

Tartu Ülikool  
Füüsika-keemiateaduskond  
Teoreetilise füüsika instituut

Niina Voropajeva

**Browni liikumine magnet- ja elektriväljas  
anisotroopse keskkonna juhul**

Magistritöö teoreetilises füüsikas

Juhendaja: dots Teet Örd

Tartu 2007

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Lühiülevaade teoriast</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Vaba Browni liikumine</b>	<b>10</b>
3.1	Langevini võrrandi formalism . . . . .	10
3.2	Fokkeri-Plancki võrrandi formalism . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Browni liikumine välises jõuväljas</b>	<b>18</b>
4.1	Browni liikumine elektriväljas . . . . .	18
4.2	Browni liikumine magnetväljas . . . . .	20
4.3	Browni liikumine elektri- ja magnetväljas isotroopsel juhul . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Browni liikumine elektri- ja magnetväljas anisotroopse hõõrdumise korral</b>	<b>26</b>
5.1	Fokkeri-Plancki võrrand kiiruste ruumis . . . . .	26
5.2	Kiiruste tõenäosustihedus . . . . .	31
5.3	Relaksatsioonid kiiruste ruumis . . . . .	35
5.3.1	Voolu, kiiruse kovariatsioonide ja dispersioonide ajaline käitumine . . . . .	35
5.3.2	Keskkonna anisotroopsuse mõju kiiruse komponentide kovariatsioonile ja dispersioonile . . . . .	36
5.4	Statsionaarne vool ja difusioon . . . . .	40
	<b>Resümee</b>	<b>48</b>
	<b>Summary</b>	<b>50</b>
	<b>Kirjandus</b>	<b>51</b>

# 1 Sissejuhatus

1827. aasta suvel uuris inglise botaanik Robert Brown vees hõljuvaid õietolmu kübemekesi tavalise mikroskoobi all, sest teda huvitas, kuidas õietolm osaleb viljastumises. Ta nägi, et tolmuterad läbimõõduga alla  $1\mu m$  liiguvad pidevalt ja kaootiliselt mööda keerulisi siksakilisi trajektoore. Osakeste salapärase ja võluv "tants" ei näinud iialgi lõppevat, seda võis vaadelda kui tahes kaua. Brown märkas, et liikumise intensiivsus kasvab koos temperatuuriga, kuid väheneb osakeste mõõtmete ja vedeliku viskoossuse kasvades. Ta veendus, et liikumine jääb samasuguseks, kui õietolmu kübemekesi asendada näiteks tolmu- ja tahmakübemete või peenestatud mineraalidega. Teadlasele sai selgeks, et kaootilisel ja pideval liikumisel on universaalne iseloom: selline "hüplemine" on omane kõigile piisavalt väikestele osakestele sõltumata välistest tingimustest ja keskkonnast [1].

Järgmiste aastakümnete jooksul üritasid teadlased edutult ära mõistatada selle salapärase nähtuse saladust, aga tol ajal jäi vajaka vajalikest teoreetilistest ettekujutustest Browni poolt avastatud liikumise seletamiseks. Aastal 1877 avaldas Delsaux arvamust, et Browni liikumist põhjustavad mikroskoobis nähtamatute molekulide korrapäratud põrked Browni osakestega. 1888. aastal tegi Gouy [2] kindlaks, et väline elektromagnetväli ei avalda mingit mõju liikumisele ja osakeste trajektooridel puuduvad puutujad. Ta pani tähele, et kaks osakest näisid liikuvat sõltumatult isegi siis, kui nad lähenesid teineteisele kaugusele, mis oli väiksem osakese läbimõõdust. Selline seletus eeldas, et materia koosneb aatomitest ja molekulidest.

Täielikku kvantitatiivset ja kvalitatiivset Browni liikumise teooriat arendas Einstein 1905. aastal. Uurimuste peamiseks sisuks oli aatomite ja molekulide statistilise kirjeldamise probleem ning liikumise ja soojuse vaheline seos. Seejuures juhendus Einstein Boltzmanni poolt pakutud ideest: võimalikkusest taandada termodünaamikat statistikaks ja võtta soojuse teooria matemaatiliseks aluseks tõenäosuse mõiste (Boltzmanni seadus). Seesuguse lähenemisviisi edukas rakendamine selgitas Browni liikumise varal ülima näitlikkusega statistilise mehaanika seaduste veenvust.

Einsteini eesmärk seisnes selles, et selgitada välja fakte, mis "teeksid kindlaks lõplike mõõtmetega aatomite olemasolu", nagu ta on kirjutanud oma teaduslikus

eluloos. Ta asus oma uurimuste juurde päris selge kavatsusega kinnitada usaldusväärsete eksperimentaalsete andmetega atomismi teooriat, mille kehtivuses oli ta täielikult veendunud.

Oma uurimuste tulemusi soojuse ja atomismi teooria kohta avaldas Einstein mitme artiklina. 30. aprillil 1905 esitas Einstein eraldi trükisena Zürichi ülikoolile oma doktoriväitekirja "Molekulide mõõtmete uus määramine" [3] ning samal aastal promoveeriti ta filosoofia doktoriks. Möödus ainult 11 päeva ja 11. mail saabus ajakirja *Annalen der Physik* toimetusse Einsteini järjekordne artikkel, "Soojuse molekulaarkineetilisest teoriast järelduvast suspendeeritud osakeste liikumisest paigalseisvates vedelikes" [4]. Artikli nimetusega tahtis ta ilmselt rõhutada, et "soojuse molekulaarkineetilise teooria kohaselt peab vedelikes hõljuvate mikroskoopiliste tahkete osakeste liikumine, mida põhjustab molekulide soojuslik liikumine, olema mikroskoobis vaadeldav". Edasi märgib Einstein: "Võimalik, et see liikumine on identne niinimetatud Browni liikumisega, kuigi mulle kättesaadavad andmed viimase kohta on niivõrd ebatäpsed, et ma ei ole suutnud siin oma kindlat arvamust kujundada". Ja siis järgneb lühike positiivne programm: "Kui käsitletud liikumine koos oodatavate seaduspärasustega on tõesti jälgitav, siis [---] on võimalik täpselt määrata tõeliselt atomaarseid mõõtmeid". Einstein näitas, et osakeste liikumise kiiruse, selle mõõtmete ja vedeliku viskoossusteguri vahel on olemas kindel kvantitatiivne seos, mida saab eksperimentaalselt kontrollida. Oma artiklit lõpetab Einstein omapärase hüüatusega: "Kui ometi kellelgi eksperimentaatoritest ometi õnnestus vastata siin püstitatud küsimustele!" Vastus kirglikule üleskutsele ei lasknud ennast kaua oodata: veenva kinnituse said Einsteini tulemused Jean Baptiste Perrini hoolikalt korraldatud katsetega 1908. aastal. Veelgi enam, järgmisel aastal määras Perrin oma katsete ja Einsteini valemi põhjal tolle aja jaoks piisavalt suure täpsusega Avogadro arvu, saades väärtuseks  $6.8 \times 10^{23}$  [5]. Selle tulemuse eest omistati talle 1926. aastal Nobeli preemia.

Einsteini molekulaarfüüsika alased uurimustööd omasid kaugeleulatuvaid tagajärgi. Nad kinnitasid atomistlikku hüpoteesi, mis pani mitmeid vastaseid pöörduma atomismi usku [6].

Sõltumatult Einsteinit esitas Smoluchowski Browni liikumise analoogse sele-

tust 1906. aastal, mis andis olulise panuse Browni liikumise teooria edasiarendusse ja selle eksperimentaalsesse kontrolli [7].

Aastal 1908 töötas Langevin välja uue fenomenoloogilise meetodi [8], mis erines täielikult Einsteini - Smoluchowski ideedest. See, tema enda sõnul "lõpmata lihtsam", käsitus põhines niinimetatud stohhastilisel diferentsiaalvõrrandil Browni osakese koordinaadi  $x(t)$  jaoks

$$m\ddot{x}(t) = -m\gamma\dot{x}(t) + \xi(t), \quad (1.1)$$

kus  $m$  on osakese mass ja  $\gamma$  on hõõrdetegur. Langevin pidas silmas, et viskooses keskkonnas kiirusega  $\dot{x}(t)$  liiguvale osakesele mõjub hõõrdejõud  $-m\gamma\dot{x}(t)$  ning juhuslik jõud  $\xi(t)$ , mis on põhjustatud Browni osakeste ja molekulide vahelistest põrgetest ning ei sõltu ei osakese koordinaadist ega kiirusest. Seda juhuslikku jõu nimetatakse Langevini jõuks, kui on täidetud kaks tingimust:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = m^2 A \delta(t - t'). \quad (1.2)$$

Langevini jõu esimene omadus tähendab, et Browni osakestele mõjub keskmiselt ainult hõõrdejõud. Seejuures keskmistatakse üle osakeste ansambli, eeldades, et alg hetkel on osakeste algtingimused ühesugused. Teine omadus peegeldab asjaolu, et jõud  $\xi(t)$  muutub kiiresti ajas, st iga pörge on peaaegu hetkeline ja järjestikused pörked on statistiliselt sõltumatud. Võrrandit (1.1) koos tingimustega (1.2) nimetatakse Langevini võrrandiks ning suurust  $A$  - Langevini allikate intensiivsuseks.

Märgime veel, et tänapäeval on Browni liikumise mõiste palju laiem ja üldisem, kui ainult viskooses vedelikus hõljuvate osakeste käitumine. Browni liikumise mõiste alla kuuluvad kõik sellised juhuslikud protsessid, mida on võimalik kirjeldada Langevini võrrandiga sarnaste võrrandite abil, sõltumata protsesside olemusest.

Käesoleva magistritöö eesmärgiks on uurida välises magnet- ja elektriväljas laetud Browni osakeste ülekandeprotsesse anisotroopse hõõrdumise tingimustes.

Magistritöö koosneb kahest osast. Esimeses osas antakse ülevaade Browni liikumise teooriast nii väliste jõuväljade puudumisel kui ka magnet- ja elektrivälja korral. Teises osas on leitud elektri- ja magnetväljas liikuvate Browni osakeste kiiruse tõenäosustihedus anisotroopse hõõrdumise korral. Viimasest lähtudes on saadud avaldised keskmise kiiruse (voolu), kiiruse komponentide dispersiooni ja kovariat-

siooni jaoks, samuti uuriti keskkonna anisotroopsuse mõju kiiruse kovariatsioonile ja dispersioonile. Statsionaarsel juhul tuletati difusioonitensori avaldis suvalise kuju-  
ga müra intensiivsuse tensori korral ja uuriti koherentsuse mahasurumise tingimusi.

## 2 Lühiülevaade teoriast

Esimesena õnnestus Chandrasekharil leida Kramersi võrrandi ja Fokkeri-Plancki (kiiruste ja koordinaatide ruumis) võrrandi lahendid vaba Browni liikumise ja ühemõõtmelise harmoonilise ostsillaatori jaoks. Need tulemused on avaldatud 1943. aastal tema kuulsas ülevaateartiklis Browni liikumise kohta [9]. Peale selle pakkus Chandrasekhar üldise ja hämmastavalt universaalse skeemi Browni liikumise probleemi lahendamiseks suvalise välise jõuvälja korral. See seisneb sobivas muutujate vahetuse kasutamises Fokkeri-Plancki võrrandis, mis lubab taandada selle võrrandi vaba Browni liikumise juba tuntud ja analüütiliselt lahendatavale juhule. Uute muutujatena tuleb siin defineerida Lagrange'i liikumisvõrrandite süsteemi esimesed integraalid. Kuna Chandrasekhari meetodit võib pidada Browni liikumise kui stohhastilise protsessi olulise karakteristikku, üleminekutõenäosustiheduse, leidmise nurgakiviks, siis järgmises peatükis tutvume lähemalt Browni liikumise intrigeeriva probleemi lahendamise meetodiga välise jõu puudumisel.

Juba aastal 1961. uuris Taylor [10] stohhastilist difusiooni plasmas, mida põhjustavad lokaalsed elektrivälja fluktuatsioonid, magnetväljaga ristiolevas suunas. Lähtudes Langevini võrrandist leiti koordinaadi dispersioon.

Laetud osakeste difusiooniprotsesside kirjeldamiseks välises magnetväljas tõi Kursunoğlu [11] sisse maatriksjaotusfunktsiooni (ehk tõenäosusjaotuse operaatori) mõiste. Seejuures tuleb märkida, et selline operaator ei ole tõeline tõenäosustihedus. Kuna jaotuse operaatori eksperimentaalne määramine ei ole üheselt teostatav klassikalise teooria seisukohalt, siis oma järgmises publikatsioonis [12] loobus Kursunoğlu sissetoodud mõiste kasutamisest standardsema skeemi, nimelt Langevini võrrandi formalismi, kasuks. Selle abil saadi üleminekutõenäosustihedus impulsside ja koordinaatide ruumis anisotroopse hõõrdumise korral, mis võimaldas arvutada Browni osakeste keskmist energia ja koordinaatide dispersiooni. Dissipatsiooniten-sori mittediagonaalsete komponentide mõju uurimiseks vaadeldi erijuhtu, isotroopset diagonaalset hõõrdumist koos kahe võrdse mittediagonaalse komponentidega, st

dissipatsioonitensor omab kuju

$$f = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Selle erijuhu jaoks leiti koordinaatide dispersioonid magnetvälja suunaga ristiolevas tasandis,

$$\langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle = \frac{2k_B T \beta}{m(\beta^2 + \omega_z^2 - \gamma^2)} t, \quad (2.2)$$

ja magnetvälja suunas (Einsteini valem), kus  $\omega_z$  on Larmori sagedus. Diagonaalse dissipatsioonitensori ( $\gamma = 0$ ) korral on tulemuseks Taylori valem [10] magnetväljas liikuvate Browni osakeste jaoks

$$\langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle = \frac{2k_B T}{m} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega_z^2} t. \quad (2.3)$$

Kui  $\gamma = \pm \omega_z$ , siis koordinaatide dispersiooni avaldis oluliselt lihtsustub,

$$\langle (\Delta R_{\perp})^2 \rangle = \frac{2k_B T}{\beta m} t. \quad (2.4)$$

See vastab vabale Browni liikumisele diagonaalse hõõrdumise tingimustes.

Aastal 1966 arvutas Liboff [13] koordinaatide dispersioonid Browni liikumise jaoks ristiolevas elektri- ja magnetväljas kasutades Langevini võrrandit. Ta tuletas võrrandi Browni osakese kohavektori mooduli ruudu jaoks ja leidis mooduli ruudu keskväärtuse kahel erijuhul:

1. Browni osakeste liikumine piki sirget ühtlaselt laetud traati, mis paikneb paralleelselt konstantse homogeense magnetväljaga ja tekitab radiaalse elektrivälja. Sealjuures elektrivälja tugevus väheneb pöördvõrdeliselt kaugusega traadist.
2. Browni liikumine viskoosses silindrilise sümmetria ja konstantse laengutihedusega keskkonnas. Laetud keskkond genereerib elektrivälja, mille tugevus kasvab võrdeliselt kaugusega sümmeetriateljest.

Erinevalt varemtehtust arendas Williamson teooriat [14], mis kirjeldab vedeliku molekulidest väiksemate ja kergemate osakeste, elektronide, Browni liikumist magnetväljas, kasutades madala tihedusega Lorentzi gaasi [15] mudelit isotroopse



hajumise modelleerimiseks. Selle abil, lähtudes Chandrasekhari kontseptsioonist [9], leidis ta tõenäosustiheduse ja koordinaatide dispersiooni, mis on kooskõlas Ornsteini poolt saadud tulemusega [16] ainult juhul, kui kõikidel osakestel on sama põrkeaeg. Väljatöötatud teooriat rakendati Thomsoni hajumisele plasmas, kusjuures on täheldatud kiirgusspektrite kitsenemist põrgete tõttu, kuigi spektrijooned, mis vastavad plasma sagedusele ja Larmori kordsetele sagedustele, on laienenud [14].

