Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Ravel Riik

Murruliste tuletiste ligikaudne arvutamine harilike tuletiste abil

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

Tartu 2016

Murruliste tuletiste ligikaudne arvutamine harilike tuletiste abil

Bakalaureusetöö

Ravel Riik

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöö eesmärk on uurida meetodit, millega on võimalik Caputo ja Riemann-Liouville'i tuletisi ligikaudselt leida harilike tuletiste abil. Meetodi sobivust testitakse kahe näite abil.

CERCS teaduseriala. P130 Funktsioonid, differentsiaalvõrrandid.
Märksõnad. Murdtuletised, arvutusmeetodid.

An Approximate Method to Find Fractional Derivative

Bachelor's thesis

Ravel Riik

Lühikokkuvõte. The purpose of this Bachelor's thesis is to explore how we can approximationaly find fractional derivatives transporting our problem into finding derivatives. Later we test our method with two examples.

CERCS research specialisation. P130 Functions, differential equations.
Märksõnad. Fractional derivatives, numerical methods.

Sisukord

Sissejuhatus

Murrulise tuletise tekkeks peetakse l'Hospitali ja Leibnitzi kirjavahetust 30. septembril 1965. aastal. Leibniz oli märkinud ühes enda kirjas funktsiooni f n-indat järku tuletise kujul $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, kus n on naturaalarv. L'Hospital esitas kirjateel Leibnizile küsimuse, et mis oleks tulemus, kui võtta $n = \frac{1}{2}$.

Selle probleemiga tegelesid matemaatikud, seal hulgas Fourier, Euler ja Laplace, algselt ainult hobi korras, sest teaduses poldud veel avastatud murrulise tuletise rakendust. Iga matemaatik kasutas endale meelepärast tähistust ja metoodikat defineerimaks murrulist tuletist. Tänapäeval ühed kõige tuntumad on Riemann-Liouville ja Caputo poolt defineeritud murruliste tuletiste mõisted.

Viimastel kümnenditel on leitud murruliste tuletiste jaoks palju erinevaid rakendusi füüsikas, bioloogias, keemias, majanduses: helilainete summutamine ja levimine, elektromagnetism, soojusülekanne, signaalitöötlus, robootika, liiklus süsteemid, geneetilised algoritmid, telekommunikatsioon. Need on vähesed põhjused, miks on hakatud uuesti aktiivselt uurima murrulisi tuletisi.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on uurida meetodit, millega on võimalik murrulisi tuletisi lähendada.

Töö on jaotud kolmeks peatükiks:

i. Esimeses peatükis on toodud vajalikud abitulemused ja mõisted murruliste tuletiste ning põhiteoreemi tõestamise jaoks.

ii. Teises peatükis on esitatud meetod murruliste tuletiste ligikaudseks arvutamiseks harilike tuletiste abil.

iii. Kolmandas peatükis vaadeldatakse näiteid.

Bakalaureusetöö aluseks on artikkel [1], mis ilus 2015. aastal.

1 Mõisted ja terminoloogia

Selles peatükis toome välja olulisemad mõisted ning abitulemused, mida vajame järgmises peatükis.

Definitsioon 1.1. Funktsiooni $B\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega

$$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt, \tag{1.1}$$

nimetatakse *Euleri beetafunktsiooniks.*

Valemis (1.1) esineva integraali koonduvuse tõestuse võib leida õpikust [2, lk 247].

Definitsioon 1.2. Funktsiooni $\Gamma\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}$, mis on defineeritud võrdusega

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt, \tag{1.2}$$

nimetatakse *Euleri gammafunktsiooniks.*

Valemis (1.2) esineva integraali koonduvuse tõestuse võib leida õpikust [2, lk 252].

Euleri beeta- ja gammafunktsiooni vahel kehtib järgmine seos: mis tahes $a,b\in(0,\infty)$ korral

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{1.3}$$

Valemi (1.3) tõestuse võib leida õpikust [2, lk 247 - 249].

Mis tahes $a>0$ korral kehtib valem

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a), \tag{1.4}$$

mida tuntakse *taandamisvalemi* all. Tõepoolset, ositi integreerimise valemi põhjal:

$$\begin{aligned}
\Gamma(a+1)&=\int_0^\infty t^a e^{-t}\ dt\\
&=\int_0^\infty t^a\,d(-e^{-t})\\
&=\lim_{l\to\infty}\big(-t^a e^{-t}\big)\Big|_{t=0}^{t=l}+a\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt\\
&=\lim_{l\to\infty}\big(-l^a e^{-l}\big)+a\Gamma(a)=a\Gamma(a).
\end{aligned}$$

Rakendades taandamisvalemit $n \in \mathbb{N}$ korda, saame:

$$\begin{aligned}\Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1)\\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2)\\ &= (a+n-1)(a+n-2)\cdots(a+1)a\Gamma(a).\end{aligned}$$

Erijuhul, kui $a = 1$, saame

$$\Gamma(1+n) = n!,$$

sest

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$$

Taandamisvalemi (1.4) põhjal saab Euleri gammafunktsiooni defineerida ka juhul, kui $a \in (-1, 0)$. Tõepoolest, kui $\in (-1, 0)$, siis $a + 1 > 0$ ning seega

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}. \tag{1.5}$$

Jätkates sama põhimõttega defineerime juhul, kui $a \in (-2, -1)$ funktsiooni $\Gamma(\alpha)$ väärtuse võrdusega

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)},$$

sest $a + 2 > 0$. Üldiselt, mis tahes $a < 0$ ja $a \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$ korral leidub selline $n \in \mathbb{N}$ nii, et $a + n > 0$ ning saame defineerida gammafunktsiooni väärtuse punktis a järgmiselt:

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{(a)_n}, \tag{1.6}$$

kus

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1).$$

Sümbolit $(a)_n$ nimetatakse *Pochhammeri sümboliks.*

Kui $a < 0$ ja $a \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$, siis jääb kehtima Euleri gammafunktsiooni omadus (1.4):

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{1.7}$$

Definitsioon 1.3 (vt [3, lk 7])**.** Olgu $\gamma \in \mathbb{R}$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Arvu

$$\binom{\gamma}{k} := \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\cdots(\gamma-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k(-\gamma)_k}{k!}, \tag{1.8}$$

nimetatakse *binoomkordajaks reaalarvuliste γ väärtuste korral.*

Kui $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, siis on üldteada, et sümboliga $\binom{n}{k}$ tähistatakse kombinatsioonide arvu n elemendist k kaupa: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Seega tähistus $\binom{\gamma}{k}$ kujul (1.8) on motiveeritud, sest kui $\gamma = n \in \mathbb{N}$, siis

$$\begin{aligned}\binom{\gamma}{k} &= \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\cdots(\gamma-k+1)}{k!}\\ &= \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\cdots(\gamma-k+1)\cdot(\gamma-k)!}{k!\cdot(\gamma-k)!}\\ &= \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\cdots(\gamma-k+1)(\gamma-k)(\gamma-k-1)\cdots 2\cdot 1}{k!(\gamma-k)!}\\ &= \frac{\gamma!}{k!(\gamma-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},\end{aligned}$$

Kui $k = 0$, siis me defineerime $\binom{\gamma}{0} = 1$.

