TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatika instituut

Diana-Katry Kornis

Arvjadade statistiline koonduvus

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Matemaatika eriala

Juhendaja: *prof.* Toivo Leiger

TARTU 2015

Arvjadade statistiline koonduvus

Bakalaureusetöö

Diana-Katry Kornis

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöö eesmärkideks on kirjeldada statistiliselt koonduvate ja $\mathcal{I}$-koonduvate jadade omadusi ning võrrelda jadade statistilist koonduvust nende C-summeeruvusega. Leitakse tarvilik ja piisav tingimus jadade statistiliseks koondumiseks ja näidatakse, et kõigi tõkestatud statistiliselt koonduvate jadade ruum on kinnine alamruum kõigi tõkestatud jadade Banachi ruumis. Samuti uuritakse funktsioonide pidevust C-summeeruvuse ja statistilise koonduvuse suhtes. Esitatakse $\mathcal{I}$-koonduvuse ja $\mathcal{I}^*$-koonduvuse mõisted ja leitakse tingimus, mille korral need langevad kokku.

Märksõnad. Statistiline koonduvus, $\mathcal{I}$-koonduvus, C-summeeruvus, $\mathcal{I}^*$-koonduvus.

Statistical convergence of number sequences

Bachelor's thesis

Diana-Katry Kornis

Abstract. The purpose of this bachelor's thesis is to describe convergent and $\mathcal{I}$-convergent sequences' properties and to compare statistical convergence with C-summability. We find necessary and sufficient condition for statistical convergence and show that the space of all bounded statistically convergent sequences is a closed subspace of all bounded sequences' Banach space. Also we explore the continuity of functions through C-summability and statistical convergence. We formulate the concepts of $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}^*$-convergence and find a condition, in which case they coincide.

Key words. Statistical convergence, $\mathcal{I}$-convergence, C-summability, $\mathcal{I}^*$-convergence.

Sisukord

Sissejuhatus

Jadade statistilise koonduvuse defineerimisel on aluseks hulga asümptootilise tiheduse mõiste. Kui hulga $A \subset \mathbb{N}$ puhul eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_A(k),$$

kus

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A, \\ 0, & \text{kui } x \in \mathbb{N} \setminus A, \end{cases}$$

on hulga A karakteristlik funktsioon, siis arvu $\delta(A)$ nimetatakse hulga A asümptootiliseks tiheduseks. Öeldakse, et arvjada (x_k) koondub statistiliselt arvuks a (kirjutatakse st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$), kui iga $\varepsilon > 0$ korral $\delta(A(\varepsilon)) = 0$, kus

$$A(\varepsilon) := \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\}.$$

Statistilise koonduvuse mõiste defineeris H. Fast [3] 1951. aastal, 1959. aastal kirjeldas I. J. Schoenberg [8] statistiliselt koonduvate jadade mõningaid omadusi. Selle valdkonna tõsisemad uurimused saavad alguse T. Šaláti artiklist [9] ja J. A. Fridy tööst [4], mis ilmusid vastavalt aastatel 1980 ja 1985. T. Šalát tõestas, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ parajasti siis, kui jada (x_k) sisaldab sellise arvuks a koonduva osajada (x_{k_i}), mille korral $\delta(\{\, k_i \mid i \in \mathbb{N}\,\}) = 1$. J. A. Fridy tõestas statistiliselt koonduvate jadade Cauchy kriteeriumi.

Osutub, et kõigi selliste hulkade $A \subset \mathbb{N}$ hulk $\mathcal{R}_0$, mille korral $\delta(A) = 0$, on ideaal. Seejuures st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ parajasti siis, kui $A(\varepsilon) \in \mathcal{R}_0$ iga $\varepsilon > 0$ korral. See asjaolu oli lähtekohaks $\mathcal{I}$-koonduvuse mõiste defineerimisele P. Kostyrko, T. Šaláti ja M. Mačaji käsikirjalises töös [6] ning P. Kostyrko, T. Šaláti ja W. Wilczyński töös [7] (2000/2001). Öeldakse, et mittetriviaalse ideaali $\mathcal{I}$ puhul reaalarvude jada (x_k) on $\mathcal{I}$-koonduv arvuks a (kirjutame $\mathcal{I}$-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$), kui iga $\varepsilon > 0$ korral $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$. Lähtuvalt eelpool mainitud T. Šaláti teoreemist defineeritakse $\mathcal{I}^*$-koonduvuse mõiste järgmiselt: $\mathcal{I}^*$-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, kui leidub selline $M \in \mathcal{I}$, et $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\in\mathbb{N}\setminus M}} x_k = a$. Autorid leidsid piisava ja tarviliku tingimuse selleks, et $\mathcal{I}^*$- ja $\mathcal{I}$-koonduvus langeksid kokku.

Käesoleva bakalaureusetöö üheks eesmärgiks on (võrdluses tavaliste koonduvate jadadega) kirjeldada üksikasjalikult statistiliselt koonduvate jadade omadusi. Teiseks eesmärgiks on võrrelda jadade statistilist koonduvust nende C-summeeruvusega. Teatavasti defineeritakse jada (x_k) C-piirväärtus (ehk Cesàro-piirväärtus) seosega

$$C\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Pidades silmas matemaatilise analüüsi põhikursusest tuntud pidevuse Heine kriteeriumit, mille kohaselt funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on punktis a pidev parajasti siis, kui

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a),$$

püstitatakse küsimus funktsioonidest, mille puhul see implikatsioon kehtib vastavalt statistilise koonduvuse ja C-summeeruvuse korral.

Kolmas eesmärk on kirjeldada $\mathcal{I}$-koonduvate jadade omadusi võrdluses statistiliselt koonduvate jadadega.

Käesolev bakalaureusetöö koosneb kahest peatükist. Esimese peatüki kaks esimest alapeatükki on sissejuhatavat laadi. Neist esimeses tuletatakse meelde edaspidises töös vajalikud mõisted ja tulemused, mis on tuttavad matemaatilise analüüsi ja funktsionaalanalüüsi põhikursustest, ning teises tutvustatakse naturaalarvude hulga asümptootilise tiheduse mõistet ja selle omadusi.

Kolmandas alapeatükis defineeritakse jadade statistiline koonduvus ja veendutakse, et koonduv jada on statistiliselt koonduv. Antakse üksikasjalik tõestus T. Šaláti eelpool mainitud teoreemile tarvilikust ja piisavast tingimusest jadade statistiliseks koondumiseks ning esitatakse sellest tulenevad järeldused. Alapeatüki kirjutamisel olid aluseks J. A. Fridy ja T. Šaláti tööd [4] ja [9].

Neljanda alapeatüki kirjutamisel on kasutatud E. Kaya, M. Kucukaslani ja R. Wagneri artiklit [5] ning I. J. Schoenbergi uurimust [8]. Esitatakse statistiliselt koonduvate jadade omadused, nende hulgas statistilise piirväärtuse ühesus, tehetega seotud omadused, Bolzano-Weierstrassi teoreem, monotoonsuseprintsiip ja teised. Alapeatüki lõpus tõestatakse, et kõigi tõkestatud statistiliselt koonduvate jadade ruum on Banachi ruum. See tulemus on pärit T. Šaláti artiklist [9].

Teine peatükk tegeleb statistilisest koonduvusest lähtuvate probleemiasetuste ja üldistustega. Esimeses alapeatükis näidatakse, et tõkestatud statistiliselt koonduv jada on C-summeeruv ning tuuakse näited selle väite mittepööratavusest ja tema mittekehtivusest tõkestatuse eelduse puudumise korral. Lähtutud on I. J. Schoenbergi artiklist [8].

Teise alapeatüki kirjutamisel on võetud aluseks R. C. Bucki lahendusidee [1], J. Connori ja K.-G. Grosse-Erdmanni töö [2] ning I. J. Schoenbergi artikkel [8]. Uuritakse funktsioonide pidevust C-summeeruvuse ja statistilise koonduvuse suhtes. Veendutakse, et funktsioon on C-pidev parajasti siis, kui ta on lineaarne, ja funktsioon on st-lim-pidev parajasti siis, kui ta on pidev.

Kolmas alapeatükk põhineb P. Kostyrko, T. Šaláti ja W. Wilczyński artiklil [7] ning P. Kostyrko, T. Šaláti ja M. Mačaji käsikirjalisel tööl [6]. Uuritakse $\mathcal{I}$-koonduvuse omadusi ja esitatakse mõningad näited $\mathcal{I}$-koonduvuse erijuhtudest. Lähtudes eelpool mainitud Šaláti teoreemist jadade statistilisest koonduvusest, defineeritakse $\mathcal{I}^*$-koonduvus ja tõestatakse, et $\mathcal{I}^*$-koonduv jada on $\mathcal{I}$-koonduv. Leitakse tarvilik ja piisav tingimus selleks, et $\mathcal{I}^*$-koonduvus ja $\mathcal{I}$-koonduvus langeksid kokku.

Käesolev bakalaureusetöö on referatiivne.

1 Statistiliselt koonduvad jadad ja nende omadused

1.1 Kasutatavad mõisted ja tulemused

Selles alapeatükis loetleme edaspidi kasutatavaid mõisteid ja tulemusi, mis on tuntud matemaatilise analüüsi ja funktsionaalanalüüsi põhikursustest. Me tähistame käesolevas töös tähega $\mathbb{N}$ kõigi naturaalarvude, s.t $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$, tähega $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude, tähega $\mathbb{Z}$ kõigi täisarvude ja tähega $\mathbb{Q}$ kõigi ratsionaalarvude hulka, s.t $\mathbb{Q} := \{\, \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\,\}$.

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et arvjada (x_k) *koondub arvuks* a, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $|x_k - a| < \varepsilon$ kõikide $k \geq N$ korral, ehk

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; k \geq N \;\Rightarrow\; |x_k - a| < \varepsilon.$$

Sel juhul kirjutame $x_k \to a$ või $\lim_{k\to\infty} x_k = a$. Arvu a nimetatakse jada (x_k) *piirväärtuseks.*

Lause 1.2 (piirväärtuse ühesus). *Koonduva jada piirväärtus on üheselt määratud: kui* $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ *ja* $\lim_{k\to\infty} x_k = b$*, siis* $a = b$*.*

Lause 1.3 (keskmise muutuja omadus). *Kui* $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k = a$ *ning leidub* $N \in \mathbb{N}$ *nii, et* $x_k \leq z_k \leq y_k$ *kõikide* $k \geq N$ *korral, siis* $\lim_{k\to\infty} z_k = a$*.*

Lause 1.4. *Kui* $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ *ja* $\lim_{k\to\infty} y_k = b$ *ning leidub* $N \in \mathbb{N}$ *nii, et* $x_k \leq y_k$ *kõikide* $k \geq N$ *korral, siis* $a \leq b$*.*

Lause 1.5 (piirväärtuse tehetega seotud omadused). *Kui* $\lim_{k\to\infty} x_k = a$ *ja* $\lim_{k\to\infty} y_k = b$*, siis*

1) $\lim_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$*,*

2) $\lim_{k\to\infty} x_k y_k = ab$*,*

3) $\lim_{k\to\infty} \lambda x_k = \lambda a$ *iga* $\lambda \in \mathbb{R}$ *korral,*

4) $\lim_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} = \dfrac{a}{b}$*, kui* $b \neq 0$*.*

Definitsioon 1.6. Öeldakse, et jada (x_k) on *tõkestatud*, kui leidub selline $M > 0$, et

$$|x_k| \leq M \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Lause 1.7. *Kui* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ *ja jada* (y_k) *on tõkestatud, siis* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = 0$.

