

TARTU ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND  
Matemaatilise statistika instituut

**Kädi Mägi**

# **Eksponentsiaalse silumise meetodid aegridade prognoosimiseks**

**Magistritöö**

Juhendaja: Raul Kangro, PhD

TARTU 2013

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>1 Aegridadest</b>	<b>5</b>
1.1 Erinevad aegread . . . . .	5
1.2 Aegridade dekompositsioon . . . . .	5
1.3 Näiteid aegridadest . . . . .	6
1.4 Prognoosimise meetodid ja mudelid . . . . .	8
<b>2 Eksponentsiaalse silumise meetodid</b>	<b>9</b>
2.1 Ülevaade eksponentsiaalse silumise meetodite ajaloost . . . . .	9
2.2 Eksponentsiaalse silumise meetodite klassifikatsioon . . . . .	10
2.3 Punktiviisilised prognoosid tuntuimatele meetoditele . . . . .	12
Lihtne eksponentsiaalse silumise meetod $(N, N)$ . . . . .	12
Holti Lineaarne meetod $(A, N)$ . . . . .	13
Summutatud trendi meetod $(A_d, N)$ . . . . .	14
Holt-Wintersi trendi ja sesoonsuse meetodid $(A, M)$ ja $(A, A)$ . . . . .	15
Meetod $(M, A)$ ning selle saamine . . . . .	16
2.4 Punktiviisiliste prognooside erijuhud . . . . .	17
<b>3 Olekuruumi mudelid</b>	<b>18</b>
3.1 Olekuruumi mudeli definitsioon . . . . .	18
3.2 Olekuruumi mudelid Holt- Wintersi aditiivse sesoonsusega meetodile . . .	19
Aditiivse veaga mudel: ETS $(A, A, A)$ . . . . .	20
Multiplikatiivse veaga mudel: ETS $(M, A, A)$ . . . . .	21
3.3 Multiplikatiivse vea ja trendiga mudel: ETS $(M, M, N)$ . . . . .	23
<b>4 Algväärtused ja parameetrite hindamine</b>	<b>25</b>

4.1	Algväärtused . . . . .	25
4.2	Parameertite hindamine . . . . .	26
	Tõenäosustiheduse funktsiooni omadus . . . . .	26
	Tõenäosustiheduse funktsioon lineaarse olekuruumi mudeli korral . . . . .	27
	Tõenäosustiheduse funktsioon mittelineaarse olekuruumi mudeli korral . . . . .	29
	Suurima tõepära hinnangud . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Mudelite võrdlemine ja mudeli valik</b>	<b>33</b>
5.1	Prognoosimudeli headuse mõõdikud . . . . .	33
5.2	Informatsioonikriteeriumid . . . . .	34
	Akaike informatsioonikriteerium . . . . .	35
	Parandatud Akaike informatsioonikriteerium . . . . .	35
	Schwarz Bayesian informatsioonikriteerium . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Pakett <i>forecast</i> sttistikapakatile R</b>	<b>38</b>
6.1	Paketi <i>forecast</i> tutvustus . . . . .	38
6.2	Mõned funktsioonid ja näited nende kasutamisest . . . . .	39
<b>7</b>	<b>Näiteid aegridade baasil</b>	<b>46</b>
7.1	Tarbijahindade harmoniseeritud indeks . . . . .	46
	Esimene juht . . . . .	46
	Teine juht . . . . .	47
7.2	Eestis majutatud turistide arv . . . . .	50
7.3	Inimkannatanutega liiklusõnnetused Eesti teedel . . . . .	51
	<b>Kokkuvõte</b>	<b>53</b>
	<b>Resümees (inglise keeles)</b>	<b>55</b>
	<b>Kirjandus</b>	<b>56</b>
	<b>Lisa</b>	<b>57</b>

# Sissejuhatus

Inimestele on alati huvi pakkunud tulevik, siiani otsitakse võimalusi, kuidas saada võimalikult täpseid ennustusi parasjagu huvipakkuvale valdkonnale. Käesolevas töös on uurimise alla võetud eksponentsiaalse silumise meetodid ning nendele tuginevad olekuruumi mudelid.

Eksponentsiaalse silumise meetodid on olnud kasutuses 1950 aastatest ning need on siiani ühed populaarsemad prognoosimismeetodid, mida äris ja tööstuses kasutatakse. Algusaastatel oli väga tähtsaks meetodi rakendamise juures piiratud nõudmised arvutite võimalustele. Tänapäeval on veelgi tähtsam, et parameetrite hindamisel ja prognooside genereerimisel eksponentsiaalse silumise meetoditega on arvutused intuitiivsed ja kergesti mõistetavad. Just seetõttu on need meetodid leidnud laialdast kasutust.

Eksponentsiaalse silumise meetodite puuduseks on olnud statistilise raamistiku puudumine, mis tagaks kasutajatele nii usalduspiirid kui ka punktiviisilise prognoosi. Olekuruumi mudelid annavad selle raamistiku, samas säilib eksponentsiaalse silumise meetodite intuitiivne olemus. See pakub mudelivaliku protseduure, usaldusintervalle, suurima tõepära hinnangut ja palju muud. Suhteliselt hiljuti välja arendatud modelleerimisraamistiku tulemusena on eksponentsiaalse silumise meetodid viimase kümne-viieteist aastaga läbi teinud suure arengu.

Magistritöö peamiseks ülesandeks on tutvustada eksponentsiaalse silumise meetodeid, olekuruumi mudeleid ning nende kasutamist. Samas sobib see ka lisamaterjaliks aegriidade kursuse juurde.

Magistritöö on jaotatud osadeks, kus toome välja:

- eksponentsiaalse silumise meetodite jaoks lühikese kokkuvõtte nende ajaloost, näitame kuidas meetodid tähistatakse, lähtuvalt nende komponentidest, ka toome välja tuntumad meetodid ning samuti on kirjeldatud kuidas valitud meetodit ise kirja panna.
- olekuruumi mudelite jaoks mudeli definitsiooni lineaarse mudeli jaoks ning ka üldisema kuju, näitame kuidas saab meetoditele tuginedes välja kirjutada nii aditiivse kui ka multiplikatiivse veakomponendiga mudelid.
- mudelite rakendamiseks vajaminevate algväärtuste leidmiseks ühe võimaliku skeemi ja näitame kuidas leida parameetritele hinnangud.
- mudelite võrdlemiseks mõned headuse mõõdikud ja mudeli valiku jaoks kasutatavad informatsioonikriteeriumid.

- kuidas antud mudeleid kasutada statistikapaketi R lisapaketiga *forecast*. Paketi jaoks on toodud lühike kasutusjuhend ning osade funktsioonide tutvustused.
- erinevate aegridade näidetel olekuruumi mudelite võrdlus ARIMA mudelitega.

# 1 Aegridadest

Käesolevas peatükis toome sisse aegridadega seotud põhimõisted ning ilmestame neid näidetega, siinjuures toetume raamatu [1] peatükkidele 1.1, 1.2 ja 2.1 ning allika [2] esimesele osale.

## 1.1 Erinevad aegread

Aegridu esineb paljudes erinevates valdkondades kaasates näiteks aktsiahindu, ilmajaamades mõõdetavaid temperatuure, vastuvõtude arvu meditsiini-asutustes, töötute arvu, impordi ja ekspordi mahte, ettevõtte käivet ja väga palju muud. Vaatlused võivad aset leida erineva sagedusega, näiteks võib aegridu vaadelda minutilise, tunnise, päevase, nädalase, kuise, kvartaalse, aastase või mingi muu huvipakkuva sagedusega. Seega kerkivad aegread esile iga kord, kui midagi on vaadeldud mingi kindla perioodi tagant. Aegread võivad olla nii pidevad kui ka diskreetsed, magistritöös võtame vaatluse alla diskreetsed aegread, mida on vaadeldud regulaarselt kindla ajavahemiku tagant.

## 1.2 Aegridade dekompositsioon

Äris ja majanduses on tavaline mõelda, et aegread on kombinatsioon erinevatest komponentidest nagu trend (T), tsükkel (C), sesoonsus (S) ja irregulaarsus või vead (E). Neid mõisteid saab tõlgendada järgnevalt:

Trend on aegrea pikemaajalise keskmise taseme kindla suunaga muutumine. Trendi puhul eristatakse globaalset ja lokaalset trendi. Globaalne trend on ajas muutumatu iseloomuga ning lokaalne trend võib aja möödudes muutuda.

Sesoonsus on seaduspärasus, mis kordub teatud perioodi tagant (näiteks 12 kuud või 7 päeva).

Tsükkel on küllaltki aeglane kõikumine mingi keskmise ümber, mis kordub mingi regulaarsusega, kuid selle periood ei ole teada või see muutub (näiteks äritsükkel).

Irregulaarsus või viga on aegrea juhuslik komponent.

Selles töös on tähelepanu põhiliselt kolmel komponendil: trendil, sesoonsusel ja veal. Mistahes tsükliline element on arvatud trendi komponendi hulka, kuna matemaatilises mõttes ei ole tsükkel ja trend enamasti eristatavad.

Neid komponente saab kombineerida erinevatel viisidel. Puhtalt aditiivse mudeli võib välja kirjutada kujul

$$y = T + S + E,$$

kus kõik komponendid on kokku liidetud, saades nii vaadeldud aegrea. Puhtalt multipli-  
katiivse mudeli saab välja kirjutada kujul

$$y = T \cdot S \cdot E,$$

kus aegrida väljendub komponentide korrutisena.

Samuti on võimalikud ka teised kombinatsioonid peale lihtsa liitmise ja korrutamise. Näiteks

$$y = T \cdot S + E,$$

kus trendi ja sesoonsuse komponendid on omavahel korrutatud ning seejärel on liidetud vea komponent.

Sesoonse kohandamise korral eraldatakse sesoonne komponent aegreast ja jäetakse järgi vaid trendi ja vea komponendid. Aditiivsete mudelite korral on sesoonselt kohandatud aegreaks  $y - S$ , samas multiplikatiivne mudel sesoonselt kohandatuna on  $y/S$ .

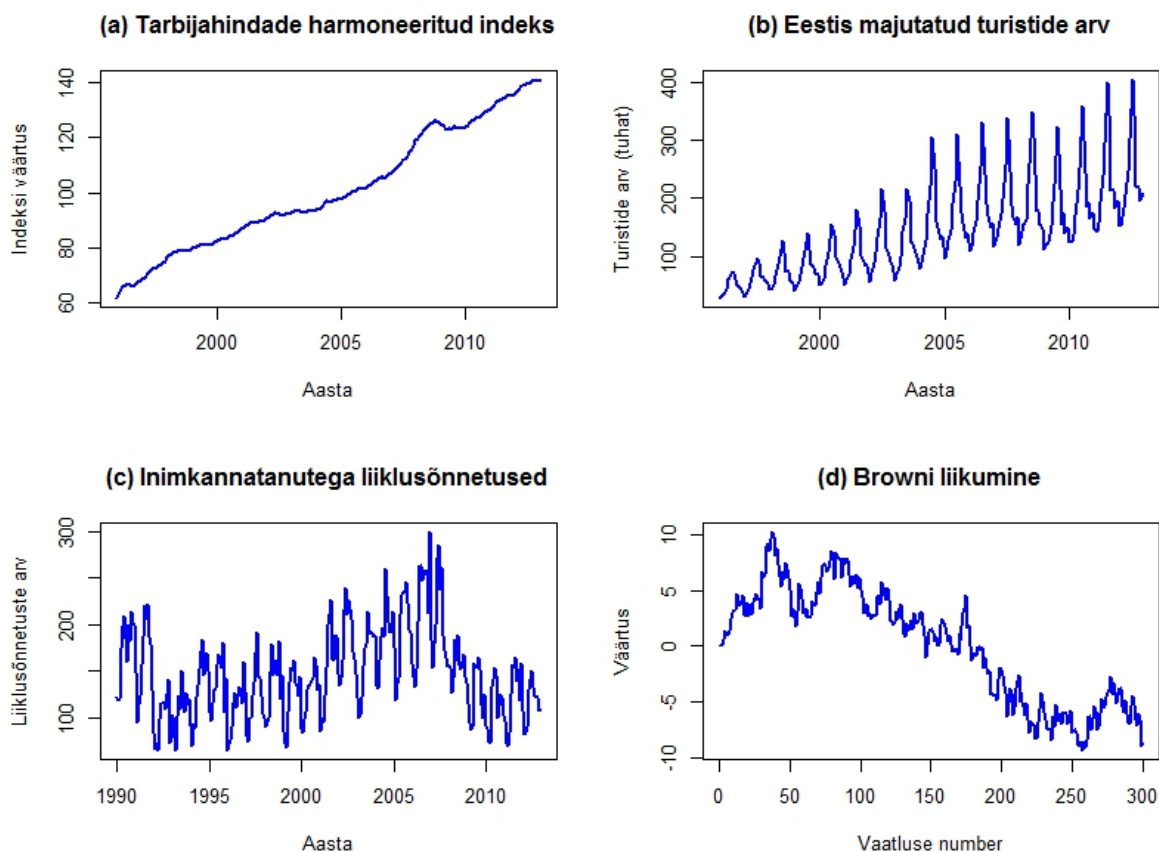
### 1.3 Näiteid aegridadest

Aegridade graafikutel võib mõnigi kord ära tunda tema komponendid – näiteks üles või allapoole suunatud liikumise (trend) või mingi mustri, mis kordab ennast (sesoonne kõikumine), mida võib aegridade prognoosimisel kasutada. Nende omadustega neli aegrida on toodud joonisel 1.1.

- Joonisel 1.1a on kujutatud Eesti tarbijahindade harmoneeritud indeksi kuised väärtused alates 1996 jaanuarist kuni 2013 aasta jaanuarini. Sellel aegreal on selgelt näha ülespoole suunatud trend ning kuigi see ei ole ühtlane (trendisirgel on erinevatel ajamomentidel erinevad väärtused), liigub aegrida selgelt ülespoole (Statistikaameti andmed [3]).
- Joonisel 1.1b on kujutatud Eestis majutatud turistide arvu alates jaanuarist 1996 kuni jaanuarini 2013 aastal. Siit jooniselt võib näha, et sellel aegreal on olemas nii ülespoole suunatud trend kui ka sesoonsus (Statistikaameti andmed [4]).
- Joonisel 1.1c on kuvatud inimkannatanutega liiklusõnnetused Eesti teedel vahemikus 1990 jaanuar kuni 2012 detsember. Selle aegrea puhul on näha keskmise taseme

muutumist läbi aja, globaalset trendi ei paista olevat, kuid on olemas sesoonne muster (Statistikaameti andmed [5]).

- Joonisel 1.1d on kuvatud standardne Browni liikumine kolmesajas punktis, ajasamuga 1. Kuigi võib tunduda, et sellel aegreal on olemas vähemalt lokaalne trend, on tegemist siiski juhusliku ekslemisega.



Joonis 1.1: Näiteid erinevatest aegridadest (Statistikaameti lehtedelt [3], [4], [5]).

Nende näidete järgi on selge, et tihtipeale on vaja prognoosi, mis võtaks arvesse trendi, sesoonsust ja teisi andmete omadusi. Nimelt oleme huvitatud olukorrast, kus vaatleme aegrida  $y_1, \dots, y_n$  ja seejärel soovime prognoosida aegrea tulevikuväärtust hetkel  $n + h$ . Selle jaoks, et saaks ära kasutada mustreid, nagu joonisel 1.1, on välja pakutud palju erinevaid prognoosimise meetodeid ja mudeleid.



## 1.4 Prognoosimise meetodid ja mudelid

Prognoosimise meetod on algoritm, mis annab punktiviisilise prognoosi – tulevase aja- vahemiku jaoks arvutatud ennustuse. Statistiline mudel kirjeldab andmete genereerimise protsessi, mille põhjal saab leida tõenäosusjaotuse tuleviku perioodide jaoks. Seejärel on võimalik leida punktiviisiline prognoos, kasutades leitud jaotuse keskmist (või mediaani). Mudel võimaldab leida prognoosi jaoks etteantud tõenäosusele sobivad usalduspiirid.

Kasutame esitust  $\hat{y}_{n+h|n}$  tähistamaks punktiviisilist prognoosi ajamomendi  $n+h$  väärtuste jaoks, mis on saadud, kasutades informatsiooni ajani  $n$ . Punktiviisilisi prognoose, mis tulenevad meetoditest ja punktiviisilisi prognoose, mis on saadud mudelite kasutamisel ei ole vaja erinevalt tähistada, kuna mudelitest jõutakse välja samade punktiviisiliste prognoosideni, mis on saadud mudelitele vastavaid meetodeid kasutades.

# 2 Eksponentsiaalse silumise meetodid

Käesolevas peatükis toetume raamatu [1] peatükkidele 1.3, 2.2, 2.3 ja 2.4.

Kuigi eksponentsiaalse silumise meetodeid on kasutatud alates 1950-ndatest aastatest, on vastav modelleerimisraamistik, mis sisaldab stohhastilisi mudeleid, tõenäosuste arvutusi, usaldusintervalle ja protseduure mudeli valikuks, välja arendatud alles hiljuti. Ordi (alates 1997), R. Hyndmani (alates 2002) ja teiste töödes on välja arendatud olekuruumi mudelid, mille aluseks on eksponentsiaalse silumise meetodid. Olekuruumi mudelitest räägime lähemalt järgmises peatükis.

Selles peatükis anname ülevaate eksponentsiaalse silumise meetoditest.

## 2.1 Ülevaade eksponentsiaalse silumise meetodite ajaloost

Ajalooliselt tähendab eksponentsiaalse silumise meetod ühte prognoosimise meetodite klassi. Õigupoolest, osad kõige edukamatest prognoosimise meetoditest põhinevad eksponentsiaalsel silumisel. On palju meetodeid, mis kuuluvad eksponentsiaalse silumise meetodite perre, kõigi nende ühiseks omaduseks on seejuures see, et prognoos on minevikuväärtuste kaalutud kombinatsioon, kus uuematele vaatlustele omistatakse suuremad kaalud kui vanematele. Nimi eksponentsiaalse silumise meetod peegeldab fakti, et minnes ajas tagasi kahanevad vaatluste kaalud eksponentsiaalselt.

