Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Nele Rosenberg

Keskväärtusteoreemid ja nendega seotud funktsionaalvõrrandid

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Toivo Leiger

Tartu 2015

Keskväärtusteoreemid ja nendega seotud funktsionaalvõrrandid

Bakalaureusetöö
Nele Rosenberg

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös esitatakse Lagrange'i, Fletti ja Pompeiu keskväärtusteoreemide teadaolevad tõestused ja rakendused ning selgitatakse nende geomeetrilist tähendust. Lagrange'i teoreemi puhul kirjeldatakse keskväärtust määrava punkti asümptootilist käitumist. Fletti teoreemi erinevate versioonide hulgast tõestatakse Trahani ja Tongi teoreemid ning kirjeldatakse nende kolme teoreemi vahekorda. Esitatakse üksikasjalikud tõestused Lagrange'i ja Pompeiu keskväärtusteoreemidega seotud aritmeetilise ja harmoonilise keskmisega määratud funktsionaalvõrrandite lahendamisest.

Märksõnad. Lagrange'i keskväärtusteoreem, Fletti keskväärtusteoreem, Pompeiu keskväärtusteoreem, funktsionaalvõrrandid, aritmeetiline keskmine, harmooniline keskmine.

Mean value theorems and functional equations associated with them

Bachelor's thesis
Nele Rosenberg

Abstract. In this bachelor's thesis we present proofs of Lagrange's, Flett's and Pompeiu's mean value theorems, their less known applications and explain the geometrical meaning of these theorems. The asymptotic behaviour of a point determining mean value is described in case of Lagrange's theorem. We prove two versions of Flett's theorem -Trahan's and Tong's theorems- and describe the connections between these three theorems. This thesis includes detailed solutions of functional equations determined by arithmetic or harmonic mean and associated with Lagrange's and Pompeiu's threorem.

Key words. Lagrange's mean value theorem, Flett's mean value theorem, Pompeiu's mean value theorem, functional equation, arithmetical mean, harmonic mean.

Sisukord

Sissejuhatus

Matemaatilise analüüsi põhikursuses tõestatakse järgmine diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreem, mida nimetatakse ka Lagrange'i keskväärtusteoreemiks.

Teoreem 0.1. *Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ intervallis D diferentseeruv. Siis punktide $x < y$ korral intervallist D leidub $c = c(x, y)$ omadusega*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c). \tag{1}$$

Üldjuhul ei õnnestu punkti $c(x, y)$ leida. Mõnedel juhtudel see siiski õnnestub, näiteks, kui funktsioon f on ruutpolünoom, siis $c(x, y) = \dfrac{x + y}{2}$, s.t $c(x, y)$ on lõigu $[x, y]$ keskpunkt. Sellest tulemusest lähtudes tekib järgmine küsimus. Milliste funktsioonide $f\colon D \to \mathbb{R}$ korral kehtib võrrand (1), kui selles $c(x, y) = \dfrac{x + y}{2}$? Konkreetsemalt, kas iga võrrandit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right) \tag{2}$$

rahuldav funktsioon f on ruutpolünoom. Allpool näeme, et vastus sellele küsimusele on positiivne.
Seosega (2) on määratud diferentsiaalvõrrand, kuid üldjuhul vaadeldakse funktsionaalvõrrandit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = h(c(x, y)), \tag{3}$$

kus f ja h on intervallis D määratud otsitavad funktsioonid ja $c\colon D \times D \to \mathbb{R}$ on selline kahe muutuja funktsioon, mille väärtused kuuluvad intervalli D. Oluline on, et kehtiks tingimus $c(x, y) \in [x, y]$, mistõttu eeldatakse, et funktsioon $c\colon D \times D \to \mathbb{R}$ on mingi keskmine.

Definitsioon 0.2. Pidevat kahe muutuja funktsiooni $c\colon D \times D \to D$ nimetatakse *keskmiseks,* kui

1) $c(x, y) = c(y, x)$,

2) $c(x, x) = x$,

3) $\min\{x, y\} \le c(x, y) \le \max\{x, y\}$

kõikide $x, y \in D$ korral.

Selles bakalauseusetöös on tegemist kahe keskmisega:

1) aritmeetilise keskmisega

$$c\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ c(x, y) := \frac{x + y}{2},$$

2) harmoonilise keskmisega

$$c\colon [0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty),\ \ c(x,y):=\frac{2xy}{x+y}.$$

Aritmeetilise ja harmoonilise keskmise puhul on eespool püstitatud funktsionaalvõrrand (3) lahendatud 1989. aastal J. Aczéli ja M. Kuczma töös [1].

Lisaks Lagrange'i teoreemile käsitletakse selles bakalaureusetöös ka Fletti ja Pompeiu keskväärtusteoreeme. Pompeiu keskväärtusteoreemiga seotud funktsionaalvõrrand on samuti lahendatud Aczéli ja Kuczma artiklis [1]. Fletti teoreemiga seotud probleemidest ja selle rakendustest annavad hea ülevaate O. Hutníku ja J. Molnárová artiklid [2] ja [3].

Käesoleva bakalaureusetöö üheks eesmärgiks on esitada Lagrange'i ja Fletti keskväärtusteoreemide teadaolevad tõestused ja nende teoreemide vähem tuntud rakendusi. Teiseks eesmärgiks on anda Aczéli ja Kuczma teoreemide üksikasjalikud tõestused Lagrange'i ja Pompeiu keskväärtusteoreemiga seotud funktsionaalvõrrandite lahendamisest. Bakalaureusetöö on referatiivne ja põhineb artiklitel [1], [2], [3], [5], [6] ja raamatul [4].

Töö koosneb kahest peatükist. Esimeses peatükis keskendutakse Lagrange'i, Fletti ja Pompeiu keskväärtusteoreemide tõestustele ja nende rakendustele. Esimeses alapunktis esitatakse Lagrange'i keskväärtusteoreemi kaks erinevat tõestust. Tuuakse selle teoreemi rakendusi ja näiteid ning uuritakse keskväärtust määrava punkti asümptootilist käitumist. See alapunkt põhineb raamatul [4]. Teises alapunktis esitatakse Fletti keskväärtusteoreemi kaks tõestust, millest esimene põhineb Rolle'i ja teine Fermat' teoreemil. Tuuakse Fletti teoreemi kaks rakendust. Tõestatakse Fletti teoreemi kaks erinevat versiooni, Trahani ja Tongi teoreemid, ning selgitatakse nende kolme teoreemi vahekorda. Selle alapunkti koostamisel kasutatakse artikleid [2], [3], [6], [5] ja raamatut [4]. Kolmandas alapunktis, mis põhineb raamatul [4], tõestatakse Pompeiu keskväärtusteoreem.

Teine peatükk on pühendatud keskväärtusteoreemidega seotud funktsionaalvõrranditele. Esimeses alapunktis tõestatakse teoreem, mis annab lahenduse Lagrange'i keskväärtusteoreemiga seotud funktsionaalvõrrandile aritmeetilise keskmise korral. Teises alapunktis tõestatakse sarnane teoreem Pompeiu keskväärtusteoreemiga seotud funktsionaalvõrrandi jaoks. Kolmandas alapunktis lahendatakse harmoonilise keskmisega määratud funktsionaalvõrrandid.

Lõpetame sissejuhatuse allpool kasutatavate väidetega matemaatilise analüüsi põhikursusest.

Teoreem 0.3 (Cantori teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest). *Kui*

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\dots$$

ja $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *siis leidub selline punkt* a, *et* $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, *seejuures*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teoreem 0.4 (Bolzano-Cauchy teoreem). *Kui* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *on pidev intervallis* D, *siis suvaliste* $y_1 = f(x_1)$ *ja* $y_2 = f(x_2)$ *ning arvu* A *korral, mis on* y_1 *ja* y_2 *vahel, leidub* $a \in (x_1, x_2)$ *omadusega* $A = f(a)$.

Teoreem 0.5 (Weierstrassi teoreem). *Lõigus pideval funktsioonil on selles lõigus suurim ja vähim väärtus.*

Teoreem 0.6 (Fermat' teoreem). *Olgu funktsioon* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *intervalli* D *sisepunktis* c *diferentseeruv ning olgu tal selles punktis lokaalne ekstreemum. Siis* $f'(c) = 0$.

Teoreem 0.7 (Rolle'i teoreem). *Kui funktsioon* f *on lõigus* $[x_1, x_2]$ *pidev, vahemikus* (x_1, x_2) *diferentseeruv ning* $f(x_1) = f(x_2)$, *siis leidub punkt* $c \in (x_1, x_2)$ *nii, et* $f'(c) = 0$.

Teoreem 0.8 (diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreem). *Olgu* f *lõigus* $[a, b]$ *integreeruv funktsioon. Kui funktsioon* f *on vahemiku* (a, b) *mingis punktis* c *pidev, siis funktsioon* G, *mis on defineeritud seosega* $G(x) := \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, *on punktis* c *diferentseeruv ja* $G'(c) = f(c)$.

1 Keskväärtusteoreemid

1.1 Lagrange'i keskväärtusteoreem

Käesolevas alapunktis esitame Lagrange'i keskväärtusteoreemi ja selle kaks tõestust, toome näiteid ja rakendusi ning uurime keskväärtust määrava punkti asümptootilist käitumist.

1.1.1 Lagrange'i teoreem ja selle kaks tõestust

Teoreem 1.1 (Lagrange'i teoreem). *Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ lõigus $[a,b]$ diferentseeruv, siis leidub $c \in (a,b)$ omadusega*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Tõestus. Defineerime funktsiooni $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seosega

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a).$$

Kuna f on pidev lõigus $[a,b]$, siis on seda ka g, seejuures

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

iga $x \in (a,b)$ korral.
Paneme tähele, et

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) - f(a) = 0$$

ja

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(a) = 0$$

ehk $g(a) = g(b) = 0$. Järelikult g rahuldab teoreemi 0.7 tingimusi, seda rakendades leiame sellise punkti $c \in (a,b)$, et

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

seega

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$

mida oligi tarvis näidata. □

Lagrange'i teoreemi teise versiooni tõestuse jaoks vajame järgmist lemmat.

Lemma 1.2. *Kui* $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = a$ *ja* $0 < \mu_n < 1$ *iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral, siis*

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n u_n + (1-\mu_n)v_n) = a.$$

Tõestus. Eeldame, et lemma eeldused on täidetud. Peame näitama, et

$$\lim_{n\to\infty} (\mu_n u_n + (1-\mu_n)v_n) = a.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (\mu_n u_n + (1-\mu_n)v_n - a) &= \lim_{n\to\infty} ((\mu_n u_n + (1-\mu_n)v_n) - (\mu_n a + (1-\mu_n)a)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mu_n(u_n - a) + (1-\mu_n)(v_n - a)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_n(u_n - a) + \lim_{n\to\infty} (1-\mu_n)(v_n - a).\end{aligned}$$

Kuna $u_n \to a$ ja $v_n \to a$ ning jada (μ_n) on tõkestatud, siis

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(u_n - a) + \lim_{n\to\infty} (1-\mu_n)(v_n - a) = 0 + 0 = 0,$$

s.t $\lim_{n\to\infty} (\mu_n u_n + (1-\mu_n)v_n) = a$. □

Teoreem 1.3 (Lagrange'i teoreem). *Olgu* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *diferentseeruv intervallis* D *ning olgu* $x_1, x_2 \in D$ *suvalised punktid, kus* $x_1 < x_2$. *Siis leidub* $c = c(x_1, x_2) \in [x_1, x_2]$ *omadusega*

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Tõestus. Tähistame $m := \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ja $y := \dfrac{x_2 + x_1}{2}$, s.t y on lõigu $[x_1, x_2]$ keskpunkt. Saame osalõigud $[x_1, y]$ ja $[y, x_2]$, kusjuures mõlema pikkus on $h := \dfrac{x_2 - x_1}{2}$. Tähistame veel

$$m_1 := \frac{f(y) - f(x_1)}{h} \quad \text{ja} \quad m_2 := \frac{f(x_2) - f(y)}{h}$$

ning paneme tähele, et

$$\min\{m_1, m_2\} \le m \le \max\{m_1, m_2\}.$$

Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et $m_1 > m$ ja $m_2 > m$, s.t

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{2h} < \frac{f(y) - f(x_1)}{h} = \frac{2(f(y) - f(x_1))}{2h},$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{2h} < \frac{f(x_2) - f(y)}{h} = \frac{2(f(x_2) - f(y))}{2h},$$

siis nende võrratuste liitmisel saame vastuolu $2(f(x_2) - f(x_1)) < 2(f(x_2) - f(x_1))$.