Lause 1.8 (Bolzano-Weierstrassi teoreem). *Iga tõkestatud jada sisaldab koonduva osajada.*

Definitsioon 1.9. Öeldakse, et jada (x_k) on

1) *kasvav*, kui $x_k \geq x_{k-1}$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral,

2) *kahanev*, kui $x_k \leq x_{k-1}$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Jada (x_k) nimetatakse *monotoonseks*, kui ta on kas kasvav või kahanev.

Lause 1.10 (monotoonsusprintsiip). *Monotoonne jada on koonduv parajasti siis, kui ta on tõkestatud.*

Definitsioon 1.11. Öeldakse, et jada (x_k) on *Cauchy jada*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et

$$|x_k - x_l| < \varepsilon \text{ kõikide } k, l \geq N \text{ korral.}$$

Lause 1.12 (Cauchy kriteerium). *Jada* (x_k) *koondub parajasti siis, kui ta on Cauchy jada.*

Definitsioon 1.13. Vektorruumi X nimetatakse *normeeritud ruumiks*, kui igale tema elemendile $x \in X$ on vastavusse seatud kindel reaalarv $\|x\|$, mida nimetatakse elemendi x *normiks*, nii, et on täidetud tingimused

1) $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ iga $\lambda \in \mathbb{R}$ korral,

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definitsioon 1.14. Öeldakse, et normeeritud ruumi X elementide jada (x_k) *koondub elemendiks* $x \in X$, kui $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0$.

Definitsioon 1.15. Öeldakse, et normeeritud ruumi X elementide jada (x_k) on *Cauchy jada*, kui $\lim\limits_{k,l\to\infty} \|x_k - x_l\| = 0$.

Definitsioon 1.16. Normeeritud ruumi nimetatakse *täielikuks*, kui temas iga Cauchy jada koondub.

Definitsioon 1.17. Täielikku normeeritud ruumi nimetatakse *Banachi ruumiks*.

1.2 Naturaalarvude hulga asümptootiline tihedus

Olgu X mittetühi hulk, tähistame sümboliga $\mathcal{P}(X)$ hulga X kõigi alamhulkade hulka ja sümboliga $\mathcal{F}(X)$ kõigi lõplike alamhulkade hulka, s.t

$$\mathcal{F}(X) := \{ A \subset X \mid |A| < \infty \},$$

kus $|A|$ tähistab lõpliku hulga A korral tema elementide arvu. Funktsiooni

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A, \\ 0, & \text{kui } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

nimetatakse hulga $A \in \mathcal{P}(X)$ *karakteristlikuks funktsiooniks.*

Definitsioon 1.18. Olgu X mittetühi hulk. Alamhulkade süsteemi $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ nimetatakse *ideaaliks* (hulgas X), kui on täidetud tingimused

(a) $\varnothing \in \mathcal{S}$,

(b) $A, B \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{S}$,

(c) $[B \in \mathcal{S}, A \subset B] \;\Rightarrow\; A \in \mathcal{S}$.

Ideaali $\mathcal{S}$ nimetatakse *mittetriviaalseks*, kui $X \notin \mathcal{S}$. Mittetriviaalset ideaali $\mathcal{S}$ hulgas X nimetatakse *lubatavaks*, kui $\{x\} \in \mathcal{S}$ iga $x \in X$ korral.

Definitsioon 1.19. Olgu X mittetühi hulk. Alamhulkade süsteemi $\Phi \subset \mathcal{P}(X)$ nimetatakse *filtriks* (hulgas X), kui on täidetud tingimused

(a) $\varnothing \notin \Phi$,

(b) $A, B \in \Phi \;\Rightarrow\; A \cap B \in \Phi$,

(c) $[B \in \Phi, A \supset B] \;\Rightarrow\; A \in \Phi$.

Järgnev lause kirjeldab eelnevalt defineeritud mõistete omavahelist seost.

Lause 1.20. *Olgu $\mathcal{S}$ mittetriviaalne ideaal hulgas X, kus $X \neq \varnothing$. Siis hulk*

$$\Phi(\mathcal{S}) := \{ M \subset X \mid \exists A \in \mathcal{S} : M = X \setminus A \}$$

on filter hulgas X.

Tõestus. Kontrollime definitsiooni 1.19 tingimuste täidetust.

(a) Kuna $X \notin \mathcal{S}$, siis $\varnothing = X \setminus X \notin \Phi(\mathcal{S})$.

(b) Olgu $A, B \in \Phi(\mathcal{S})$, leiduvad sellised $A_0, B_0 \in \mathcal{S}$, et $A = X \setminus A_0$ ja $B = X \setminus B_0$, kusjuures $A_0 \cup B_0 \in \mathcal{S}$. Seega

$$A \cap B = (X \setminus A_0) \cap (X \setminus B_0) = X \setminus (A_0 \cup B_0) \in \Phi(\mathcal{S}).$$

(c) Olgu $B \in \Phi(\mathcal{S})$ ja $B \subset A$, leidub selline $B_0 \in \mathcal{S}$, et $B = X \setminus B_0$. Kuna $X \setminus B_0 \subset A$, siis $X \setminus A \subset B_0 \in \mathcal{S}$ ja seega

$$A = X \setminus (X \setminus A) \in \Phi(\mathcal{S}).$$

■

Käesolevas töös on hulgaks X kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Selle alamhulkade märkimiseks kasutame tähistust

$$[k, n]_{\mathbb{N}} := [k, n] \cap \mathbb{N} = \{\, i \in \mathbb{N} \mid k \leq i \leq n \,\},$$

analoogiliselt märgime ka $[k, n)_{\mathbb{N}},\ [k, \infty)_{\mathbb{N}}$ jne.

Definitsioon 1.21. Kui hulga $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ korral eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n},$$

siis arvu $\delta(A)$ nimetatakse hulga A *asümptootiliseks tiheduseks.*

Paneme tähele, et

$$\frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_A(k),$$

seega

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_A(k),$$

kui see piirväärtus eksisteerib.

Tähistame tähega $\mathcal{R}$ kõigi selliste hulkade $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ süsteemi, millel on asümptootiline tihedus, ning

$$\mathcal{R}_0 := \{\, A \in \mathcal{R} \mid \delta(A) = 0 \,\}.$$

Järgmine näide demonstreerib meile seda, et leidub hulki $A \subset \mathbb{N}$, millel puudub asümptootiline tihedus, s.t $\mathcal{R} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Näide 1. Olgu

$$A := \{1\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [2^{2i}, 2^{2i+1})_{\mathbb{N}},$$

seega

$$A = \{1, 4, 5, 6, 7, 16, 17, \dots, 31, 64, 65, \dots, 127, \dots\}.$$

Veendume, et hulgal A ei ole asümptootilist tihedust.

Paneme tähele, et $|[2^{2k}, 2^{2k+1})_{\mathbb{N}}| = 2^{2k}$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral, seega

$$\begin{aligned}|A \cap [1, 2^{2i-1})_{\mathbb{N}}| = |A \cap [1, 2^{2i-1}]_{\mathbb{N}}| = |A \cap [1, 2^{2i} - 1]_{\mathbb{N}}| = \sum_{k=0}^{i-1} |[2^{2k}, 2^{2k+1})_{\mathbb{N}}| \\ = \sum_{k=0}^{i-1} 2^{2k} = \frac{2^{2i} - 1}{3}.\end{aligned} \tag{1}$$

Vaatleme nüüd jada $\left(\frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ja näitame, et ta hajub. Uurime kaht osajada $\left(\frac{|A \cap [1, 2^{2i-1}]_{\mathbb{N}}|}{2^{2i-1}}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ ja $\left(\frac{|A \cap [1, 2^{2i} - 1]_{\mathbb{N}}|}{2^{2i} - 1}\right)_{i \in \mathbb{N}}$. Seose (1) põhjal

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|A \cap [1, 2^{2i-1}]_{\mathbb{N}}|}{2^{2i-1}} = \lim_{i \to \infty} \frac{2^{2i} - 1}{3 \cdot 2^{2i-1}} = \frac{1}{3} \lim_{i \to \infty} \left(2 - \frac{1}{2^{2i-1}}\right) = \frac{2}{3}$$

ja

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|A \cap [1, 2^{2i} - 1]_{\mathbb{N}}|}{2^{2i} - 1} = \lim_{i \to \infty} \frac{2^{2i} - 1}{3 \cdot (2^{2i} - 1)} = \frac{1}{3}.$$

Et jada $\left(\frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ kaks osajada koonduvad erinevateks piirväärtusteks, siis antud jada ei koondu. Järelikult hulgal A ei ole asümptootilist tihedust.

Kirjeldame hulkade süsteemi $\mathcal{R}$ ja asümptootilise tiheduse tähtsamaid omadusi. Kõigepealt märgime, et

$$\delta(\mathbb{N}) = \lim_{n \to \infty} \frac{|\mathbb{N} \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} = 1,$$

seega $\mathbb{N} \in \mathcal{R}$ ja $\delta(\mathbb{N}) = 1$.

Omadus 1.22. *Iga $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ korral $A \in \mathcal{R}_0$.*

Tõestus. Kui $|A| = m$, kus $m \in \mathbb{N}$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n \geq N$ korral

$$|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}| = m.$$

Järelikult

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 0.$$

∎

Omadus 1.23. *Iga $A \in \mathcal{R}$ korral $0 \leq \delta(A) \leq 1$.*

Tõestus. Et hulga $|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|$ elementide arv saab olla maksimaalselt n, siis

$$0 \leq \frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} \leq 1 \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

seega lause 1.4 põhjal

$$0 \leq \delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} \leq 1.$$

∎

Omadus 1.24. *Olgu $A \in \mathcal{R}_0$ ja $B \subset A$, siis $B \in \mathcal{R}_0$.*

Tõestus. Kuna $B \subset A$, siis $B \cap [1, n]_{\mathbb{N}} \subset A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}$. Tänu seosele $\delta(A) = 0$ saame, et

$$0 \leq \frac{|B \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} \leq \frac{|A \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Keskmise muutuja omaduse (lause 1.3) tõttu ka

$$\delta(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} = 0.$$

∎

Omadus 1.25. *Olgu $A \in \mathcal{R}$, siis ka $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{R}$ ja $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$.*

Tõestus. Paneme tähele, et

$$(\mathbb{N} \setminus A) \cap [1,n]_{\mathbb{N}} = (\mathbb{N} \cap [1,n]_{\mathbb{N}}) \setminus A = [1,n]_{\mathbb{N}} \setminus A,$$

seega

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbb{N} \setminus A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|[1,n]_{\mathbb{N}} \setminus A|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|[1,n]_{\mathbb{N}}| - |A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} = 1 - \delta(A).
\end{aligned}$$

■

Omadus 1.26. *Funktsioon* $\delta : \mathcal{R} \to [0,1]$ *on lõplik-aditiivne: olgu* $A, B \in \mathcal{R}$ *ning* $A \cap B = \varnothing$*, siis* $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$*.*

Tõestus. Kuna $A \cap B = \varnothing$, siis

$$(A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}) \cap (B \cap [1,n]_{\mathbb{N}}) = \varnothing,$$

seosest

$$(A \cup B) \cap [1,n]_{\mathbb{N}} = (A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}) \cup (B \cap [1,n]_{\mathbb{N}})$$

saame, et

$$\begin{aligned}
\delta(A \cup B) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|(A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}) \cup (B \cap [1,n]_{\mathbb{N}})|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}| + |B \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} = \delta(A) + \delta(B).
\end{aligned}$$

■

Omadus 1.27. *Olgu* $A \in \mathcal{R}, B \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ *ja* $B \subset A$*, siis* $A \setminus B \in \mathcal{R}$ *ja kehtib seos* $\delta(A \setminus B) = \delta(A)$*.*

Tõestus. Paneme tähele, et $A = (A \setminus B) \cup B$ ja $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$, seega omaduse 1.26 kohaselt

$$\delta(A) = \delta(A \setminus B) + \delta(B).$$

Et $B \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, siis omaduse 1.22 põhjal $\delta(B) = 0$ ja seega $\delta(A \setminus B) = \delta(A)$. ■

Omadus 1.28. *Alamhulkade süsteem* $\mathcal{R}_0$ *on lubatav ideaal.*

Tõestus. Kõigepealt veendume, et $\mathcal{R}_0$ on ideaal, selleks kontrollime definitsiooni 1.18 tingimusi (a) – (c).