Idee pärineb 1944 aastast Robert G. Brownilt, kes töötas USA Mereväes Operatsiooniarenduse analüütikuna. Ta kasutas eksponentsiaalse silumise meetodite ideed allveelaevade arvutusseadmetes. 1950 aastatel laiendas ta seda ideed, lisades trendi ja sesoonsuse kajastamise liikmed. Üks selle meetodi esimesi rakendusi oli varuosade prognoosimine USA mereväes. Hiljem esitleti seda rakendust Ameerika Operatsiooni Arendamise Ühingu koosolekul 1956 aastal ning see on aluseks Browni esimesele raamatule inventari kontrollist (1959). Ideid arendati edasi Browni teises raamatus, mis ilmus 1963 aastal.

Iseseisvalt, sõltumatult Brownist, töötas eksponentsiaalse silumise meetoditega USA Mereväe Uuringute Ameti heaks Charles Holt. Holti meetod erines Browni omast trendi ja sesoonsete komponentide silumise osas. Tema originaalne töö sai kirja pandud Mereväe Uuringute Ameti memorandumis (Holt 1957), millele on laialdaselt viidatud, aga mis avaldati alles 2004 aastal, kui see ilmus ajakirjas *"International Journal of Forecasting"*.

Holti töö sai aga tuntuks 1960 aastal läbi tema õpilase Peter Wintersi töö, kus viimane pakkus välja Holti meetodi jaoks empiirilised testid. Selle tulemusena on sesoonset komponenti sisaldavad Holti meetodid tavaliselt tuntud kui Holt-Wintersi meetodid (mõnikord nimetatakse neid lihtsalt Wintersi meetoditeks, mis on Holti suhtes üpris ebaõiglane).

Teine Holti kolleeg oli John Muth, kes sai tuntuks majandusteaduses ratsionaalsete ootuste teooria sõnastajana. Eksponentsiaalse silumise valdkonnas on ta tuntud kahe statistilise mudeli tutvustajana (Muth 1960), milles optimaalne prognoos on võrdväärne nende tulemustega, mis on saadud eksponentsiaalse silumise meetodeid kasutades.

Muthi mudelid on esimesed statistilised mudelid, millele prognoosid on leitavad eksponentsiaalse silumise meetodeid kasutades. Eksponentsiaalse silumise meetodite edu prognoosimisel ja inventari kontrollimisel on viinud paljusid teadlaseid otsima mudeleid, mis jõuavad samade prognoosideni kui kõnealused meetodid. Paljud nendest mudelitest, kaasa arvatud Muthi mudel, on olekuruumi mudelid, mille jaoks minimaalse keskmise ruutvea prognoos on leitud eksponentsiaalse silumise meetoditega.

## 2.2 Eksponentsiaalse silumise meetodite klassifikatsioon

Eksponentsiaalse silumise korral alustame alati trendi komponendist, mis on iseenesest kombinatsioon taseme ( $l$ ) ja kasvu ( $b$ ) liikmetest. Taseme ja kasvu komponente võib omavahel siduda mitmel erineval moel, saades sedasi viis erinevat trendi tüüpi. Tähistagu  $T_h$  tuleviku trendi üle järgneva ajaperioodi  $h$  ning olgu  $\phi$  summutamise parameeter ( $0 < \phi < 1$ ). Viis trendi tüüpi või kasvu mustrit on järgmised:

$$\begin{aligned} \text{Puudub: } T_h &= l \\ \text{Aditiivne: } T_h &= l + bh \\ \text{Summutatud aditiivne: } T_h &= l + (\phi + \phi^2 + \dots + \phi^h) b \\ \text{Multiplikatiivne: } T_h &= lb^h \\ \text{Summutatud multiplikatiivne: } T_h &= lb^{(\phi + \phi^2 + \dots + \phi^h)} \end{aligned}$$

Summutatud trendi on mõistlik kasutada siis, kui aegreal on olemas trend, kuid ei ole mõistlik arvata, et trend jätkub sama kasvu komponendiga veel pikemat aega. Võrdused summutatud trendiga, nagu nimigi ütleb, summutavad trendi prognoosi perioodi pikene misel. Tihtipeale see parandab prognoosi täpsust, eriti pikemate prognooside tegemisel.

Kui trendi komponent on valitud, võime lisada sesoonse komponendi kas aditiivselt või multiplikatiivselt. Lõpuks kaasame ka vealiikme kas siis aditiivselt või multiplikatiivselt.

Ajalooliselt on vea olemust tihtipeale ignoreeritud, sest nii aditiivsete kui ka multiplikaatiivsete vigade lisamise korral jäävad punktiviisilised prognoosid samaks.

Kui vea komponent mudelist välja jätta, saame viisteist eksponentsiaalse silumise meetodit, mis on toodud tabelis 2.1 .

Trendi komponent	Sesoonsuse komponent		
	$N$ (Puudub)	$A$ (Aditiivne)	$M$ (Multiplikatiivne)
$N$ (Puudub)	$N, N$	$N, A$	$N, M$
$A$ (Aditiivne)	$A, N$	$A, A$	$A, M$
$A_d$ (Summutatud aditiivne)	$A_d, N$	$A_d, A$	$A_d, M$
$M$ (Multiplikatiivne)	$M, N$	$M, A$	$M, M$
$M_d$ (Summutatud multiplikatiivne)	$M_d, N$	$M_d, A$	$M_d, M$

Tabel 2.1: Eksponentsiaalse silumise meetodid ilma vea komponendita

See meetodite klassifikatsioon pärineb Pegelsi (1969) süstemaatikast. Hiljem laiendas seda Gardner (1985), modifitseeris Hyndman (2002) ning taaskord laiendas teda Taylor (2003), andes kokku viisteist meetodit eelnimetatud tabelist.

Osad nendest meetoditest on tuntud teiste nimede all. Näiteks lahter  $(N, N)$  kirjeldab lihtsat eksponentsiaalse silumise meetodit, lahter  $(A, N)$  kirjeldab lineaarset Holti meetodit ja lahter  $(A_d, N)$  kirjeldab summutatud trendiga meetodit. Holt-Wintersi aditiivne meetod on toodud lahtris  $(A, A)$  ning Holt-Wintersi multiplikatiivne meetod on toodud lahtris  $(A, M)$ . Ülejäänud lahtrites olevad meetodid vastavad vähemtuntud, kuid analoogsetele meetoditele.

Iga toodud meetodi jaoks tabelis 2.1, on kaks võimalikku olekuruumi mudelit, üks aditiivse veakomponendiga ja teine multiplikatiivse veakomponendiga. Kui on kasutatud samu parameetrite väärtuseid, siis need kaks mudelit annavad ekvivalentseid punktiviisilised prognoosid, kuid erinevad usaldusintervallid. Seega on selles tabelis ära kirjeldatud kolmkümmend potentsiaalset mudelit.

Oluline eristama olekuruumi mudeleid ja nende aluseks olevaid eksponentsiaalse silumise meetodeid. Eksponentsiaalse silumise meetod on algoritm, mis genereerib ainult punktiviisilised prognoosid. Olekuruumi mudelid annavad need samad prognoosid, kuid lisaks võimaldavad arvutada veel usaldusintervalle, kontrollida vastavust mudelitele ja palju muud.

Kõik eksponentsiaalse silumise meetodite punktiviisiliste prognooside avaldised on välja toodud lisas olevas tabelis L.1.

## 2.3 Punktiviisilised prognoosid tuntuimatele meetoditele

Siin anname ülevaate osadest kõige tuntumatest eksponentsiaalse silumise meetoditest – lihtsast eksponentsiaalse silumise meetodist  $(N, N)$ , Holti lineaarsest meetodist  $(A, N)$ , summutatud trendi meetodist  $(A_d, N)$  ning Holt-Wintersi meetoditest  $(A, A)$  ja  $(A, M)$ . Lisaks näitame ka, kuidas näeb välja meetod  $(M, A)$  ning kuidas see saadud on.

Märgime vaadeldud aegrea tähistusega  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Prognoos aegrea elemendile  $y_{t+h}$  kasutades andmeid ajani  $t$  olgu tähistatud  $\hat{y}_{t+h|t}$ . Ühesammulisele prognoosile anname lihtsama kuju  $\hat{y}_{t+1} \equiv \hat{y}_{t+1|t}$ . Enamasti on nõutud, et parameetrid oleksid hinnatud, kuid lihtsuse mõttes eeldame, et vajalike parameetrite väärtused on teada.

### Lihtne eksponentsiaalse silumise meetod $(N, N)$

Oletame, et me oleme vaadelnud andmeid ajani  $t - 1$  kaasaarvatud ja me soovime prognoosida oma aegreale järgmist väärtust  $y_t$ . Meie tähistuste kohaselt on prognoos  $\hat{y}_t$ . Siis, kui saame teada vaatluse  $y_t$  väärtuse, saame leida prognoosi vea  $y_t - \hat{y}_t$ . Lihtne eksponentsiaalse silumise meetod, esimest korda kasutatud Browni poolt 1950-ndatel, võtab eelmise perioodi prognoosi ja kohandab seda, kasutades prognoosi viga. Seega järgneva perioodi prognoos on

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{y}_t + \alpha(y_t - \hat{y}_t), \quad (2.1)$$

kus  $\alpha$  on konstant nulli ja ühe vahel.

On näha, et uus prognoos on lihtsalt vana prognoos koos sobitatud veaga, mis ilmnes eelmisel prognoosil. Kui  $\alpha$  väärtus on lähedal ühele, on uues prognoosis oluline osa veast, mis eelmisel prognoosil ilmnes. Vastupidiselt, kui  $\alpha$  on nulli lähedane, sisaldab uus prognoos väga vähe kohandamist. Sama mudelit saab kirjutada veel teiselgi kujul

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 - \alpha) \hat{y}_t, \quad (2.2)$$

Prognoos  $\hat{y}_{t+1}$  baseerub kõige viimase vaatluse kaalumisel kaaluga  $\alpha$  ja kõige viimase prognoosi kaalumisel kaaluga  $1 - \alpha$ . Seega saab seda tõlgendada, kui viimase vaatluse ja viimase prognoosi kaalutud keskmist.

Eksponeentsiaalne silumine on kergemini aru saadav, kui asendada võrduses 2.2  $\hat{y}_t$  selle

komponentide kaudu:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+1} &= \alpha y_t + (1 - \alpha) [\alpha y_{t-1} + (1 - \alpha) \hat{y}_{t-1}] \\ &= \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \hat{y}_{t-1}.\end{aligned}$$

Kui seda asendamise protsessi jätkata asendades  $\hat{y}_{t-1}$  omakorda selle komponentidega,  $\hat{y}_{t-2}$  omakorda selle komponentidega ja nii edasi, siis lõpuks jõuame valemieni:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+1} &= \alpha y_t + \alpha (1 - \alpha) y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 y_{t-2} + \alpha (1 - \alpha)^3 y_{t-3} \\ &+ \alpha (1 - \alpha)^4 y_{t-4} + \dots + \alpha (1 - \alpha)^{t-1} y_1 + (1 - \alpha)^t \hat{y}_1.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Seega  $\hat{y}_{t+1}$  esitub kaalutud libiseva keskmisena kõikidest mineviku väärtustest, mille kaalud vähenevad eksponentsiaalselt, siit ka nimi eksponentsiaalne silumine. Paneme tähele, et  $\hat{y}_1$  kaal võib olla üpris suur juhul, kui  $\alpha$  on väike ning aegrida võrdlemisi lühike. Algväärtuste valimine on sellisel juhul väga tähtis.

Pikema ulatusega prognooside korral eeldatakse, et prognoosimisfunktsioon on “lame”, see tähendab, et on kujul

$$\hat{y}_{t+h|t} = \hat{y}_{t+1}, h = 2, 3, \dots$$

Lamedat prognoosimisfunktsiooni kasutatakse, kuna lihtne eksponentsiaalse silumise meetod töötab kõige paremini andmetega, millel puudub trend, sesoonsus ning teised mustrid.

Teine võimalus selle kirjapanemiseks on  $l_t = \hat{y}_{t+1}$ . Siis saame, et  $\hat{y}_{t+h|t} = l_t$  ja  $l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) l_{t-1}$ . Siin tähistus  $l_t$  näitab aegrea taset ajahetkel  $t$ . Kuigi see paisab meetodi väljendamiseks kohmakas, üldistab see eksponentsiaalse silumise meetodit trendi ja sesoonsuse lubamiseks.

Et oleks võimalik lihtsat eksponentsiaalse silumise meetodit kasutada, peame täpsustama algväärtuse  $l_0 = \hat{y}_1$  ning parameetri  $\alpha$ . Traditsiooniliselt (eriti enne arvutite ajastut) võeti  $\hat{y}_1$  võrdseks esimese vaatluse väärtusega ning  $\alpha$  väärtuseks anti mingi väike number, tihtipeale 0.2. Siiski on praeguseks ajaks paremaid meetodeid nende parameetrite hindamiseks, neid vaatleme veidi hiljem.

## Holti Lineaarne meetod ( $A, N$ )

Holt(1957) laiendas lihtsat eksponentsiaalse silumise meetodit lineaarseks eksponentsiaalse silumise meetodiks, et saaks prognoosida ka trendiga andmeid. Holti lineaarne eks-

ponentsiaalse silumise meetod on saadud, kasutades kahte parameetrit  $\alpha$  ja  $\beta^*$  (mille väärtused on nulli ja ühe vahel) ning kolme võrrandit:

$$\text{Tase: } l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}), \quad (2.4a)$$

$$\text{Kasv: } b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1}, \quad (2.4b)$$

$$\text{Prognoos: } \hat{y}_{t+h|t} = l_t + b_t h. \quad (2.4c)$$

Siin  $l_t$  tähistab hinnangut aegrea tasemele ajal  $t$  ning  $b_t$  tähistab tõusu (kasvu) hinnangut sama ajahetke jaoks. Paneme tähele, et  $b_t$  on kaalutud keskmise eelmisest tõusust  $b_{t-1}$  ja tasemete vahel põhineval hinnangust tõusule. Põhjusest, miks siin kasutame  $\beta^*$  ja mitte  $\beta$  on kerge aru saada, kui toome sisse olekuruumi mudelid.

Erijuhul, kui  $\alpha = \beta^*$ , on Holti meetod ekvivalentne Browni topelt eksponentsiaalse silumise meetodiga (Brown 1959). Brown kasutas diskonteerimistegurit, et jõuda oma prognoosimisvõrdusteni, seega  $(1 - \alpha)$  on diskonteerimistegur, mida on kasutatud nii taseme kui kasvu komponentides.

Üks huvitav erijuht on selle meetodi korral veel, kui  $\beta^* = 0$ . Sellisel juhul saame võrrandid kujul:

$$\text{Tase: } l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b)$$

$$\text{Prognoos: } \hat{y}_{t+h|t} = l_t + bh.$$

See meetod on tuntud kui triiviga lihtne ekponentsiaalse silumise meetod.

## Summutatud trendi meetod ( $A_d, N$ )

Gardner ja McKenzie (1985) pakkusid välja modifikatsiooni Holti lineaarsele meetodile, et oleksid lubatud ka summutatud trendid. Selle meetodi võrrandid on:

$$\text{Tase: } l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + \phi b_{t-1}), \quad (2.5a)$$

$$\text{Kasv: } b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}, \quad (2.5b)$$

$$\text{Prognoos: } \hat{y}_{t+h|t} = l_t + (\phi + \phi^2 + \dots + \phi^h) b_t. \quad (2.5c)$$

Seega, ühesammulise prognoosi  $\hat{y}_{t+1|t}$  kasv on  $\phi b_t$ , kasv on summutatud suuruse  $\phi$  võrra iga järgneva perioodi jaoks. Kui  $\phi = 1$  annab see meetod samad prognoosid, kui Holti lineaarne meetod. Olukorras, kus  $0 < \phi < 1$ , lähenevad prognoosid piiril kui  $h \rightarrow \infty$  väärtustele, mis on antud asümptoodiga  $l_t + \phi b_t / (1 - \phi)$ . Enamasti eeldatakse, et  $\phi > 0$ ,

et vältida võrduses 2.5b  $b_{t-1}$  läbi korrutamist negatiivse kordajaga ning  $\phi \leq 1$ , et vältida prognoosi  $\hat{y}_t$  kasvumist eksponentsiaalselt.

## Holt-Wintersi trendi ja sesoonsuse meetodid $(A, M)$ ja $(A, A)$

Kui meie andmetel ei ole trendi ega sesoonsust, on kohane kasutada lihtsat eksponentsiaalse silumise meetodit. Juhul kui andmetel esineb lineaarne trend, on sobivaks Holti lineaarne (või summutatud) meetod. Kuid juhul, kui andmetel on olemas ka sesoonsus, ei suuda need meetodid üksinda probleemi lahendada.

1957 aastal esitas Holt meetodi sesoonsete andmete jaoks. Seda meetodit uuris ka Winters (1960) ning seetõttu on see tuntuks saanud kui Holt-Wintersi meetod.

Holt-Wintersi meetod baseerub kolmel silumise võrrandil – üks taseme, teine kasvu ja kolmas sesoonsuse jaoks. See on sarnane Holti meetodile, millele on lisatud ka võrrand sesoonsusega tegelemiseks. Tegelikuses on olemas kaks erinevat Holt-Wintersi meetodit sõltuvalt sellest, kas sesoonsus on modelleeritud multiplikatiivselt või aditiivselt.