Analoogiliselt, kui oletada vastuväiteliselt, et $m_1 < m$ ja $m_2 < m$, s.t

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{2h} > \frac{f(y) - f(x_1)}{h} = \frac{2(f(y) - f(x_1))}{2h},$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{2h} > \frac{f(x_2) - f(y)}{h} = \frac{2(f(x_2) - f(y))}{2h},$$

siis saame vastuolu $2(f(x_2) - f(x_1)) > 2(f(x_2) - f(x_1))$.
Meie eesmärk on näidata, et leidub $c \in [x_1, x_2]$ omadusega $m = f'(c)$.
Defineerime funktsiooni $g\colon [x_1, y] \to \mathbb{R}$ seosega

$$g(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

siis g on pidev funktsioon: iga $a \in [x_1, y]$ korral

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} g(x) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\ &= \frac{1}{h}\Big(\lim_{x\to a} f(x+h) - \lim_{x\to a} f(x)\Big)\\ &= \frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right) = g(a).\end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$g(x_1) = \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = m_1 \text{ ja } g(y) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = m_2.$$

Kuna $\min\{m_1, m_2\} \le m \le \max\{m_1, m_2\}$, siis lause 0.4 kohaselt leidub selline $z_1 \in (x_1, y)$, et $g(z_1) = m$. Tähistame

$$a_1 := z_1 \text{ ja } b_1 := z_1 + h, \text{ siis } h = b_1 - a_1 \text{ ja } x_1 \le a_1 < b_1 \le x_2,$$

seejuures

$$m = g(z_1) = \frac{f(a_1+h) - f(a_1)}{h} = \frac{f(b_1) - f(a_1)}{h}.$$

Kordame eelnevat mõttekäiku, asendades lõigu $[x_1, x_2]$ lõiguga $[a_1, b_1]$. Sel juhul saame lõigu $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ nii, et $m = \dfrac{f(b_2) - f(a_2)}{b_2 - a_2}$. Niimoodi jätkates jõuame lõikude jadani

$$[x_1, x_2] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots,$$

kus

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{2^n} = 0.$$

Lause 0.3 kohaselt leidub üheselt määratud punkt c omadusega $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$, seejuures

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Jääb veenduda, et $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Eelneva arutelu põhjal on võimalik, et c on mingi lõigu $[a_N, b_N]$ vasakpoolne otspunkt, s.t $c = a_N$ mingi $N \in \mathbb{N}$ korral, siis $c = a_n$ iga $n \geq N$ puhul. Sel juhul

$$m = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c},$$

seega

$$m = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Analoogiliselt, c võib olla ka mingi lõigu $[a_N, b_N]$ parempoolne otspunkt, s.t $c = b_N$ mingi $N \in \mathbb{N}$ korral, siis $c = b_n$ iga $n \geq N$ puhul. Sel juhul

$$m = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n},$$

seega

$$m = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} = \lim_{x\to c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c).$$

Kui $a_n < c < b_n$ mingist indeksist N alates, siis defineerime $\mu_n := \dfrac{c - a_n}{b_n - a_n}$ ja paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
&0 < \mu_n < 1, \text{ sest } a_n < c < b_n,\\
&1 - \mu_n = 1 - \frac{c - a_n}{b_n - a_n} = \frac{b_n - a_n - c + a_n}{b_n - a_n} = \frac{b_n - c}{b_n - a_n},\\
&\mu_n \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} + (1 - \mu_n)\frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} =\\
&= \frac{c - a_n}{b_n - a_n} \cdot \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} + \frac{b_n - c}{c_n - a_n} \cdot \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} =\\
&= \frac{1}{b_n - a_n}(f(c) - f(a_n) + f(b_n) - f(c)) =\\
&= \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = m
\end{aligned}$$

iga $n \geq \mathbb{N}$ korral. Rakendame lemmat 1.2 juhul, kui $u_n = \dfrac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n}$ ja $v_n = \dfrac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c}$.
Kuna

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} = \lim_{x\to c} \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = f'(c)$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c),$$

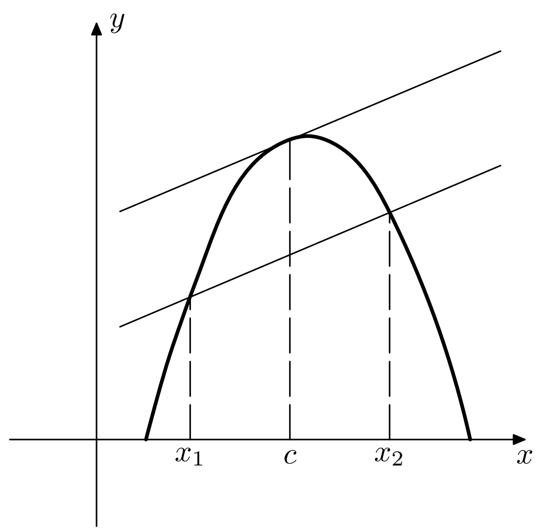
siis lemma 1.2 kohaselt

$$m = \lim_{n\to\infty} \left(\mu_n \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} + (1 - \mu_n) \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} \right) = f'(c).$$

Teoreem on tõestatud. $\square$

On lihtne näha, et teoreemi 1.3 väide järeldub vahetult teoreemist 1.1. Seetõttu teoreemis 1.3 asub punkt c vahemikus (a, b). See on asjaolu, mis teoreemi 1.3 tõestusest ei ilmne.

Lagrange'i teoreemi geomeetriline tähendus. Diferentseeruva funktsiooni f määramispiirkonnas fikseeritud lõigu $[x_1, x_2]$ korral saab vähemalt ühes graafiku punktis $(c, f(c))$ võtta puutuja, mis on paralleelne läbi graafiku punktide $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ tõmmatud lõikajaga.



Joonis 1. *Lagrange'i keskväärtusteoreemi geomeetriline tähendus.*

1.1.2 Lagrange'i teoreemi rakendusi

Järgmised laused, mis tõestatakse matemaatilise analüüsi põhikursuses, demonstreerivad, kuidas Lagrange'i keskväärtusteoreemi rakendatakse funktsioonide käitumise uurimisel.

Tähistame intervalli D korral sümboliga D° hulga D sisepunktide hulka.

Lause 1.4. *Kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on pidev ja $f'(x) = 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on intervallis D konstantne funktsioon.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad sellised punktid x_1 ja x_2 intervallis D, et $f(x_1) \neq f(x_2)$, olgu $x_1 < x_2$. Teoreemi 1.3 kohaselt leidub $c \in (x_1, x_2)$ omadusega

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0,$$

kuid see on vastuolus meie eeldusega, et $f'(x) = 0$ iga $x \in D^\circ$ korral. $\square$

Lause 1.5. *Olgu funktsioonid $f\colon D \to \mathbb{R}$ ja $g\colon D \to \mathbb{R}$ intervallis D pidevad ning hulgas D° diferentseeruvad. Kui $f'(x) = g'(x)$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f ja g erinevad intervallis D vaid konstandi poolest.*

Tõestus. Olgu $h := f - g$, siis $h'(x) = 0$ iga $x \in D^\circ$ korral. Lause 1.4 põhjal $h(x) = c$ kõikide $x \in D$ puhul, kus c on mingi konstant. Seega oleme saanud, et f ja g erinevaid vaid konstandi poolest. $\square$

Lause 1.6. *Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ intervallis D pidev ja hulgas D° diferentseeruv. Kui $f'(x) > 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on rangelt kasvav funktsioon intervallis D. Kui $f'(x) < 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, siis f on rangelt kahanev funktsioon intervallis D.*

Tõestus. Eeldame, et $f'(x) > 0$ iga $x \in D^\circ$ korral, olgu $x_1 < x_2$. Teoreemi 1.3 kohaselt leidub $c \in (x_1, x_2)$ omadusega

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

seejuures $f'(c) > 0$. Seega $f(x_2) > f(x_1)$, s.t f on rangelt kasvav funktsioon.
Lause teise väite tõestus on analoogiline. $\square$

1.1.3 Näiteid Lagrange'i teoreemi rakendamisest

Järgnevad näited on võetud raamatust [4].

Näide 1.7. Näitame, et kui $x > -1$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib Bernoulli võrratus

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Vaatleme kõigepealt juhtu $x \geq 0$. Defineerime funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seosega

$$f(t) = (1 + t)^n.$$

Kuna funktsioon f on hulgas $\mathbb{R}$ diferentseeruv, siis ta rahuldab teoreemi 1.3 eeldusi, mistõttu leidub $c \in (0, x)$ omadusega

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c)$$

ehk

$$(1 + x)^n - 1 = xn(1 + c)^{n-1} > nx,$$

s.t kehtib Bernoulli võrratus.
Olgu nüüd $-1 < x < 0$. Teoreemi 1.3 kohaselt leidub $c \in (x, 0)$ omadusega

$$f(0) - f(x) = (0 - x)f'(c).$$

Saame, et

$$(1 + x)^n - 1 = xn(1 + c)^{n-1} > nx,$$

s.t kehtib Bernoulli võrratus.

Näide 1.8. Veendume, et Lagrange'i keskväärtusteoreemi saab rakendada võrratuse

$$x \geq 1 + \ln x$$

tõestamiseks iga $x > 0$ korral.
Olgu $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ defineeritud seosega

$$f(t) = \ln t.$$

Kuna f on intervallis $(0, \infty)$ diferentseeruv, siis iga $b > 1$ korral rahuldab ta teoreemi 1.3 tingimusi, seega leidub $c \in (1, b)$ omadusega

$$f(b) - f(1) = (b-1)f'(c),$$

mistõttu

$$\ln b = \frac{b-1}{c}.$$

Kuna $1 < c < b$, siis

$$\frac{b-1}{b} < \frac{b-1}{c} < \frac{b-1}{1}$$

seega

$$1 - \frac{1}{b} < \ln b < b - 1.$$

Vasakpoolsest võrratusest näeme, et

$$1 + \ln \frac{1}{b} < \frac{1}{b} < 1.$$

Võttes $x = \dfrac{1}{b}$, jõuame seoseni $x > 1 + \ln x$ kõikide $x \in (0, 1)$ korral.
Parempoolsest võrratusest $\ln b < b - 1$ saame, et

$$x > 1 + \ln x$$

iga $x > 1$ korral.
Seega oleme näidanud, et range võrratus $x > 1 + \ln x$ kehtib kõikide $x \in (0, 1)$ ja $x > 1$ korral. Järelikult, võrratus $x \geq 1 + \ln x$ kehtib iga $x \in (0, \infty)$ puhul.

Näide 1.9. Tõestame Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil võrratuse

$$a^\alpha < (a\alpha + b(1-\alpha))b^{\alpha-1}, \tag{4}$$

kus a ja b on positiivsed reaalarvud ning $\alpha \in (0, 1)$.
Fikseeritud $\alpha \in (0, 1)$ puhul defineerime funktsiooni $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ seosega

$$f(t) = t^\alpha.$$

Teoreemi 1.3 kohaselt leidub $c \in (a,b)$ omadusega

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

ehk

$$\frac{b^\alpha - a^\alpha}{b-a} = \alpha c^{\alpha-1}. \tag{5}$$

Kuna $c \in (a,b)$ ja $\alpha - 1 < 0$, siis

$$c^{\alpha-1} > b^{\alpha-1}$$

ning

$$\alpha c^{\alpha-1} > \alpha b^{\alpha-1}. \tag{6}$$

Võrduse (5) ja võrratuse (6) põhjal

$$b^\alpha - a^\alpha = \alpha c^{\alpha-1}(b-a) > \alpha b^{\alpha-1}(b-a),$$

seega

$$a^\alpha < b^\alpha - \alpha b^{\alpha-1}(b-a) = b^{\alpha-1}(b - \alpha b + \alpha a) = (\alpha a + b(1-\alpha))b^{\alpha-1},$$

mida oligi tarvis näidata.