Peaaegu nelikümmend aastat hiljem on taas märgata huvi elavnemist välises jõuväljades liikuvate laetud Browni osakeste vastu. See on viinud viimase kuue aasta jooksul mitmete oluliste teoreetiliste arenguteni järgmiste jõuväljade korral: elektriväljas [17, 18], magnetväljas [19]-[21] ja üheaegselt mõlemas jõuväljas [22].

### 3 Vaba Browni liikumine

Üleminekutõenäosustihedust Browni osakeste jaoks, millele mõjub ainult juhuslik jõud, on võimalik leida kahe erineva meetodi abil [9]. Üks nendest põhineb Langevini võrrandil, mille jaoks on täpselt teada juhusliku jõu statistilised omadused. Teiseks võimaluseks on Fokkeri-Plancki võrrandi vahetu lahendamine, kusjuures üleminekutõenäosustiheduseks alghetkel on delta-funktsioon. Nagu näitas Chandrasekhar [9], on mõlemad meetodid täiesti ekvivalentsed ning annavad ühe ja sama tulemuse.

#### 3.1 Langevini võrrandi formalism

##### (i) Tõenäosustihedus kiiruse ruumis

Meie ülesandeks on stohhastilise diferentsiaalvõrrandi lahendamine, Langevini võrrandi. Välise välja puudumisel ja isotroopse hõõrdumise korral on Langevini võrrand kujuga

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta\vec{v} + \vec{\xi}(t). \quad (3.1)$$

Langevini jõud rahuldab tingimusi

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = 2q\delta_{ij}\delta(t-t'), \quad i = 1, 2, 3; \quad (3.2)$$

kus  $q = \frac{k_B T}{m}\beta$  on Langevini jõu intensiivsus. Stohhastilise võrrandi lahendamise all peetakse silmas (ülemineku)tõenäosustiheduse leidmist  $W(\vec{v}, t|\vec{v}_0)$ , kusjuures alghetkel  $t = 0$  osake liigub kiirusega  $\vec{v}_0$ . Piirjuhul peab  $t \rightarrow 0$  funktsiooni  $W(\vec{v}, t|\vec{v}_0)$  jaoks olema täidetud tingimus

$$W(\vec{v}, t|\vec{v}_0) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \delta(\vec{v} - \vec{v}_0). \quad (3.3)$$

Füüsikalistel kaalutlustel peame me nõudma, et üleminekutõenäosustihedus statsionaarsel piirjuhul oleks Maxwelli jaotus (sõltumata algkiirusest  $\vec{v}_0$ )

$$W(\vec{v}, t|\vec{v}_0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{m|\vec{v}|^2}{2k_B T} \right). \quad (3.4)$$

Viimane nõue tähendab, et Langevini jõul  $\vec{\xi}(t)$  peavad olema teatud statistilised omadused. Kuna Langevini võrrandi (3.3) formaalseks lahendiks on

$$\vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\beta t} = e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \vec{\xi}(s) ds, \quad (3.5)$$

siis järelikult juhusliku suuruse

$$\vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\beta t} \quad (3.6)$$

statistilised omadused peavad olema täpselt samasugused nagu suurustel

$$e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \vec{\xi}(s) ds. \quad (3.7)$$

Ainult tänu sellele taandub Browni osakeste kiiruste tõenäosustiheduse leidmine suuruse  $e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \vec{\xi}(s) ds$  (3.7) tõenäosusjaotuse otsimisele. Kuna piirjuhul  $t \rightarrow \infty$  avaldis (3.6) läheneb  $\vec{v}$ -le, siis suurusele

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \vec{\xi}(s) ds \quad (3.8)$$

peab vastama Maxwelli jaotus (3.4). Arvestades, et Langevini jõud muutub ajas palju kiiremini võrreldes osakese kiirusega, siis me võime alati jaotada piisavalt pikka ajavahemikku (mille jooksul mingi füüsikalistest suurustest, näiteks osakese kiirus või koordinaat, muutub märgatavalt) suureks arvuks osavahemikeks kestvusega  $\Delta t$ , mis peavad olema palju suuremad võrreldes juhusliku jõu  $\vec{\xi}(t)$  ühe fluktuatsiooni perioodiga (suurusjärgult Browni osakese ja vedeliku molekulide kahe järjestikuse pörke vahelise ajaga). Seega iga osavahemiku jooksul saab lugeda Langeveni võrrandis olevad funktsioonid peale Langevini jõu konstantseteks suurusteks. Siis saame avaldise (3.7) esitada järgmiselt

$$e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} \vec{\xi}(s) ds = e^{-\beta t} \sum_{j=0}^{N-1} e^{\beta j \Delta t} \int_{j \Delta t}^{(j+1) \Delta t} \vec{\xi}(s) ds. \quad (3.9)$$

Tähistame

$$\vec{B}(\Delta t) = \int_0^t \vec{\xi}(s) ds, \quad (3.10)$$

mis kujutab endast Wieneri protsessi juurdekasvu. Juhuslikku suurust  $\vec{B}(\Delta t)$  võib interpreteerida Browni osakese kiirendusena ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul. Võrrand (3.5) saab nüüd kuju

$$\vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\beta t} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{\beta(j\Delta t-t)} \vec{B}(\Delta t), \quad (3.11)$$

kusjuures statsionaarsel juhul võrrandi paremal poolel olev avaldis peab olema kirjeldatud Maxwelli jaotusega (3.4). On teada, et kui juhuslik suurus kujutab endast Wieneri protsessi, siis tema tõenäosusjaotuseks on Gaussi jaotus

$$\omega[\vec{B}(\Delta t)] = \left[ \frac{1}{4\pi q \Delta t} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{|\vec{B}(\Delta t)|^2}{4q \Delta t} \right], \quad (3.12)$$

keskväärtusega 0 ja dispersiooniga  $2q$ . Avaldise  $e^{\beta(j\Delta t-t)} \vec{B}(\Delta t)$  jaotuse leidmiseks tähistame

$$\vec{S} = \sum_{j=0}^{N-1} \vec{S}_j, \quad (3.13)$$

kus

$$\vec{S}_j = \Psi(j\Delta t) \vec{B}(\Delta t) = \Psi_j \vec{B}(\Delta t), \quad \Psi_j = e^{\beta(j\Delta t-t)}. \quad (3.14)$$

Selleks, et saada suuruse  $\vec{S}_j$  jaotust, on vaja teha muutuja vahetuse:  $\vec{B}(\Delta t)$  asendada  $\vec{S}_j$ -ga Gaussi jaotuse avaldises (3.12), mille tulemusena

$$\tilde{\omega}[\vec{S}_j] = \omega[\Psi_j^{-1} \vec{S}_j] \det[\Psi_j^{-1}]. \quad (3.15)$$

Kuna  $\det[\Psi_j(s)] = e^{3\beta(s-t)}$  ja  $\Psi_j^{-1}(s) = e^{-\beta(s-t)}$ , siis  $\vec{S}_j$ -i jaotus on üleskirjutatav kujul

$$\tilde{\omega}[\vec{S}_j] = \left[ \frac{1}{4\pi q \Delta t e^{2\beta(j\Delta t-t)}} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{|\vec{S}_j|^2}{4q \Delta t e^{2\beta(j\Delta t-t)}} \right], \quad (3.16)$$

Pidades silmas, et  $\vec{S}_j$ -id on statistiliselt sõltumatud juhuslikud suurused Gaussi jaotusega, mille keskväärtus on 0 ja dispersioon -  $\sigma_j^2 = 2q \Delta t e^{2\beta(j\Delta t-t)}$ , vastab nende summale  $\vec{S} = \sum_{j=0}^{N-1} \vec{S}_j$  samuti Gaussi jaotus keskväärtusega 0 ja dispersiooniga

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j^2 = 2q \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t e^{2\beta(j\Delta t-t)}. \quad (3.17)$$

Minnes piirjuhule  $N \rightarrow \infty$  (st  $\Delta t \rightarrow 0$ ), saame dispersiooni jaoks valemi

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{m} (1 - e^{-2\beta t}). \quad (3.18)$$

Võttes veel arvesse, et  $\vec{S} = \vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\beta t}$ , jõuame lõpliku avaldiseni Browni osakese kiiruse üleminekutõenäosustiheduse jaoks kujul

$$W(\vec{v}, t | \vec{v}_0) = \left[ \frac{m}{2\pi k_B T (1 - e^{-2\beta t})} \right]^{3/2} \exp \left[ -\frac{m |\vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\beta t}|^2}{2\pi k_B T (1 - e^{-2\beta t})} \right]. \quad (3.19)$$

Seejuures statsionaarsel juhul  $t \rightarrow \infty$  tõenäosustihedus (3.19) taandub Makwelli jaotuseks (3.4) ja piirjuhul  $t \rightarrow 0$  delta-funktsiooniks (3.3), st füüsikalistel kaalutlustel varem tehtud eeldused tõenäosustiheduse piirjuhtude kohta on rahuldatud.

## (ii) Tõenäosustihedus faasiruumis

Siiani oleme vaadelnud tõenäosusjaotust ainult Browni osakese kiiruse jaoks. Nüüd tahame leida ühisüleminekutõenäosustihedust  $W(\vec{r}, \vec{v}, t | \vec{v}_0, \vec{r}_0)$  algtingimusega: ajahetkel  $t = 0$  osake liigub kiirusega  $\vec{v}_0$  ja asub punktis  $\vec{r}_0$ . Seda võib lahendada järgmise lemma abil:

**Lemma:** Olgu

$$\vec{R} = \int_0^t \Phi(s) \vec{\xi}(s) ds, \quad \vec{S} = \int_0^t \Psi(s) \vec{\xi}(s) ds \quad (3.20)$$

juhuslikud suurused. Siis nende suuruste  $\vec{R}$  ja  $\vec{S}$  ühistõenäosustihedus avaldub kujul

$$W(\vec{R}, \vec{S}) = \left[ \frac{1}{2\pi \sqrt{FG - H^2}} \right]^3 \exp \left[ -\frac{F|\vec{S}|^2 - 2H\vec{R} \cdot \vec{S} + G|\vec{R}|^2}{2(FG - H^2)} \right], \quad (3.21)$$

kus

$$F = 2q \int_0^t \Phi^2(s) ds; \quad G = 2q \int_0^t \Psi^2(s) ds; \quad H = 2q \int_0^t \Psi(s) \Phi(s) ds. \quad (3.22)$$

Tõestus on toodud töös [9].

Antud juhul

$$\vec{S} = \vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\beta t}; \quad \Psi(s) = e^{\beta(s-t)}. \quad (3.23)$$

$\vec{R}$  ja  $\Phi(s)$  avaldiste leidmiseks paneme kirja Browni osakese koordinaadi kujul

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \int_0^t v(\eta) d\eta, \quad (3.24)$$

kus  $\vec{v}(s)$  on määratud valemiga (3.5). Pärast teisendusi on võimalik saada, et

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 - \beta^{-1} \vec{v}_0 (1 - e^{-\beta t}), \quad \Phi(s) = \beta^{-1} (1 - e^{\beta(s-t)}). \quad (3.25)$$

Avaldised  $F$ ,  $G$ ,  $H$  jaoks tulevad sellised

$$F = q\beta^{-3}(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}), \quad (3.26)$$

$$G = q\beta^{-1}(1 - e^{-2\beta t}), \quad H = q\beta^{-2}(1 - e^{-2\beta t})^2. \quad (3.27)$$

Seega on ühisüleminekutõenäosustihedus Browni osakese kiiruste ja koordinaatide jaoks määratud valemitega (3.21),(3.26),(3.27).

Integreerides avaldist (3.21) avaldise üle  $\vec{S}$ -i, võib veenduda, et üleminekutõenäosustihedus konfiguratsiooniruumis avaldub

$$W(\vec{r}, t | \vec{r}_0, \vec{v}_0) = \left[ \frac{m\beta^2}{2\pi k_B T (2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})} \right]^{\frac{3}{2}} \times \exp \left[ -\frac{m\beta^2 |\vec{r} - \vec{r}_0 - \beta^{-1} \vec{v}_0 (1 - e^{-\beta t})|^2}{2k_B T (2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})} \right] \quad (3.28)$$

## 3.2 Fokkeri-Plancki võrrandi formalism

### (i) Tõenäosustihedus kiiruste ruumis

Langevini võrrandile vastav Fokkeri-Plancki võrrand kiiruste ruumis omab väliste jõudude puudumisel ning isotroopse hõõrdumise juhul kuju [9]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \beta \operatorname{div}_{\vec{v}} (W \vec{v}) + q \Delta_{\vec{v}} W, \quad (3.29)$$

kusjuures  $W = W(\vec{v}, t | \vec{v}_0)$  jaoks kehtivad tingimused (3.3), (3.4). Fokkeri-Plancki võrrandi (3.29) lahendamiseks tuleb tuua sisse uued muutujad, milleks on otstarbekas võtta vastavate Lagrange'i liikumisvõrrandite

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta \vec{v}, \quad (3.30)$$

esimesed integraalid. Järelikult peame defineerida uue vektori

$$\vec{\rho} = (\xi, \eta, \zeta) = \vec{v} e^{\beta t}. \quad (3.31)$$

Muutuja vahetuse tulemusena näeb Fokkeri-Plancki võrrand (3.29) välja selline

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 3\beta W + e^{2\beta t} q \Delta_{\vec{\rho}} W. \quad (3.32)$$

Tehes veel ühe muutuja vahetuse

$$\Gamma = W e^{-3\beta t}, \quad (3.33)$$

saame küllalt lihtsa diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = e^{2\beta t} q \Delta_{\vec{q}} \Gamma. \quad (3.34)$$

See võrrand oma kuju poolest on analoogne vastava võrrandiga Wieneri protsessi jaoks, kuid ühe väikese erinevusega: Wieneri protsessi korral difusioonikoeffitsient on konstant, antud juhul aga aja funktsioon. On teada, et üleminekutõenäosus, mis kirjeldab Wieneri protsessi, on üldjuhul mitmemõõtmeline Gaussi jaotus (vaadeldaval juhul kolmemõõtmeline jaotus). Siis on  $\Gamma$  avaldiseks

$$\Gamma(\vec{q}, t | \vec{q}_0) = \left[ \frac{1}{4\pi q \int_0^t e^{2\beta t} dt} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{|\vec{q} - \vec{q}_0|^2}{4q \int_0^t e^{2\beta t} dt} \right]. \quad (3.35)$$

Seega, minnes tagasi esialgsetele muutujatele, saab esialgne üleminekutõenäosustihedus kuju

$$W(\vec{v}, t | \vec{v}_0) = \left[ \frac{m}{2\pi k_B T (1 - e^{-2\beta t})} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{m |\vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\beta t}|^2}{2k_B T (1 - e^{-2\beta t})} \right], \quad (3.36)$$

mis on kooskõlas Langevini võrrandi abil saadud tulemusega (3.19).