### Holt-Wintersi meetod multiplikatiivse sesoonsusega $(A, M)$

Võrrandid multiplikatiivse sesoonsusega Holt-Wintersi mudeli jaoks on:

$$\text{Tase: } l_t = \alpha \frac{y_t}{s_{t-m}} + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}), \quad (2.6a)$$

$$\text{Kasv: } b_t = \beta^* (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}, \quad (2.6b)$$

$$\text{Sesoonsus: } s_t = \gamma \frac{y_t}{(l_{t-1} + b_{t-1})} + (1 - \gamma) s_{t-m}. \quad (2.6c)$$

$$\text{Prognoos: } \hat{y}_{t+h|t} = (l_t + b_t h) s_{t-m+h_m^+}, \quad (2.6d)$$

kus  $m$  on sesoonsuse periood (näiteks kuude või kvartalite arv aastas),  $l_t$  on aegrea tase,  $b_t$  tähistab kasvu,  $s_t$  on sesoonsuse komponent,  $\hat{y}_{t+h|t}$  on prognoos  $h$  perioodi ette ning  $h_m^+ = [(h - 1) \bmod m] + 1$ . Parameetrid  $(\alpha, \beta^*$  ja  $\gamma)$  kuuluvad tavaliselt vahemikku nulli ja ühe vahel.



## Holt-Wintersi meetod aditiivse sesoonsusega ( $A, A$ )

Sesoonse komponendi saab Holt-Wintersi meetodile lisada ka aditiivselt, kuigi praktikas on see vähem levinud. Võrrandid Holt-Wintersi aditiivse sesoonsusega meetoditele on:

$$\text{Tase: } l_t = \alpha (y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}), \quad (2.7a)$$

$$\text{Kasv: } b_t = \beta^* (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}, \quad (2.7b)$$

$$\text{Sesoonsus: } s_t = \gamma (y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}. \quad (2.7c)$$

$$\text{Prognoos: } \hat{y}_{t+h|t} = l_t + b_t h + s_{t-m+h_m^+}. \quad (2.7d)$$

Siin on teine võrdus identne võrdusega 2.6b. Ainuke erinevus tuleb sisse võrdustes, kus on kasutatud sesoonsuse komponenti, aditiivse meetodi puhul on kasutatud komponendi liitmist ja lahutamist sellega korrutamise ja jagamise asemel.

## Meetod ( $M, A$ ) ning selle saamine

Siin näitame, kuidas kirja panna meetod ( $M, A$ ). Selle tähistusest näeme, et meil on tegu meetodiga, millel on multiplikatiivne trend ( $M$ ) ja aditiivne sesoonsus ( $A$ ).

Meie trendi liige on kujul  $T_h = lb^h$ , sellele liidame sesoonsuse liikme  $S$ , seega saame prognoosi võrrandi kujul:

$$\hat{y}_{t+h|t} = l_t b_t^h + s_{t-m+h_m^+}.$$

Taseme võrduse leidmiseks leiame kaalutud keskmise sesoonselt kohandatud aegrea elemendi ( $y_t - s_{t-m}$ ) ja taseme prognoosi ( $l_{t-1} b_{t-1}$ ) vahel, ehk:

$$l_t = \alpha (y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1}.$$

Tõusu  $b_t$  saamiseks leiame kaalutud keskmise tõusu hinnangu ( $l_t/l_{t-1}$ ) ja eelmise tõusu  $b_{t-1}$  vahel, ehk:

$$b_t = \beta^* \frac{l_t}{l_{t-1}} + (1 - \beta^*) b_{t-1}.$$

Lõpuks leiame analoogselt ka sesoonsuse, kus leiame kaalutud keskmise ( $y_t - l_{t-1} b_{t-1}$ ) ja eelmise sesoonsuse komponendi  $s_{t-m}$  vahel:

$$s_t = \gamma (y_t - l_{t-1} b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}.$$

Need neli võrdust moodustavadki meetodi  $(M, A)$ . Kui seda meetodit võrrelda Holt-Wintersi aditiivse sesoonsusega meetodiga, näeme, et sesoonsus on võrdustes sees samal kujul ning trendi komponendid on siin korrutatud ja jagatud ning Holt-Wintersi meetodil liidetud ja lahutatud.

## 2.4 Punktiviisiliste prognooside erijuhud

Mõned huvitavamad erijuhud saadakse parameetritele ekstreemsete väärtuste määramisega. Näiteks, kui  $\alpha = 0$  on tase konstantne, kui  $\beta^* = 0$  on tõus ajas muutumatu ning kui  $\gamma = 0$ , siis sesoonsus jääb ajas muutumatuks. Teised äärmuslikud prognoosid, ehk niinimetatud naiivsed prognoosid ( $\hat{y}_{t+h|t} = y_t$ , iga  $h$  korral) on saadud kasutades  $(N, N)$  meetodit kus  $\alpha = 1$ . Lisaks on aditiivse ja multiplikatiivse trendiga meetodid erijuhud vastavatest summutatud trendiga meetoditest, kus  $\phi = 1$ .

# 3 Olekuruumi mudelid

Käesolevas peatükis toetume raamatu [1] peatükkidele 2.1 ja 2.5 ning allika [2] peatükile 2.4.

Eksponentsiaalse silumise meetoditele saab vastavusse seada tõenäosuslikud mudelid, mida nimetatakse olekuruumi mudeliteks. Iga meetodi jaoks on kaks mudelit, üks aditiivse vea komponendiga ja teine multiplikatiivsega. Punktiviisilised prognoosid on samade parameetrite kasutamisel mõlema mudeli jaoks identsed, kuid neil on erinevad usalduspiirid.

Et eristada mudeleid, toome sisse kolmanda tähe ning kolmik  $(E, T, S)$  tähistab kolme komponenti – viga, trendi ja sesoonsust. Seega mudel  $ETS(M, A_d, A)$  tähistab mudelit, millel on multiplikatiivsed vead, summutatud aditiivne trend ja aditiivne sesoonsus, teisisõnu on see summutatud trendi meetod aditiivse vea komponendiga. Sarnaselt viitab  $ETS(A, A, A)$  aditiivsete vigade, trendi ja sesoonsusega mudelile, mis on tuntud kui Holt-Wintersi aditiivse sesoonsusega meetod aditiivse vea komponendiga. Märgistus  $ETS(\cdot, \cdot, \cdot)$  aitab meeles pidada ka komponentide järjekorda.

Kui mudel on täpsustatud saame uurida tulevikuväärtuste tõenäosusjaotusi. Näiteks teades minevikku on võimalik leida tulevaste vaatluse tinglik keskvärtus. Tähistame selle  $\mu_{t+h|t} = E(y_{t+h}|x_t)$ , kus  $x_t$  sisaldab vaatlemata komponente  $l_t$ ,  $b_t$  ja  $s_t$ . Kui  $h = 1$  kasutame lühemat tähistust  $\mu_{t+1|t} \equiv \mu_{t+1}$ . Enamiku mudelite jaoks on need tinglikud keskvärtused identsed mudelite aluseks olevate meetodite punktiviisiliste prognoosidega, seega saame eelneva välja kirjutada  $\mu_{t+h|t} = \hat{y}_{t+h|t}$ . Kui  $h \geq 2$ , siis osade mudelite (multiplikatiivse trendi või multiplikatiivse sesoonsusega) korral tinglik keskvärtus ja punktiviisiline prognoos võivad vähesel määral erineda.

## 3.1 Olekuruumi mudeli definitsioon

Olekuruumi mudelid lubavad märkimisväärset paindlikkust parameetrite struktuuri kirjeldamisel. Märkigu  $y_t$  vaatlust hetkel  $t$ , olgu  $\mathbf{x}_t$   $n$  komponendiga olekuvektor. Olekuvektor sisaldab komponente, mis kirjeldavad aegrea taset, trendi ja sesoonsust.

**Definitsioon 3.1.1** *Lineaarne olekuruumi mudel esitub kujul*

$$y_t = \mathbf{w}' \mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g} \epsilon_t, \quad (3.1b)$$

kus  $\epsilon_t$  on müra ning  $\mathbf{F}$  on  $n \times n$  maatriks,  $\mathbf{g}$  ja  $\mathbf{w}$  on  $1 \times n$  koefitsentide vektorid.

Esimene seos 3.1a on tuntud kui vaatluse võrrand, see kirjeldab seost vaadeldud olekute  $\mathbf{x}_{t-1}$  ja prognoositava väärtuse  $y_t$  vahel. Teine seos 3.1b on teatud kui ülemineku (või oleku) võrrand, see kirjeldab olekute arengut ajas.  $\mathbf{F}$  on üleminekumaatriks,  $\mathbf{F} \mathbf{x}_{t-1}$  näitab mineviku mõju ning  $\mathbf{g} \epsilon_t$  väljendab prognoosimatut osa praegusele olekuvektorile  $\mathbf{x}_t$ . Vektor  $\mathbf{g}$  näitab kui suur on vea mõju olekuvektorile. Identsete vigade kasutus nendes võrdustes muudab selle ühe veaallikaga olekuruumi mudeliks, mille käsitlemine on tunduvalt lihtsam, kui vastavate mitme veaallikaga mudelite uurimine.

Olekuruumi mudelite filosoofia sobib hästi eksponentsiaalse silumise meetodite lähenemisega, kuna taseme, trendi ja sesoonsuse saab mudelis eraldi välja tuua. Võrdlusena võib tuua ARIMA (*autoregressive integrated moving average*) mudelid, kus neid komponente ei ole nii kerge eristada. Mittelineaarsed olekuruumi mudelid on samuti võimalikud. Üks võimalik kuju on:

$$y_t = w(\mathbf{x}_{t-1}) + r(\mathbf{x}_{t-1}) \epsilon_t, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{x}_t = F(\mathbf{x}_{t-1}) + g(\mathbf{x}_{t-1}) \epsilon_t, \quad (3.2b)$$

kus  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on mingid funktsioonid.

Olekuruumi mudelite kujud on välja toodud lisas olevates tabelites, tabelis L.2 on aditiivse vealiikmega mudelid ja tabelis L.3 on multiplikatiivse vealiikmega mudelid.

## 3.2 Olekuruumi mudelid Holt- Wintersi aditiivse sesoonsusega meetodile

Vealiikme saab lisada nii aditiivselt kui ka multiplikatiivselt, siin toome välja mõlemad mudelid Holt-Wintersi aditiivse sesoonsusega meetodile. Analoogselt saab mudelid välja kirjutada ka teiste meetodite jaoks.

## Aditiivse veaga mudel: ETS $(A, A, A)$

Olgu ühesammuline prognoos  $y_t$  jaoks  $\mu_t = \hat{y}_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ . Eeldame, et parameetrite väärtused on teada, ning  $\epsilon_t = y_t - \mu_t$  olgu ühesammulise prognoosi viga ajal  $t$ . Seega valemist 2.7d saame, et:

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \epsilon_t. \quad (3.3)$$

Asendades  $y_t$  valemis 2.7a ülaltoodud võrdusega 3.3, saame:

$$\begin{aligned} l_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ &= \alpha l_{t-1} + \alpha b_{t-1} + \alpha s_{t-m} + \alpha \epsilon_t - \alpha s_{t-m} + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ &= \alpha l_{t-1} + \alpha b_{t-1} + \alpha \epsilon_t + l_{t-1} + b_{t-1} - \alpha l_{t-1} - \alpha b_{t-1} \\ &= l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \epsilon_t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Asendades valemis 2.7b oleva suuruse  $l_t$  võrdusega 3.4 saame:

$$\begin{aligned} b_t &= \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1} \\ &= \beta^*l_{t-1} + \beta^*b_{t-1} + \beta^*\alpha\epsilon_t - \beta^*l_{t-1} + (1 - \beta^*)b_{t-1} \\ &= \beta^*b_{t-1} + \beta^*\alpha\epsilon_t + b_{t-1} - \beta^*b_{t-1} \\ &= b_{t-1} + \alpha\beta^*\epsilon_t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Asendades  $y_t$  valemis 2.7c ülaltoodud võrdusega 3.3 saame:

$$\begin{aligned} s_t &= \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m} \\ &= \gamma l_{t-1} + \gamma b_{t-1} + \gamma s_{t-m} + \gamma \epsilon_t - \gamma l_{t-1} - \gamma b_{t-1} + (1 - \gamma)s_{t-m} \\ &= \gamma s_{t-m} + \gamma \epsilon_t + s_{t-m} - \gamma s_{t-m} \\ &= s_{t-m} + \gamma \epsilon_t. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Seejärel muudame saadud võrdustes tähistust nii, et  $\beta = \alpha\beta^*$ . Kirjutame ülaltoodud võrdused 3.3 - 3.6, kasutades olekuruumi tähistusi:

$$\mathbf{x}_t = \begin{bmatrix} l_t \\ b_t \\ s_t \\ \vdots \\ s_{t-m+1} \end{bmatrix}, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$y_t = \mathbf{w}'\mathbf{x}_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}\epsilon_t.$$

Mudel on täielikult määratud, kui on fikseeritud vealiikme  $\epsilon_t$  jaotus. Enamasti eeldatakse, et vead on sõltumatud keskväärtusega 0 ja standardhälbega  $\sigma$  normaaljaotusega juhuslikud suurused.

## Multiplikatiivse veaga mudel: ETS ( $M, A, A$ )

Sarnaselt saame kirja panna ka multiplikatiivse veaga mudeli. Olgu ühesammuline prognoos  $y_t$  jaoks  $\mu_t = \hat{y}_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ , eeldame et parameetrite väärtused on teada ning kuna hetkel uurime multiplikatiivse veaga mudelit, siis valemist 2.7d saame, et

$$y_t = \mu_t(1 + \epsilon_t) = (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \epsilon_t) \quad (3.7)$$

seega ühesammulise prognoosi viga ajal  $t$  on  $\epsilon_t = (y_t - \mu_t)/\mu_t$ .

Asendades  $y_t$  valemis 2.7a ülaltoodud võrdusega 3.7saame:

$$\begin{aligned} l_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ &= \alpha((l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \epsilon_t) - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ &= \alpha(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} - s_{t-m} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t) + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) \\ &= \alpha l_{t-1} + \alpha b_{t-1} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\alpha\epsilon_t + l_{t-1} + b_{t-1} - \alpha l_{t-1} - \alpha b_{t-1} \\ &= l_{t-1} + b_{t-1} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\alpha\epsilon_t, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Asendades valemis 2.7b oleva suuruse  $l_t$  vördusega 3.8 saame:

$$\begin{aligned}
b_t &= \beta^* (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1} \\
&= \beta^* (l_{t-1} + b_{t-1} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}) \alpha \epsilon_t - l_{t-1}) + (1 + \beta^*) b_{t-1} \\
&= \beta^* b_{t-1} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}) \alpha \beta^* \epsilon_t + b_{t-1} + b_{t-1} \beta^* \\
&= b_{t-1} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}) \alpha \beta^* \epsilon_t,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Asendades  $y_t$  valemis 2.7c ülaltoodud vördusega 3.7 saame:

$$\begin{aligned}
s_t &= \gamma (y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m} \\
&= \gamma ((l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}) (1 + \epsilon_t) - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m} \\
&= \gamma (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}) \epsilon_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m} \\
&= \gamma s_{t-m} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}) \gamma \epsilon_t + s_{t-m} - \gamma s_{t-m} \\
&= s_{t-m} + (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}) \gamma \epsilon_t.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Seejärel muudame saadud vördustes tähistust nii, et  $\beta = \alpha \beta^*$ . Kirjutame ülaltoodud vördused 3.7 - 3.10 kasutades olekuruumi tähistusi:

$$\begin{aligned}
y_t &= w(\mathbf{x}_{t-1}) + r(\mathbf{x}_{t-1}) \epsilon_t, \\
\mathbf{x}_t &= F(\mathbf{x}_{t-1}) + g(\mathbf{x}_{t-1}) \epsilon_t.
\end{aligned}$$

Siin  $w(\mathbf{x}_{t-1})$ ,  $r(\mathbf{x}_{t-1})$ ,  $g(\mathbf{x}_{t-1})$  ja  $F(\mathbf{x}_{t-1})$  on funktsioonid kujul:

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{x}_{t-1}) &= \mathbf{w}' \mathbf{x}_{t-1}, \\
r(\mathbf{x}_{t-1}) &= \mathbf{w}' \mathbf{x}_{t-1}, \\
g(\mathbf{x}_{t-1}) &= \mathbf{w}' \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{g}, \\
F(\mathbf{x}_{t-1}) &= \mathbf{F} \mathbf{x}_{t-1},
\end{aligned}$$

kus  $\mathbf{x}_t$ ,  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{g}$  ning  $\mathbf{F}$  on samad, mis mudeli  $(A, A, A)$  korral.

Ka siin eeldame, et vead on sõltumatud, keskväärtusega 0 ja standardhälbega  $\sigma$  normaaljaotusega juhuslikud suurused. Siin on tegemist mittelineaarse mudeliga, mille kasutamist hinnangute andmisel ja prognoosimisel peetakse üldiselt keeruliseks. Õnneks ühe veaallikaga mittelineaarsete mudelite korral saab arvutada prognoose ja usaldusintervalle sama vaevatult, kui lineaarsete olekuruumi mudelite korral.