Lause 1.1 (vt [4, lk 13-14]). *Olgu $a > 0$ ja $s \in (0,1)$. Kehtib võrratus*

$$a^{1-s} \leq \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+s)}. \tag{1.9}$$

Käesoleva töö teoreemi 2.1 tõestuses kasutame võrratust (1.9) kujul

$$\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(a+1)} \leq \frac{1}{a^{1-s}}. \tag{1.10}$$

Lause 1.2 (vt [1, lk 4]). *Olgu $\gamma \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$ ja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Siis kehtib järgmine seos binoomkordaja ja Euleri gammafunktsiooni vahel:*

$$\binom{\gamma}{k}(-1)^k = \frac{\Gamma(k-\gamma)}{\Gamma(-\gamma)k!}. \tag{1.11}$$

Definitsioon 1.4. *Arvreaks* nimetatakse lõpmatut summat $\sum_{n=0}^{\infty} u_k, u_k \in \mathbb{R}$.

Definitsioon 1.5. Olgu funktsioonid f_n, kus $n \in \mathbb{N}$, määratud hulgas $\mathbb{R}$. *Funktsionaalreaks* nimetatakse lõpmatut summat $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), x \in \mathbb{R}$.

Definitsioon 1.6. *Astmereaks* punktis $a \in \mathbb{R}$ nimetatakse funktsionaalrida kujul

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x-a)^n, u_n \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

kus $x \in X = (a-R, a+R)$, milles R on rea (1.12) koonduvusraadius.

Definitsioon 1.7. Astmerida (1.12), mille kordajad on antud valemiga

$$u_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{1.13}$$

nimetatakse *funktsiooni f Taylori reaks punktis a.*

Seega funktsiooni f Taylori rida punktis a avaldub kujul

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1.14) \\ &= f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{'''}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots . \end{aligned}$$

Maclaurini reaks nimetatakse erijuhtu Taylori reast (1.14), kus $a = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (1.15) \\ &= f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3 + \dots . \end{aligned}$$

Olgu $f(x) = (1+x)^\alpha$, kus $|x| < 1$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, siis tema Maclaurini rida (1.15) avaldub kujul (vt [2, lk 76]):

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad (1.16) \\ &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots , \end{aligned}$$

mida nimetatakse *binoomreaks.*

Tõepoolest, funktsiooni $f(x) = (1+x)^\alpha$ korral

$$\begin{array}{ll} f(x) = (1+x)^\alpha, & f(0) = 1, \\ f^{'}(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f^{'}(0) = \alpha, \\ f^{''}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f^{''}(0) = \alpha(\alpha-1), \\ f^{'''}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, & f^{'''}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{array}$$

Seega funktsiooni $f(x) = (1+x)^\alpha$ Maclaurini rea (1.15) kordajad avalduvad kujul

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \tag{1.17}$$

Teiselt poolt, võrduse (1.17) parem pool on binoomkordaja (1.8). Kokkuvõttes saame funktsiooni $f(x) = (1+x)^\alpha$ Maclaurini rea (1.15) kirjutada kujule

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Uurime nüüd, millal rida (1.16) koondub. Selleks kasutame D'Alemberti tunnust, mis pärineb õpikust [2, lk 15].

Teoreem 1.3. *D'Alemberti tunnus. Olgu meil rida* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. *Eksisteerigu piirväärtus*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = D.$$

Kui $D < 1$, *siis rida* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *koondub. Kui* $D > 1$, *siis rida hajub. Kui* $D = 1$ *jääb küsimus lahtiseks.*

Tähistame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

ning uurime selle rea koonduvust teoreemi 1.3 abil. Selleks arvutame

$$\begin{aligned}
\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \frac{|\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n} x^n|} \\
&= \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)||x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)||x|^n} \\
&= \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x|.
\end{aligned}$$

Kuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|\frac{\alpha}{n}-1|}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{|-1|}{1} = 1,$$

siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1}|x| = |x|.$$

Vastavalt teoreemile 1.3 saame, et rida (1.16) koondub, kui $|x| < 1$. Juhul kui $\alpha > 0$, siis koondub rida ka $|x| = 1$ korral(vt [2, lk 77 - 78]).

Lause 1.4 (vt [2, lk 24]). *Kui positiivse rea* $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ *korral* $u_n = f(n)$ *ja* f *on pidev monotoonselt kahanev funktsioon piirkonnas* $[a, \infty]$, *siis vaadeldav rida ja päratu integraal* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *koonduvad (hajuvad) samaaegselt.*

Järgnevas toome sisse Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletiste mõisted. Siin me tugineme suures osas monograafiale [5].

Definitsioon 1.8. Olgu funktsioon f diferentseeruv lõigus $[a,b]$. Defineerime operaatori D järgmise võrdusega:

$$(Df)(t) = f^{'}(t),\ t \in [a,b].$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame sümboliga D^n operaatori D n-korda järjest rakendamist:

$$D^1 = D, \quad D^n = DD^{n-1}.$$

Definitsioon 1.9. Olgu funktsioon f integreeruv lõigus $[a,b]$. Defineerime operaatori J_a järgmse võrdusega:

$$(J_a f)(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau,\ t \in [a,b].$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame sümboliga J_a^n operaatori J_a n-korda järjest rakendamist:

$$J_a^1 = J_a, \quad J_a^n = J_a J_a^{n-1}.$$

Kui $n = 0$, siis defineerime kokkuleppeliselt, et $D^0 = I$ ja $J_a^0 = I$, kus I on ühikoperaator:

$$(If)(t) = f(t).$$

Lause 1.5 (vt [5, lk 7])**.** *Olgu funktsioon f lõigus $[a,b]$ pidev ja olgu F lõigus $[a,b]$ defineeritud võrdusega*

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds,\ \textit{kus}\ t \in [a,b].$$

Sellest järeldub, et F on diferentseeruv lõigus $[a,b]$ ning kehtib

$$F' = f.$$

Lausest 1.5 järeldub, et iga lõigus $[a,b]$ pideva funktsiooni f korral

$$DJ_a f = f$$

ning iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$D^n J_a^n f = f. \tag{1.18}$$

Soovime üldistada definitsioone 1.8 ja 1.9 ning võrdust (1.18) juhule kui $n \notin \mathbb{N}$. Defineerime esmalt Riemann-Liouville α-ndat järku integraali, kus $\alpha > 0$, mille kaudu hiljem defineerime Riemann-Liouville α-ndat järku tuletise.