## (ii) Tõenäosustihedus faasiruumis

Vaba Browni osakese kiiruse komponentide ja koordinaatide ühistõenäosustihedus rahuldab järgmist Fokkeri-Plancki võrrandit [9]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} W = \beta \text{div}_{\vec{v}} (W \vec{v}) + q \Delta_{\vec{v}} W, \quad (3.37)$$

kus  $W = W(\vec{v}, \vec{r}, t | \vec{v}_0, \vec{r}_0)$ . Kramersi võrrand (3.37) kujutab endast ka Liouville'i võrrandi üldistust Browni liikumise juhule: võrrandi vasakul poolel seisab tavaline Stokes'i operaator, mis mõjub tõenäosustihedusele ning paremal poolel - liikmed, mis kirjeldavad Browni liikumist. Analoogselt Fokkeri-Plancki võrrandi lahendamisega kiiruste ruumis tuleb leida liikumisvõrrandite

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta \vec{v}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (3.38)$$

esimesed integraalid ja defineerida need uutena muutujatena

$$\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta) = \vec{v} e^{\beta t}, \quad \vec{P} = (X, Y, Z) = \vec{r} + \frac{\vec{v}}{\beta}. \quad (3.39)$$

Arvutades vajalikud osatuletised, saame Kramersi võrrandi uuttes muutujates kujul

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 3\beta W + q \left\{ e^{2\beta t} \Delta_{\vec{g}} W + \frac{2}{\beta} e^{\beta t} \text{grad}_{\vec{g}} W \cdot \text{grad}_{\vec{P}} W + \frac{1}{\beta^2} \Delta_{\vec{P}} W \right\}, \quad (3.40)$$

kus  $W = W(\vec{\rho}, \vec{P}, t | \vec{\rho}_0, \vec{P}_0)$ . Tuues sisse uue üleminekutõenäosustiheduse

$$\Gamma = W e^{-3\beta t}, \quad (3.41)$$

jõuame järgmise võrrandini

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = q \left\{ e^{2\beta t} \Delta_{\vec{g}} \Gamma + \frac{2}{\beta} e^{\beta t} \text{grad}_{\vec{g}} \Gamma \cdot \text{grad}_{\vec{P}} \Gamma + \frac{1}{\beta^2} \Delta_{\vec{P}} \Gamma \right\}. \quad (3.42)$$

Võrrandis (3.42) võib eraldada muutujad paarikaupa  $(\xi, Y)$ ,  $(\eta, Y)$ ,  $(\zeta, Z)$ . Esitades seega võrrandi lahendi kujul

$$\Gamma = \Gamma_1(\xi, Y) \Gamma_2(\eta, Y) \Gamma_3(\zeta, Z), \quad (3.43)$$

sealjuures võib veenduda, et iga funktsioon  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t} = \Phi(t) \frac{\partial^2 \Gamma_i}{\partial \varrho_i^2} + 2\sqrt{\Phi(t)\Psi(t)} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \varrho_i} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial P_i} + \Psi(t) \frac{\partial^2 \Gamma_i}{\partial P_i^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.44)$$

kus

$$\Phi(t) = q e^{2\beta t}, \quad \Psi(t) = \frac{q}{\beta^2}. \quad (3.45)$$

Kuna diferentsiaalvõrrandi (3.44) lahend on hästi teada [9], siis võrrandi (3.42) lahendiks on algtingimuste  $\vec{\varrho} = \vec{\varrho}_0, \vec{P} = \vec{P}_0, t = 0$  korral

$$\Gamma = \left[ \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}} \right]^3 \exp \left[ -\frac{a|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|^2 + 2h|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0||\vec{P} - \vec{P}_0| + b|\vec{P} - \vec{P}_0|^2}{2\Delta} \right], \quad (3.46)$$

kus

$$a = 2q\beta^{-2}t, \quad b = q\beta^{-1}(e^{2\beta t} - 1), \quad h = -2q\beta^{-2}(e^{\beta t} - 1), \quad (3.47)$$

$$\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0 = e^{\beta t} \vec{v} - \vec{v}_0, \quad \vec{P} - \vec{P}_0 = \vec{r} - \vec{r}_0 + \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\beta}. \quad (3.48)$$

Seega on meid huvitav ühisüleminekutõenäosustihedus kujuga

$$W = \left[ \frac{e^{3\beta t}}{2\pi\sqrt{\Delta}} \right]^3 \exp \left[ -\frac{a|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|^2 + 2h|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0||\vec{P} - \vec{P}_0| + b|\vec{P} - \vec{P}_0|^2}{2\Delta} \right]. \quad (3.49)$$

Kontrollime, kas  $W(\vec{v}, \vec{r}, t | \vec{v}_0, \vec{r}_0)$  avaldis (3.49) on kooskõlas tulemusega (3.21), (3.26), (3.27), mis on saadud varem lähtudes Langevini võrrandist. Selleks, võttes arvesse suuruste  $\vec{S}$  ja  $\vec{R}$  valemeid (3.23), (3.25), leiame

$$a|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0|^2 + 2h|\vec{\varrho} - \vec{\varrho}_0||\vec{P} - \vec{P}_0| + b|\vec{P} - \vec{P}_0|^2 = e^{\beta t} \left[ F|\vec{S}|^2 - 2H\vec{R} \cdot \vec{S} + G|\vec{R}|^2 \right], \quad (3.50)$$



kus

$$F = a + 2h\beta^{-1}e^{-\beta t} + b\beta^{-2}e^{-2\beta t}, \quad (3.51)$$

$$G = be^{-2\beta t}, \quad H = -(he^{-\beta t} + b\beta^{-1}e^{-2\beta t}). \quad (3.52)$$

ja  $a$ ,  $b$ ,  $h$  on määratud valemitega (3.47). Pärast viimaste asendamist valemitesse (3.51),(3.52) jõuame avaldisteni

$$F = q\beta^{-3}(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}), \quad (3.53)$$

$$G = q\beta^{-1}(1 - e^{-2\beta t}), \quad H = q\beta^{-2}(1 - e^{-2\beta t})^2. \quad (3.54)$$

Seega võib Kramersi võrrandi lahendi (3.49) kirja panna alternatiivsel kujul

$$W(\vec{R}, \vec{S}) = \left[ \frac{1}{2\pi\sqrt{FG - H^2}} \right]^3 \exp \left[ -\frac{F|\vec{S}|^2 - 2H\vec{R} \cdot \vec{S} + G|\vec{R}|^2}{2(FG - H^2)} \right]. \quad (3.55)$$

Võrreldes omavahel valemid (3.53)-(3.55) ning (3.21), (3.26), (3.27), on näha, et kaks Chandrasekhari poolt pakutud meetodit (Langevini ja Fokkeri-Plancki võrrandite formalismid) on täiesti ekvivalentsed ning viivad ühesugustele tulemustele.

## 4 Browni liikumine välises jõuväljas

Kui on olemas väline jõuväli  $\vec{F}$ , siis Langevini võrrand (3.1) ja Fokkeri-Plancki võrrand (3.37) üldistuvad [9, 23]:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta\vec{v} + \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\xi}(t), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} W + \frac{\vec{F}}{m} \text{grad}_{\vec{v}} W = \beta \text{div}_{\vec{v}} (W\vec{v}) + q \Delta_{\vec{v}} W. \quad (4.2)$$

### 4.1 Browni liikumine elektriväljas

Ferrari [17] vaatles raskete ionide liikumist suure tihedusega vedelikus üldjuhul ajas muutuvast elektriväljas. Tõenäosustiheduse  $W(\vec{r}, \vec{v}, t)$  asemel kasutati jaotusfunktsiooni osakeste süsteemi jaoks

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_{tot} W(\vec{r}, \vec{v}, t), \quad (4.3)$$

kus  $n_{tot}$  on süsteemi kuuluvate osakeste koguarv. Jaotusfunktsioon peab ilmselt rahuldama algtingimust

$$f(\vec{r}, \vec{v}, 0) = n_{tot} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(\vec{v} - \vec{v}_0). \quad (4.4)$$

Järgnevalt tehti muutuja vahetus Fokkeri-Plancki võrrandis (4.2), kus  $\vec{F}$  on elektriväljas liikuvale osakesele mõjuv jõud,

$$\begin{aligned} \vec{r}^* &= \vec{r}^*(\vec{r}, t) \equiv \vec{r} - \int_0^t \langle \vec{v} \rangle_{t'} dt', \\ \vec{v}^* &= \vec{v}^*(\vec{v}, t) \equiv \frac{d\vec{r}^*}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \langle \vec{v} \rangle_t = \vec{v} - \langle \vec{v} \rangle_t, \end{aligned} \quad (4.5)$$

kus

$$\langle \vec{v} \rangle_t = \frac{1}{n_{tot}} \int \vec{v} d\vec{v} \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r} \quad (4.6)$$

ioonide keskmine kiirus. Selle tulemusena kõrvaldatakse ionide süsteemi kui terviku liikumise efektid. Teiselt poolt on ionide keskmine kiirus (4.6) võrrandi

$$\frac{d\langle \vec{v} \rangle_t}{dt} - \vec{a}(t) = -\beta \langle \vec{v} \rangle_t \quad (4.7)$$

lahendiks ( $\vec{a}(t)$  on ionide kiirendus). Arvestades, et antud muutujate korral kehtib võrdus

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f^*(\vec{r}^*(t), \vec{v}^*(t), t), \quad (4.8)$$

arvutades jaotusfunktsiooni vajalikud osatuletised ja pidades silmas võrrandit (4.7), võib jõuda järgmise Fokkeri-Plancki võrrandini formaalselt vaba liikumise juhu jaoks

$$\frac{\partial f^*}{\partial t} + \vec{v}^* \text{grad}_{\vec{r}^*} f^* = \beta \left[ \text{div}_{\vec{v}^*} (\vec{v}^* f^*) + \frac{k_B T}{m} \Delta_{\vec{v}^*} f^* \right], \quad (4.9)$$

mille lahend on meil hästi teada (3.21). Saab veenduda, et jaotusfunktsioon  $f^*(\vec{r}^*, \vec{v}^*, t)$  peab uues faasiruumis rahuldama algtingimust

$$f^*(\vec{r}^*, \vec{v}^*, 0) = n_{tot} \delta(\vec{r}^* - \vec{r}_0^*) \delta(\vec{v}^*), \quad (4.10)$$

st alghetkel  $t = 0$  on ionid punktis  $\vec{r}_0$ . Minnes tagasi faasiruumi  $(\vec{r}, \vec{v})$ , arvestades algtingimusega (4.10), saame

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{n_{tot}}{[2\pi\sqrt{FG - H^2}]^3} \exp \left[ -\frac{G|\vec{R}|^2 - 2H\vec{R} \cdot \vec{S} + F|\vec{S}|^2}{2(FG - H^2)} \right], \quad (4.11)$$

kus

$$\vec{R} = \vec{r}^* - \vec{r}_0, \quad \vec{S} = \vec{v}^* \quad (4.12)$$

ning  $F, G, H$  on defineeritud valemitega (3.26), (3.27).

Võrrandi abil, mis on sarnane oma kuju poolest Fokkeri-Plancki võrrandiga vedelikus hõljuvate Browni osakeste juhu jaoks, on võimalik kirjeldada

1. Rayleigh gaasi (rasked osakesed kergemate osakeste hõredas gaasis) käitumist [24, 25] ainult juhul, kui raskete osakeste keskmine kineetiline energia ei ole liiga palju suurem tasakaalulisest väärtusest [24, 26, 27]. Kui rasketeks osakes-  
teks on ionid ja elektriväli mõjub gaasile, siis Fokkeri-Plancki võrrand kehtib  
ainult nõrkade elektriväljade korral [26]. Hõõrdekoefitsient peab olema leitud  
lähtudes põrgete dünaamikast (mitte Stokes'i seaduse abil), pidades silmas, et  
rasked osakesed interakteeruvad gaasi molekulidega kaheosakeseliste põrgete  
kaudu [24, 25, 26, 28].
2. raskete osakeste liikumist kergemate gaaside hõredas segus [29], kusjuures  
hõõrdekoefitsiendi avaldis saadakse gaaside segu komponentide vastavate hõõr-  
dekoefitsientide summeerimise teel.

3. raskete ja suurte ionide liikumist suvalise tihedusega gaasis välistes jõuväljades [18], kusjuures hõõrdekoefitsient tuleb asendada nn efektiivset hõõrdekoefitsiendiga. Gaasi suure tiheduse piirjuhul langeb efektiivne hõõrdekoefitsient kokku Stokes'i seadusest tuletatud avaldisega.

## 4.2 Browni liikumine magnetväljas

### (i) Isotroopne hõõrdumine ja difusioon. Langevini võrrandi formalism

Artiklis [19] on uuritud Browni liikumist konstantses magnetväljas isotroopse hõõrdumise ja Langevini jõu intensiivsuse korral, mille jaoks oli leitud ühistõenäosustiheduse ja tõenäosustiheduse avaldised kiiruste ja konfiguratsiooniruumis. Czopnik ja Garbaczewski üldistasid Langevini võrrandi meetodi [9], teisenedes magnetvälja mõju dissipatiivse jõu tensoriks (Stokes'i jõu üldistus), tuues sisse tensori

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \beta & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

kus  $\omega_z = \frac{eB}{mc}$  on Larmori sagedus,  $e$  - Browni osakese laeng ja  $\vec{B} = (0, 0, B)$  - magnetvälja induksioon. Üleminekutõenäosustiheduse leidmine kiiruste ja konfiguratsiooniruumis erineb vaba Browni liikumise juhust ainult selle poolest, et skalaarse hõõrdekoefitsiendi asemel figureerib dissipatsioonitensor (4.13). Tänu probleemi silindrilisele sümmeetriale võib vaadelda siin eraldi Browni liikumise protsessid magnetvälja suunas (vaba Browni liikumine) ja magnetväljaga ristiolevas tasandis. Vaba Browni liikumise jaoks rakendame valemeid (3.19) ja (3.28) vastavalt kiiruste ruumis ja konfiguratsiooniruumis. Kasutades Chandrasekhari skeemi [9], on võimalik veenduda, et üleminekutõenäosustihedus kiiruste ruumis on kujul

$$W(\vec{v}, t|\vec{v}_0) = \left[ \frac{m}{2\pi k_B T (1 - e^{-2\beta t})} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{m|\vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\Lambda t}|^2}{2k_B T (1 - e^{-2\beta t})} \right]. \quad (4.14)$$

Saab näidata, et tasandis  $XY$  on üleminekutõenäosustihedus konfiguratsiooniruumis esitatav kujul

$$W(\vec{r}, t|\vec{r}_0, \vec{v}_0) = \frac{m}{4\pi k_B T \frac{\beta}{\beta^2 + \omega_z^2} (t + \Theta)} \exp \left[ -\frac{m|\vec{r} - \vec{r}_0 - \Omega \vec{v}_0|^2}{4k_B T \frac{\beta}{\beta^2 + \omega_z^2} (t + \Theta)} \right], \quad (4.15)$$

kus

$$\Omega = \bar{\Lambda}^{-1}(1 - e^{-\bar{\Lambda}t}); \quad \bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \beta & -\omega_z \\ \omega_z & \beta \end{pmatrix}; \quad (4.16)$$

$$\Theta = \Theta(t) = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}) - \frac{2}{\beta^2 + \omega_z^2}[\beta + \{\omega_z \sin(\omega_z t) - \beta \cos(\omega_z t)\}e^{-\beta t}]. \quad (4.17)$$

Ühisüleminekutõenäosustiheduse leidmine faasiruumis tasandis  $XY$  taandub suuruste  $\vec{R}$  ja  $\vec{S}$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0 - \Omega \vec{v}_0, \quad \vec{S} = \vec{v} - \vec{v}_0 e^{-\bar{\Lambda}t}, \quad (4.18)$$

ühistõenäosusjaotuse  $W(\vec{R}, \vec{S})$  arvutamisele, kusjuures mõlemad suurused (4.18) on Gaussi jaotusega keskväertusega 0. Teisisõnu,  $W(\vec{R}, \vec{S})$  on määratud kovariatsiooni-maatriksiga

$$C = (c_{ij}) = (\langle x_i x_j \rangle), \quad x = (S_1, S_2, R_1, R_2), \quad (4.19)$$

omades kuju

$$W(\vec{R}, \vec{S}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[ \frac{1}{\det C} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 c_{ij}^{-1} x_i x_j \right]. \quad (4.20)$$

Vektorite  $\vec{R}$  ja  $\vec{S}$  komponentide dispersioonid on teada nende tõenäosusjaotuse avaldisest

$$g = \langle S_i S_i \rangle = \frac{k_B T}{m}(1 - e^{-2\beta t}), \quad f = \langle R_i R_i \rangle = \frac{2k_B T}{m} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega_z^2} (t + \Theta), \quad (4.21)$$

kus  $\Theta(t)$  on antud valemiga (4.17). Jääb ainult määrata vektorite komponentide kovariatsioonid  $\langle R_i S_j \rangle$ ;  $i, j = 1, 2$ . Seda võime teha kasutades  $\vec{R}, \vec{S}$  avaldise, mis esitatud Langevini jõu kaudu

$$\vec{S} = \int_0^t e^{-\bar{\Lambda}(t-s)} \xi(s) ds, \quad \vec{R} = \int_0^t \bar{\Lambda}^{-1} (1 - e^{-\bar{\Lambda}(s-t)}) \xi(s) ds. \quad (4.22)$$