(a) Selge, et

$$\delta(\varnothing) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\varnothing \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{n} = 0,$$

s.t $\varnothing \in \mathcal{R}_0$.

(b) Olgu $A, B \in \mathcal{R}_0$, siis $\delta(A) = \delta(B) = 0$ ja omaduse 1.24 kohaselt $\delta(A\cap B) = 0$. Kuna

$$(A \cup B) \cap [1,n]_{\mathbb{N}} = (A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}) \cup (B \cap [1,n]_{\mathbb{N}}),$$

siis

$$\begin{aligned}
\delta(A \cup B) &= \lim_{n\to\infty} \frac{|(A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}) \cup (B \cap [1,n]_{\mathbb{N}})|}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}| + |B \cap [1,n]_{\mathbb{N}}| - |(A\cap B) \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{|B \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{|(A\cap B) \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \\
&= \delta(A) + \delta(B) - \delta(A \cap B) = 0,
\end{aligned}$$

seega $A \cup B \in \mathcal{R}_0$.

(c) Olgu $B \in \mathcal{R}_0, A \subset B$, siis $\delta(B) = 0$ ja tänu omadusele 1.24 saame, et $\delta(A) = 0$ ehk $A \in \mathcal{R}_0$.

Me veendusime, et $\mathcal{R}_0$ on ideaal. Kuna $\delta(\mathbb{N}) = 1$, siis $\mathbb{N} \notin \mathcal{R}_0$, järelikult ideaal $\mathcal{R}_0$ on mittetriviaalne. Lõpuks, $\{n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{R}_0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, seega $\mathcal{R}_0$ on lubatav ideaal. ■

Omadus 1.29. *Olgu $A \in \mathcal{R}$ ja $B \in \mathcal{R}$ ning $\delta(A) = \delta(B) = 1$, siis $\delta(A \cap B) = 1$.*

Tõestus. Kuna $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{R}_0$ ja $\mathbb{N} \setminus B \in \mathcal{R}_0$ ning $\mathcal{R}_0$ on ideaal, siis tänu seosele

$$\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{N} \setminus A) \cup (\mathbb{N} \setminus B)$$

saame, et $\mathbb{N} \setminus (A \cap B) \in \mathcal{R}_0$, s.t $\delta(A \cap B) = 1$. ■

Omadus 1.30. *Olgu $A := \{\, k \in \mathbb{N} \mid k = i^2 \ (i \in \mathbb{N}) \,\}$, siis $\delta(A) = 0$.*

Tõestus. Paneme tähele, et $|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}| \leq \sqrt{n}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, seega

$$0 \leq \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tänu keskmise muutuja omadusele (lause 1.3) saame, et

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} = 0.$$

■

1.3 Jadade statistiline koonduvus

Statistilise koonduvuse mõiste defineeris H. Fast artiklis [3], statistiliselt koonduvate jadade põhjalik uurimine algab J. A. Fridy ja T. Šaláti artiklitest [4] ja [9]. Nendest artiklitest on pärit ka selle alapeatüki põhitulemus teoreem 1.33.

Definitsioon 1.31. Öeldakse, et arvjada (x_k) *koondub statistiliselt arvuks* a, kui iga $\varepsilon > 0$ korral $\delta(A(\varepsilon)) = 0$, kus

$$A(\varepsilon) := \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\}.$$

Sel juhul kirjutame st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Arvu a nimetame jada (x_k) *statistiliseks piirväärtuseks.*

Definitsiooni kohaselt st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ parajasti siis, kui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} = 0.$$

Lause 1.32. *Kui* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, *siis* st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.

Tõestus. Eeldame, et $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, olgu $\varepsilon > 0$. Leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $|x_k - a| < \varepsilon$ kõikide $k \geq N$ korral. Kuna omaduse 1.22 põhjal

$$\delta([1, N-1]_{\mathbb{N}}) = 0$$

ja

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \subset [1, N-1]_{\mathbb{N}},$$

siis omaduse 1.24 põhjal $\delta(A(\varepsilon)) = 0$ ehk st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. ■

Järgmine näide ütleb, et eelneva lause korral vastupidine väide ei kehti: leidub statistiliselt koonduvaid jadasid, mis ei ole tõkestatud, seega nad ei ole koonduvad.

Näide 2. Olgu $A := \{\, i^2 \mid i \in \mathbb{N} \,\}$. Jada (x_k), kus

$$x_k := \begin{cases} k, & \text{kui } k \in A, \\ 0, & \text{kui } k \in \mathbb{N} \setminus A, \end{cases}$$

ei ole tõkestatud, seega ei ole ta koonduv. Näitame, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Omaduse 1.30 kohaselt $\delta(A) = 0$, paneme tähele, et

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| \geq \varepsilon \,\} \subset \{\, k \in \mathbb{N} \mid x_k \neq 0 \,\} = A.$$

Omaduse 1.24 põhjal $\delta(A(\varepsilon)) = 0$, järelikult st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Tõestame teoreemi jadade statistiliseks koondumiseks tarvilikust ja piisavast tingimusest.

Teoreem 1.33. st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *parajasti siis, kui leidub selline hulk*

$$A := \{k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots\},$$

et $\delta(A) = 1$ *ja* $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = a$.

Me kasutame edaspidi tihtipeale jada (x_k) osajada (x_{k_i}) koonduvuse $x_{k_i} \to a$ märkimiseks ka kirjutusviisi

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in A}} x_k = a,$$

kui $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots\}$.

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, defineerime iga $j \in \mathbb{N}$ korral hulga

$$E_j := \left\{\, k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |x_k - a| < \frac{1}{j} \,\right\},$$

seega $\mathbb{N} \setminus E_j = A\left(\dfrac{1}{j}\right)$. Eelduse kohaselt $\delta(\mathbb{N} \setminus E_j) = 0$ iga $j \in \mathbb{N}$ korral. Omaduse 1.25 põhjal $\delta(E_j) = 1$, seega sisaldab E_j lõpmata palju elemente. On ilmne, et

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_j \supset \ldots$$

Fikseerime suvaliselt $r_1 \in E_1$. Kuna $\delta(E_2) = 1$ ehk

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|E_2 \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} = 1,$$

siis leidub $r_2 \in E_2$ nii, et $r_2 > r_1$ ja

$$\frac{|E_2 \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} > \frac{1}{2} \text{ kõikide } n \geq r_2 \text{ korral.}$$

Leiame $r_3 \in E_3$ nii, et $r_3 > r_2$ ja

$$\frac{|E_3 \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} > \frac{2}{3} \text{ kõikide } n \geq r_3 \text{ korral.}$$

Samamoodi jätkates saame kasvava jada $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_j < \ldots$, kus $r_j \in E_j$ iga $j \in \mathbb{N}$ korral ja

$$\frac{|E_j \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} > \frac{j-1}{j} \text{ kõikide } n \geq r_j \text{ korral.}$$

Moodustame hulga

$$A := [1, r_1) \cup \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \cap [r_j, r_{j+1})).$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub selline $j \in \mathbb{N}$, et $r_j \leq n < r_{j+1}$, sel juhul

$$|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}| \geq |E_j \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|$$

mistõttu

$$1 \geq \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \geq \frac{|E_j \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} > \frac{j-1}{j}.$$

Kui $n \to \infty$, siis $r_j \to \infty$, seejuures

$$1 \geq \delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|E_j \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} \geq \lim_{j\to\infty} \frac{j-1}{j} = 1,$$

s.t $\delta(A) = 1$.

Nüüd näitame, et $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in A}} x_n = a$. Olgu $\varepsilon > 0$, leiame sellise $j \in \mathbb{N}$, et $j > \frac{1}{\varepsilon}$. Kui $n \in A$ ja $n \geq r_j$, siis leidub $l \in \mathbb{N}$ nii, et $l \geq j$ ja $r_l \leq n < r_{l+1}$, seega $n \in E_l$. See tähendab, et $|x_n - a| < \frac{1}{l}$, järelikult

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ kui } n \geq r_j \text{ ja } n \in A$$

ehk $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in A}} x_n = a$.

Piisavus. Eeldame, et jada (x_k) osajada (x_{k_i}) puhul on täidetud tingimused $\delta(A) = 1$ ja $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = a$, kus $A = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$. Olgu $\varepsilon > 0$. Leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $|x_{k_i} - a| < \varepsilon$ kõikide $i \geq N$ korral. Kuna $\{k_1, \ldots, k_{N-1}\} \subset A \cap \mathcal{F}(\mathbb{N})$, siis omaduse 1.27 põhjal

$$\delta(\{k_N, k_{N+1}, \ldots\}) = \delta(A \setminus \{k_1, \ldots, k_{N-1}\}) = \delta(A) = 1,$$

mistõttu

$$\delta(\mathbb{N} \setminus \{k_N, k_{N+1}, \ldots\}) = 1 - \delta(\{k_N, k_{N+1}, \ldots\}) = 0.$$

Märkame, et

$$A(\varepsilon) := \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \subset \mathbb{N} \setminus \{k_N, k_{N+1}, \ldots\,\},$$

seega omaduse 1.24 põhjal $\delta(A(\varepsilon)) = 0$ ehk st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. ■

Definitsioon 1.34. Arvjada (x_k) osajada $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ nimetatakse *tihedaks*, kui

$$\delta(\{\, k_i \mid i \in \mathbb{N} \,\}) = 1.$$

Järeldus 1.35. st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *parajasti siis, kui jadal* (x_k) *on selline tihe osajada, mis koondub arvuks* a.

Järeldus 1.36. *Kui* $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = \infty$, *siis* (x_k) *ei ole statistiliselt koonduv.*

Järeldus 1.37. st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *parajasti siis, kui iga* $\varepsilon > 0$ *puhul leidub selline hulk* $A \subset \mathbb{N}$, *et* $\delta(A) = 1$ *ja*

$$|x_k - a| < \varepsilon \textit{ kõikide } k \in A \textit{ korral.}$$

Selle alapunkti lõpus esitame ilma tõestuseta J. A. Fridy poolt tõestatud Cauchy kriteeriumi statistilise koonduvuse jaoks (vt. [4], Theorem 1).