Lause 1.6 (vt [5, lk 8]). *Olgu f lõigus $[a,b]$ integrreeruv funktsioon, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib valem*

$$(J_a^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau), d\tau,\ t \in [a,b] \tag{1.19}$$

Asendades valemis (1.19) faktoriaali $(n-1)!$ Euleri gammafunktsiooniga $\Gamma(\alpha)$, kus $\alpha > 0$, saame üldistuse valemist (1.19), mida nimetatakse Riemann-Liouville α-ndat järku integraaliks. Kui $\alpha = n \in \mathbb{N}$, siis saame $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Definitsioon 1.10. Olgu f diferentseeruv lõigus $[a,b]$ ja olgu $\alpha > 0$. Funktsiooni f *Riemann-Liouville α-ndat järku integraal* on defineeritud võrdusega

$$({}_{RL}J_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau,\ t \in [a,b]. \tag{1.20}$$

Kui $\alpha = 0$, siis defineerime ${}_{RL}J_a^0 = I$.

Definitsioon 1.11. Olgu $\alpha \geq 0$ ja olgu $n = \lceil \alpha \rceil$. Funktsiooni f *Riemann-Liouville α-ndat järku tuletis* on defineeritud võrdusega

$$({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) = (D^n\, {}_{RL}J_a^{n-\alpha} f)(t),\ t \in\ [a,b]. \tag{1.21}$$

Eeldame, et funktsioon f on selline, et $D^n\, {}_{RL}J_a^{n-\alpha} f$ eksisteerib.

Kui $\alpha = 0$, siis defineerime ${}_{RL}D_a^0 = I$.

Riemann-Liouville'i α-ndat järku tuletise (1.21) ja integraali (1.20) vahel jääb kehtima võrdus (1.18). Lause 1.7 tõestuse võib leida monograafiast [5, lk 30].

Lause 1.7. *Olgu $\alpha > 0$ ja $n = \lceil \alpha \rceil$. Lisaks olgu funktsioon f selline, et ${}_{RL}D_a^\alpha({}_{RL}J_a^\alpha f)$ eksisteerib. Siis*

$$({}_{RL}D_a^\alpha({}_{RL}J_a^\alpha f))(t) = f(t),\ t \in (a,b) \tag{1.22}$$

Lõigus $[a,b]$ $n \in \mathbb{N}$ korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide ruumi tähistatakse sümboliga $C^n[a,b]$.

Definitsioon 1.12 ([3, lk 10-16]). Olgu $\alpha \geq 0, n = \lceil \alpha \rceil$ ja $f \in C^n[a,b]$. Funktsiooni f *Caputo α-ndat järku tuletis* on defineeritud võrdusega:

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau. \tag{1.23}$$

Kui $\alpha = 0$, siis defineerime ${}^C D_a^0 = I$.

Lause 1.8 (vt [5, lk 50-51]). *Olgu $\alpha > 0, n = \lceil \alpha \rceil$ ja $a \in \mathbb{R}$ ning olgu lõigus $[a,b]$ määratud funktsioon f selline, et tal leiduvad Caputo ja Riemann-Liouville'i α-ndat järku tuletised $({}^C D_a^\alpha f)(t)$ ja ${}_{RL}D_a^\alpha f(t)$, kus $t \in [a,b]$. Siis*

$$({}^C D_a^\alpha f)(t) = ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

2 Meetodid Caputo ja Riemann-Liouville tuletiste lähendamiseks

Murrulisi tuletisi on tülikas ning keerukamate funktsioonide korral ka võimatu leida analüütiliselt. On olemas mitmeid meetodeid, kui vaadeldava murrulise tuletise järk on $\alpha \in (0,1)$. Käesolevas töös toodud meetodid on universaalse iseloomuga, mida saab rakendada ka kõrgema järgu murrulise tuletise jaoks.

Teoreemi 2.1 sõnastus pärineb artiklist [1, lk 4]. Selle teoreemi tõestus on artiklis suures osas lugejale endale lahendamiseks jäätud. Artiklis on ainult toodud mõningad vahetulemused ning andakse minimaalset informatsiooni, kuidas nendeni jõuda.

Paneme kirja järeldusena ka meetodi Riemann-Liouville murrulise tuletise lähendamiseks, mida artiklis pole välja toodud.

Teoreem 2.1. *Olgu funktsioon $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, selline, et $x \in C^{n+m+1}$, kus $n \in \mathbb{N}, \alpha \in (n-1,n), m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Lisaks olgu $N \in \mathbb{N}$ selline, et $N \geq m+1$. Defineerime funktsioonid*

$$A_k = \frac{1}{\Gamma(n+k+1-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=m-k+1}^{N} \frac{\Gamma(p+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-k)(p-m+k)!} \right],$$

kus $k \in \{0,1,\ldots,m\}$;

$$B_k = \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha+1-n)(k-m-1)!},$$

kus $k \in \{m+1, m+2, \ldots, N\}$;

$$V_k(t) = \int_a^t (\tau-a)^k x^{(n)}(\tau)\ d\tau,$$

kus $k \in \{0,1,\ldots,N-m-1\}$ ja $t \in [a,b]$. Siis iga $t \in [a,b]$ korral kehtib seos

$$\begin{aligned} {}^{C}{}_{a}D^{\alpha}x(t) = &\sum_{k=0}^{m} A_k (t-a)^{n+k-\alpha} x^{(n+k)}(t) \\ &+ \sum_{k=m+1}^{N} B_k (t-a)^{n+m-k-\alpha} V_{k-m-1}(t) + E_N(t), \end{aligned}$$

kus

$$|E_N(t)| \leq \frac{\max_{\tau\in[a,t]} |x^{(n+m+1)}|(t-a)^{n+m+1-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)|\Gamma(\alpha-n-m)|(N+1)^{n+m-\alpha}(n+m-\alpha)}. \tag{2.1}$$

Tõestus. Alustame Caputo tuletise definitsioonist

$$({}^C D_a^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau)\ d\tau \tag{2.2}$$

ning rakendame integraali $\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}\, d\tau$ leidmiseks ositi integreerimis valemit

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du,$$

kus

$$\begin{aligned} u &= x^{(n)}(\tau), & du &= x^{(n+1)}(\tau) \\ dv &= (t-\tau)^{n-\alpha-1}, & v &= -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha}. \end{aligned}$$

Selle tulemusel saab integraali $\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}\, d\tau$ esitada kujul

$$\begin{aligned} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}\, d\tau &= -\frac{x^{(n)}(\tau)}{n-\alpha}(t-\tau)^{n-\alpha}\Bigg|_{\tau=a}^{\tau=t} \\ &\quad + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{x^{(n)}(a)}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha} + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} ({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau)\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{x^{(n)}(a)}{n-\alpha}(t-a)^{n-\alpha} + \frac{1}{n-\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \right) \\ &= \frac{x^{(n)}(a)}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Kasutades gammafunktsiooni omadust (1.4), saame Caputo tuletise (2.2) kirjutada kujule

$$
\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \frac{x^{(n)}(a)}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{x^{(n)}(a)}{\Gamma(n+1-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

