

Die Curven von constantem p bilden mit denen von constantem q auf der Fläche ein rechtwinkliges Netz, welches auch wegen $E = G$ ein gleichseitiges heissen kann, in so fern man sich bei Zeichnung des Netzes überall $dp = dq$ angenommen denkt, wie es ja auch bei jedem anderen Netze geschehen kann. Ein solches Netz, worin überall $F = 0$ und $E = G$, könnte daher der Kürze wegen ein quadratisches Netz genannt werden, wobei jedoch die Voraussetzung, dass für Netze jeder Art die Argumente p und q , von jedem Knotenpunkte aus, gleiche Zunahmen erhalten, wesentlich zu Grunde gelegt ist.

Wenn in vorstehende Formeln anstatt p eine andere Function des Bogens — sie heisse p' — eingesetzt wird, so ist $p = f(p')$, $p + qi = f(p' + q'i)$, und die Functionen $\varphi(p + qi)$, $\psi(p + qi)$, verwandeln sich in $\varphi(f(p' + q'i)) = \Phi(p' + q'i)$, $\psi(f(p' + q'i)) = \Psi(p' + q'i)$. Die neuen Argumente p' und q' bestimmen alsdann auf derselben Fläche ein neues quadratisches Netz, in welchem aber die gegebene Curve eben so zu $q' = 0$ gehört wie im ersten Netze zu $q = 0$. Beide von einander verschiedene Netze haben, wenn man so sagen darf, die gegebene Curve zur gemeinschaftlichen Basis.

Dorpat.

(Aus dem Bulletin, T. XX, p. 531—537).

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Im April 1875. K. Wesselowski, beständiger Secretair.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
(Wass. Ostr., 9. Lin., № 12.)

MÉTÉOROLOGIE
BORENT
OBSERVAT.
N: 1624

MÉLANGES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.

TOME IV.

25 Juni
7 Juli 1868.

Über eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von Ferd. Minding.

Die Abhandlung *On shooting stars* by H. A. Newton im ersten Bande der *Memoirs of the national academy of sciences, Washington 1866*, giebt über die wahrscheinliche Häufigkeit und Vertheilung dieser Meteore so viel Aufschluss, als es der gegenwärtige Stand der Beobachtungen erlaubt. Unter vielen anderen tritt daselbst auch die Frage auf: wie viele von sämmtlichen in einer gewissen Zeit zur Erde gefallenen Sternschnuppen im Gesichtsfelde eines in beliebiger Richtung aufgestellten Fernrohrs erscheinen werden. Hr. Newton findet die Wahrscheinlichkeit des geforderten Ereignisses mit einer für den Zweck seiner Schätzungen vollkommen genügenden Genauigkeit gleich $\frac{lb}{4\pi}$, wenn l die mittlere Länge des sichtbaren Laufes eines solchen Meteors, b den Durchmesser des Gesichtsfeldes und 2π den Kreisumfang bezeichnet. Ich habe eine vollständigere Lösung der Aufgabe ge-

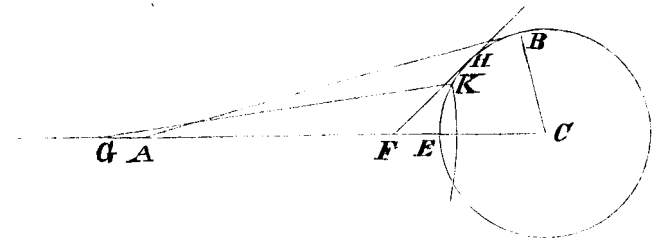
sucht, deren Mittheilung wenigstens dazu dienen kann, die praktische Zulässigkeit jener angenäherten Lösung in helleres Licht zu setzen. Vorausgesetzt wird, dass bei den ununterbrochen sich wiederholenden Sternschnuppenfällen — im Gegensatze zu den periodisch wiederkehrenden Phänomenen derselben Art — alle Anfangspunkte und alle Richtungen gleich möglich sind. Auch wird angenommen, dass die scheinbare Bahn des Meteors einem grössten Kreise folgt, und dass ihre Länge (l) einen Quadranten nicht überschreitet.

Hieraus ergibt sich zuerst die Wahrscheinlichkeit, dass der Anfangspunkt einer Sternschnuppe, d. h. der Ort ihres ersten Aufleuchtens, im Gesichtsfelde des Fernrohrs liegt, gleich dem Verhältnisse des Gesichtsfeldes zur Kugeloberfläche, also wenn r der Halbmesser des Gesichtsfeldes ist, gleich $\frac{1 - \cos r}{2}$.