Lemma 1.10. *Olgu $g\colon D \to \mathbb{R}$ funktsioonide $f\colon D \to E$ ja $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ liitfunktsioon, s.t $g = \varphi \circ f$. Kui φ ja g on rangelt kasvavad funktsioonid, siis on ka f rangelt kasvav. Kui φ ja g on rangelt kahanevad funktsioonid, siis on ka f rangelt kahanev.*

Tõestus. Olgu g ja φ rangelt kasvavad funktsioonid. Oletame vastuväiteliselt, et f ei ole rangelt kasvav funktsioon, s.t leiduvad $x_1, x_2 \in D$ nii, et $x_1 < x_2$ ja

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

Sel juhul, kuna φ on rangelt kasvav funktsioon,

$$g(x_1) = \varphi(f(x_1)) \geq \varphi(f(x_2)) = g(x_2),$$

mis on vastuolus eeldusega, et g on rangelt kasvav.
Lause teise väite tõestus on analoogiline.

$\square$

Näide 1.11. Olgu

$$f_1(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \text{ ja } f_2(x) := \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1},$$

kus $x > 0$. Näitame, et funktsioon $f_1\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ on rangelt kasvav ja $f_2\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ rangelt kahanev.

Veendume kõigepealt, et f_1 on rangelt kasvav. Defineerime veel funktsiooni $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ seosega

$$\varphi(x) := \ln x,$$

siis liitfunktsioon $g := \varphi \circ f_1\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ on määratud seosega $g(x) := \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)^x$.
Funktsiooni φ diferentseeruvusest järeldub, et suvalise $x > 0$ korral leidub selline punkt $c(x) \in (x, x+1)$ omadusega

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = f'(c(x)),$$

seetõttu

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c(x)} \tag{7}$$

iga $x > 0$ korral.
Kuna

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x(\ln(x+1) - \ln x)\right] \\ &= \ln(x+1) - \ln x + x\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right] \\ &= \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{c(x)} - \frac{1}{x+1} > 0 \text{ (vt (7))}, \end{aligned}$$

siis $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ on rangelt kasvav funktsioon. Ka logaritmfunktsioon $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ on rangelt kasvav, seega lemma 1.10 põhjal on funktsioon f_1 rangelt kasvav.
Analoogiliselt, kui $g = \varphi \circ f_2$, siis

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x+1)(\ln(x+1) - \ln x)\right] \\ &= \ln(x+1) - \ln x + (x+1)\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right] \\ &= \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{c(x)} - \frac{1}{x} < 0, \end{aligned}$$

seega g on rangelt kahanev ning lemma 1.10 põhjal on seda ka funktsioon f_2.

Näide 1.12. Keskväärtusteoreemi saab kasutada tuntud võrduse

$$\int_0^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

tõestamiseks, kui $\alpha \geq 0$ ja $b > 0$.
Defineerime funktsiooni $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seosega

$$\varphi(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Kuna φ on diferentseeruv, siis iga $k > 0$ korral leidub punkt $c \in (k-1, k)$ omadusega

$$\frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(k-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} = c^{\alpha}. \tag{8}$$

Kuna $c \in (k-1, k)$, siis

$$(k-1)^{\alpha} < c^{\alpha} < k^{\alpha}. \tag{9}$$

Asendades võrdusest (8) c^{α} võrratusse (9), jõuame seosteni

$$(k-1)^{\alpha} < \frac{k^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{(k-1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} < k^{\alpha},$$

seega suvalise $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$$

ehk

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} - n^{\alpha} \right) < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{n^{\alpha+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \right).$$

Vasakpoolsest võrratusest saame, et

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} < \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{n},$$

seega

$$\frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} < \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{n},$$

mistõttu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1}. \tag{10}$$

Vaatleme lõigus $[0, b]$ mingit alajaotust

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

võtame suvaliselt $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ iga $k = 1, \ldots, n$ korral. Riemanni integraali definitsiooni põhjal

$$\int_0^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

kus $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ on lõigu $[x_{k-1}, x_k]$ pikkus ja $\lambda(T) := \max\{\Delta x_k \mid k = 1, \ldots, n\}$. Kui

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{b}{n}, x_2 = \frac{2b}{n}, x_3 = \frac{3b}{n}, \ldots, x_k = \frac{kb}{n}, \ldots, x_n = b$$

ning $\xi_k := \frac{kb}{n}$, siis juhul $f(x) = x^\alpha$ saame seosest (10), et

$$\int_0^b x^\alpha \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha b^\alpha}{n^\alpha} \cdot \frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha$$
$$= b^{\alpha+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha = \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide 1.13. Teatud eeldustel saab Lagrange'i keskväärtusteoreemi rakendada liitfunktsiooni diferentseerimisreegli tõestamisel. Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ diferentseeruv punktis $c \in (a,b)$. Olgu φ diferentseeruv intervallis, mis sisaldab hulka

$$D := \{f(c+h) \mid |h| < \delta\}$$

mingi $\delta > 0$ korral, eeldame, et φ' on pidev kohal $f(c)$. Veendume, et liitfunktsioon $\varphi \circ f$ on diferentseeruv punktis c ja

$$(\varphi \circ f)'(c) = \varphi'(f(c))f'(c).$$

Funktsioon φ on diferentseeruv hulgas D, järelikult Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leidub $\theta(h)$, mis on punktide $f(c)$ ja $f(c+h)$ vahel nii, et

$$\varphi(f(c+h)) - \varphi(f(c)) = \varphi'(\theta(h))[f(c+h) - f(c)].$$

Kuna f on diferentseeruv punktis c, siis

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c).$$

Funktsiooni f pidevuse tõttu punktis c kehtib võrdus $\lim\limits_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$, mistõttu $\lim\limits_{h\to 0} \theta(h) = f(c)$, sest $\theta(h)$ on punktide $f(c)$ ja $f(c+h)$ vahel. Kasutades tuletise φ' pidevust punktis $f(c)$, saame, et

$$\lim_{h\to 0} \varphi'(\theta(h)) = \varphi'\left(\lim_{h\to 0} \theta(h)\right) = \varphi'(f(c)).$$

Seetõttu

$$\begin{aligned}
\varphi'(f(c))f'(c) &= \lim_{h\to 0} \varphi'(\theta(h)) \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \varphi'(\theta(h)) \left[\frac{f(c+h) - f(c)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\varphi(f(c+h)) - \varphi(f(c))}{h}\right] \\
&= (\varphi \circ f)'(c),
\end{aligned}$$

mida oligi tarvis tõestada.

1.1.4 Keskväärtust määravate punktide asümptootiline käitumine

Alustame kahe näitega diferentseeruvatest funktsioonidest, mille puhul keskväärtust määrav punkt $c(x) \in (a, x)$ läheneb protsessis $x \to a+$ asümptootiliselt lõigu $[a, x]$ keskpunktile, s.t

$$\lim_{x \to a+} \frac{c(x) - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

Seejärel tõestame teoreemi, mis fikseerib selliste funktsioonide klassi, milles niisugune keskväärtust määrava punkti asümptootiline käitumine omane on.

Näide 1.14. Vaatleme funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$f(t) := t^2.$$

Kuna f on lõigus $[1, 2]$ diferentseeruv, siis Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leidub iga $x \in (1, 2)$ korral punkt $c(x) \in (1, x)$ omadusega

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c),$$

s.t

$$2c = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

ehk

$$c = \frac{1}{2}(x + 1).$$

Järelikult

$$\lim_{x \to 1+} \frac{c - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{1}{2}(x + 1) - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}.$$

Näide 1.15. Vaatleme funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on määratud seosega

$$f(t) = e^t.$$

Funktsioon f on lõigus $[0, 2]$ diferentseeruv, järelikult Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leidub iga $x \in (0, 2)$ korral punkt $c(x) \in (0, x)$ omadusega

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c(x))$$

ehk

$$e^{c(x)} = \frac{e^x - 1}{x},$$

s.t

$$c(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x}.$$

Teatavasti iga $z \in \mathbb{R}$ korral

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

seetõttu

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

ehk

$$c(x) = \ln \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$$

iga $x \in (0, 2]$ korral. Tähistame $s(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}$ ja vaatleme piirväärtust

$$\lim_{x\to 0+} \frac{c(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln s(x)}{x}. \tag{11}$$

Kuna astmerea summa s on pidev selle astmerea koonduvusvahemikus $(-\infty, \infty)$, siis

$$\lim_{x\to 0+} s(x) = \lim_{x\to 0+} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 0+} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1,$$

seega logaritmfunktsiooni pidevuse tõttu

$$\ln \lim_{x\to 0+} s(x) = \lim_{x\to 0+} \ln s(x) = \ln 1 = 0.$$

Piirväärtuse (11) korral on tegemist määramatusega $\frac{0}{0}$, niisiis võime rakendada selle arvutamiseks l'Hospitali reeglit. Kuna astmerida võib igas tema koonduvusvahemiku punktis liikmeti diferentseerida, siis

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\ln s(x)}{x} &= \lim_{x\to 0+} \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0+} s'(x)}{\lim\limits_{x\to 0+} s(x)} = \lim_{x\to 0+} s'(x) = \lim_{x\to 0+} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\frac{x^{k-2}}{k!} \\ &= \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{\infty} (k-1)\frac{x^{k-2}}{k!}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Teoreem 1.16. *Olgu funktsioon f pidevalt diferentseeruv lõigus $[a, b]$ ning kaks korda diferentseeruv punktis a, olgu $f''(a) \neq 0$. Siis seosega*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c(x)) \tag{12}$$

määratud punkt $c(x)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{x\to a+} \frac{c(x) - a}{x - a} = \frac{1}{2}.$$

Tõestus. Eeldame, et teoreemi eeldused on täidetud. Leiame

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}.$$

Esiteks, Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt saame seosest (12), et

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2} &= \lim_{x\to a+} \frac{(x-a)f'(c(x))-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2} \\
&= \lim_{x\to a+} \frac{f'(c(x))-f'(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a+} \frac{f'(c(x))-f'(a)}{c(x)-a} \lim_{x\to a+} \frac{c(x)-a}{x-a} \\
&= f''(a) \lim_{x\to a+} \frac{c(x)-a}{x-a}.
\end{aligned}$$

Teiseks, kuna

$$\lim_{x\to a+} (f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)) = f(a)-f(a) = 0$$

tänu funktsiooni f pidevusele ja

$$\lim_{x\to a+} (x-a)^2 = 0,$$

saame rakandada l'Hospitali reeglit:

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2}f''(a).$$

Järelikult punktide $c(x) \in (a,x)$ jaoks kehtib võrdus

$$f''(a) \lim_{x\to a+} \frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{2}f''(a),$$

ning kuna $f''(a) \neq 0$, siis

$$\lim_{x\to a+} \frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{2}.$$

□

1.2 Fletti tüüpi keskväärtusteoreemid

Selles alapunktis tõestame Fletti keskväärtusteoreemi kahel viisil ja esitame selle kaks rakendust. Tõestame Fletti teoreemiga sarnased teoreemid, Trahani ja Tongi teoreemid, ning selgitame nende kolme teoreemi vahekorda.

1.2.1 Fletti teoreem, selle tõestused ja erinevad versioonid

Alustame Lagrange'i keskväärtusteoreemi tuntud rakendusega.

Lause 1.17 (integraalarvutuse keskväärtusteoreem). *Kui $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, siis leidub selline $c \in (a,b)$ omadusega*

$$g(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Tõestus. Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ defineeritud seosega

$$f(x) := \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemi põhjal on f lõigus $[a,b]$ diferentseeruv ning $f'(x) = g(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Lagrange'i keskväärtusteoreemi kohaselt leidub punkt $c \in (a,b)$ omadusega

$$f'(c) = \frac{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t - \int_a^a g(t)\mathrm{d}t}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Niisiis, $g(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$ $\square$

Järgnev arutelu on lähtekohaks Fletti keskväärtusteoreemiga seotud probleemiasetustele. Eeldame lisaks funktsiooni $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ pidevusele veel, et

$$g(a) = 0 \text{ ja } \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

ning vaatleme funktsiooni

$$\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R},\ \ \varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t, & \text{kui } x \in (a,b], \\ 0, & \text{kui } x = a. \end{cases}$$

See funktsioon on pidev ja vahemikus (a,b) diferentseeruv, seejuures $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, mistõttu Rolle'i teoreemi kohaselt $\varphi'(c) = 0$ mingi $c \in (a,b)$ korral. Kuna

$$\varphi'(c) = \left(\frac{1}{c-a}\int_a^c g(t)\mathrm{d}t\right)' = -\frac{1}{(c-a)^2}\int_a^c g(t)\mathrm{d}t + \frac{g(c)}{c-a},$$

siis

$$g(c) = \frac{1}{c-a}\int_a^c g(t)\mathrm{d}t.$$

Kui tähistada

$$f(x) := \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$$

iga $x \in [a,b]$ korral, siis võrdus $f'(x) = g(x)$ saab punktis $x = c$ kuju

$$f'(c) = \frac{1}{c-a}\int_a^c g(t)\mathrm{d}t = \frac{\int_a^c g(t)\mathrm{d}t - \int_a^a g(t)\mathrm{d}t}{c-a} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Üldisemalt kirjeldab seda tüüpi seoseid järgmine keskväärtusteoreem.

