + 0 = \sum_{k=1}^{k^*} a_k \tag{A.3}$$

ja lisaks, et

$$0 + 0 = 0. \tag{A.4}$$

Selliselt defineeritud liitmisega $+$ on $\mathcal{F}^0(A)$ tõepoolest monoid ühikelemendiga 0, mida nimetatakse **vabaks monoidiks** üle hulga A.

Vaba rühm Edasi soovime monoidi $\mathcal{F}^0(A)$ täiendada rühmaks. Tähistame iga $a \in A$ korral tema *vastandelemendi* sümboliga $-a$ ning nõuame, et kehtiks

$$a + (-a) = -a + a = 0 \tag{A.5}$$

iga $a \in A$ korral. Nüüd lisame hulka $\mathcal{F}^0(A)$ kõikvõimalikud formaalsed summad, mille liidetavad võivad olla ka hulga A „miinusmärgiga“ elemendid ning saadud hulka tähistame $\overline{\mathcal{F}^0}(A)$. Seega

$$\overline{\mathcal{F}^0}(A) := \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} x_k a_k \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_0,\ \forall k\colon x_k \in \{-1, 1\},\ a_k \in A \right\},$$

kus iga $a \in A$ korral $1a = a$ ja $-1a = -a$. Paneme tähele, et

$$\overline{\mathcal{F}^0}(A) = \mathcal{F}^0(A \sqcup \{-a \mid a \in A\}).$$

Hulgal $\overline{\mathcal{F}^0}(A)$ võtame tehteks monoidi $\mathcal{F}^0(A \sqcup \{-a \mid a \in A\})$ tehte $+$ (definitsiooniga (A.2) ja täiendustega (A.3) ning (A.4)), kus nõuame lisaks, et iga $a \in A$ korral kehtiks tingimused (A.5) ning $-(-a) = a$. Seega, kui mingis formaalses summas satuvad kokku a ja $-a$, siis nad nö „taandavad“ üksteist ära. On lihtne näha, et $\overline{\mathcal{F}^0}(A)$ on tõepoolest rühm ning iga $\sum_{k=1}^{k^*} \alpha_k \in \overline{\mathcal{F}^0}(A)$ korral kehtib

$$-\left(\sum_{k=1}^{k^*} \alpha_k\right) = \sum_{k=1}^{k^*} (-\alpha_k).$$

Paari $(\overline{\mathcal{F}^0}(A); +)$ nimetatakse **vabaks rühmaks** üle hulga A.

Märgime, et vabas rühmas (poolrühmas, monoidis) kasutatakse kokkuleppet, et formaalsed summad, kus on võrdsed liidetavad, võetakse kokku täisarvuga korrutamise abil analoogiliselt näites 2.7 (3) toodud konstruktsiooniga, st iga $a \in A$ ja $n \in \mathbb{N}_1$ korral

$$na := \sum_{k=1}^{n} a, \qquad 0a := 0, \qquad (-n)a := -na := \sum_{k=1}^{n} (-a).$$

Vastavalt vaba poolrühma korral on relevantne vaid eelmisel real esimene definitsioon ning vaba monoidi korral kaks esimest. Siinkohal peab olema ettevaatlik, kuna kokku võib liidetavaid võtta vaid siis, kui nad on järjest, sest tehe ei ole kommutatiivne. Näiteks

$$a + a + a + b + a + a = 3a + b + 2a \neq 5a + b = a + a + a + a + a + b.$$

Vaba Abeli rühm Lõpuks oleme valmis konstrueerima vaba Abeli rühma. Defineerime hulgal $\overline{\mathcal{F}^0}(A)$ ekvivalentsiseose $\sim$ järgnevalt:

> kaks formaalset summat α ja β hulgast $\overline{\mathcal{F}^0}(A)$ on seoses $\sim$ parajasti siis, kui nad koosnevad samadest liidetavadest, st formaalse summa α liidetavad erinevad formaalse summa β liidetavatest vaid järjestuse poolest.

Vaatleme faktorhulka $\mathbb{Z}^{(A)} := \overline{\mathcal{F}^0}(A)/\sim$. Kuna faktorhulk $\mathbb{Z}^{(A)}$ koosneb sisuliselt sellistest formaalsetest summadest, kus võrdsed liidetavad on kokku kogutud, võime (isomorfismi täpsuseni) väita, et[5]

$$\mathbb{Z}^{(A)} = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} z_k a_k \;\middle|\; \begin{array}{l} k^* \in \mathbb{N}_1,\ z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z},\ a_1, \ldots, a_{k^*} \in A, \\ (k \neq h \implies a_k \neq a_h) \end{array} \right\} \tag{A.6}$$

(vt näide 2.7 (3)). Hulgal $\mathbb{Z}^{(A)}$ defineerime liitmise $+$ nii, et kahe formaalse summa $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^{(A)}$ summa $\alpha + \beta$ on formaalne summa, mille liidetavad moodustavad formaalsete summade α ja β liidetavate ühendi ning iga liidetava kordaja formaalses summas $\alpha + \beta$ on vastavate liidetavate kordajate summa (täisarvude mõttes) formaalsetes summades α ja β. Näiteks $a, b, c \in A$ korral

$$\begin{aligned} (2a + b) + c &= 2a + b + c, \\ (2a + b) + (c + 2b) &= 2a + 3b + c, \\ (2a - b) + (c + 2b) &= 2a + b + c, \\ (a + b) + (a - b) &= 2a + 0b = 2a. \end{aligned}$$

On lihtne näha, et paar $(\mathbb{Z}^{(A)}; +)$ on Abeli rühm. Lisaks näeme, et hulk A on Abeli rühma $\mathbb{Z}^{(A)}$ baas, seega oleme tõepoolest konstrueerinud vaba Abeli rühma. On lihtne näha, et kujutus

$$\mathbb{Z}^{\oplus A} \to \mathbb{Z}^{(A)}, \qquad (z_a)_{a \in A} \mapsto \sum_{a \in A} z_a a \tag{A.7}$$

[5] Siin on k^* jälle piirkonnast $\mathbb{N}_1$, kuna nullelement on võrdne suvalise summaga, mille kõik kordajad on nullid.

on Abeli rühmade isomorfism. Siit näeme, et mõlemad seni vaadeldud viisid vaba Abeli rühma konstrueerimiseks on omavahel kooskõlas.

Järgnevalt toome mõned näited vabadest (pool)rühmadest.

Näide A.6 (Vabad (pool)rühmad). 1. Olgu $A = \varnothing$ tühihulk. Sel juhul kehtivad

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varnothing) &= \varnothing, \\ \mathcal{F}^0(\varnothing) = \overline{\mathcal{F}^0}(\varnothing) = \mathbb{Z}^{(\varnothing)} &= \{0\}. \end{aligned}$$

Lisaks märgime, et kui hulk A ei ole tühi, siis on vaba (Abeli) (pool)rühm ja monoid üle hulga A alati lõpmatu võimsusega.

2. Olgu $A = \{X\}$ (üheelemendiline hulk). Sel juhul

$$\mathcal{F}(\{X\}) = \{X, X+X, X+X+X, \ldots\} = \{X, 2X, 3X, \ldots\}.$$

Et saavutada kooskõla poolrühmade ringi juures (ptk 3.6) tooduga, kasutame selles näites edaspidi multiplikatiivset notatsiooni. (Sel juhul muutub vaid see, et kordajate asemel vaatleme astendajaid ning ühikelementi tähistame sümboliga 1.) Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\{X\}) &= \{X, X^2, X^3, \ldots\}, \\ \mathcal{F}^0(\{X\}) &= \{1, X, X^2, X^3, \ldots\}, \\ \overline{\mathcal{F}^0}(\{X\}) = \mathbb{Z}^{(\{X\})} &= \{\ldots, X^{-3}, X^{-2}, X^{-1}, 1, X, X^2, X^3, \ldots\}. \end{aligned}$$

Lisaks märkame, et kehtivad, vastavalt, poolrühmade, monoidide ja (Abeli) rühmade isomorfsused $(\mathcal{F}(\{X\}); \cdot) \cong (\mathbb{N}_1; +)$, $(\mathcal{F}^0(\{X\}); \cdot) \cong (\mathbb{N}_0; +)$ ja $(\mathbb{Z}^{(\{X\})}; \cdot) \cong (\mathbb{Z}; +)$.

3. Vaatleme eelmisest alamnäitest hulka $\mathcal{F}(\{X\}) = \{X, X^2, X^3, \ldots\}$. Märkame, et

$$\mathbb{Z}^{(\mathcal{F}(\{X\}))} = \left\{ \sum_{k=1}^{k^*} z_k X^k \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_0,\ z_1, \ldots, z_{k^*} \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}[X].$$

Seega, täisarvuliste kordajatega polünoomide aditiivne rühm $(\mathbb{Z}[X]; +)$ on lihtsalt vaba Abeli rühm üle muutuja X kõikvõimalike positiivsete astmete hulga.

4. Alamnäites 2 sellele juba vihjati, kuid kõigi täisarvude Abeli rühm $(\mathbb{Z}, +)$ on vaba Abeli rühm $\mathbb{Z}^{(1)}$.

5. Vaatleme kõikide algarvude hulka $\mathbb{P}$. Meenutame aritmeetika põhiteoreemi: iga ühest suuremat naturaalarvu saab esitada algarvude korrutisena täpselt ühel viisil (lk 20 raamatus [13] või teoreem 1.33 raamatus

[7]). Uurime vaba Abeli rühma üle hulga $\mathbb{P}$ multiplikatiivses notatsioonis. Tähistame sümboliga $\mathbb{Q}^+$ kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulka. Kasutades aritmeetika põhiteoreemi ning asjaolu, et iga $q \in \mathbb{Q}^+$ on esitatav kujul $q = mn^{-1}$, kus $m, n \in \mathbb{N}_1$, näeme, et kehtib

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{P})} \cong \left\{ \prod_{k=1}^{k^*} p_k^{x_k} \,\middle|\, k^* \in \mathbb{N}_0,\ \forall k\colon p_k \in \mathbb{P}, x_k \in \{-1, 1\} \right\} = (\mathbb{Q}^+; \cdot).$$

Siit näeme, et positiivsete ratsionaalarvude hulk koos korrutamisega on vaba Abeli rühm baasiga $\mathbb{P}$. □

Vaba Abeli rühm kujutuste abil

Nüüdseks oleme näinud kahte erinevat viisi, kuidas saada vaba Abeli rühma. Tegelikult saab vaba Abeli rühma konstrueerida ka kasutades kujutusi. Järgnevalt tutvume selle konstruktsiooniga lähemalt.

Olgu A taaskord mingi hulk. Defineerime hulga

$$\overline{\mathbb{Z}^{(A)}} := \{\alpha\colon A \to \mathbb{Z} \mid \alpha(a) \neq 0 \text{ lõpliku arvu } a \in A \text{ korral}\}. \tag{A.8}$$

Siin defineerime tehte kui kujutuste punktiviisilise liitmise, st suvaliste kujutuste $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$ korral

$$(\alpha + \beta)(a) := \alpha(a) + \beta(a)$$

iga $a \in A$ korral. On lihtne näha, et $(\overline{\mathbb{Z}^{(A)}}; +)$ on Abeli rühm ühikelemendiga $\mathbf{0}$. Nüüd peame veenduma, et Abeli rühm $\overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$ on isomorfne Abeli rühmaga $\mathbb{Z}^{(A)}$ ning olemegi näidanud, et need mõlemad konstruktsioonid annavad sama asja. Teisisõnu, kõik kolm vaba Abeli rühma konstruktsiooni on omavahel kooskõlas.

Kõigepealt näitame, et hulk A on sisestatav hulka $\overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$. Selleks defineerime iga $a \in A$ korral kujutuse

$$x_a\colon A \to \mathbb{Z}, \qquad a' \mapsto \begin{cases} 0, & a' \neq a, \\ 1, & a' = a. \end{cases}$$

Nüüd näeme, et hulk A on sisestatav hulka $\overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$ injektiivse kujutuse $a \mapsto x_a$ abil. On selge, et hulk $\{x_a \mid a \in A\}$ on Abeli rühma $\overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$ baas.

Defineerime kujutuse

$$\varphi\colon \overline{\mathbb{Z}^{(A)}} \to \mathbb{Z}^{(A)}, \qquad \alpha \mapsto \sum_{a \in A} \alpha(a)a.$$

Paneme tähele, et iga $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$ korral leidub vaid lõplik arv elemente $a \in A$ nii, et $\alpha(a) \neq 0$, seega formaalses summas $\sum_{a\in A} \alpha(a)a$ on vaid lõplik arv nullist erinevaid liidetavaid, mistõttu ta kuulub hulka $\mathbb{Z}^{(A)}$. Paneme tähele, et iga $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$ korral

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha+\beta) &= \sum_{a\in A}(\alpha+\beta)(a) = \sum_{a\in A}(\alpha(a)+\beta(a)) = \sum_{a\in A}\alpha(a) + \sum_{a\in A}\beta(a)\\ &= \varphi(\alpha)+\varphi(\beta).\end{aligned}$$

Järelikult on φ Abeli rühmade homomorfism. On lihtne näha, et φ on bijektiivne. Seega oleme näidanud, et Abeli rühmad $\overline{\mathbb{Z}^{(A)}}$ ja $\mathbb{Z}^{(A)}$ on isomorfsed ehk mõlemad siin lisas toodud konstruktsioonid annavad vaba Abeli rühma. Tähistusi mõnevõrra kuritavitades ei tehta tavaliselt tähistuslikult vahet, kuidas vaba Abeli rühm konstrueeritud on ning teda tähistatakse lihtsalt sümboliga $\mathbb{Z}^{(A)}$.

Märkus A.7. Käesolevas lisas tutvusime vaba poolrühma, monoidi, rühma ja Abeli rühma mõistetega. Tegelikult võib suvalise signatuuriga universaalalgebra korral defineerida talle vastava vaba universaalalgebra. Selleks kasutatakse vaba algebra universaalomadust, mille erijuht on vaba Abeli rühma universaalomadus (lk 273). Vaba (universaal)algebra mõistetega üldjuhul saab tutvuda raamatus [1] (peatükk 2.11).

Lisa B

Tensorkorrutistest üldiselt

Siinkohal oleks paslik meenutada sissejuhatusest, et üks käesoleva raamatu kirjutamise eesmärke oli eesti keeles tutvustada moodulite tensorkorrutise mõistet. See eesmärk on raamatu peatükis 3 loodetavasti täidetud. Nüüd, raamatu lõpetuseks, lähme kaugemale ning tutvume kategooriateoreetilise kontekstiga, mis on autorile teadaolevalt üldisim tensorkorrutise mõiste üldistus. Tasub hoiatada, et oma abstraktsuse astmelt on siinne lisa ilmselt palju sügavam kui eelnev raamat.

Kuid enne, kui liigume kategooriateoreetiliste üldistuste juurde, oleks vaja lugejat natuke toetada intuitsiooni tekkimiseks tensorkorrutiste kohta. Nüüdseks on lugejale loodetavasti moodulite tensorkorrutise mõiste selge ning seda näidet tuleks järgnevas pidevalt meeles pidada. Kuid igasuguse mõiste edukaks üldistamiseks oleks vaja intuitsiooni mitme näite kohta. Meenutame, et alapeatükis 3.6 tutvusime G-polügoonide tensorkorrutise ja G-tasakaalustatud kujutuste mõistetega (definitsioonid 3.48 ja 3.50), kus G on mingi poolrühm. Kategooriateoorias on kesksel kohal erinevad universaalomadused. Seega toome siinkohal ära polügoonide tensorkorrutise universaalomaduse, mille võiks võtta (ning tihti ka võetakse) polügoonide tensorkorrutise definitsiooniks.