An einen beliebigen Punkt B im Anfange des Gesichtsfeldes (s. die Figur) lege man eine sphärische Tangente, schneide darauf den Bogen $BA = l$ gleich der Länge des sichtbaren Laufes einer Sternschnuppe ab und verbinde A mit dem Mittelpunkte C des Gesichtsfeldes durch den Bogen eines grössten Kreises $AC = d$, so ist in dem sphärischen Dreiecke ABC , $AB = l$, $CB = r$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, daher

$$\cos d = \cos l \cdot \cos r.$$

Liegt der Anfangspunkt der Sternschnuppe in dem Bogen CA ausserhalb des Gesichtsfeldes, also wie F zwischen A und E , so dringt sie in den Kreis ein, wenn ihre Richtung von FC weniger abweicht als eine von F ausgehende Tangente FH ; wird also



$\angle HFC = \varphi$ gesetzt und $CF = x$, so ist $\sin x \cdot \sin \varphi = \sin r$, so lange x zwischen r und d liegt; auch ist dann die Tangente von F bis zum Berührungspunkte H kürzer als l , wie erforderlich.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sternschnuppe in einem an F liegenden Flächenelemente $dxdy$ entsteht, ist $\frac{dxdy}{4\pi}$, und die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Richtung um weniger als φ , nach der einen oder anderen Seite, von FC abweicht, ist $\frac{2\varphi}{2\pi}$ oder $\frac{\varphi}{\pi}$; also ist $\frac{dxdy}{4\pi} \cdot \frac{\varphi}{\pi}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Sternschnuppe von F ausgehend in das Gesichtsfeld gelangt. Zieht man um C mit dem sphärischen Halbmesser $CF = x$ einen Kreis, so gilt dieselbe Wahrscheinlichkeit für alle gleichen Elemente dy dieses Kreises; man kann daher sofort nach y integrieren und hat dann für $\int dy$, $2\pi \sin x$ einzusetzen; hiermit ergibt sich $\frac{dx \sin x \varphi}{2\pi}$, welcher Ausdruck noch nach x von r bis d zu integrieren ist.

Liegt der Anfangspunkt der Sternschnuppe auf der Verlängerung von CA in G , so muss der Abstand GE kleiner sein als l , wenn das Gesichtsfeld von ihr noch getroffen werden soll. Alsdann kann aber die sichtbare Bahn des Meteors den Kreis nicht mehr berühren, weil

ihre Länge dazu nicht ausreicht, sondern sie kann ihn nur zwischen gewissen Grenzen schneiden. Zieht man aus G mit dem Halbmesser $GK = l$ einen Kreis, der den Kreis C in K schneide, so wird die Grenze der zulässigen Richtungen durch den Winkel $KGC = \varphi$ bestimmt, welcher mit dem Abstände $CG = x$ durch folgende Gleichung zusammenhängt:

$$\cos r = \cos l \cos x + \sin l \sin x \cos \varphi.$$

Für diesen Fall wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\int_{\frac{\varphi \sin x dx}{2\pi}}$, das Integral von $x = d$ bis $x = l + r$ genommen.

Im Ganzen erhält man also für die Wahrscheinlichkeit des Eintritts in das Gesichtsfeld

$$\omega = \frac{1 - \cos r}{2} + \frac{1}{2\pi} \{A^0 + B^0\},$$

wo

$$A^0 = \int_r^d \varphi_1 \sin x dx, \quad \sin \varphi_1 = \frac{\sin r}{\sin x}, \quad \cos d = \cos l \cdot \cos r;$$

$$B^0 = \int_d^{l+r} \varphi_2 \sin x dx, \quad \cos r = \cos l \cos x + \sin l \sin x \cos \varphi_2.$$

Für $x = r$ wird $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; für $x = d$ wird $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi'$, $\sin \varphi' = \frac{\sin r}{\sin d}$, $\cos \varphi' = \frac{\cos r \sin l}{\sin d}$; für $x = l + r$ wird $\varphi_2 = 0$. Da nun $\int \varphi \sin x dx = -\varphi \cos x + \int \cos x d\varphi$, so folgt:

$$A^0 = -\varphi' \cos d + \frac{\pi}{2} \cos r + \int \cos x d\varphi_1,$$

$$B^0 = +\varphi' \cos d + \int \cos x d\varphi_2,$$

$$\text{also } A^0 + B^0 = \frac{\pi}{2} \cos r + \int \cos x d\varphi_1 + \int \cos x d\varphi_2,$$

beide Integrale zwischen den festgesetzten Grenzen

genommen. Wird zur Abkürzung das erste Integral mit $-A$, das zweite mit $-B$ bezeichnet, so folgt:

$$\omega = \frac{1 - \cos r}{2} + \frac{1}{4} \cos r - \frac{1}{2\pi} \{A + B\}.$$

