

TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatika instituut

Kaile Kasepuu

Elastsete plaatide painde ülesanded

Bakalaureusetöö

Juhendaja: prof. Jaan Lellep, füüs.-mat. dr.

TARTU 2013

Sisukord

Sisukord.....	2
Sissejuhatus	3
1. Kinemaatika võrrandid.....	4
1.1. Deformatsioonide- kõveruste vahelised seosed.....	4
1.2. Pinged ja üldistatud pinged.....	9
1.3. Plaadi tasakaaluvõrrandid.....	12
2. Ristkülikukujulised plaadid	16
2.1. Plaadi silindriline paine	16
2.2. Plaatide puhaspaine	18
2.3. Navier' meetod	21
Summary	28
Kasutatud kirjandus.....	29

Sissejuhatus

Plaadiks nimetatakse sellist keha, mille paksus on tunduvamalt väiksem selle pikkusest ja laiuusest. Õhukeseks plaadiks nimetatakse sellist plaati, mille lühema külje pikkus on vähemalt viis korda suurem plaadi paksusest. Plaatide painde teooria põhineb Kirchhoffi hüpoteesidel.

Tehnikas ja ehitusmehaanikas leiavad õhukesed plaadid laialdast kasutust. Näiteks vahelaed tehakse õhukestest plaatidest, samuti kasutatakse plaate laevade ja lennukite kerede ehitamisel.

Selle bakalaureusetöö eesmärk on tutvustada õhukese elastse plaadi painde võrrandeid. Töö koosneb kahest suuremast peatükist. Esimeses peatükis tutvume deformatsioonide- kõveruste vaheliste seoste ja pingetega; tuletame õhukese plaadi tasakaalu võrrandid. Selleks kasutame raamatuid [1], [2], [4], [5] ja [7].

Teises peatükis vaatame matemaatiliselt „täpseid“ lahendusi trigonomeetriliste ridade kujul, mida on rakendatud õhukestele nelinurksetele elastsetele plaatidele. Täpsemalt tutvume plaadi silindrilise painde ja puhta paindega, ning tuletame Navier' meetodi kõikidelt külgedelt lihtsalt toetatud ristkülikukujulise plaadi jaoks. Selle peatüki kirjutamisel on kasutatud raamatuid [2], [3], [5] ja [6].

1. Kinemaatika võrrandid

Õhukeste plaatide paine põhineb järgnevatel eeldustel (vt. [4], lk. 9; [5], lk. 394):

1. Paindel plaadi keskpind ei pikene ega lühene, ainult kõverdub.
2. Sirgete normaalide hüpotees: sirgjoonelised elemendid, mis olid enne painet plaadi keskpinnaga risti, jäävad ka pärast painet sirgjoonelisteks ja risti kesktasandiga.
3. Plaadi keskpinna punktid siirduvad ainult plaadi keskpinnaga risti; keskpinna punktide siirded plaadi pinnas võrduvad nulliga.

Selleks, et tuletada klassikalise plaadi paindeteooria põhivõrrandid, tugineme kolmele elastsete võrrandite komplektile.

Selles peatükis tuletame võrrandi õhukeste plaatide painde leidmiseks.

1.1. Deformatsioonide- kõveruste vahelised seosed

Olgu U , V ja W siirdevektori komponendid antud punktis koordinaattelgedes x , y ja z suunas. Siirdevektori normaalkomponenti w nimetatakse läbipaindeks. Sirgete normaalide hüpoteesi põhjal võime öelda, et deformatsioonikomponendid ε_z , γ_{xz} , γ_{yz} võrduvad nulliga, st

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{xz} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Pideva keskkonna mehaanikast on teada, et

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}, \quad (1.2)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Kuna $\varepsilon_z = 0$, siis

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

ning integreerides saame, et

$$W = w(x, y), \quad (1.3)$$

kus $w(x, y)$ on suvaline funktsioon.

Võrdusest (1.3) on näha, et ka osatuletised $\frac{\partial W}{\partial x}$ ja $\frac{\partial W}{\partial y}$ on ainult muutujate x ja y funktsioonid.

Seetõttu saame (1.1) ja (1.2) abil võrrandid

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial W}{\partial y}. \quad (1.4)$$

Integreerides võrrandeid (1.4) ja arvestades seost (1.3) leiame

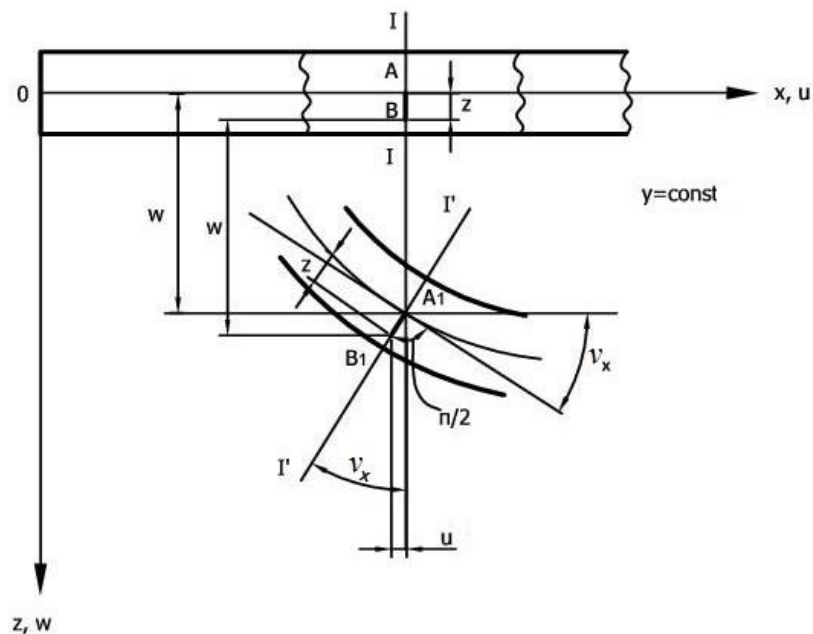
$$U = -\frac{\partial w}{\partial x} z + u(x, y),$$

$$V = -\frac{\partial w}{\partial y} z + v(x, y), \quad (1.5)$$

kus $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on suvalised funktsioonid.