### 3.3 Multiplikatiivse vea ja trendiga mudel: ETS ( $M, M, N$ )

Juba mudeli tähistusest ( $M, M, N$ ) on arusaadav, et trendi liige on multiplikatiivsel kujul, ehk  $T_h = lb^h$ , sesoonset liiget ei ole ja vealiige on  $\epsilon_t$ . Olgu ühesammuline prognoos  $y_t$  jaoks  $\mu_t = \hat{y}_t = l_{t-1}b_{t-1}$ . Eeldame, et parameetrite väärtused on teada, ning  $\epsilon_t$  olgu ühesammulise prognoosi viga ajal  $t$ . Seega aegrea liikme saame välja kirjutada kujul:

$$y_t = \mu_t (1 + \epsilon_t) = l_{t-1}b_{t-1} (1 + \epsilon_t). \quad (3.11)$$

Võrdusest 3.11 saame ühesammulise prognoosivea  $\epsilon_t$  on:

$$\epsilon_t = y_t/\mu_t - 1 = \frac{y_t - \mu_t}{\mu_t}.$$

Tase on kaalutud keskmine aegrea elemendi ja prognoositud taseme vahel,  $y_t$  asendame võrduse 3.11 kaudu:

$$\begin{aligned} l_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1} \\ &= \alpha l_{t-1} b_{t-1} (1 + \epsilon_t) + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1} \\ &= \alpha l_{t-1} b_{t-1} + \alpha l_{t-1} b_{t-1} \epsilon_t + l_{t-1} b_{t-1} - \alpha l_{t-1} b_{t-1} \\ &= l_{t-1} b_{t-1} + \alpha l_{t-1} b_{t-1} \epsilon_t \\ &= l_{t-1} b_{t-1} (1 + \alpha \epsilon_t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tõus on kaalutud keskmine tõusu hinnangust  $l_t/l_{t-1}$  ja eelmisest tõusust. Asendame  $l_t$  võrduses 3.12 saadud avaldisega:

$$\begin{aligned} b_t &= \beta^* \frac{l_t}{l_{t-1}} + (1 - \beta^*) b_{t-1} \\ &= \beta^* \frac{l_{t-1} b_{t-1} (1 + \alpha \epsilon_t)}{l_{t-1}} + (1 - \beta^*) b_{t-1} \\ &= \beta^* b_{t-1} + \alpha \beta^* b_{t-1} \epsilon_t + b_{t-1} - \beta^* b_{t-1} \\ &= b_{t-1} + \alpha \beta^* b_{t-1} \epsilon_t \\ &= b_{t-1} (1 + \alpha \beta^* \epsilon_t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nüüd saame mudeli välja kirjutada, kasutades olekuruumi tähistusi:

$$\begin{aligned} y_t &= w(\mathbf{x}_{t-1}) + r(\mathbf{x}_{t-1}) \epsilon_t, \\ \mathbf{x}_t &= F(\mathbf{x}_{t-1}) + g(\mathbf{x}_{t-1}) \epsilon_t, \end{aligned}$$



Siin  $\mathbf{x}'_t = (l_t, b_t)$  ning funktsioonideks  $w(\mathbf{x}_{t-1})$ ,  $r(\mathbf{x}_{t-1})$ ,  $g(\mathbf{x}_{t-1})$  ja  $F(\mathbf{x}_{t-1})$  on:

$$\begin{aligned}w(\mathbf{x}_t) &= r(\mathbf{x}_t) = l_t b_t, \\g(\mathbf{x}_t) &= \begin{bmatrix} \alpha l_t b_t \\ \beta b_t \end{bmatrix}, \\F(\mathbf{x}_t) &= \begin{bmatrix} l_t b_t \\ b_t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

# 4 Algväärtused ja parameetrite hindamine

Käesolevas peatükis toetume raamatu [1] peatükkidele 2.6, 2.7, 3.1, 3.3, 4.1, 5.1 ja 10.2. Et eeltoodud mudeleid saaks rakendada, tuleb kõigepealt anda ette algväärtus  $\mathbf{x}_0$  ja hinnata mudeli parameetrid  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ja  $\phi$ .

## 4.1 Algväärtused

Traditsiooniliselt määratakse algväärtus  $\mathbf{x}_0$  iga juhu jaoks spetsiaalselt selleks etteantud väärtustega või kasutatakse heuristilisi skeeme. Järgnevalt ongi toodud üks selline skeem mis koosneb kolmest sammust:

- **Esialgne sesoonne komponent.** Sesoonsete andmete jaoks arvutame esmalt esimese paari aasta jaoks libiseva keskmise. Tähistame selle  $f_t$  (valemid libiseva keskmise arvutamiseks on võetud allikast [2]).

Kui sesoonsuse periood  $m$  on paarisarv saame sesoonsuse leida valemiga:

$$f_t = \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2} (y_{-\frac{m}{2}} - y_{\frac{m}{2}}) + \sum_{i=-\frac{m}{2}+1}^{\frac{m}{2}-1} y_{t-i} \right).$$

Kui aga sesoonsus on paaritu kasutame lihtsat sümmeetrilist keskmist:

$$f_t = \frac{1}{2m+1} \sum_{i=(1-m)/2}^{(m-1)/2} y_{t-i}.$$

Seejärel eemaldame andmetest trendi, kusjuures aditiivse sesoonsuse eemaldamiseks teeme tehte  $y_t - f_t$  ning multiplikatiivse sesoonsuse korral tehte  $y_t/f_t$ . Siis arvutame esialgsed sesoonsuse indeksid  $s_{-m+1}, \dots, s_0$ , leides ilma trendita andmete keskmise iga sesoonsuse intervalli jaoks. Lõpuks normaliseerime need indeksid nii, et aditiivse sesoonsuse korral on nende summa null ning multiplikatiivse sesoonsuse korral on summaks  $m$ .

- **Esialgne taseme komponent.** Sesoonsete andmete korral arvutame lineaarse trendi kasutades lineaarset regressiooni esimese kümne sesoonsusega kohandatud

väärtuse (kasutades eelpool leitud sesoonsuse indekseid) ja aja  $t$  jaoks ( $t = 1, \dots, 10$ ). Ilma sesoonsuseta andmete jaoks on vaja arvutada lineaarne trend esimese kümne väärtuse ja aja  $t$  ( $t = 1, \dots, 10$ ) vahel. Siis  $l_0$  väärtuseks valida leitud regreesioonvõrrandi vabaliige.

- **Esialgne kasvu komponent.** Aditiivse trendi korral valida  $b_0$  väärtuseks eelmises punktis leitud regreesioonvõrrandi kordaja. Multiplikatiivse trendi korral võtame  $b_0$  väärtuseks  $1 + b/a$ , kus  $a$  on leitud regreesiooni võrrandi vabaliige ja  $b$  on regreesioonikordaja.

Neid esialgseid väärtuseid täpsustatakse veelgi parameetrite hindamise käigus.

## 4.2 Parameetrite hindamine

Olekuruumi mudelite jaoks on kerge arvutada tõepära ning saada parameetritele suurima tõepära hinnangud. Näitame, et normaaljaotusega vigade korral

$$L^*(\Theta, \mathbf{x}_0) = n \ln \left( \sum_{i=1}^n \epsilon_t^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^n \ln |r(\mathbf{x}_{t-1})|$$

on konstandi täpsusega võrdne kahekordse negatiivse logaritmiga suurima tõepära funktsioonist, sõltudes parameetritest  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma, \phi)'$  ja algväärtustest  $\mathbf{x}_0 = (l_0, b_0, s_0, s_{-1}, \dots, s_{-m+1})'$  ning kus  $n$  on vaatluste arv.

### Tõenäosustiheduse funktsiooni omadus

Selle jaoks, et kirja panna tõenäosustiheduse funktsiooni on meil vaja kasutada ühte tihedusfunktsiooni omadustest, mille toome lemmana välja ning seejärel tõestame.

**Lemma 4.2.1** *Olgu  $X$  tihedusega  $f_X$  pidev juhuslik suurus,  $a \neq 0$  ja  $b$  olgu konstandid. Siis  $Y = aX + b$  on pidev juhuslik suurus tihedusega*

$$f_Y = f_X \left( \frac{y - b}{a} \right) \frac{1}{|a|}.$$

**Tõestus.** Teame, et tihedus on jaotusfunktsiooni tuletis. Leiame kõigepealt  $Y$  jaotusfunktsiooni avaldise. Kasutades suurusi  $Y = aX + b$  saame:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq y - b).$$

Siin tuleb vaadelda kahte juhtu: esimese korral  $a > 0$  ning teisel juhul  $a < 0$ :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \begin{cases} P(X \leq \frac{y-b}{a}) & , a > 0, \\ P(X \geq \frac{y-b}{a}) & , a < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\frac{y-b}{a}) & , a > 0, \\ 1 - P(X < \frac{y-b}{a}) & , a < 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} F_X(\frac{y-b}{a}) & , a > 0, \\ 1 - F_X(\frac{y-b}{a}) & , a < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

kus kasutame  $X$  pidevuse tõttu kehtivat võrdust:

$$P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

Kuna tihedusfunktsioon on jaotusfunktsiooni tuletis, siis saame:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} & , a > 0 \\ -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} & , a < 0 \end{cases} \\ &= f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{|a|}. \end{aligned}$$

■

## Tõenäosustiheduse funktsioon lineaarse olekuruumi mudeli korral

Üldine lineaarne olekuruumi mudel on kujul 3.1. Enamasti eeldatakse, et mudeli vead on normaaljaotusega ning seda kasutatakse ära tõepära arvutamisel.

Kõigepealt veendume, et ajamomendile  $t$  vastav seisund on leitav  $x_0, y_1, \dots, y_t$  põhjal. Selleks avaldame mudeli 3.1 esimesest võrrandist:

$$\epsilon_t = y_t - \mathbf{w}'\mathbf{x}_{t-1}$$

ning asendame selle teise võrrandisse, saame:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}\epsilon_t = \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}y_t - \mathbf{g}\hat{y}_{t|t-1} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}y_t - \mathbf{g}\mathbf{w}'\mathbf{x}_{t-1} = (\mathbf{F} - \mathbf{g}\mathbf{w}')\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}y_t. \end{aligned}$$

Viime siin läbi asenduse nii, et  $\mathbf{D} = \mathbf{F} - \mathbf{g}\mathbf{w}'$  saame:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{D}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}y_t. \quad (4.1)$$

Võrduse 4.1 põhjal on selge, et  $x_0, y_1, \dots, y_t$  põhjal saame arvutada järkjärgult  $x_1, x_2, \dots, x_t$ . Arvestades, et  $\epsilon_t$  on sõltumatu suurustest  $x_0, y_1, \dots, y_{t-1}$  saame nüüd, et suuruse  $y_t$  prognoosiks ajal  $t - 1$  olemasoleva info põhjal on:

$$\hat{y}_{t|t-1} = E(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}, \mathbf{x}_0) = \mathbf{w}'\mathbf{x}_{t-1} + E\epsilon_t = \mathbf{w}'\mathbf{x}_{t-1}. \quad (4.2)$$

Lineaarse mudeli korral saab aga prognoosi sõltuvust olemasolevatest andmetest täpsemalt kirjeldada. Nimelt kui nüüd asendame  $\mathbf{x}_{t-1}$  võrduse 4.1, kust  $\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{D}\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{g}y_{t-1}$  ning jätkame asendusi kuni jõuame algväärtusteni  $\mathbf{x}_0$ , saame:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= \mathbf{D}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}y_t = \mathbf{D}(\mathbf{D}\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{g}y_{t-1}) + \mathbf{g}y_t \\ &= \mathbf{D}(\mathbf{D}(\mathbf{D}\mathbf{x}_{t-3} + \mathbf{g}y_{t-2}) + \mathbf{g}y_{t-1}) + \mathbf{g}y_t = \dots \\ &= \mathbf{D}^t\mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \mathbf{D}^j \mathbf{g}y_{t-j}. \end{aligned}$$

Seega saame, et

$$\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{D}^{t-1}\mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{t-1} \mathbf{D}^{j-1} \mathbf{g}y_{t-j}. \quad (4.3)$$

Selle asendame võrdusesse 4.2

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t|t-1} &= \mathbf{w}'\mathbf{x}_{t-1} = \mathbf{w}' \left( \mathbf{D}^{t-1}\mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{t-1} \mathbf{D}^{j-1} \mathbf{g}y_{t-j} \right) \\ &= \mathbf{w}'\mathbf{D}^{t-1}\mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^{t-1} \mathbf{w}'\mathbf{D}^{j-1} \mathbf{g}y_{t-j}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Seega prognoos on lineaarne funktsioon vaatlustest ja algväärtustest.

Kirjutame nüüd välja tõenäosustiheduse funktsiooni vektorile  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$ :

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\Theta}, \sigma^2) = \prod_{t=1}^n f(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}, \mathbf{x}_0) = \prod_{t=1}^n f(y_t | \mathbf{x}_{t-1})$$

Et  $y_t = \epsilon_t + \hat{y}_{t+h|t}$  ja  $\hat{y}_{t+h|t}$  on info  $x_{t-1}$  põhjal teada, saame siin kasutada lemmat 4.1

tingliku tiheduse jaoks:

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \Theta, \sigma^2) = \prod_{t=1}^n f(\epsilon_t). \quad (4.5)$$

Kui eeldame, et mudeli vead on normaaljaotusega, saame eelmist võrdust 4.5 esitada kujul:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \Theta, \sigma^2) &= \prod_{t=1}^n f(\epsilon_t) = \prod_{t=1}^n \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma^2}\right) \right] \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma^2}\right) (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_2^2}{2\sigma^2}\right) \cdots (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_n^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_1^2}{\sigma^2} + \frac{\epsilon_2^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{\epsilon_n^2}{\sigma^2} \right)\right) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\epsilon_t^2}{\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

## Tõenäosustiheduse funktsioon mittelineaarse olekuruumi mudeli korral

Kuna olekuruumi mudelid ei ole alati lineaarsel kujul, on vaja näidata, et tõenäosustiheduse funktsiooni saab avaldada ka mittelineaarse mudeli puhul. Vaatleme mudelit kujul 3.2. Avaldame võrdusest 3.2a suuruse  $\epsilon_t$ :

$$\epsilon_t = \frac{y_t - w(\mathbf{x}_{t-1})}{r(\mathbf{x}_{t-1})}.$$

Asendame selle võrdusesse 3.2b:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t &= F(\mathbf{x}_{t-1}) + \frac{g(\mathbf{x}_{t-1})(y_t - w(\mathbf{x}_{t-1}))}{r(\mathbf{x}_{t-1})} \\ &= F(\mathbf{x}_{t-1}) - \frac{g(\mathbf{x}_{t-1})w(\mathbf{x}_{t-1})}{r(\mathbf{x}_{t-1})} + \frac{g(\mathbf{x}_{t-1})y_t}{r(\mathbf{x}_{t-1})} \end{aligned}$$

Lühema esituse saamiseks teeme asenduse:

$$D(\mathbf{x}_t) = F(\mathbf{x}_t) - \frac{g(\mathbf{x}_t)w(\mathbf{x}_t)}{r(\mathbf{x}_t)},$$

seega meie võrdus saab kompaktsema kuju:

$$\mathbf{x}_t = D(\mathbf{x}_{t-1}) + \frac{g(\mathbf{x}_{t-1})}{r(\mathbf{x}_{t-1})} y_t. \quad (4.6)$$

Kui siin  $F(\mathbf{x}_t)$  ja  $w(\mathbf{x}_t)$  on lineaarsed ning  $g(\mathbf{x}_t)/r(\mathbf{x}_t)$  ei sõltu olekumuutujatest, siis  $D(\mathbf{x}_t)$  on lineaarne ja meie võrdus saab kuju:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{D}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{g}y_t.$$

See on samal kujul kui võrdus 4.1, mille tuletasime lineaarsete olekuruumi mudelite jaoks, seega võrdus 4.6 sobib kasutamiseks nii lineaarsete kui ka mittelineaarsete mudelite puhul.

Võrduse 4.6 põhjal on jällegi selge, et  $x_{t-1}$  on arvutatav  $x_0, y_1, \dots, y_{t-1}$  põhjal. Seega saame kirjutada ühesammulise prognoosi:

$$E(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}, \mathbf{x}_0) = E(y_t | \mathbf{x}_{t-1}) = w(\mathbf{x}_{t-1}) = \hat{y}_{t|t-1}$$

Ühesammulise prognoosi ja mudeli 3.2 saab kokku võtta järgmiselt:

$$\hat{y}_{t|t-1} = w(\mathbf{x}_{t-1}), \quad (4.7a)$$

$$\epsilon_t = (y_t - \hat{y}_{t|t-1}) / r(\mathbf{x}_{t-1}), \quad (4.7b)$$

$$\mathbf{x}_t = F(\mathbf{x}_{t-1}) + g(\mathbf{x}_{t-1}) \epsilon_t, \quad (4.7c)$$

Kirjutame nüüd välja tõenäosustiheduse funktsiooni üldise mudeli korral, ka siin kasutame lemmat 4.1, mille varem tõestasime:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y} | \mathbf{x}_0, \Theta, \sigma^2) &= \prod_{t=1}^n f(y_t | y_1, \dots, y_{t-1}, \mathbf{x}_0) = \prod_{t=1}^n f(y_t | \mathbf{x}_{t-1}) \\ &= \prod_{t=1}^n f(\epsilon_t) / |r(\mathbf{x}_{t-1})|. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nüüd eeldame, et vead on pärit normaaljaotusest ja seega saame ülaltoodud võrdusest:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{y}|\mathbf{x}_0, \Theta, \sigma^2) &= \prod_{t=1}^n f(\epsilon_t) / |r(\mathbf{x}_{t-1})| = \prod_{t=1}^n \left[ (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma^2}\right) \right] / |r(\mathbf{x}_{t-1})| \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_1^2}{2\sigma^2}\right) / |r(\mathbf{x}_0)| \cdots (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\epsilon_n^2}{2\sigma^2}\right) / |r(\mathbf{x}_{n-1})| \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \left( \prod_{t=1}^n |r(\mathbf{x}_{t-1})| \right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_1^2}{\sigma^2} + \frac{\epsilon_2^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{\epsilon_n^2}{\sigma^2} \right)\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \left( \prod_{t=1}^n |r(\mathbf{x}_{t-1})| \right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\epsilon_t^2}{\sigma^2}\right). \tag{4.9}
\end{aligned}$$

## Suurima tõepära hinnangud

Võttes kokku võrdused 4.5 ja 4.8 saame kirjutada tõepära funktsiooni:

$$L(\Theta, \mathbf{x}_0, \sigma|\mathbf{y}) = \prod_{t=1}^n f(\epsilon_t) / |r(\mathbf{x}_{t-1})|.$$

Log-tõepära on seega kujul:

$$\ln L = \sum_{t=1}^n \ln f(\epsilon_t) - \sum_{t=1}^n \ln |r(\mathbf{x}_{t-1})|.$$

Normaaljaotuse korral on meil olemas tõenäosustiheduse funktsioon kujul 4.9, sellest saame edasi kirjutada tõepära funktsiooni:

$$L(\Theta, \mathbf{x}_0, \sigma|\mathbf{y}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\epsilon_t^2}{\sigma^2}\right) \left( \prod_{t=1}^n |r(\mathbf{x}_{t-1})| \right)^{-1}$$

Log-tõepära funktsiooni saame sellest vähese vaevaga:

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\epsilon_t^2}{\sigma^2} - \sum_{t=1}^n \ln |r(\mathbf{x}_{t-1})|, \tag{4.10}$$

nüüd võtame osatuletise  $\sigma^2$  järgi:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} 2\pi + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \frac{\epsilon_t^2}{\sigma^4},$$



võrdsustame leitud tuletise nulliga ning leiame  $\sigma^2$  jaoks hinnangu  $\hat{\sigma}^2$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2.$$

Selle viimase võrduse abil saame  $\sigma^2$  logaritmilise tõepära funktsioonist 4.10 välja asendada:

$$\begin{aligned} \ln L &= -\frac{n}{2} \ln \left( 2\pi \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\sum_{t=1}^n \epsilon_t^2}{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2} - \sum_{t=1}^n \ln |r(\mathbf{x}_{t-1})| \\ &= -\frac{n}{2} \ln \left( \frac{2}{n} \pi \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 \right) - \frac{n}{2} - \sum_{t=1}^n \ln |r(\mathbf{x}_{t-1})| \end{aligned}$$

ning seeljärel korrutame läbi arvuga  $-2$ :

$$-2 \ln L = n \left( \ln \left( \frac{2}{n} \pi e \right) + 1 \right) + n \ln \left( \sum_{t=1}^n \epsilon_t^2 \right) + 2 \sum_{t=1}^n \ln |r(\mathbf{x}_{t-1})|,$$

esimene liige sellest on konstant, mis sõltub vaid vaatluste arvust  $n$ .