Polügoonide tensorkorrutise universaalomadus: Olgu G poolrühm ning A_G ja ${}_GB$ vastavalt parem- ja vasakpoolne G-polügoon. Iga hulga X ja G-tasakaalustatud kujutuse $\beta\colon A \times B \to X$ korral leidub üheselt määratud kujutus $\overline{\beta}\colon A \otimes_G B \to X$ nii, et järgnev diagramm kommuteerub.

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\otimes"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ A \otimes_G B \arrow[rr, dashed, "\overline{\beta}"'] & & X \end{tikzcd}$$

Siinkohal peaks selge olema, et polügoonide ja moodulite tensorkorrutise definitsioon universaalomaduse abil ja paljud omadused on üksteisega täpselt analoogilised (kuigi nende tõestused võivad olla märkimisväärselt erinevad). See annab aluse tensorkorrutise mõiste üldistamiseks: tuua need kaks – ja veel mitmed teisedki – tensorkorrutise mõisted ühise kategooriateoreetilise konstruktsiooni alla. Seda viisi me järgnevalt tutvustama hakkamegi. (Põhjalikult saab polügoonide tensorkorrutisega, sh tema universaalomaduse tõestusega, tutvuda raamatus [31], ptk II.5.)

Monoidsed kategooriad

Meenutame, et moodulite tensorkorrutis on üldiselt Abeli rühm ning polügoonide tensorkorrutis on üldiselt hulk. Seega on meil tensorkorrutise mõiste üldistamiseks kõigepealt vaja defineerida kategooria, milles meie tensorkorrutis paiknema hakkab. Selleks defineerime monoidse kategooria mõiste. Monoidsest kategooriast võib mõelda kui kontekstist, milles saab tensorkorrutistest rääkida. Pikemalt saab monoidsete kategooriate ja nendega seotud mõistetega tutvuda näiteks raamatus [38] (ptk VII).

Definitsioon B.1. Monoidne kategooria $(\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$ koosneb järgmistest asjadest:

MD1. kategooria $\mathcal{C}$;

MD2. bifunktor $\boxtimes = \_ \boxtimes \_ \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, mida nimetatakse **monoidseks korrutamiseks**;

MD3. objekt $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, mida nimetatakse **(monoidseks) ühikobjektiks**;

MD4. loomulik isomorfism $\alpha \colon \_ \boxtimes (\_ \boxtimes \_) \stackrel{\bullet}{\to} (\_ \boxtimes \_) \boxtimes \_$, mida nimetatakse **assotsiaatoriks**;

MD5. loomulikud isomorfismid $\lambda \colon I \boxtimes \_ \stackrel{\bullet}{\to} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ja $\rho \colon \_ \boxtimes I \stackrel{\bullet}{\to} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, mida nimetatakse **uniitoriteks**.

Need peavad rahuldama järgmisi aksioome.

MA1. Iga $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral kommuteerub allolev nn *pentagondiagramm*.

$$\begin{tikzcd}
& (A \boxtimes B) \boxtimes (C \boxtimes D) \arrow[dr, "\alpha_{A \boxtimes B, C, D}"] & \\
A \boxtimes (B \boxtimes (C \boxtimes D)) \arrow[ur, "\alpha_{A,B,C \boxtimes D}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \boxtimes \alpha_{B,C,D}"'] & & ((A \boxtimes B) \boxtimes C) \boxtimes D \\
A \boxtimes ((B \boxtimes C) \boxtimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A, B \boxtimes C, D}"'] & & (A \boxtimes (B \boxtimes C)) \boxtimes D \arrow[u, "\alpha_{A,B,C} \boxtimes \mathrm{id}_D"']
\end{tikzcd}$$

MA2. Iga $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral kommuteerub allolev nn *kolmnurkdiagramm.*

$$\begin{tikzcd} A \boxtimes (I \boxtimes B) \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A \boxtimes \lambda_B"'] & & (A \boxtimes I) \boxtimes B \arrow[dl, "\rho_A \boxtimes \mathrm{id}_B"] \\ & A \boxtimes B & \end{tikzcd}$$

Tavaliselt tähistame lühidalt $\mathcal{C} := (\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$. Märgime, et monoidset kategooriat $\mathcal{C}$ nimetatakse **rangeks**, kui loomulikud isomorfismid α, λ ja ρ on kõik loomulikud samasusteisendused.

Järgnevalt toome kaks meie jaoks kõige tähtsamat näidet monoidsetest kategooriatest. Nimelt need, mille abil saame hiljem konstrueerida polügoonide ja moodulite tensorkorrutised.

Näide B.2 (Hulkade kategooria otsekorrutamisega). Paneme tähele, et $(\mathsf{Set}; \times; \{\varnothing\}; \alpha, \lambda, \rho)$ on monoidne kategooria. Bifunktor $\times \colon \mathsf{Set} \times \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ on tavaline hulkade otsekorrutamine. Hulk $\{\varnothing\}$ on üheelemendiline hulk.[1] Iga $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ korral

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B,C} \colon\ & A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C, && (a,(b,c)) \mapsto ((a,b),c), \\ \lambda_A \colon\ & \{\varnothing\} \times A \to A, && (\varnothing, a) \mapsto a, \\ \rho_A \colon\ & A \times \{\varnothing\} \to A, && (a, \varnothing) \mapsto a. \end{aligned}$$

On väga lihtne näha, et morfismid $\alpha_{A,B,C}$, λ_A ja ρ_A on isomorfismid (st bijektiivsed kujutused) iga $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ korral. Samuti on lihtne näha, et pentagondiagramm ja kolmnurkdiagramm kommuteeruvad suvaliste $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ korral. Seega, Set on tõepoolest monoidne kategooria. $\square$

Näide B.3 (Abeli rühmade kategooria tensorkorrutamisega). Paneme tähele, et $(\mathsf{Ab}; \otimes_{\mathbb{Z}}; \mathbb{Z}; \alpha, \lambda, \mu)$ on monoidne kategooria. Näitest 2.7 (3) teame, et iga Abeli rühma võib vaadelda parempoolse $\mathbb{Z}$-moodulina. Kuna ring $\mathbb{Z}$ on kommutatiivne, siis tulenevalt märkusest 2.37 teame, et iga Abeli rühma võib vaadelda ka vasakpoolse $\mathbb{Z}$-moodulina. Järelikult saame iga $A, B \in \mathsf{Ab}$ korral leida ($\mathbb{Z}$-moodulite) tensorkorrutise $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$, mis vastavalt definitsioonile on Abeli rühm. Mistõttu $\otimes_{\mathbb{Z}} \colon \mathsf{Ab} \times \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$ on tõepoolest korrektselt defineeritud bifunktor. Ilmselt kehtib $\mathbb{Z} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ab})$ (siin on tehteks liitmine). Iga $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ab})$ korral on $\alpha_{A,B,C}$ defineeritud

$$\alpha_{A,B,C} \colon \sum_{k=1}^{k^*} a_k \otimes (b_k \otimes c_k) \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} (a_k \otimes b_k) \otimes c_k,$$

[1] Kuna kõik üheelemendilised hulgad on kategoorias Set isomorfsed, siis pole tegelikult vahet, millise neist me siia valime. Seega, konkreetsuse mõttes valime ühikobjekti ainsaks elemendiks tühja hulga $\varnothing$.

mille kohta teame lausest 3.14, et ta on Abeli rühmade isomorfism. Lõpetuseks, iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ab})$ korral

$$\lambda_A\colon \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \to A, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} z_k \otimes a_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} z_k a_k,$$

$$\mu_A\colon A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \to A, \qquad \sum_{k=1}^{k^*} a_k \otimes z_k \mapsto \sum_{k=1}^{k^*} a_k z_k.$$

Kuna ring $\mathbb{Z}$ on ühikelemendiga ring, siis näitest 3.36 teame, et $\mathbb{Z}$-moodul $A_{\mathbb{Z}}$ on püsiv, see aga ei tähenda mitte midagi muud kui, et μ_A on isomorfism. Analoogiliselt on ka λ_A isomorfism.

Mainime, et moodulite tensorkorrutis on üldiselt palju keerulisem konstruktsioon kui Abeli rühmade tensorkorrutis. Seetõttu võib Abeli rühmade tensorkorrutist defineerida märksa lihtsamalt. Nimelt, olgu A ja B Abeli rühmad. Vaatleme vaba Abeli rühma $\mathbb{Z}^{(A\times B)}$ baasiga $A \times B$. Olgu H vähim Abeli rühma $\mathbb{Z}^{(A\times B)}$ alamrühm, mis sisaldab hulka

$$\left\{ \begin{array}{c} (a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b), \\ (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2) \end{array} \,\middle|\, a_1, a_2, a \in A,\ b_1, b_2, b \in B \right\}.$$

Abeli rühmade tensorkorrutis on lihtsalt faktorrühm $\mathbb{Z}^{(A\times B)}/H$. □

Järgnevalt toome veel mõningaid näiteid monoidsetest kategooriatest näitamaks, et monoidsed kategooriad tekivad suhteliselt loomulikult mitmetes erinevates kontekstides.

Näide B.4 (Veel mõningaid monoidseid kategooriaid).

1. Kõigi väikeste kategooriate kategooria $(\mathsf{CAT}; \times; \mathbb{1}; \alpha, \lambda, \rho)$ on monoidne kategooria. Sümbol $\mathbb{1}$ tähistab kategooriat, milles on vaid üks objekt ja mille ainus morfism on selle objekti ühikmorfism ning $\times$ tähistab kategooriate otsekorrutist (definitsioon 1.10). Loomulikud teisendused α, λ ja ρ on täpselt analoogilised näites B.2 toodutega. Kategooria CAT monoidsuses veendumine on täpselt analoogiline hulkade kategooria Set monoidsuses veendumisega (näide B.2).
2. Olgu S kommutatiivne ühikelemendiga ring. Märkusest 2.37 teame, et sel juhul on kategooriad Mod_S ja ${}_S\mathsf{Mod}$ võrdsed. Kõikide S-moodulite kategooria $(\mathsf{Mod}_S; \otimes_S; S_S; \alpha, \lambda, \mu)$ on monoidne kategooria. Loomulik teisendus α on tuttav lausest 3.14, kust teame ühtlasi, et tegemist on tõepoolest isomorfismiga. Loomulik teisendus μ on tuttav lemmast 3.32. Näitest 3.36 teame, et iga S-moodul on püsiv, mis tähendab täpselt seda, et μ on loomulik isomorfism. Duaalselt saame, et iga $M \in \mathsf{Mod}_S$ korral on ka $\lambda_M\colon S \otimes_S M \to M$, $s \otimes m \mapsto sm$ isomorfism.

On selge, et käesoleva näite erijuhuna saame, et kui K on korpus, siis ka kõik vektorruumid üle K moodustavad monoidse kategooria $(\mathsf{Vect}_K; \otimes_K; K_K; \alpha, \lambda, \mu)$.
Käesoleva näite puhul tuleb toonitada, et meie eesmärk monoidse kategooria defineerimisel oli ülesehitada moodulite tensorkorrutist ning siinkohal olemegi saanud moodulite tensorkorrutise näitena kätte. Siiski pole meie töö veel lõppenud, kuna soovime monoidsete kategooriate peale konstrueerida üldise tensorkorrutise, mida me järgnevas ka teeme. Asjaolu, et kommutatiivsete ühikelemendiga ringide moodulid monoidse kategooria moodustavad, on meie jaoks praegu pigem juhuslik.

3. Olgu R kommutatiivne ring. Täpselt analoogiliselt eelmise näitega saame, et püsivate R-moodulite kategooria $(\mathsf{FMod}_R; \otimes_R; R_R; \alpha, \lambda, \mu)$ on monoidne kategooria. Ka siinkohal on asjakohane eelmise näite lõpus toodud märkus.
4. Olgu X hulk ning $x_0 \in X$. Paari (X, x_0) nimetatakse **aluspunktiga hulgaks**, elementi x_0 nimetatakse sel juhul *aluspunktiks*. Vaatleme aluspunktiga hulkade kategooriat Setp, morfismid selles kategoorias on kujul $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$, kus $f\colon X \to Y$ on hulkade kujutus, mille korral $f(x_0) = y_0$. Morfism $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ on isomorfism kategoorias Setp parajasti siis, kui f on bijektiivne.
Olgu $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Setp})$. Defineerime otsekorrutisel $X \times Y$ seose P järgnevalt:

$$(x, y)P(x', y') \iff (x = x_0 \ \vee \ y = y_0) \ \& \ (x' = x_0 \ \vee \ y' = y_0).$$

(Sümbol $\vee$ tähistab siin disjunktsiooni.) Nüüd saame hulgal $X \times Y$ defineerida ekvivalentsiseose

$$\sim := P \cup \{((x, y), (x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\},$$

st sellise ekvivalentsiseose, mille korral ekvivalentseteks loetakse sellised paarid, kus vähemalt üks element on vastav aluspunkt.
Aluspunktiga hulkade (X, x_0) ja (Y, y_0) **põhmkorrutiseks**[2] nimetatakse faktorhulka $X \divideontimes Y := (X \times Y)/\sim$. Põhmkorrutis esitub järgneval kujul

$$X \divideontimes Y = \{(X \times \{y_0\}) \cup (\{y_0\} \times Y)\} \sqcup \{\{(x, y)\} \mid x \in X \backslash \{x_0\}, y \in Y \backslash \{y_0\}\}.$$

On lihtne näha, et paar $(X \divideontimes Y; [(x_0, y_0)])$ on aluspunktiga hulk, ning kui $f\colon (X, x_0) \to (X', x_0')$ ja $g\colon (Y, y_0) \to (Y', y_0')$ on kategooria Setp

[2]Aluspunktiga hulga ingliskeelne nimetus on *pointed set* (vahel ka *based set* või *rooted set*) ning aluspunkt on *basepoint*. Põhmkorrutise ingliskeelne vaste on *smash product*. Nimetus „põhmkorrutis“ on Ülo Reimaa soovitatud.

morfismid, siis leidub morfism $f \divideontimes g\colon X \divideontimes Y \to X' \divideontimes Y'$, $[(x,y)] \mapsto [(f(x), g(y))]$. Lisaks märgime, et $\divideontimes\colon \mathsf{Setp} \times \mathsf{Setp} \to \mathsf{Setp}$ on bifunktor. Kuuik $(\mathsf{Setp}; \divideontimes; (\{\varnothing\}, \varnothing); \alpha, \lambda, \rho)$ on monoidne kategooria, kus loomulikud isomorfismid α, λ ja ρ on analoogilised näites B.2 esinenuiga.[3]

5. Vaatleme kategooriat Sup, mille objektideks on täielikud võred[4] ning morfismideks on nn **täielike sup-poolvõrede homomorfismid**, st kui $P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$, siis kujutus $f\colon P \to Q$ on kategooria Sup morfism, kui iga $A \subseteq P$ korral

$$f\left(\bigvee A\right) = \bigvee \{f(a) \mid a \in A\} =: \bigvee_{a \in A} f(a).$$

Siit näeme, et kategooria Sup morfismid on kujutused, mis muuhulgas rahuldavad võrede homomorfismide (def 7.3) tingimust 2. Lemma 7.4 tõestusest näeme, et sup-poolvõrede homomorfismid säilitavad järjestust.