Teoreem 1.18 **(Fletti teoreem).** *Kui $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv ja $f'(a) = f'(b)$, siis leidub selline $c \in (a,b)$, et*

$$f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Me esitame selle teoreemi kaks tõestust, mis on toodud Hutníku ja Molnárová ülevaateartiklites [2] ja [3]. Esimene on originaaltõestus, mis põhineb Rolle'i teoreemil, teine kasutab Fermat' teoreemi.
Alustame esimese tõestusega.

Tõestus. **1.** Kõigepealt vaatleme juhtu, kus $f'(a) = f'(b) = 0$. Olgu $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ defineeritud seosega

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{kui } x \in (a,b], \\ f'(a), & \text{kui } x = a. \end{cases} \tag{13}$$

On selge, et g on pidev poollõigus $(a,b]$, kuid kuna $\lim\limits_{x\to a+} g(x) = f'(a) = g(a)$, siis g on kogu lõigus $[a,b]$ pidev. Poollõigus $(a,b]$ on g diferentseeruv funktsioon:

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)' = \frac{f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2} = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}. \tag{14}$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et leidub punkt $c \in (a,b)$ omadusega $g'(c) = 0$.
Vaatleme kolme võimalikku juhtu. ***Esiteks***, olgu $g(b) = 0$. Kuna $g(a) = f'(a) = 0$, siis Rolle'i teoreemi põhjal $g'(c) = 0$ mingi $c \in (a,b)$ korral.
Teiseks, kui $g(b) > 0$, siis seose (14) tõttu

$$g'(b) = \frac{f'(b)}{b-a} - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} = -\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2} = -\frac{g(b)}{b-a} < 0. \tag{15}$$

Saame leida $x_1 \in (a,b)$ nii, et $g(x_1) > g(b)$: kui oletada vastuväiteliselt, et $g(x) \le g(b)$ kõikide $x \in (a,b)$ korral, siis

$$g'(b) = \lim_{x\to b-} \frac{g(b)-g(x)}{b-x} \ge 0,$$

mis on vastuolus tingimusega (15). Niisiis, $g(a) = 0 < g(b) < g(x_1)$. Tänu funktsiooni g pidevusele saame lõigus $[a,x_1]$ talle rakendada Bolzano-Cauchy teoreemi: leidub punkt

$x_0 \in [a, x_1]$ omadusega $g(x_0) = g(b)$. Nüüd saame samale funktsioonile lõigus $[x_0, b]$ rakendada Rolle'i teoreemi, mille kohaselt leidub selline $c \in (x_0, b) \subset (a, b)$, et $g'(c) = 0$.
Kolmandaks, kui $g(b) < 0$, siis seose (14) põhjal

$$g'(b) = -\frac{g(b)}{b-a} > 0. \tag{16}$$

Nagu eelneval juhul, leiame punkti $x_1 \in (a, b)$ omadusega $g(x_1) < g(b)$, siis kehtivad seosed $g(x_1) < g(b) < 0 = g(a)$. Rakendades funktsioonile g lõigus $[a, x_1]$ Bolzano-Cauchy teoreemi, tänu funktsiooni g pidevusele saame leida sellise $x_0 \in [a, x_1]$, et $g(x_0) = g(b)$. Rolle'i teoreemi kohaselt eksisteerib selline $c \in (x_0, b) \subset (a, b)$, et $g'(c) = 0$.
Oleme näidanud, et Fletti teoreem kehtib eelduse $f'(a) = f'(b) = 0$ korral.

2. Vaatleme nüüd juhtu, kui $f(a) = f(b) \neq 0$. Olgu funktsioon $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ defineeritud seosega

$$h(x) := f(x) - xf'(a).$$

Märkame, et $h'(x) = f'(x) - f'(a)$ iga $x \in [a, b]$ korral, seetõttu $h'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$, lisaks sellele, kuna $f(a) = f(b)$, siis ka $h'(b) = f'(b) - f'(a) = 0$. Tõestuse esimese osa põhjal leidub punkt $c \in (a, b)$ omadusega $h'(c) = \dfrac{h(c) - h(a)}{c - a}$. Seega

$$\begin{aligned} f'(c) = f'(a) + h'(c) &= f'(a) + \frac{h(c) - h(a)}{c - a} \\ &= f'(a) + \frac{f(c) - cf'(a) - f(a) + af'(a)}{c - a} \\ &= f'(a) - \frac{(c-a)f'(a)}{c - a} + \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \\ &= \frac{f(c) - f(a)}{c - a}. \end{aligned}$$

Teoreem on tõestatud. □

Esitame Fletti teoreemi teise tõestuse.

Tõestus. Olgu funktsioon $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ defineeritud seosega (13). Kuna g on pidev, siis Weierstrassi teoreemi põhjal on tal lõigus $[a, b]$ suurim ja vähim väärtus. Meie eesmärk on näidata, et ühe neist väärtustest saavutab ta mingis sisepunktis $c \in (a, b)$, sel juhul Fermat' teoreemi kohaselt kehtib võrdus $g'(c) = 0$, mis, nagu veendusime eelnevas tõestuses, on samaväärne tõestatava seosega $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.
Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon g saavutab oma ekstremaalsed väärtused lõigu otspunktides a ja b. Olgu konkreetsuse mõttes $g(a) \leq g(x) \leq g(b)$ iga $x \in [a, b]$ korral, siis teisest võrratusest saame, et

$$g(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq g(b),$$

s.t $f(x) \le f(a) + (x-a)g(b)$, seetõttu iga $x \in (a,b)$ korral

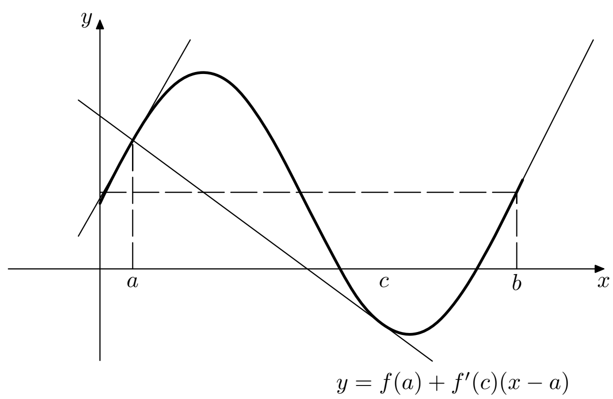
$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} &\ge \frac{f(b)-f(a)-(x-a)g(b)}{b-x}\\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{b-a}{b-x} - \frac{x-a}{b-x}g(b)\\ &= g(b)\frac{b-a-x+a}{b-x} = g(b).\end{aligned}$$

Järelikult

$$f'(b) = \lim_{x\to b-}\frac{f(b)-f(x)}{b-x} \ge g(b),$$

mistõttu $g(a) = f'(a) = f'(b) \ge g(b)$. Seega oleme saanud, et $g(a) \ge g(b)$ ja $g(a) \le g(b)$, s.t $g(a) = g(b)$ ehk g on konstantne funktsioon lõigus $[a,b]$. Kuid sel juhul saavutab g igas punktis $c \in (a,b)$ oma ekstremaalse väärtuse. Saadud vastuolu kinnitab, et funktsioonil g on ekstremaalne väärtus lõigu sisepunktis. □

Fletti teoreemi geomeetriline tähendus. Olgu funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ diferentseeruv intervallis D, olgu $a, b \in D$ sellised punktid, et $f'(a) = f'(b)$. Seega on funktsiooni graafikule punktides $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ tõmmatud puutujad omavahel paralleelsed. Fletti teoreem väidab, et graafikul on punkt $(c, f(c))$, milles võetud puutuja läbib punkti $(a, f(a))$.



Joonis 1. *Fletti keskväärtusteoreemi geomeetriline tähendus.*

Näide 1.19. Olgu $f(x) := x^3$, leiame sellise $c \in \mathbb{R}$, et joonele $f(x) = x^3$ punktis $(c, f(c))$ tõmmatud puutuja läbib punkti $(-2,-8)$. Paneme tähele, et $f(x)$ on diferentseeruv oma määramispiirkonnas $\mathbb{R}$, ning kuna $f'(x) = 3x^2$ on paarisfunktsioon, siis saame intervallis $[-2,2]$ rakendada Fletti teoreemi. Selle kohaselt eksisteerib punkt $c \in (-2,2)$ omadusega

$$3c^2 = \frac{c^3-(-2)^3}{c-(-2)}.$$

Selle leidmiseks peame lahendama võrrandi

$$3c^2(c+2) = c^3+2$$

ehk (peame silmas, et $c \neq -2$)

$$c^2 + c - 2 = 0,$$

mille meile sobivaks lahendiks on $c = 1$. Niisiis, kuupfunktsiooni $f(x) = x^3$ graafikul punktis $(1, 1)$ võetud puutuja läbib punkti $(-2, 8)$.

Järgmine teoreem ütleb, et Fletti teoreemi eeldustel leidub funktsiooni graafikul ka selline punkt, milles võetud puutuja läbib graafiku teist otspunkti $(b, f(b))$.

Teoreem 1.20. *Kui $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv ja $f'(a) = f'(b)$, siis leidub $d \in (a, b)$ omadusega*

$$f'(d) = \frac{f(b) - f(d)}{b - d}.$$

Tõestus. Defineerime funktsiooni

$$g\colon [a, b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := f(a + b - x),$$

siis $g'(x) = -f'(a + b - x)$ iga $x \in [a, b]$ korral. Paneme tähele, et

$$g(a) = f(a + b - a) = f(b) \text{ ja } g(b) = f(a + b - b) = f(a),$$

kusjuures

$$g'(a) = -f'(b) \text{ ja } g'(b) = -f'(a).$$

Kuna eelduse põhjal $g'(a) = -f'(b) = -f'(a) = g'(b)$, siis saame funktsioonile g rakendada Fletti teoreemi, mille kohaselt leidub punkt $c \in (a, b)$ omadusega

$$g'(c) = \frac{g(c) - g(a)}{c - a} = \frac{f(a + b - c) - f(b)}{c - a}$$

ehk

$$-f'(a + b - c) = \frac{f(a + b - c) - f(b)}{c - a}.$$

Tähistades $d := a + b - c$, saame, et

$$-f'(d) = \frac{f(d) - f(b)}{c - a} = \frac{f(d) - f(b)}{c - a + b - b} = \frac{f(d) - f(b)}{b - d}$$

s.t $f'(d) = \dfrac{f(b) - f(d)}{b - d}$. Teoreem on tõestatud. $\square$

Allpool leiame tingimusest $f'(a) = f'(b)$ erinevaid eeldusi, mis garanteerivad Fletti teoreemi väite kehtivuse. Järgmine näide ütleb, et selle kehtivuseks ei ole ka diferentseeruvuse tingimus vajalik.

Näide 1.21. Vaatleme funktsiooni $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, kus $f(x) := |x|$. Funktsioon f ei ole kohal 0 diferentseeruv, sellest hoolimata kehtib iga $c \in [-1, 0)$ korral võrdus

$$f'(c) = (|c|)' = -1 = \frac{-c - 1}{c + 1} = \frac{f(c) - f(-1)}{c - (-1)}.$$

Seega ei ole funktsiooni f diferentseeruvus üldjuhul tarvilik tingimus selleks, et kehtiks võrdus $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$ mingi c korral.

1.2.2 Fletti teoreemi rakendused

Järgmised Fletti teoreemi rakendused on pärit Hutníku ja Molnárová artiklitest [2] ja [3].