Seega suurima tõepära hinnangute leidmiseks peame minimeerima suurust:

$$L^*(\Theta, \mathbf{x}_0) = n \ln \left( \sum_{i=1}^n \epsilon_t^2 \right) + 2 \sum_{i=1}^n \ln |r(\mathbf{x}_{t-1})|. \quad (4.11)$$

Parameetrid  $\Theta = (\alpha, \beta, \gamma, \phi)'$  ning vajadusel ka algväärtused  $\mathbf{x}_0 = (l_0, b_0, s_0, s_{-1}, \dots, s_{-m+1})'$  saab hinnata funktsiooni  $L^*$  minimeerides. Alternatiivselt saab hinnangud leida, minimeerides ühesammuliste prognooside keskmist ruutviga (MSE), minimeerides keskmist absoluutset prognoosiviga või mõnde teiste mudeli headuse kriteeriumit.

# 5 Mudelite võrdlemine ja mudeli valik

Käesolevas peatükis toetume raamatuke [1] peatükkidele 2.8 ja 7.1.

Et valida parim mudel on vaja saadud mudeleid omavahel võrrelda, selle jaoks on välja pakutud erinevaid mõõdikuid ja informatsioonikriteeriumeid, selles peatükis toome välja mõned neist.

## 5.1 Prognoosimudeli headuse mõõdikud

Siin näitame, kuidas erinevaid mudeleid kasutades saadud prognooside täpsust hinnata ning kuidas saadud prognoose omavahel võrrelda. Prognoosid, mida tahetakse omavahel võrrelda, võivad olla näiteks:

- Prognoosid võivad olla saadud kasutades ühte aegrida  $y_1, y_2, \dots, y_n$  prognooside  $\hat{y}_{n+1|n}, \hat{y}_{n+2|n}, \dots, \hat{y}_{n+h|n}$  arvutamiseks, siin on leitava prognoosi horisont  $h$  on erinev.
- Prognoosid võivad olla leitud kasutades erineva pikkusega mineviku perioode etteantud aegreast  $\hat{y}_{1+h|1}, \hat{y}_{2+h|2}, \dots, \hat{y}_{m+h|m}$
- Me soovime võrrelda erinevate prognoosimis meetodite täpsust etteantud aegrea ja fikseeritud prognoosi horisondi korral. Me arvutame iga meetodi jaoks prognoosi  $\hat{y}_{n+h|n}$ .

Ühesammulise prognoosi vea saab leida lihtsalt  $\epsilon_t = y_t - \hat{y}_t$  olenemata prognoosi arvutuskäigust, sama loogika järgi saab leida ka  $h$ -sammulise prognoosi vea  $\epsilon_{t+h|t} = y_{t+h} - \hat{y}_{t+h|t}$ .

Mõned enim tuntud headuse mõõdikud:

- Keskmise absoluutne viga (*mean absolute error*):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |\epsilon_t|$$

- Keskmise ruut viga (*mean square error*):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\epsilon_t^2)$$

- Ruutkeskmise viga (*root mean square error*):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\epsilon_t^2)}$$

- Keskmise suhteline viga (*mean absolute percentage error*):

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n |100\epsilon_t/y_t|$$

- Keskmise absoluutne viga (*mean absolute scaled error*):

$$MASE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{\epsilon_t}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |y_i - y_{i-1}|} \right|$$

Prognoosimudeli headuse mõõdikud võimaldavad mudeleid omavahel võrrelda, kuid need ei võta arvesse mudelite parameetrite arvu. Prognoosimiseks soovime kasutada võimalikult lihtsat, aga samas täpset mudelit.

## 5.2 Informatsioonikriteeriumid

Üheks võimaluseks on kasutada informatsioonikriteeriumeid, mis võtavad arvesse nii maksimaalset tõepära, kui ka parameetrite arvu ning seeläbi aitavad vältida ülesobitatud mudeleid. Informatsioonikriteeriumid saame välja kirjutada kujul:

$$IC = -2 \ln L(\hat{\Theta}, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y}) + q \zeta(n),$$

kus  $L(\hat{\Theta}, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y})$  on maksimeeritud tõepära funktsioon,  $q$  on parameetrite  $\hat{\Theta}$  arvu ja algväärtuste  $\hat{\mathbf{x}}_0$  arvu summa ning  $\zeta(n)$  on mingi funktsioon valimi suurusest.

## Akaike informatsioonikriteerium

Mudelite võrdlemiseks on sobiv kasutada Akaike informatsioonikriteeriumit ( $AIC$ ), see on defineeritud järgmiselt:

$$AIC = -2 \ln L(\hat{\Theta}, \hat{\mathbf{x}}_0 | \mathbf{y}) + 2q,$$

kus  $L$  on mudeli tõepära,  $q$  on parameetrite  $\hat{\Theta}$  ja algväärtuste  $\hat{\mathbf{x}}_0$  arvu summa, funktsiooniks  $\zeta(n)$  on siin lihtsalt 2. Väiksemad  $AIC$  väärtused viitavad paremale mudelile.

Kui meil on tegu normaaljaotusega vigadega saame teha asenduse, nii et suuruse  $-2 \ln L(\hat{\Theta}, \hat{\mathbf{x}}_0 | \mathbf{y})$  asendame meie saadud tulemusega  $L^*(\Theta, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y})$  valemist 4.11 saame:

$$AIC = L^*(\Theta, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y}) + 2q.$$

## Parandatud Akaike informatsioonikriteerium

Mudelite võrdlemiseks on sobiv kasutada ka parandatud Akaike informatsioonikriteeriumit ( $AICc$ ), see on defineeritud järgmiselt:

$$AICc = -2 \ln L(\hat{\Theta}, \hat{\mathbf{x}}_0 | \mathbf{y}) + \frac{2qn}{n - q - 1},$$

kus  $L$  on mudeli tõepära,  $q$  on parameetrite  $\hat{\Theta}$  ja algväärtuste  $\hat{\mathbf{x}}_0$  arvu summa, siin on funktsiooniks  $\zeta(n)$  jagatis  $2n/(n - q - 1)$ . Väiksemad  $AICc$  väärtused viitavad paremale mudelile.

Kui meil on tegu normaaljaotusega vigadega, siis asendame suuruse  $-2 \ln L(\hat{\Theta}, \hat{\mathbf{x}}_0 | \mathbf{y})$  meie saadud tulemusega  $L^*(\Theta, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y})$  valemist 4.11 saame:

$$AICc = L^*(\Theta, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y}) + \frac{2qn}{n - q - 1}.$$

## Schwarz Bayesian informatsioonikriteerium

Mudelite võrdlemiseks on võimalik kasutada ka Schwarz Bayesian informatsioonikriteeriumit ( $BIC$ ), see on defineeritud järgmiselt:

$$BIC = -2 \ln L(\hat{\Theta}, \hat{\mathbf{x}}_0 | \mathbf{y}) + q \ln(n),$$

kus  $L$  on mudeli tõepära,  $q$  on parameetrite  $\hat{\Theta}$  ja algväärtuste  $\hat{\mathbf{x}}_0$  arvu summa ning funktsioon on  $\zeta(n)$  kujul  $\ln(n)$ . Väiksemad  $BIC$  väärtused viitavad paremale mudelile.

Kui meil on tegu normaaljaotusega vigadega saame teha asenduse kasutades valemit 4.11 kust saame, et  $-2 \ln L(\hat{\Theta}, \hat{\mathbf{x}}_0 | \mathbf{y}) = L^*(\Theta, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y})$ :

$$BIC = L^*(\Theta, \mathbf{x}_0 | \mathbf{y}) + q \ln(n).$$

Mudel	MAE	MSE	RMSE	MAPE	MASE	AIC	AICc	BIC
(A, N, N)	0,3924	0,28290	0,5319	0,0040	0,8216	836,38	836,43	843,02
(A, A, N)	0,3329	0,19692	0,4436	0,0034	0,6970	766,10	766,30	779,39
(A, A <sub>d</sub> , N)	0,3285	0,18977	0,4356	0,0033	0,6878	760,52	760,82	777,13
(A, M, N)	0,3357	0,19990	0,4471	0,0034	0,7030	769,18	769,38	782,47
(A, M <sub>d</sub> , N)	0,3294	0,19048	0,4364	0,0033	0,6896	761,29	761,59	777,90
(A, N, A)	0,3737	0,24746	0,4975	0,0038	0,7826	832,93	835,14	879,45
(A, A, A)	0,3097	0,18662	0,4320	0,0032	0,6485	779,09	781,99	832,26
(A, A <sub>d</sub> , A)	0,3020	0,17643	0,4200	0,0031	0,6324	769,58	772,85	826,07
(A, M, A)	0,3027	0,18203	0,4267	0,0031	0,6338	773,98	776,87	827,15
(A, M <sub>d</sub> , A)	0,2996	0,17394	0,4171	0,0030	0,6272	766,66	769,94	823,15
(A, N, M)	0,6188	0,61651	0,7852	0,0063	1,2957	1020,06	1022,27	1066,58
(A, A, M)	0,4085	0,28599	0,5348	0,0042	0,8553	866,60	869,49	919,77
(A, A <sub>d</sub> , M)	0,2957	0,17236	0,4152	0,0030	0,6191	764,80	768,07	821,29
(A, M, M)	0,4128	0,29029	0,5388	0,0043	0,8643	869,66	872,55	922,82
(A, M <sub>d</sub> , M)	0,2994	0,17888	0,4229	0,0030	0,6268	772,41	775,68	828,90
(M, N, N)	0,0040	0,00003	0,0056	0,00004	0,0084	847,99	848,05	854,64
(M, A, N)	0,0034	0,00002	0,0046	0,00004	0,0071	771,05	771,25	784,34
(M, A <sub>d</sub> , N)	0,0033	0,00002	0,0044	0,00003	0,0069	757,84	758,14	<b>774,46</b>
(M, M, N)	0,0034	0,00002	0,0046	0,00004	0,0071	775,37	775,57	788,66
(M, M <sub>d</sub> , N)	0,0033	0,00002	0,0044	0,00003	0,0070	758,65	758,95	775,26
(M, N, A)	0,0040	0,00003	0,0053	0,00004	0,0083	853,18	855,39	899,70
(M, A, A)	0,0030	<b>0,00002</b>	<b>0,0041</b>	0,00003	0,0062	<b>750,11</b>	<b>753,00</b>	803,28
(M, A <sub>d</sub> , A)	0,0030	0,00002	0,0042	0,00003	0,0064	760,29	763,56	816,78
(M, M, A)	0,0033	0,00002	0,0044	0,00003	0,0068	783,46	786,36	836,63
(M, M <sub>d</sub> , A)	<b>0,0030</b>	0,00002	0,0041	<b>0,00003</b>	<b>0,0062</b>	753,63	756,90	810,12
(M, N, M)	0,0047	0,00004	0,0067	0,00005	0,0099	945,16	947,38	991,68
(M, A, M)	0,0041	0,00003	0,0056	0,00004	0,0087	876,33	879,22	929,50
(M, A <sub>d</sub> , M)	0,0030	0,00002	0,0042	0,00003	0,0063	764,76	767,99	821,21
(M, M, M)	0,0041	0,00003	0,0056	0,00004	0,0087	877,69	880,59	930,86
(M, M <sub>d</sub> , M)	0,2994	0,17888	0,4230	0,0030	0,6268	772,40	775,68	828,90

Tabel 5.1: Tarbijahindade harmoniseeritud indeksi aegrea baasil arvutatud mudelite headuse mõõdikud ja informatsioonikriteeriumid.

Tabelis 5.1 on ära toodud enam tuntud headuse mõõdikud ning informatsioonikriteeriu-

mid tarbijahindade harmoniseeritud indeksi näitel. Parimaks mudeliks Akaike ja parandatud Akaike informatsioonikriteeriumi järgi on  $(M, A, A)$  ning Schwarz Bayesian informatsioonikriteeriumi järgi on  $(M, A_d, N)$ . Mõõdikud on arvutatud kasutades aegrea ja mudeli poolt sobitatud suuruste vahet. Mudel on ette antud kasutades statistikapaketi R funktsiooni *ets*, mille argumendid on toodud leheküljel 39.

# 6 Pakett *forecast* statistikapaketile R

Käesolevas peatükis toetume allikale [6].

R-i jaoks on kirjutatud väga palju erinevaid funktsioone. Selleks, et neid paremini kasutada ja hallata oleks, on funktsioonid koondatud pakettidesse (*packages*). Mõned neist seatakse R-i käivitamisel koheselt töövalmis. On veel mitmed paketid, mis küll baasinstalleeringuga kaasas käivad, ent mida R-i käivitamisel koheselt tööle ei panda. Lisaks on paketid, mis tuleb eraldi alla laadida ja installeerida. Suurim pakettide hoiukoht on <http://cran.r-project.org/>, kus vasakpoolses nimistus valik *Packages* avab pakettide loetelu (hetkel üle 4500 nimetuse). Paketi nimele klikkides avaneb paketi ülevaateleht, kust muuhulgas leiab ka paketi sisalduvaid funktsioone tutvustava pdf formaadis juhendi (*Reference manual*). Kui vajaminev pakett on installeeritud tuleb pakett laadida, et paketi leiduvad funktsioonid kättesaadavad oleksid.

## 6.1 Paketi *forecast* tutvustus

Võttes lahti pdf formaadis juhendi (*Reference manual*) [6] on kõigepealt üheleheküljeline ülevaade paketist. Seal on kirjas paketi versioon, uuendamise kuupäev, ühelauseline kirjeldus, autorid ja palju muud.

Edasi on juhendis sisukord funktsioonidest, mis selles paketi sisalduvad, see on tehtud kasutaja mugavust silmas pidades, ehk klikkides funktsiooni kõrval asuvale lehekülje numbrile saab automaatselt huvipakkuva funktsiooni juurde. Funktsiooni kohta on antud lühike, paari lauseline, kirjeldus, funktsiooni kasutus, millele järgneb argumentide loetelu koos täpsustustega. Muidugi on funktsiooni kohta ka muid detaile nagu funktsioonist saadava väärtuse kirjeldus, autor(id) ja viited võimalikele huvipakkuvatele funktsioonidele ning ei puudu ka näited funktsiooni kasutamise kohta.

Hetkel on paketist *forecast* saadaval versioon 4.04 uuenduskuupäevaga 22. aprill 2013. Enne paketi installeerimist on vaja üle vaadata oma R-i versioon, sest paketi *forecast* kasutamiseks peab see olema vähemalt 2.14.0, (hetkel on viimane kättesaadav versioon 3.0.0). Vanema R-i versiooni puhul laetakse ka paketi *forecast* vanem versioon, milles veel ei pruugi olla kõiki huvipakkuvaid funktsioone.

Paketi saab installeerida valides R-i menüüribalt *Packages*, seejärel *Install packages...*, seejärel tuleb uues aknas lahti nimekiri *CRAN mirror*, kust on soovitatav valida võimalikult lähedal asuv koht, seejärel tuleb lahti uus aken, kust tuleb otsitav pakett, hetkel pakett

*forecast*, üles otsida, see valida ning vajutada nupule "OK", seejärel pakett installeeritakse. Installeerimine on ühekordne tegevus, kuid pakett tuleb tööle laadida iga kord, kui käivitatakse R, seda saab teha käsuga *require(forecast)*.

## 6.2 Mõned funktsioonid ja näited nende kasutamisest

Kuigi pakettis on väga palju erinevaid mudelite sobitamise funktsioone, erinevaid statisti- kuid ja prognooside leidmise võimalusi, allpool vaatame lähemalt ainult mõnda siin töös kasutatud käsku.

Siin töös on üks olulisemaid funktsioone *ets*, kuna see sobitab olekuruumi mudeli vastavalt etteantud aegreale.