Eeltoodust on näha, et siirded U ja V sõltuvad lineaarselt muutujast z .

Deformatsiooni tõttu muudavad plaadi punktid asukohta. Joonisel (**Tõrge! Ei leia viiteallikat.**Joonis 1.1) on näha plaadi osa enne ja pärast deformatsiooni. Vaatame mittedeformeerunud plaadi kahte suvalist punkti A ja B. Olgu A ja B vaheline kaugus z . Deformatsiooni tulemusena nihkub punkt A paralleelselt z -teljega kauguse w võrra punkti A_1 . Kuna me lõikedeformatsioone ei arvestanud, siis peab punkt B asetsema pärast deformatsiooni risti punktiga A_1 . Olgu punkti B lõppasukohaks punkt B_1 . Kaugus punktide A_1 ja B_1 vahel on z . Punktis A pöörduv keskpind nurga ν_x võrra, siis teise hüpoteesi põhjal pöörduv sama nurga võrra ka sirglõik A_1B_1 . Kuna tegemist on lõpmata väikeste suurustega, siis võime nurga ν_x võtta ligikaudselt võrdseks tema tangensiga, st. $\nu_x \approx \tan \nu_x$.



Joonis 1.1: Keskinna normaali pööre.

Me võime esitada võrrandid (1.5), kujul

$$U = -z\nu_x,$$

$$V = -z\nu_y, \tag{1.6}$$

kus

$$v_x = \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$v_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.7)$$

Siis on v_x ja v_y normaali pöördenurgad (Joonis 1.1) keskpinnal. Miinusmärk valemis (1.6) tuleb sellest, et punkt B liigub x-telje negatiivses suunas.

Asendades võrrandid (1.5) võrranditesse (1.2) saame

$$\varepsilon_x^z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y^z = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (1.8)$$

$$\gamma_{xy}^z = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x},$$

kus ülaindeks z tähistab niisugust plaadi kihti antud punktis, mis asub keskpinnast kaugusel z .

Eeldades, plaadi keskpind ei veni välja ega tõmbu kokku, võime nõuda, et $U|_{z=0} = 0$, $V|_{z=0} = 0$. Seetõttu on $u(x, y) \equiv 0$, $v(x, y) \equiv 0$. Sellisel juhul võime võrrandite (1.8) asemel kirjutada

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (1.9)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Läbipainde osatuletistel võrrandite (1.7)–(1.9) paremal poolel on teatud geomeetiline tähendus. Olgu MNP üks kõver, mis on saadud deformeerunud plaadi keskpinna lõikumisel tasandiga $y = \text{const}$ (Joonis 1.2).

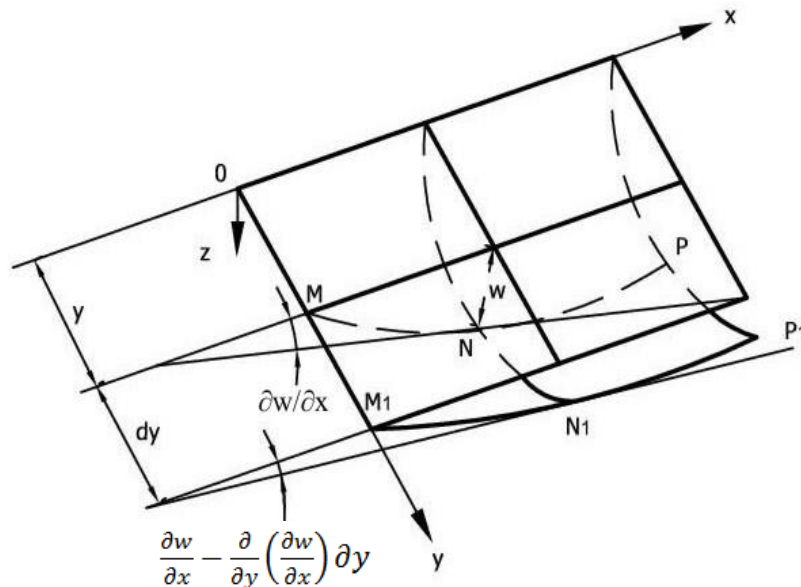
Kuna tegemist on väikeste läbipainetega, siis kaldenurga ruutu võib pidada väikeseks võrreldes ühega, st. $(\partial w / \partial x)^2 < 1$. Teine tuletis $\partial^2 w / \partial x^2$ määrab ligikaudselt osakõveruse α_x piki x-telge. Sarnaselt $\partial^2 w / \partial y^2$ määrab kõveruse α_y keskpinnal piki y-telge. Kõverused α_x ja

χ_y iseloomustavad keskpinna painutamise nähtust tasanditel O_{xz} ja O_{yz} , mis on paralleelsed koordinaattasanditega. Neid nimetatakse painde kõverusteks ja nad on defineeritud kujul

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (1.10)$$

Pindade kumeruse loeme positiivseks, kui see on kumer allapoole, st x -telje positiivses suunas.