Definitsioon 1.38. Arvjada (x_k) nimetatakse *statistiliselt Cauchy jadaks*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, et

$$\delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - x_N| \geq \varepsilon \,\}) = 0,$$

s.t

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - x_N| \geq \varepsilon \,\} \cap [1, n]_{\mathbb{N}}|}{n} = 0.$$

Teoreem 1.39 (Cauchy kriteerium). *Arvjada* (x_k) *on statistiliselt koonduv parajasti siis, kui ta on statistiliselt Cauchy jada.*

1.4 Statistiliselt koonduvate jadade omadused

Järgnevatest statistiliselt koonduvate jadade omadustest on esimesed kaks esitatud I. J. Schoenbergi ja T. Šaláti töödes [8] ja [9], ülejäänud E. Kaya, M. Kucukaslani ja R. Wagneri artiklis [5]. Alapeatüki lõpus esitatud lause 1.51 on tõestatud T. Šaláti artiklis [9].

Omadus 1.40. *Statistiliselt koonduva jada statistiline piirväärtus on üheselt määratud: kui* st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *ning* st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, *siis* $a = b$.

Tõestus. Eeldame, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ja st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, siis teoreemi 1.33 kohaselt leiduvad hulgad $A := \{k_1 < k_2 < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(A) = 1 \text{ ja } \lim_{i\to\infty} x_{k_i} = a, \tag{2}$$

ning $B := \{l_1 < l_2 < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(B) = 1 \text{ ja } \lim_{j\to\infty} x_{l_j} = b. \tag{3}$$

Vaatleme hulka

$$A \cap B = \{m_1 < m_2 < \ldots\},$$

kus (x_{m_n}) on nii jada (x_{k_i}) kui ka jada (x_{l_j}) osajada. Omaduse 1.29 põhjal ja tänu seostele ((2) ja (3) kehtivad võrdused $\delta(A \cap B) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} = a$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} = b$, järelikult piirväärtuse ühesuse (lause 1.2) tõttu $a = b$. ■

Lause 1.41. *Kui* st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ *ja* st-$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$, *siis*

1) st-$\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$,

2) st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = ab$,

3) st-$\lim\limits_{k\to\infty} \lambda x_k = \lambda a$ *iga* $\lambda \in \mathbb{R}$ *korral,*

4) st-$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} = \dfrac{a}{b}$, *kui* $b \neq 0$.

Tõestus. Eeldame, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ja st-$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$. Teoreemi 1.33 kohaselt leiduvad hulgad $A := \{k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(A) = 1 \text{ ja } \lim_{i\to\infty} x_{k_i} = a, \tag{4}$$

ning $B := \{k_1 < k_2 < \ldots < k_j < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(B) = 1 \text{ ja } \lim_{j\to\infty} y_{k_j} = b. \tag{5}$$

Vaatleme hulka

$$A \cap B = \{m_1 < m_2 < \ldots\},$$

omaduse 1.29 põhjal ja tänu seostele (4) ja (5) kehtivad võrdused $\delta(A \cap B) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} = a$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_{m_n} = b$. Kasutame piirväärtuse tehetega seotud omadusi (lause 1.5) ja teoreemi 1.33.

1) Jada $(x_{m_n} + y_{m_n})$ on jada $(x_k + y_k)$ tihe osajada, kusjuures

$$\lim_{n\to\infty} (x_{m_n} + y_{m_n}) = \lim_{n\to\infty} x_{m_n} + \lim_{n\to\infty} y_{m_n} = a + b,$$

siis st- $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$.

2) Jada $(x_{m_n} y_{m_n})$ on jada $(x_k y_k)$ tihe osajada, kusjuures

$$\lim_{n\to\infty} (x_{m_n} y_{m_n}) = \lim_{n\to\infty} x_{m_n} \cdot \lim_{n\to\infty} y_{m_n} = ab,$$

siis st- $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k y_k) = ab$.

3) Olgu $\lambda \in \mathbb{R}$, siis

$$\lim_{i\to\infty} \lambda x_{k_i} = \lambda a$$

ja järelikult st- $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda x_k = \lambda a$.

4) Kuna $b \neq 0$, siis leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $y_{m_n} \neq 0$ iga $n \geq N$ korral. Jada $\left(\dfrac{x_{m_n}}{y_{m_n}}\right)$ on jada $\left(\dfrac{x_k}{y_k}\right)$ tihe osajada, kusjuures

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{m_n}}{y_{m_n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n}}{\lim\limits_{n\to\infty} y_{m_n}} = \frac{a}{b},$$

siis st- $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k}{y_k} = \dfrac{a}{b}$.

■

Tähistame c, c_{st}, ℓ^∞ vastavalt kõigi koonduvate, kõigi statistiliselt koonduvate ja kõigi tõkestatud arvjadade hulga, s.t

$$\begin{aligned}
c &:= \{\, x = (x_k) \mid \exists a \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} x_k = a \,\},\\
c_{st} &:= \{\, x = (x_k) \mid \exists a \in \mathbb{R} : \text{st-}\lim_{k\to\infty} x_k = a \,\},\\
\ell^\infty &:= \{\, x = (x_k) \mid \|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty \,\}.
\end{aligned}$$

Teatavasti $c \subset \ell^\infty$, lause 1.32 ja näite 2 põhjal

$$c \subset c_{st} \text{ ja } c_{st} \not\subset \ell^\infty.$$

Seejuures lause 1.41 põhjal on c_{st} jadaruum, s.t kõigi jadade vektorruumi

$$\omega := \{\, x = (x_k) \mid x_k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N}) \,\}$$

vektoralamruum, milles funktsionaal

$$\text{st-}\lim : c_{st} \to \mathbb{R}, \quad \text{st-}\lim(x) := \text{st-}\lim_{k\to\infty} x_k$$

on lineaarne.

Definitsioon 1.42. Ütleme, et jada (x_k) on *statistiliselt tõkestatud*, kui leidub selline $M > 0$, et

$$\delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| > M \,\}) = 0.$$

Lause 1.43. *Jada on statistiliselt tõkestatud parajasti siis, kui tal on tõkestatud tihe osajada.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu jada (x_k) statistiliselt tõkestatud, s.t

$$\exists M > 0 : \quad \delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| > M \,\}) = 0.$$

Tähistame

$$\mathbb{N} \setminus \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| > M \,\} =: A = \{k_1 < k_2 < \ldots\},$$

siis omaduse 1.25 kohaselt $\delta(A) = 1$. Saame tiheda osajada (x_{k_i}), kusjuures kehtib võrratus $|x_{k_i}| \le M$ $(i \in \mathbb{N})$, s.t (x_{k_i}) on tõkestatud.

Piisavus. Olgu jadal (x_k) tihe tõkestatud osajada (x_{k_i}), siis leidub $M > 0$, et $|x_{k_i}| \le M$ $(i \in \mathbb{N})$, ja $\delta(A) = 1$, kus $A = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$. Kuna

$$\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| > M \,\} \subset \mathbb{N} \setminus A,$$

siis omaduse 1.24 kohaselt $\delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| > M \,\}) = 0$ ja järelikult (x_k) on statistiliselt tõkestatud jada. ∎

Lausest 1.43 tuleneb, et

(a) iga tõkestatud jada on statistiliselt tõkestatud ja

(b) iga statistiliselt koonduv jada on statistiliselt tõkestatud.

Lause 1.44. *Kui* st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ *ja* (y_k) *on statistiliselt tõkestatud jada, siis* st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = 0$.

Tõestus. Olgu (x_k) selline jada, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, ja olgu (y_k) statistiliselt tõkestatud jada. Teoreemi 1.33 kohaselt leidub hulk $A = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(A) = 1 \text{ ja } \lim_{i\to\infty} x_{k_i} = 0,$$

ja lause 1.43 põhjal leidub hulk $B = \{l_1 < l_2 < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(B) = 1 \text{ ja } (y_{l_j}) \text{ on tõkestatud.}$$

Omaduse 1.29 tõttu $\delta(A \cap B) = 1$ ja kui $A \cap B = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} = 0$ ning (y_{m_n}) on tõkestatud. Seega lause 1.7 kohaselt $\lim\limits_{n\to\infty} x_{m_n} y_{m_n} = 0$ ja järelikult teoreemi 1.33 põhjal st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = 0$. ∎

Teoreem 1.45 (Bolzano-Weierstrassi teoreem). *Iga statistiliselt tõkestatud jada sisaldab (statistiliselt) koonduva osajada.*

Tõestus. Olgu (x_k) statistiliselt tõkestatud jada, siis lause 1.43 põhjal on tal tihe tõkestatud osajada (x_{k_i}). Bolzano-Weierstrassi teoreemi 1.8 põhjal leidub koonduv osajada $(x_{k_{i_r}})$, mis lause 1.32 kohaselt on ka statistiliselt koonduv. Et jada $(x_{k_{i_r}})$ on ühtlasi jada (x_k) osajada, siis oleme tõestanud, et jada (x_k) sisaldab statistiliselt koonduva osajada. ∎

Definitsioon 1.46. Öeldakse, et jada (x_k) on *statistiliselt monotoonne*, kui tal leidub tihe monotoonne osajada.

Teoreem 1.47 (monotoonsuseprintsiip). *Statistiliselt monotoonne jada on statistiliselt koonduv parajasti siis, kui ta on statistiliselt tõkestatud.*

Tõestus. Tarvilikkus on ilmne.

Piisavus. Olgu jada (x_k) statistiliselt monotoonne ja statistiliselt tõkestatud, siis leidub hulk $A = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(A) = 1 \text{ ja } (x_{k_i}) \text{ on monotoonne,}$$

ja lause 1.43 põhjal leidub hulk $B = \{l_1 < l_2 < \ldots\}$ nii, et

$$\delta(B) = 1 \text{ ja } (x_{l_j}) \text{ on tõkestatud.}$$

Omaduse 1.29 kohaselt $\delta(A \cap B) = 1$ ja kui $A \cap B = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$, siis osajada (x_{m_n}) on monotoonne ja tõkestatud. Seega monotoonsuseprintsiibi 1.10 kohaselt on jada (x_{m_n}) koonduv, järelikult lause 1.32 põhjal jada (x_k) on statistiliselt koonduv. ■

Definitsioon 1.48. Ütleme, et indeks m on jada (x_k) *tippkoht*, kui $x_m \geq x_k$ iga $k \geq m$ korral.

Lause 1.49. *Kui jada (x_k) kõigi tippkohtade hulk on asümptootilise tihedusega 1, siis (x_k) on statistiliselt kahanev.*

Tõestus. Tähistame jada (x_k) tippkohtade hulka järgmiselt:

$$T := \{\, k_i \mid \forall k \geq k_i : \; x_{k_i} \geq x_k \,\},$$

eelduse kohaselt $\delta(T) = 1$. Et jada (x_k) on kahanev ja (x_{k_i}) on jada (x_k) osajada, siis definitsiooni kohaselt on (x_k) statistiliselt kahanev. ■

Vastupidine väide, nagu näitab järgnev näide, üldjuhul ei kehti.

Näide 3. Kui

$$x_k := \begin{cases} \dfrac{m}{m+1}, & \text{kui } k = m^2, \\ \dfrac{1}{k}, & \text{kui } k \neq m^2, \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}),$$

siis tõkestatud jada $(x_k) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{10}, \ldots)$ on statistiliselt kahanev, kuid ei oma tippkohti.