### Funktsiooni kasutamine:

```
ets(y, model="ZZZ", damped=NULL, alpha=NULL, beta=NULL, gamma=NULL,
    phi=NULL, additive.only=FALSE, lambda=NULL, lower=c(rep(0.0001,3), 0.8),
    upper=c(rep(0.9999,3),0.98), opt.crit=c("lik", "amse", "mse", "sigma", "mae"),
    nmse=3, bounds=c("both", "usual", "admissible"), ic=c("aic", "aicc", "bic"),
    restrict=TRUE)
```

### Funktsiooni argumendid ja seletused:

y	uuritav aegrea vektor
model	Kolmest tähest koosnev kombinatsioon, kus esimene täht märgib vea tüüpi ("A", "M" või "Z"), teine märgib trendi ("N", "A", "M" või "Z") ning kolmandaga märgitakse ära sesoonsus ("N", "A", "M" või "Z"). Siinkohal "N" = puudub, "A" = aditiivne, "M" = multiplikaatiivne ning "Z" puhul on valik automaatne.
damped	kui on TRUE, siis kasutatav trend on summutatud, see kehtib nii aditiivse kui ka multiplikaatiivse trendi puhul. Kui see on märgitud tähistusega NULL proovitakse mõlemat ning valitakse parem mudel, vastavalt informatsioonikriteeriumile.
alpha	parameetri $\alpha$ väärtus, kui on märgitud tähistusega NULL siis väärtus hinnatakse.
beta	parameetri $\beta$ väärtus, kui on märgitud tähistusega NULL siis väärtus hinnatakse.



gamma	parameetri $\gamma$ väärtus, kui on märgitud tähistusega NULL siis väärtus hinnatakse.
phi	parameetri $\phi$ väärtus, kui on märgitud tähistusega NULL siis väärtus hinnatakse.
additive.only	kui selle väärtuseks on antud TRUE vaadatakse ainult aditiivseid mudeleid. Automaatselt on selle väärtus FALSE.
lambda	Box-Cox teisenduse parameeter Teisendus on kujul $f_\lambda(x) = \frac{(x^\lambda - 1)}{\lambda}$ kui $\lambda \neq 0$ ja $f_\lambda(x) = \ln(x)$ kui $\lambda = 0$ . Andmed teisendatakse enne mudeli hindamist. Seda ignoreeritakse, kui on märgitus tähistusega NULL. Kui on tähistatud TRUEga siis <i>additive.only</i> väärtuseks antakse FALSE.
lower	parameetrite ( <i>alpha</i> , <i>beta</i> , <i>gamma</i> , <i>phi</i> ) alumised piirid.
upper	parameetrite ( <i>alpha</i> , <i>beta</i> , <i>gamma</i> , <i>phi</i> ) ülemised piirid.
opt.crit	Optimeerimise kriteeriumid. Vaikimisi on selleks "lik" (Log-tõepära), kuid selleks on võimalik valida veel "mse" (Keskmine ruut viga), "amse" (Keskmine MSE üle prognoosi horisondi <i>nmse</i> ), "sigma" (Vigade standardhälve), "mae" (Keskmine absoluutviga).
nmse	sammude arv <i>amse</i> arvutamiseks ( $1 \leq nmse \leq 10$ ).
bounds	rakendatav parameetrite ruum: valides "usual" on parameetrid kindlalt etteantud piirides <i>lower</i> ja <i>upper</i> , kui valitakse "admissible" lubatakse parameetritele väärtusi kogu vastuvõetavast parameetrite ruumist ([1] peatukk 10.2), valides väärtuseks "both", mis on määratud ka vaikimisi, otsitakse parameetrid eelneva kahe piirkonna ühisosast.
ic	Informatsioonikriteerium, mida kasutatakse mudeli valikul.
restrict	kui on määratud väärtusega TRUE, siis lõpmatu variatsiooniga mudelid ei ole lubatud.

**Teadmiseks:** Funktsiooni aluseks olev meetodite klassifikatsioon on võetus raamatust [1]. Meetod on täielikult automatiseeritud ning ainuke nõutav argument on aegrida. Kui ei ole määratud teisiti, siis mudeli valik on automaatne.

**Funktsiooni väärtus:** Funktsiooni kasutamisel saadav väärtus kuulub klassi "ets".

**Autor:** Rob J Hyndman

**Näited:** Võtame näitena jooniselt 1.1 aegrea (a) "Tarbijahindade harmoneeritud indeks"

ning rakendame sellele meie uuritavat funktsiooni:

```
> ets(a).
```

Samas saame lubada laiemat parameetrite ruumi, valides argumenti *bounds* väärtuseks "admissible":

```
> ets(a, bounds = "admissible"),
```

sellisel juhul ei kasutata parameetrite leidmiseks argumente *upper* ega *lower* vaid leitakse parameetrid kogu vastuvõetavast parameetrite ruumist (vaata allikas [1] peatükk 10.2).

Funktsioonide tulemused on toodud joonisel 6.1. Esimesel juhul on sobitatud mudel  $(M, M_d, N)$  ning teisel  $(M, A, A)$ , esimese mudeli puhul leitakse parameetrite  $\alpha, \beta, \phi$  väärtused, algväärtused  $l_0, b_0$ , vigade standardhälbe  $\sigma$  samas teise mudeli jaoks on leitud parameetrite väärtused  $\alpha, \beta, \gamma, \phi$  jaoks, algväärtused  $l_0, b_0, s_0, s_{-1}, \dots, s_{-11}$  väärtused, vigade standardhälbe  $\sigma$  ning mõlema mudeli jaoks on leitud informatsioonikriteeriumite (Akaike (AIC), parandatud Akaike (AICc), ja Schwarz Bayesian (BIC)) väärtused, siit ilmneb, et kui parameetritele ette antavaid kitsendusi laiendada on võimalik saada paremini sobiv mudel.

```
R Console
> ets(a)
ETS (M, Md, N)

Call:
ets(y = a)

Smoothing parameters:
alpha = 0.9359
beta  = 0.5686
phi   = 0.8141

Initial states:
l = 59.7737
b = 1.0436

sigma: 0.0044

      AIC      AICc      BIC
758.6463 758.9478 775.2613
>
>
> |

R Console
> ets(a, bounds="admissible")
ETS (M, A, A)

Call:
ets(y = a, bounds = "admissible")

Smoothing parameters:
alpha = 1.2863
beta  = 0.0855
gamma = 0.0014

Initial states:
l = 60.9482
b = 0.6012
s=-0.5125 -0.3849 -0.2735 -0.1985 -0.1225 0.2451
      0.3157 0.4774 0.3787 0.1853 0.0084 -0.1188

sigma: 0.0041

      AIC      AICc      BIC
750.1068 753.0004 803.2750
> |
```

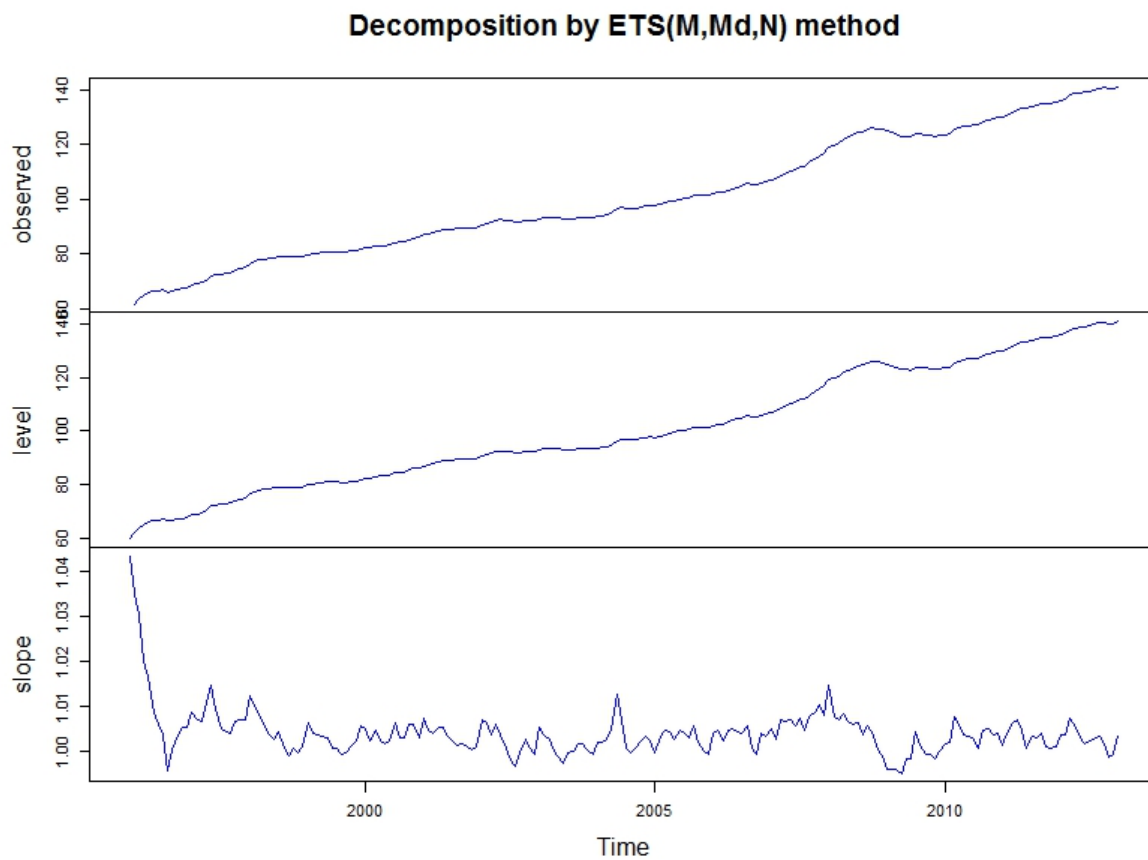
Joonis 6.1: Funktsioonide  $ets(a)$  ja  $ets(a, bounds="admissible")$  tulemused

Sobitatud mudeli korral graafikute joonistamise käsu

```
> plot(ets(a))
```

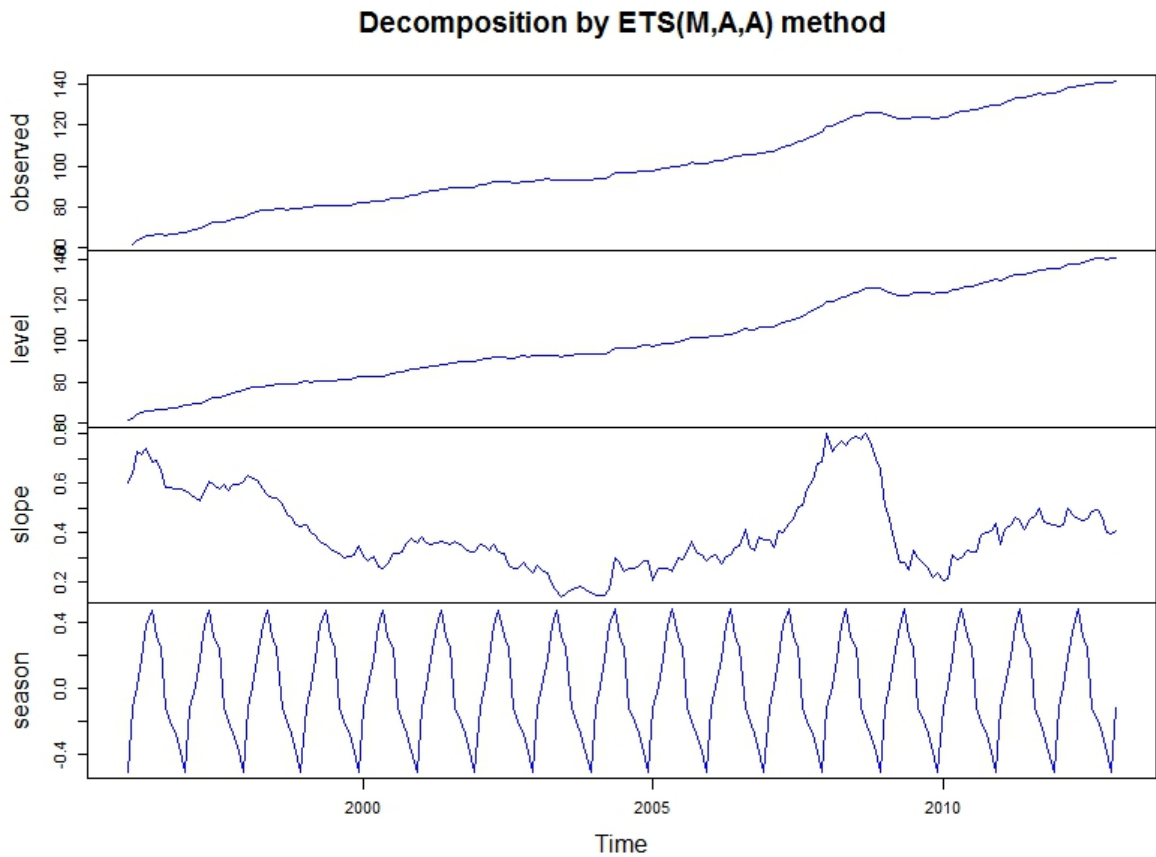
kasutamisel saame joonisel 6.2 kujutatud kolm graafikut, millest ühel on kuvatud vaadeldud aegrida seejärel on mudeli järgi saadud taseme ning tõusu komponendid vastavalt

ajale.



Joonis 6.2: Funktsiooni  $plot(ets(a))$  tulemus

Kui mudelile lisada  $bounds="admissible"$  siis saame mudeli, milles on olemas ka sesoonsuse komponent, see on näha joonisel 6.3 kõige alumisel, neljandal graafikul.



Joonis 6.3: Funktsiooni `plot(ets(a, bounds="admissible"))` tulemus

Teine funktsioon, mille abil leiame oma aegreale prognoosid on *forecast*, see arvutab vastavalt sobitatud mudelile välja prognoosid, võttes appi teised funktsioonid, olenevalt *objecti* klassist. Näiteks *forecast.ets*, kui *object* on saadud funktsiooniga *ets* või *forecast.Arima*, kui *object* on saadud funktsiooniga *arima*.

### Funktsiooni kasutamine:

```
forecast(object, h, level=c(80,95), fan=FALSE, ...)
```

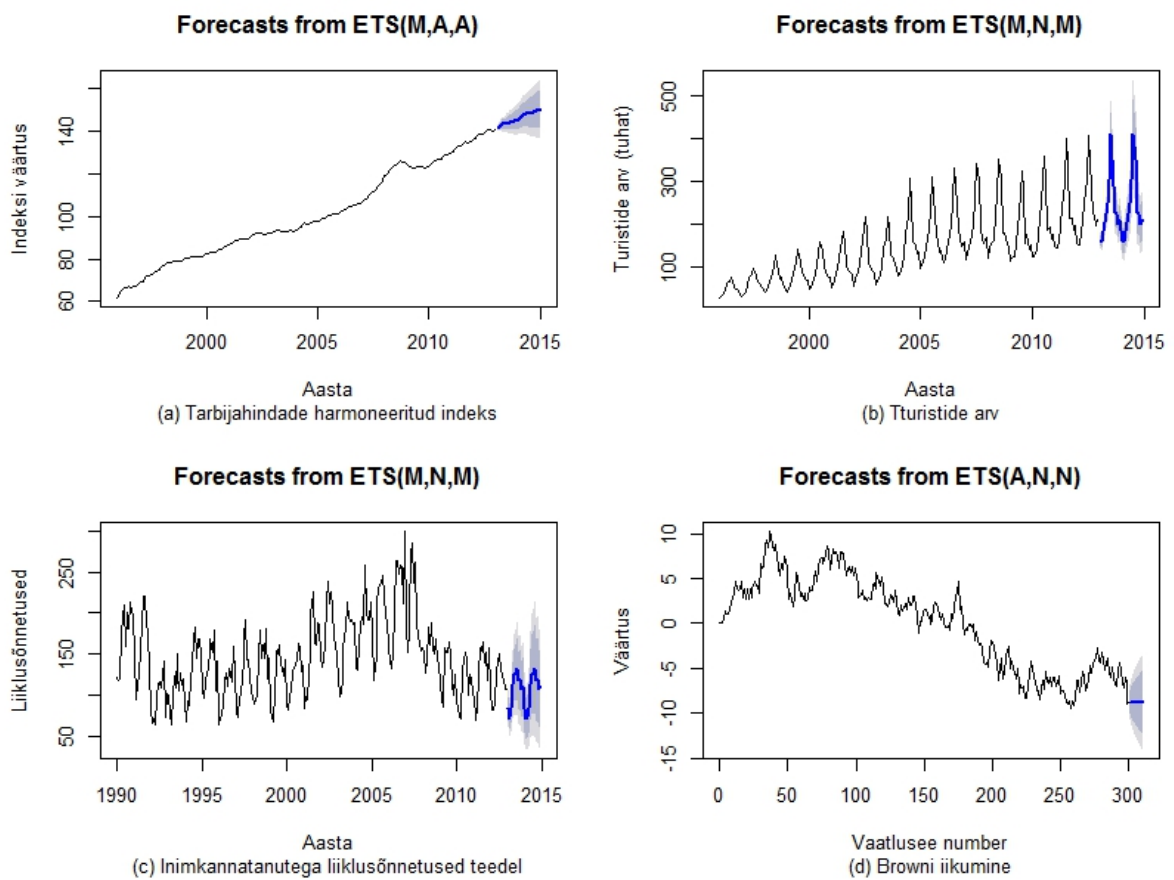
### Funktsiooni argumendid ja seletused:

object	aegrida vpi aegreale sobitatud mudel, mille prognoose soovitakse saada.
h	näitab mitu prognoosi leitakse. Vaikimisi leitakse andmete kahe aasta prognoos.
level	prognooside usaldusintervallid.
fan	Kui väärtuseks anda TRUE, siis usaldusintervallideks antakse ette <code>seq(50, 99, by = 1)</code> . See on sobilik <code>fan plot</code> ide jaoks.
cdots	muud parameetrid, mis mõjutavad prognoosi arvutamise.

**Funktsiooni väärtus:** Funktsiooni kasutamisel saadav väärtus kuulub klassi "*forecast*", see on mitmete elementidega nimekiri, mis sisaldab informatsiooni kohandatud mudeli kohta. Funktsiooni kasutades trükitakse välja selle kokkuvõte ning pannes funktsiooni *plot* abil joonisele saame prognoosi koos usaldusintervallidega.

**Autor:** Rob J Hyndman

**Näited:** Joonisel 6.4 on kujutatud aegread jooniselt 1.1 koos 80% ja 95% usaldusintervallidega. Kõik need graafikud on saadud kasutades funktsiooni *forecast*. Iga aegrea jaoks on leitud kasutatav mudel ning mudeli parameetrid on arvutatud automaatselt funktsiooniga *ets*, kus argumendile *bounts* on antud väärtuseks "*admissible*". See demonstreerib ühte väga olulist eksponentsiaalse silumise olekuruumi mudelite omadust – neid on kerge kasutada ning nende kasutamine on täielikult automatiseeritud. Nende aegride korral on mudelid võimelised käsitlema andmete erinevaid tunnuseid (väga väike trend, tugev trend, ilma sesoonse komponendita andmed, samuti konstantse seaduspärasusega sesoonsust ning kasvava variatsiooniga sesoonsust).