Olgu $P, Q, X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$. Kujutust $\beta\colon A \times B \to X$ nimetatakse **bimorfismiks**, kui suvalise hulga $\mathfrak{K}$ ja elementide $a, a_k \in A$, $b, b_k \in B$, $k \in \mathfrak{K}$ korral kehtivad võrdused

$$\beta\left(\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} a_k, b\right) = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} \beta(a_k, b),$$

$$\beta\left(a, \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} b_k\right) = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} \beta(a, b_k).$$

Täielike sup-poolvõrede P ja Q **tensorkorrutiseks** nimetatakse paari (T, τ), kus $T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$ ja $\tau\colon P \times Q \to T$ on bimorfism, kui iga täieliku sup-poolvõre A ja bimorfismi $\beta\colon P \times Q \to A$ korral leidub parajasti üks täielike sup-poolvõrede homomorfism $f\colon T \to A$ nii, et $\beta = f \circ \tau$. Märgime, et täielike sup-poolvõrede tensorkorrutis on määratud isomorfismi täpsuseni ning edaspidi tähistame P ja Q tensorkorrutist $(P \otimes Q, \otimes)$. Lisaks ütleme, et iga element $t \in P \otimes Q$ esitub kujul

$$t = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} (p_k \otimes q_k),$$

[3]Mainime, et ka monoidse kategooria Setp ühikuks sobib suvaline üheelemendiline aluspunktiga hulk $(\{x\}, x)$, kuna kõik nad on isomorfsed objektid kategoorias Setp.

[4]Tavaliselt öeldakse, et kategooria Sup objektideks on täielikud sup-poolvõred, millest tuleb ka selle kategooria nimi. Osaliselt järjestatud hulka $P = (P; \preceq)$ nimetatakse **sup-poolvõreks**, kui igal elementide paaril $a, b \in P$ leidub ülemine raja $a \vee b$. Analoogiliselt võredega nimetatakse ka sup-poolvõre **täielikuks**, kui igal alamhulgal $A \in \wp(P)$ leidub ülemine tõke $\bigvee A$. Samas, lausest 7.9 saame, et iga täielik sup-poolvõre on täielik võre.

kus $\mathfrak{K}$ on mingi hulk, $p_k \in P$, $q_k \in Q$ ning $p \otimes q := \otimes(p,q)$. Tensorkorrutises $P \otimes Q$ kehtivad tingimused

$$\left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} p_k\right) \otimes q = \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} (p_k \otimes q) \qquad \text{ja} \qquad p \otimes \left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} q_k\right) = \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} (p \otimes q_k),$$

kus $\mathfrak{K}$ on mingi hulk ja $p, p_k \in P$, $q, q_k \in Q$. Siit peaks lugejale olema näha, et täielike sup-poolvõrede tensorkorrutisel leidub mitmeid sarnasusi moodulite tensorkorrutisega: defineeritud analoogilise universaalomaduse abil ning kehtib lausega 3.6 analoogiline tulemus (kui summamärk $\sum$ asendada ülemise raja märgiga $\bigvee$).
Märgime, et $(\mathsf{Sup}; \otimes; \mathbf{2}; \alpha, \lambda, \rho)$ on monoidne kategooria, kus $\mathbf{2} = \{0,1\}$ on täielik võre järjestusseosega $0 \preceq 1$. Olgu $P \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$. Defineerime kujutused

$$\ell_P \colon \mathbf{2} \times P \to P, \quad \begin{cases} (0,p) \mapsto \perp, \\ (1,p) \mapsto p; \end{cases}$$

$$r_P \colon P \times \mathbf{2} \to P, \quad \begin{cases} (p,0) \mapsto \perp, \\ (p,1) \mapsto p \end{cases}$$

kus $\perp$ on võre P vähim element. Loomulikud isomorfismid monoidses kategoorias Sup on defineeritud iga $P, Q, O \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$ korral

$$\begin{aligned} \alpha_{P,Q,O} \colon\ & P \otimes (Q \otimes O) \to (P \otimes Q) \otimes O, \\ & \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} p_k \otimes (q_k \otimes o_k) \mapsto \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} (p_k \otimes q_k) \otimes o_k, \\ \lambda_P \colon\ & \mathbf{2} \otimes P \to P, \qquad \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} b_k \otimes p_k \mapsto \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} \ell_P(b_k, p_k), \\ \rho_P \colon\ & P \otimes \mathbf{2} \to P, \qquad \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} p_k \otimes b_k \mapsto \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} r_P(p_k, b_k). \end{aligned}$$

Täielike poolvõrede tensorkorrutisest saab täpsemalt lugeda artiklist [47]. Märgime, et ka poolvõrede tensorkorrutisel leidub konstruktsioon, mille abil saame tensorkorrutise eksplitsiitselt konstrueerida kui teatava vaba sup-poolvõre faktorvõre, kuid siinkohal me seda ei vaata.

6. Olgu $(M; \cdot)$ monoid. Märgime, et $(M; \cdot; 1_M; \mathrm{id}_{M\times M\times M}, \mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)$ on monoidne kategooria. Kusjuures M on range monoidne kategooria. $\square$

Poolrühmobjektid ja moodulid

Edasi soovime järgida moodulite või polügoonide konstrueerimist, kuid seda abstraktsel kategooriateoreetilisel juhul. Selleks peame kõigepealt defineerima poolrühmobjekti ning seejärel mooduli üle selle poolrühmobjekti monoidses kategoorias. Poolrühmobjektidest, moodulitest ja tensorkorrutisest monoidsetes kategooriates on pikemalt kirjutatud Ülo Reimaa dissertatsioonis [48] (ptk 5).

Definitsioon B.5. Olgu $(\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$ monoidne kategooria. Paari $(S; \mu)$ nimetatakse **poolrühmobjektiks** monoidses kategoorias $\mathcal{C}$ kui $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $\mu \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(S \boxtimes S, S)$ on sellised, et muudavad alloleva diagrammi kommutatiivseks.

$$\begin{tikzcd}
(S \boxtimes S) \boxtimes S \arrow[d, "\mu \boxtimes \mathrm{id}_S"'] & & S \boxtimes (S \boxtimes S) \arrow[ll, "\alpha_{S,S,S}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_S \boxtimes \mu"] \\
S \boxtimes S \arrow[r, "\mu"'] & S & S \boxtimes S \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

Tavaliselt tähistame poolrühmobjekti lühidalt $S := (S; \mu)$. Morfismi μ nimetatakse poolrühmobjekti $(S; \mu)$ **tehteks**. Märgime, et igas monoidses kategoorias leidub vähemalt üks poolrühmobjekt, milleks on ühikobjekt I koos morfismiga λ_I või morfismiga ρ_I. Lisaks märgime, et kui $(S; \mu)$ on poolrühmobjekt, siis ka $(S \boxtimes S; \mu \boxtimes \mu)$ on poolrühmobjekt.

Nüüd kui meil on defineeritud poolrühmobjektid, saame defineerida mooduli mõiste üle poolrühmobjekti.

Definitsioon B.6. Olgu $(\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$ monoidne kategooria ning $(S; \mu)$ poolrühmobjekt temas. **Parempoolseks S-mooduliks** nimetatakse paari $A_S = (A; \mathfrak{r})$, kus $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $\mathfrak{r} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A \boxtimes S, A)$ on sellised, et allolev diagramm on kommutatiivne.

$$\begin{tikzcd}
(A \boxtimes S) \boxtimes S \arrow[d, "\mathfrak{r} \boxtimes \mathrm{id}_S"'] & & A \boxtimes (S \boxtimes S) \arrow[ll, "\alpha_{A,S,S}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \boxtimes \mu"] \\
A \boxtimes S \arrow[r, "\mathfrak{r}"'] & A & A \boxtimes S \arrow[l, "\mathfrak{r}"]
\end{tikzcd}$$

S-mooduli $(A; \mathfrak{r})$ korral nimetame morfismi $\mathfrak{r}$ mooduli A_S **S-toimeks**.

Analoogiliselt defineeritakse ka **vasakpoolne S-moodul** kui paar ${}_SA = (A; \mathfrak{l})$, kus $\mathfrak{l} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(S \boxtimes A, A)$ on morfism, mis kommuteerib allolevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
(S \boxtimes S) \boxtimes A \arrow[d, "\mu \boxtimes \mathrm{id}_A"'] & & S \boxtimes (S \boxtimes A) \arrow[ll, "\alpha_{S,S,A}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_S \boxtimes \mathfrak{l}"] \\
S \boxtimes A \arrow[r, "\mathfrak{l}"'] & A & S \boxtimes A \arrow[l, "\mathfrak{l}"]
\end{tikzcd}$$

Lisaks, kui S ja T on poolrühmobjektid monoidses kategoorias $\mathcal{C}$, siis kolmikut ${}_SA_T = (A; \mathfrak{l}, \mathfrak{r})$ nimetatakse **(S, T)-bimooduliks**, kui ${}_SA = (A; \mathfrak{l})$ on vasakpoolne S-moodul, $A_T = (A; \mathfrak{r})$ on parempoolne T-moodul ning allolev nn toimete *kooskõladiagramm* kommuteerub.

$$\begin{tikzcd}
(S \boxtimes A) \boxtimes T \arrow[d, "\mathfrak{l} \boxtimes \mathrm{id}_T"'] & & S \boxtimes (A \boxtimes T) \arrow[ll, "\alpha_{S,A,T}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_S \boxtimes \mathfrak{r}"] \\
A \boxtimes T \arrow[r, "\mathfrak{r}"'] & A & S \boxtimes A \arrow[l, "\mathfrak{l}"]
\end{tikzcd}$$

Paneme tähele, et kui $(S; \mu)$ on poolrühmobjekt monoidses kategoorias $\mathcal{C}$, siis $(S; \mu, \mu)$ on alati (S, S)-bimoodul. Lisaks, kuna $(I; \lambda_I)$ on alati poolrühmobjekt monoidses kategoorias $\mathcal{C}$, siis on lihtne näha, et iga objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ on vaadeldav (I, I)-bimoodulina $(A; \lambda_A, \rho_A)$.

Järgnevalt näitame, et monoidne korrutamine $\boxtimes$ säilitab mooduli struktuuri.

Lause B.7. *Olgu $(\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$ monoidne kategooria ja $(S; \mu)$ poolrühmobjekt temas. Lisaks olgu $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $(B; \mathfrak{r}_B)$ parempoolne S-moodul. Objekt $A \boxtimes B$ on parempoolne S-moodul (toimega $(\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S}$).*

TÕESTUS. Kehtigu lause eeldused. Vaatleme morfismi

$$\gamma := (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S} \colon (A \boxtimes B) \boxtimes S \to A \boxtimes (B \boxtimes S) \to A \boxtimes B.$$

Näitame, et morfism γ rahuldab definitsioonis B.6 esitatud tingimusi. Selleks arvutame

$$\begin{aligned}
\gamma \circ (\mathrm{id}_{A \boxtimes B} \boxtimes \mu) &= (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S} \circ (\mathrm{id}_{A \boxtimes B} \boxtimes \mu) \\
&= (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S} \circ ((\mathrm{id}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \boxtimes \mu) && (\boxtimes \text{ bifunktor}) \\
&= (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes (\mathrm{id}_B \boxtimes \mu)) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S \boxtimes S} && (\alpha \text{ loomulik}) \\
&= ((\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A) \boxtimes (\mathfrak{r}_B \circ (\mathrm{id}_B \boxtimes \mu))) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S \boxtimes S} && (\boxtimes \text{ bifunktor}) \\
&= (\mathrm{id}_A \boxtimes (\mathfrak{r}_B \circ (\mathfrak{r}_B \boxtimes \mathrm{id}_S)) \circ \alpha_{B,S,S}) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S \boxtimes S} && ((B; \mathfrak{r}_B) \text{ on } S\text{-moodul}) \\
&= (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes (\mathfrak{r}_B \boxtimes \mathrm{id}_S)) \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes \alpha_{B,S,S}) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S \boxtimes S} && (\boxtimes \text{ bifunktor})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S} \circ ((\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \boxtimes \mathrm{id}_S) \circ \alpha_{A,B\boxtimes S,S} \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes \alpha_{B,S,S}) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S\boxtimes S} \\
&\hfill (\alpha \text{ loomulik iso.}) \\
&= \gamma \circ ((\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \boxtimes \mathrm{id}_S) \circ \alpha_{A,B\boxtimes S,S} \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes \alpha_{B,S,S}) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S\boxtimes S} && (\gamma \text{ def}) \\
&= \gamma \circ ((\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \boxtimes \mathrm{id}_S) \circ (\alpha_{A,B,S} \boxtimes \mathrm{id}_S)^{-1} \circ \alpha_{A\boxtimes B,S,S} && (\text{def B.1 MA1.}) \\
&= \gamma \circ ((\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \boxtimes \mathrm{id}_S) \circ (\alpha^{-1}_{A,B,S} \boxtimes \mathrm{id}_S) \circ \alpha_{A\boxtimes B,S,S} && (\text{lause } 1.16) \\
&= \gamma \circ (((\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{r}_B) \circ \alpha^{-1}_{A,B,S}) \boxtimes \mathrm{id}_S) \circ \alpha_{A\boxtimes B,S,S} && (\boxtimes \text{ bifunktor}) \\
&= \gamma \circ (\gamma \boxtimes \mathrm{id}_S) \circ \alpha_{A\boxtimes B,S,S}. && (\gamma \text{ def})
\end{aligned}
$$

Eelnevas arvutuskäigus kasutatud morfismid on toodud alloleval diagrammil. Märgime, et me pidime tõestama alloleva diagrammi välise ristküliku kommutatiivsust ning seda ka tegime.

$$
\begin{tikzcd}
((A\boxtimes B)\boxtimes S)\boxtimes S \arrow[dddd, "\gamma\boxtimes \mathrm{id}_S"'] \arrow[dr, "\alpha^{-1}_{A,B,S}\boxtimes \mathrm{id}_S"] & & & & & & (A\boxtimes B)\boxtimes (S\boxtimes S) \arrow[llllll, "\alpha_{A\boxtimes B,S,S}"'] \arrow[dl, "\alpha^{-1}_{A,B,S\boxtimes S}"'] \arrow[dddd, "\mathrm{id}_{A\boxtimes B}\boxtimes \mu"] \\
 & (A\boxtimes (B\boxtimes S))\boxtimes S \arrow[dddl, "(\mathrm{id}_A\boxtimes \mathfrak{r}_B)\boxtimes \mathrm{id}_S"] & & & & A\boxtimes (B\boxtimes (S\boxtimes S)) \arrow[dll, "\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{B,S,S}"'] \arrow[ddl, "\mathrm{id}_A\boxtimes(\mathrm{id}_B\boxtimes \mu)"] & \\
 & & & A\boxtimes ((B\boxtimes S)\boxtimes S) \arrow[ull, "\alpha_{A,B\boxtimes S,S}"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_A\boxtimes(\mathfrak{r}_B\boxtimes \mathrm{id}_S)"] & & & \\
 & & & & & & \\
(A\boxtimes B)\boxtimes S \arrow[rr, "\alpha^{-1}_{A,B,S}"'] \arrow[rrr, bend right, "\gamma"'] & & A\boxtimes (B\boxtimes S) \arrow[r, "\mathrm{id}_A\boxtimes \mathfrak{r}_B"'] & A\boxtimes B & A\boxtimes (B\boxtimes S) \arrow[l, "\mathrm{id}_A\boxtimes \mathfrak{r}_B"] & & (A\boxtimes B)\boxtimes S \arrow[ll, "\alpha^{-1}_{A,B,S}"] \arrow[lll, bend left, "\gamma"]
\end{tikzcd}
$$

Kokkuvõttes on näha, et $(A\boxtimes B;\gamma)$ on tõepoolest parempoolne S-moodul.■

Analoogiliselt eelmise lausega on võimalik tõestada järgnev duaalne lause.