Kuna omaduse 1.30 põhjal $\delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid k = m^2 \; (m \in \mathbb{N}) \,\}) = 0$, siis osajada (x_{k_i}), kus $x_{k_i} = \dfrac{1}{k_i}$ $(k_i \neq m^2)$, on tihe ja kahanev. Seega (x_k) on statistiliselt kahanev jada, seejuures ei ole ükski indeks k jada tippkohaks. Tõepoolest, kui $k = m^2$ mingi $m \in \mathbb{N}$ korral, siis

$$x_k = \frac{m}{m+1} < \frac{m+1}{m+2} = x_{(m+1)^2},$$

ja kui $k \neq m^2$ mingi $m \in \mathbb{N}$, siis leidub selline $m_0 \in \mathbb{N}$, et ${m_0}^2 < k < (m_0+1)^2$ ning

$$x_k = \frac{1}{k} < \frac{m_0+1}{m_0+2} = x_{(m_0+1)^2}.$$

Järeldus 1.50. *Kui (statistiliselt) tõkestatud jada tippkohad määravad tiheda osajada (x_{k_i}), siis (x_k) on statistiliselt koonduv.*

Me lõpetame käesoleva alapeatüki lausega, mille kohaselt kõigi tõkestatud statistiliselt koonduvate jadade ruum $c_{st} \cap \ell^\infty$ on Banachi ruum normiga $\| \ \|_\infty$.

Lause 1.51. *Kõigi tõkestatud statistiliselt koonduvate jadade ruum $c_{st} \cap \ell^\infty$ on kinnine alamruum Banachi ruumis $(\ell^\infty, \| \ \|_\infty)$.*

Tõestus. Olgu $(x^{(n)})$ ruumi $c_{st} \cap \ell^\infty$ punktide selline jada, mis ruumis ℓ^∞ koondub mingiks punktiks $x \in \ell^\infty$, teisisõnu

$$x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \in c_{st} \cap \ell^\infty \ (n \in \mathbb{N}), \quad x = (x_k) \in \ell^\infty \text{ ja } \lim_{n \to \infty} \|x^{(n)} - x\|_\infty = 0.$$

Meie eesmärgiks on näidata, et $x \in c_{st}$.

Tähistame

$$a_n := \text{st-}\lim_{k \to \infty} x_k^{(n)} \ (n \in \mathbb{N}),$$

saame arvjada (a_n). Näitame, et

1) $(a_n) \in c$, s.t eksisteerib $\lim\limits_{n \to \infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$ ja

2) st-$\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$.

Tõestame väite 1). Fikseerime suvaliselt $\varepsilon > 0$, kuna eelduse kohaselt jada $(x^{(n)})$ on koonduv Banachi ruumis ℓ^∞, siis see on Cauchy jada, s.t

$$\exists N \in \mathbb{N} : \ m, n \geq N \ \Rightarrow \ \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fikseerime indeksid m ja n nii, et $m, n \geq N$, jadade $\left(x_k^{(m)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ja $\left(x_k^{(n)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ statistilise koonduvuse tõttu tuleneb teoreemist 1.33, et leiduvad hulgad $A_m \subset \mathbb{N}$ nii, et

$$\delta(A_m) = 1 \text{ ja } \lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in A_m}} x_k^{(m)} = a_m,$$

ja $A_n \subset \mathbb{N}$ nii, et

$$\delta(A_n) = 1 \text{ ja } \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in A_n}} x_k^{(n)} = a_n,$$

omaduse 1.29 kohaselt $\delta(A_m \cap A_n) = 1$. Valime $j \in A_m \cap A_n$ nii, et

$$|x_j^{(m)} - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ja } |x_j^{(n)} - a_n| < \frac{\varepsilon}{3},$$

siis

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - x_j^{(n)} + x_j^{(n)} - x_j^{(m)} + x_j^{(m)} - a_m| \\ &\le |a_n - x_j^{(n)}| + |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| + |x_j^{(m)} - a_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|x_j^{(m)} - x_j^{(n)}\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

kehtib kõikide $m, n \ge N$ korral, s.t (a_n) on Cauchy arvjada ja järelikult on ta mingiks arvuks a koonduv jada.

Tõestame väite 2). Fikseerime $\varepsilon > 0$, eelduse kohaselt $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\|_\infty = 0$, s.t

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \; n \ge N_1 \;\Rightarrow\; \|x^{(n)} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kuna $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, siis

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \; n \ge N_2 \;\Rightarrow\; |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Olgu $p \in \mathbb{N}$ nii, et $p := \max\{N_1, N_2\}$, siis $\|x^{(p)} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ ja $|a_p - a| < \frac{\varepsilon}{3}$. Et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k^{(p)} = a_p$, siis leidub tihe osajada $\left(x_{k_i}^{(p)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, mis koondub arvuks a_p, ja kui $A = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$, siis $\delta(A) = 1$. Seega

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \; i \ge N_0 \;\Rightarrow\; |x_{k_i}^{(p)} - a_p| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vaatleme jada $x = (x_k)$ osajada (x_{k_i}): kõikide $i \ge N_0$ korral

$$\begin{aligned} |x_{k_i} - a| &= |x_{k_i} - x_{k_i}^{(p)} + x_{k_i}^{(p)} - a_p + a_p - a| \\ &\le |x_{k_i} - x_{k_i}^{(p)}| + |x_{k_i}^{(p)} - a_p| + |a_p - a| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

s.t $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = a$. Samal ajal osajada (x_{k_i}) on tihe, järelikult st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. ■

2 Statistilise koonduvusega seotud probleemiasetusi ja üldistusi

2.1 Statistiline koonduvus ja C-summeeruvus

Analüüsi põhikursusest on meile tuntud järgmine Cauchy piirväärtusteoreem.

Teoreem 2.1. *Kui* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, *kus* $a \in \mathbb{R}$, *siis* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$.

Samas näidatakse ka, et Cauchy piirväärtusteoreem ei ole pööratav: leidub jadasid, mille liikmete aritmeetilised keskmised koonduvad, kuid jada ise hajub.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et jada $x = (x_k)$ on *C-summeeruv* (ehk *Cesàro-summeeruv*) arvuks a, kui $C\text{-}\lim x := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$. Tähistame kõigi C-summeeruvate jadade hulka c_C, s.t

$$c_C := \left\{ x = (x_k) \;\middle|\; \text{eksisteerib lõplik } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \right\}.$$

Teoreem 2.1 väidab, et $c \subset c_C$ ning seejuures $C\text{-}\lim x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ iga $x \in c$ korral. See asjaolu on lähtekohaks üldiste koonduvuseeskirjade defineerimisele ja nende uurimisele.

Olgu G mingi lineaarne jadade koonduvuseeskiri: teatavatele jadadele $x = (x_k)$ seatakse vastavusse arv $G(x) = G\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k$, kusjuures $G(\lambda x + \mu y) = \lambda G(x) + \mu G(y)$ suvaliste $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja $x, y \in c_G$ puhul, kus

$$c_G := \{\, x = (x_k) \mid \text{eksisteerib } G(x) \,\}.$$

Sellise koonduvuseeskirja näideteks on

1) tavaline koonduvus, kus $G(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ iga $x = (x_k) \in c$ korral,

2) C-summeeruvus, kus $G(x) = C\text{-}\lim x$ iga $x = (x_k) \in c_C$ korral,

3) statistiline koonduvus, kus $G(x) = \text{st-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k$ iga $x = (x_k) \in c_{st}$ korral.

Erinevate koonduvuseeskirjade uurimisel on põhiprobleemiks nende omavaheline võrdlemine, aga eriti võrdlus tavalise koonduvusega.

Definitsioon 2.3. Koonduvuseeskirja G nimetatakse *regulaarseks*, kui $c \subset c_G$ ja $G(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ iga $x = (x_k) \in c$ korral.

Paneme tähele, et kõik eelpool nimetatud kolm koonduvuseeskirja on regulaarsed: tavalise koonduvuse puhul on see selge, C-summeeruvuse regulaarsus tuleneb Cauchy piirväärtusteoreemist 2.1 ning statistilise koonduvuse regulaarsus lausest 1.32.

Meie eesmärgiks selles alapeatükis on uurida C-summeeruvuse ja statistilise koonduvuse vahekorda. Allpool näeme, et need kaks koonduvuseeskirja ei ole täies ulatuses võrreldavad, kuid on võrreldavad tõkestatud jadade osas. Tõestus pärineb I. J. Schoenbergi artiklist [8].

Lause 2.4. *Kui* $x = (x_k) \in \ell^\infty$ *ning* $\text{st-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, *siis* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$.

Tõestus. Kuna $x \in \ell^\infty \cap c_{st}$ ja $\text{st-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, siis $(x_k - a)_{k\in\mathbb{N}}$ on tõkestatud jada, seega leidub selline $M > 0$, et

$$|x_k - a| \leq M \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$ nii, et $\varepsilon < 2M$, ja tähistame

$$V_n := \left| \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |x_k - a| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \cap [1, n]_{\mathbb{N}} \right|,$$

siis eelduse $x \in c_{st}$ kohaselt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{V_n}{n} = 0$. Saame

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - a \right| &= \frac{1}{n}\left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - a) \right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k - a| \leq \frac{1}{n}\left(MV_n + (n - V_n)\frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \left(M - \frac{\varepsilon}{2} \right)\frac{V_n}{n} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

seejuures

$$\left(M - \frac{\varepsilon}{2} \right)\frac{V_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

seega leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $0 \leq \left(M - \frac{\varepsilon}{2} \right)\frac{V_n}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ iga $n \geq N$ korral. Järelikult

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kui $n \geq N$, ehk $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$. ■

Järgmine näide kinnitab, et lause 2.4 väide ei ole pööratav, s.t $\ell^\infty \cap c_{st} \subsetneqq \ell^\infty \cap c_C$.

Näide 4. Olgu $x = \big((-1)^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0, & \text{kui } n = 2i, \\ -\dfrac{1}{n}, & \text{kui } n = 2i-1, \end{cases} = 0,$$

seega $x \in \ell^\infty \cap c_C$. Näitame, et jada x ei ole statistiliselt koonduv.

Olgu (x_{k_i}) jada x suvaline koonduv osajada. Siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $i \geq N$, siis $x_{k_i} = \text{const}$, s.t kas $x_{k_i} = 1$ või $x_{k_i} = -1$. Kumbki maksimaalne konstantne osajada $(x_{2i}) = (1, 1, \dots)$ ja $(x_{2i-1}) = (-1, -1, \dots)$ ei ole tihe:

$$\delta(\{\, 2i \mid i \in \mathbb{N}\,\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{|\{\, k \in \mathbb{N} \mid k = 2i \ (i \in \mathbb{N})\,\} \cap [1,n]_{\mathbb{N}}|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$$

ja

$$\delta(\{\, 2i-1 \mid i \in \mathbb{N}\,\}) = \delta(\mathbb{N} \setminus \{\, 2i \mid i \in \mathbb{N}\,\}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Järelikult iga koonduva osajada (x_{k_i}) korral saame leida $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\delta(\{\, k_i \mid i \geq N\,\}) \leq \frac{1}{2}$$

ja

$$\delta(\{\, k_i \mid i < N\,\}) = 0.$$

Seega $\delta(\{\, k_i \mid i \in \mathbb{N}\,\}) \leq \dfrac{1}{2}$, mistõttu jada x ei ole statistiliselt koonduv.

Järgmise näite kohaselt ei kehti lause 2.4 väide üldjuhul väljaspool tõkestatud jadade ruumi ℓ^∞: üldiselt $c_{st} \not\subset c_C$.