Joonis 6.4: Näiteid erinevatest aegridadest ja nende punktiviisilistest prognoosidest.

# 7 Näiteid aegridade baasil

Käesolevas peatükis kasutame paketti *forecast* ning uurime lähemalt joonisel 1.1 kujutatud aegridu. Sobitame neile nii olekuruumi kui ka ARIMA mudelid ning leiame vastavalt sobitatud mudelitele prognoosid. Olekuruumi mudeleid võrdleme ARIMA mudelitega, kuna need on samuti laialdaselt levinud ning annavad suhteliselt häid prognoose. Võrdleme mudelitest saadud prognooside täpsust. Seejärel, toetudes mudelite prognooside täpsusele, pakume välja millise mudeli järgi võiks uuritava aegrea tulevikku prognoosida.

## 7.1 Tarbijahindade harmoniseeritud indeks

Vaatleme siin kahte juhtu, esimesel näitame miks ei ole ARIMA ja olekuruumi mudelite vahel võimalik valikut teha toetudes informatsioonikriteeriumite väärtustele ning teisel proovime headuse mõõdikute väärtuste kaudu leida meie aegreale sobivama mudeli.

### Esimene juht

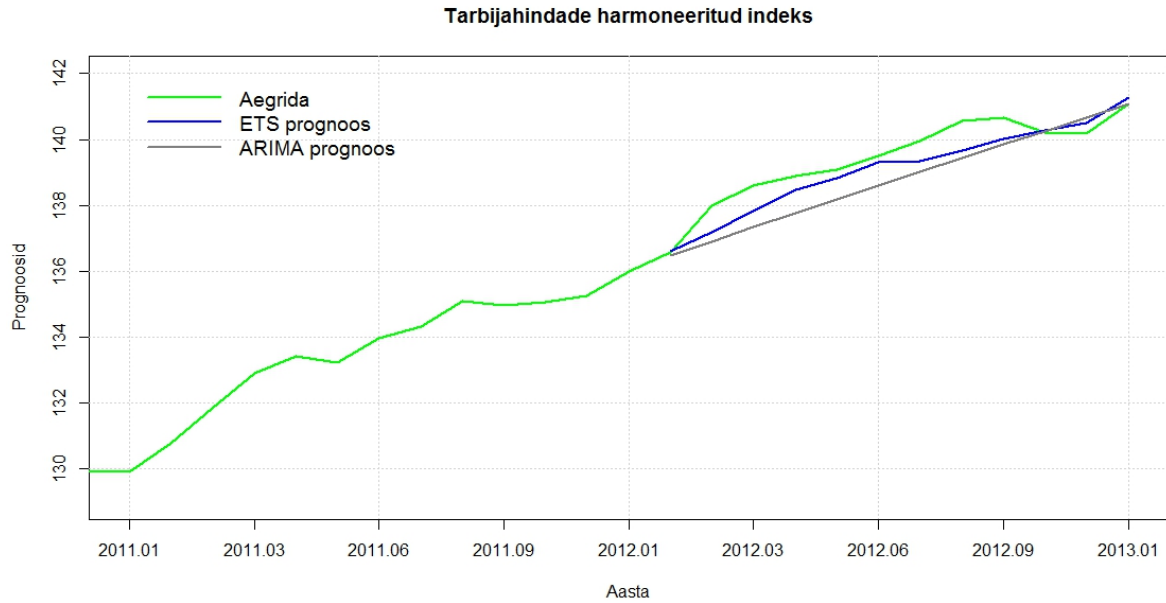
Siin on mudeli sobitamisel ja prognoosi leidmisel kasutatud aegrida, millelt on viimase aasta andmed eemaldatud. Ära jäetud aegrea osa kasutame leitud prognooside täpsuse hindamiseks. Seega on meie aegrida 1996 aasta jaanuarist kuni 2012 aasta jaanuarini.

Olekuruumi mudelite korral on automaatselt sobitatud mudeliks  $(M, A, A)$  ning automaatselt sobitatud ARIMA mudeliks on  $ARIMA(1, 1, 1)$  *with drift*. Kasutades sobitatud mudeleid leiame prognoosid, leitud prognoosid ja aegrida on toodud joonisel 7.1. Sellel on kujutatud tarbijahindade harmoniseeritud indeksi aegrida rohelisega, sobitatud olekuruumi mudeliga saadud prognoosid sinisega ning sobitatud ARIMA mudeli prognoosid halliga.

Mudel	AIC	AICc	BIC
<i>ETS</i>	696.83	699.92	749.04
<i>ARIMA</i>	228.64	228.86	241.67

Tabel 7.1: Informatsioonikriteeriumid (1)

Mudelite sobitamisel leitakse ka informatsioonikriteeriumid, need on tabelis 7.1, kuid kuna ARIMA mudeli sobitamisel aegrida diferentsiti mitu korda, mistõttu andmeid jäi sobitamisel hoopis vähemaks ning seetõttu informatsioonikriteeriumite alusel sobivat mudelit



Joonis 7.1: Tarbijahindade harmoneeritud indeksi aegrida ja sobitatud mudelid (1)

valida ei saa. Kui ARIMA mudeli sobitamisel rida ei diferentsita on võimalik mudeleid ka informatsioonikriteeriumite põhjal valida.

Sobitatud mudelite omavaheliseks võrdlemiseks on sobivaim prognooside ja aegrea vaheliste headuse mõõdikute järgi. Selleks kasutame aegrea viimast aastat, mille me mudelite sobitamisel välja jätsime. Kui vaadata sobitatud mudelite prognooside täpsust, kasutades viiendas peatükis toodud headuse mõõdikuid ning rakendades neid aegrea ja prognooside vahele, siis saame väärtused, mis on toodud tabelis 7.2.

Mudel	MAE	MSE	RMSE	MAPE	MASE
<i>ETS</i>	0,433	0,273	0,523	0,003	1,814
<i>ARIMA</i>	0,731	0,720	0,849	0,005	3,062

Tabel 7.2: Mudelite headuse mõõdikud (1)

Tabelis 7.2 toodud headuse mõõdikute põhjal on tarbijahinna harmoneeritud indeksi väärtuste prognoosimiseks täpsem olekuruumi mudel ( $M, A, A$ ).

## Teine juht

Kuna olekuruumi mudeli ja ARIMA mudeli vahel ei saa enamasti valida toetudes informatsioonikriteeriumitele, vaid tuleb uurida prognooside täpsust, siis sobitame mudelid aegrea erineva pikkusega ajavahemikele, leiame prognoosid ja hindame nende täpsust.



Sobitades mudeleid aegrea erinevatele osadele on tulemuseks tihtipeale erinevad mudelid.

Tabelis 7.3 on välja toodud ajavahemikud, millele mudel sobitati ning millele leiti prognoos, sobitatud mudelid ja headuse mõõdikud. Siit tabelist tuleb välja, et sobitatud ARIMA mudelid on täpsemate prognoosidega, kui olekuruumi mudelid.

Sobitatud ajale	Prognoos aastateks	Sobitatud mudel	MAE	MSE	RMSE	MAPE	MASE
1996.01 - 2000.12	2001.01 - 2002.12	ETS(A,Ad,A)	2,86	10,183	3,191	0,031	16,736
		ARIMA(0,2,1)	0,835	0,913	0,955	0,009	5,891
1996.01 - 2002.12	2003.01 - 2004.12	ETS(A,Ad,A)	0,953	1,127	1,062	0,01	5,536
		ARIMA(1,2,1) (0,0,2)[12]	0,909	0,973	0,987	0,01	5,109
1996.01 - 2004.12	2005.01 - 2006.12	ETS(M,Ad,A)	2,321	7,993	2,827	0,022	12,722
		ARIMA(1,2,1) (2,0,2)[12]	2,341	7,89	2,809	0,023	12,748
1996.01 - 2006.12	2007.01 - 2008.12	ETS(A,Ad,N)	8,93	109,292	10,454	0,074	51,881
		ARIMA(1,1,0) (2,0,0)[12] with drift	6,288	55,514	7,451	0,052	36,865
1996.01 - 2008.12	2009.01 - 2010.12	ETS(M,Md,A)	7,874	66,673	8,165	0,063	47,905
		ARIMA(0,2,1) (2,0,2)[12]	5,491	32,737	5,722	0,044	33,393
1996.01 - 2010.12	2011.01 - 2012.12	ETS(M,Ad,N)	4,03	23,033	4,799	0,029	23,252
		ARIMA(2,1,2) (2,0,2)[12] with drift	0,758	0,82	0,906	0,006	4,971

Tabel 7.3: Mudelite headuse mõõdikud tarbijahinna harmoniseeritud indeksi aegreale.

Kui analüüsida natuke aegrea olemust tundub summutatud trendi kasutamine antud aegrea korral kohmakas. Tarbijahinna harmoniseeritud indeks sõltub suuresti majanduse arengust. Majanduse kasv pidurdub, või pöörduv negatiivseks kriisi aegadel, kuid üldiselt liigub see suunaga üles poole, seega peaks ka tarbijahinna harmoniseeritud indeks liikuma suunaga üles. Järelikult trendi liige ei tohiks olla summutatud.

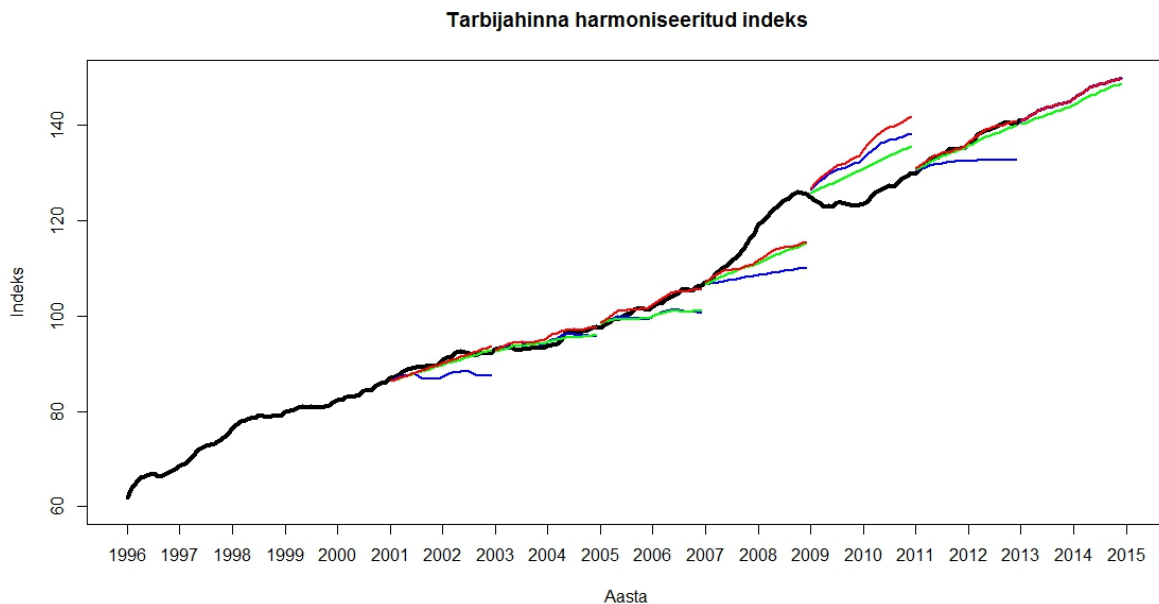
Tabelis 7.4 toome välja analoogsed suurused, kui tabelis 7.3, kuid piirame oma olekuruumi mudeleid nii, et summutatud trend ei ole lubatud. Tabelist ilmneb, et piiranguga olekuruumi mudeli prognoosid on neljal juhul kuuest täpsemad, kui ARIMA mudeli prognoosid ning ka viimase ajavahemiku jaoks sobitatud mudelitest on olekuruumi mudel täpsem. Seega on võimalik, et ka prognoos aastateks 2013 kuni 2015 on olekuruumi mudeleid kasutades täpsem, kui ARIMA mudelite prognoos.

Kanname leitud prognoosid koos aegrega graafikule 7.2. Aegrida on tähistatud mustaga, olekuruumi mudelid sinisega, ARIMA mudelid rohelisega ning piiranguga olekuruumi

Sobitatud ajale	Prognoos aastateks	Sobitatud mudel	MAE	MSE	RMSE	MAPE	MASE
1996.01 - 2000.12	2001.01 - 2002.12	ETS(A,A,N)	0,78	0,737	0,858	0,009	5,22
		ARIMA(0,2,1)	0,835	0,913	0,955	0,009	5,891
1996.01 - 2002.12	2003.01 - 2004.12	ETS(A,A,A)	0,996	1,515	1,231	0,011	6,841
		ARIMA(1,2,1) (0,0,2)[12]	0,909	0,973	0,987	0,01	5,109
1996.01 - 2004.12	2005.01 - 2006.12	ETS(A,A,A)	0,668	0,596	0,772	0,007	4,7
		ARIMA(1,2,1) (2,0,2)[12]	2,341	7,89	2,809	0,023	12,748
1996.01 - 2006.12	2007.01 - 2008.12	ETS(M,A,A)	5,739	48,717	6,98	0,047	32,932
		ARIMA(1,1,0) (2,0,0)[12] with drift	6,288	55,514	7,451	0,052	36,865
1996.01 - 2008.12	2009.01 - 2010.12	ETS(M,A,A)	9,577	100,652	10,033	0,076	57,761
		ARIMA(0,2,1) (2,0,2)[12]	5,491	32,737	5,722	0,044	33,393
1996.01 - 2010.12	2011.01 - 2012.12	ETS(M,A,A)	0,373	0,209	0,457	0,003	2,442
		ARIMA(2,1,2) (2,0,2)[12] with drift	0,758	0,82	0,906	0,006	4,971

Tabel 7.4: Mudelite headuse mõõdikud tarbijahinna harmoniseeritud indeksi aegreale. (2)

mudelid punasega.



Joonis 7.2: Tarbijahindade harmoniseeritud indeksi aegrida ja prognoosid

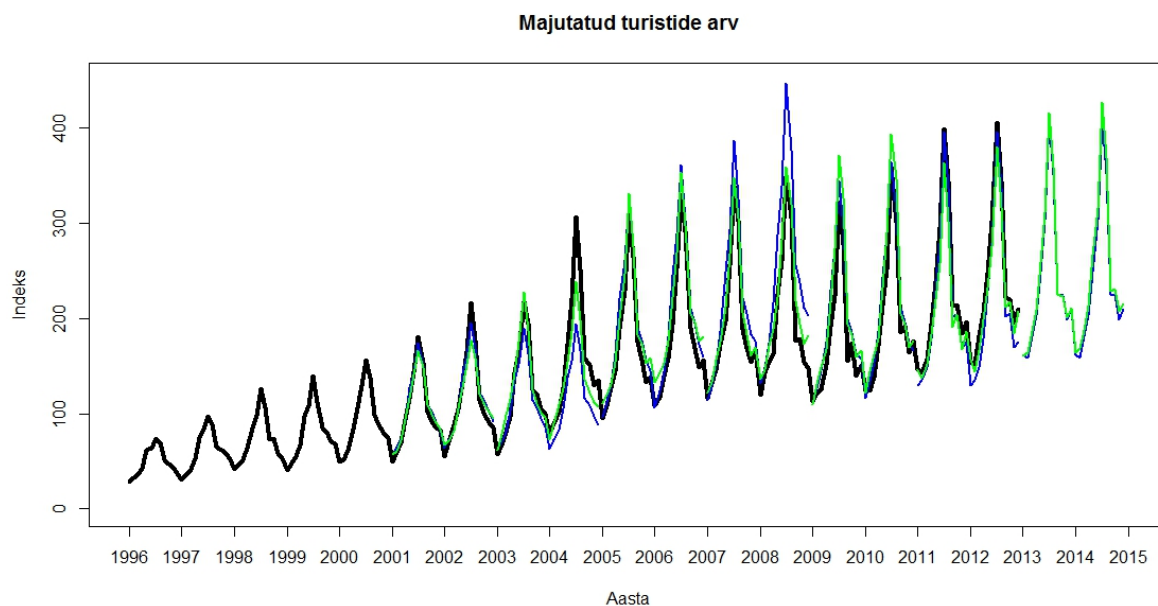
## 7.2 Eestis majutatud turistide arv

Teeme läbi analoogsed arvutused majutatud turistide arvu aegrea kohta. Prognooside headuse mõõdikud on toodud tabelis 7.5, selle järgi osutub ARIMA mudel, mis suudab aegrida täpsemalt prognoosida neljal korral kuuest. Vaadates kahte viimast perioodi, kus mudelite täpsust hinnatakse, siis headuse mõõdikute vahed ei ole väga suured. Viimase uuritava perioodi (1996.01 - 2010.12) jaoks arvutatud headuse mõõdikute MAE MAPE ja MASE järgi on ARIMA mudel prognoosimisel täpsem ning MSE ja RMSE järgi on olekuruumi mudel täpsem. Seega edasisel majutatud turistide arvu prognoosimisel võib täpsemaks mudeliks osutada nii ARIMA mudel, kui olekuruumi mudel.