Nach der Festsetzung ist

$$A = \int_{\varphi'}^{\frac{\pi}{2}} \cos x d\varphi \quad \text{und} \quad \sin \varphi \sin x = \sin r,$$

daher

$$A = \int_{\varphi'}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin r}{\sin \varphi}\right)^2} \cdot d\varphi.$$

Setzt man $\cos \varphi = \cos \psi \cdot \cos r$, so wird

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin r}{\sin \varphi}\right)^2} \cdot d\varphi &= -\frac{\sqrt{\cos^2 r - \cos^2 \varphi} \cdot d \cos \varphi}{\sin \varphi^2} \\ &= \frac{\cos r^2 \cdot \sin \psi^2 d\psi}{\sin r^2 + \sin \psi^2 \cos r^2} = d\psi - \frac{\sin r^2 d\psi}{\sin r^2 + \sin \psi^2 \cos r^2} \\ &= d\psi - \frac{\sin r^2 \cdot d\psi}{\sin r^2 \cos \psi^2 + \sin \psi^2} = d\psi - \frac{\sin r^2 \cdot d \operatorname{tg} \psi}{\sin r^2 + \operatorname{tg} \psi^2} \\ &= d\psi - \sin r \cdot d \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \psi}{\sin r}; \end{aligned}$$

und da den Grenzen φ' und $\frac{\pi}{2}$ die Grenzen ψ' und $\frac{\pi}{2}$ entsprechen, wenn $\cos \psi' = \frac{\cos \varphi'}{\cos r}$ gesetzt wird, so folgt:

$$A = \frac{\pi}{2} - \psi' - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \psi'}{\sin r}\right) \sin r,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$A = \frac{\pi}{2} - \psi' - \sin r \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\cotg \psi' \cdot \sin r).$$

Da

$$\cos \psi' = \frac{\cos \varphi'}{\cos r}, \quad \sin \varphi' = \frac{\sin r}{\sin d}, \quad \cos d = \cos l \cdot \cos r,$$

so folgt:

$$\cos \psi' = \frac{\sqrt{\cos r^2 - \cos d^2}}{\sin d \cdot \cos r} = \frac{\sin l}{\sin d},$$

und $\sin \psi' = \frac{\cos l \cdot \sin r}{\sin d}$, $\operatorname{tg} \psi' = \cot g l \cdot \sin r$;

daher ist

$$A = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\cot g l \cdot \sin r) - \sin r \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} l),$$

oder: $A = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} l}{\sin r} - l \sin r.$

Die vorkommenden arc. tg. sind alle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Denn bei der vorliegenden Anwendung ist immer r sehr klein und auch l weit unter $\frac{\pi}{2}$; daher sind die Winkel r , l und die daraus hergeleiteten Hülfswinkel φ , ψ alle spitz und die Argumente der vorkommenden arc. tg. alle positiv.

Um den Werth von B zu finden, entnehme man aus der Gleichung $\cos r = \cos l \cos x + \sin l \sin x \cos \varphi$ die nachstehende:

$$\begin{aligned} &(-\sin x \cos l + \cos x \sin l \cos \varphi) dx \\ &= \sin x \sin l \sin \varphi d\varphi = M \cdot d\varphi, \end{aligned}$$

wenn zur Abkürzung $\sin x \sin l \sin \varphi = M$ gesetzt wird. Es werde nun linker Hand $\cos \varphi$ mittelst der vorigen Gleichung weggeschafft, so folgt:

$$M \sin x d\varphi = -(\cos l - \cos r \cos x) dx,$$

daher ist

$$B = \int_0^\varphi \cos x d\varphi = - \int_{l+r}^d \frac{(\cos l - \cos r \cos x) \cos x dx}{M \sin x},$$

oder wenn man $\cos x = z$ einführt und $\cos(l+r) = z^0$, $\cos d = z'$ setzt:

$$B = \int_{z^0}^{z'} \frac{(\cos l - z \cos r) z dz}{(1+z^2) M}.$$

Durch Zerlegung in einfache Brüche ergibt sich

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z \cos l - z^2 \cos r}{(1+z^2) M} \\ &= \frac{\cos r}{M} - \left\{ \frac{\cos r - \cos l}{1-z} + \frac{\cos r + \cos l}{1+z} \right\} \frac{1}{2M}; \end{aligned}$$