1. Näitame, et kui pidev funktsioon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ rahuldab tingimust

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,$$

siis leidub $c \in (0,1)$ omadusega

$$f(c) = \frac{1}{c^2}\int_0^c xf(x)\mathrm{d}x.$$

Veendume kõigepealt, et ***leidub*** $r \in (0,1)$ ***omadusega*** $\displaystyle\int_0^r xf(x)\mathrm{d}x = 0$. Moodustame abifunktsiooni $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$g(s) := \begin{cases} \dfrac{1}{s^2}\displaystyle\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x, & \text{kui } s \in (0,1], \\ \dfrac{f(0)}{2}, & \text{kui } s = 0. \end{cases}$$

Paneme tähele, et funktsioon g on poollõigus $(0,1]$ pidev ning kuna

$$\lim_{s\to 0+} g(s) = \lim_{s\to 0+} \frac{\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x}{s^2} = \lim_{s\to 0+} \frac{sf(s)}{2s} = \frac{f(0)}{2} = g(0),$$

siis järelikult on g pidev ka punktis 0. Vaatleme funktsiooni $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, kus

$$\varphi(t) := \int_0^t g(s)\mathrm{d}s,$$

ning märkame, et φ on diferentseeruv lõigus $[0,1]$. Lisaks sellele $\varphi(0) = 0$ ja

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \int_0^1 g(s)\mathrm{d}s = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 g(s)\mathrm{d}s \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{s^2}\left(\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{1}{s}\int_0^s xf(x)\mathrm{d}x\Big|_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{s}sf(s)\mathrm{d}s\right) \\
&= -\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon xf(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\int_0^\varepsilon xf(x)\mathrm{d}x}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varepsilon f(\varepsilon)}{1} = 0.
\end{aligned}$$

Rolle'i teoreemi põhjal leidub selline punkt $r \in (0,1)$, et $\varphi'(r) = 0$, s.t

$$0 = \varphi'(r) = \left(\int_0^r g(s)\mathrm{d}s\right)' = g(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r xf(x)\mathrm{d}x,$$

järelikult $\displaystyle\int_0^r xf(x)\mathrm{d}x = 0$.
Defineerime funktsiooni $G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ seosega

$$G(t) = \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x,$$

diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemi kohaselt $G'(t) = tf(t)$ iga $t \in [0,1]$ korral. Paneme tähele, et $G(0) = 0$ ning, nagu eelnevalt veendusime, leidub selline $r \in (0,1)$, et $G(r) = \displaystyle\int_0^r xf(x)\mathrm{d}x = 0$. Seega Rolle'i teoreemi põhjal $G'(u) = 0$ mingi $u \in (0,r)$ korral. Kuna $G'(0) = 0 = G'(u)$, siis Fletti teoreemi kohaselt saame leida punkti $c \in (0,u)$ omadusega $G'(c) = \dfrac{G(c) - G(0)}{c - 0}$ ehk

$$cG'(c) = c^2 f(c) = \int_0^c xf(x)\mathrm{d}x,$$

s.t $f(c) = \dfrac{1}{c^2}\displaystyle\int_0^c xf(x)\mathrm{d}x$.

2. Järgmine esitatav tõestus on täiendatud versioon Hutníku ja Molnárová artiklites [2] ja [3] esitatud tõestustest.

Teoreem 1.22 (Pawlikowska teoreem). *Olgu funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ n korda diferentseeruv ja olgu $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b)$. Siis leidub punkt $c \in (a,b)$ nii, et*

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c).$$

Tõestus. Moodustame iga $k = 1, \ldots, n$ korral abifunktsiooni

$$\varphi_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad \varphi_k(x) := \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(k-i)(x-a)^i f^{(n-k+i)}(x) + xf^{(n-k+1)}(a).$$

Seega

$$\varphi_1(x) = -f^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(a) \text{ ja } \varphi_1'(x) = -f^{(n)}(x) + f^{(n)}(a),$$

mistõttu $\varphi_1'(a) = -f^{(n)}(a) + f^{(n)}(a) = 0$ ja $\varphi_1'(b) = -f^{(n)}(b) + f^{(n)}(a) = 0$. Kuna $\varphi_1'(a) = \varphi_1'(b)$, siis Fletti teoreemi kohaselt leidub punkt $c_1 \in (a,b)$ omadusega

$$\varphi_1'(c_1) = \frac{\varphi_1(c_1) - \varphi_1(a)}{c_1 - a}$$

ehk

$$\begin{aligned}-f^{(n)}(c_1)+f^{(n)}(a) &= \frac{-f^{(n-1)}(c_1)+c_1 f^{(n)}(a)+f^{(n-1)}(a)-af^{(n)}(a)}{c_1-a}\\ &= -\frac{f^{(n-1)}(c_1)-f^{(n-1)}(a)}{c_1-a}+\frac{(c_1-a)f^{(n)}(a)}{c_1-a}\\ &= -\frac{f^{(n-1)}(c_1)-f^{(n-1)}(a)}{c_1-a}+f^{(n)}(a),\end{aligned}$$

s.t

$$f^{(n)}(c_1)=\frac{f^{(n-1)}(c_1)-f^{(n-1)}(a)}{c_1-a}. \tag{17}$$

Kirjutame veel välja

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \sum_{i=0}^{2}\frac{(-1)^{i+1}}{i!}(2-i)(x-a)^i f^{(n-2+i)}(x)+xf^{(n-2+1)}(a)\\ &= \frac{(-1)}{0!}(2-0)(x-a)^0 f^{(n-2+0)}(x)+\frac{(-1)^2}{1!}(2-1)(x-a)^1 f^{(n-2+1)}(x)+xf^{(n-2+1)}(a)\\ &= -2f^{(n-2)}(x)+(x-a)f^{(n-1)}(x)+xf^{(n-1)}(a)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\varphi_2'(x) &= -2f^{(n-1)}(x)+f^{(n-1)}(x)+(x-a)f^{(n)}(x)+f^{(n-1)}(a)\\ &= -f^{(n-1)}(x)+(x-a)f^{(n)}(x)+f^{(n-1)}(a),\end{aligned}$$

seega

$$\varphi_2'(a)=-f^{(n-1)}(a)+(a-a)f^{(n)}(a)+f^{(n-1)}(a)=0$$

ning

$$\varphi_2'(c_1)=-f^{(n-1)}(c_1)+(c_1-a)f^{(n)}(c_1)+f^{(n-1)}(a)$$

ehk

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_2'(c_1)}{c_1-a} &= -\frac{f^{(n-1)}(c_1)-f^{(n-1)}(a)}{c_1-a}+\frac{(c_1-a)f^{(n)}(c_1)}{c_1-a}\\ &= -\frac{f^{(n-1)}(c_1)-f^{(n-1)}(a)}{c_1-a}+f^{(n)}(c_1)=0\end{aligned}$$

tänu seosele (17). Niisiis, $\varphi_2'(c_1)=0$. Kuna $\varphi_2'(a)=0=\varphi_2'(c_1)$, siis Fletti teoreemi kohaselt leidub punkt $c_2 \in (a, c_1) \subset (a, b)$ omadusega $\varphi_2'(c_2) = \dfrac{\varphi_2(c_2) - \varphi_2(a)}{c_2 - a}$ ehk

$$\begin{aligned}
&-f^{(n-1)}(c_2) + (c_2 - a)f^{(n)}(c_2) + f^{(n-1)}(a) \\
&\qquad = \frac{-2f^{(n-2)}(c_2) + (c_2 - a)f^{(n-1)}(c_2) + c_2 f^{(n-1)}(a)}{c_2 - a} \\
&\qquad + \frac{2f^{(n-2)}(a) - (a - a)f^{(n-1)}(a) - af^{(n-1)}(a)}{c_2 - a} \\
&\qquad = -\frac{2(f^{(n-2)}(c_2) - f^{(n-2)}(a))}{c_2 - a} + \frac{(c_2 - a)f^{(n-1)}(c_2) + c_2 f^{(n-1)}(a) - af^{(n-1)}(a)}{c_2 - a} \\
&\qquad = -\frac{2(f^{(n-2)}(c_2) - f^{(n-2)}(a))}{c_2 - a} + \frac{(c_2 - a)(f^{(n-1)}(c_2) + f^{(n-1)}(a))}{c_2 - a} \\
&\qquad = -\frac{2(f^{(n-2)}(c_2) - f^{(n-2)}(a))}{c_2 - a} + f^{(n-1)}(c_2) + f^{(n-1)}(a),
\end{aligned}$$

seega oleme jõudnud võrduseni

$$\frac{f^{(n-2)}(c_2) - f^{(n-2)}(a)}{c_2 - a} = f^{(n-1)}(c_2) - \frac{1}{2}(c_2 - a)f^{(n)}(c_2).$$

Analoogiliselt jätkates saame pärast $n - 1$ sammu valemi

$$\frac{f'(c_{n-1}) - f'(a)}{c_{n-1} - a} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(c_{n-1} - a)^{i-1} f^{(i+1)}(c_{n-1}). \tag{18}$$

Vaatleme funktsiooni $\varphi_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(n - i)(x - a)^i f^{(i)}(x) + xf'(a)$, siis

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(x) &= -nf'(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(n - i)\left(i(x - a)^{i-1} f^{(i)}(x) + (x - a)^i f^{(i+1)}(x)\right) + f'(a) \\
&= -nf'(x) + (n - 1)f'(x) + (n - 1)(x - a)f''(x) - \frac{1}{2!}(n - 2) \cdot 2(x - a)f''(x) \\
&- \frac{1}{2!}(n - 2)(x - a)^2 f'''(x) + \frac{1}{3!}(n - 3) \cdot 3(x - a)^2 f'''(x) \\
&+ \frac{1}{3!}(n - 3)(x - a)^3 f^{(4)}(x) - \frac{1}{4!}(n - 4) \cdot 4(x - a)^3 f^{(4)}(x) + \ldots \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n - 1)!}(n - n + 1)(x - 2)^{n-2} f^{(n-1)}(x) \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n - 1)!}(n - n + 1)(x - a)^{(n-1)} f^{(n)}(x) + f'(a) \\
&= -f'(x) + (x - a)f''(x) - \frac{1}{2!}(x - a)^2 f'''(x) + \frac{1}{3!}(x - a)^3 f^{(4)}(x) + \ldots \\
&+ \frac{(-1)^n}{(n - 1)!}(x - a)^{n-1} f^{(n)}(x) + f'(a).
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\varphi_n'(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(x-a)^i f^{(i+1)}(x) + f'(a),$$

seejuures $\varphi_n'(a) = -f'(a) + f'(a) = 0$. Paneme tähele, et

$$\frac{\varphi_n'(c_{n-1})}{c_{n-1}-a} = -\frac{f'(c_{n-1}) - f'(a)}{c_{n-1}-a} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(c_{n-1}-a)^{i-1} f^{(i+1)}(c_{n-1}) = 0$$

vastavalt tingimusele (18), järelikult $\varphi_n'(c_{n-1}) = 0$. Kuna $\varphi_n\colon [a, c_{n-1}] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv ja $\varphi_n'(a) = 0 = \varphi_n'(c_{n-1})$, siis Fletti teoreemi kohaselt leidub selline punkt $c \in (a, c_{n-1}) \subset (a, b)$, et $\varphi_n'(c) = \dfrac{\varphi_n(c) - \varphi_n(a)}{c-a}$. Seejuures

$$\varphi_n'(c) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{(i-1)!}(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c) + f'(a),$$

mistõttu

$$\frac{\varphi_n(c) - \varphi_n(a)}{c-a} = -n\frac{f(c) - f(a)}{c-a} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(n-i)(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c) + f'(a).$$

Viimasest seosest avaldame

$$\begin{aligned}
-n\frac{f(c) - f(a)}{c-a} &= \frac{\varphi_n(c) - \varphi_n(a)}{c-a} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(n-i)(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c) - f'(a) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i}}{(i-1)!}(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c) + f'(a) \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{(i-1)!}\frac{(n-i)}{i}(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c) - f'(a) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{i}}{(i-1)!}\left(1 + \frac{n-i}{i}\right)(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c) \\
&= n\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i}}{i!}(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c),
\end{aligned}$$

olemegi saanud, et

$$\frac{f(c) - f(a)}{c-a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}(c-a)^{i-1} f^{(i)}(c).$$

□

1.2.3 Fletti teoreemi teisi versioone

Kõigepealt tõestame mõned laused, milles Fletti tingimus

$$f'(a) = f'(b) \tag{19}$$

on asendatud teatava teise tingimusega, mis samuti garanteerib võrduse

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

mingi punkti $c \in (a, b)$ korral. Seejärel tõestame Fletti tüüpi keskväärtusteoreemi ilma mingi eelduseta tuletiste $f'(a)$ ja $f'(b)$ kohta.
Alustame Trahani teoreemiga, milles tingimus (19) on asendatud võrratusega (20). Järgmine lause ja sellele järgnev lemma on pärit artiklist [6].