Korrutades vektorite vastavad komponendid omavahel ja keskmistades, saadakse järgmised kovariatsioonide valemid

$$h = \langle R_1 S_1 \rangle = \langle R_2 S_2 \rangle = \frac{q}{\beta^2 + \omega_z^2} \left[ 1 - 2e^{-\beta t} \cos(\omega_z t) + e^{-2\beta t} \right], \quad (4.23)$$

$$k = \langle R_1 S_2 \rangle = -\langle R_2 S_1 \rangle = \frac{q}{\beta^2 + \omega_z^2} \left[ 2e^{-\beta t} \sin(\omega_z t) - \frac{\omega_z}{\beta} (1 - e^{-2\beta t}) \right]. \quad (4.24)$$

Asendades kovariatsioonide avaldised (4.21), (4.23), (4.24) Gaussi jaotusse (4.20), saame

$$W(\vec{R}, \vec{S}) = \frac{1}{4\pi^2(fg - h^2 - k^2)} \exp\left[-\frac{f|\vec{S}|^2 + g|\vec{R}|^2 - 2h\vec{S}\cdot\vec{R} + 2k(\vec{S}\times\vec{R})_z}{2(fg - h^2 - k^2)}\right]. \quad (4.25)$$

## (ii) Anisotroopne hõõrdumine ja difusioon. Fokkeri-Plancki võrrandi formalism

Töö [19] tulemusi, mis on saadud ühistõenäosustiheduse jaoks Browni liikumise korral magnetväljas, võib üldistada ka anisotroopse hõõrdumise ja mittediagonaalse Langevini jõu intensiivsuse juhule. Seda on tehtud Holod'i, Zagorodny'i ja Weiland'i publikatsioonis [20], võttes lähtekohaks Fokkeri-Plancki võrrandi. Sisse on toodud uued muutujad, vastavate liikumisvõrrandite esimesed integraalid, millised on üleskirjutatavad järgmisel viisil:

$$\begin{aligned} \varrho_x &= e^{\frac{\beta_x + \beta_y}{2}t} \left[ v_x \left\{ \tilde{\Omega} \cos(\tilde{\Omega}t) + \frac{\beta_x - \beta_y}{2} \sin(\tilde{\Omega}t) \right\} - v_y \omega_z \sin(\tilde{\Omega}t) \right] - v_{x0}, \\ \varrho_y &= e^{\frac{\beta_x + \beta_y}{2}t} \left[ v_y \left\{ \tilde{\Omega} \cos(\tilde{\Omega}t) - \frac{\beta_x - \beta_y}{2} \sin(\tilde{\Omega}t) \right\} + v_x \omega_z \sin(\tilde{\Omega}t) \right] - v_{y0}, \\ P_x &= x - x_0 + \frac{\beta_y(v_x - v_{x0}) + \omega_z(v_y - v_{y0})}{\beta_x \beta_y + \omega_z^2}, \\ P_y &= y - y_0 + \frac{\beta_x(v_y - v_{y0}) - \omega_z(v_x - v_{x0})}{\beta_x \beta_y + \omega_z^2}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

kus

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\omega_z^2 - (\beta_x - \beta_y)^2/4} \quad (4.27)$$

ning  $\beta_x, \beta_y$  on hõõrdetegurid vastavalt suunas  $x, y$ . Ühistõenäosustiheduse üsna komplitseeritud kuju on toodud artiklis [20].

Lähtudes ühistõenäosustihedusest on töös [20] arvutatud kiiruste ja koordinaatide dispersioonid, mis on kooskõlas arvutisimulatsioonide abil saadud tulemustega, kusjuures nad erinevad märgatavalt diagonaalse difusioonitensori juhust. Saadud tulemusi kasutatakse suuremastaabiliste fluktuatsioonide teooria üldistamiseks plasmas.

**(iii) Isotroopne hõõrdumine ja difusioon. Alternatiivne käsitus Fokkeri-Plancki võrrandi formalismis**

2006. aastal töötasid Jiménez-Aquino ja Romero-Bastida [21] välja tõenäosustiheduse arvutamise alternatiivse meetodi, mis erineb varem väljapakututest [17, 20]. Antud meetod seisneb selles, et pöördemaatriksi

$$R \equiv e^{-Wt} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_z t) & \sin(\omega_z t) & 0 \\ -\sin(\omega_z t) & \cos(\omega_z t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & 0 \\ -\omega_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

abil teisendatakse Langeveni võrrandit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\Lambda\vec{v} + \vec{\xi}(t) \quad (4.29)$$

laetud Browni osakese jaoks magnetväljas ( $\Lambda$  on määratud valemiga (4.13)) ühest kiiruste ruumist ( $\vec{v}$ ) teise kiiruste ruumi ( $\vec{v}'$ ), kasutades muutuja vahetusest

$$\vec{v}' = e^{-Wt}\vec{v}. \quad (4.30)$$

Selliste muutujate sissetoomise tulemusena saadakse uute kiiruste ruumis Langevini võrrand, mis on oma kujult üsnagi analoogne vastava võrrandiga vaba Browni liikumise juhu jaoks,

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = -\beta\vec{v}' + R^{-1}(t)\vec{\xi}(t). \quad (4.31)$$

Märgime, et skeemides [17, 20] on muutuja vahetus tehtud alles Fokkeri-Plancki võrrandis erinevalt meetodist [21]. Langevini võrrand (4.31) erineb vaba Browni liikumise võrrandist selle poolest, et siin on Langevini jõuvektor korrutatud maatriksiga  $R^{-1}(t)$ , st on tegemist juhusliku jõu pöördega. Kuna pöördemaatriks on ortogonaalne, siis on selle tõttu difusioonikoefitsiendi ja triivikoefitsiendi avaldised samasugused nagu väliste jõudude puudumise korral,

$$D'_i = -\beta\vec{v}'_i, \quad D'_{ij} = q(R^{-1}(t))_{ik}(R^{-1}(t))_{jk} = q\delta_{ij}. \quad (4.32)$$

See tähendab, et müra statistilised omadused on invariantseid pöörete suhtes. Sellele võib anda lihtsa füüsikalise interpretatsiooni: pöördemaatriks  $R^{-1}(t)$  elementidega  $\cos(\omega_z t)$  ja  $\sin(\omega_z t)$  neelatakse müra poolt, mis viib selleni, et taolised perioodilised

funktsioonid ei esine enam difusioonikoeffitsiendi avaldises Fokkeri-Plancki võrrandis. Minnes tagasi esialgsete kiiruste ruumi saadakse üleminekutõenäosustiheduse avaldis, mis langeb kokku Czopnik'i ja Garbaczewski tulemusega [19] isotroopse juhu jaoks.

Analoogsel viisil saab taandada Langevini võrrandi vaba Browni liikumise juhule ka faasiruumis, teostades muutuja vahetuse (4.30). Seega on ühistõenäosustihedus kujul

$$W(\vec{R}, \vec{S}) = \widetilde{W}(\tilde{R}, \tilde{S})W_z(z, v_z, t|v_{0z}, z_0), \quad (4.33)$$

st see on esitatud tõenäosustiheduste korrutisena, mis kirjeldavad difusiooniprotsessi vastavalt tasandis  $XY$  ja piki magnetvälja suunda. Valemis (4.33)

$$\widetilde{W}(\tilde{R}, \tilde{S}) = \frac{J'_R}{4\pi^2(FG - H^2)} \exp\left[-\frac{F|\tilde{S}|^2 + \delta G|\tilde{R}|^2 - 2H\tilde{R}\cdot\tilde{S} + \frac{2\omega_z}{\beta}H(\tilde{S} \times \tilde{R})_z}{2(FG - H^2)}\right], \quad (4.34)$$

$$J'_R = \frac{\omega_z^2 + \beta^2}{\beta^2}; \quad \tilde{S} = (S_1, S_2), \quad \tilde{R} = (R_1, R_2) \quad (4.35)$$

ning  $F, G, H$  on antud valemitega (3.26),(3.27) ja  $\vec{R}, \vec{S}$  - valemiga (4.18).

Kui võrrelda tõenäosustiheduse avaldist (4.34) valemiga (4.25), mis on saadud Czopnik'i ja Garbaczewski [19] poolt, siis on näha, et need avaldised ei lange omavahel päris kokku, ehkki omavad küllaltki sarnast kuju.

### 4.3 Browni liikumine elektri- ja magnetväljas isotroopsel juhul

Kombineerides kahte meetodit [17, 19], lahendasid Simões ja Lagos [22] Browni liikumise probleemi isotroopsel juhul elektri- ja magnetväljas ( $\vec{E}$  ja  $\vec{B}$ ) ning mehaanilise jõu  $\vec{F}_{mec}$  olemasolu korral, st väline jõuväli on kujuga

$$F(\vec{v}, t) = \vec{F}_{mec} + e\vec{E} + \frac{e}{mc}\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.36)$$

Matemaatiliste arvutuste lihtsustamiseks kasutati *bra*- ja *ket*-vektoreid. Iga vektori võib kirjutada üles järgmiselt:

$$\vec{V} = V_x|x\rangle + V_y|y\rangle + V_z|z\rangle. \quad (4.37)$$



Samuti defineeritakse mõned kasulikud diaadid

$$e_1 = |z\rangle\langle z|; \quad e_2 = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|; \quad e_3 = |x\rangle\langle y| - |y\rangle\langle x| \quad (4.38)$$

ning ühikdiaadi

$$e = e_1 + e_2, \quad (4.39)$$

tänu millele saab Fokkeri-Plancki võrrand üsna kompaktse kuju

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} W + \vec{a} \text{grad}_{\vec{v}} W = \text{div}_{\vec{v}}(\Lambda \vec{v} W) + \Delta_{\vec{v}} W, \quad (4.40)$$

kus on mindud üle dimensioonitutele suurustele [22],  $W = W(\vec{r}, \vec{v}, t | \vec{v}_0, \vec{r}_0)$  ning

$$\Lambda \vec{v} = \vec{v} + \vec{\omega}_z \times \vec{v} = (e - \omega_z e_3) \vec{v} \quad (4.41)$$

on dissipatsioonijõu tensor [19, 30]. Defineerime dimensioonitu pörkeaja tensori [30]

$$M = \Lambda^{-1} = e_1 + \alpha(e_2 + w_z e_3), \quad (4.42)$$

kus  $\alpha^{-1} = 1 + \omega_z^2$ . Seejärel läheme Ferrari teisenduse [17] abil üle uutele muutujatele

$$\vec{R} = \vec{r} - \delta \vec{r}(\vec{a}, M, t), \quad \vec{S} = \vec{v} - \delta \vec{v}(\vec{a}, M, t), \quad (4.43)$$

kus

$$\begin{aligned} \delta \vec{r} &= M \vec{a} t - M^2 (1 - \Xi) \vec{a} + M (1 - \Xi) \vec{v}_0 + \vec{r}_0, \\ \delta \vec{v} &= M (1 - \Xi) \vec{a} + \Xi \vec{v}_0, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\Xi = \exp(-t) (e_1 + e_2 \cos(\omega_z t) + e_3 \sin(\omega_z t)). \quad (4.45)$$

Selle tulemusena saadakse Fokkeri-Plancki võrrand, mis vastab formaalselt väliste jõuväljade puudumisele. Minnes nüüd tagasi esialgsetele muutujatele, jõutakse ühistõenäosustiheduse lõpliku avaldiseni [22].

Elektri- ja magnetväljas liikuvate Browni osakeste teooria loomulikuks edasiarenduseks on selle üldistus anisotroopse hõõrdumise juhule.

## 5 Browni liikumine elektri- ja magnetväljas anisotroopse hõõrdumise korral

### 5.1 Fokkeri-Plancki võrrand kiiruste ruumis

Vaatleme massiga  $m$  ja laenguga  $e$  laetud Browni osakeste liikumist ruumis homogeenses konstantses elektriväljas  $\vec{E}$  ja magnetväljas  $\vec{B}$ . Erinevalt tööst [22], milles uuriti osakeste liikumist elektri- ja magnetväljas isotroopse hõõrdumise korral, pakub meile huvi üldisem juht, anisotroopne diagonaalne hõõrdumine, st dissipatsioonitenor näeb välja selline

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

kus  $\beta_{x,y,z}$  on hõõrdetegur vastavalt suunas  $x, y, z$ . Sellel juhul on Langevini võrrand Browni osakese kiiruse jaoks üleskirjutatav kujul

$$\frac{dv_i}{dt} = - \sum_{j=1}^3 \rho_{ij} v_j + \frac{e}{mc} (\vec{v} \times \vec{B})_i + \varepsilon_i + \sqrt{a_i} \xi_i(t), \quad i = 1, 2, 3 = x, y, z. \quad (5.2)$$

kus Langevini jõul on järgmised statistilised omadused:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (5.3)$$

Suurused

$$a_i = \frac{2k_B T}{m} \beta_i, \quad \varepsilon_i = \frac{eE_i}{m} \quad (5.4)$$

on vastavalt Langevini jõu intensiivsus ja laetud osakesele elektriväljas mõjuv jõud. Lihtsustamiseks eeldame, et magnetväli on suunatud piki  $z$ -telge:  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ . Sealjuures omab elektriväli endiselt suvalist suunda:  $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ . Siis võib Langevini võrrandi (5.2) esitada kompaktsemal kujul

$$\frac{dv_i}{dt} = - \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} v_j + \varepsilon_i + \sqrt{a_i} \xi_i(t), \quad (5.5)$$

kus

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \beta_x & -\omega_z & 0 \\ \omega_z & \beta_y & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

ning  $\omega_z = \frac{eB_z}{mc}$  on Larmori sagedus.

Selleks, et minna Langevini võrrandis (5.5) üle dimensioonitute suurustele, võtame arvesse, et CGS süsteemis on elektrilaengu  $e$  ja elektriväljatugevuse  $E$  dimensioonideks

$$[e] = l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}, \quad [E] = l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}. \quad (5.7)$$

Paneme kirja laetud osakesele elektriväljas mõjuvat jõu kujul

$$\varepsilon_i = \frac{e}{m} |\vec{E}| \cos \vartheta_i, \quad (5.8)$$

kus  $\cos \vartheta_i$  on elektrivälja tugevuse vektori suunakoosinus vastavas suunas. Toome nüüd sisse järgmised dimensioonitud suurused:

$$\tilde{v}_i = \frac{v_i}{\gamma'}, \quad \tilde{\lambda}_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\gamma''}, \quad \tilde{t} = t\gamma'', \quad \tilde{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i}{\gamma'\gamma''} = \cos \vartheta_i, \quad \tilde{a}_i = \frac{a_i}{\gamma'^2\gamma''}, \quad (5.9)$$

kus

$$\gamma' = \frac{e^{3/4}E^{1/4}}{m^{1/2}}, \quad \gamma'' = \frac{e^{1/4}E^{3/4}}{m^{1/2}}, \quad (5.10)$$

mille dimensioonideks on

$$[\gamma'] = \frac{l}{t}, \quad [\gamma''] = \frac{1}{t}. \quad (5.11)$$

Langevini võrrandid dimensioonitute suuruste jaoks tulevad sellised

$$\frac{d\tilde{v}_i}{d\tilde{t}} = - \sum_{j=1}^3 \tilde{\lambda}_{ij} \tilde{v}_j + \tilde{\varepsilon}_i + \sqrt{\frac{\tilde{a}_i}{\gamma''}} \xi_i \left( \frac{\tilde{t}}{\gamma''} \right), \quad (5.12)$$

kus Langevini jõud rahuldab tingimuse (5.3). Edaspidi jätame tähistustes tilded ära.

Browni liikumise probleemi lahendamiseks elektri- ja magnetväljas rakendame sagedamini kasutatavat meetodit [17, 20, 21, 22], Fokkeri-Plancki võrrandi formalismi [9]. Kiiruste tõenäosustiheduse leidmine, lähtudes Fokkeri-Plancki võrrandist, on võimalik kahel viisil:

- (i) tehes Fokkeri-Plancki võrrandis muutujate vahetuse, milleks tuleb kasutada liikumisvõrrandite esimesi integraale [9] nagu artiklites [17, 20, 22]
- (ii) tuues sisse uued muutujad juba Langevini võrrandites [21], vältimaks üsna komplitseeritud kujuga liikumisintegraalide kasutamist.