Näide 5. Olgu

$$x_k := \begin{cases} n^3, & \text{kui } k = n^2, \\ 1, & \text{kui } k \neq n^2, \end{cases}$$

näitame, et jada (x_k) on statistiliselt koonduv, kuid ei ole C-summeeruv.

Paneme tähele, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 1$, sest $\delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid x_k = n^3 \ (n \in \mathbb{N})\,\}) = 0$ (vt. omadust 1.30) ja seega $\delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid x_k = 1\,\}) = 1$.

Nüüd vaatleme jada $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ osajada $\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$, tegemist on tõkestamata jadaga, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2} x_k = \frac{1}{n^2}(1+1+1+2^3+1+1+1+1+3^3+\cdots+n^3) > \frac{n^3}{n^2} = n.$$

Et jada $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sisaldab tõkestamata osajada, siis on see jada tõkestamata ja järelikult pole jada (x_k) C-summeeruv.

2.2 Funktsioonide pidevus C-summeeruvuse ja statistilise koonduvuse suhtes

Teatavasti on funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev kohal $a \in \mathbb{R}$ parajasti siis, kui kehtib implikatsioon

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a).$$

Tähistame tähega $\mathcal{C}$ kõigi pidevate funktsioonide $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hulga ja tähega $\mathcal{L}$ kõigi lineaarsete funktsioonide hulka, s.t

$$\mathcal{L} = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists A, B \in \mathbb{R} :\; f(x) = Ax + B \,\}.$$

Selge, et $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$: iga lineaarne funktsioon on pidev.

Mingi fikseeritud lineaarse koonduvuseeskirja G korral püstitame järgmise probleemi. Milliste funktsioonide $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korral kehtib implikatsioon

$$G\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = a \;\Rightarrow\; G\text{-}\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)?$$

Sellise omadusega funktsiooni nimetame edaspidi *G-pidevaks*.

Me lahendame järgnevalt selle probleemi kahe eelpool nimetatud erijuhu korral, kui $G = C\text{-}\lim$ ja $G = \text{st-}\lim$, s.t juhtudel

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \text{ ja } G(x) = \text{st-}\lim_{k\to\infty} x_k.$$

Näeme, et nad esindavad selles kontekstis võimalikke äärmusi.

Järgmise lause tõestusidee pärineb R. C. Bucki artiklist [1].

Lause 2.5. *Funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on C-pidev parajasti siis, kui ta on lineaarne, s.t implikatsioon*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = a \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = f(a) \tag{6}$$

kehtib parajasti siis, kui $f \in \mathcal{L}$.

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et funktsioon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on C-pidev, s.t kehtib implikatsioon (6).

1. Vaatleme juhtu $a = f(a) = 0$, siis kehtib implikatsioon

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = 0. \tag{7}$$

Olgu meil jada $x = (x_k) = (u, v, w, u, v, w, u, v, w, \dots)$ ehk

$$x_k := \begin{cases} u, & \text{kui } k = 3i-2, \\ v, & \text{kui } k = 3i-1, \\ w, & \text{kui } k = 3i, \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

ja olgu $u, v, w \in \mathbb{R}$ valitud nii, et $u + v + w = 0$, siis

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \begin{cases} \frac{i}{n}(u+v+w), & \text{kui } n = 3i, \\ \frac{i}{n}(u+v+w) + \frac{u}{n}, & \text{kui } n = 3i+1, \\ \frac{i}{n}(u+v+w) + \frac{u}{n} + \frac{v}{n}, & \text{kui } n = 3i+2, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{kui } n = 3i, \\ \frac{u}{n}, & \text{kui } n = 3i+1, \\ \frac{u}{n} + \frac{v}{n}, & \text{kui } n = 3i+2, \end{cases}$$

ja järelikult $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$. Implikatsioonist (7) saame

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{i}{n}(f(u)+f(v)+f(w)), & \text{kui } n = 3i, \\ \frac{i}{n}(f(u)+f(v)+f(w)) + \frac{f(u)}{n}, & \text{kui } n = 3i+1, \\ \frac{i}{n}(f(u)+f(v)+f(w)) + \frac{f(u)}{n} + \frac{f(v)}{n}, & \text{kui } n = 3i+2, \end{cases} \\ &= \frac{1}{3}(f(u)+f(v)+f(w)) + \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0, & \text{kui } n = 3i, \\ \frac{f(u)}{n}, & \text{kui } n = 3i+1, \\ \frac{f(u)}{n} + \frac{f(v)}{n}, & \text{kui } n = 3i+2, \end{cases} \\ &= \frac{1}{3}(f(u)+f(v)+f(w)), \end{aligned}$$

seega $f(u) + f(v) + f(w) = 0$ ehk $f(u) + f(v) = -f(w) = -f(-u - v)$ suvaliste $u, v \in \mathbb{R}$ korral. Paneme tähele, et
1) kui $v = 0$, siis $f(u) = -f(-u)$ iga $u \in \mathbb{R}$ korral ehk f on paaritu funktsioon,
2) kui suvaliste $x, y \in \mathbb{R}$ korral $u = x + y$, siis

$$f(x + y) = -f(-x - y) = f(x) + f(y)$$

ehk f on aditiivne funktsioon.

Vastavalt tähelepanekule 2) $f(nx) = nf(x)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, samuti

$$f((-n)x) = f(-(nx)) = -f(nx) = -(nf(x)) = (-n)f(x),$$

järelikult

$$f(nx) = nf(x) \text{ iga } n \in \mathbb{Z} \text{ korral.}$$

Näitame, et funktsioon f on pidev punktis 0. Olgu $s_k \to 0$, peame veenduma, et $f(s_k) \to 0 = f(0)$. Selleks võtame jada (x_k), kus $x_k := ks_k - (k-1)s_{k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$, paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \frac{1}{n}(s_1 + 2s_2 - s_1 + 3s_3 - 2s_2 + \cdots + ns_n - (n-1)s_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} ns_n = s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

implikatsiooni (7) põhjal $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = 0$. Seejuures, kuna $\sum_{k=1}^{n} x_k = ns_n$ ja f on aditiivne, siis

$$nf(s_n) = f(ns_n) = f(\sum_{k=1}^{n} x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

mistõttu $f(s_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, saame et f on pidev punktis 0.

Nüüd näitame, et f on pidev igas punktis $a \in \mathbb{R}$. Kui $x_k \to a$, siis $x_k - a \to 0$ ja seega $f(x_k - a) \to f(0) = 0$, s.t $f(x_k) - f(a) \to 0$. Järelikult $f(x_k) \to f(a)$ ehk f on pidev igas punktis $a \in \mathbb{R}$.

Veendume, et $f(x) = Ax$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Olgu $m, n \in \mathbb{Z}$ suvalised, siis

$$mf(x) = f(mx) = f(n\frac{m}{n}x) = nf(\frac{m}{n}x) \text{ ehk } \frac{m}{n}f(x) = f(\frac{m}{n}x)$$

ja seega $rf(x) = f(rx)$ iga $r \in \mathbb{Q}$ korral. Kui $x = 1$, siis

$$f(r) = f(r \cdot 1) = rf(1) = Ar, \text{ kus } A := f(1).$$

Olgu $x \in \mathbb{R}$, siis leidub jada (r_n) nii, et $r_n \in \mathbb{Q}$ ja $r_n \to x$. Kuna f on pidev kohal $x \in \mathbb{R}$, siis

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} Ar_n = Ax.$$

Me veendusime, et eeldusel (7) on funktsioon f kujul $f(x) = Ax$, kus $A = f(1)$.

2. Vaatleme üldist juhtu, kus funktsioon f rahuldab implikatsiooni (6). Olgu $g(x) := f(x) - f(0)$ $(x \in \mathbb{R})$, siis funktsioon g rahuldab implikatsiooni (7). Tõepoolest, kui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k = 0,$$

siis eelduse (6) põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = f(0),$$

mistõttu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(z_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (f(z_k) - f(0)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) - f(0) = 0.$$

Tõestuse **1.** osa põhjal $g(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R})$, järelikult

$$f(x) = g(x) + f(0) = Ax + B \ (x \in \mathbb{R}),$$

kus $B := f(0)$, millega oleme ära näidanud funktsiooni f lineaarsuse.

Piisavus. Olgu f lineaarne, s.t leiduvad $A, B \in \mathbb{R}$ nii, et $f(x) = Ax + B$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, ja kehtigu võrdus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = a$. Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (Ax_k + B) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Ax_k + \sum_{k=1}^{n} B\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Ax_k + nB\right) = A \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + B \\
&= Aa + B = f(a)
\end{aligned}$$

ja järelikult f on C-pidev. ■

Lause 2.6 piisavuse tõestusidee pärineb I. J. Schoenbergi tööst [8] ning tarvilikkuse tõestus lähtub J. Connori ja K.-G. Grosse-Erdmanni tööst [2].

Lause 2.6. *Funktsioon* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *on* st-lim-*pidev parajasti siis, kui ta on pidev, s.t implikatsioon*

$$\text{st-}\lim_{k\to\infty} x_k = a \;\Rightarrow\; \text{st-}\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a) \tag{8}$$

kehtib parajasti siis, kui $f \in \mathcal{C}$*.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et tingimus (8) on täidetud. Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole pidev, siis leidub jada (x_k), et $x_k \to a$, aga $f(x_k) \not\to f(a)$ ehk leiduvad $\delta > 0$ ja jada (x_k) osajada (x_{k_i}) nii, et

$$|f(x_{k_i}) - f(a)| \geq \delta \ (i \in \mathbb{N}),$$

s.t

$$f(x_{k_i}) \geq f(a) + \delta \tag{9}$$

või

$$f(a) - \delta \leq f(x_{k_i}). \tag{10}$$

Eeldame, et (9) kehtib kõikide $i \in \mathbb{N}$ korral, võrratuse (10) puhul on tõestus analoogiline. Vaatleme kaht erinevat juhtu.
1) Kui jada $(f(x_{k_i}))$ on tõkestatud, siis Bolzano-Weierstrassi teoreemi (lause 1.8) kohaselt on sellel koonduv osajada $(f(x_{k_{i_j}}))_{j\in\mathbb{N}}$, seega lause 1.4 järgi

$$u := \lim_{j\to\infty} f(x_{k_{i_j}}) \geq f(a) + \delta.$$

Lause 1.32 kohaselt st-$\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_{i_j}}) = u$. Samal ajal, et $(x_{k_{i_j}})$ on jada (x_k) osajada, siis $x_{k_{i_j}} \to a$ ja lause 1.32 põhjal st-$\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_{i_j}} = a$, seega st-$\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_{i_j}}) = f(a)$ ehk omaduse 1.40 põhjal $f(a) = u \geq f(a) + \delta$. Saime vastuolu $f(a) > f(a)$.
2) Kui jada $(f(x_{k_i}))$ ei ole tõkestatud, siis saame leida osajada $(f(x_{k_{i_j}}))_{j\in\mathbb{N}}$ nii, et

$$|f(x_{k_{i_j}})| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{11}$$

Kuna $x_{k_{i_j}} \to a$, siis st-$\lim\limits_{j\to\infty} x_{k_{i_j}} = a$ ja eelduse (8) järgi st-$\lim\limits_{j\to\infty} f(x_{k_{i_j}}) = f(a)$. Järelikult leidub osajada $(f(x_{k_{i_{j_r}}}))$, mis on koonduv ehk saame vastuolu tingimusega (11).