Joonis 1.2: Kõverdunud keskpind.

Kõverust $\partial^2 w / \partial x^2$ võib määratleda kui kaldenurga $v_x = \partial w / \partial x$ muutumise kiirust koordinaadi x suhtes liikumisel mööda seda kõverat. See nurk võib varieeruda ka y -telje suunas. Seda on näha üksteisest kaugusel dy olevate kõverate MNP ja $M_1N_1P_1$ võrdlemisel (Joonis 1.2). Kui kõvera MNP kalle on $\partial w / \partial x$, siis kõveral $M_1N_1P_1$ võib see nurk olla kas $\left[\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right]$ või $\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right)$. Nurga $\partial w / \partial x$ muutumise kiirus ühiku kohta y -telje suunas on $(-\partial^2 w / \partial x \partial y)$. Siin on eeldatud, et kui y suureneb, siis puutuja kaldenurk kõveral väheneb. Sarnaselt võime veenduda, et nurga $\partial w / \partial x$ muutumise kiirust iseloomustab sama

segatuletis ($-\partial^2 w / \partial x \partial y$). Osatuletist $\partial^2 w / \partial x \partial y$, mis määrab keskpinna kõveruse punktis koordinaatidega x ja y , nimetatakse vastavalt x - ja y -telgede väändekõveruseks ja tähistatakse χ_{xy} . Seega $\chi_{xy} = \chi_{yx}$ ehk

$$\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.11)$$

Võttes arvesse võrrandeid (1.11), saame kirjutada võrrandid (1.8) ümber järgnevalt

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z\chi_x, \\ \varepsilon_y &= z\chi_y, \\ \gamma_{xy} &= 2z\chi_{xy}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.2. Pinged ja üldistatud pinged

Pinged ja deformatsioonid rahuldavad elastse materjali korral Hooke'i seadust (vt. [1], lk. 46-47). Eeldame, et pingeseisund on tasapinnaline, ehk et normaalpinge komponent $\sigma_z = 0$. Hooke'i seaduse põhjal

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

Siin on E ja ν vastavalt Youngi ja Poissoni moodulid ning $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Asendades võrranditesse (1.13) deformatsiooni komponendid (1.9) jõuame seosteni

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (1.14)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Need võrrandid võimaldavad määrata pinged plaadi igas punktis. Otstarbekas on kasutusele võtta kõik üldistatud pinged (jõud ja momendid), mis rakenduvad plaadi keskpinnale. Üldistatud pinged on Q_x ja Q_y ning pöördemomendid on M_x , M_y ja M_{xy} . Painde momendid kui löikejõud kujutavad endast integraalseid suuruseid

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz,$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad (1.15)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz$$

ja

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz,$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz. \quad (1.16)$$

Seejuures $M_{yx} = M_{xy}$. Löikejõudude ja pöördemomentide märk on sama nagu vastavatel pingetel.

Märgime, et seosed (1.15) ja (1.16) defineerivad momendid ja jõud plaadi ühiku pikkuse kohta. Peale selle, neil on jõu ja jõumomendi dimensioonid.

Tasub mainida, et õhukeste plaatide teoorias on deformatsiooni komponendid $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$ ja $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$ ning löike jõud Q_x ja Q_y nullist erinevad.

Asendame pinged (1.14) võrrandisse (1.15) ja integreerime üle plaadi paksuse. Selle tulemuseks saame üldistatud pinged (momendid)

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (1.17)$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) x_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

kus kordajad

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.18)$$

nimetatakse plaadi painde jäikuseks. See mängib sama rolli nagu painde jäikus tala paindel. Märgime, et $D > EI$, seega plaat on alati jäigem kui sama laiuse ja paksusega tala.

Lahendades võrrandid (1.17) läbipainde teiste tuletiste jaoks ja asendades need seostesse (1.14), saame järgmised tulemused pingete jaoks

$$\sigma_x = \pm \frac{12M_x}{h^3} z,$$

$$\sigma_y = \pm \frac{12M_y}{h^3} z, \quad (1.19)$$

$$\tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z.$$

Osutub, et ülejäänud kolme pinge komponendi τ_{xz} , τ_{yz} ja σ_z määramine kasutades Hooke'i seadust ei ole võimalik, sest need pinged ei ole antud deformatsiooniga seotud. Plaadi painde korral on tavaliselt selle plaadi pind vaba kõigist puutuja suunalistest välistest koormustest, mis tähendab, et τ_{xz} ja τ_{yz} on nullid, kui $z = \pm h/2$. Avaldades tasakaaluvõrranditest $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$ ja

$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$ ning integreerides leiame

$$\tau_{xz} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz,$$

$$\tau_{xz} = \frac{E(z^2 - h^2/4)}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w,$$

ja

$$\tau_{yz} = - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) dz, \quad (1.20)$$

$$\tau_{yz} = \frac{E(z^2 - h^2/4)}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w,$$

$$\text{kus } \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Võrranditest (1.19) on näha, et pinge komponendid σ_x , σ_y ja τ_{xy} muutuvad lineaarselt üle plaadi paksuse, st. pinged τ_{xz} ja τ_{yz} muutuvad vastavalt paraboolsele seadusele.

Komponendi σ_z määramiseks saame seose

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^3}{12} - \frac{h^2 z}{4} + \frac{z^3}{3} \right) \nabla^2 \nabla^2 w. \quad (1.21)$$

1.3. Plaadi tasakaaluvõrrandid

Pinge komponendid (seega membraanjõud ja paindemomendid) on üldiselt plaadi igas punktis erinevad. Need suurused peavad rahuldama tasakaalu tingimusi.