Pidades silma teise lahendamisviisi eeliseid, kasutame diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.5) diagonaliseerimisvõtet. See meetod erineb artiklis [21] toodud ajast sõltuvast ortogonaalseisendusest. Lineaarsest algebrast [31, 32] on teada, et konstantsete kordajatega lineaarsete mittehomogeensete 1. järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n M_{ij}x_j + l_i; \quad i = 1 \dots n \quad (5.13)$$

on võimalik viia diagonaalkujule,

$$\frac{dy_i}{dt} = m_i y_i + L_i; \quad i = 1 \dots n, \quad (5.14)$$

siis ja ainult siis, kui  $n \times n$  maatriksi  $M_{ij}$  omab  $n$  lineaarselt sõltumatut omavektorit, mis vastavad nullist erinevatele omaväärtustele  $m_1, \dots, m_n$ . Selleks tuleb teha muutuja vahetus

$$y_i = \sum_{j=1}^n (\mu^{-1})_{ij} x_j, \quad (5.15)$$

kus  $\mu_{ij}$  on maatriksi  $M_{ij}$  omavektoritest moodustatud maatriks. Omaväärtusele  $m_i$  vastav omavektor on veerumaatriks ning

$$L_i = \sum_{j=1}^n (\mu^{-1})_{ij} l_j. \quad (5.16)$$

Vektorite lineaarse sõltumatuse tingimuseks on teatavasti see, et nendest moodustatud maatriks on regulaarne.

Maatriksi diagonaliseerimise teoreemil on ka alternatiivne sõnastus: maatriksit on alati võimalik viia diagonaalkujule siis, kui seda saab esitada:

$$M_{ij} = \sum_{k,r=1}^n \mu_{ik} m_{kr} (\mu^{-1})_{rj}, \quad (5.17)$$

kus  $m_{kr} = m_k \delta_{kr}$  maatriks, mille peadiagonaali elementideks on maatriksi  $M_{ij}$  omaväärtused. Viimasest valemist on näha, et kui  $\det \mu_{ik} = 0$ , siis ei eksisteeri diagonaalset maatriksit. Sel juhul öeldakse, et maatriks  $M_{ij}$  on defektne.

Juhime tähelepanu sellele, et eksisteerib oluline erijuht, mille korral kõik maatriksi omavektorid on kindlasti lineaarselt sõltumatud: maatriksi omaväärtused on paarikaupa erinevad (st on tegemist omaväärtuste mittekõdunud spektriga). Kordsete omaväärtuste korral on olukord keerulisem: siis ei ole olemas üldist kriteeriumit

maatriksi diagonaalkujule viimise võimalikkuse kohta. Sel juhul sõltub kõik maatriksi konkreetsest kujust.

Rakendades ülaltoodud skeemi, läheme liikumisvõrrandite süsteemilt (5.12) üle kolmele sõltumatule Langevini võrrandile

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \Lambda_i u_i(t) + k_i + \zeta_i \left( \frac{t}{\gamma''} \right), \quad (5.18)$$

kus

$$u_i = \sum_{j=1}^3 (\mu^{-1})_{ij} v_j, \quad (5.19)$$

ning

$$k_i = \sum_{j=1}^3 (\mu^{-1})_{ij} \epsilon_j, \quad \zeta_i \left( \frac{t}{\gamma''} \right) = \sum_{j=1}^3 (\mu^{-1})_{ij} \sqrt{\frac{a_j}{\gamma''}} \xi_j \left( \frac{t}{\gamma''} \right). \quad (5.20)$$

Edaspidi tähistame ümber:

$$\alpha_{ij} = (\mu^{-1})_{ij}. \quad (5.21)$$

Teisendatud Langevini jõu komponentide keskväärtus avaldub

$$\left\langle \zeta_i \left( \frac{t_1}{\gamma''} \right) \zeta_j \left( \frac{t_2}{\gamma''} \right) \right\rangle = A_{ij} \delta(t_1 - t_2), \quad (5.22)$$

kus

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \alpha_{jk} a_{kk}, \quad a_{kk} \equiv a_k. \quad (5.23)$$

Võib veenduda, et maatriksi  $\lambda_{ij}$  (5.6) omaväärtused on

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\beta_x + \beta_y \pm i\Omega), \quad \Lambda_3 = \beta_z, \quad (5.24)$$

kus

$$\Omega = \sqrt{4\omega_z^2 - (\beta_x - \beta_y)^2} \quad (5.25)$$

ning omavektorite maatriks näeb välja selline

$$\mu_{ij} = \begin{pmatrix} a b_2 & c b_1 & 0 \\ a & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \quad b_1 = -\frac{\Lambda_1 - \beta_x}{\omega_z}, \quad b_2 = -\frac{\Lambda_2 - \beta_x}{\omega_z}, \quad (5.26)$$

kus  $a$ ,  $c$  ja  $d$  on siin suvalised konstandid. Kuna anisotroopse dissipatsioonitensori  $\rho_{ij}$  (5.1) korral ei ole  $\lambda_{ij}$  (5.6) normaalmaatriks, siis viimane on diagonaliseeritav mitteunitaarse omavektorite maatriksi abil. See tähendab, omavektorite

maatriksi elementidele ei ole peale pandud mingeid kitsendavaid tingimusi, seetõttu võime konstante  $a$ ,  $c$ ,  $d$  valida järgmiselt

$$a = -\frac{1}{b_1 - b_2}, \quad c = \frac{1}{b_1 - b_2}, \quad d = 1, \quad (5.27)$$

Konstantide niisuguse valikuga tagame kiiruste teisenduseeskirjas (5.19) figureeriva maatriksi  $\alpha_{ij}$  jaoks võimalikult lihtsa kuju:

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & 0 \\ 1 & -b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Ainult ühel erijuhul, isotroopse hõõrdumise korral, on tegemist unitaarse kiiruste teisendusega, sest uute kiiruste ruum on kompleksne eukleidiline vektorruum.

Sõltuvalt sellest, kas  $\Lambda_{1,2}$ -s ruutjuure all olev avaldis  $4\omega_z^2 - (\beta_x - \beta_y)^2$  on positiivne või negatiivne, saab eristada kahte režiimi:

(i) **Reaalne juht:**  $4\omega_z^2 - (\beta_x - \beta_y)^2 < 0$

Maatriksi omaväärtused ja omavektorid on reaalsed suurused

(ii) **Kompleksne juht:**  $4\omega_z^2 - (\beta_x - \beta_y)^2 > 0$

Maatriksi omaväärtused ja omavektorid on kompleksed suurused, sealjuures  $\Lambda_1 = \Lambda_2^*$  ja  $b_1 = b_2^*$ .

Seega eksisteerib selline magnetvälja kriitiline väärtus

$$\omega_z^c = \frac{|\beta_x - \beta_y|}{2}, \quad (5.29)$$

mille korral toimub ümberlülitumine kahe režiimi vahel.

Kui  $(\beta_x - \beta_y)^2 - 4\omega_z^2 = 0$ , siis omaväärtused  $\Lambda_1$  ja  $\Lambda_2$  (5.24) on võrdsed:

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \frac{1}{2}(\beta_x + \beta_y) \quad (5.30)$$

ning neile vastab ainult üks omavektor. Järelikult magnetvälja kriitilisel väärtusel  $\omega_z^c$  ei ole Langevini võrrandite süsteem diagonaliseeritav. Vaatamata sellele saab veenduda, et liikumisvõrrandite süsteem on üheselt lahendatav Laplace teisenduse abil.

Seetõttu on nii üleminekutõenäosustihedus kui ka vool ning kiiruste kovariatsioonid lõplikud suurused magnetvälja kriitilisel väärtusel.

Langevini võrranditele (5.18) vastav Fokkeri-Plancki võrrand kiiruste ruumis on esitatav kujul

$$\frac{\partial W(\vec{u}, t | \vec{u}_0)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} [(-\Lambda_i u_i + k_i) W(\vec{u}, t | \vec{u}_0)] + \sum_{i,j=1}^3 \frac{A_{ij}}{2} \frac{\partial^2 W(\vec{u}, t | \vec{u}_0)}{\partial u_i \partial u_j}. \quad (5.31)$$

Sealjuures peab tõenäosustihedus rahuldama algtingimust

$$W(\vec{u}, 0 | \vec{u}_0) = \delta(\vec{u} - \vec{u}_0), \quad (5.32)$$

kus oleme valinud alghetkeks  $t = 0$ .

## 5.2 Kiiruste tõenäosustihedus

Fokkeri-Plancki võrrandi (5.31) lahendamiseks üldistame Chandrasekhari skeemi [9] anisotroopse hõõrdumise juhule, minnes üle uutele muutujatele, liikumisin-tegraalidele

$$I_i(t) = \left( u_i - \frac{k_i}{\Lambda_i} \right) e^{\Lambda_i t}. \quad (5.33)$$

Muutuja vahetuse tulemusena jõuame võrrandini

$$\frac{\partial W(\vec{I}, t)}{\partial t} = W(\vec{I}, t) \sum_{i=1}^3 \Lambda_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} \frac{\partial^2 W(\vec{I}, t)}{\partial I_i \partial I_j}. \quad (5.34)$$

Defineerime uue tõenäosustiheduse

$$\widetilde{W}(\vec{I}, t) = e^{-\sum_i \Lambda_i t} W(\vec{I}, t), \quad (5.35)$$

mis peab rahuldama algtingimust

$$\widetilde{W}(\vec{I}, 0) = \delta(\vec{I} - \vec{I}_0) \quad (5.36)$$

ning loomulikke ääritingimusi

$$\widetilde{W}(\vec{I}, t) \Big|_{\vec{I}=\pm\infty} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{W}(\vec{I}, t)}{\partial I_i} \Big|_{\vec{I}=\pm\infty} = 0, \quad (5.37)$$

kus

$$I_{0i} \equiv I_i(t=0) = u_{0i} - \frac{k_i}{\Lambda_i}. \quad (5.38)$$

Fokkeri-Plancki võrrand uue tõenäosustiheduse jaoks saab nüüd kuju

$$\frac{\partial \widetilde{W}(\vec{I}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} e^{(\Lambda_i + \Lambda_j)t} \frac{\partial^2 \widetilde{W}(\vec{I}, t)}{\partial I_i \partial I_j}, \quad (5.39)$$

Lahendame võrrandi (5.39) tõenäosustiheduse jaoks, kasutades kolme juhusliku suuruse  $I_i$  karakteristikliku funktsiooni, mis on teatavasti defineeritud kui

$$C(n_1, n_2, n_3, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \sum_{m=1}^3 n_m I_m\right) \widetilde{W}(I_1, I_2, I_3, t) dI_1 dI_2 dI_3. \quad (5.40)$$

Võttes siin  $t = 0$  ning kasutades tõenäosustiheduse algtingimust (5.36), saame algtingimuse karakteristiklike funktsioonile

$$C(n_1, n_2, n_3, 0) = \exp\left(\sum_{m=1}^3 n_m I_{0m}\right). \quad (5.41)$$

Leiame karakteristikliku funktsiooni (5.40) tuletise aja järgi ning kasutame seejärel võrrandit (5.39),

$$\frac{\partial C(\vec{n}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^3 A_{kj} e^{(\Lambda_k + \Lambda_j)t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum_m n_m I_m} \frac{\partial^2 \widetilde{W}(\vec{I}, t)}{\partial I_k \partial I_j} d\vec{I}. \quad (5.42)$$

Võrrandis (5.42) seisva integraali leidmiseks kasutame vektoranalüüsi valemit [33]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}) d^3 r = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{D} \operatorname{grad} f(\vec{r}) d^3 r, \quad (5.43)$$

mis kehtib ainult juhul, kui kas  $f(\vec{r})$  või  $\vec{D}(\vec{r})$  või mõlemad lähenevad nullile lõpmatuses  $\vec{r} = \pm\infty$ , st on täidetud üks kolmest tingimusest:

$$f(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\pm\infty} = 0, \quad \vec{D}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\pm\infty} = 0, \quad f(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\pm\infty} = 0. \quad (5.44)$$

Valemit (5.43) on võimalik esitada ka alternatiivsel kujul

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial D_k(\vec{r})}{\partial r_k} d^3 r = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 D_k(\vec{r}) \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial r_k} d^3 r. \quad (5.45)$$

Antud juhul

$$D_k(\vec{I}, t) = \sum_{j=1}^3 A_{kj} e^{(\Lambda_k + \Lambda_j)t} \frac{\partial \widetilde{W}(\vec{I}, t)}{\partial I_j}, \quad f(\vec{I}) = e^{i \sum_m n_m I_m}. \quad (5.46)$$



Märgime, et tõenäosustiheduse ääreloomulike tingimuste (5.37) tõttu on rahuldatud teine tingimus (5.44):  $\vec{D}(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\pm\infty} = 0$ . Siis valemi (5.45) kohaselt

$$\frac{\partial C(\vec{n}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^3 D_k(\vec{I}, t) \frac{\partial f(\vec{I})}{\partial I_k} d\vec{I}. \quad (5.47)$$

Asendades  $D_k(\vec{I}, t)$  ja  $f(\vec{I})$  avaldised (5.46) valemisse (5.47) ning tähistades

$$P_j(\vec{I}, t) = \sum_{k=1}^3 A_{kj} e^{(\Lambda_k + \Lambda_j)t} n_k \widetilde{W}(\vec{I}, t), \quad (5.48)$$

jõutakse võrrandini

$$\frac{\partial C(\vec{n}, t)}{\partial t} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_j(\vec{I}, t)}{\partial I_j} f(\vec{I}) d\vec{I}. \quad (5.49)$$

Kasutades veelkord valemit (5.45) ja võttes arvesse esimest loomulikest ääretingimustest (5.37), saame võrrandi, mida peab rahuldama karakteristiklik funktsioon (5.40):

$$\frac{\partial C(\vec{n}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} e^{(\Lambda_i + \Lambda_j)t} n_i n_j C(\vec{n}, t). \quad (5.50)$$

Algingimuse (5.41) korral on diferentsiaalvõrrandi (5.50) lahendiks

$$C(\vec{n}, t) = e^{i \sum_m n_m I_{0m}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 s_{ij} n_i n_j \right], \quad (5.51)$$

kus

$$s_{ij} = \frac{A_{ij}}{\Lambda_i + \Lambda_j} \left[ e^{(\Lambda_i + \Lambda_j)t} - 1 \right]. \quad (5.52)$$

On teada, et tõenäosustihedus kujutab endast karakteristikliku funktsiooni Fourier komponenti

$$\widetilde{W}(\vec{I}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int C(\vec{n}, t) e^{-i \sum_m n_m I_m} d\vec{n}. \quad (5.53)$$

Valemite (5.51), (5.53) alusel

$$\widetilde{W}(\vec{I}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int e^{-i \sum_m n_m (I_m - I_{0m})} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 s_{i,j} n_i n_j \right) d\vec{n}. \quad (5.54)$$

Integraali leidmiseks läheme valemis (5.54) üle uutele integreerimismuutujatele

$$r_j = \sum_{k=1}^3 \left[ (s^{1/2})_{jk} n_k + i (s^{-1/2})_{jk} (I_k - I_{0k}) \right]. \quad (5.55)$$

Pärast matemaatilise teisendusi on võimalik saada tulemuseks Gaussi jaotuse kujul

$$\widetilde{W}(\vec{I}, t) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 \det[s_{ij}]}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (s^{-1})_{ij} (I_i - I_{i0})(I_j - I_{j0})\right]. \quad (5.56)$$