Lause 1.23 (**Trahani teoreem**). *Kui $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on selline diferentseeruv funktsioon, et*

$$\left(f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)\left(f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \geq 0, \tag{20}$$

siis leidub $c \in (a, b)$ omadusega

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Tõestuseks vajame järgmist lemmat.

Lemma 1.24. *Olgu $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ selline pidev funktsioon, mis poollõigus $(a, b]$ on diferentseeruv. Kui*

$$(f(b) - f(a))f'(b) \leq 0,$$

siis leidub $c \in (a, b]$, et $f'(c) = 0$.

Tõestus. ***Esiteks***, olgu $(f(b) - f(a))f'(b) = 0$. Kui $f'(b) = 0$, võtame $c := b$, kui aga $f(a) = f(b)$, siis Rolle'i teoreemi põhjal leidub punkt $c \in (a, b)$ omadusega $f'(c) = 0$.
Teiseks, kui $(f(b) - f(a))f'(b) < 0$, siis on kaks võimalust:

1) $f'(b) > 0$ ja $f(b) < f(a)$,

2) $f'(b) < 0$ ja $f(b) > f(a)$.

Esimesel juhul, kuna $\lim\limits_{x \to b-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) > 0$, siis leidub selline $r \in (0, b - a)$, et $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$ iga $x \in (b - r, b)$ korral, s.t $f(x) < f(b) < f(a)$. Kuna f on lõigus $[a, b]$ pidev, siis Weierstrassi teoreemi kohaselt saavutab ta selles lõigus oma suurima ja vähima väärtuse. Seega eksisteerib punkt $c \in (a, b)$, kus funktsioon f saavutab miinimumi, Fermat' teoreemi põhjal $f'(c) = 0$.

Teisel juhul, kuna $\lim_{x \to b-} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b) < 0$, siis leidub punkt $t \in (0, b-a)$ omadusega $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0$ iga $x \in (b - t, b)$ puhul, s.t $f(a) < f(b) < f(x)$. Analoogiliselt, saame leida punkti $c \in (a, b)$, milles f saavutab maksimumi, siis Fermat' teoreemi kohaselt $f'(c) = 0$. □

Tõestame nüüd lause 1.23.

Tõestus. Olgu funktsioon g defineeritud seosega (13), s.t

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & \text{kui } x \in (a, b], \\ f'(a), & \text{kui } x = a, \end{cases}$$

siis g on lõigus $[a, b]$ pidev ja vahemikus (a, b) diferentseeruv:

$$g'(x) = \frac{1}{(x - a)} \left(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right).$$

Seega

$$\begin{aligned} (g(b) - g(a))g'(b) &= \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(a) \right) \cdot \frac{1}{b - a} \left(f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \\ &= -\frac{1}{b - a} \left(f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \left(f'(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \leq 0, \end{aligned}$$

mistõttu lemma 1.24 põhjal leidub punkt $c \in (a, b)$ omadusega $g'(c) = 0$ ehk

$$\frac{1}{c - a} \left(f'(c) - \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right) = 0,$$

s.t $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$. □

Tähistame pideva funktsiooni $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ korral

$$A_f(a, b) := \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad \text{ja} \quad I_f(a, b) := \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) \mathrm{d}t.$$

Järgmine Fletti tüüpi keskväärtusteoreem on võetud artiklist [5].

Lause 1.25 (Tongi teoreem). *Olgu $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ selline pidev funktsioon, mis on vahemikus (a, b) diferentseeruv. Kui*

$$A_f(a, b) = I_f(a, b), \tag{21}$$

siis leidub $c \in (a, b)$ omadusega

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Tõestus. Moodustame abifunktsiooni

$$h(x) := \begin{cases} (x-a)(A_f(a,x) - I_f(a,x)), & \text{kui } x \in (a,b], \\ 0, & \text{kui } x = a. \end{cases}$$

Funktsioon h on lõigus $[a,b]$ pidev ja vahemikus (a,b) diferentseeruv: kuna

$$h(x) = \frac{f(a)+f(x)}{2}(x-a) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

siis

$$h'(x) = \frac{1}{2}f'(x)(x-a) + \frac{f(x)+f(a)}{2} - f(x) = \frac{1}{2}f'(x)(x-a) - \frac{f(x)-f(a)}{2}.$$

Lisaks sellele $h(a) = 0 = h(b)$, sest $h(b) = (b-a)(A_f(a,b) - I_f(a,b)) = 0$. Järelikult Rolle'i teoreemi põhjal leidub punkt $c \in (a,b)$ omadusega $h'(c) = 0$ ehk

$$h'(c) = \frac{1}{2}f'(c)(c-a) - \frac{f(c)-f(a)}{2} = 0,$$

s.t $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$. □

Selgitame Fletti, Trahani ja Tongi teoreemide, täpsemalt tingimuste (19), (20) ja (21) vahekorda. On selge, et kui funktsioon f rahuldab Fletti tingimust (19), siis ta rahuldab ka Trahani tingimust (20): kui $f'(a) = f'(b)$, siis

$$\left(f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\left(f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = \left(f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2 \geq 0.$$

Vastupidine väide ei ole üldjuhul õige, nagu kinnitab järgmine näide.

Näide 1.26. Kui funktsioon $f\colon [-3,2] \to \mathbb{R}$ on defineeritud seosega

$$f(x) := x^5 - 1,$$

siis on ta lõigus $[-3,2]$ diferentseeruv. Paneme tähele, et $f'(x) = 5x^4$, siis

$$f'(-3) = 405 \neq 80 = f'(2),$$

seega Fletti tingimus (19) lõigus $[-3,2]$ ei kehti. Kuna $f(-3) = -244$ ja $f(2) = 31$, siis

$$\left(80 - \frac{31+244}{5}\right)\left(405 - \frac{31+244}{5}\right) = 25 \cdot 350 = 8750 > 0,$$

järelikult Trahani tingimus (20) on täidetud.

Järgnevalt näitame, et üldjuhul ei ole tingimus (21) võrreldav tingimustega (19) ja (20).

Näide 1.27. Olgu funktsioon $f\colon [\pi, 3\pi] \to \mathbb{R}$ määratud seosega

$$f(x) = \cos x,$$

siis $f'(x) = -\sin x$. Paneme tähele, et

$$f'(\pi) = -\sin \pi = 0 = -\sin 3\pi = f'(3\pi),$$

järelikult Fletti tingimus kehtib. Veendume, et Tongi tingimuse ei kehti:

$$A_f(\pi, 3\pi) = \frac{\cos \pi + \cos 3\pi}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1$$

ja

$$I_f(\pi, 3\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \sin x \Big|_{\pi}^{3\pi} = 0$$

ehk $A_f(\pi, 3\pi) \neq I_f(\pi, 3\pi)$. Seega Fletti tingimusest ei järeldu Tongi tingimus.

Näide 1.28. Näitame nüüd, et Tongi tingimusest ei järeldu Trahani tingimus. Vaatleme funktsiooni

$$f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \arcsin x,$$

see on pidev ja vahemikus $(-1, 1)$ diferentseeruv. Veendume Tongi tingimuse kehtivuses:

$$A_f(-1, 1) = \frac{\arcsin(-1) + \arcsin(1)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

ning

$$I_f(-1, 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \arcsin x \mathrm{d}x = 0,$$

s.t $A_f(-1, 1) = I_f(-1, 1)$. Paneme tähele, et funktsiooni f tuletise väärtused lõigu $[-1, 1]$ otspunktides ei ole määratud, järelikult Trahani tingimus ei saa kehtida.

Esitame nüüd ilma tingimusteta Fletti tüüpi keskväärtusteoreemi, mille on tõestanud Sahoo ja Riedel raamatus [4].

Lause 1.29. *Suvalise diferentseeruva funktsiooni $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ korral leidub $c \in (a, b)$ omadusega*

$$f(c) - f(a) = (c-a) f'(c) - \frac{1}{2} \frac{f'(b) - f'(a)}{b-a} (c-a)^2.$$

Tõestus. Moodustame abifunktsiooni $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$\varphi(x) := f(x) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a)^2,$$

ning paneme tähele, et φ on lõigus $[a,b]$ pidev ja vahemikus (a,b) diferentseeruv:

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(x-a).$$

Kuna $\varphi'(a) = f'(a) = \varphi'(b)$, siis Fletti teoreemi põhjal leidub $c \in (a,b)$ omadusega

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a},$$

mistõttu saame, et

$$f'(c) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a) = \frac{f(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2 - f(a)}{c-a}$$

ehk

$$f'(c)(c-a) - \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2 = f(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2 - f(a),$$

ning avaldades $f(c)-f(a)$, jõuame seoseni

$$f(c)-f(a) = (c-a)f'(c) - \frac{1}{2}\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}(c-a)^2.$$

$\square$

1.3 Pompeiu keskväärtusteoreem

Järgmise keskväärtusteoreemi on tõestanud Pompeiu 1946. aastal. Tegelikult on tegemist Lagrange'i keskväärtusteoreemi rakendusega.

Teoreem 1.30 (Pompeiu keskväärtusteoreem). *Olgu $[a,b]$ selline lõik, et $0 \notin [a,b]$. Kui funktsioon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on diferentseeruv, siis suvaliste punktide $x_1, x_2 \in [a,b]$ korral, kui $x_1 < x_2$, leidub $c \in (x_1, x_2)$ nii, et*

$$\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(c) - cf'(c). \tag{22}$$

Tõestus. Eeldame, et teoreemi eeldused on täidetud. Kuna $a \le x_1 < x_2 \le b$, siis kehtivad seosed $\dfrac{1}{b} \le \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} \le \dfrac{1}{a}$. Tähistame $x := \dfrac{1}{x_2}$, $y := \dfrac{1}{x_1}$, siis $[x,y] \subset \left[\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}\right]$. Moodustame funktsiooni $F\colon \left[\dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{a}\right] \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$F(t) = tf\left(\frac{1}{t}\right).$$

Kuna f on lõigus $[a,b]$ diferentseeruv, siis on F lõigus $\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$ diferentseeruv, kusjuures

$$F'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t}f'\left(\frac{1}{t}\right).$$

Rakendame funktsioonile F lõigus $[x,y] \subset [a,b]$ Lagrange'i keskväärtusteoreemi ning saame, et mingi punkti $d \in (x,y)$ korral

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} = F'(d),$$

s.t

$$\frac{xf\left(\frac{1}{x}\right) - yf\left(\frac{1}{y}\right)}{x-y} = f\left(\frac{1}{d}\right) - \frac{1}{d}f'\left(\frac{1}{d}\right). \tag{23}$$

Olgu $c := \frac{1}{d}$, siis $x_1 < c < x_2$. Seose (23) põhjal

$$\begin{aligned} f(c) - cf'(c) &= \frac{\frac{1}{x_2}f(x_2) - \frac{1}{x_1}f(x_1)}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} \\ &= \left(\frac{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}{x_2 - x_1}\right)\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2}\right) \\ &= \frac{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}{x_1 - x_2}, \end{aligned}$$

s.t kehtib seos (22). $\square$

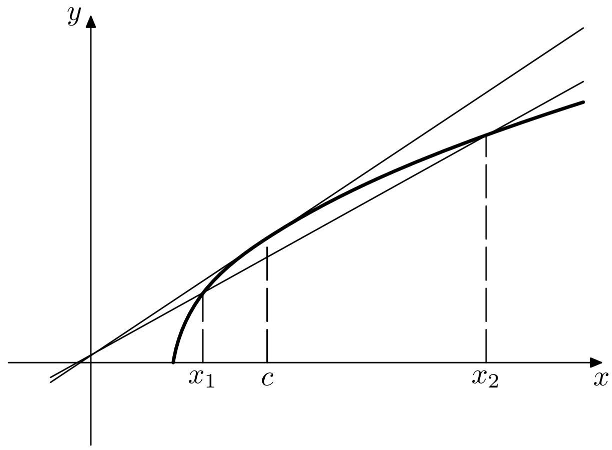
Pompeiu keskväärtusteoreemi geomeetriline tähendus. Funktsiooni f graafiku lõikaja, mis läbib punkte $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$, määratakse võrrandiga

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Kui see lõikaja läbib y-telge punktis $(0, y_0)$, siis

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(0 - x_1) \\ &= \frac{(x_2 - x_1)f(x_1) - x_1f(x_2) + x_1f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2f(x_1) - x_1f(x_1) - x_1f(x_2) + x_1f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2f(x_1) - x_1f(x_2)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}{x_1 - x_2}. \end{aligned}$$

Kui $c \in (x_1, x_2)$ rahuldab tingimust (22), siis $y_0 = f(c) - cf'(c)$. Paneme tähele, et punktis $(c, f(c))$ võetud graafiku puutuja, mille võrrand on kujul $y = (x-c)f'(c) + f(c)$, lõikab y-telge punktis $(0, y_0)$. Seega funktsiooni graafiku puutuja punktis $(c, f(c))$ ning läbi punktide $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ tõmmatud lõikaja lõikuvad y-teljel punktis $(0, y_0)$.