Vaatleme plaadi elemendi tasakaalu. Mõjugu plaadile jaotatud ristkoormus $p(x, y)$. Märgime, et kui see element on väga väike, siis jõu ja momendi komponendid võivad olla ühtlaselt jagatud üle plaadi kesktasandi elemendi. Pinge resultantide juurdekasvud, mille nad saavad minnes punktist x punkti $x + dx$, asendame osadiferentsiaalidega, näiteks $\partial M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$. Sama ka punktide y ja $y + dy$ korral. Staatikast on teada, et kehtivad järgmised kolm iseseisvat tasakaalu tingimust:

- a. Jõudude summeerimine z -teljel annab

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dx dy + p dx dy = 0,$$

millest peale teguriga $dx dy$ läbi jagamist saame

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (1.22)$$

- b. Momentide summeerimine x -teljel annab

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + Q_y dx dy = 0 ,$$

ehk

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 . \quad (1.23)$$

Märgime, et liidetavad tuleb võrrandite tuletamisel ära jätta.

c. Momentide summeerimine y-telje suhtes annab

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0. \quad (1.24)$$

Seetõttu

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad (1.25a)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}. \quad (1.25b)$$

Siin on arvestatud seda, et $M_{xy} = M_{yx}$. Asendades võrrandid (1.25) võrrandisse (1.22), saame

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y). \quad (1.26)$$

Lõpuks arvestame M_x , M_y ja M_{xy} võrrandeid (1.17) ja asendame need võrrandisse (1.26), saame

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \quad (1.27)$$

See on diferentsiaalvõrrand õhukeste plaatide painde leidmiseks, mis põhineb Kirchhoff'i eeldustel. See võrrand on saadud Lagrange' i poolt 1811. Matemaatiliselt võib diferentsiaalvõrrandit (1.27) klassifitseerida kui neljandat järku lineaarset osadiferentsiaalvõrrandit, mille kordajad on konstantsed.

Võrrandi (1.27) võib kirjutada ümber kujule

$$\nabla^2(\nabla^2 w) = \nabla^4 w = \frac{p}{D}, \quad (1.28)$$

kus

$$\nabla^4(\quad) \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (1.29)$$

Operaatorit ∇^4 nimetatakse sageli biharmooniliseks operaatoriks.

Läbipainde funktsioon $w(x, y)$ on määratud võrrandiga (1.26), pinge resultant ja pinged saadakse võrranditest (1.17) ja (1.18). Läbipainde leidmiseks on vaja integreerida võrrandit (1.27) ning määrata konstandid rajatingimuste abil.

Lõike jõudude Q_x ja Q_y avaldised võime nüüd ümber kirjutada läbipainde w abil kujul

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

ehk

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w),$$

ja

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (1.30)$$

ehk

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w).$$

Kasutades võrrandeid (1.30) ja (1.28), saame kirjutada pinge komponentide τ_{xz} , τ_{yz} ja σ_z avaldised (1.20) ja (1.21) ümber kujule

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right],$$

$$\tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad (1.31)$$

$$\sigma_z = -\frac{3p}{4} \left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3} \left(\frac{2z}{h} \right)^3 \right].$$

Maksimaalsed tangentsiaalsed pinged tulevad kujul

$$\max, \tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h}, \max, \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}.$$

Painde momentide summa, mis on defineeritud võrranditega (1.17), on

$$M_x + M_y = -D(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

või

$$\frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \nabla^2 w. \quad (1.32)$$

Tähistagu M momentide summat

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \nabla^2 w. \quad (1.33)$$

Sel juhul lõikejõudude avaldised saame kirjutada kujul

$$Q_x = \frac{\partial M}{\partial x},$$

$$Q_y = \frac{\partial M}{\partial y} \quad (1.34)$$

ja saame esitada võrrandi (1.27) kujul

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D}. \quad (1.35)$$

Seega on plaadi painde võrrand $\nabla^4 w = p/D$ esitatud teist järku diferentsiaalvõrrandina.

Kokkuvõtteks, me saime, et plaadi läbipaine w on määratud diferentsiaalvõrrandiga (1.27).

Seejuures on:

- a. paine on tekitatud painde momentide M_x ja M_y ning lõikejõudude Q_x ja Q_y poolt;
- b. vääne on tekitatud pöördemomentide $M_{xy} = M_{yx}$ poolt.

2. Ristkülikukujulised plaadid

Selles peatükis tutvume plaadi painde teooria rakendustega õhukeste nelinurksete plaatide korral. Vaatame elementaarseid näiteid plaadi painde kohta, mis on väga olulised, et mõista, kuidas plaat talub sellele rakendatud koormuseid. Lisaks sellele, elementaarsed näited võimaldavad saada tasakaalu diferentsiaalvõrranditele (1.27) analüütilisi lahendusi.

2.1. Plaadi silindriline paine

Kui tegemist on sellise pika ristkülikukujulise plaadiga, mille koormus ei muutu pikkade külgede sihis, siis elastne pind selle plaadi keskosas kujutab endast silindrilist pinda, mille moodustaja on paralleelne pikkade külgedega. Seda nimetatakse silindriliseks paindeks. Silindrilise painde korral saab plaadi pinna võrrandi avaldada ainult ühe muutuja funktsioonina.