Rakendame nüüd integraali $\displaystyle\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau$ leidmiseks ositi integreerimist, kus $u = x^{(n+1)}(\tau), dv = (t-\tau)^{n-\alpha}$ ning kasutades eelnevaga analoogilist lahenduskäiku, saame Caputo tuletise (2.3) avaldada järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \frac{x^{(n)}(a)}{\Gamma(n+1-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} x^{(n+1)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{x^{(n)}(a)}{\Gamma(n+1-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha} + \frac{x^{(n+1)}(a)}{\Gamma(n+2-\alpha)}(t-a)^{n+1-\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(n+2-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n+1-\alpha} x^{(n+2)}(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Sama põhimõttega saame ositi integreerimist rakendada veel $m-1$ korda, sest funktsioon $x \in C^{n+m+1}$ ehk funktsioon x on $n+m+1$ korda pidevalt differentseeruv lõigus $[a,b]$. Selle tulemusel saame Caputo tuletise (2.4) kujuks

$$
\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha x)(t) = &\sum_{k=0}^{m} \frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \\
&\times \int_a^t (t-\tau)^{n+m-\alpha} x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Uurime eraldi funktsiooni kujul $(t-\tau)^{n+m-\alpha}$. Esitame selle järgmiselt:

$$
\begin{aligned}
(t-\tau)^{n+m-\alpha} &= (t-a)^{n+m-\alpha}\left(1 - \frac{\tau-a}{t-a}\right)^{n+m-\alpha} \\
&= (t-a)^{n+m-\alpha}\left(1 + \left(-\frac{\tau-a}{t-a}\right)\right)^{n+m-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Kuna $\left|\dfrac{\tau-a}{t-a}\right| \leq 1$, sest $\tau \in [a,t]$ ja $n+m-\alpha > 0$, siis saame funktsiooni

$\left(1+\left(-\frac{\tau-a}{t-a}\right)\right)^{n+m-\alpha}$ arendada binoomritta (1.16):

$$\left(1+\left(-\frac{\tau-a}{t-a}\right)\right)^{n+m-\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k\frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k}.$$

Selle tulemusel võime funktsiooni $(t-\tau)^{n+m-\alpha}$ esitada kujul

$$\begin{aligned}(t-\tau)^{n+m-\alpha}&=(t-a)^{n+m-\alpha}\left(1+\left(-\frac{\tau-a}{t-a}\right)\right)^{n+m-\alpha}\\&=(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k\frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k}\\&=(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=0}^{N}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k\frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k}+\overline{E}_N(t,\tau),\end{aligned}$$

kus

$$\overline{E}_N(t,\tau)=(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=N+1}^{\infty}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k\frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k}.$$

Nüüd saame valemis (2.5) oleva integraali kirjutada järgmiselt:

$$\begin{aligned}&\int_a^t(t-\tau)^{n+m-\alpha}x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau\\&=\int_a^t\left[(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=0}^{N}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k\frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k}+\overline{E}_N(t,\tau)\right]x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau\\&=(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=0}^{N}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k\frac{1}{(t-a)^k}\int_a^t(\tau-a)^kx^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau\\&\quad+E_*(t,\tau),\end{aligned}$$

kus

$$E_*(t,\tau)=\int_a^t\overline{E}(t,\tau)x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau.$$

Kuna iga $k\in\{0,1,\ldots,N\}$ korral on täidetud lause 1.2 tingimused, siis

$$\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k=\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!}$$

ning

$$\begin{aligned}&(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=0}^{N}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k\frac{1}{(t-a)^k}\int_a^t(\tau-a)^kx^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau+E_*(t,\tau)\\&=(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k}\int_a^t(\tau-a)^kx^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau+E_*(t,\tau).\end{aligned}$$

Seega

$$\int_a^t (t-\tau)^{n+m-\alpha} x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau$$
$$= (t-a)^{n+m-\alpha} \sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k} \int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau + E_*(t,\tau)$$

ning Caputo tuletis (2.5) omandab kuju

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}(t-a)^{n+k-\alpha} \\ &+ \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k} \int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau \\ &+ E_N(t),\end{aligned} \tag{2.6}$$

kus

$$E_N(t) = \frac{1}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} E_*(t,\tau).$$

Eraldame avaldises (2.6) esimesest summast liikme, mis vastab väärtusele $k=m$ ja teisest summast liikme, mis vastab väärtusele $k=0$. Siis saame Caputo tuletise (2.6) esitada kujul

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}(t-a)^{n+k-\alpha} \\ &+ \frac{x^{(n+m)}(a)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha} \\ &+ \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau \\ &+ \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k} \int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau \\ &+ E_N(t).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Kuna

$$\int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau = x^{(n+m)}(\tau)\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} = x^{(n+m)}(t) - x^{(n+m)}(a),$$

siis Caputo tuletis (2.7) avaldub kujul

$$
\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}(t-a)^{n+k-\alpha} \\
&+ \frac{x^{(n+m)}(a)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha} \\
&+ \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}[x^{(n+m)}(t) - x^{(n+m)}(a)] \\
&+ \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k} \int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \\
&+ E_N(t).
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Näeme, et summas (2.8) liikmed $\dfrac{x^{(n+m)}(a)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha}$ saab taandada ja Caputo tuletise (2.8) kuju lihtsustub:

$$
\begin{aligned}
({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}(t-a)^{n+k-\alpha} \\
&+ \frac{x^{(n+m)}(t)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha} \\
&+ \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k} \int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \\
&+ E_N(t).
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Kasutame avaldise (2.9) oleva integraali $\displaystyle\int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau$ leidmiseks ositi integreerimist, kus

$$
\begin{aligned}
u &= (\tau-a)^k, & du &= k(\tau-a)^{k-1}, \\
dv &= x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau, & v &= x^{(n+m)}(\tau).
\end{aligned}
$$

Siis integraal $\displaystyle\int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau$ avaldub kujul

$$
\begin{aligned}
&\int_a^t (\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \\
&= (\tau-a)^k x^{(n+m)}(\tau)\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} - k\int_a^t (\tau-a)^{k-1} x^{(n+m)}(\tau)\, d\tau \\
&= (t-a)^k x^{(n+m)}(t) - k\int_a^t (\tau-a)^{k-1} x^{(n+m)}(\tau)\, d\tau
\end{aligned}
$$

ning saame avaldise (2.9) viimase summa esitada järgmiselt:

$$\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k}\int_a^t(\tau-a)^k x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k}\Big[(t-a)^k x^{(n+m)}(t)\\
&\quad-k\int_a^t(\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau\Big]\\
&=\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!}\frac{(t-a)^k}{(t-a)^k}x^{(n+m)}(t) \qquad (2.10)\\
&\quad-\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)k}{\Gamma(\alpha-n-m)k!(t-a)^k}\int_a^t(\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Märkame, et viimases võrduses (2.10) saab esimeses summas taandada tegurid $(t-a)^k$ ja teist summat saab lihtsustada, sest $\dfrac{k}{k!}=\dfrac{1}{(k-1)!}$. Tuues esimesest summast välja teguri $x^{(n+m)}(t)$, saame