Minnes tagasi esialgsetele tõenäosustihedusele ja kiirustele, on võimalik jõuda järgmise avaldiseni kiiruste tõenäosustiheduse jaoks

$$W(\vec{v}, t|\vec{v}_0) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 \det[h_{ij}]}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (h^{-1})_{ij} (v_i - \langle v_i \rangle)(v_j - \langle v_j \rangle)\right], \quad (5.57)$$

kus

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} & -\frac{K_{12}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} & 0 \\ -\frac{K_{12}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} & \frac{K_{11}}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K_{33}} \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

on kiiruse kovariatsioonimaatriks, st

$$\langle \Delta v_x^2 \rangle = h_{11}, \quad \langle \Delta v_y^2 \rangle = h_{22}, \quad \langle \Delta v_z^2 \rangle = h_{33}, \quad \text{cov}(v_x, v_y) = h_{12}, \quad (5.59)$$

ning

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{2} \frac{K_2 K_{12} - K_1 K_{22}}{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}, \quad \langle v_y \rangle = \frac{1}{2} \frac{K_1 K_{12} - K_2 K_{11}}{K_{11} K_{22} - K_{12}^2}, \quad \langle v_z \rangle = -\frac{K_3}{2K_{33}}, \quad (5.60)$$

on keskmised kiirused. Valemites (5.58), (5.60) on kasutatud järgmisi tähistusi:

$$K_{ij} = \left[ \frac{(\alpha_{21})^2 A_{11} + (\alpha_{22})^2 A_{22}}{2\Lambda_2} \frac{\alpha_{1i} \alpha_{1j}}{\varphi_{11}} + \frac{(\alpha_{11})^2 A_{11} + (\alpha_{12})^2 A_{22}}{2\Lambda_1} \frac{\alpha_{2i} \alpha_{2j}}{\varphi_{22}} - \frac{\alpha_{11} \alpha_{21} A_{11} + \alpha_{12} \alpha_{22} A_{22}}{\Lambda_1 + \Lambda_2} (\alpha_{1i} \alpha_{2j} + \alpha_{1j} \alpha_{2i}) \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11} \varphi_{22}} \right] g^{-1}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$K_{33} = \frac{2\Lambda_3}{A_{33}} \varphi_{33}^{-1},$$

$$K_i = -2 \left\{ \left[ \alpha_{11} f_{11} + \alpha_{12} f_{12} \right] \left[ \frac{(\alpha_{21})^2 A_{11} + (\alpha_{22})^2 A_{22}}{2\Lambda_2} \frac{\alpha_{1i}}{\varphi_{11}} - \frac{\alpha_{11} \alpha_{21} A_{11} + \alpha_{12} \alpha_{22} A_{22}}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11} \varphi_{22}} \alpha_{2i} \right] + \left[ \alpha_{21} f_{21} + \alpha_{22} f_{22} \right] \left[ \frac{(\alpha_{11})^2 A_{11} + (\alpha_{12})^2 A_{22}}{2\Lambda_1} \frac{\alpha_{2i}}{\varphi_{22}} - \frac{\alpha_{11} \alpha_{21} A_{11} + \alpha_{12} \alpha_{22} A_{22}}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11} \varphi_{22}} \alpha_{1i} \right] \right\} g^{-1}, \quad i = 1, 2;$$

$$K_3 = -\frac{4\Lambda_3}{A_{33}} f_{33} \varphi_{33}^{-1}, \quad i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
g &= \frac{(\alpha_{11}^2 A_{11} + \alpha_{12}^2 A_{22})(\alpha_{21}^2 A_{11} + \alpha_{22}^2 A_{22})}{4\Lambda_1\Lambda_2} - \frac{(\alpha_{11}\alpha_{21}A_{11} + \alpha_{12}\alpha_{22}A_{22})^2}{(\Lambda_1 + \Lambda_2)^2} \frac{\varphi_{12}^2}{\varphi_{11}\varphi_{22}}, \\
\varphi_{ij} &= 1 - e^{-(\Lambda_i + \Lambda_j)t}, \\
f_{ij} &= \frac{\epsilon_j}{\Lambda_i} + \left( v_{0j} - \frac{\epsilon_j}{\Lambda_i} \right) e^{-\Lambda_i t}.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

## 5.3 Relaksatsioonid kiiruste ruumis

### 5.3.1 Voolu, kiiruse kovariatsioonide ja dispersioonide ajaline käitumine

Nagu oli märgitud paragrahvis 5.1 seoses Fokkeri-Plancki võrrandi leidmisega on olemas kaks juhtu sõltuvalt avaldise  $4\omega_z^2 - (\beta_x - \beta_y)^2$  märgist (vt maatriksi  $\lambda_{ij}$  (5.6) omaväärtuste avaldise (5.24)). Juhime tähelepanu sellele, et reaalne juht ei ole kompleksse erijuhuks, kuna üleminekul komplekselt juhult reaalsele mitte ainult omaväärtuste  $\Lambda_{1,2}$  imaginaarosa saab nulliks, vaid muutub ka reaalosa. Kuna omaväärtused (5.24) figureerivad suuruste  $f_{ij}$ ,  $\varphi_{ij}$  (5.61) eksponentides, mis määravad keskmise kiiruse ja kovariatsioone, siis kompleksel juhul voolu ja kiiruste kovariatsioonide avaldised sisalduvad endas koosinusfunktsiooni (või siinusfunktsiooni) erinevalt reaalsest juhust. See tähendab, eksisteerib ajalise sõltuvuse kaks režiimi:

(i)  $|\omega_z| > \omega_z^c$

Ostsileeruv režiim, st osakesed pöörlevad ümber magnetvälja jõujoone.

(ii)  $|\omega_z| < \omega_z^c$

Mitteostsileeruv režiim

Ostsileeruva režiimi oluliseks erijuhuks on laetud Browni osakeste liikumine isotroopses keskkonnas.

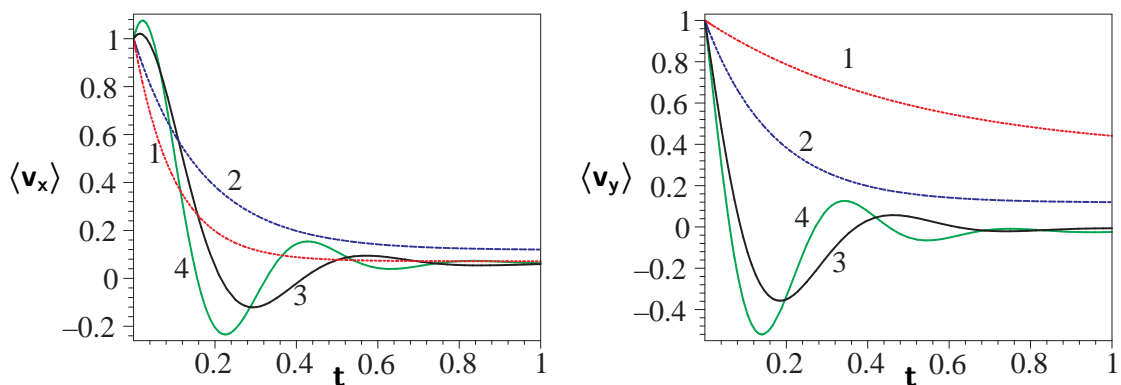
Joonisel 1. on kujutatud voolu komponentide sõltuvused ajast erinevatel magnetväljade tugevuste korral mõlema režiimi jaoks<sup>1</sup>. On näha, et kriitilisest väärtusest tugevama magnetvälja korral ostsilleeruvad voolu komponendid sumbuvalt, saavutades statsionaarse väärtuse. Nõrgemate magnetväljade korral leaib aset voolu komponentide monotoonset kahanemist statsionaarse väärtuseni.

---

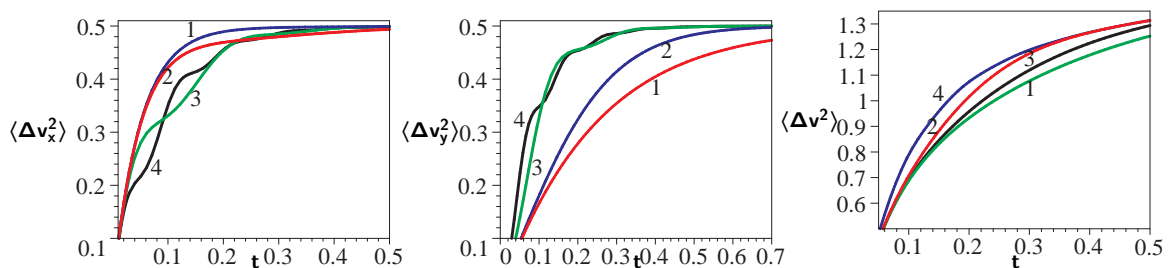
<sup>1</sup>Siin ja edaspidi numbrilistes arvutustes on võetud  $\frac{k_B T}{m} = 1$ .

Samasugune ajaline käitumine sõltuvalt režiimist on iseloomulik ka kiiruste dispersiooni komponentidele, mis kasvavad ajast nullist teatud väärtuseni (vt joonis 2.). Ostsileeruva režiimi korral puuduvad võnkumised kiiruse dispersiooni moodulis erinevalt keskmise kiiruse moodulist (vt joonis 2.).

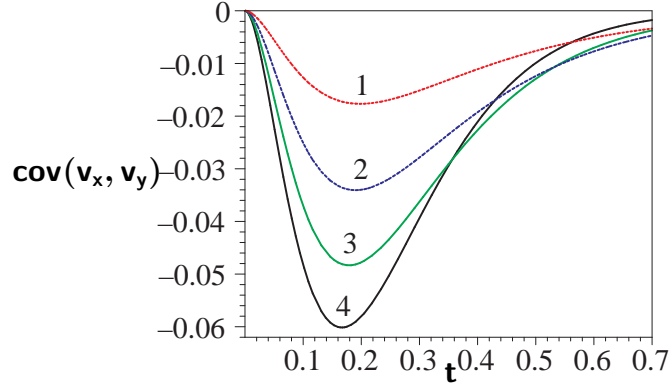
Anisotroopses keskkonnas tugevate magnetväljade korral on näha kiiruse komponentide kovariatsiooni ostsilleerumist ajast, kriitilist nõrgemate magnetväljade korral käitub kovariatsioon küll mitte-monotoonselt, kuid ostsilaatsioonid puuduvad (vt joonis 3., 4.).



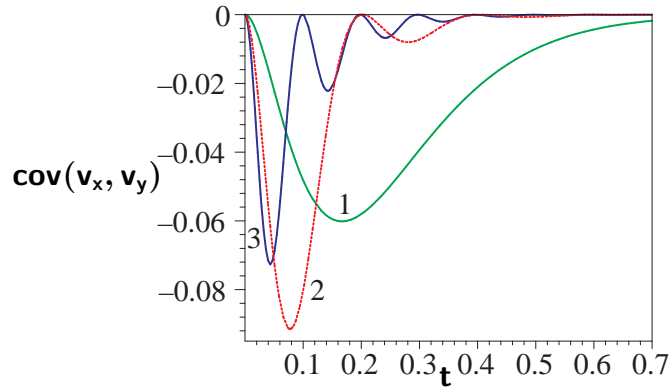
Joonis 1: Kiiruse keskväärtuse komponentide sõltuvus ajast erinevate Larmori sageduste korral. Parameetrid:  $\beta_x = 10$ ,  $\beta_y = 2$ ,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \sqrt{2}/2$ ,  $v_{0x} = v_{0y} = 1$ . (1)  $w_z = 0.001$ , (2)  $w_z = w_z^c = 4$ , (3)  $w_z = 12$ , (4)  $w_z = 16$ .



Joonis 2: Kiiruse dispersiooni komponentide ja mooduli sõltuvus ajast erinevate Larmori sageduste korral. Parameetrid:  $\beta_x = 10$ ,  $\beta_y = 2$ . (1)  $w_z = 1$ , (2)  $w_z = w_z^c = 4$ , (3)  $w_z = 16$ , (4)  $w_z = 32$ .



Joonis 3: Kiiruse komponentide  $v_x$ ,  $v_y$  kovariatsiooni sõltuvus ajast erinevate Larmori sageduste  $\omega_z \leq \omega_z^c$  korral. Parameetrid:  $\beta_x = 10$ ,  $\beta_y = 2$ . (1)  $w_z = 1$ , (2)  $w_z = 2$ , (3)  $w_z = 3$ , (4)  $w_z = w_z^c = 4$ .



Joonis 4: Kiiruse komponentide  $v_x$ ,  $v_y$  kovariatsiooni sõltuvus ajast erinevate Larmori sageduste  $\omega_z \geq \omega_z^c$  korral. Parameetrid:  $\beta_x = 10$ ,  $\beta_y = 2$ . (1)  $w_z = w_z^c = 4$ , (2)  $w_z = 16$ , (3)  $w_z = 32$ .

### 5.3.2 Keskkonna anisotroopsuse mõju kiiruse komponentide kovariatsioonile ja dispersioonile

Kiiruste kovariatsiooni ja dispersiooni (5.58), (5.59) käitumise eripärasuste uurimiseks anisotroopses keskkonnas esitame nende avaldisi kujul

$$\begin{aligned} \langle \Delta v_{x,y}^2 \rangle &= \frac{k_B T}{m} \left[ (\beta_x - \beta_y)^2 \cos(\Omega t) \pm \Omega (\beta_x - \beta_y) \sin(\Omega t) - 4\omega_z^2 \right] \\ &\times \frac{e^{-(\beta_x + \beta_y)t}}{\Omega^2} + \frac{k_B T}{m}, \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\text{cov}(v_x, v_y) = -4 \frac{k_B T \omega_z (\beta_x - \beta_y)}{m \Omega^2} \left[ \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \right]^2 e^{-(\beta_x + \beta_y)t}. \quad (5.63)$$

Arvestades, et isotroopsel juhul ( $\beta_x = \beta_y \equiv \beta$ ) on  $\Omega = 4\omega_z^2$ , saame kiiruste kovariatsiooni ja dispersiooni jaoks

$$\langle \Delta v_{x,y}^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} (1 - e^{-2\beta t}), \quad cov(v_x, v_y) = 0. \quad (5.64)$$

Võrreldes omavahel valemid anisotroopse ja isotroopse keskkonna korral (5.62)-(5.64), on näha järgmisi erinevusi:

1. Kovariatsioon ei sõltu isotroopsel juhul ajast ega magnetväljast ning on võrdne nulliga erinevalt anisotroopsest juhust. Selleks, et kontrollida, kas kiiruste komponendid  $v_x$  ja  $v_y$  on sõltumatud juhuslikud suurused, on vaja veenduda, et kiiruse tõenäosustihedus faktoriseerub (st on esitatav tegurite korrutisena, millest igaüks sõltub ainult ühest kiiruse komponendist). Kuna isotroopsel juhul

$$\Lambda_{1,2} = \beta \pm i\omega_z, \quad b_{1,2} = \mp i, \quad K_{12} = 0, \quad \langle v_i \rangle = -\frac{K_i}{2K_{ii}}, \quad (5.65)$$

siis tõepoolest

$$W(\vec{v}, t | \vec{v}_0) = \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^3 \det[h_{ij}]}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (v_j - \langle v_j \rangle) K_{jj} \right]. \quad (5.66)$$

St kiiruse komponendid ei ole omavahel statistiliselt korreleeritud.

2. Dispersioon ei sõltu isotroopsel juhul magnetväljast ning muutub selle ajaline käitumine: puuduvad ostsillatsioonid.

Märgime, et kiiruse kovariatsiooni ja dispersiooni valemid (5.64) langevad kokku avaldistega Browni liikumise jaoks suvalises konstantses väljas ja isotroopses keskkonnas.

Selleks, et selgitada välja põhjusi, mis tingivad kiiruse kovariatsiooni ja dispersiooni erinevat käitumist sõltuvalt keskkonna isotroopsusest/anisotroopsusest, kasutame Langevini võrrandeid. Nii isotroopses kui ka anisotroopses keskkonnas uute kiiruste ruumis on meil tegemist kolme sõltumatu Langevini võrrandiga (5.18) kiiruse komponentide jaoks, mis erinevad Browni liikumise juhust magnetvälja puudumisel selle poolest, et nii Langevini jõu- kui ka elektrivälja vektor on korrutatud kiiruste

teisendusmaatriksiga  $\alpha_{ij}$  (5.28). Nagu sai mainitud, on isotroopsel ja anisotroopsel juhul üks oluline erinevus: kiiruste teisendus (5.19) on vastavalt kas unitaarne või mitteunitaarne, mille tõttu Langevini jõu komponentide statistilised omadused kas jäävad samasuguseks või muutuvad üleminekul esialgsete kiiruste ruumist ( $\vec{v}$ ) teise kiiruste ruumi ( $\vec{u}$ ). See omakorda tähendab, et uute kiiruste komponentide kovariatsioon on kas võrdne nulliga isotroopsel juhul või nullist erinev anisotroopsel juhul.