Vaatleme lõpmatult pikka plaati y -telje sihis. Eeldame, et plaadile mõjub ristkoormus, mis on funktsioon ainult muutuja x suhtes, st. $p = p(x)$. Sel juhul kõik ühiku laiused x -teljega paralleelsed ribad painduvad identselt. Plaadi keskpind tervikuna on painutatud üle silindrilise pinna $w = w(x)$. Võrrandis (1.27) on kõik tuletised y suhtes võrdsed nulliga. Antud juhul saame painde jaoks järgmise võrrandi :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p(x)}{D}. \quad (2.1)$$

Nüüd sõltub suurus w ainult muutujast x , mistõttu rakendame hariliku tuletise definitsiooni. Võrrand (2.1) kirjeldab õhukeste plaatide silindrilist painet. On näha, et see võrrand ühtib vastava tala painde võrrandiga, kui asendame tala painde jäikuse EI plaadi painde jäikusega D . Kui $D > EI$, siis ühiku laiune plaadi riba on alati tugevam kui tala, millel on samad mõõtmed.

Võrrandi (2.1) integreerimisega ei tohiks olla probleeme. Näiteks, kui $p = p_0 \frac{x}{a}$, siis võrrandi (2.1) üldlahend avaldub kujul

$$w = w_h + w_p,$$

kus w_h on homogeenise võrrandi (2.1) lahend ja w_p on erilahend, mis sõltub võrrandi (2.1) paremast poolest. Määrates need suurused leiame

$$w = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \frac{p_0x^5}{120aD}. \quad (2.2)$$

Plaadi riba rajatingimused võime kirjutada järgnevalt

$$w = 0|_{x=0},$$

$$\frac{dw}{dx} = 0|_{x=0}$$

ja

$$w = 0|_{x=a}, \quad (2.3)$$

$$M_x = -D \frac{d^2w}{dx^2} \Big|_{x=a}.$$

Integreerimiskonstandid C_i ($i=1,2,3,4$) leiame rajatingimustest (2.3). Asendades w võrrandist (2.2) võrrandisse (2.3) saame

$$C_1 = 0,$$

$$C_2 = 0,$$

$$C_3 = \frac{7p_0a^5}{240D},$$

$$C_4 = \frac{9p_0a}{240D}.$$

Asendame need võrrandisse (2.2). Tulemuseks saame võrrandi (2.4) kujul

$$w = \frac{p_0a^4}{240D} \left(7 \frac{x^2}{a^2} - 9 \frac{x^3}{a^3} + 2 \frac{x^5}{a^5} \right). \quad (2.4)$$

See on plaadi keskpinna võrrand silindrilise pinde korral.

Paindemomendid M_x ja M_y määrame võrranditest (1.15), kui võtame osatuletised muutuja y järgi võrdseks nulliga, st.

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (2.5)$$

$$M_y = -\nu D \frac{d^2 w}{dx^2},$$

ehk

$$M_y = \nu M_x,$$

$$M_{xy} = 0.$$

Asendades võrrandi (2.4) seostesse (2.5) saame

$$M_x = -\frac{p_0 a^2}{120} \left(7 - 27 \frac{x}{a} + 20 \frac{x^3}{a^3} \right). \quad (2.6)$$

Moment $M_y = \nu M_x$ on proportsionaalne momendiga M_x .

Plaadi silindriline paine y -telje sihis on võimalik ainult siis, kui moment M_y on rakendatud x -teljega paralleelsetele servadele.

2.2. Plaatide puhaspaine

Vaatame ristkülikukujulist plaati ja eeldame, et see plaat on koormatud paindemomentidega $M_{x=m_1} = const$ ja $M_{y=m_2} = const$. Sel erijuhul avaldub tasakaalu diferentsiaalvõrrand kujul

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (2.7)$$

See võrrand on rahuldatud, kui

$$w = 0,5(C_1x^2 + C_2y^2). \quad (2.8)$$

Integreerimiskonstandid C_1 ja C_2 saame rajatingimustest

$$M_x = m_1 \text{ ja } M_y = m_2. \quad (2.9)$$

Kasutades võrrandeid (1.17), (2.8) ja (2.9), saame

$$C_1 = \frac{vm_2 - m_1}{D(1-v^2)},$$

$$C_2 = \frac{vm_1 - m_2}{D(1-v^2)}.$$

Asendades ülal saadud võrdused võrrandisse (2.8), leiame pinna siirde:

$$w = \frac{1}{2D(1-v^2)} [(vm_2 - m_1)x^2 + (vm_1 - m_2)y^2]. \quad (2.10)$$

Siit näeme, et plaadi elementidele, mis on paralleelsed x ja y telgedega, mõjuvad paindemomendid $M_x = m_1$ ja $M_y = m_2$. Teised pinged resultandid ja paarid (momendid) on nullid, st. $M_{xy} = 0$, $Q_x = 0$ ja $Q_y = 0$. Sel juhul on tegemist plaatide puhtpaindega.

Vaatleme mõnda erijuhtu plaatide puhtpainde kohta.

- a. Olgu $m_1 = m_2 = m$.