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{(n+m)}(t)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!} \qquad (2.11)\\
&-\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)(k-1)!(t-a)^k}\int_a^t(\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Kuna $n+m-\alpha>0$, saame avaldise (2.11) viimase summa ees olevale tegurile rakendada Euleri gammafunktsiooni omadust (1.4):

$$\Gamma(n+m+1-\alpha)=(n+m-\alpha)\Gamma(n+m-\alpha).$$

Seega avaldis (2.11) võtab kuju

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{(n+m)}(t)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!} \qquad (2.12)\\
&-\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{(n+m-\alpha)\Gamma(n+m-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)(k-1)!(t-a)^k}\\
&\times\int_a^t(\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Kirjutame avaldise (2.12) viimase summa ees oleva teguri $\dfrac{1}{(n+m-\alpha)}$ kujul $\dfrac{1}{-(\alpha-n-m)}$

ning viime teguri $\dfrac{1}{\alpha - n - m}$ summa sisse. Saame:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{(n+m)}(t)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!} \\
&+\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{(\alpha-n-m)\Gamma(\alpha-n-m)(k-1)!(t-a)^k} \\
&\times\int_a^t(\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Avaldise (2.13) viimase summa sees olevale tegurile saame rakendada Euleri gammafunktsiooni omadust (1.7), sest $\alpha - n - m < 0$:

$$\Gamma(\alpha+1-n-m) = (\alpha-n-m)\Gamma(\alpha-n-m).$$

Siis

$$\begin{aligned}
&\frac{x^{(n+m)}(t)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!} \\
&+\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha+1-n-m)(k-1)!(t-a)^k} \\
&\times\int_a^t(\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Asendame Caputo tuletises (2.9) viimase summa avaldisega (2.14). Tulemuseks on Caputo tuletise avaldis kujul

$$\begin{aligned}
({}^{C}D_a^{\alpha}x)(t) = &\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}(t-a)^{n+k-\alpha} \\
&+\frac{x^{(n+m)}(t)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha} \\
&+\frac{x^{(n+m)}(t)}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}(t-a)^{n+m-\alpha}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!} \\
&+\frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha)}\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha+1-n-m)(k-1)!(t-a)^k} \\
&\times\int_a^t(\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau + E_N(t).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Avaldises (2.15) saame kahel liikmel teguri $(t-a)^{n+m-\alpha}x^{(n+m)}(t)$ ette tuua. Saame:

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}(t-a)^{n+k-\alpha} \\ &+ A_m(t-a)^{n+m-\alpha}x^{(n+m)}(t) \\ &- \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)(k-1)!(t-a)^k} \\ &\times \int_a^t (\tau-a)^{k-1}x^{(n+m)}(\tau)\,d\tau + E_N(t),\end{aligned} \tag{2.16}$$

kus

$$A_m = \Big[\frac{1}{\Gamma(n+m+1-\alpha)}\Big(1+\sum_{k=1}^{N}\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!}\Big)\Big],$$

on esitatud teoreemi 2.1 formuleeringus. Eraldame nüüd avaldise (2.16) esimesest summast liikme, mis vastab väärtusele $k=m-1$ ja teisest summast liikme, mis vastab väärtusele $k=1$. Kasutades eelnevaga analoogilist lahenduskäiku, saame

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{x^{(n+k)}(a)}{\Gamma(n+k+1-\alpha)}(t-a)^{n+k-\alpha} + A_m(t-a)^{n+m-\alpha}x^{(n+m)}(t) \\ &+ A_{m-1}(t-a)^{n+m-1-\alpha}x^{(n+m-1)}(t) \\ &+ \frac{(t-a)^{n+m-2-\alpha}}{\Gamma(n+m-1-\alpha)} \sum_{k=2}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha+2-n-m)(k-2)!(t-a)^{k-2}} \\ &\times \int_a^t (\tau-a)^{k-2}x^{(n+m-1)}(\tau)\,d\tau + E_N(t).\end{aligned}$$

Tehes nii veel $m-1$ korda, siis oleme viinud Caputo α-ndat järku tuletise (2.2) soovitud kujule:

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m} A_k(t-a)^{n+k-\alpha}x^{(n+k)}(t) \\ &+ \frac{(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} \sum_{k=m+1}^{N} \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha+1-n)(k-m-1)!(t-a)^{k-m}} \\ &\times \int_a^t (\tau-a)^{k-m-1}x^{(n)}(\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}({}^C D_a^\alpha x)(t) &= \sum_{k=0}^{m} A_k(t-a)^{n+k-\alpha}x^{(n+k)}(t) + \sum_{k=m+1}^{N} B_k(t-a)^{n+m-k-\alpha}V_{k-m-1}(t) \\ &+ E_N(t),\end{aligned}$$

kus B_k ja V_{k-m-1} on defineeritud teoreemi 2.1 alguses iga $k \in \{m+1, m+2, \dots, N\}$.

Jääb veel näidata, et iga $t \in [a,t]$ korral viga $E_N(t)$ on hinnatav võrratusega (2.1). Viga $E_N(t)$ oli meil defineeritud võrdusega

$$E_N(t) = \frac{1}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} E_*(t,\tau), \tag{2.17}$$

kus

$$E_*(t,\tau) = \int_a^t \overline{E}(t,\tau) x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau$$

ja

$$\overline{E}(t,\tau) = (t-a)^{n+m-\alpha} \sum_{k=N+1}^{\infty} \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k} x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau.$$

Seega viga $E_N(t)$ (vt 2.17)) avaldub kujul

$$E_N(t) = \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=N+1}^{\infty} \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k} \int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau,$$

kus $\tau \in [a,t]$. Siis iga $t \in [a,b]$ korral saame hinnangu

$$\begin{aligned}
&|E_N(t)| \\
&= \left| \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=N+1}^{\infty} \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k} \int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \right| \\
&\leq \left| \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \right| \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k} \right| \left| \int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \right| \\
&\leq \left| \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \right| \left| \int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \right| \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k} \right|.
\end{aligned}$$

Kuna iga $t \in [a,b]$ korral $(t-a) \geq 0$ ja eelduste põhjal $n+m+1-\alpha > 0$, siis $\Gamma(n+m+1-\alpha) > 0$ ning me näeme, et

$$\begin{aligned}
&|E_N(t)| \\
&\leq \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \left| \int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \right| \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k} \right|.
\end{aligned}$$

Teame, et $\tau \in [a,t]$, millest järeldub, et $\left| \frac{(\tau-a)^k}{(t-a)^k} \right| \leq 1$ iga $\tau \in [a,t]$ korral. Seega

$$\begin{aligned}
&|E_N(t)| \\
&\leq \frac{(t-a)^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \left| \int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\, d\tau \right| \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \right|.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Uurime avaldises (2.18) oleva integraali $\left|\int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau\right|$ ülemist tõket. Saame:

$$\left|\int_a^t x^{(n+m+1)}(\tau)\,d\tau\right| \leq \int_a^t |x^{(n+m+1)}(\tau)|\,d\tau \leq \max_{\tau\in[a,t]} |x^{(n+m)}(\tau)|(t-a).$$