Lause B.8. *Olgu $(\mathcal{C};\boxtimes;I;\alpha,\lambda,\rho)$ monoidne kategooria ja $(S;\mu)$ poolrühmobjekt temas. Lisaks olgu $A\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ja $(B;\mathfrak{l}_B)$ vasakpoolne S-moodul. Objekt $B\boxtimes A$ on vasakpoolne S-moodul (toimega $(\mathfrak{l}_B\boxtimes \mathrm{id}_A)\circ\alpha_{S,B,A}$).*

Olgu $\mathcal{C}$ monoidne kategooria, S poolrühmobjekt kategoorias $\mathcal{C}$ ning A ja B vasakpoolsed (parempoolsed) S-moodulid. Kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $f\colon A\to B$ nimetatakse **S-moodulite homomorfismiks** kui allolev vasakpoolne (parempoolne) diagramm kommuteerub.

$$\begin{tikzcd} S \boxtimes A \arrow[r, "\mathrm{id}_S \boxtimes f"] \arrow[d, "\mathfrak{l}_A"'] & S \boxtimes B \arrow[d, "\mathfrak{l}_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Joonis B.1: vasakpoolsete S-moodulite homomorfism.

$$\begin{tikzcd} A \boxtimes S \arrow[r, "f \boxtimes \mathrm{id}_S"] \arrow[d, "\mathfrak{r}_A"'] & B \boxtimes S \arrow[d, "\mathfrak{r}_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Joonis B.2: parempoolsete S-moodulite homomorfism.

Kui S ja T on poolrühmobjektid monoidses kategoorias $\mathcal{C}$ ning ${}_SA_T$ ja ${}_SB_T$ on (S,T)-bimoodulid, siis kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $f\colon A \to B$ nimetatakse **(S,T)-bimoodulite homomorfismiks** kui ta on nii vasakpoolsete S- kui ka parempoolsete T-moodulite homomorfism. On lihtne näha, et kui A on (bi)-moodul, siis kategooria $\mathcal{C}$ ühikmorfism id_A on (bi)moodulite homomorfism.

Olgu S ja T poolrühmobjektid monoidses kategoorias $\mathcal{C}$. Tulenevalt eelnevast võime rääkida nii vasakpoolsetest S-moodulite, parempoolsetest T-moodulite ja (S,T)-bimoodulite kategooriatest, mille objektid on vastavad (bi)moodulid; morfismideks on vastavad homomorfismid; ühikmorfismid on samad, mis kategoorias $\mathcal{C}$, ning kompositsioon on samuti sama kategoorias $\mathcal{C}$ olevaga. Neid kategooriaid tähistame sarnaselt „tavaliste" moodulite juhule vastavalt ${}_S\mathsf{Mod}$, Mod_T ja ${}_S\mathsf{Mod}_T$.

Nüüdseks on lugeja loodetavasti märganud, et eelnevalt käisime lihtsalt läbi „tavaliste" üle ühikelemendita ringide vaadeldavate moodulite või üle poolrühmade vaadeldavate polügoonide konstruktsiooni üldisel – kategooriateoreetilisel – juhul. (Kui see pole veel selge, siis võib vaadata käesoleva sektsiooni lõpus olevaid näiteid.) Samas, „klassikaliselt" ehitatakse moodulid ühikelemendiga ringide peale ning polügoonid üle monoidide. Selline konstruktsioon on ka kategooriateoreetiliselt võimalik ja isegi rohkem levinud just toodud konstruktsioonist. „Ühikelemendiga" konstruktsiooniks vajame aga monoidobjekti mõistet, mille järgnevalt defineerime.

Definitsioon B.9. Olgu $(\mathcal{C};\boxtimes;I;\alpha,\lambda,\rho)$ monoidne kategooria. Kolmikut $(M;\mu,\eta)$ nimetatakse **monoidobjektiks** kategoorias $\mathcal{C}$, kui $(M;\mu)$ on poolrühmobjekt ja $\eta \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(I,M)$ on selline morfism, et allolev diagramm kommuteerub.

$$\begin{tikzcd} I \boxtimes M \arrow[r, "\eta \boxtimes \mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "\lambda_M"'] & M \boxtimes M \arrow[d, "\mu"] & M \boxtimes I \arrow[l, "\mathrm{id}_M \boxtimes \eta"'] \arrow[dl, "\rho_M"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Nagu nüüdseks juba tavaks on saanud, siis ka monoidobjektide korral tähistame tavaliselt lühemalt $M := (M; \mu, \eta)$. Morfismi η nimetatakse monoidobjekti $(M; \mu, \eta)$ **ühikumorfismiks**.

Olgu M monoidobjekt monoidses kategoorias $\mathcal{C}$. **Vasakpoolseks („klassikaliseks“)** M**-mooduliks** nimetatakse paari $(A; \mathfrak{l}_A)$, mis on vasakpoolne M-moodul, kui vaatleme monoidobjekti M poolrühmobjektina $(M; \mu)$, ning mille korral allolev diagramm vasakpoolsel joonisel kommuteerub. Analoogiliselt saab vaadelda **parempoolseid („klassikalisi“)** M**-mooduleid** $(B; \mathfrak{r}_B)$, mis peavad lisaks parempoolseks M-mooduliks olemisele poolrühmobjekti mõttes, kommuteerima digrammi parempoolsel joonisel.

$$\begin{tikzcd} I \boxtimes A \arrow[rr, "\eta \boxtimes \mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & & M \boxtimes A \arrow[dl, "\mathfrak{l}_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Joonis B.3: vasakpoolsete „klassikaliste“ M-moodulite *ühikutingimus.*

$$\begin{tikzcd} A \boxtimes I \arrow[rr, "\mathrm{id}_A \boxtimes \eta"] \arrow[dr, "\rho_A"'] & & A \boxtimes M \arrow[dl, "\mathfrak{r}_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Joonis B.4: parempoolsete „klassikaliste“ M-moodulite *ühikutingimus.*

Märgime, et üle monoidobjektide vaadeldavate moodulite homomorfismid on täpselt samad kui üle poolrühmobjektide vaadeldavate moodulite homomorfismid. Kui M ja N on monoidobjektid kategoorias $\mathcal{C}$, siis „klassikaliste“ vasak-, parempoolsete S-moodulite ja (S, T)-bimoodulite kategooriaid tähistame vastavalt ${}_M\mathsf{Mod}^1$, Mod^1_M ja ${}_M\mathsf{Mod}^1_N$. Kusjuures kehtivad kategooriate seosed ${}_M\mathsf{Mod}^1 \subseteq_{\mathrm{T}} {}_M\mathsf{Mod}$, $\mathsf{Mod}^1_M \subseteq_{\mathrm{T}} \mathsf{Mod}_M$ ja ${}_M\mathsf{Mod}^1_N \subseteq_{\mathrm{T}} {}_M\mathsf{Mod}_N$.

Nüüd toome kaks näidet, milles näeme, et monoidsetes kategooriates Set ja Ab on poolrühmobjektid ja moodulid vastavalt poolrühmad ja polügoonid ning ringid ja moodulid.

Näide B.10 (Poolrühmobjektid ja moodulid hulkade kategoorias). Vaatleme näitest B.2 tuttavat monoidset kategooriat $(\mathsf{Set}; \times; \{\varnothing\}; \alpha, \lambda, \rho)$. Paneme tähele, et siin on poolrühmobjektideks tavalised poolrühmad $(P; \cdot)$. Poolrühma P tehte kujutus $\cdot \colon P \times P \to P$ rahuldab definitsioonis B.5 toodud nõudeid poolrühmobjekti morfismile (diagramm definitsioonis B.5 annab täpselt poolrühma P tehte assotsiatiivsuse).

Olgu P ja Q poolrühmad. Lihtne on näha, et vasak-, parempoolsed P-moodulid ja (P, Q)-bimoodulid on täpselt vasak-, parempoolsed P-polügoonid ja (P, Q)-bipolügoonid.

Nüüd vaatleme monoidobjekti $(M; \mu, \eta)$ monoidses kategoorias Set. Paneme tähele, et ühikumorfism annab monoidi ühikelemendi. Nimelt, tähistades $1 := \eta(\varnothing) \in M$, saame, et iga $m \in M$ korral

$$1 \cdot m = \eta(\varnothing) \cdot m = \mu(\eta(\varnothing), m) = (\mu \circ (\eta \times \mathrm{id}_M))(\varnothing, m) = \lambda_M(\varnothing, m) = m.$$

Analoogiliselt saame, et $m \cdot 1 = m$. Seega monoidobjektid monoidses kategoorias Set on tavalised algebrast tuntud monoidid.

Olgu M monoid(objekt). Vaatleme „klassikalist“ parempoolset M-moodulit $(A; \mathfrak{r}_A)$. Eelnevast teame, et A on M-polügoon, kuid peame kontrollima, kas kehtib ka ühikelemendiga korrutamise aksioom. Olgu $a \in A$, siis

$$a1 = \mathfrak{r}_A(a, 1) = \mathfrak{r}_A(a, \eta(\varnothing)) = (\mathfrak{r}_A \circ (\mathrm{id}_A \times \eta))(a, \varnothing) = \rho_A(a, \varnothing) = a.$$

Seega kehtib tingimus (3.18) nagu soovitud ning siinkohal on tõesti tegemist „klassikaliste“ M-polügoonidega. □

Näide B.11 (Poolrühmobjektid ja moodulid Abeli rühmade kat-s). Vaatleme näitest B.3 tuttavat Abeli rühmade monoidset kategooriat $(\mathsf{Ab}; \otimes_{\mathbb{Z}}; \mathbb{Z}; \alpha, \lambda, \mu)$. Paneme tähele, et kategoorias Ab on poolrühmobjektideks parajasti ringid (ühikelemendita). Nimelt, olgu $(R; \nu)$ poolrühmobjekt kategoorias Ab, siis on R Abeli rühm. Lisaks saame Abeli rühmas R loomulikul viisil defineerida korrutamise: $R \times R \to R$, $rr' := \nu(r \otimes r')$. Näitame, et see korrutamine on assotsiatiivne, selleks olgu $r, r', r'' \in R$ ning näeme, et

$$\begin{aligned}(rr')r'' &= \nu(rr' \otimes r'') = \nu(\nu(r \otimes r') \otimes r'') = (\nu \circ (\nu \otimes \mathrm{id}_R))((r \otimes r') \otimes r'')\\ &= (\nu \circ (\nu \otimes \mathrm{id}_R) \circ \alpha_{R,R,R})(r \otimes (r' \otimes r''))\\ &= (\nu \circ (\mathrm{id}_R \otimes \nu))(r \otimes (r' \otimes r'')) = \nu(r \otimes r'r'') = r(r'r'').\end{aligned}$$

Veendume, et kehtib ka distributiivsus. Olgu $r, s, t \in R$, siis

$$(r+s)t = \nu((r+s) \otimes t) = \nu(r \otimes t + s \otimes t) = \nu(r \otimes t) + \nu(s \otimes t) = rt + st$$

analoogiliselt ka $t(r+s) = tr + ts$, mistõttu näeme, et distributiivsus kehtib poolrühmobjektis R. Seega poolrühmobjekt $(R; \nu)$ on tõepoolest ring.

Märkame, et R-moodulid üle poolrühmobjekti kategoorias Ab on täpselt tavalised R-moodulid. Nimelt, olgu $(M, \mathfrak{r}_A)$ parempoolne R-moodul üle poolrühmobjekti R kategoorias Ab. Vastavalt definitsioonile on M Abeli rühm, mooduli aksioomid M2 ja M3 kehtivad analoogiliselt eelpool näidatud distributiivsusega ning aksioom M4 kehtib tulenevalt diagrammi kommutatiivsusest definitsioonis B.6. On selge, et ka vasakpoolsed moodulid ja bimoodulid kategoorias Ab on lihtsalt tavalised vasakpoolsed moodulid ja bimoodulid üle ringi(de).

Lisaks näeme, et monoidobjektid kategoorias Ab on tavalised ühikelemendiga ringid. Olgu $(S; \nu, \eta)$ monoidobjekt kategoorias Ab. Tähistame $1_S := \eta(1) \in S$, kus 1 on täisarv üks. Suvalise $s \in S$ korral

$$s1_S = \nu(s \otimes 1_S) = \nu(s \otimes \eta(1)) = (\nu \circ (\mathrm{id}_S \otimes \eta))(s \otimes 1) = \rho_S(s \otimes 1) = s1 = s,$$

analoogiliselt kehtib ka $1_S s = s$. Seega S on tõepoolest ühikelemendiga ring. Paneme tähele, et, tulenevalt eelnevast käesolevas näites ja vastavast osast eelmises näites, on vasak-, parempoolsed S-moodulid ja (S, T)-bimoodulid kategoorias Ab täpselt vastavad „klassikalised“ (bi)moodulid.

Märgime veel, et kui monoidobjekt K kategoorias Ab on korpus (st igal nullelemendist erineval elemendil leidub pöördelement, kusjuures nullelement on $0_K := \eta(0)$), siis on kõivõimalikud K-moodulid parajasti kõikvõimalikud vektorruumid üle korpuse K. □

Järgnevalt toome veel mõned näited poolrühmobjektidest ja moodulitest varasemalt vaadeldud monoidsetes kategooriates.

Näide B.12 (Veel poolrühmobjekte ja mooduleid). 1. Meenutame aluspunktiga hulkade monoidset kategooriat $(\mathsf{Setp}; ⨳; (\{\varnothing\}, \varnothing); \alpha, \lambda, \rho)$ näitest B.4 (4). Märgime, et poolrühmobjektid monoidses kategoorias Setp on parajasti nullelemendiga (multiplikatiivsed) poolrühmad[5]. Tõepoolest, olgu $((S, 0); \mu)$ poolrühmobjekt kategoorias Setp, siis iga $s \in S$ korral

$$s0 = \mu([(s, 0)]) = \mu([(0, 0)]) = 0 = \mu([(0, s)]) = 0s.$$

Märgime, et analoogiliselt eelnevaga on $(S, 0)$-moodulid monoidses kategoorias Setp parajasti *nullelemendiga S-polügoonid*, st kui $((M, 0_M); \mathfrak{r}_M)$ on (parempoolne) $(S, 0)$-moodul kategoorias Setp, siis iga $s \in S$ korral

$$0_M s = \mathfrak{r}_M([(0_M, s)]) = 0_M$$

ning analoogiliselt $s0_M = 0_M$.

2. Olgu R kommutatiivne ring. Meenutame näitest B.4 (3) tuttavat monoidset kategooriat $(\mathsf{FMod}_R; \otimes_R; R_R; \alpha, \lambda, \mu)$. Paneme tähele, et poolrühmobjektid kategoorias FMod_R on parajasti R-algebrad. Märgime, et kolmikut $(M_R; +, \cdot_R, \cdot)$ nimetatakse (parempoolseks) **R-algebraks**, kui $(M_R; +, \cdot_R)$ on (parempoolne) R-moodul ja $(M_R; +, \cdot)$ on ring ning iga $m, m' \in M$ ja $r, r' \in R$ korral

$$(m \cdot_R r) \cdot (m' \cdot_R r') = (m \cdot m') \cdot_R (rr')$$

(vrd def 7.1 raamatus [11]). Meenutame, et iga poolrühmobjekt on moodul üle iseenda. Seega võime vaadelda siinkohal kategooriat Alg_R,

[5]Poolrühma $(S; \cdot)$ nimetatakse **nullelemendiga poolrühmaks**, kui leidub element $0 \in S$ nii, et

$$0 \cdot s = 0 = s \cdot 0$$

iga $s \in S$ korral. Elementi 0 nimetatakse sel juhul poolrühma S **nullelemendiks**.

mille objektideks on R-algebrad (poolrühmobjektid) ning morfismideks on R-algebrate homomorfismid, kus R-algebraid vaatleme moodulitena üle iseenda.