Siis

$$w = -\frac{m}{2D(1-v)} (x^2 + y^2). \quad (2.11)$$

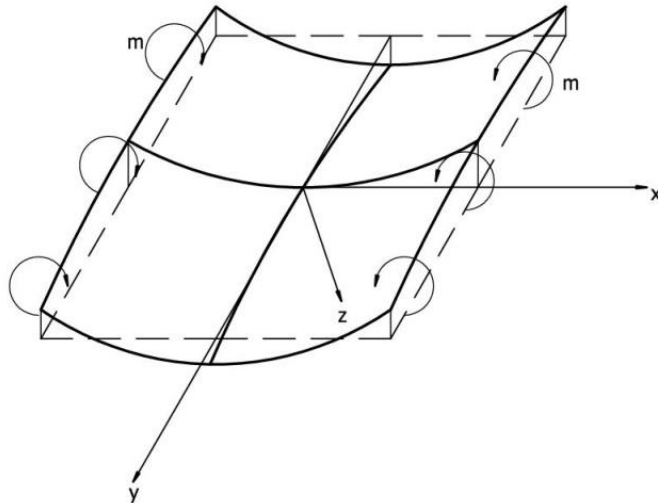
See on elliptiline pöördparaboloid teljestikus x, y, z . Sel juhul painutatud plaat kujutab endast paraboloidi osa, sest kõverusraadius on sama kõikides punktides.

- b. Olgu $m_1 = m, m_2 = 0$.

Siis

$$w = \frac{m}{2D(1-v^2)} (-x^2 + vy^2). \quad (2.12)$$

Selle võrrandiga kirjeldatud pinnal on sadula kuju ja seda nimetatakse hüperboolseks pöördparaboloidiks (Joonis 2.1). Pinna horisontaalid on hüperboolid, asümptoodid on sirgjooned $\frac{x}{y} = \pm\sqrt{v}$. Poissoni efekti tõttu on painde moment $M_x = m_1 = m$.



Joonis 2.1: Plaadi deformeerumine hüperboolseks paraboloidiks.

c. Olgu $m_1 = m$, $m_2 = -m$.

Siis

$$w = \frac{m}{2D(1-\nu)} (-x^2 + y^2). \quad (2.13)$$

See on hüperboolse paraboloidi võrrand, mille asümptootid on 45° kraadise nurga all kaldu x - ja y -telgedele suhtes.

Olgu momendid M_n ja M_{nt} määratud võrranditega

$$M_n = M_x (\cos \alpha)^2 + M_y (\sin \alpha)^2 + M_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$M_{nt} = M_{xy} \cos 2\alpha - (M_x - M_y) \sin \alpha \cos \alpha$$

viltustel osadel, mis on paralleelsed asümptootidega. Olgu $\alpha = 45^\circ$, siis saame

$$M_n = 0, M_{nt} = -m.$$

Märkus

Kui ülal kirjeldatud plaat ei ole servadest kinnitatud, siis selle siirded on määratud nii nagu absoluutselt jäiga plaadi siirded.

2.3. Navier' meetod

1820. aastal esitas Navier Prantsusmaa Teaduste Akadeemiale tulemuse vabalt toetatud plaatide painete kohta kahekordsete trigonomeetriliste ridadega. See meetod on kasutatav ainult vabalt toetatud plaatide korral.

Vaatleme nelinurkset plaati külgedega a ja b , mis on vabalt toetatud kõikidest servadest ja koormatud ebahürtlase koormusega $p(x, y)$. Koordinaatide alguspunkt on paigutatud ülemisse vasakusse nurka.

Vabalt toetatud plaadi rajatingimused on järgmised:

$$w = 0|_{x=0,a},$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 0|_{x=0,a}$$

ja

$$w = 0|_{y=0,b}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0|_{y=0,b}.$$

Sel juhul otsime tasakaalu diferentsiaalvõrrandi (1.27) lahendit $w(x, y)$ lõpmatu Fourier' rea kujul:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{2.15}$$

Arendame seejuures ka koormuse $p(x, y)$ Fourier' ritta:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{2.16}$$

Siin on w_{mn} ja p_{mn} määratud kordajad. Lihtsalt on tõestatud, et siire (2.15) rahuldab automaatselt etteantud rajatingimusi (2.14).

Vaatleme koormamise üldist juhtu. Fourier' kordajate p_{mn} määramiseks korrutame võrrandit (2.16) teguriga $\sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}$ ja integreerime kaks korda üle vastava piirkonna $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. See annab

$$\int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} dx dy . \quad (a)$$

Otse integreerides näeme, et

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{l\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0, & \text{kui } m \neq l \\ \frac{a}{2}, & \text{kui } m = l \end{cases}$$

ja $\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0, & \text{kui } n \neq k \\ \frac{b}{2}, & \text{kui } n = k \end{cases}$ (2.17)

On teada, et kahekordse Fourier rea kordajad avalduvad kujul

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (2.18)$$

Kui siire (2.15) rahuldab piirtingimusi (2.14), siis kordajad w_{mn} peavad rahuldama võrrandit (1.25). Asendades võrrandid (2.15) võrrandisse (1.24), saame tulemuseks järgmise võrrandi:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ w_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] - \frac{p_{mn}}{D} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

See võrrand peab olema rahuldatud kõikide x ja y väärtuste korral. Seega

$$w_{mn} \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{p_{mn}}{D} = 0,$$

millest

$$w_{mn} = \frac{1}{\pi^4 D} \frac{p_{mn}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}. \quad (2.19)$$

Asendades ülal saadu võrrandisse (2.15), saame deformeerunud pinna võrrandi

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.20)$$

kus p_{mn} on antud võrrandiga (2.18). Kuna $|\sin m\pi x/a| \leq 1$ ja $|\sin n\pi y/b| \leq 1$ iga x ja y korral ja iga m ja n korral, siis rida (2.20) on koonduv.