Selle tulemusel on avaldise (2.18) ülemine tõke järgmine:

$$|E_N(t) \leq \max_{\tau\in[a,t]} |x^{(n+m+1)}| \frac{(t-a)^{n+m+1-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)} \sum_{k=N+1}^{\infty} \left| \binom{n+m-\alpha}{k} (-1)^k \right|. \quad (2.19)$$

Uurime eraldi võrratuses (2.19) olevat liiget $\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k$, kus $k \geq N+1$ on mingi fikseeritud naturaalarv. Märkame, et saab rakendada lauset (1.2):

$$\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k = \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!}. \quad (2.20)$$

Kuna avaldises (2.20) on $k \in \mathbb{N}$, siis saame kasutada gammafunktsiooni omadust (1.4). Saame, et $k! = \Gamma(k+1)$ ning kirjutame avaldise (2.20) kujul

$$\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k!} = \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)\Gamma(k+1)}. \quad (2.21)$$

Kasutame gammafunktsiooni omadust (1.4) liikme $\Gamma(k+1)$ jaoks nii mitu korda, et meil tekiks liige $\Gamma(k-m)$. Saame kirjutada

$$\begin{aligned} \Gamma(k+1) &= k\Gamma(k) = k(k-1)\Gamma(k-1) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= k(k-1)\cdots(k-m)\Gamma(k-m). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Asendame avaldises (2.21) liikme $\Gamma(k+1)$ saadud tulemusega kujul (2.22):

$$\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)\Gamma(k+1)} = \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k(k-1)\cdots(k-m)\Gamma(k-m)} \quad (2.23)$$

Kirjutame avaldise (2.23) gammafunktsiooni parameetri $k+\alpha-n-m$ kujul

$$\begin{aligned} k+\alpha-n-m &= k+\alpha-n-m+1-1 \\ &= (k-m-1)+(1+\alpha-n) \\ &= h+s, \end{aligned}$$

kus

$$h = k-m-1, \quad s = 1+\alpha-n. \quad (2.24)$$

Siis

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-m)k(k-1)\cdots(k-m)\Gamma(k-m)} \\
&= \frac{\Gamma(h+s)}{\Gamma(\alpha-n-m)k(k-1)\cdots(k-m)\Gamma(h+1)}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Veendume, et muutujad (2.24) rahuldavad tingimusi:

$$h > 0 \quad \text{ja} \quad s \in (0,1). \tag{2.26}$$

Tõepoolest, pidades silmas, et $k \geq N+1$ ja $N \geq m+1$, saame

$$h = k-m-1 \geq N+1-m-1 \geq m+1-m = 1 > 0.$$

Kuna $\alpha \in (n-1,n)$, siis $\alpha - n \in (-1,0)$ ja $s = 1+\alpha-n \in (0,1)$. Teades, et muutujad (2.24) rahuldavad tingimusi (2.26) saame avaldisele (2.25) rakendada võrratust (1.10). Saame

$$\frac{\Gamma(h+s)}{\Gamma(h+1)} \leq \frac{1}{h^{1-s}}$$

ning avaldis (2.25) on hinnatav järgmiselt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(h+s)}{\Gamma(\alpha-n-m)k(k-1)\cdots(k-m)\Gamma(h+1)} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-n-m)k(k-1)\cdots(k-m)}\frac{1}{h^{1-s}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n-m)k(k-1)\cdots(k-m)}\frac{1}{(k-m-1)^{n-\alpha}}.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Näitame nüüd, et avaldise (2.27) liige $k(k-1)\cdots(k-m)$ rahuldab tingimust

$$k(k-1)\cdots(k-m) \geq (k-m-1)^{m+1}. \tag{2.28}$$

Tõepoolest võrratus (2.28) kehtib, sest iga $i \in \{0,1,\ldots,m\}$ korral $i \leq m+1$ ning

$$k(k-1)\cdots(k-m) = \prod_{i=0}^{m}(k-i) \geq \prod_{i=0}^{m}(k-(m+1)) = (k-m-1)^{m+1}.$$

Seeega avaldis (2.27) on ülevalt tõkestatud:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha-n-m)k(k-1)\cdots(k-m)}\frac{1}{(k-m-1)^{n-\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-n-m)(k-m-1)^{m+1}}\frac{1}{(k-m-1)^{n-\alpha}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n-m)}\frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Selle tõttu kehtib avaldises (2.19) oleva summa iga liikme $\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k$ korral järgmine võrratus:

$$\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}}$$

ehk

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}}. \quad (2.29)$$

Märkame, et võrratuse (2.29) paremal pool oleva summa korral on täidetud lause 1.4 tingimused. Tõepoolest, iga $k \in \{N+1, N+2, \dots\}$ korral

$$\frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}} \geq 0$$

ning kuna

$$k-m-1 \leq (k+1)-m-1 = k-m$$

ja

$$n+m+1-\alpha \geq 1,$$

siis

$$\frac{1}{(k-m)^{n+m+1-\alpha}} \geq \frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}}.$$

Seega saame võrratuse (2.29) paremal pool asuvale summale rakendada lauset 1.4:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}} \\
&\leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\int_{N+1}^{\infty}\frac{1}{(k-m-1)^{n+m+1-\alpha}}dk \\
&= \frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{k^{n+m-\alpha}(-n-m+\alpha)}\Big|_{k=N+1}^{k=l} \\
&= -\frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\frac{1}{(N+1)^{n+m-\alpha}(n+m-\alpha)} \\
&\leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|}\frac{1}{(N+1)^{n+m-\alpha}(n+m-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Saime, et avaldise (2.19) summa on ülevalt tõkestatud:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\binom{n+m-\alpha}{k}(-1)^k \leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha-n-m)|(N+1)^{n+m-\alpha}(n+m-\alpha)}. \quad (2.30)$$

Järelikult avaldis (2.19) on hinnatav järgmiselt:

$$|E_N(t)| \leq \frac{\max\limits_{\tau \in [a,t]} |x^{(n+m+1)}| (t-a)^{n+m+1-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)|\Gamma(\alpha-n-m)|(N+1)^{n+m-\alpha}(n+m-\alpha)}.$$

Märkus. Paneme tähele, et N kasvades hinnang koondub nulli.