Joonis 3. *Pompeiu keskväärtusteoreemi geomeetriline tähendus.*

2 Keskväärtusteoreemidega seotud funktsionaalvõrrandid

2.1 Lagrange'i teoreemiga seotud funktsionaalvõrrand

Selles alapunktis tõestame teoreemi, mis käsitleb Lagrange'i keskväärtusteoreemiga seotud funktsionaalvõrrandi lahendamist aritmeetilise keskmise korral.

Teoreem 2.1. *Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall. Funktsioonid $f, h\colon D \to \mathbb{R}$ rahuldavad võrrandit*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = h\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (x, y \in D, x \neq y) \tag{24}$$

parajasti siis, kui

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = 2ax + b \qquad (x \in D^\circ),$$

kus a, b ja c on suvaliselt fikseeritud arvud.

Tõestus. Tarvilikkus. **1.** Kõigepealt tõestame väite juhul, kui ***intervalli** D **sisemus** D° **on nullpunkti suhtes sümmeetriline***. Kirjutame võrrandi (24) kujul

$$f(x) - f(y) = (x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (x, y \in D, x \neq y). \tag{25}$$

Kui f rahuldab võrrandit (25), siis iga $c \in \mathbb{R}$ puhul teeb seda ka funktsioon $f - c\colon D \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$(f-c)(x) := f(x) - c,$$

tõepoolest,

$$(f-c)(x) - (f-c)(y) = f(x) - c - f(y) + c = f(x) - f(y) = (x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Seetõttu võime eeldada, et

$$f(0) = 0.$$

Võtame võrrandis (25) $y = 0$ ning jõuame seoseni

$$f(x) = xh\left(\frac{x}{2}\right) \tag{26}$$

kõikide $x \in D$ korral. Seega on võrrand (25) esitatud kujul

$$xh\left(\frac{x}{2}\right) - yh\left(\frac{y}{2}\right) = (x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right) \tag{27}$$

iga $x, y \in D$ puhul. Sellest võrrandist lähtudes saame, et

$$h(0) = 0,$$

sest kui h rahuldab võrrandit (27), siis teeb seda ka seosega

$$(h - b)(x) = h(x) - b$$

defineeritud funktsioon $h - b \colon D \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x(h-b)\left(\frac{x}{2}\right) - y(h-b)\left(\frac{y}{2}\right) &= xh\left(\frac{x}{2}\right) - bx - yh\left(\frac{y}{2}\right) + by \\ &= xh\left(\frac{x}{2}\right) - yh\left(\frac{y}{2}\right) - (x-y)b \\ &= (x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right) - (x-y)b \\ &= (x-y)\left(h\left(\frac{x+y}{2}\right) - b\right) \\ &= (x-y)(h-b)\left(\frac{x+y}{2}\right). \end{aligned}$$

Võtame võrrandis (27) $x := -y$, kus $y \in D^\circ$. Eelduse kohaselt on D° sümmeetriline nullpunkti suhtes, järelikult tingimuse $y \in D^\circ$ korral ka $-y \in D^\circ$. Asendades $x = -y$ võrrandis (27), jõuame võrduseni

$$-yh\left(\frac{-y}{2}\right) = yh\left(\frac{y}{2}\right)$$

ning võttes $z := \dfrac{-y}{2}$, siis $h(z) = -h(-z)$. Niisiis h on intervallis $\dfrac{1}{2}D^\circ = \left\{\dfrac{x}{2} \;\middle|\; x \in D^\circ\right\}$ paaritu funktsioon. Kui asendame võrrandis (27) muutuja y muutujaga $-y$, siis saame võrrandi kujul

$$xh\left(\frac{x}{2}\right) + yh\left(\frac{y}{2}\right) = (x+y)h\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{28}$$

Muutujate vahetusega $x = t + u$, $y = t - u$ ehk $t := \dfrac{x+y}{2}$, $u := \dfrac{x-y}{2}$ saame seoste (27) ja (28) võrdlemisel võrduse

$$2uh(t) = 2th(u), \tag{29}$$

kus $t, u \in \dfrac{1}{2}D^\circ$. Tähistame fikseeritud $u_0 \in \dfrac{1}{2}D^\circ$ korral $a := \dfrac{h(u_0)}{2u_0}$, siis seose (29) põhjal $h(t) = \dfrac{2th(u_0)}{2u_0} = 2at$. Kui loobume eeldusest $h(0) = 0$, siis saame esituse

$$h(t) = 2at + b \qquad \left(t \in \frac{1}{2}D^\circ\right).$$

Tänu võrdusele (26)

$$f(x) = x\left(2a\frac{x}{2} + b\right) = ax^2 + bx$$

kõikide $x \in D^\circ$ korral.
Veendume, et $h(v) = 2av+b$ iga $v \in D^\circ$ korral. Selleks asendame funktsiooni f võrrandisse (25), siis suvaliste $x, y \in D^\circ$ korral

$$ax^2 + bx + c - ay^2 - by - c = (x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ehk

$$a(x-y)(x+y) + b(x-y) = (x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Kuna $x \neq y$, siis

$$a(x+y) + b = h\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

võttes $v := \dfrac{x+y}{2}$, jõuame võrduseni $h(v) := 2av + b$ suvalise $v \in D^\circ$ puhul.
Lõpuks, kui osutub, et $D \neq D^\circ$ ja $d \in D \setminus D^\circ$ on intervalli D otspunkt, siis, võttes $y := d$, saame suvalise $x \in D^\circ$ korral seosest (25), et

$$ax^2 + bx + c - f(d) = (x-d)\left(2a\frac{x+d}{2} + b\right)$$

ehk

$$\begin{aligned} f(d) &= ax^2 + bx + c - 2ax\frac{x+d}{2} - bx + 2ad\frac{x+d}{2} + bd \\ &= ax^2 + bx + c - ax^2 - axd - bx + axd + ad^2 + bd \\ &= ad^2 + bd + c. \end{aligned}$$

Niisiis on väide tõestatud iga nullpunkti suhtes sümmeetrilise sisemusega tõkestatud intervalli puhul.

2. Loobume intervalli sümmeetria nõudest, kuid eeldame, et D on tõkestatud. Olgu s selle intervalli keskpunkt ning $D_1 := \{x - s \mid x \in D\}$. Paneme tähele, et D_1 on nullpunkti suhtes sümmeetriliste otspunktidega tõkestatud intervall. Defineerime funktsioonid $f_1, h_1 \colon D_1 \to \mathbb{R}$ seostega

$$f_1(t) := f(t+s) \text{ ja } h_1(t) := h(t+s).$$

Teeme muutujate vahetuse $u := x - s$ ja $v := y - s$, s.t $x = u + s$ ja $y = v + s$, seega $u, v \in D_1$ suvaliste $x, y \in D$ korral. Seetõttu saab võrrand (24) kuju

$$\frac{f(u+s) - f(v+s)}{u-v} = h\left(\frac{u+v}{2} + s\right)$$

ehk

$$\frac{f_1(u) - f_1(v)}{u - v} = h_1\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

kõikide $u, v \in D_1$ korral, kui $u \neq v$. Tõestuse eelneva osa kohaselt $f_1(u) = a_1u^2 + b_1u + c_1$ iga $u \in D_1$ korral ja $h_1(u) = 2a_1u + b_1$, kui $u \in D_1^\circ = \{x - s \mid x \in D_1^\circ\}$. Seega

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(u) = a_1u^2 + b_1u + c_1 &= a_1(x-s)^2 + b_1(x-s) + c_1 = \\ &= a_1x^2 + (b_1 - 2a_1s)x + (c_1 + a_1s^2 - b_1s) \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

iga $x \in D$ korral, kui tähistada $a := a_1$, $b := b_1 - 2a_1s$ ja $c := c_1 + a_1s^2 - b_1s$. Analoogiliselt,

$$h(x) = h_1(u) = 2a_1u + b_1 = 2a_1(x-s) + b_1 = 2a_1x + (b_1 - 2a_1s) = 2ax + b$$

kõikide $x \in D^\circ$ puhul.

3. Olgu $D \subset \mathbb{R}$ suvaline tõkestamata intervall. Moodustame tõkestatud intervallide jada (D_n) nii, et $D_n \subset D_{n+1}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Eelneva põhjal saame igas intervallis D_n esitada $f(x) = ax^2 + bx + c$ punktide $x \in D_n$ ja $h(x) = 2ax + b$ punktide $x \in D_n^\circ$ korral. Osutub, et intervallis D_{n+1} on funktsioonid f ja h samade kordajatega. Tõepoolest, kui

$$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c \qquad (x \in D_{n+1})$$

ja

$$h(x) = 2a_1x + b_1 \qquad (x \in D_{n+1}^\circ),$$

siis sisalduvuse $D_n \subset D_{n+1}$ tõttu

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = ax^2 + bx + c$$

ehk

$$(a_1 - a)x^2 + (b_1 - b)x + (c_1 - c) = 0$$

iga $x \in D_n$ korral, seega $a_1 = a$, $b_1 = b$ ja $c_1 = c$. Järelikult on kordajad a, b, c ühed ja samad iga D_n korral, mistõttu on nad ka samad kogus ühendis D.

Piisavus. Kui

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = 2ax + b \qquad (x \in D^\circ),$$

siis tingimuse $x \neq y$ korral

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{ax^2 + bx + c - ay^2 - by - c}{x - y} &= \frac{a(x+y)(x-y) + (x-y)b}{x-y} \\ = \frac{(x-y)(a(x+y)+b)}{x-y} &= a(x+y) + b = h\left(\frac{x+y}{2}\right). \end{aligned}$$

□

2.2 Pompeiu teoreemiga seotud funktsionaalvõrrand

Selles alapunktis tõestame teoreemi, mis annab lahenduse Pompeiu keskväärtusteoreemiga seotud funktsionaalvõrrandile aritmeetilise keskmise korral.

Teoreem 2.2. *Olgu $D \subset \mathbb{R}$ intervall. Funktsioonid $f, h\colon D \to \mathbb{R}$ rahuldavad võrrandit*

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = h\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (x, y \in D, x \neq y) \tag{30}$$

parajasti siis, kui

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = b \qquad (x \in D^\circ),$$

kus a, b ja c on suvaliselt fikseeritud arvud.

Tõestus. Tarvilikkus. Nii nagu eelmise tõestuse puhul, esitame tõestuse osade kaupa vastavalt sellele, milline on vaadeldav intervall D. Eeldame, et $0 \in D$. Paneme tähele, et (30) on samaväärne võrrandiga

$$xf(y) - yf(x) = (x - y)h\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (x, y \in D, x \neq y). \tag{31}$$

1. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus $D = \mathbb{R}$. Võtame seoses (31) $y = 0$ ning saame, et

$$xf(0) = xh\left(\frac{x}{2}\right).$$

Kui $x \neq 0$, siis

$$h(x) = f(0) =: b.$$

Võttes võrrandis (31) $x = 1$ ja $y \neq -1$, jõuame seoseni

$$f(y) = (1 - y)b + yf(1) = (f(1) - b)y + b = ay + b,$$

kus $a := f(1) - b$. Veendumaks, et saadud väide kehtib ka $y = -1$ korral, asendame seoses (31) $x = -1$ ja $y = 2$ ja jõuame võrrandini

$$-f(2) - 2f(-1) = -3h\left(\frac{1}{2}\right)$$

ehk

$$f(-1) = \frac{1}{2}(3b - f(2)) = \frac{1}{2}(3b - 2a - b) = \frac{1}{2}(2b - 2a) = a(-1) + b.$$

Niisiis jääb veel näidata, et $h(0) = b$: võtame seoses (31) $x = 1$ ja $y = -1$, siis

$$f(-1) + f(1) = 2h\left(\frac{0}{2}\right),$$

s.t
$$h(0) = \frac{1}{2}\left(f(-1) + f(1)\right) = \frac{1}{2}(-a+b+a+b) = b.$$
Seega on teoreem tõestatud eeldusel $D = \mathbb{R}$.