3. Vaatleme näitest B.4 (5) tuttavat monoidset kategooriat $(\mathsf{Sup}; \otimes; \mathbf{2}; \alpha, \lambda, \rho)$. Paneme tähele, et poolrühmobjektid monoidses kategoorias Sup on täpselt kvantaalid ning monoidobjektid on ühikuga kvantaalid. Järgmiseks vaatleme mooduleid üle kvantaalide, mida on uuritud näiteks artiklis [37]. Olgu $(Q; \mu)$, $\mu\colon q \otimes q' \mapsto q * q'$, poolrühmobjekt (kvantaal) monoidses kategoorias Sup ning olgu $(M; \mathfrak{r}_M)$, $\mathfrak{r}_M\colon m \otimes q \mapsto m \star q$ parempoolne Q-moodul (def B.6). Sel juhul on M täielik võre ja iga $q, q' \in Q$ ja $m \in M$ korral

$$\begin{aligned} m \star (q * q') &= m \star \mu(q, q') = \mathfrak{r}_M(m, \mu(q, q')) \\ &= (\mathfrak{r}_M \circ (\mathrm{id}_M \otimes \mu))(m, (q, q')) \\ &= (\mathfrak{r}_M \circ (\mathfrak{r}_M \otimes \mathrm{id}_Q) \circ \alpha_{M,Q,Q})(m, (q, q')) \\ &= (\mathfrak{r}_M \circ (\mathfrak{r}_M \otimes \mathrm{id}_Q))((m, q), q') = \mathfrak{r}_M(m \star q, q') \\ &= (m \star q) \star q'. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Lisaks olgu $\mathfrak{K}$ ja $\mathfrak{H}$ hulgad; $a_k \in M$, $k \in \mathfrak{K}$, $p_h \in Q$, $h \in \mathfrak{H}$, ning $m \in M$ ja $q \in Q$. Nüüd,

$$\begin{aligned} m \star \left(\bigvee_{h \in \mathfrak{H}} p_h \right) &= \mathfrak{r}_M \left(m \otimes \bigvee_{h \in \mathfrak{H}} p_h \right) = \mathfrak{r}_M \left(\bigvee_{h \in \mathfrak{H}} (m \otimes p_h) \right) \\ &= \bigvee_{h \in \mathfrak{H}} \mathfrak{r}_M(m, p_h) = \bigvee_{h \in \mathfrak{H}} (m \star p_h); \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\left(\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} a_k \right) \star q = \mathfrak{r}_M \left(\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} (a_k \otimes q) \right) = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} (a_k \star q). \tag{B.3}$$

Duaalselt saame, et iga vasakpoolne Q-moodul N rahuldab tingimusi

$$(q * q') \star n = q \star (q' \star n),$$
$$\left(\bigvee_{h \in \mathfrak{H}} p_h \right) \star n = \bigvee_{h \in \mathfrak{H}} (p_h \star n), \qquad q \star \left(\bigvee_{k \in \mathfrak{K}} a_k \right) = \bigvee_{k \in \mathfrak{K}} (q \star a_k).$$

Lisaks näeme, et kui P ja Q on poolrühmobjektid (kvantaalid) kategoorias Sup, siis iga (P, Q)-bimoodul A on vasakpoolne P-moodul, parempoolne Q-moodul ning iga $p \in P$, $a \in A$ ja $q \in Q$ korral kehtib

$$(p \star_P a) \star_Q q = p \star_P (a \star_Q q).$$

Märgime, et üldiselt piisab (parempoolse) mooduli M_Q üle kvantaali Q defineerimiseks, kui nõuda, et ta oleks täielik võre ning leidub kujutus $\star\colon M \times Q \to M$, mis rahuldab eelpool tõestatud tingimusi.[6] $\square$

Moodulite tensorkorrutis

Nüüdseks oleme kategooriateoreetilises kontekstis konstrueerinud (bi)moodulid üle poolrühmobjekti(de). Seega on meil tarvis veel vaid defineerida nende moodulite tensorkorrutis. Selleks on meil aga vaja defineerida veel kovõrdsustaja mõiste. Mainime, et kovõrdsustaja on kategooriateoorias laialt tuntud kopiiri (def 4.10 raamatus [4]) erijuht, kuid meie siinkohal nii kaugele ei lähe.

Definitsioon B.13. Olgu $\mathcal{A}$ kategooria ning $f, g\colon A \to B$ morfismid kategoorias $\mathcal{A}$. Morfismide f ja g **kovõrdsustajaks** $\mathrm{Coeq}(f,g)$ nimetatakse paari (E, e), mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $E \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja $e \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, E)$;
2. $e \circ f = e \circ g$;
3. *kovõrdsustaja universaalomadus:* iga kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $x\colon B \to X$ korral, mis rahuldab tingimust $x \circ f = x \circ g$, leidub üheselt määratud morfism $\overline{x}\colon E \to X$ nii, et $x = \overline{x} \circ e$.

Kovõrdsustaja universaalomadust illustreerib allolev kommutatiivne diagramm.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "x"'] & & E \arrow[dl, dashed, "\overline{x}"] \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

Märgime, et kui (E, e) on kovõrdsustaja, siis objekti E nimetame tihti lihtsalt kovõrdsustajaks ning morfismi e *kovõrdsustajamorfismiks*. Järgnevalt toome ära kaks lihtsat kovõrdsustajate omadust.

[6] Lugejas intuitsiooni tekitamiseks toome siinkohal välja mooduli üle kvantaali sarnasused mooduli üle ringi definitsiooniga 2.6. Nimelt, kategoorias Sup on ülemise raja leidmise tehtel $\bigvee$ mitmeid sarnasusi liitmisega. Olgu R ring ja Q kvantaal. Definitsioonis 2.6 nõutakse, et R-moodul oleks Abeli rühm, sellele vastab nõue, et Q-moodul on täielik võre. R-mooduli tingimusele M4 vastab tingimus (B.1) ning distributiivsuse tingimustele M2 ja M3 vastavad tingimused (B.3) ja (B.2).

Lause B.14 (laused 2.6 ja 2.7 raamatus [4]). *Olgu $\mathcal{A}$ kategooria ning $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$. Kui morfismide paaril $f, g\colon A \to B$ leidub kovõrdsustaja, siis ta on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud. Kui paar (E, e) on mingite morfismide kovõrdsustaja, siis e on epimorfism.*

Nüüd oleme lõpuks valmis defineerima moodulite tensorkorrutise monoidses kategoorias.

Definitsioon B.15. Olgu $(\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$ monoidne kategooria ning $(S; \mu)$ poolrühmobjekt temas. Olgu $(A; \mathfrak{r}_A) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ ja $(B; \mathfrak{l}_B) \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$. S-moodulite A_S ja ${}_SB$ **tensorkorrutiseks** $(A \otimes_S B; \otimes_{A,B})$ nimetatakse morfismide paari

$$\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B, (\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,S,B}\colon\ A \boxtimes (S \boxtimes B) \to A \boxtimes B$$

kovõrdsustajat kategoorias $\mathcal{C}$.

Eelnevat tensorkorrutise definitsiooni saab kokku võtta järgnevalt: iga kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $\beta\colon A \boxtimes B \to X$ korral, mis kommuteerib alloleva diagrammi pidevjoonega joonistatud nooltega osa, leidub morfism $\overline{\beta}$ nii, et kogu allolev diagramm on kommutatiivne.

$$\begin{tikzcd}
A \boxtimes (S \boxtimes B) \arrow[rr, "\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B"] \arrow[dr, "\alpha_{A,S,B}"'] & & A \boxtimes B \arrow[rr, "\otimes_{A,B}"] \arrow[ddr, "\beta"'] & & A \otimes_S B \arrow[ddl, dashed, "\overline{\beta}"] \\
& (A \boxtimes S) \boxtimes B \arrow[ur, "\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B"'] & & & \\
& & & X &
\end{tikzcd}$$

Joonis B.5

Paneme tähele, et ülaloleva diagrammi parem pool on täpselt moodulite ja polügoonide tensorkorrutise universaalomaduse kolmnurkdiagramm. Märgime, et tavaliselt nimetame objekti $A \otimes_S B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *tensorkorrutiseks* ning morfismi $\otimes_{A,B}\colon A \boxtimes B \to A \otimes_S B$ *tensorepimorfismiks* ($\otimes_{A,B}$ on epimorfism tulenevalt lausest B.14). Lisaks märgime, et tensorkorrutise definitsioonis B.15 ei ole kuskil öeldud, et suvalises monoidses kategoorias suvalise poolrühmobjekti suvalistel moodulitel leidub tensorkorrutis, seda ei pruugi olla. Küll aga leidub tensorkorrutis alati, kui on teada, et monoidses kategoorias $\mathcal{C}$ leiduvad (binaarsed) kovõrdsustajad. Siinkohal me ei hakka täpsemalt uurima, millal kategoorias leiduvad kovõrdsustajad, kuid mainime, et meie poolt edaspidi vaadatud näidetes on kõik monoidsed kategooriad just sellise omadusega.

Siinkohal on asjakohane ilmselt veel üks hoiatus, järgnevalt on tõestatud mõned tulemused, kasutades universaalomadusi ja kommutatiivseid diagramme, nagu kategooriateoorias väga levinud on. Nad võivad esmapilgul tunduda väga abstraktsed, kuid on toodud demonstreerimaks, kuidas on kategooriateoreetiliste meetoditega võimalik tõestada juba tõestatud algebraliste tulemustega analoogilisi tulemusi.

Kirjutame nüüd paar sõna moodulite homomorfismide tensorkorrutisest. Juhime lugeja tähelepanu asjaolule, et allolev on analoogiline paragrahvi 3.3 alguses toodud moodulite homomorfismide tensorkorrutise konstruktsiooniga. Olgu $\mathcal{C}$ monoidne kategooria ja S poolrühmobjekt temas. Lisaks olgu $A, A' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ ja $B, B' \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$ sellised, et leiduvad tensorkorrutised $A \otimes_S B$ ja $A' \otimes_S B'$, ning $f\colon A \to A'$ ja $g\colon B \to B'$ vastavate S-moodulite homomorfismid. Vaatleme alloleva diagrammi pidevjoonega joonistatud nooltega osa.

$$\begin{tikzcd}
A \boxtimes (S \boxtimes B) \arrow[r, shift left, "(\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,S,B}"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B"'] & A \boxtimes B \arrow[r, "f \boxtimes g"] \arrow[d, "\otimes_{A,B}"'] & A' \boxtimes B' \arrow[d, "\otimes_{A',B'}"] \\
& A \otimes_S B \arrow[r, dashed, "f \otimes g"'] & A' \otimes_S B'
\end{tikzcd}$$

Kasutades asjaolusid, et $\otimes_{A,B}$ ja $\otimes_{A',B'}$ on tensorepimorfismid ning f ja g on S-moodulite homomorfismid, paneme tähele, et kehtib

$$\begin{aligned}
&(\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)) \circ ((\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,S,B}) \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((f \boxtimes g) \circ (\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B)) \circ \alpha_{A,S,B} && \text{(def 1.1 A2.)} \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((f \circ \mathfrak{r}_A) \boxtimes (g \circ \mathrm{id}_B)) \circ \alpha_{A,S,B} && (\boxtimes \text{ bifunktor}) \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((f \circ \mathfrak{r}_A) \boxtimes (\mathrm{id}_{B'} \circ g)) \circ \alpha_{A,S,B} && \text{(def 1.1 A3.)} \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((\mathfrak{r}_{A'} \circ (f \boxtimes \mathrm{id}_S)) \boxtimes (\mathrm{id}_{B'} \circ g)) \circ \alpha_{A,S,B} && (f \text{ homo. (j. B.2))} \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ (\mathfrak{r}_{A'} \boxtimes \mathrm{id}_{B'}) \circ ((f \boxtimes \mathrm{id}_S) \boxtimes g) \circ \alpha_{A,S,B} && (\boxtimes \text{ bifunktor}) \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ (\mathfrak{r}_{A'} \boxtimes \mathrm{id}_{B'}) \circ \alpha_{A',S,B'} \circ (f \boxtimes (\mathrm{id}_S \boxtimes g)) \circ \alpha^{-1}_{A,S,B} \circ \alpha_{A,S,B} \\
&&& (\alpha \text{ loomulik}) \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((\mathfrak{r}_{A'} \boxtimes \mathrm{id}_{B'}) \circ \alpha_{A',S,B'}) \circ (f \boxtimes (\mathrm{id}_S \boxtimes g)) && (\alpha \text{ iso.}) \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ (\mathrm{id}_{A'} \boxtimes \mathfrak{l}_{B'}) \circ (f \boxtimes (\mathrm{id}_S \boxtimes g)) && (\otimes_{A',B'} \text{ tensormor.}) \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((\mathrm{id}_{A'} \circ f) \boxtimes (\mathfrak{l}_{B'} \circ (\mathrm{id}_S \boxtimes g))) && (\boxtimes \text{ bifunktor}) \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((f \circ \mathrm{id}_A) \boxtimes (\mathfrak{l}_{B'} \circ (\mathrm{id}_S \boxtimes g))) && \text{(def 1.1 A3.)} \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ ((f \circ \mathrm{id}_A) \boxtimes (g \circ \mathfrak{l}_B)) && (g \text{ homo. (j. B.1))} \\
&\quad = \otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g) \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B) && (\boxtimes \text{ bifunktor}) \\
&\quad = (\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)) \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B).
\end{aligned}$$

Kõik eelnevas arvutuskäigus kasutatud morfismid on toodud alloleval diagrammil.

$$
\begin{tikzcd}
A \boxtimes (S \boxtimes B) \arrow[rrr, "f \boxtimes (\mathrm{id}_S \boxtimes g)"] \arrow[dr, shift left, "\alpha_{A,S,B}"] \arrow[ddr, "\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B"'] & & & A' \boxtimes (S \boxtimes B') \arrow[dl, "\alpha_{A',S,B'}"'] \arrow[ddl, "\mathrm{id}_{A'} \boxtimes \mathfrak{l}_{B'}"] \\
& (A \boxtimes S) \boxtimes B \arrow[r, "(f \boxtimes \mathrm{id}_S) \boxtimes g"] \arrow[ul, shift left, "\alpha^{-1}_{A,S,B}"] \arrow[d, "\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B"] & (A' \boxtimes S) \boxtimes B' \arrow[d, "\mathfrak{r}_{A'} \boxtimes \mathrm{id}_{B'}"'] & \\
& A \boxtimes B \arrow[r, "f \boxtimes g"'] \arrow[d, "\otimes_{A,B}"'] & A' \boxtimes B' \arrow[d, "\otimes_{A',B'}"] & \\
& A \otimes_S B & A' \otimes_S B' &
\end{tikzcd}
$$

Nüüd, kuna kehtib võrdus

$$(\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)) \circ ((\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,S,B}) = (\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)) \circ (\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B),$$

siis, kasutades teadmist, et $(A \otimes_S B, \otimes_{A,B})$ on kovõrdsustaja, saame, et leidub üheselt määratud morfism $\overline{\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)}$ nii, et

$$\overline{\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)} \circ \otimes_{A,B} = \otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g).$$

Leitud morfismi $\overline{\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)}$ nimetatakse **homomorfismide f ja g tensorkorrutiseks** ning tähistatakse

$$f \otimes g := \overline{\otimes_{A',B'} \circ (f \boxtimes g)}. \tag{B.4}$$

Olgu $A, A', A'' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$, $B, B', B'' \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$ sellised, et leiduvad tensorkorrutised $A \otimes_S B$, $A' \otimes_S B'$ ja $A'' \otimes_S B''$, ning vastavate S-moodulite homomorfismid $f\colon A \to A'$, $f'\colon A' \to A''$, $g\colon B \to B'$ ja $g'\colon B' \to B''$. Vaatleme järgnevat diagrammi.

$$
\begin{tikzcd}
A \boxtimes B \arrow[r, "f \boxtimes g"'] \arrow[rr, bend left, "(f' \circ f) \boxtimes (g' \circ g)"] \arrow[d, "\otimes_{A,B}"'] & A' \boxtimes B' \arrow[r, "f' \boxtimes g'"'] \arrow[d, "\otimes_{A',B'}"] & A'' \boxtimes B'' \arrow[d, "\otimes_{A'',B''}"] \\
A \otimes_S B \arrow[r, "f \otimes g"] \arrow[rr, bend right, dashed, "(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)"'] & A' \otimes_S B' \arrow[r, "f' \otimes g'"] & A'' \otimes_S B''
\end{tikzcd}
$$

Kasutades lemmat 1.3 ja kovõrdsustaja ühesuse nõuet saame, et kehtib

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

On lihtne näha, et lisaks kehtib $\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_{A\otimes B}$.