□

Järeldus 2.2. *Olgu funktsioon $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, selline, et $x \in C^{n+m+1}$, kus $n \in \mathbb{N}, \alpha \in (n-1,n), m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Lisaks olgu $N \in \mathbb{N} : N \geq m+1$. Defineerime funktsioonid*

$$A_k = \frac{1}{\Gamma(n+k+1-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=m-k+1}^{N} \frac{\Gamma(p+\alpha-n-m)}{\Gamma(\alpha-n-k)(p-m+k)!} \right],$$

kus $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$;

$$B_k = \frac{\Gamma(k+\alpha-n-m)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\alpha+1-n)(k-m-1)!},$$

kus $k \in \{m+1, m+2, \ldots, N\}$;

$$V_k(t) = \int_a^t (\tau-a)^k x^{(n)}(\tau)\, d\tau,$$

kus $k \in \{0, 1, \ldots, N-m-1\}$ ja $t \in [a,b]$. Iga $t \in [a,b]$ korral kehtib:

$$\begin{aligned}({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) = &\sum_{k=0}^{m} A_k (t-a)^{n+k-\alpha} x^{(n+k)}(t) + \sum_{k=m+1}^{N} B_k (t-a)^{n+m-k-\alpha} V_{k-m-1}(t) \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} + E_N(t),\end{aligned}$$

kus

$$|E_N(t)| \leq \frac{\max\limits_{\tau \in [a,t]} |x^{(n+m+1)}| (t-a)^{n+m+1-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)|\Gamma(\alpha-n-m)|(N+1)^{n+m-\alpha}(n+m-\alpha)}.$$

Tõestus. Kasutades lauset (1.8) saame kirja panna Riemann-Liouville α-ndat järku tuletise. Saame

$$\begin{aligned}({}^{C}D_a^\alpha f)(t) &= ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} \\ \Leftrightarrow ({}_{RL}D_a^\alpha f)(t) &= ({}^{C}D_a^\alpha f)(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}.\end{aligned}$$

Kasutades teoreemi (2.1) saame Caputo α-ndat järku tuletise kirjutada kujul

$$
\begin{aligned}
{}^{C}aD^{\alpha}x(t) = \sum_{k=0}^{m} A_k(t-a)^{n+k-\alpha}x^{(n+k)}(t) \\
+ \sum_{k=m+1}^{N} B_k(t-a)^{n+m-k-\alpha}V_{k-m-1}(t) + E_N(t)
\end{aligned}
$$

ning

$$
\begin{aligned}
({}_{RL}D_a^{\alpha}f)(t) = \sum_{k=0}^{m} A_k(t-a)^{n+k-\alpha}x^{(n+k)}(t) + \sum_{k=m+1}^{N} B_k(t-a)^{n+m-k-\alpha}V_{k-m-1}(t) \\
+ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha} + E_N(t),
\end{aligned}
$$

kus

$$
|E_N(t)| \leq \frac{\max\limits_{\tau\in[a,t]} |x^{(n+m+1)}|(t-a)^{n+m+1-\alpha}}{\Gamma(n+m+1-\alpha)|\Gamma(\alpha-n-m)|(N+1)^{n+m-\alpha}(n+m-\alpha)}.
$$

$\square$

3 Näited

Kõik vajalikud arvutused on läbi viidud programmis Scilab.

Vaatleme funktsiooni $x(t) = (t-a)^\beta$ lõigus $[a, b]$, kus $\beta > -1$ ja $\alpha > 0$. Leiame Riemann-Liouville α-ndat järku integraali. Näitame, et see avaldub kujul

$$({}_{RL}J_a^\alpha x)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}.$$

Vastavalt Riemann-Liouville α-ndat järku integraali definitsioonile 1.10 saame

$$({}_{RL}J_a^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^\beta \, d\tau.$$

Teeme muutuja vahetuse

$$\begin{aligned} s &= \frac{\tau-a}{t-a} \Rightarrow \tau = s(t-a)+a, \\ ds &= \frac{d\tau}{t-a} \Rightarrow \ d\tau = (t-a)ds. \end{aligned}$$

Saame

$$\begin{aligned} ({}_{RL}J_a^\alpha x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-s(t-a)-a)^{\alpha-1}(s(t-a)+a-a)^\beta (t-a)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [(t-a)(1-s)]^{\alpha-1}[s(t-a)]^\beta (t-a)ds \\ &= \frac{(t-a)^{\alpha-1+\beta+1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^\beta (1-s)^{\alpha-1}ds = \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}B(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

Kasutasime beeta- ja gammafunktsiooni seost (1.3). Vastavalt Riemann-Liouville α-ndat järku tuletise definitsioonile 1.11 saame

$$({}_{RL}D_a^\alpha x)(t) = ({}_{RL}D^n J^{n-\alpha}x)(t) = \Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\Big(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(t-a)^{\beta+n-\alpha}\Big)$$

Kui $\alpha - \beta \in \mathbb{N}$, siis $\alpha > \beta$ ja $n-(\alpha-\beta) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, seega

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n\Big((t-a)^{n-(\alpha-\beta)}\Big) = 0$$

Kui $\alpha - \beta \notin \mathbb{N}$, siis

$$({}_{RL}D_a^\alpha x)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \tag{3.1}$$

Leiame sama funktsiooni Caputo α-ndat järku tuletise kasutades lauset 1.8. Saame

$$({}^C D_a^\alpha x)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-a)^{k-\alpha}.$$

Märkame, et iga $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ korral $x^{(k)}(a) = (a-a)^{(k)} = 0$. Seega Caputo α-ndat järku tuletis on

$$({}^C D_a^\alpha x)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{3.2}$$

Igas näites hindame viga valemiga

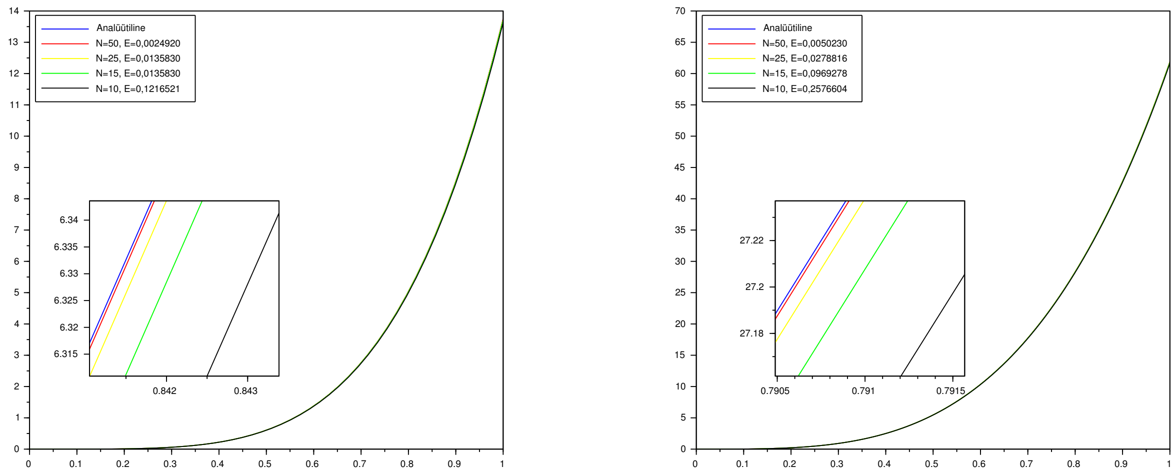
$$E(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{G} (x(t_i) - y(t_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

kus $t_i \in [a,b], i \in \{1, 2, \ldots, G\}$ ning $x(t_i)$ ja $y(t_i)$ on funktsioonide x ja y väärtused kohal t_i, $i = 1, 2, \ldots, G$. Kokkuleppeliselt võtame $G = 100$.