Kasutades kahe kompleksse juhusliku suuruse  $x$  ja  $y$  kovariatsiooni definitsiooni [35]:

$$\text{cov}(x, y) = \langle xy^* \rangle - \langle x \rangle \langle y^* \rangle, \quad (5.67)$$

ning kiiruse teisenduseeskirja (5.19), avaldame esialgsete kiiruste kovariatsiooni uute kiiruste kovariatsiooni ja dispersiooni kaudu

$$\text{cov}(v_x, v_y) = \sum_{j,k=1}^2 \mu_{1j} \mu_{2k}^* \text{cov}(u_j, u_k). \quad (5.68)$$

Pidades silmas, et  $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)^*$ , näeb valem (5.68) lahtikirjutuna välja selline

$$\begin{aligned} \text{cov}(v_x, v_y) &= \mu_{11} \mu_{21}^* \text{cov}(v_x, v_x) + \mu_{12} \mu_{22}^* \text{cov}(v_y, v_y) \\ &+ \mu_{11} \mu_{22}^* \text{cov}(v_x, v_y) + \mu_{12} \mu_{21}^* \text{cov}(v_x, v_y)^*. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Arvestades, et isotroopsel juhul

$$\text{cov}(u_1, u_1) = \text{cov}(u_2, u_2), \quad \text{cov}(u_1, u_2) = 0 \quad (5.70)$$

ning kiiruste teisenduse unitaarsuse tingimust, jõuame tulemuseni

$$\text{cov}(v_1, v_2) = 0, \quad (5.71)$$

mis on kooskõlas valemiga (5.64).

Kuna anisotroopsel juhul ei kehti valemid (5.70) ning unitaarsuse tingimus, siis

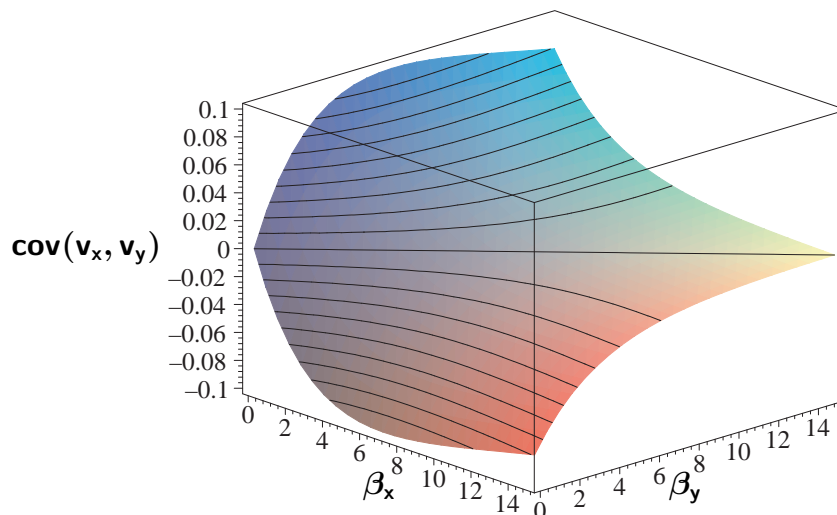
$$\text{cov}(v_1, v_2) \neq 0. \quad (5.72)$$

Seega, tänu kiiruste teisenduse unitaarsusele isotroopsel juhul on kiiruste kovariatsioon mõlemas kiiruste ruumis võrdne nulliga erinevalt anisotroopsest keskkonnast, kus see karakteristik on nullist erinev.

Kuna isotroopsel juhul on uute kiiruste ruum kompleksne, siis näitlikuma seletuse jaoks kasutame alternatiivset meetodit, ajast sõltuvat ortogonaalteisendust ehk pöördemaatriksit (4.28) [21]. Kuna vaatleme Browni liikumist nii magnetväljas kui ka elektriväljas, siis Langevini võrrandi (4.29) paremale poole peame lisama elektriväljas liikuvale laengule mõjuva jõu. Üleminek pöördemaatriksi abil ühest kiiruste ruumist teise ruumi kujutab endast kiiruse vektori pööret ajas ümber  $z$ -telje Larmori sagedusega. See üleminek on ekvivalentne olukorraga, kus minnakse Larmori sagedusega pöörlevasse taustsüsteemi, kus Browni osake magnetvälja ei "tunne". Tänu sellele ning Langevini jõu statistiliste omaduste invariantisusele ortogonaalteisenduse suhtes on uue kiiruse komponentide kovariatsioon null ning kiiruse komponendid on statistiliselt sõltumatud.

Kuna isotroopsele/anisotroopsele juhule vastab ajast mittesõltuv unitaarne/mitteunitaarne teisendus (5.19), siis võib oletada, et anisotroopsel juhul saab rakendada ajast sõltuvat mitteortogonaalset teisendust (teisendust, mis ei kirjelda puhtalt vektori pööramist ümber telgede).

Kovariatsiooni sõltuvust hõõrdeteguritest  $\beta_x$  ja  $\beta_y$  on illustreeritud joonisega 5. Siit on näha, et ühe hõõrdeteguri (kas  $\beta_x$  või  $\beta_y$ ) fikseeritud väärtuse korral omab kovariatsiooni absoluutväärtus kui teise hõõrdeteguri funktsioon maksimumi. Viimane on seda kõrgem, mida väiksem on fikseeritud hõõrdumine.



Joonis 5: Kiiruse komponentide  $v_x$  ja  $v_y$  kovariatsiooni sõltuvus hõõrdeteguritest  $\beta_x$  ja  $\beta_y$ . Parameetrid:  $\omega_z = 3$ ,  $t = 0.18$ .



## 5.4 Statsionaarne vool ja difusioon

Keskliste kiiruste valemite (5.60), (5.61) võib leida statsionaarse voolu komponentide avaldise, minnes üle piirjuhule  $t \rightarrow \infty$  ja arvestades, et

$$\varphi_{ij} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1, \quad f_{ij} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\epsilon_j}{\Lambda_i}. \quad (5.73)$$

Pärast matemaatilise teisendusi on võimalik jõuda avadiseni keskmiste kiiruste jaoks

$$\langle v_i \rangle = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_j, \quad (5.74)$$

kus

$$\sigma_{ij} = (\lambda^{-1})_{ij} \quad (5.75)$$

on elektrijuhtivuse tensor ja  $\lambda_{ij}$  on määratud valemiga (5.6). Valem (5.75) kujutab endast diferentsiaalse Ohmi seaduse üldistust magnetväljas liikuvatele Browni osakestele.

Statsionaarse voolu valem (5.74) on võimalik tuletada ka teisiti (lähtumata kiiruste tõenäosustihedusest), kasutades Langevini võrrandit ülesumbunud Browni liikumise jaoks, st mitte arvestades inertsiliiget  $\frac{dv(t)}{dt}$  võrrandites (5.5)

$$\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} v_j = \epsilon_i + \sqrt{a_i} \xi_i(t). \quad (5.76)$$

Lahendades lineaarsete algebraliste võrrandite süsteemi (5.76) kiiruste komponentide suhtes saame Browni osakese kiiruse jaoks avaldise

$$v_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_j + \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \sqrt{a_j} \xi_j. \quad (5.77)$$

Keskmistades saadud kiiruse avaldist ja arvestades Langevini jõu statistilisi omadusi (5.3), saame Browni osakeste statsionaarse voolu avaldise (5.74). Märgime, et voolu avaldis (5.74) on leitud dissipatsioonitensori (5.1) ühel erijuhul, diagonaalse anisotroopse hõõrdumise korral. Ülesumbunud Browni osakeste Langevini võrrandite kasutamisele ei ole mingeid kitsentavaid tingimusi seoses dissipatsioonitensori kujuga (peale piirangute, mis tulenevad pöördumatute protsesside termodünaamikast). See tähendab, et teine meetod annab meile võimaluse üldistada statsionaarse

voolu avaldist mittediagonaalse anisotroopse dissipatsioonitensori ja müra intensiivsuse tensori juhule:

$$\rho_{ij} = \begin{pmatrix} \beta_{xx} & \beta_{xy} & 0 \\ \beta_{xy} & \beta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \equiv \sqrt{a_i a_j} r_{ij} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} & 0 \\ a_{xy} & a_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & a_{zz} \end{pmatrix}, \quad (5.78)$$

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = r_{ij} \delta(t - t'). \quad (5.79)$$

Sealjuures eeldatakse, et Browni liikumine magnetvälja suunas ja risti magnetväljaga toimub sõltumatult, st  $a_{13} = a_{23} = 0$ . Valem (5.79) on korrelatsioonifunktsiooni (5.3) üldistuseks.

Statsionaarse difusioonikoeffitsienti saab leida minnes vahetult ajast sõltuva difusioonikoeffitsiendi avaldises piirjuhule  $t \rightarrow \infty$ . Ajast sõltuv difusioonikoeffitsient on leitav Greeni-Kubo valemi [25, 34] abil

$$D_{ij} = \int_0^t \langle v_i(\tau) v_j(0) \rangle^0 d\tau, \quad (5.80)$$

kus  $\langle v_i(\tau) v_j(0) \rangle^0$  on kiiruste korrelatsioonifunktsioon elektrivälja puudumisel. Seega statsionaarse difusioonikoeffitsiendi arvutamiseks on esmalt vaja leida kiiruste korrelatsioonifunktsioon, viimast integreerida aja järgi ja seejärel minna statsionaarsele juhule.

Kui meile pakub huvi ainult statsionaarne piirjuht, siis ülalkirjeldatud skeemi asemel on mõistlikum kasutada niisugust meetodit, mis ei nõua difusioonikoeffitsiendi ajalise sõltuvuse teadmist. Selleks kasutame Langevini võrrandit ülesumbunud Browni liikumise korral (5.76), nagu tegime statsionaarse voolu leidmisel. Lähtekohtaks on difusioonikoeffitsiendi definitsioon

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \Delta x_i(t) \Delta x_j(t) \rangle, \quad (5.81)$$

kus

$$\langle \Delta x_i(t) \Delta x_j(t) \rangle = \langle [x_i(t) - \langle x_i(t) \rangle][x_j(t) - \langle x_j(t) \rangle] \rangle, \quad (5.82)$$

on koordinaatide korrelatsioonifunktsioon. Browni osakeste koordinaadi ajalise sõltuvuse leidmiseks integreerime Langevini võrrandeid (5.76), mille tulemusena

$$x_i(t) - \langle x(0) \rangle = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \left[ \epsilon_j t + a_j \int_0^t \xi_j(t') dt' \right] \quad (5.83)$$

Võttes arvesse, et

$$\langle x_i(t) \rangle = x_i(0) + \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \epsilon_j t \quad (5.84)$$

ja arvestades Langevini jõu statistilisi omadusi (5.3), jõuame difusioonitensori kompaktse avaldiseni

$$D_{ij}(\vec{B}) = \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^3 \sigma_{ik}(\vec{B}) \sigma_{jm}(\vec{B}) a_{km}. \quad (5.85)$$

Elektrijuhtivuse tensori komponendid peavad rahuldama Onsageri teoreemi:  $\sigma_{ij}(\vec{B}) = \sigma_{ji}(-\vec{B})$ .

Teisendame difusioonikoefitsiendi avaldist juhul, kui Langevini jõu intensiivsus on kujul

$$a_{ij} = \frac{2k_B T}{m} \rho_{ij} = \frac{2k_B T}{m} \lambda_{ij}(\vec{B} = 0), \quad (5.86)$$

kus

$$\lambda_{ij}(\vec{B}) = \begin{pmatrix} \beta_{xx} & \beta_{xy} - \omega_z & 0 \\ \beta_{xy} + \omega_z & \beta_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{zz} \end{pmatrix}. \quad (5.87)$$

Võib panna tähele üht tensori  $\lambda_{ij}$  omadust:

$$\lambda_{ij}(\vec{B} = 0) = \lambda_{ij}^s(\vec{B}), \quad (5.88)$$

kus  $\lambda_{ij}^s(\vec{B})$  on tensori  $\lambda_{ij}(\vec{B})$  sümmeetriline osa. Valem (5.88) on üleskirjutatav ka elektrijuhtivuse tensori kaudu

$$\sigma_{ij}^s(\vec{B} = 0) = \left[ \sigma_{ij}^{-1}(\vec{B}) \right]^s, \quad (5.89)$$

Seejärel kasutame tensori sümmeetrilise osa definitsiooni

$$\left[ \sigma_{ij}^{-1}(\vec{B}) \right]^s = \frac{1}{2} [\sigma_{ij}^{-1}(\vec{B}) + \sigma_{ji}^{-1}(\vec{B})]. \quad (5.90)$$

Asendades avaldised (5.89), (5.90) valemisse (5.85), saame elegantse tulemuse difusioonitensori jaoks

$$D_{ij}(\vec{B}) = \frac{k_B T}{m} \sigma_{ij}^s(\vec{B}). \quad (5.91)$$

Valem (5.91) on Einsteini valemi [4] üldistus anisotroopse keskkonna juhule [34].

Diagonaalse anisotroopse dissipatsioonitensori  $\rho_{ij} = \beta_i \delta_{ij}$  korral avalduvad dissipatsioonikoefitsiendid kujul

$$D_{xx} = \frac{k_B T}{m} \frac{\beta_y}{\beta_x \beta_y + \omega_z^2}, \quad D_{yy} = \frac{k_B T}{m} \frac{\beta_x}{\beta_x \beta_y + \omega_z^2}. \quad (5.92)$$

See on töös [19] isotroopse juhu jaoks toodud valemi üldistus.

Mittediagonaalse anisotroopse difusioonitensori (5.78) ja müra intensiivsuse tensori (5.78), (5.86) korral

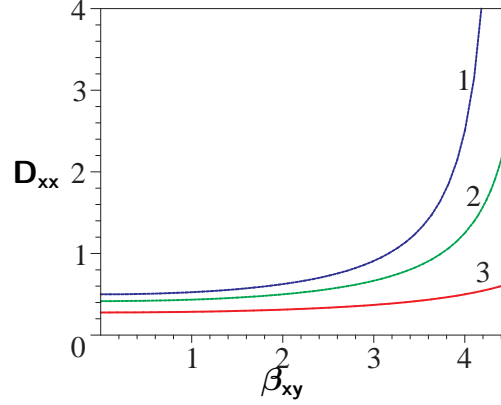
$$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{k_B T}{m} \frac{\beta_{yy}}{\beta_{xx} \beta_{yy} - \beta_{xy}^2 + \omega_z^2}, & D_{yy} &= \frac{k_B T}{m} \frac{\beta_{xx}}{\beta_{xx} \beta_{yy} - \beta_{xy}^2 + \omega_z^2}, \\ D_{xy} &= \frac{k_B T}{m} \frac{\omega_z - \beta_{xy}}{\beta_{xx} \beta_{yy} - \beta_{xy}^2 + \omega_z^2}, & D_{yx} &= \frac{k_B T}{m} \frac{-\omega_z - \beta_{xy}}{\beta_{xx} \beta_{yy} - \beta_{xy}^2 + \omega_z^2}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Märgime, et dissipatsioonitensori (5.78) elemendid peavad rahuldama tingimusi, mis tulenevad sellest, et kinnises mittetasakaalulises süsteemis peab entroopia kasvama saavutades maksimaalset väärtust tasakaaluolekus. Seetõttu peab dissipatsioonitensor olema mittenegatiivne, st

$$\beta_{xx} \beta_{yy} - \beta_{xy}^2 > 0, \quad \beta_{ii} > 0, \quad (5.94)$$

kusjuures need kitsendavad tingimused peavad kehtima ka magnetväljas.