Kokkuvõttes näeme, et kui monoidses kategoorias leidub iga parempoolse S-mooduli $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ ja iga vasakpoolse S-mooduli $B \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$ korral tensorkorrutis $A \otimes_S B$, siis leidub bifunktor

$$\otimes_S \colon \mathsf{Mod}_S \times {}_S\mathsf{Mod} \to \mathcal{C}, \qquad (A_S, {}_SB) \mapsto A \otimes_S B, \qquad (f,g) \mapsto f \otimes g. \tag{B.5}$$

Märgime, et tihti nõutakse tensorkorrutisest rääkides, et monoidses kategoorias $\mathcal{C}$ leiduksid kõik kovõrdsustajad, siis pole ohtu, et tensorkorrutisi ei leidu.

Järgnevalt tõestame, et üldise tensorkorrutise korral kehtib lausega 3.9 analoogiline tulemus, kui monoidne korrutamine $\boxtimes$ säilitab kovõrdsustajaid ning kategoorias $\mathcal{C}$ leiduvad kovõrdsustajad. Olgu $(\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$ monoidne kategooria, me ütleme, et bifunktor $\boxtimes$ **säilitab kovõrdsustajaid** (mõlemas argumendis), kui kehtib tingimus: olgu (E, e) morfismide $f, g \colon A \to B$ kovõrdsustaja; iga $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ korral $(C \boxtimes E, \mathrm{id}_C \boxtimes e)$ on morfismide $\mathrm{id}_C \boxtimes f$, $\mathrm{id}_C \boxtimes g \colon C \boxtimes A \to C \boxtimes B$ kovõrdsustaja ning $(E \boxtimes D, e \boxtimes \mathrm{id}_D)$ on morfismide $f \boxtimes \mathrm{id}_D, g \boxtimes \mathrm{id}_D \colon A \boxtimes D \to B \boxtimes D$ kovõrdsustaja.

Lause B.16. *Olgu $\mathcal{C}$ monoidne kategooria, milles leiduvad kovõrdsustajad, ja mille monoidne korrutamine $\boxtimes$ säilitab kovõrdsustajaid; olgu S, T ja Q poolrühmobjektid kategoorias $\mathcal{C}$ ning $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ ja $B \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$. Kui A on (T,S)-bimoodul, siis on tensorkorrutis $A \otimes_S B$ vasakpoolne T-moodul. Kui B on (S,Q)-bimoodul, siis on tensorkorrutis $A \otimes_S B$ parempoolne Q-moodul. Kui A on (T,S)-bimoodul ja B on (S,Q)-bimoodul, siis on tensorkorrutis $A \otimes_S B$ (T,Q)-bimoodul.*

TÕESTUS. Olgu $(\mathcal{C}; \boxtimes; I; \alpha, \lambda, \rho)$ monoidne kategooria, mille korral $\boxtimes$ säilitab kovõrdsustajaid, ning $(S; \mu_S)$ ja $(Q; \mu_Q)$ poolrühmobjektid temas. Lisaks $(A; \mathfrak{r}_A) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$ ja $(B; \mathfrak{l}_B, \mathfrak{r}_B) \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod}_Q)$. Lausest B.7 teame, et $(B \boxtimes Q; \mathfrak{l}_{B\boxtimes Q}, \mu_Q)$ on (T,Q)-bimoodul. Kuna eelduse järgi kategoorias $\mathcal{C}$ leiduvad kovõrdsustajad, siis leiduvad tensorkorrutised $A \otimes_S B$ ja $A \otimes_S (B \boxtimes Q)$. Vaatleme järgnevat diagrammi.

$$\begin{tikzcd}
A \boxtimes (S \boxtimes (B \boxtimes Q)) \arrow[rr, "\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_{B\boxtimes Q}"] \arrow[dr, "\alpha_{A,S,B\boxtimes Q}"'] & & A \boxtimes (B \boxtimes Q) \arrow[rr, "\otimes_{A,B\boxtimes Q}"] \arrow[dr, "\alpha_{A,B,Q}"] & & A \otimes_S (B \boxtimes Q) \\
& (A \boxtimes S) \boxtimes (B \boxtimes Q) \arrow[ur, "\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_{B\boxtimes Q}"'] & & (A \boxtimes B) \boxtimes Q \arrow[dr, "\otimes_{A,B} \boxtimes \mathrm{id}_Q"'] & \\
& & & & (A \otimes_S B) \boxtimes Q \arrow[uu, dashed, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

Joonis B.6

S-moodulite tensorkorrutise definitsioonist teame, et $(A\otimes_S(B\boxtimes Q);\otimes_{A,B\boxtimes Q})$ on morfismide $\mathrm{id}_A\boxtimes\mathfrak{l}_{B\boxtimes Q}$ ja $(\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_{B\boxtimes Q})\circ\alpha_{A,S,B\boxtimes Q}$ kovõrdsustaja.

Paneme tähele, et kehtib

$$\begin{aligned}
\alpha_{A,B,Q}\circ(\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_{B\boxtimes Q})\circ\alpha_{A,S,B\boxtimes Q} &= \alpha_{A,B,Q}\circ(\mathfrak{r}_A\boxtimes(\mathrm{id}_B\boxtimes\mathrm{id}_Q))\circ\alpha_{A,S,B\boxtimes Q}\\
&= ((\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_B)\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\alpha_{A\boxtimes S,B,Q}\circ\alpha_{A,S,B\boxtimes Q} \qquad (\alpha \text{ loomulik iso.})\\
&= ((\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_B)\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ(\alpha_{A,S,B}\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\alpha_{A,S\boxtimes B,Q}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{S,B,Q})\\
&\qquad (\text{def B.1 MA1.})\\
&= (((\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_B)\circ\alpha_{A,S,B})\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\alpha_{A,S\boxtimes B,Q}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{S,B,Q}).\\
&\qquad (\boxtimes \text{ bifunktor})
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
A\boxtimes(S\boxtimes(B\boxtimes Q)) \arrow[rr, "\alpha_{A,S,B\boxtimes Q}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{S,B,Q}"] & & (A\boxtimes S)\boxtimes(B\boxtimes Q) \arrow[rr, "\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_{B\boxtimes Q}"] \arrow[d, "\alpha_{A\boxtimes S,B,Q}"] & & A\boxtimes(B\boxtimes Q) \arrow[d, "\alpha_{A,B,Q}"] \\
A\boxtimes((S\boxtimes B)\boxtimes Q \arrow[dr, "\alpha_{A,S\boxtimes B,Q}"'] & & ((A\boxtimes S)\boxtimes B)\boxtimes Q \arrow[rr, "(\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_B)\boxtimes\mathrm{id}_Q"'] & & (A\boxtimes B)\boxtimes Q, \\
& (A\boxtimes(S\boxtimes B))\boxtimes Q \arrow[ur, "\alpha_{A,S,B}\boxtimes\mathrm{id}_Q"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Tähistame eelnevalt figureerinud isomorfismi $\omega:=\alpha_{A,S\boxtimes B,Q}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{S,B,Q})$. Eelnevast saime, et kehtib

$$\alpha_{A,B,Q}\circ(\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_{B\boxtimes Q})\circ\alpha_{A,S,B\boxtimes Q} = (((\mathfrak{r}_A\boxtimes\mathrm{id}_B)\circ\alpha_{A,S,B})\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\omega. \quad (B.6)$$

Lausest B.8 teame, et $\mathfrak{l}_{B\otimes Q}=(\mathfrak{l}_B\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\alpha_{S,B,Q}$. Nüüd

$$\begin{aligned}
\alpha_{A,B,Q}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes\mathfrak{l}_{B\boxtimes Q}) &= \alpha_{A,B,Q}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes((\mathfrak{l}_B\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\alpha_{S,B,Q}))\\
&= \alpha_{A,B,Q}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes(\mathfrak{l}_B\boxtimes\mathrm{id}_Q))\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{S,B,Q}) \qquad (\boxtimes \text{ bifunktor})\\
&= ((\mathrm{id}_A\boxtimes\mathfrak{l}_B)\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\alpha_{A,S\boxtimes B,S}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{S,B,Q}). \qquad (\alpha \text{ loomulik iso.})
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
A\boxtimes(S\boxtimes(B\boxtimes Q)) \arrow[r, "\mathrm{id}_A\boxtimes\alpha_{S,B,Q}"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_A\boxtimes((\mathfrak{l}_B\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\alpha_{A,S,Q})"] & A\boxtimes((S\boxtimes B)\boxtimes Q) \arrow[r, "\mathrm{id}_A\boxtimes(\mathfrak{l}_B\boxtimes\mathrm{id}_Q)"] \arrow[dr, "\alpha_{A,S\boxtimes B,Q}"'] & A\boxtimes(B\boxtimes Q) \arrow[r, "\alpha_{A,B,Q}"] & (A\boxtimes B)\boxtimes Q \\
& & (A\boxtimes(S\boxtimes B))\boxtimes Q \arrow[ur, "(\mathrm{id}_A\boxtimes\mathfrak{l}_B)\boxtimes\mathrm{id}_Q"'] &
\end{tikzcd}$$

Siit saime, et kehtib

$$\alpha_{A,B,Q}\circ(\mathrm{id}_A\boxtimes\mathfrak{l}_{B\boxtimes Q}) = ((\mathrm{id}_A\boxtimes\mathfrak{l}_B)\boxtimes\mathrm{id}_Q)\circ\omega. \quad (B.7)$$

Tensorkorrutise $A \otimes_S B$ definitsioonist teame, et $\otimes_{A,B}$ on morfismide $\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B$, $(\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,S,B} \colon A \boxtimes (S \boxtimes B) \to A \boxtimes B$ kovõrdsustajamorfism. Vastavalt eeldusele, et bifunktor $\boxtimes$ säilitab kovõrdsustajaid, saame, et morfism $\otimes_{A,B} \boxtimes \mathrm{id}_Q$ on morfismide $(\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B) \boxtimes \mathrm{id}_Q$ ja $((\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,S,B}) \boxtimes \mathrm{id}_Q$ kovõrdsustajamorfism.

On lihtne näha, et kui E on morfismide f ja g kovõrdsustaja, siis E on ka morfismide $f \circ \xi$ ja $g \circ \xi$ kovõrdsustaja, kus ξ on mingi morfism, mille korral selline komponeerimine võimalik on.

Nüüd näeme võrdustest (B.6) ja (B.7), et paarid $(A \otimes_S (B \boxtimes Q), \otimes_{A,B\boxtimes Q})$ ja $((A \otimes_S B) \boxtimes Q, (\otimes_{A,B} \boxtimes \mathrm{id}_Q) \circ \alpha_{A,B,Q})$ on mõlemad morfismide $\mathrm{id}_A \boxtimes \mathfrak{l}_B$ ja $(\mathfrak{r}_A \boxtimes \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,S,B}$ kovõrdsustajad (joonis B.6). Lausest B.14 saame, et leidub isomorfism

$$\gamma_{A,B,Q} \colon\ (A \otimes_S B) \boxtimes Q \to A \otimes_S (B \boxtimes Q).$$

On võimalik – ning autor soovitab lugejal proovida – tõestada, et allolevad diagrammid on kommutatiivsed.

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes_S B) \boxtimes Q \arrow[r, "\gamma_{A,B,Q}"] & A \otimes_S (B \boxtimes Q) \\
(A \otimes_S B) \boxtimes (Q \boxtimes Q) \arrow[u, "\mathrm{id}_{A \otimes_S B} \boxtimes \mu_Q"'] \arrow[r, "\gamma_{A,B,Q\boxtimes Q}"'] & A \otimes_S (B \boxtimes (Q \boxtimes Q)) \arrow[u, "\mathrm{id}_A \otimes (\mathrm{id}_B \boxtimes \mu_Q)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& (A \otimes_S B) \boxtimes (Q \boxtimes Q) \arrow[dl, "\gamma_{A,B,Q\boxtimes Q}"'] \arrow[dr, "\alpha_{A\otimes_S B,Q,Q}"] & \\
A \otimes_S (B \boxtimes (Q \boxtimes Q)) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{B,Q,Q}"] & & ((A \otimes_S B) \boxtimes Q) \boxtimes Q \arrow[d, "\gamma_{A,B,Q} \boxtimes \mathrm{id}_Q"'] \\
A \otimes_S ((B \boxtimes Q) \boxtimes Q) & & (A \otimes_S (B \boxtimes Q)) \boxtimes Q \arrow[ll, "\gamma_{A,B\boxtimes Q,Q}"]
\end{tikzcd}$$

Vaatleme morfismi

$$\delta := (\mathrm{id}_A \otimes \mathfrak{r}_B) \circ \gamma \colon\ (A \otimes_S B) \boxtimes Q \to A \otimes_A (B \boxtimes Q) \to A \otimes_S B.$$

Nüüd, kasutades eelpool olevaid kommutatiivseid diagramme, saab analoogiliselt lausega B.7 tõestada, et $(A \otimes_S B; \delta)$ on parempoolne Q-moodul.

Analoogiliselt saab tõestada ka lause ülejäänud väited. ■

Eelmise lause kontekstis on lihtne näidata, et kui monoidne korrutamine $\boxtimes$ säilitab kovõrdsustajaid, siis võib funktorit (B.5) vaadelda kujudel

$$\otimes_S \colon \mathsf{Mod}_S \times {}_S\mathsf{Mod}_Q \to \mathsf{Mod}_Q,$$
$$\otimes_S \colon {}_T\mathsf{Mod}_S \times {}_S\mathsf{Mod} \to {}_T\mathsf{Mod},$$
$$\otimes_S \colon {}_T\mathsf{Mod}_S \times {}_S\mathsf{Mod}_Q \to {}_T\mathsf{Mod}_Q.$$

Mainime, et definitsioonis B.15 defineeritud tensorkorrutise korral kehtib lausega 3.14 analoogiline tulemus, mis väidab, et moodulite tensorkorrutis on isomorfismi täpsuseni assotsiatiivne. Selle lause tõestus on aga küllaltki tehniline ja seetõttu jääb antud raamatust välja. Samas on soovitatav teemast huvitatud lugejale proovida eelmise lause eeskujul teda tõestada.

Lause B.17 (Lause 21 dissertatioonis [48]). *Olgu $\mathcal{C}$ monoidne kategooria, milles leiduvad kovõrdsustajad, ja mille monoidne korrutamine $\boxtimes$ säilitab kovõrdsustajaid; ning olgu S ja T poolrühmobjektid temas. Leidub loomulik isomorfism γ, mis iga $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_S)$, $B \in \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod}_T)$ ja $C \in \mathrm{Ob}({}_T\mathsf{Mod})$ korral annab kategooria $\mathcal{C}$ isomorfismi*

$$\gamma_{A,B,C}\colon\ (A \otimes_S B) \otimes_T C \to A \otimes_S (B \otimes_T C).$$

Kusjuures, loomuliku isomorfismi γ jaoks leidub pentagondiagrammiga (def B.1 tingimus MA1.) analoogiline kommutatiivne diagramm.

Nüüd liigume tensorkorrutise näidete juurde. Alustuseks vaatame kahte meile juba tuttavat näidet.