Näide 3.1. Vaatleme funktsiooni $x(t) = t^6$ lõigus $[0,1]$. Leiame analüütiliselt 1.5- ja 2.5-ndat järku Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletised, kasutades seoseid (3.1) ja (3.2):

$$\begin{aligned} ({}_{RL}D_0^{1.5} x)(t) &= ({}^C D_0^{1.5} x)(t) = \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(6-1.5+1)} t^{6-1.5} = \frac{6!}{\Gamma(5.5)} t^{4.5}, \\ ({}_{RL}D_0^{2.5} x)(t) &= ({}^C D_0^{2.5} x)(t) = \frac{6!}{\Gamma(4.5)} t^{3.5}. \end{aligned}$$

Võrdleme analüütiliselt saadud Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletisi meie meetodiga(vt teoreem 2.1 ja järeldus 2.2). Kõigepealt vaatame juhtu, kus $m = 1$ ja $N \in \{10, 15, 25, 50\}$(vt joonis 1).



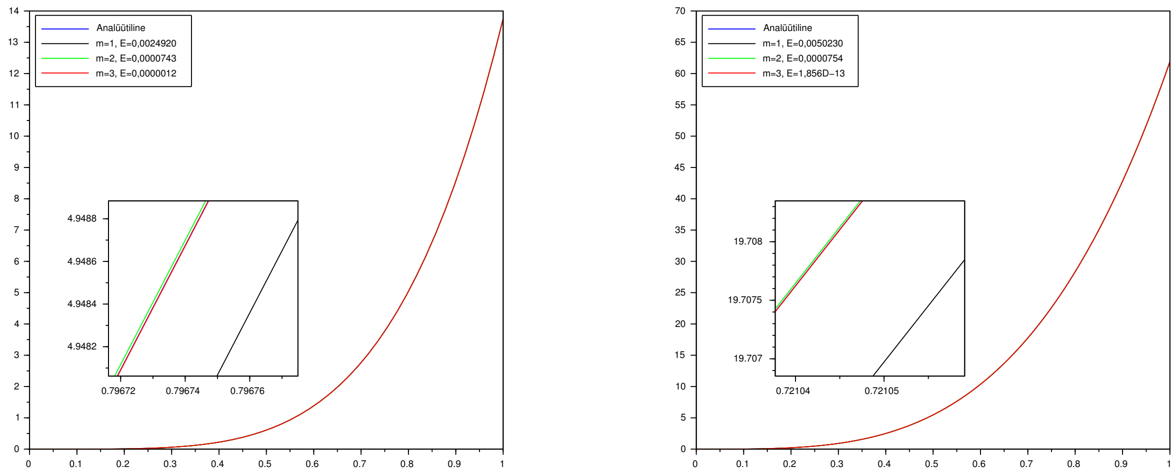
(a) $({}_{RL}D_0^{1.5}x)(t) = ({}^{C}D_0^{1.5}x)(t)$

(b) $({}_{RL}D_0^{2.5}x)(t) = ({}^{C}D_0^{2.5}x)(t)$

Joonis 1: Analüütiliselt ja töös vaadeltud meetodiga leitud Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletised, kus $m = 1$.

Näeme joonise (1) abil, et mida suurema on N, seda parema lähendamise saame.

Vaatleme nüüd olukorda, kus $N = 50$ on fikseeritud ning $m \in \{1, 2, 3\}$(vt joonis 2).



(a) $({}_{RL}D_0^{1.5}x)(t) = ({}^{C}D_0^{1.5}x)(t)$

(b) $({}_{RL}D_0^{2.5}x)(t) = ({}^{C}D_0^{2.5}x)(t)$

Joonis 2: Analüütiliselt ja meetodiga lähendatud Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletised, kus $N = 50$.

Saame järeldada joonise (2) põhjal, et juba väikese m korral on meie lähendid piisavalt täpsed.

Summary

Uurisime murruliste tuletiste leidmist ühe konkreetse meetodiga, mis tugineb hariliku järku tuletise arvutamisel. Tuginedes artiklile on vaadletav meetodi kohta forumeelritud ja tõestatud kaks teoreerilist tulemust.

Meetodit on lihtne arvutis konstrueerida, sest meetod teisendab murrulise tuletise leidmise harilike tuletiste peale. Programmi kirjutades selgub aga ka üks meetodi miinus. Iga näite jaoks tuleb meil käsitsi leida funktsiooni 1.järku kuni $(n+m+1)$-ndat järku tuletised, mis on suure n ja m ning keerulise kujuga funktsiooni korral küllaltki töömahukas ülesanne. Lisaks võtab lähendamine kaua aega, kui N on piisavalt suur. Näide juures piirdusime juhuga, kui $N = 50$.

Tulevikus võiks meetodit võrrelda teiste meetoditega, et näha, mis on selle meetodi eelised ja puudused nende ees, näiteks milline on meetodi koonduvuskiirus ja tööaeg. Kaugemas perspektiivis võiks uurida, kui efektiivselt saab meetodit rakendada murruliste tuletiste differentsiaalvõrrandite lahendamiseks.

Viited

[1] R. Almeida, N. Bastos, *A Numerical Method to Solve Higher-Order Fractional Differential Equations*, Mediterranean Journal of Mathematics, 2015, https://www.researchgate.net/publication/276467805_A_Numerical_Method_to_Solve_Higher-Order_Fractional_Differential_Equations?enrichId=rgreq-153c7dee-0bed-487a-a9f9-f3cb67de32b4&enrichSource=Y292ZXJQYWdlOzI3NjQ2NzgwNTtBUzoyMzgzODE1OTQ1NzQ4NDlAMTQzMzg0NjAwOTU0Mg%3D%3D&el=1_x_2.

[2] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs II osa*, Valgus, Tallinn, 1968.

[3] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2012.

[4] F. Qi, *Bounds for The Ratio of Two Gamma Functions*, Journal of Inequalities and Applications, Springer, London, 2010, http://download.springer.com/static/pdf/416/art%253A10.1155%252F2010%252F493058.pdf?originUrl=http%3A%2F%2Flink.springer.com%2Farticle%2F10.1155%2F2010%2F493058&token2=exp=1459799194~acl=%2Fstatic%2Fpdf%2F416%2Fart%25253A10.1155%25252F2010%25252F493058.pdf%3ForiginUrl%3Dhttp%253A%252F%252Flink.springer.com%252Farticle%252F10.1155%252F2010%252F493058*~hmac=8a73368a562485154ced32841d3916933f556fe02a9e0e60137c0c2538a4d213.

[5] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Opoerators of Caputo Type*, Springer, London, 2010.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ravel Riik (sünnikuupäev: 14.11.1993)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   "Murruliste tuletiste lähendamine",

   mille juhendaja on prof. Arvet Pedas,

   (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.2016**