Piisavus. Eeldame, et f on pidev. Olgu (x_k) selline jada, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, meie eesmärk on näidata, et st-$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, veendume, et

$$\delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid |f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon \,\}) = 0.$$

Pidevuse tõttu leidub $\rho > 0$, et kui $|x_k - a| < \rho$, siis $|f(x_k) - f(a)| < \varepsilon$. Saame

$$|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon \;\Rightarrow\; |x_k - a| \geq \rho,$$

mistõttu

$$\{\, k \in \mathbb{N} \mid |f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon \,\} \subset \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \rho \,\}.$$

Järelikult eelduse st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ põhjal

$$0 \leq \delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid |f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon \,\}) \leq \delta(\{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \rho \,\}) = 0$$

ehk st-$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$. ■

2.3 $\mathcal{I}$-koonduvus

Statistilise koonduvuse mitmed üldistused saavad üldisema käsitluse $\mathcal{I}$-koonduvuse kontekstis. Alapeatükk põhineb P. Kostyrko, T. Šaláti ja W. Wilczyński artiklil [7] ning P. Kostyrko, T. Šaláti ja M. Mačaji käsikirjalisel artiklil [6].

Definitsioon 2.7. Olgu $\mathcal{I}$ mittetriviaalne ideaal. Öeldakse, et reaalarvude jada (x_k) on $\mathcal{I}$-koonduv arvuks a (kirjutame $\mathcal{I}$-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$), kui iga $\varepsilon > 0$ korral

$$A(\varepsilon) := \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \in \mathcal{I}.$$

Järgnevalt uurime mõningaid $\mathcal{I}$-koonduvuse omadusi.

Lause 2.8. *$\mathcal{I}$-koonduva jada piirväärtus on üheselt määratud: kui $\mathcal{I}$-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ja $\mathcal{I}$-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$, siis $a = b$.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $a \neq b$, olgu $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{|a-b|}{2}\right)$. Eelduse kohaselt

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \in \mathcal{I}$$

ja

$$B(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - b| \geq \varepsilon \,\} \in \mathcal{I}$$

ehk lause 1.20 kohaselt $\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) \in \Phi(\mathcal{I})$ ja $\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon) \in \Phi(\mathcal{I})$. Kuna $\Phi(\mathcal{I})$ on filter, siis

$$(\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) \cap (\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon)) \in \Phi(\mathcal{I}),$$

järelikult

$$(\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) \cap (\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon)) \neq \varnothing.$$

Olgu $m \in (\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) \cap (\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon))$, siis

$$|x_m - a| < \varepsilon \text{ ja } |x_m - b| < \varepsilon,$$

seega

$$|a - b| = |a - x_m + x_m - b| \leq |a - x_m| + |x_m - b| < 2\varepsilon < |a - b|.$$

Saime vastuolu, järelikult $a = b$. ■

Lause 2.9. *Kui $\mathcal{I}$ on lubatav ideaal, siis iga koonduv jada on $\mathcal{I}$-koonduv: täpsemalt kehtib implikatsioon*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \;\Rightarrow\; \mathcal{I}\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = a.$$

Tõestus. Eeldame, et $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Siis iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et $|x_k - a| < \varepsilon$ kõikide $k \geq N$ korral ja seega

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \subset [1, N-1]_{\mathbb{N}}.$$

Kuna $[1, N-1]_{\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}) \subset \mathcal{I}$, siis $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ ja järelikult $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. ■

Lause 2.10. *Kui $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ ja $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$, siis*

(a) $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} (x_k + y_k) = a + b$,

(b) $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = ab$.

Tõestus. (a) Olgu $\varepsilon > 0$, siis leiduvad hulgad

$$A(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |x_k - a| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in \mathcal{I}$$

ja

$$B(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |y_k - b| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in \mathcal{I}.$$

Näitame, et

$$C(\varepsilon) := \{ k \in \mathbb{N} \mid |(x_k + y_k) - (a + b)| \geq \varepsilon \} \subset A(\varepsilon) \cup B(\varepsilon) \in \mathcal{I}.$$

Fikseerime $k_0 \in (\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) \cap (\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon))$, siis kehtivad võrratused $|x_{k_0} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ ja $|y_{k_0} - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Saame, et

$$|(x_{k_0} + y_{k_0}) - (a + b)| = |(x_{k_0} - a) + (y_{k_0} - b)| \leq |x_{k_0} - a| + |y_{k_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

seepärast $k_0 \in \mathbb{N} \setminus C(\varepsilon)$ ja seega $\mathbb{N} \setminus (A(\varepsilon) \cup B(\varepsilon)) = (\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)) \cap (\mathbb{N} \setminus B(\varepsilon)) \subset \mathbb{N} \setminus C(\varepsilon)$. Järelikult $C(\varepsilon) \subset A(\varepsilon) \cup B(\varepsilon)$, mistõttu $C(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ ja $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} (x_k + y_k) = a + b$.

(b) **1.** Vaatleme juhtu $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Olgu $\varepsilon > 0$, eeldame, et $\varepsilon \leq 2b$. Tähistame

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &:= \{ k \in \mathbb{N} \mid |x_k y_k - ab| \geq \varepsilon \}, \\ B_1(\varepsilon) &:= \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|} \right\}, \\ B_2(\varepsilon) &:= \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |y_k - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \right\} \end{aligned}$$

ja paneme tähele, et

$$B_1(\varepsilon) \cap B_2(\varepsilon) \subset \mathbb{N} \setminus A(\varepsilon). \tag{12}$$

Tõepoolest, kui $k_0 \in B_1(\varepsilon) \cap B_2(\varepsilon)$, siis

$$|x_{k_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|} \leq 1 \text{ ja } |y_{k_0} - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)},$$

seega

$$|x_{k_0}| = |x_{k_0} - a + a| \leq |x_{k_0} - a| + |a| < 1 + |a|$$

ning

$$\begin{aligned} |x_{k_0} y_{k_0} - ab| &= |x_{k_0}(y_{k_0} - b) + b(x_{k_0} - a)| \leq |x_{k_0}||y_{k_0} - b| + |b||x_{k_0} - a| \\ &< (|a| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} + |b|\frac{\varepsilon}{2|b|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Niisiis $k_0 \in \mathbb{N} \setminus A(\varepsilon)$.

Eelduse kohaselt $B_1(\varepsilon) \in \Phi(\mathcal{I})$ ja $B_2(\varepsilon) \in \Phi(\mathcal{I})$. Kuna $\Phi(\mathcal{I})$ on filter (vt. lause 1.20), siis $B_1(\varepsilon) \cap B_2(\varepsilon) \subset \Phi(\mathcal{I})$. Tänu sisalduvusele (12) saame, et $\mathbb{N} \setminus A(\varepsilon) \in \Phi(\mathcal{I})$ ehk $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$, s.t $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = ab$.

2. Vaatleme juhtu $ab = 0$, olgu $b = 0$ ja olgu $\varepsilon > 0$. Eeldame, et $\varepsilon \leq 1$. Tähistame

$$\begin{aligned} C(\varepsilon) &:= \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k y_k| \geq \varepsilon \,\}, \\ D_1(\varepsilon) &:= \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |x_k - a| < \varepsilon \right\}, \\ D_2(\varepsilon) &:= \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; |y_k| < \frac{\varepsilon}{|a|+1} \right\} \end{aligned}$$

ja paneme tähele, et $D_1(\varepsilon) \cap D_2(\varepsilon) \subset \mathbb{N} \setminus C(\varepsilon)$. Tõepoolest, kui $k_0 \in D_1(\varepsilon) \cap D_2(\varepsilon)$, siis

$$|x_{k_0} - a| < \varepsilon \leq 1 \text{ ja } |y_{k_0}| < \frac{\varepsilon}{|a|+1},$$

seega

$$|x_{k_0} y_{k_0}| = |x_{k_0} y_{k_0} - a y_{k_0} + a y_{k_0}| \leq |y_{k_0}||x_{k_0} - a| + |a||y_{k_0}| < (|a|+1)|y_{k_0}| < \varepsilon.$$

Analoogiliselt tõestuse **1.** osaga saame, et $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k y_k = 0$. ■

Näide 6. Kui $\mathcal{I}_0 = \{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, siis $\mathcal{I}_0$ on mittetühi mittetriviaalne ideaal hulgas $\mathbb{N}$ ning $\mathcal{I}_0\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ parajasti siis, kui $x_k = a$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral.

Näide 7. Olgu $\varnothing \neq M \subsetneqq \mathbb{N}$, siis $\mathcal{I}_M := \mathcal{P}(M)$ on mittetriviaalne ideaal hulgas $\mathbb{N}$, kusjuures $\mathcal{I}_M\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ parajasti siis, kui $x_k = a$ iga $k \in \mathbb{N} \setminus M$ korral.

Näide 8. Olgu $\mathcal{I} = \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{N})$, see on lubatav ideaal hulgas $\mathbb{N}$. Seejuures

$$\mathcal{F}\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = a \iff \lim_{k\to\infty} x_k = a.$$

Näide 9. Olgu $\mathcal{I} = \mathcal{R}_0$, teatavasti on see lubatav ideaal hulgas $\mathbb{N}$. Siis

$$\mathcal{R}_0\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = a \iff \text{st-}\lim_{k\to\infty} x_k = a.$$

Viimase näite kohaselt on statistiline koonduvus $\mathcal{I}$-koonduvuse erijuht. Teatavasti (vt. teoreem 1.33) st-$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ parajasti siis, kui leidub selline $M \in \mathcal{R}_0$, et $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = a$, kus

$$\mathbb{N} \setminus M = \{k_1 < k_2 < \ldots\}.$$

See fakt on lähtekohaks järgmisele definitsioonile.

Definitsioon 2.11. Olgu $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ lubatav ideaal. Öeldakse, et $\mathcal{I}^*\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, kui leidub selline $M \in \mathcal{I}$, et $\lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} = a$, kus

$$\mathbb{N} \setminus M = \{k_1 < k_2 < \ldots\}.$$

Nagu selgub järgmisest lausest, siis $\mathcal{I}^*$-koonduv jada on $\mathcal{I}$-koonduv.

Lause 2.12. *Olgu $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ lubatav ideaal. Kui $\mathcal{I}^*\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, siis kehtib $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$.*

Tõestus. Eeldame, et $\mathcal{I}^*\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, s.t

$$\exists\ A \in \mathcal{I} : \lim_{i\to\infty} x_{k_i} = a, \text{ kus } \mathbb{N} \setminus A = \{k_1 < k_2 < \ldots\},$$

seega iga fikseeritud $\varepsilon > 0$ korral

$$\exists N \in \mathbb{N} :\ i \geq N \ \Rightarrow\ |x_{k_i} - a| < \varepsilon.$$

Et

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \subset \{k_1, \ldots, k_{N-1}\} \cup A$$

ning $A \in \mathcal{I}$ ja $\{k_1, \ldots, k_{N-1}\} \in \mathcal{I}$, siis $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$ ehk $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. ■

Järgmine näide kinnitab, et üldjuhul ei ole lause 2.12 pööratav.