Valemist (5.93) on näha difusioonikoefitsiendi erinev käitumine sõltuvalt dissipatsioonitensori komponentidest: difusioonikoefitsient kahaneb samasuunalise hõõrdeteguri kasvamisega ning suureneb hõõrdumise kasvamisega teistes suundades. Näiteks, joonisel 6. on toodud difusioonikoefitsiendi  $D_{xx}$  sõltuvust hõõrdetegurist  $\beta_{xy}$ , kusjuures tulenevalt valemi (5.94) kehtivusest ei saa viimane ületada suurust  $\sqrt{\beta_{xx} \beta_{yy}}$ . On teada, et difusioonikoefitsient määrab Browni osakeste koordinaatide tõenäosustiheduse: mida suurem on difusioonikoefitsient antud suunas, seda laiem on tõenäosusjaotus selles suunas, st seda ulatuslikum on vastava koordinaadi võimalike väärtuste piirkond. Meid huvitab difusioonikoefitsient  $D_{xx}$ , kusjuures vastav hõõrdetegur ( $\beta_{xx}$ ) on fikseeritud. Kui me hakkame suurendama hõõrdekoefitsienti  $\beta_{yy}$  (või  $\beta_{xy}$ ) (st tekitame "lisatakistuse"), siis selle tõttu jõuab osake läbida väiksema teepikkuse selles suunas, x-suund muutub aga soodsamaks (võrreldes juhuga, kus ei suurendatud hõõrdetegurit  $\beta_{xy}$ ). See tähendab, et liikumise tingimuste "karmistamine" sunnib osakest valida soodsama suuna ehk vähima vastupanu tee selleks, et jõuda kaugemale.



Joonis 6: Difusioonikoefitsiendi  $D_{xx}$  sõltuvus hõõrdetegurist  $\beta_{xy}$  erinevate Larmori sageduste korral. Parameetrid:  $\beta_{xx} = 2$ ,  $\beta_{yy} = 10$ . (1)  $\omega_z = 0$ , (2)  $\omega_z = 2$ , (3)  $\omega_z = 4$ .

Defineerime uue suuruse, koherentsuse vektori  $\vec{\chi}$  komponentidega

$$\chi_i = \sum_{j=1}^3 D_{ij}^{-1} v_j, \quad (5.95)$$

mis iseloomustab suunatud liikumise (voolu) ja juhusliku liikumise (difusiooni) suhet. Koherentsema Browni liikumise all peetakse silmas olukorda, kus osakeste suunatud liikumine (vool) on suurem ning kaootiline liikumine (difusioon) on väiksem. Mida suurem on koherentsuse väärtus, seda rohkem domineerib suunatud liikumine difusiooni üle.

Anisotroopse mittediagonaalse dissipatsioonitensori korral on koherentsuse vektori komponentideks

$$\chi_x = \frac{m}{k_B T} \left[ \left( -\frac{\beta_{xy}\omega_z}{\beta_{xx}\beta_{yy} - \beta_{xy}^2} + 1 \right) \epsilon_x + \frac{\omega_z\beta_{xx}}{\beta_{xx}\beta_{yy} - \beta_{xy}^2} \epsilon_y \right], \quad (5.96)$$

$$\chi_y = \frac{m}{k_B T} \left[ -\frac{\beta_{yy}\omega_z}{\beta_{xx}\beta_{yy} - \beta_{xy}^2} \epsilon_x + \left( 1 + \frac{\beta_{xy}\omega_z}{\beta_{xx}\beta_{yy} - \beta_{xy}^2} \right) \epsilon_y \right]. \quad (5.97)$$

Magnetvälja mõju uurimiseks koherentsusele paneme kirja ka koherentsuse mooduli avaldise

$$|\vec{\chi}|^2 = \left( \frac{m}{k_B T} \right)^2 \left[ \left( \frac{\epsilon_y^2}{\beta_{yy}^2} - \frac{\epsilon_x^2}{\beta_{xx}^2} \right) \omega_z^2 + 2\epsilon_x\epsilon_y \left( \frac{1}{\beta_{xx}} - \frac{1}{\beta_{yy}} \right) \omega_z + 1 \right], \quad (5.98)$$

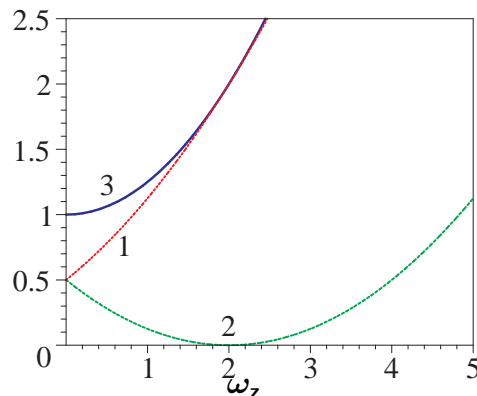
mis on minimaalne järgmise magnetvälja väärtuse korral

$$\omega_{z,min} = \frac{\epsilon_x\epsilon_y(\beta_{yy} - \beta_{xx})\beta_{xx}\beta_{yy}}{\epsilon_y^2\beta_{xx}^2 + \epsilon_x^2\beta_{yy}^2}. \quad (5.99)$$

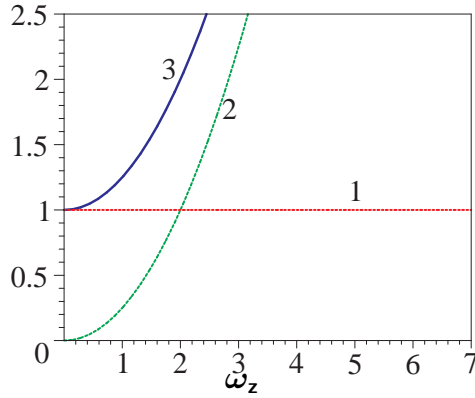
Sellele magnetväljale (5.99) vastab koherentsuse mooduli ruudu väärtus

$$|\vec{\chi}(\omega_{z,min})|^2 = \left( \frac{m}{k_B T} \right)^2 \frac{(\epsilon_x^2 \beta_{yy} + \epsilon_y^2 \beta_{xx})^2}{\epsilon_x^2 \beta_{yy}^2 + \epsilon_y^2 \beta_{xx}^2}, \quad (5.100)$$

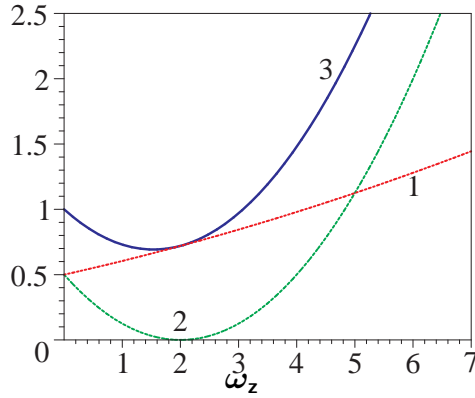
Valemist (5.99) järeldub, et koherentsuse vähenemine nullist erineva magnetvälja korral on võimalik ainult juhul, kui on tegemist anisotroopse keskkonnaga ning elektriväljal on olemas mõlemad magnetväljaga risti olevad komponendid. Jooniselt 7. on näha, et isotroopses keskkonnas kasvab koherentsuse x-komponendi ruut alati kiiremini kui kahaneb y-komponendi ruut. Ühe elektrivälja komponendi puudumisel on üks komponentidest konstantne ja teine kasvab (vt joonis 8.). Anisotroopses keskkonnas ja mõlemate komponentidega elektrivälja korral algul üks komponentidest kahaneb kiiremini võrreldes teise kasvamisega, põhjustades koherentsuse ruudu miinimumi, ning seejärel on olukord vastupidine (vt joonis 9.). Koherentsuse mooduli ruudu miinimumi väärtus väheneb ning miinimum nihkub tugevama magnetvälja suunas hõõrdeteguri kasvamisega (vt joonis 10.).



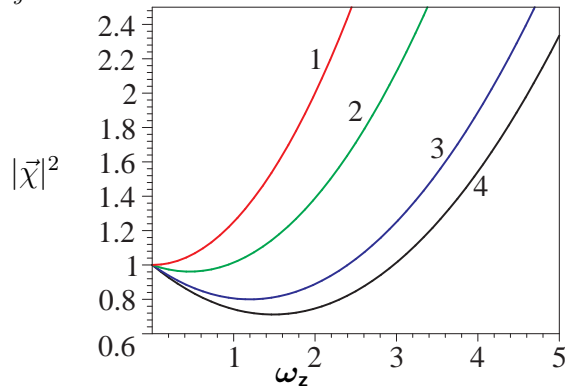
Joonis 7: Koherentsuse vektori komponentide ja selle mooduli ruutude sõltuvus Larmori sagedusest isotroopsel juhul. Parameetrid:  $\beta_{xx} = \beta_{yy} = 2$ ,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \sqrt{2}/2$ . (1)  $\chi_x^2$ , (2)  $\chi_y^2$ , (3)  $|\vec{\chi}|^2$ .



Joonis 8: Koherentsuse vektori komponentide ja selle mooduli ruutude sõltuvus Larmori sagedusest anisotroopsel juhul. Parameetrid:  $\beta_{xx} = 2$ ,  $\beta_{yy} = 10$ ,  $\epsilon_x = 1$ ,  $\epsilon_y = 0$ . (1)  $\chi_x^2$ , (2)  $\chi_y^2$ , (3)  $|\vec{\chi}|^2$ .



Joonis 9: Koherentsuse vektori komponentide ja selle mooduli ruutude sõltuvus Larmori sagedusest anisotroopsel juhul. Parameetrid:  $\beta_{xx} = 2$ ,  $\beta_{yy} = 10$ ,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \sqrt{2}/2$ . (1)  $\chi_x^2$ , (2)  $\chi_y^2$ , (3)  $|\vec{\chi}|^2$ .



Joonis 10: Koherentsuse vektori mooduli ruudu sõltuvus Larmori sagedusest erinevate hõõrdekoefitsientide  $\beta_{yy}$  korral. Parameetrid:  $\beta_{xx} = 2$ ,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \sqrt{2}/2$ . (1)  $\beta_{yy} = 2$ , (2)  $\beta_{yy} = 3$ , (3)  $\beta_{yy} = 6$ , (4)  $\beta_{yy} = 9$ .

## Resüme

Magistritöös uuriti elektri- ja magnetväljas liikuvate Browni osakeste ülekande protsesside iseärasusi anisotroopse hõõrdumise korral. Kiiruse tõenäosustiheduse leidmiseks kasutati Fokkeri-Plancki võrrandi formalismi, kusjuures tehti muutujate vahetus juba Langevini võrrandites. Selleks, erinevalt varem väljatöötatud meetoditest, kasutati kiiruste üldjuhul mitteunitaarset teisendust, mille tulemusena saadi kolm sõltumatute deterministlike osadega Langevini võrrandit. Seejärel on mindud vastavas Fokkeri-Plancki võrrandis üle liikumisintegraalidele saamaks vaba Browni liikumise juhuga analoogset võrrandit, mille lahend on teada.

Töös on saadud järgmised põhitulemused:

1. On leitud laetud Browni osakeste kiiruse tõenäosustihedus välises magnet- ja elektriväljas anisotroopse hõõrdumise korral. Selle alusel on saadud üldised avaldise osakese kiiruse (voolu), kiiruse dispersiooni ja korrelatsiooni (kovariatsiooni) jaoks.
2. On näidatud, et anisotroopse keskkonna korral on kiiruste ruumis asetleiduvates relaksatsiooniprotsessides võimalikud kaks režiimi. Kui magnetväli on nõrgem teatud kriitilisest väärtusest, mis on määratud hõõrdumise anisotroopsuse poolt, toimub lähenemine statsionaarsele seisundile mitteostsileeruva ajalise sõltuvusena. Tugevamates magnetväljades omandab relaksatsioon ostsilleeruva iseloomu.
3. On näidatud, et lühikeses ajaskaalas indutseeritakse välise magnetvälja ja anisotroopse hõõrdumise koosmõjul korrelatsioon magnetväljaga ristiolevate kiiruse komponentide vahel. Pikemas ajaskaalas läheneb selline korrelatsioon asümptootiliselt nullile.
4. On leitud dispersioonitensori modifitseeritud avaldis statsionaarsel juhul, mis üldistab anisotroopset Einsteini valemit.
5. On leitud, et statsionaarse Browni osakeste ülekande koherentsustase võib nõrgemas välises magnetväljas alaneda. Efekti suurus sõltub hõõrdumise anisotroopiast ja välise elektrivälja orientatsioonist. Magnetvälja edasise kasvamise



korral järgneb sellele koherentsustaseme monotoonne tõus. Selline koherentsustaseme mahasurumise efekt puudub isotroopses keskkonnas või ka elektrivälja teatud suundade jaoks.

## Summary

### **Brownian motion in magnetic and electric fields in the case of anisotropic environment**

In the present work the characteristic features of the transport of Brownian particles in magnetic and electric fields in case of anisotropic environment have been studied. We have derived the explicit algebraic expression for probability distribution of Brownian particle's velocity by using formalism of Fokker-Planck equation and introducing in general complex velocities. The probability density allows to obtain expressions for average velocity, velocity covariation and velocity variance of particle. It has been shown that two regimes (periodic and aperiodic) of temporal dependence in relaxation processes in velocity space exist, depending on magnetic field and frictional anisotropy. It has been found that in the short-time scale the correlation between the components of the particle velocity is induced by magnetic field and anisotropic friction. The generalization for the tensor of diffusion has been obtained. It is shown that the coherence of Brownian transport can be suppressed as well as enhanced by magnetic field.  $\emptyset\emptyset$

## Kirjandus

- [1] R. Brown, Philos. Mag. **4**, 161 (1828); Philos. Mag. **6**, 161 (1829);  
Edinb. New Philos. J. **5**, (1828).
- [2] M. Gouy, Journ. de Phys **7**, 561 (1888).
- [3] A. Einstein, Ann. d. Phys. **19**, 289 (1906).
- [4] A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 549 (1905).
- [5] J. B. Perrin, Ann. Chim. Phys. **18**, 5, (1909).
- [6] F. Gernek, *Albert Einstein* (Progress, Moskva, 1966) (vene keeles).
- [7] M. von Smoluchowski, Ann. d. Phys. **21**, 756 (1906).
- [8] P. Langevin, C. R. Acad. Sci. **146**, 530 (1908).
- [9] S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys **15**, 1 (1943).
- [10] J.B. Taylor, Phys. Rev. Lett **6**, 262 (1961).
- [11] B. Kursunoğlu, Ann. Phys (N.Y.) **17**, 259 (1962).
- [12] B. Kursunoğlu, Phys. Rev. **132**, 21 (1963).
- [13] R.L. Liboff, Phys. Rev. **141**, 222 (1966).
- [14] J.H. Williamson, J. Phys. A **1**, 629 (1968).
- [15] H.A. Lorentz, Proc. Amst. Acad. **7**, 438 (1905).
- [16] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, Phys. Rev. **36**, 823 (1930).
- [17] L. Ferrari, J. Chem. Phys **118**, 11092 (2003).
- [18] L. Ferrari, Chem. Phys **327**, 506 (2006).
- [19] R. Czopnik, P. Garbaczewski, Phys. Rev E **63**, 021105 (2001).
- [20] I. Holod, A. Zagorodny, J. Weiland, Phys. Rev E **71**, 046401 (2005).

- [21] J.I. Jiménez-Aquino, M.Romero-Bastida, Phys. Rev. E **74**, 041117 (2006).
- [22] T.P. Simões, R.E. Lagos, Physica A **355**, 274 (2005).
- [23] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer, Berlin, 1984).
- [24] C.S. Wang Chang and G. E. Uhlenbeck, *Studies in Statistical Mechanics* (North-Holland Publishing Co, Amsterdam, 1970).
- [25] M.S. Green, J. Chem. Phys. **19**, 1036 (1951).
- [26] L. Ferrari, Physica A **101**, 491 (1980).
- [27] L. Ferrari, Physica A **115**, 232 (1982); L. Ferrari, Physica A **127**, 194 (1984).
- [28] L. Ferrari, Physica A **142**, 441 (1987).
- [29] L. Ferrari, Chem. Phys. **153**, 115 (1991).
- [30] L.A. Barreiro, J.R. Campanha, R.E. Lagos, Rev. Mex. Fis. **48**, 13 (2002) (arXiv: cond-mat/0012187 (2000)).
- [31] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications* (Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Orlando, Florida, 1988).
- [32] D.C. Lay, *Linear Algebra and its Applications* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1994).
- [33] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Elsevier Academic Press, Amsterdam, 2005).
- [34] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12**, 570 (1957).
- [35] <http://www.lippi.ws/SC/Chapter14.pdf>.