Asendades $w(x, y)$ võrranditesse (1.15) ja (1.28), saame leida paindemomendid ja löikejõud plaadil ja seejärel kasutades tulemusi (1.17), määrame pinge komponendid. Näiteks plaadi momentide jaoks saame järgnevad avaldised:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \frac{[(m/a)^2 + \nu(n/b)^2]}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\
 M_y &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \frac{[(n/b)^2 + \nu(m/a)^2]}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\
 M_{xy} &= -\frac{1-\nu}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn}mn}{ab[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Lõpmatute ridade läbipainde korral koondub üldiselt kiiresti, seega rahuldava täpsusega tulemus saadakse suhteliselt väikese arvu rea liikmete korral. Sisejõud ja momendid on saadud läbipainde $w(x, y)$ teise ja kolmanda tuletise abil. Osutub, et sisejõudude ja momentide lõpmatud read koonduvad aeglasemalt, eriti plaadi servade läheduses. Aeglane koondumine muudab arvutamise protsessi pikemaks.

Näide 2.1

Ristkülikukujulise plaadi küljed a ja b on vabalt toetatud kõikidest servadest ja plaadile mõjub ühtlaselt jaotatud koormus $p(x, y) = p_0$. Määrata maksimaalne paine, momendid ja pinged.

Kahekordse Fourier rea koormuste kordajad p_{mn} on saadud võrrandist (2.17). Asendades $p(x, y) = p_0 = \text{const}$ ja integreerides, saame tulemuseks

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)$$

ehk

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} (m, n = 1, 3, 5, \dots). \tag{a}$$

Siit on näha, et $p_{mn} = 0$, kui m ja n on paaritud täisarvud.

Asendame p_{mn} võrrandist (a) võrranditesse (2.20) ja (2.21). Tulemuseks saame painete ja momentide avaldised:

$$W = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}, \quad (2.22a)$$

$$M_x = \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(m/a)^2 + \nu(n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.22b)$$

$$M_y = \frac{16p_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\nu(m/a)^2 + (n/b)^2}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.22c)$$

$$M_{xy} = -\frac{16(1-\nu)}{\pi^4 ab} \sum_m^{\infty} \sum_n^{\infty} \frac{1}{[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.22d)$$

Füüsikaliste kaalutluste ja plaadi sümmeetria tõttu on selge, et läbipaine omab maksimaalse väärtuse plaadi keskel ($x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$). Maksimaalse läbipainde väärtus avaldub kujul

$$W_{max} = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}. \quad (b)$$

Siin on $\sin \frac{m\pi x}{a}$ ja $\sin \frac{n\pi y}{b}$ asendatud vastavalt $(-1)^{m-\frac{1}{2}}$ ja $(-1)^{n-\frac{1}{2}}$. Võib märkida, et see rida koondub väga kiiresti ja kahe rea liikme arvestamine annab piisava täpsuse praktiliseks kasutamiseks. Ruudukujulise plaadi korral, kui $a = b$, saame

$$W_{max} = \frac{16p_0 a^4}{D\pi^6} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots \right) \approx \frac{4a^4 p_0}{D\pi^6}$$

$$W_{max} \approx 0,00416 \frac{a^4 p_0}{D}.$$

Arvestades, et $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ ja võttes $\nu=0.3$, saame

$$W_{max} \approx 0,0454 \frac{a^4 p_0}{Eh^3}.$$

Selle tulemuse viga võrreldes täpse tulemusega on ligikaudu 2,5%.

On selge, et painde momentide read ei koonu nii kiiresti kui siirete rida. Maksimaalne paindemoment plaadi keskel on määratud võrranditega (2.22b) ja (2.22c). Võttes arvesse ainult rea esimese liikme ruudukujulise plaadi korral, kus $\nu = 0,3$, saame tulemuseks

$$M_{x,max} = M_{y,max} = 0,0534 a^2 p_0. \quad (c)$$

Paindemomentide täpne väärtus ruudukujulise plaadi keskel, kui $\nu = 0,3$, on

$$M_{x,max} = M_{y,max} = 0,0479a^2p_0. \quad (d)$$

Seega tulemuse (c) viga on ligikaudu 11,5 ühikut, see tulemus on veidi ebatäpsem kui siirde korral.

Maksimaalne normaalpinge ruudukujulise plaadi keskel, arvatud momendi kaudu, võrrandi (1.19) kasutamiseks on $\sigma_{x,max} = \sigma_{y,max} = 0,287 \frac{a^2p_0}{h^2}$.

Vaatleme järgnevalt juhtu, kus

$$p_{11} = \frac{16p_0}{\pi^2}$$

ja

$$p = \frac{16p_0}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Reas (a) säilitame ainult ühe liikme. Läbipainde jaoks saame järgmise avaldise:

$$W = \frac{16p_0}{D\pi^6} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{(1/a^2 + 1/b^2)^2}. \quad (e)$$

Lõike jõud Q_x ja Q_y ning väände jõud V_x ja V_y saame leida, kui asendame läbipainde võrrandist (e) võrrandite (1.30) abil. Need viivad seosteni

$$Q_x = \frac{16p_0}{\pi^3} \frac{\cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{a[(1/a)^2 + (1/b)^2]}, \quad Q_y = \frac{16p_0}{\pi^3} \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}}{b[(1/a)^2 + (1/b)^2]},$$

$$V_x = \frac{16p_0}{\pi^3} \frac{[1/a^2 + (2-\nu)1/b^2]}{a(1/a^2 + 1/b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (f)$$

$$V_y = \frac{16p_0}{\pi^3} \frac{[(2-\nu)1/a^2 + 1/b^2]}{b(1/a^2 + 1/b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Plaadile mõjuv summaarne koormus on

$$R_p = \int_0^a \int_0^b p dx dy = \frac{16p_0}{\pi^2} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy \quad \text{või} \quad R_p = \frac{64p_0}{\pi^4} ab, \quad (g)$$

mis mõjub koordinaattelje z positiivses suunas (allapoole). Lõikejõu, mis mõjub plaadi servadel, resultant on määratud järgnevalt:

$$R_V = - \int_0^b [|V_x(0, y)| + |V_x(a, y)|] dy - \int_0^a [|V_y(x, 0)| + |V_y(x, b)|] dx. \quad (h)$$