Näide 10. Olgu $\{\, D_j \mid j \in \mathbb{N} \,\}$ kõigi naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$ lahutus, s.t

$$\mathbb{N} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j,\ D_i \cap D_j = \varnothing, \text{ kui } i \neq j, \text{ ja } |D_j| = \infty \text{ iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Selliseid lahutusi eksisteerib, tuntuimaks näiteks on juht, kus

$$D_j := \{\, 2^{j-1}\ (2r-1) \mid r \in \mathbb{N} \,\}\ (j \in \mathbb{N}).$$

Olgu

$$\mathcal{J} := \{\, A \subset \mathbb{N} \mid \exists j_A \in \mathbb{N} :\ A \cap D_j = \varnothing \text{ iga } j \geq j_A \text{ korral} \,\},$$

näitame, et $\mathcal{J}$ on lubatav ideaal. Kõigepealt kontrollime ideaali definitsiooni tingimusi (a), (b) ja (c).

(a) Ilmne, et $\varnothing \in \mathcal{J}$.

(b) Olgu $A, B \in \mathcal{J}$, siis leiduvad sellised $j_A, j_B \in \mathbb{N}$, et $A \cap D_j = \varnothing$ kõikide $j \geq j_A$ korral ja $B \cap D_j = \varnothing$ kõikide $j \geq j_B$ korral. Võtame $j_0 = \max\{j_A, j_B\}$, siis

$$(A \cup B) \cap D_j = (A \cap D_j) \cup (B \cap D_j) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

kõikide $j \geq j_0$ korral, seega $A \cup B \in \mathcal{J}$.

(c) Olgu $A \in \mathcal{J}$ ja $B \subset A$, siis leidub $j_A \in \mathbb{N}$ nii, et $A \cap D_j = \varnothing$ kõikide $j \geq j_A$ korral. Kuna $B \cap D_j \subset A \cap D_j$, siis $B \cap D_j = \varnothing$ kõikide $j \geq j_A$ korral ja seega $B \in \mathcal{J}$.

Me veendusime, et $\mathcal{J}$ on ideaal. Kuna $\mathbb{N} \notin \mathcal{J}$, siis $\mathcal{J}$ on mittetriviaalne.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub selline $j_n \in \mathbb{N}$, et $D_j \cap [1, n]_{\mathbb{N}} = \varnothing$ kõikide $j \geq j_n$ korral, siis $n \notin D_j$ ja $\{n\} \cap D_j = \varnothing$, seega $\{n\} \in \mathcal{J}$ ehk $\mathcal{J}$ on lubatav.

Leiame sellise jada (x_k), et $\mathcal{J}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, kuid võrdus $\mathcal{J}^*\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ ei kehti. Olgu (x_k) jada, kus $x_k := \dfrac{1}{j}$, kui $k \in D_j$, näitame, et $\mathcal{J}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Olgu $\varepsilon > 0$, fikseerime $j_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $\dfrac{1}{j_0} < \varepsilon$. Kui $j \geq j_0$ ja $k \in D_j$, siis

$$|x_k| = \frac{1}{j} \leq \frac{1}{j_0} < \varepsilon.$$

Seega $A(\varepsilon) \cap D_j = \varnothing$, kus $A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| \geq \varepsilon \,\}$, s.t $A(\varepsilon) \in \mathcal{J}$ ehk $\mathcal{J}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$.

Lõpuks näitame, et tingimus $\mathcal{J}^*\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$ ei kehti. Olgu $A \in \mathcal{J}$ suvaline, leiame sellise $p \in \mathbb{N}$, et $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{p} D_j$, siis $A \cap D_{p+1} = \varnothing$, s.t $D_{p+1} \subset \mathbb{N} \setminus A$. Kui $D_{p+1} = \{k_1, k_2, \dots\}$, siis $x_{k_i} = \dfrac{1}{p+1}$ $(i \in \mathbb{N})$ ehk $x_k = \dfrac{1}{p+1}$ lõpmata paljude indeksite $k \in D_{p+1}$ korral. Järelikult $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\in\mathbb{N}\setminus A}} x_k \neq 0$, s.t $\mathcal{J}^*\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k \neq 0$.

Järgnevalt otsime vastust küsimusele, millise ideaali $\mathcal{I}$ korral langevad $\mathcal{I}$- ja $\mathcal{I}^*$-koonduvus kokku.

Definitsioon 2.13. Olgu $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ lubatav ideaal. Öeldakse, et ideaalil $\mathcal{I}$ on omadus (AP), kui iga sellise loenduva alamhulga $\{A_1, A_2, \ldots\} \subset \mathcal{I}$ puhul, mis rahuldab tingimust $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, leiduvad $B_j \subset \mathbb{N}$ $(j \in \mathbb{N})$, et

1) sümmeetriline vahe $A_j \Delta B_j := (A_j \cup B_j) \setminus (A_j \cap B_j)$ on lõplik hulk iga $j \in \mathbb{N}$ korral,

2) $B := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \in \mathcal{I}$.

Teoreem 2.14. *Lubatava ideaali $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ korral on järgmised väited samaväärsed:*

(a) *kui $\mathcal{I}\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = a$, siis $\mathcal{I}^*\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = a$,*

(b) *ideaal $\mathcal{I}$ on omadusega* (AP).

Tõestus. (a) $\Rightarrow$ (b). Olgu $\{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$, kus $A_j \in \mathcal{I}$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Vaatleme jada (x_k), kus

$$x_k := \begin{cases} \dfrac{1}{j}, & \text{kui } k \in A_j, \\ 0, & \text{kui } k \notin \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} A_j, \end{cases}$$

osutub, et $\mathcal{I}\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Tõepoolest, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul fikseerida $m \in \mathbb{N}$ nii, et $m > \dfrac{1}{\varepsilon}$, siis

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k| \geq \varepsilon \,\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} A_j \in \mathcal{I}$$

ja seega $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}$. Eelduse (a) kohaselt $\mathcal{I}^*\text{-}\lim_{k\to\infty} x_k = 0$. Definitsiooni järgi eksisteerib $C \in \mathcal{I}$ niimoodi, et $\lim_{i\to\infty} x_{k_i} = 0$, kus $\mathbb{N} \setminus C = \{k_1 < k_2 < \dots\}$. Tähistame $B_j := A_j \cap C$ $(j \in \mathbb{N})$, näitame, et omaduse (AP) tingimused 1) ja 2) on täidetud. Olgu $j \in \mathbb{N}$ suvaliselt fikseeritud, leiame sellise $N \in \mathbb{N}$, et $|x_{k_i}| < \dfrac{1}{j}$ iga $i \geq N$ korral. Märkame, et $|A_j \cap (\mathbb{N} \setminus C)| < \infty$ iga $j \in \mathbb{N}$ korral, seejuures kehtib sisalduvus $A_j \cap \{\, k_i \mid i \in \mathbb{N} \,\} \subset [1, N-1]_{\mathbb{N}}$: tõepoolest, kui $k_i \in A_j$ ja $i \geq N$, siis saame vastuolu $\dfrac{1}{j} = x_{k_i} < \dfrac{1}{j}$. Niisiis

$$\begin{aligned} A_j \Delta B_j &= (A_j \cup B_j) \setminus (A_j \cap B_j) = (A_j \cup (A_j \cap C)) \setminus (A_j \cap (A_j \cap C)) \\ &= A_j \setminus (A_j \cap C) = A_j \setminus C = A_j \cap (\mathbb{N} \setminus C), \end{aligned}$$

seega $|A_j \Delta B_j| < \infty$, s.t tingimus 1) on täidetud. Samuti on tingimus 2) täidetud:

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j \cap C) = C \cap \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \subset C \in \mathcal{I},$$

seetõttu $B = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} B_j \in \mathcal{I}$. Me veendusime, et $\mathcal{I}$ on omadusega (AP).

(b) $\Rightarrow$ (a). Olgu $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, fikseerime $\varepsilon > 0$, siis

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \in \mathcal{I}.$$

Moodustame hulga $\{\, A_j \mid j \in \mathbb{N} \,\}$ järgmiselt:

$$A_1 := A(1) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq 1 \,\}$$

ja

$$A_j := A\Big(\frac{1}{j}\Big) \setminus A\Big(\frac{1}{j-1}\Big) = \left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \frac{1}{j} \leq |x_k - a| < \frac{1}{j-1} \;\; (j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}) \right\},$$

siis $A_j \in \mathcal{I}$ ja $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$. Eelduse kohaselt leidub hulk $\{\, B_j \subset \mathbb{N} \mid j \in \mathbb{N} \,\}$ nii, et omaduse (AP) definitsiooni tingimused 1) ja 2) on täidetud, näitame, et

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in\mathbb{N}\setminus B}} x_k = a, \text{ kus } B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, siis

$$A(\varepsilon) = \{\, k \in \mathbb{N} \mid |x_k - a| \geq \varepsilon \,\} \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j.$$

Nüüd, et $|A_j \Delta B_j| < \infty$ ja

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\Big) \Delta \Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j\Big) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} (A_j \Delta B_j),$$

siis $\left|\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} A_j\Big) \Delta \Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} B_j\Big)\right| < \infty$. Saame võtta indeksi $N \in \mathbb{N}$, et

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\Big) \cap [N+1, \infty)_{\mathbb{N}} = \Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j\Big) \cap [N+1, \infty)_{\mathbb{N}}.$$

Fikseerime suvalise $k \in \mathbb{N} \setminus B$, olgu $k > N$, siis $k \notin \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j \right) \cap [N+1, \infty)_{\mathbb{N}}$ ja seega $k \notin \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j \right) \cap [N+1, \infty)_{\mathbb{N}}$. Siis $k \notin A(\varepsilon)$ ehk $|x_k - a| < \varepsilon$ iga $k > N$ $(k \in \mathbb{N} \setminus B)$ korral, järelikult $\lim\limits_{\substack{k \to \infty \\ k \in \mathbb{N} \setminus B}} x_{k_i} = a$ ehk $\mathcal{I}^*\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$. ■

Järeldus 2.15. *Ideaal* $\mathcal{R}_0$ *on omadusega* (AP).

Tõestus. Kuna $\mathcal{R}_0\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$ parajasti siis, kui $\text{st-}\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$, siis järeldub väide vahetult teoreemidest 1.33 ja 2.14. ■

Viited

[1] **Buck, R. C.**, *Solution of problem 4216*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 36.

[2] **Connor, J., Grosse-Erdmann, K.-G.**, *Sequential definitions of continuity for real functions*, Rocky Mountain J. Math. **33** (2003), 93–121.

[3] **Fast, H.**, *Sur la convergence statistique*, Colloq. Math. **2** (1951), 241–244.

[4] **Fridy, J. A.**, *On statistical convergence*, Analysis. **5** (1985), 301–313.

[5] **Kaya, E., Kucukaslan, M., Wagner, R.**, *On statistical convergence and statistical monotonicity*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp. **39** (2013), 257–270.

[6] **Kostyrko, P., Šalát, T., Mačaji, M.**, *Statistical convergence and $\mathcal{I}$-convergence*, http://thales.doa.fmph.uniba.sk/macaj/ICON.pdf (1999).

[7] **Kostyrko, P., Šalát, T., Wilczyński, W.**, *$\mathcal{I}$-convergence*, Real Anal. Exchange **26** (2000/2001), 669–685.

[8] **Schoenberg, I. J.** *The integrability of certain functions and related summability methods*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 361–375.

[9] **Šalát, T.** *On statistically convergent sequences of real sequences*, Math. Slovaca **30** (1980), 139–150.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Diana-Katry Kornis (sünnikuupäev: 24.11.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   "Arvjadade statistiline koonduvus",

   mille juhendaja on professor Toivo Leiger,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   2.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile,

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **04.06.2015**