Näide B.18 (Polügoonide tensorkorrutis). Vaatleme näitest B.2 tuttavat monoidset kategooriat $(\mathsf{Set}; \times; \{\varnothing\}; \alpha, \lambda, \rho)$. Näitest B.10 teame, et poolrühmobjektid selles kategoorias on lihtsalt tavalised poolrühmad ning moodulid on polügoonid üle poolrühmade. Ilmselt ei tule üllatusena, et selles kontekstis saame definitsiooni B.15 abil „tavalise“ polügoonide tensorkorrutise. Selles veendumiseks peame aga näitama, et kui S on poolrühm, siis morfism β joonisel B.5 on S-tasakaalustatud (def 3.50).

Olgu $G = (G; \mu)$ poolrühm, $A_G = (A_G; \mathfrak{r}_A)$ parempoolne G-polügoon ja ${}_GB = ({}_GB; \mathfrak{l}_B)$ vasakpoolne G-polügoon ning $\beta\colon A \times B \to X$ kujutus, mis muudab joonisel B.5 toodud diagrammi kommutatiivseks, kus X on mingi hulk. Lisaks, olgu $a \in A$, $b \in B$ ja $g \in G$, siis

$$\begin{aligned}
\beta(ag, b) &= \beta(\mathfrak{r}_A(a, g), b) = (\beta \circ (\mathfrak{r}_A \times \mathrm{id}_B))((a, g), b) \\
&= (\beta \circ (\mathfrak{r}_A \times \mathrm{id}_B) \circ \alpha_{A,G,B})(a, (g, b)) \\
&= (\beta \circ (\mathrm{id}_A \times \mathfrak{l}_B))(a, (g, b)) && \text{(eeldus)} \\
&= \beta(a, \mathfrak{l}_B(g, b)) = \beta(a, gb).
\end{aligned}$$

Seega, β on tõepoolest G-tasakaalustatud. Siit näeme, et definitsioon B.15 annab monoidse kategooria Set korral tõepoolest polügoonide tensorkorrutise. □

Näide B.19 (Moodulite tensorkorrutis). Vaatleme näitest B.3 tuttavat monoidset kategooriat $(\mathsf{Ab}; \otimes_{\mathbb{Z}}; \mathbb{Z}; \alpha, \lambda, \mu)$. Näitest B.11 teame, et poolrühmobjektid selles kategoorias on (ühikelemendita) ringid ning moodulid kategoorias Ab on „tavalised“ moodulid üle ringide. Taaskord on nii, et definitsiooni B.15 abil defineeritud tensorkorrutis kategoorias Ab osutub tavaliseks moodulite tensorkorrutiseks. Selles veendumiseks peame taaskord näitama, et joonist B.5 kommuteeriv morfism β on tasakaalustatud kujutus (def 3.1).

Olgu R ring, M_R parempoolne ja ${}_RN$ vasakpoolne R-moodul, A Abeli rühm ning $\beta\colon M \otimes_{\mathbb{Z}} N \to A$ kategooria Ab morfism, mis muudab diagrammi joonisel B.5 kommutatiivseks. Analoogiliselt eelmise näitega saame, et sel juhul rahuldab β definitsiooni 3.1 tingimust 3. Veendumaks, et kehtivad ka tingimused 1 ja 2, olgu $m_1, m_2 \in M$ ja $n \in N$. Sel juhul

$$\beta((m_1 + m_2) \otimes n) = \beta(m_1 \otimes n + m_2 \otimes n) = \beta(m_1 \otimes n) + \beta(m_2 \otimes n).$$

Seega kehtib tingimus 1. Analoogiliselt kehtib ka tingimus 2. (Märgime, et definitsioonis 3.1 on $\beta\colon M \times N \to A$ kujutus, kuid tingimused 1 ja 2 annavad meile, et samaväärselt võime vaadelda Abeli rühmade homomorfismi $\beta'\colon M \otimes_{\mathbb{Z}} N \to A$, nagu siinkohal ka tehtud on.) Kokkuvõttes näeme, et definitsiooni B.15 abil saime tõepoolest R-moodulite tensorkorrutise. $\square$

Järgmiseks toome veel mõned näited tensorkorrutistest.

Näide B.20 (Veel tensorkorrutisi).

1. Olgu $\mathcal{C}$ monoidne kategooria, milles leiduvad kovõrdsustajad ja mille monoidne korrutamine säilitab kovõrdsustajaid, ning S poolrühmobjekt temas. Vaatleme (S, S)-bimoodulite kategooriat ${}_S\mathsf{Mod}_S$. Tähistagu sümbol ${}_S\mathsf{FMod}_S$ sellist kategooria ${}_S\mathsf{Mod}_S$ täielikku alamkategooriat, mille objektid on (S, S)-bimoodulid $(M; \mathfrak{l}_M, \mathfrak{r}_M)$, mille korral morfismid $\overline{\mathfrak{l}_M}\colon S \otimes_S M \to M$ ja $\overline{\mathfrak{r}_M}\colon M \otimes_S S \to M$ on isomorfismid (ülakriipsu $\bar{\ }$ tähendus tuleb jooniselt B.5). Paneme tähele, et sel juhul on $({}_S\mathsf{FMod}_S; \otimes_S; S; \gamma, \bar{\mathfrak{l}}, \bar{\mathfrak{r}})$ taaskord monoidne kategooria (loomulik isomorfism γ on lausest B.17). Nüüd saame monoidses kategoorias ${}_S\mathsf{FMod}_S$ vaadata poolrühmobjekte, mooduleid üle poolrühmobjektide ja saadud moodulite tensorkorrutist. Märgime, et poolrühmobjekte kategoorias ${}_S\mathsf{FMod}_S$ nimetatakse tavaliselt **algebrateks**. Nii saame – vähemalt teoreetiliselt – genereerida palju näiteid erinevatest tensorkorrutistest. Märgime, et käesoleva näite erijuhte vaatlesime eelnevalt näite B.4 alamnäidetes (2) ja (3) ning näites B.12 (2).
2. Vaatleme näitest B.4 (5) tuttavat monoidset kategooriat $(\mathsf{Sup}; \otimes; \mathbf{2}; \alpha, \lambda, \rho)$. Näites B.12 (3) nägime, et poolrühmaobjektid kategoorias Sup on kvantaalid ning kirjeldasime moodulite kategooriaid Mod_Q, ${}_P\mathsf{Mod}$ ja ${}_P\mathsf{Mod}_Q$, kus P ja Q on kvantaalid. Vastavalt definitsioonile B.15 saame vaadelda moodulite tensorkorrutist kategoorias Sup. Märgime – praegu tõestamata – et kategoorias Sup leiduvad kovõrdsustajad, mistõttu tensorkorrutised leiduvad.

Olgu Q kvantaal, $M_Q = (M; \mathfrak{r}_M) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_Q)$, ${}_QN = (N; \mathfrak{l}_N) \in \mathrm{Ob}({}_Q\mathsf{Mod})$ ja $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$. Vaatleme kujutust $\beta\colon M \otimes N \to X$, mis kommuteerib joonisel B.5 toodud diagrammi. Paneme tähele, et suvalise hulga $k \in \mathfrak{K}$ ja elementide $m, m_k \in M$, $n, n_k \in N$, $k \in \mathfrak{K}$, ja $q \in Q$ korral kehtivad võrdused

$$\begin{aligned}
\beta\left(\left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} m_k\right) \otimes n\right) &= \beta\left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} m_k \otimes n\right) = \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} \beta(m_k \otimes n),\\
\beta\left(m \otimes \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} n_k\right) &= \bigvee_{k\in\mathfrak{K}} (m \otimes n_k),\\
\beta((m \star q) \otimes n) &= \beta(\mathfrak{r}_M(m \otimes q) \otimes n)\\
&= (\beta \circ (\mathfrak{r}_M \otimes \mathrm{id}_N))((m \otimes q) \otimes n)\\
&= (\beta \circ (\mathfrak{r}_M \otimes \mathrm{id}_N) \circ \alpha_{M,Q,N})(m \otimes (q \otimes n))\\
&= (\beta \circ (\mathrm{id}_M \otimes \mathfrak{l}_N))(m \otimes (q \otimes n))\\
&= \beta(m \otimes \mathfrak{l}_N(q \otimes n))\\
&= \beta(m \otimes (q \star n)).
\end{aligned}$$

Nimetame morfismi $\beta \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Sup}}(M \otimes N, X)$, mis rahuldab eelnevat kolme tingimust, **Q-tensoriaalseks**. Nüüd saame Q-moodulite tensorkorrutise universaalomaduse sõnastada analoogiliselt R-moodulite või polügoonide tensorkorrutise universaalomadusega, kasutades Q-tensoriaalseid morfisme.

Moodulite tensorkorrutise üle kvantaalide universaalomadus: Olgu Q kvantaal ning M_Q ja ${}_QN$ vastavalt parem- ja vasakpoolne Q-moodul. Iga täieliku sup-poolvõre $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$ ja Q-tensoriaalse morfismi $\beta\colon M \otimes N \to X$ korral leidub üheselt määratud sup-poolvõrede homomorfism $\overline{\beta}\colon M \otimes_Q N \to X$ nii, et $\overline{\beta} \circ \otimes_{M,N} = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
& M \otimes N \arrow[dl, "\otimes_{M,N}"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
M \otimes_Q N \arrow[rr, dashed, "\overline{\beta}"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Näitame, et Q-moodulite tensorkorrutisel leidub konstruktsioon, mille abil muuhulgas näeme, et tõepoolest see tensorkorrutis leidub kategoorias Sup suvaliste sobivate moodulite korral. Kõigepealt märgime, et kui $X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Sup})$, siis **sup-poolvõre kongruentsiks** ϑ nimetatakse ekvivalentsiseost $\vartheta \subseteq X \times X$, mis rahuldab tingimust, et suvalise hulga

$\mathfrak{K}$ ja elementide $x_k, y_k \in X$, $k \in \mathfrak{K}$, korral kehtib implikatsioon

$$\forall k \in \mathfrak{K}\colon\ x_k \vartheta y_k \implies \left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} x_k\right) \vartheta \left(\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} y_k\right).$$

Olgu $M_Q \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_Q)$ ja ${}_QN \in \mathrm{Ob}({}_Q\mathsf{Mod})$. Q-moodulite M_Q ja ${}_QN$ tensorkorrutis on esitatav faktor-sup-poolvõrena[7] $\wp(M \times N)/\vartheta$, kus $\vartheta \subseteq \wp(M \times N) \times \wp(M \times N)$ on vähim sup-poolvõre kongruents, mis sisaldab hulka

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\left\{\left(\bigvee A, n\right)\right\}, \bigcup_{a\in A}\{(a,n)\}\right) \,\middle|\, A \subseteq M, n \in N\right\}\\ &\cup \left\{\left(\left\{\left(m, \bigvee B\right)\right\}, \bigcup_{b\in B}\{(m,b)\}\right) \,\middle|\, m \in M, B \subseteq N\right\}\\ &\cup \{(\{(m \star q, n)\}, \{(m, q \star n)\}) \mid m \in M, n \in N, q \in Q\}.\end{aligned}$$

Märgime, et Q-moodulite tensorkrorrutise konstruktsioonil on selgeid sarnasusi nii R-moodulite kui ka polügoonide tensorkorrutiste konstruktsioonidega (vastavalt ptk 3.1 ja def 3.48).
Monoidse kategooria Sup ning kvantaalide moodulite kohta saab täiendavalt lugeda Urmas Luhaääre artiklist [37]. Selles artiklis on defineeritud ka kvantaalide Morita ekvivalentsus ning on näidatud, et sel juhul saab kasutada mitmeid käesoleva raamatu peatükis 6 kasutatud meetodeid. □

Lõpetuseks mainime, et siinses lisas esitatud monoidsete kategooriate kontekstis on võimalik arendada ka Morita teooriat. Näiteks parempoolset S-moodulit $(M; \mathfrak{r}_M)$ üle poolrühmobjekti S monoidses kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse **püsivaks**, kui morfism $\overline{\mathfrak{r}_M}\colon M \otimes_S S \to M$ on isomorfism (vt joonis B.5). Kategooria Mod_S täielikku alamkategooriat, mille objektideks on kõik püsivad parempoolsed S-moodulid, tähistame FMod_S. Nüüd saame defineerida, et poolrühmobjektid S ja Q (monoidses kategoorias $\mathcal{C}$) on *Morita ekvivalentsed*, kui kategooriad FMod_S ja FMod_Q on ekvivalentsed. Üldiselt

[7] Olgu X sup-poolvõre ja $\vartheta \subseteq X \times X$ sup-poolvõre kongruents. Faktorhulk $(X \times X)/\vartheta$ on samuti sup-poolvõre, kus suvalise hulga $\mathfrak{K}$ ja elementide $[x_k] \in (X \times X)/\vartheta$, $k \in \mathfrak{K}$, korral

$$\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} [x_k] = \left[\bigvee_{k\in\mathfrak{K}} x_k\right].$$

Sup-poolvõre $(X \times X)/\vartheta$ nimetatakse sup-poolvõre X **faktor-sup-poolvõreks** kongruentsi ϑ järgi.

saame monoidsete kategooriate kontekstis defineerida ka kategooriate CMod ja UTfMod analoogid ning nende abil defineerida Morita ekvivalentsused, nagu vaatasime peatükis 4.4. Nii saame üldjuhul taaskord kolm erinevat Morita ekvivalentsuse mõistet nagu ka mitteidempotentsete ringide korral. Sellised Morita ekvivalentsused on kindlasti huvitavad ning natuke saab sel teemal edasi lugeda Ülo Reimaa doktoritööst [48]. Kahjuks käesolev raamat on juba piisavalt pikaks läinud ning siikohal jääb õhku üleskutse lugejatele, et Morita teooriat monoidsete kategooriate kontekstis edasi arendada.

Kirjandus

Eestikeelne kirjandus

[1] Kaarli, K., (1989). *Sissejuhatus universaalalgebrasse.* Tartu Riikliku Ülikooli Trükikoda, Tartu.

[2] Kangro, G., (1962). *Kõrgem algebra.* Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn.

[3] Keres, H., (1989). *Vektor- ja tensorruumid.* Valgus, Tallinn.

[4] Kilp, M., (2000). *Kategooriad.* Eesti Matemaatika Selts, Tartu.

[5] Kilp, M., (2005). *Algebra I.* Eesti Matemaatika Selts, Tartu.

[6] Kilp, M., (1998). *Algebra II.* Eesti Matemaatika Selts, Tartu.

[7] Kivistik, L., Gabovitš, J., (1974). *Arvuteooria.* Tartu Riiklik Ülikool, Tartu.

[8] Kull, I., (1964). *Matemaatiline loogika.* Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn.

[9] Loone, L., Soomer, V., (2007). *Matemaatilise analüüsi algkursus.* Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu.

[10] Oja, E., Oja, P., (1991). *Funktsionaalanalüüs.* Tartu Ülikooli Trükikoda, Tartu.

[11] Puusemp, P., (2012). *Üldalgebra alused.* Tallinna Tehnikaülikooli Kirjastus, Tallinn.

[12] Puusemp, P., (1996). *Tensorarvutus.* Tallinna Tehnikaülikooli Kirjastus, Tallinn.

[13] Redi, E., (1998). *Arvuteooria.* Avita, Tallinn.

[14] Väljako, K., (2018). *Monomorfismid moodulite kategooriates.* Magistritöö, Tartu Ülikool, Tartu.

Ingliskeelne kirjandus

[15] Abrams, G. D., (1983). *Morita equivalence for rings with local units.* Comm. Algebra 11, 801–837.

[16] Adámek, J., Herrlich, H., Strecker, G. E., (2004). *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats.* University of Bremen.

[17] Amitsur, S. A., (1971). *Rings of quotients and Morita contexts*, J. Algebra 17, 273–298.

[18] Anderson, F. W., Fuller, K. R., (1974). *Rings and Categories of Modules*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 13, Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

[19] Ánh, P. N., (1989). *Morita equivalence and tensor product rings.* Comm. Algebra 17, 2717–2737.