Võrrandi (h) paremal poolel olev negatiivne märk näitab, et löikejõu resultant on suunatud vastupidi z -telje suunaga. Arvutades neid integraale saame

$$R_V = - \frac{64p_0}{\pi^4} \frac{ab}{(a^2+b^2)^2} [a^4 + 2(2-v)a^2b^2 + b^4]. \quad (i)$$

Liites R_p ja R_V võrranditest (g) ja (i), saame tulemuseks

$$R_p + R_V = -128 \frac{p_0(1-v)}{\pi^4} \frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}. \quad (j)$$

Võrrandist (2.22d), kus $m = n = 1$, saame

$$M_{xy} = - \frac{16(1-v)}{\pi^4 ab} \frac{\cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}}{(1/a^2 + 1/b^2)^2}. \quad (k)$$

Vabalt toetatud nelinurkse plaadi nurka koondatud jõud on suunatud allapoole ühtlase koormuse p_0 korral, mis mõjub samuti allapoole. Iga selline jõud on esitatud võrrandiga

$$S = 2 |M_{xy}| = 2 \left[\frac{16(1-v)}{\pi^4 ab} \frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2} \right].$$

Seega kogu z -telje suunas on

$$R_S = 4S = 128 \frac{p_0(1-v)}{\pi^4} \frac{a^3b^3}{(a^2+b^2)^2}. \quad (l)$$

Liites nüüd võrdused (j) ja (l), saame

$$R_p + R_V + R_S = 0.$$

Huvitav on märkida, et löike jõud, Q_x ja Q_y , tasakaalustavad jaotatud koormuse p_0 . Arvutame löikejõu resultandi R_Q plaadi serval. Kuna

$$R_Q = - \int_0^b [|Q_x(0, y)| + |Q_x(a, y)|] dy - \int_0^a [|Q_y(x, 0)| + |Q_y(x, b)|] dx,$$

siis peale Q_x ja Q_y asendamist kahte esimesse võrrandisse (f), saame

$$R_Q = - \frac{64p_0}{\pi^4} ab. \quad (m)$$

Märk „miinus“ näitab, et R_Q on suunatud vastupidi z -telje suunaga. Liites võrrandid (g) ja (m) näeme, et

$$R_p + R_Q = 0.$$

Uurides täpsemalt Kirchhoff'i plaaditeooriat, võime veenduda, et lõikejõud üksi ei saa kirjeldada kogu toe reaktsiooni.

Näide 2.2

Nelinurkne seinapaneel on vabalt toetatud kõigist neljast servast ja koormuse intensiivsus $p_0 = const$. Seame ülesandeks määrata deformeerunud plaadi kuju.

Arvutame Fourier' rea kordajad koormuse reaks arendusel. Üsna hõlpsasti leiame

$$p_{mn} = \frac{4p_0}{uv} \int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta-v/2}^{\eta+v/2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

ehk

$$p_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b}. \quad (2.23)$$

Lisades need võrranditesse (2.20), saame läbipainde kahekordse rea kujul

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn[(m/a)^2 + (n/b)^2]^2}. \quad (2.24)$$

Selle tulemuse koondumine on suhteliselt kiire kui mõõtmed a ja b ei ole liiga väikesed. Siirde saame piisava täpsusega, kui võtame arvesse ka esimesed neli liiget.

Elastic response of plates

Summary

Kaile Kasepuu

The aim of this work is to introduce the Basic equations of the Kirchhoff's bending theory. The current study consists on two parts. In the first part we derive the governing differential equation for the deflection for thin plate bending.

In the second part we study the bending of thin rectangular plates subjected to the transverse pressure. We find the middle surface of the plate in the case of cylindrical bending. It appears that in this case the differential equation of equilibrium can be solved by direct integration.

Also we present Navier's method for rectangular plates with simply supported boundary conditions on all four edges. We look for the solution of the equilibrium equation in the form of double seires. Each term of this series is a product of trigonometrical functions which meet the boundary conditions spontaneously.

Kasutatud kirjandus

- [1] K. Laigna, *Tugevusõpetus*, Eesti Mereakadeemia, Tallinn, 2001
- [2] L. Poverus, R. Eek, *Ehitusmehaanika II*, Valgus, Tallinn, 1967
- [3] J. V. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, Taylor and Francis, Boca Raton, 2007
- [4] Ü. Tärno, *Plaadi- ja koorikumehaanika*, Tallinna Tehnikaülikool, Tallinn, 2000
- [5] E. Ventsel, T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, New York, 2001
- [6] J. R. Vinson, *The Behaviour of Thin Walled Structures: Beams, Plates and Shells*, University of Delaware press, Newark, 1989
- [7] J. R. Vinson, *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials, Including Sandwich Construction*, Springer, Dordrecht, 2005

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina _____ Kaile Kasepuu _____
(*autori nimi*)

(sünnikuupäev: _____ 24.02.1991 _____)

annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

_____ Elastsete plaatide painde ülesanded _____
(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on _____ Jaan Lellep _____,
(*juhendaja nimi*)

reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus/Tallinnas/Narvas/Pärnus/Viljandis, _____ 04.06.2013 _____ (*kuupäev*)