ferner ist

$$M = \sin l \sin x \sin \varphi = \sqrt{\sin^2 l \sin^2 r - (\cos x - \cos l \cos r)^2}$$

oder auch:

$$M = \sqrt{(\sin l \sin r)^2 - (\cos d - z)^2};$$

wird hier ζ eingeführt durch die Gleichung:

$$\cos d - z = \sin l \sin r \cos \zeta,$$

so folgt:

$$dz = \sin l \sin r \sin \zeta \cdot d\zeta = M d\zeta; \text{ daher } \frac{dz}{M} = d\zeta;$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos r - \cos l}{1-z} \cdot \frac{dz}{2M} &= \frac{\sin \frac{l+r}{2} \cdot \sin \frac{l-r}{2} \cdot d\zeta}{1 - \cos l \cos r + \sin l \sin r \cos \zeta} \\ &= \frac{\sin \frac{l+r}{2} \cdot \sin \frac{l-r}{2} \cdot d\zeta}{[1 - \cos(l+r)] \left(\cos \frac{\zeta}{2}\right)^2 + [1 - \cos(l-r)] \left(\sin \frac{\zeta}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sin \frac{l+r}{2} \cdot \sin \frac{l-r}{2} d \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}}{\left(\sin \frac{l+r}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{l-r}{2} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}\right)^2} = d \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin \frac{l-r}{2}}{\sin \frac{l+r}{2}} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right); \end{aligned}$$

schreibt man hier statt l , $\pi + l$, so folgt:

$$\frac{\cos r + \cos l}{1+z} \cdot \frac{dz}{2M} = \frac{\cos r + \cos l}{1+z} \cdot \frac{1}{2} d\zeta$$

$$= d \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\cos \frac{l-r}{2}}{\cos \frac{l+r}{2}} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right);$$

setzt man

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin \frac{l-r}{2}}{\sin \frac{l+r}{2}} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\cos \frac{l-r}{2}}{\cos \frac{l+r}{2}} \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \right) = u,$$

$$\text{so wird } \operatorname{tg} u = \frac{2 \sin l \cdot \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}}{\sin(l+r) - \sin(l-r) \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\zeta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin l \sin \zeta}{\sin r \cos l + \cos r \sin l \cos \zeta};$$

daher ist $Zdz = \cos r \cdot d\zeta - du$

und $B = \int_{z^0}^{z'} Zdz = (\zeta' - \zeta^0) \cos r - (u' - u^0).$

Da $z^0 = \cos(l+r)$, $z' = \cos l \cdot \cos r = \cos d$ und $\cos l \cos r - \sin l \sin r \cos \zeta = z$, so erhält man: $\zeta^0 = 0$, $\zeta' = \frac{\pi}{2}$, $u^0 = 0$, $u' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} l}{\sin r} \right)$; folglich:

$$B = \frac{\pi}{2} \cos r - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} l}{\sin r}.$$

Oben war gefunden:

$$A = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} l}{\sin r} - l \sin r;$$

daher ist $A + B = \frac{\pi}{2} \cos r - l \sin r$

und $\omega = \frac{1 - \cos r}{2} + \frac{1}{4} \cos r - \frac{1}{2\pi} \{A + B\}$

verwandelt sich in:

$$\omega = \frac{1 - \cos r}{2} + \frac{l \sin r}{2\pi}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit gilt für die Länge l der sichtbaren Bahn. Bezeichnet $f(l) \cdot dl$ die Wahrscheinlichkeit einer zwischen l und $l + dl$ liegenden Länge,

und sind l^0, l' die äussersten Grenzen der vorkommenden Längen, so ist

$$\int_{l^0}^{l'} \omega \cdot f(l) \cdot dl$$

der allgemeine Ausdruck der Wahrscheinlichkeit, dass eine Sternschnuppe im Gesichtsfelde erscheint. Werden alle Längen von l^0 bis l' für gleich möglich angesehen, so ist $f(l) = \frac{1}{l' - l^0}$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit wird:

$$\int_{l^0}^{l'} \frac{\omega dl}{l' - l^0} = \frac{1 - \cos r}{2} + \frac{l^0 + l'}{2} \cdot \frac{\sin r}{2\pi};$$

unter dieser Voraussetzung genügt es also, in obigem Werthe von ω für l das arithmetische Mittel der Grenzwerte von l zu setzen, welches alsdann zugleich den mittleren Werth von l darstellt.

Dorpat, im Juni 1868.

(Aus dem Bulletin, T. XIII, pag. 203 — 208.)

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
(Wass.-Ostr., 9. Linie, № 12.)