[20] Ánh, P. N., Márki, L., (1983). *Rees matrix rings.* J. Algebra 81, 340–369.

[21] Ánh, P. N., Márki, L., (1987). *Morita equivalence for rings without identity.* Tsukuba J. Math 11, 1–16.

[22] Bass, H., (1962). *The Morita theorems*, mimeographed notes, University of Oregon.

[23] Caenepeel, S., Grandjean, F., (1998). *A note on Taylor's Brauer group.* Pacific J. Math. 186, 13–27.

[24] Chen, Y., Hao, Z., Fan, Y., (2002). *Morita equivalence of semigroup rings.* Southeast Asian Bull. Math 26, 747–750.

[25] García, J. L., Marín, L., (2001). *Morita theory for associative rings.* Comm. Algebra 29, 5835–5856.

[26] García, J. L., Marín, L., (2012). *Basic module theory for general rings.* Comm. Algebra 40, 291–314.

[27] García, J. L., Simón, J. J., (1991). *Morita equivalence for idempotent rings.* J. Pure Appl. Algebra 76, 39–56.

[28] Gorenstein, D., Lyons, R., Solomon, R., (1994). *The Classification of the Finite Simple Groups.* Math. Surveys and Monographs vol. 40.1, AMS.

[29] Dorroh, J. L., (1932). *Concerning adjunctions to algebras.* Bull. Amer. Math. Soc. 38, 85–88.

[30] Jech, T. (2006). *Set Theory: The Third Millenium Edition, revised and ecpanded.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[31] Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, V., (2000). *Monoids, Acts and Categories: With Applications to Wreath Products and Graphs.* Walter de Gruyter, Berlin.

[32] Komatsu, H., (1986). *The category of s-unital modules.* Math. J. Okayama Univ. 28, 65–91.

[33] Laan, V., (2010). *Context equivalence of semigroups.* Period. Math. Hung. 60, 81–94.

[34] Laan, V., Väljako, K., (2021). *Enlargements of rings.* Comm. Algebra 49, 1764–1772.

[35] Lam, T. Y., (1999). *Lectures on Modules and Rings.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 189, Springer-Verlag.

[36] Lawson, M. V., (1996). *Enlargements of regular semigroups.* Proc. Edinburgh Math Soc 39, 425–260.

[37] Luhaäär, U., (2023). *Enlargements of quantales.* Math. Slovaca, vol. 73, no. 5, 1119–1134.

[38] Mac Lane, S. (1998), *Categories for the Working Mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 5 (2nd ed.), Springer-Verlag. (Originaal ilmus 1969. a.)

[39] Marín, L., (1998). *Categories of Modules for Idempotent Rings and Morita Equivalences.* MSc Thesis University of Glasgow; *Publicaciones del Departamento de Matemáticas*, num 23. Universidad de Murcia.

[40] Marín, L., (1998). *Morita equivalence based on contexts for various categories of modules over associative rings.* J. Pure Appl. Algebra 133, 219–232.

[41] Márki, L., Steinfeld, O., (1988). *A Rees matrix construction without regularity.* Contributions to general algebra 6, 197–202, Hölder–Pichler–Tempsky, Vienna.

[42] Monk, J. D., (1969), Introduction to Set Theory, McGraw-Hill Book Company.

[43] Morita, K., (1958). *Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition.* Sci. Rep. of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A. 6 (150), 83–142.

[44] Müller, B. J., (1974). *The quotient category of a Morita context.* J. Algebra 28, 389–407.

[45] Mulvey, C. J., (1986). *&* Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser., Suppl. 12, 99-104.

[46] Ohtake, K., (1982). *Equivalence between colocalization and localization in abelian categories with applications to the theory of modules.* J. Algebra 79, 169–205.

[47] Picado. J., Pulter, A., (2011). *Notes on the product on locales.* Math. Slovaca vol. 65 no. 2, 247-–264.

[48] Reimaa, Ü., (2017). *Non-unital Morita equivalence in a bicategorical setting.* Ph.D. thesis, Tartu Ülikooli kirjastus, Tartu.

[49] Rosenthal, K. I., (1990). *Quantales and Their Applications.* Longman Group UK, London.

[50] Talwar, S., (1995). *Morita equivalence for semigroups.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A 59, 81–111.

[51] Talwar, S., (1996). *Strong Morita equivalence and a genaralisation of the Rees Theorem.* J. Algebra 181, 371–394.

[52] Tominaga, H., (1976). *On s-unital rings.* Math. J. Okayama Univ. 18, 117–134.

[53] Väljako, K., (2022). *On the Morita equivalence of idempotent rings and monomorphisms of firm bimodules.* Ph.D. thesis, Tartu Ülikooli kirjastus, Tartu.

[54] Väljako, K., (2022). *Tensor product rings and Rees matrix rings.* Comm. in Algebra 50, 4945–4963.

[55] Väljako, K., Laan, V., (2021). *Morita contexts and unitary ideals of rings.* Proc. Estonian Acad. Sci. 70, 122–134.

[56] Wisbauer, R., (1991). *Foundations of Module and Ring Theory.* Gordon and Breach Science Publishers. Amsterdam.

Sümbolite ja lühendite tähendused

$A := P(X)$	– suurust (avaldist) $P(X)$ tähistatakse sümboliga A; definitsioon
AS	– lõplike summade hulk $\{a_1s_1 + \ldots + a_{k^*}s_{k^*} \mid k^* \in \mathbb{N}_1, a_1, \ldots, a_{k^*} \in A, s_1, \ldots, s_{k^*} \in S\}$, eeldusel, et kirjapilt $a_1s_1 + \ldots + a_{k^*}s_{k^*}$ mõtet omab (vt (2.9))
$R \cong S$	– objektid (ringid, moodulid) R ja S on isomorfsed
$\mathcal{B} \subseteq_{\mathrm{T}} \mathcal{A}$	– kategooria $\mathcal{B}$ on kategooria $\mathcal{A}$ täielik alamkategooria
$B \subseteq A$	– B on A alamkategooria või alamhulk
$\eta\colon \mathbf{F} \stackrel{\cdot}{\to} \mathbf{G}$	– loomulik teisendus η funktorist $\mathbf{F}$ funktorisse $\mathbf{G}$
$\eta * \zeta$	– loomulike teisenduste η ja ζ horisontaalne kompositsioon; korrutamine Reesi maatriksringis; kvantaali tehe
R'	– ringi R Dorroh' laiend
$a\_\_$	– kujutus $r \mapsto ar$ (ar tähendus peab selge olema)
$a\underset{R}{\_\_}$	– sarnane eelmise reaga, kuid siin rõhutatakse, et kriipsu __ asemele peab tulema just hulga R element (tekstis esineb samas tähenduses kirjapilt $a\_\_{}_R$)
$A \sqcup B$	– hulkade A ja B lõikumatu ühend
$\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$	– kategooriad $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on ekvivalentsed
$R \approx_{\mathrm{ME}} S$	– ringid R ja S on Morita ekvivalentsed
$I \trianglelefteq R$	– I on ringi R ideaal
$\#(A)$	– hulga A kardinaalsus
$M \oplus N$	– moodulite otsesumma
$M^{\oplus n}$	– mooduli M_R otsesumma $\bigoplus_{k=1}^{n} M_R$
$M^{\oplus \mathfrak{K}}$	– mooduli M_R otsesumma $\bigoplus_{k \in \mathfrak{K}} M_R$
$M \otimes_R N$	– R-moodulite (R-polügoonide) M_R ja ${}_RN$ tensorkorrutis
$M \otimes_R^{\beta} N$	– tensorkorrutisring, mille korrutamine on defineeritud β poolt
$A \boxtimes B$	– objektide A ja B monoidne korrutis
$R[G]$	– poolrühma G poolrühmaring üle ringi R
$A \rightarrowtail B$	– injektiivne kujutus $A \to B$
$A \twoheadrightarrow B$	– sürjektiivne kujutus $A \to B$
$\langle\, ,\, \rangle$	– bilineaarne kujutus
$\langle A \rangle_{\mathrm{s}}$	– vähim $(R; +)$ alamrühm, mis sisaldab hulka $A \subseteq R$
$[x]_A$	– faktorstruktuuri X/A element, mille esindaja on $x \in X$
$\star$	– korrutamine tensorkorrutisringis
$S \sqsubseteq R$	– ring R on ringi S laiend
$\preceq$	– osalise järjestuse seos
$a \wedge b$	– elementide a ja b alumine raja

$\bigwedge A$	–	hulga A alumine raja (samaväärne tähistus: $\bigwedge_{a\in A} a$)
$a \vee b$	–	elementide a ja b ülemine raja
$\bigvee A$	–	hulga A ülemine raja (samaväärne tähistus: $\bigvee_{a\in A} a$)
$\perp$	–	osaliselt järjestatud hulga vähim element
$\top$	–	osaliselt järjestatud hulga suurim element
$\mathbf{0}$	–	nullkujutus, st $\mathbf{0}(a) = 0$ iga $a \in \operatorname{dom} \mathbf{0}$ korral
$\mathbf{1}$	–	poolrühma „väliselt“ lisatud ühik (näide 1.12 (4))
Ab	–	kõigi Abeli rühmade kategooria
$\mathrm{Ann}_R(M)$	–	mooduli M_R annullaator
$\mathbb{C}$	–	kõigi kompleksarvude hulk
CAT	–	kõigi väikeste kategooriate kategooria
${}_R\mathsf{CMod}$	–	kõigi kinniste vasakpoolsete R-moodulite kategooria
CMod_R	–	kõigi kinniste parempoolsete R-moodulite kategooria
$\operatorname{cod} f$	–	kujutuse (morfismi) f sihthulk (-objekt) ehk kodoomen
$\operatorname{Coker} f$	–	homomorfismi f kotuum
$\operatorname{dom} f$	–	kujutuse (morfismi) f lähtehulk (-objekt) ehk doomen
$\mathcal{E}(R)$	–	ringi R kõigi idempotentide hulk
$\mathrm{End}(M_R)$	–	kõigi mooduli M_R endomorfismide hulk (ring)
$\mathcal{F}(A)$	–	vaba (pool)rühm (universaalalgebra) üle hulga A
${}_R\mathsf{FMod}$	–	kõigi püsivate vasakpoolsete R-moodulite kategooria
FMod_R	–	kõigi püsivate parempoolsete R-moodulite kategooria
$(X)_{\mathrm{g}}$	–	hulga X poolt tekitatud ideaal
Grp	–	kõigi rühmade kategooria
$\mathbb{H}$	–	kõigi kvaternioonide hulk
${}_R\mathrm{Hom}(M,N)$	–	kõigi kujul ${}_RM \to {}_RN$ vasakpoolsete R-moodulite homomorfismide hulk
$\mathrm{Hom}_R(M,N)$	–	kõigi kujul $M_R \to N_R$ parempoolsete R-moodulite homomorfismide hulk
$\mathrm{Id}(R)$	–	ringi R kõigi ideaalide hulk
id_A	–	hulga A samasusteisendus (samasusfunktor; loomulik samasusteisendus)
$\operatorname{Im} f$	–	kujutuse f kujutis ($\{y \mid \exists x \in \operatorname{dom} f\colon\ y = f(x)\}$)
ι_N	–	alamhulga $N \subseteq M$ sisestus ($\iota_N\colon N \to M$, $n \mapsto n$)
$\mathbf{J}_{\mathcal{B}}$	–	(alam)kategooria $\mathcal{B}$ sisestusfunktor
κ_A	–	faktorhulga M/A kanooniline sürjektsioon ($\kappa_A\colon M \to M/A$, $m \mapsto [m]_A$)
$\mathbf{K}$	–	funktor $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{CMod}_R$ (lausest 4.39)
$\operatorname{Ker} f$	–	homomorfismi f tuum
λ_M	–	kanooniline homomorfism $M \to \mathrm{Hom}_R(R,M)$, $\lambda_M(m)(r) = mr$
μ_M	–	kanooniline homomorfism $M \otimes_R R \to M$, $m \otimes r \mapsto mr$

$\mathcal{M}(R;\Lambda,\Xi;M)$	–	Reesi maatriksring üle ringi R, mis koosneb $(\Lambda \times \Xi)$-maatriksitest ja võileivamaatriks on M
$\mathrm{Mat}_{m,n}(R)$	–	kõigi $(m \times n)$-maatriksite hulk, mille komponendid on ringist R
$\mathrm{Mat}_n(R)$	–	kõigi $(n \times n)$-ruutmaatriksite hulk, mille komponendid on ringist R
${}_R\mathsf{Mod}$	–	kõigi vasakpoolsete R-moodulite kategooria
${}_S\mathsf{Mod}^1$	–	kõigi selliste vasakpoolsete S-moodulite kategooria, kus S on ühikelemendiga ring ja kehtib tingimus $1m = m$
Mod_R	–	kõigi parempoolsete R-moodulite kategooria
Mod_S^1	–	kõigi parempoolsete S-moodulite kategooria, kus S on ühikelemendiga ring ja kehtib tingimus $m1 = m$
${}_S\mathsf{Mod}_R$	–	kõigi (S, R)-bimoodulite kategooria
${}_S\mathsf{Mod}_T^1$	–	kõigi selliste (S, T)-bimoodulite kategooria, kus S ja T on ühikelemendiga ringid ning kehtivad tingimused $1m = m$ ja $m1 = m$
Mon	–	kõigi monoidide kategooria
$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$	–	morfismide $A \to B$ hulk kategoorias $\mathcal{C}$
Ω^β	–	kõigi bilineaarse kujutuse β suhtes kaasendomorfismide paaride hulk
$\mathbb{N}_0$	–	kõigi naturaalarvude hulk koos nulliga
$\mathbb{N}_1$	–	kõigi naturaalarvude hulk ilma nullita
$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$	–	kategooria $\mathcal{C}$ objektide klass
${}^{\mathrm{op}}$	–	vastandring; duaalne kategooria
Π^β	–	defineeritud real (5.14)
$\wp(A)$	–	hulga A kõigi alamhulkade hulk
$\mathbf{P}$	–	funktor $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{FMod}_R$ (lausest 4.35)
$\mathbb{Q}$	–	kõigi ratsionaalarvude hulk
$\mathbb{R}$	–	kõigi reaalarvude hulk
Ring	–	kõigi ühikelemendiga ringide kategooria, kus morfismideks on ühikelemendiga ringide homomorfismid
Rng	–	kõigi (ühikelemendita) ringide kategooria, kus morfismideks on ringide homomorfismid
Σ^β	–	kõigi β-elementaarendomorfismide ring
Set	–	kõigi hulkade kategooria
SGrp	–	kõigi poolrühmade kategooria
$\mathrm{Sub}(M_R)$	–	R-mooduli M_R kõigi alammoodulite hulk
$\mathbb{Z}$	–	kõigi täisarvude hulk
$\mathbf{t}(M)$	–	mooduli M vääne
$\mathbf{T}$	–	funktor $\mathbf{T} = \_\!\_/\mathbf{t}(\_\!\_)\colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{TfMod}_R$ (lausest 2.43)

${}_R\mathsf{TfMod}$	–	kõigi väändeta vasakpoolsete R-moodulite kategooria
TfMod_R	–	kõigi väändeta parempoolsete R-moodulite kategooria
$\mathrm{Tr}(M)$	–	mooduli M jälgideaal
$\mathbf{U}$	–	funktor $\mathbf{U} = \_R\colon \mathsf{Mod}_R \to \mathsf{UMod}_R$ (lausest 2.16)
$\mathrm{UId}(R)$	–	ringi R unitaarsete ideaalide hulk
${}_R\mathsf{UMod}$	–	unitaarsete vasakpoolsete R-moodulite kategooria
UMod_R	–	unitaarsete parempoolsete R-moodulite kategooria
$\mathrm{USub}(M)$	–	mooduli M unitaarsete alammoodulite hulk

Register