Sobitatud ajale	Prognoos aastateks	Sobitatud mudel	MAE	MSE	RMSE	MAPE	MASE
1996.01 - 2000.12	2001.01 - 2002.12	ETS(M,A,M)	7,03	71,942	8,482	0,07	0,437
		ARIMA(1,0,0) (0,1,0)[12] with drift	8,026	130,387	11,419	0,072	0,482
1996.01 - 2002.12	2003.01 - 2004.12	ETS(M,Md,M)	28,194	1505,161	38,796	0,172	1,642
		ARIMA(1,0,0) (0,1,0)[12] with drift	15,758	518,435	22,769	0,102	0,937
1996.01 - 2004.12	2005.01 - 2006.12	ETS(M,A,M)	17,445	465,452	21,574	0,093	1,022
		ARIMA(1,1,1) (0,1,0)[12]	17,156	344,151	18,551	0,107	1,103
1996.01 - 2006.12	2007.01 - 2008.12	ETS(M,M,M)	39,287	2279,69	47,746	0,193	2,258
		ARIMA(1,0,0) (0,1,2)[12] with drift	13,213	277,591	16,661	0,075	0,813
1996.01 - 2008.12	2009.01 - 2010.12	ETS(M,A,M)	18,543	512,959	22,649	0,102	1,141
		ARIMA(1,0,1) (1,1,2)[12]	21,86	729,825	27,015	0,111	1,337
1996.01 - 2010.12	2011.01 - 2012.12	ETS(M,N,M)	16,546	339,655	18,43	0,081	1,097
		ARIMA(3,0,4) (0,1,2)[12] with drift	15,259	364,622	19,095	0,06	0,907

Tabel 7.5: Mudelite headuse mõõdikud Eestis majutatud turistide arvu aegreale.

Kanname leitud prognoosid koos aegrega graafikule 7.3. Aegrida on tähistatud mustaga, olekuruumi mudelid sinisega, ARIMA mudelid rohelisega.



Joonis 7.3: Eestis majutatud turistide arvu aegrida ja prognoosid

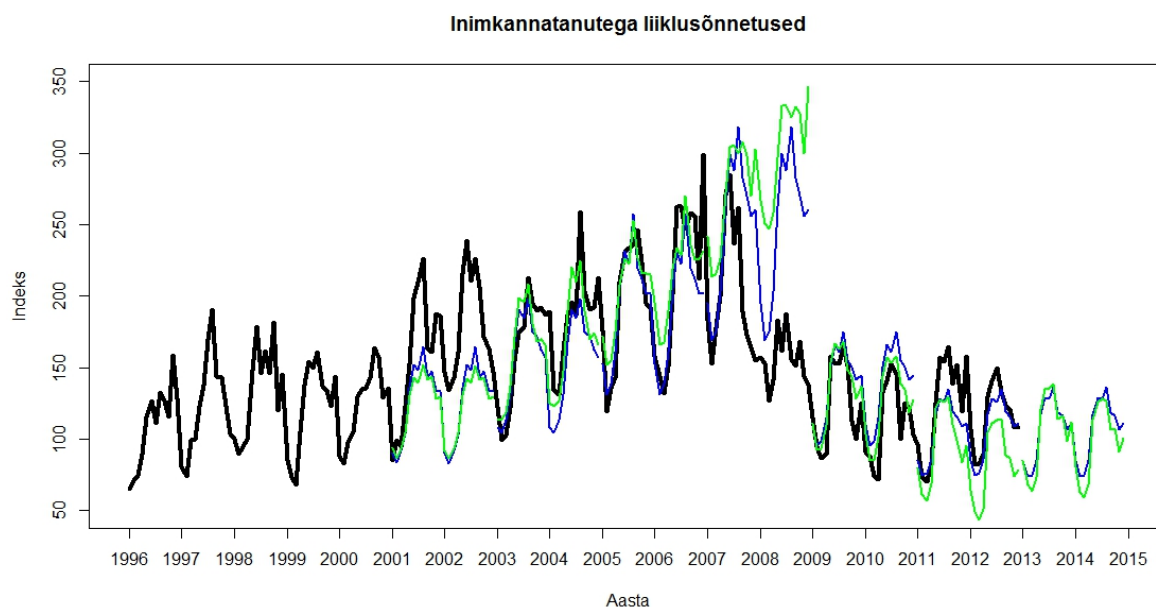
### 7.3 Inimkannatanutega liiklusõnnetused Eesti teedel

Lõpuks viime arvutused läbi ka inimkannatanutega liiklusõnnetuste aegreale. Tulemused on toodud tabelis 7.6, siinkohal ilmneb, et kahel korral on paremaks ARIMA mudel, kolmel korral olekuruumi mudel ning ühe perioodi jaoks, kus mudel on sobitatud perioodile 1996.01- 2004.12 on olekuruumi mudel parem näitajate MAE, MAPE ja MASE jaoks ning ARIMA ülejäänud kahe, MSE ja RMSE jaoks. Edasise tuleviku prognoosimisel võiks kaaluda olekuruumi mudeleid, mis siin osutusid täpsemateks, kui ARIMA mudelid.

Kanname leitud prognoosid koos aegrega graafikule 7.4. Aegrida on tähistatud mustaga, olekuruumi mudelid sinise ja ARIMA mudelid rohelisega. Jooniselt on näha, et kui aegrea käitumises toimus muutus, siis ei suutnud kumbki mudel seda tabada ning prognoosid erinesid tegelikust aegreast. Seega ei suuda mudelid drastilisi muutusi siiski ette näha ning alati tuleb arvestada ootamatute olukordadega.

Sobitatud ajale	Prognoos aastateks	Sobitatud mudel	MAE	MSE	RMSE	MAPE	MASE
1996.01 - 2000.12	2001.01 - 2002.12	ETS(M,Ad,A)	41,956	2331,807	48,289	0,233	4,041
		ARIMA(1,0,0) (1,0,1)[12] with non-zero mean	45,876	2788,927	52,81	0,252	4,365
1996.01 - 2002.12	2003.01 - 2004.12	ETS(M,N,M)	23,547	895,589	29,926	0,131	2,332
		ARIMA(1,0,1) (2,1,0)[12]	19,623	558,518	23,633	0,112	1,919
1996.01 - 2004.12	2005.01 - 2006.12	ETS(A,N,M)	19,031	775,142	27,841	0,085	1,87
		ARIMA(0,1,1) (2,0,1)[12]	23,512	749,96	27,385	0,124	2,423
1996.01 - 2006.12	2007.01 - 2008.12	ETS(M,N,M)	69,378	7038,695	83,897	0,424	6,709
		ARIMA(0,1,1) (2,0,0)[12]	106,591	14441,23	120,172	0,663	10,639
1996.01 - 2008.12	2009.01 - 2010.12	ETS(M,N,M)	20,762	632,964	25,159	0,198	2,191
		ARIMA(2,1,1) (1,0,1)[12]	12,907	274,075	16,555	0,124	1,378
1996.01 - 2010.12	2011.01 - 2012.12	ETS(M,N,M)	13,918	346,178	18,606	0,105	1,313
		ARIMA(0,1,1) (2,0,1)[12]	30,341	1087,082	32,971	0,258	3,055

Tabel 7.6: Mudelite headuse mõõdikud inimkannatanutega liiklusõnnetuste aegreale.



Joonis 7.4: Inimkannatanutega liiklusõnnetuste aegrida ja prognoosid

# Kokkuvõte

Magistritöös andsime esmalt ülevaate eksponentsiaalse silumise meetoditest. Meetodid jagasime vastavalt komponentidele viieteistkümneks, kusjuures arvestasime trendi kuju (puudub, aditiivne, summutatud aditiivne, multiplikatiivne või summutatud multiplikatiivne) ning seda kas ja kuidas on aegreale lisatud sesoonsus (puudub, aditiivne või multiplikatiivne). Meetodid tähistasime siinkohal kahe tähega, millest esimene tähistab trendi ning teine sesoonsust. Seejärel vaatasime lähemalt enim tuntud mudeleid ning nende osasid erijuhte. Lõpetuseks valisime meetodi ( $M, A$ ) ning intuiivselt tuletasime sellele nii taseme, tõusu, sesoonsuse kui ka punktiviisilise prognoosi võrdused, analoogselt saab kõikidele meetoditele võrdused tuletada.

Seejärel tõime sisse olekuruumi mudelid, mis põhinevad eelnevalt vaadeldud eksponentsiaalse silumise meetoditel. Et meetodeid ja mudeleid eristada tähistasime mudelid kolme tähelise kombinatsiooniga, kus esimene tähistab vealiiget, teine trendi ja kolmas sesoonsust. Mudelid kirjutame seejärel välja olekuruumi kujul. Võtsime ette mõned meetodid ning leidsime millised on nende jaoks olekuruumi kujud, vaatasime eraldi mudeleid, millel on aditiivne vealiige ja mudeleid, millel on multiplikatiivne vealiige.

Mudelite rakendamise jaoks on vaja leida algväärtused ja parameetrite hinnangud. Esialgsete algväärtuste leidmiseks tõime välja ühe heuristilise skeemi. Kui algväärtused on olemas kasutame neid parameetrite hindamisel. Parameetrite hinnangute saamiseks tõime välja suurima tõepära meetod.

Mudelistest saadavaid prognoose saab omavahel võrrelda erinevate headuse mõõdikutega, siinkohal tõime ära mõned tuntumad. Mudelite headuse mõõdikud ei võta arvesse parameetrite arvu ning vaid nendele tuginedes võime mudeli kergesti üle sobitada ning saadud prognoosid aegreale tegelikkuses sobida ei pruugi. Ülesobitamisel on tihtipeale paremaks suurema parameetrite arvuga mudel. Ülesobitamise vältimiseks tutvustasime informatsioonikriteeriumeid, need maksimeerivad tõepära kuid samas võtavad arvesse parameetrite arvu.

Olekuruumi mudeleid on kerge kasutada statistikapaketi R lisapaketi *forecast* abil. Siin töös kasutasime olekuruumi mudelite sobitamiseks käsku *ets* ning prognooside leidmiseks käsku *forecast*. Nende kahe funktsiooni jaoks tõime välja eestikeelse juhendi ning näitasime käskude kasutamist reaalse aegridade korral.

Mudeleid ja nende kasutamist vaatasime paralleelselt ARIMA mudelitega. Ilmneb, et informatsioonikriteeriumeid ei saa kasutada võrdlemaks ARIMA ja olekuruumi mudeleid,

siin tuleb parema mudeli valimiseks jätta mudeli valikuks testperiood, mille põhjal mudeli täpsust hinnata ning sobivam mudel selle põhjal valida. Tuleb välja, et olekuruumi mudel annab nii mõnelgi juhul parema prognoosi, kuid mudeli sobitamist ei tohi jätta ainult arvuti ülesandeks, vaid enne tuleb tutvuda aegreaga ning vajadusel piirata sobitatavaid mudeleid.

# Forecasting timeseries with exponential smoothing

Master's thesis

Kädi Mägi

## Summary

The purpose of this study was to investigate exponential smoothing methods. As they are popular methods that are used for forecasting in various fields due to their intuitive and easy to understand nature. State space models, developed in the past decade, give exponential smoothing methods the statistical framework making it possible to calculate likelihood, prediction intervals and give guidelines to model selection. In the study it was looked at how to derive the methods and the models, how to assess the initial values and parameters and thereafter how to choose appropriate model to calculate forecasts for the data at hand.

Another aim was to find out more about the usage of the state space models and underlying exponential smoothing methods in the R environment with the package forecast. Functions closely related to the exponential smoothing methods were examined and tested on time series.

Finally, the use of state space models were tried out on some real life time series and the results were compared with the results from autoregressive integrated moving average (ARIMA) models. The time series were chosen to have different components to bring out the fact that these models take into account the trend, seasonality and other features that time series may have. The model selection criteria and the accuracy of forecast was examined for both of the fitted models. As seen from the calculations then state space models can give better forecasts than ARIMA models, but before fitting a model to the time series one should investigate it and restrict the models if necessary.



# Kirjandus

- [1] Rob J. Hyndman, Anne B Koehler, J. Keith Ord, Ralph D. Snyder, *Forecasting with Exponential smoothing: The State Space Approach*. Springer 2008
- [2] R. Kangro, *Aegridade analüüs*. Tartu Ülikool, Loengukonspekt, <http://math.ut.ee/~rkangro/aegread/2011/aegread.pdf>, 2011.
- [3] Statistikaamet, Tarbijahinna harmoniseeritud indeks, <http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/04HINNAD/04Hinnad.asp>, (20.05.2013).
- [4] Statistikaamet, Majutatud, [http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/23Turism\\_ja\\_majutus/02Majutus/02Majutus.asp](http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/23Turism_ja_majutus/02Majutus/02Majutus.asp), (20.05.2013).
- [5] Statistikaamet, Inimkannatanutega liiklusõnnetused teedel, <http://pub.stat.ee/px-web.2001/Database/Majandus/22Transport/02Liiklusennetused/02Liiklusennetused.asp>, (20.05.2013).
- [6] Rob J Hyndman, George Athanasopoulos, Slava Razbash, Drew Schmidt, Zhenyu Zhou ja Yousaf Khan r-project, Package 'forecast', <http://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf>, (20.05.2013).

# Lisa

## Ekspponentsiaalse silumise meetodite ja olekuruumi mudelite arvutusvalemid

Siin on toodud kolm tabelit, kus esimeses veerus on võimalikud trendi komponendid ning esimesel real sesoonsuse komponendid.

- Esimeses tabelis L.1 on välja toodud kõigi viiesteistkümne ekspponentsiaalse silumise meetodi arvutusvalemid aegrea osade  $l_t$ ,  $b_t$  ja  $s_t$  ning punktiviisilise prognoosi  $\hat{y}_{t+h|t}$  leidmiseks.
- Teises tabelis L.2 on välja toodud aditiivse vealiikmega olekuruumi mudelite jaoks arvutusvalemid aegrea komponentide  $l_t$ ,  $b_t$  ja  $s_t$  ning punktiviisilise prognoosi  $\mu_t$  leidmiseks.
- Kolmandas tabelis L.3 on välja toodud multiplikatiivse vealiikmega olekuruumi mudelite jaoks arvutusvalemid aegrea komponentide  $l_t$ ,  $b_t$  ja  $s_t$  ning punktiviisilise prognoosi  $\mu_t$  leidmiseks.

Sesoonsus		
Trend	M	
N	A	
N	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) l_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t - l_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t + s_{t-m+h_m^+}$	$l_t = \alpha (y_t / s_{t-m}) + (1 - \alpha) l_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t / l_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t s_{t-m+h_m^+}$
A	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^* (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t + h b_t + s_{t-m+h_m^+}$	$l_t = \alpha (y_t / s_{t-m}) + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^* (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t / (l_{t-1} + b_{t-1})) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = (l_t + h b_t) s_{t-m+h_m^+}$
A <sub>d</sub>	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) (l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^* (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*) \phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t - l_{t-1} - \phi b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t + \phi_h b_t + s_{t-m+h_m^+}$	$l_t = \alpha (y_t / s_{t-m}) + (1 - \alpha) (l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^* (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*) \phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t / (l_{t-1} + \phi b_{t-1})) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = (l_t + \phi_h b_t) s_{t-m+h_m^+}$
M	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1}$ $b_t = \beta^* (l_t / l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t - l_{t-1} b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^h + s_{t-m+h_m^+}$	$l_t = \alpha (y_t / s_{t-m}) + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1}$ $b_t = \beta^* (l_t / l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}$ $s_t = \gamma (y_t / (l_{t-1} b_{t-1})) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^h s_{t-m+h_m^+}$
M <sub>d</sub>	$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^* (l_t / l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}^\phi$ $s_t = \gamma (y_t - l_{t-1} b_{t-1}^\phi) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^{\phi_h} + s_{t-m+h_m^+}$	$l_t = \alpha (y_t / s_{t-m}) + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1}^\phi$ $b_t = \beta^* (l_t / l_{t-1}) + (1 - \beta^*) b_{t-1}^\phi$ $s_t = \gamma (y_t / (l_{t-1} b_{t-1}^\phi)) + (1 - \gamma) s_{t-m}$ $\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^{\phi_h} s_{t-m+h_m^+}$

Tabel L.1: Eksponentsiaalsete silumise meetodite arvutusvalemid (allikas [1] leheküljel 18).

Trend		Sesoonsus	
$N$	$A$	$M$	$M$
$N$	$\mu_t = l_{t-1}$ $l_t = l_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + \alpha\epsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t/l_{t-1}$
$A$	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1}$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t$	$\mu_t = (l_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha\epsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta\epsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t/(l_{t-1} + b_{t-1})$
$A_d$	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t$	$\mu_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha\epsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta\epsilon_t/s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t/(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$
$M$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\epsilon_t/l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1} + \alpha\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta\epsilon_t/l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1} + \alpha\epsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta\epsilon_t/(s_{t-m}l_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t/(l_{t-1}b_{t-1})$
$M_d$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + \alpha\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta\epsilon_t/l_{t-1}$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + \alpha\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta\epsilon_t/l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + \alpha\epsilon_t/s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta\epsilon_t/(s_{t-m}l_{t-1})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma\epsilon_t/(l_{t-1}b_{t-1}^\phi)$

Tabel L.2: Olekuruumi mudelite arvutusvalemid aditiivse vea korral (allikas [1] leheküljel 21).

Trend		Sesoonsus	
$N$	$A$	$M$	$M$
$N$	$\mu_t = l_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + \alpha(l_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + \alpha(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}(1 + \alpha\epsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\epsilon_t)$
$A$	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1}$ $l_t = (l_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + b_{t-1})\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$	$\mu_t = (l_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = (l_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + b_{t-1})\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\epsilon_t)$
$A_d$	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1}$ $l_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + \phi b_{t-1})\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha(l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$	$\mu_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}$ $l_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + \phi b_{t-1})\epsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\epsilon_t)$
$M$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1 + \beta\epsilon_t)$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1} + \alpha(l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t/l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1 + \beta\epsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\epsilon_t)$
$M_d$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi(1 + \beta\epsilon_t)$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + \alpha(l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\epsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta(l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\epsilon_t/l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\epsilon_t$	$\mu_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi s_{t-m}$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi(1 + \alpha\epsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi(1 + \beta\epsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\epsilon_t)$

Tabel L.3: Olekuruumi mudelite arvutusvalemid multiplikatiivse vea korral (allikas [1] leheküljel 22).

# Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks te- gemiseks

Mina Kädi Mägi

*(autori nimi)*

(sünnikuupäev: 31.01.1986)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Ekspponentsiaalse silumise meetodid aegridade prognoosimiseks,

*(lõputöö pealkiri)*

mille juhendaja on Raul Kangro, PhD ,

*(juhendaja nimi)*

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus/Tallinnas/Narvas/Pärnus/Viljandis, **20.05.2013**.