2. Olgu $D = [0, \infty)$. Võtame seoses (31) $y = 0$ ja saame, et
$$xf(0) = xh\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (x \neq 0),$$
mistõttu
$$h(x) = f(0) = b \qquad (x \in (0, \infty) = D^\circ).$$
Kui $x = 1$, $y \in D$, siis seose (31) põhjal
$$f(y) - yf(1) = (1-y)h\left(\frac{1+y}{2}\right)$$
ehk
$$f(y) = yf(1) + b - yb = (f(1) - b)y + b = ay + b.$$
Sellega on teoreem tõestatud eeldusel $D = [0, \infty)$.

3. Vaatleme juhtu $D = [0, d)$, kus $d > 0$. Kui seoses (31) võtta $y = 0$ ja $x \neq 0$, siis
$$xf(0) = xh\left(\frac{x}{2}\right)$$
ehk
$$h(x) = f(0) = b \qquad \left(x \in \left(0, \frac{d}{2}\right)\right).$$
Fikseerime suvalise $x_1 \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$, siis iga $y \in D$ korral seosest (31) saame, et
$$x_1 f(y) - yf(x_1) = (x_1 - y)h\left(\frac{x_1+y}{2}\right)$$
ehk
$$f(y) = \frac{y}{x_1}\left(f(x_1) - h\left(\frac{x_1+y}{2}\right)\right) + b.$$
Paneme tähele, et $0 < \frac{x_1}{2} \leq \frac{x_1+y}{2} < \frac{d}{2}$, kui $0 \leq y < d - x_1$, seega $\frac{x_1+y}{2} \in \left(0, \frac{d}{2}\right)$, mistõttu $h\left(\frac{x_1+y}{2}\right) = b$. Niisiis, tähistades $a := \frac{1}{x_1}(f(x_1) - b)$, saame seose
$$f(y) = ay + b \qquad (y \in [0, d - x_1)).$$

Näitame, et kordajad a ja b ei sõltu fikseeritud punktist x_1. Olgu $x_1 < x_2 < d$. Korrates eelnevat arutelu arvust x_2 lähtudes, jõuame valemini

$$f(y) = a'y + b' \qquad (y \in [0, d - x_2)),$$

kusjuures on selge, et $b = f(0) = b'$. Kuna $[0, d - x_2) \subset [0, d - x_1)$, siis

$$0 = a'y + b - (ay + b) = (a' - a)y \qquad (y \in [0, d - x_2)),$$

seega $a' = a$. Kokkuvõttes $f(y) = ay + b$ iga $y \in [0, d)$ korral.

Jääb veel veenduda, et $h(x) = b$ kõikide $x \in (0, d)$ korral. Tõepoolest, kui $x, y \in (0, d)$ ja $x \neq y$, siis seose (30) põhjal

$$b = \frac{x(ay + b) - y(ax + b)}{x - y} = h\left(\frac{x + y}{2}\right),$$

kuna $\left\{\frac{x+y}{2} \;\middle|\; x, y \in (0, d)\right\} = (0, d)$, siis

$$h(z) = b \qquad (z \in (0, d)).$$

Seega väide kehtib tingimusel $D = [0, d)$.

4. Olgu $D = [0, d]$. Punktis 3 saadud tulemuse põhjal

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in [0, d))$$

ja

$$h(x) = b \qquad (x \in (0, d)).$$

Jääb veenduda, et funktsiooni f esituse saab jätkata punkti d. Selleks võtame seoses (30) $x = d$ ja $y \in D$, siis

$$\frac{d(ay + b) - yf(d)}{d - y} = h\left(\frac{d + y}{2}\right) = b$$

ehk

$$f(d) = ad + b.$$

5. Olgu D üks intervallidest $(-\infty, 0]$, $(d, 0]$ või $[d, 0]$. Tähistame $u := -x$ ja $v := -y$ ning

$$f_1(u) := f(x) \text{ ja } h_1(u) := h(x).$$

Seose (30) põhjal

$$\frac{uf_1(v) - vf_1(u)}{u - v} = \frac{-xf(y) + yf(x)}{-x + y} = h\left(\frac{x + y}{2}\right) = h_1\left(\frac{u + v}{2}\right).$$

Eelpool tõestatu põhjal

$$f_1(u) = a_1 u + b_1 \qquad (u \in D_1 := \{-x \mid x \in D\})$$

ja

$$h_1(u) = b_1 \qquad (u \in D_1^\circ).$$

Seega

$$f(x) = a_1 u + b_1 = -a_1 x + b_1$$

ja

$$h(x) = b_1.$$

Tähistame $a := -a_1$ ja $b := b_1$ ja saamegi soovitud tulemuse.

6. Olgu D intervall otspunktidega c ja d, kus $c < 0 < d$ ja $0 \in D^\circ = (c, d)$. Eelneva kohaselt on funktsioonid f ja h esitatavad kujul

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in D \cap [0, \infty)), \;\; h(x) = b \qquad (x \in D^\circ \cap (0, \infty))$$

ja

$$f(x) = a'x + b' \qquad (x \in D \cap (-\infty, 0]), \;\; h(x) = b' \qquad (x \in D^\circ \cap (-\infty, 0)).$$

Meie eesmärgiks on veenduda, et $a'x + b' = ax + b$ iga $x \in D$ korral. On selge, et $b = f(0) = b'$, seega jääb veel näidata, et $a' = a$.
Esiteks vaatleme juhtu, kus $-c = |c| < d$. Olgu $x \in D \cap (-\infty, 0)$ ja fikseerime $x' \in D$ omadusega $x' > -x$ ja $x' \neq -2x$. Tähistame $y := x + x'$, siis y on positiivne. Paneme tähele, et

$$c < x < \frac{x+y}{2} = \frac{2x + x'}{2} = x + \frac{x'}{2} < x + x' < d,$$

siis $h\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = b$. Seega suvalise $y \in D$ korral

$$\begin{aligned} b = h\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = \frac{x(a(x+x') + b) - (x+x')f(x)}{x - x - x'} \\ &= \frac{ax(x+x') + xb - (x+x')f(x)}{-x'} \end{aligned}$$

ehk

$$(x + x')f(x) = ax(x+x') + b(x+x').$$

Kuna $x + x' \neq 0$, siis

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in D \cap (-\infty, 0]).$$

Seega on väide tõestatud eeldusel, et $-c = |c| < d$. Muuhulgas kehtib väide ka siis, kui $c = -d$, s.t $D = [-d, d)$ või $D = [-d, d]$. Tõepoolest, eelneva põhjal on selge, et

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in (-d, d) \;\text{ või }\; x \in (-d, d])$$

ja

$$h(x) = b \qquad (x \in (-d, d)),$$

seosest

$$\frac{-d(ay+b) - yf(-d)}{-d-y} = b$$

saame suvalise $y \in (-d, d) \setminus \{0\}$ korral võrduse

$$f(-d) = a(-d) + b.$$

Teiseks eeldame, et $c < 0 < d$ ja $d < |c| = -c$. Tähistame $D' := \{-x \mid x \in D\}$. Toome sisse tähistused $u := -x$, $v := -y$ ja defineerime funktsioonid $f_1, h_1 \colon D \to \mathbb{R}$ seostega

$$f_1(u) := f(x) \text{ ja } h_1(u) := h(x).$$

Paneme tähele, et

$$\frac{uf_1(v) - vf_1(u)}{u-v} = \frac{yf(x) - xf(y)}{y-x} = h\left(\frac{x+y}{2}\right) = h_1\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

seetõttu

$$f(x) = f_1(u) = a_1 u + b_1 = a_1(-x) + b_1 = -a_1 x + b_1$$

ja

$$h(x) = h_1(u) = b_1.$$

Võtame $a := -a_1$ ja $b := b_1$ ja saamegi, et

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = b \qquad (x \in D^\circ).$$

Piisavus. Kui

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = b \qquad (x \in D^\circ),$$

siis tingimuse $x \neq y$ korral

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{x-y} = \frac{x(ay+b) - y(ax+b)}{x-y} = \frac{b(x-y)}{x-y} = b = h\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$\square$

2.3 Harmooniliste keskmistega määratud funktsionaalvõrrandid

Selles alapunktis lahendame kaks harmoonilise keskmisega määratud funktsionaalvõrrandit. Esimene neist on seotud Lagrange'i ja teine Pompeiu keskväärtusteoreemiga.

Teoreem 2.3. *Olgu $D \subset (0,\infty)$ intervall. Funktsioonid $f, h\colon D \to \mathbb{R}$ rahuldavad võrrandit*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = h\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \qquad (x, y \in D, x \neq y) \tag{32}$$

parajasti siis, kui

$$f(x) = a + bx \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = b \qquad (x \in D^\circ),$$

kus a ja b on suvaliselt fikseeritud arvud.

Tõestus. Tarvilikkus. Tähistame $x := \dfrac{1}{u}$ ja $y := \dfrac{1}{v}$, kus $x \neq y$, defineerime funktsioonid $f_1, h_1\colon D_1 \to \mathbb{R}$, kus $D_1 := \left\{\dfrac{1}{x} \;\middle|\; x \in D\right\}$, seostega

$$f_1(u) = \frac{1}{x} f(x) \text{ ja } h_1(u) = h(x). \tag{33}$$

Kuna

$$\frac{2xy}{x+y} = \frac{2\frac{1}{uv}}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}} = \frac{2}{u+v},$$

siis

$$h\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = h_1\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Seega võrrandi (32) põhjal

$$\frac{vf_1(u)-uf_1(v)}{v-u} = \frac{\frac{1}{u}f_1(u)-\frac{1}{v}f(v)}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = h\left(\frac{2xy}{x+y}\right) = h_1\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Teoreemi 2.2 kohaselt

$$f_1(u) = au + b \qquad (u \in D_1)$$

ja

$$h_1(u) = b \quad (u \in D_1^\circ),$$

seetõttu

$$f(x) = xf_1(u) = x(au+b) = x\left(a\frac{1}{x}+b\right) = a + bx \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = h_1(u) = b \qquad (x \in D^\circ).$$

Piisavus. Kui
$$f(x) = a + bx \qquad (x \in D)$$
ja
$$h(x) = b \qquad (x \in D^\circ),$$
siis tingimuse $x \neq y$ korral
$$\frac{f(y) - f(x)}{x - y} = \frac{a + bx - a - by}{x - y} = \frac{b(x - y)}{x - y} = b = h\left(\frac{2xy}{x + y}\right).$$

$\square$

Teoreem 2.4. *Olgu $D \subset (0, \infty)$ intervall. Funktsioonid $f, h\colon D \to \mathbb{R}$ rahuldavad võrrandit*
$$\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = h\left(\frac{2xy}{x + y}\right) \qquad (x, y \in D, x \neq y) \tag{34}$$
parajasti siis, kui
$$f(x) = a\frac{1}{x} + b + cx \qquad (x \in D)$$
ja
$$h(x) = 2a\frac{1}{x} + b \qquad (x \in D^\circ),$$
kus a, b ja c on suvaliselt fikseeritud arvud.

Tõestus. Tarvilikkus. Nagu eelmises tõestuses, tähistame $x := \dfrac{1}{u}$ ja $y := \dfrac{1}{v}$ ja defineerime funktsioonid $f_1, h_1\colon D_1 \to \mathbb{R}$ seostega (33). Siis
$$\frac{f_1(v) - f_1(u)}{v - u} = \frac{\frac{1}{uv}f_1(v) - \frac{1}{vu}f_1(u)}{\frac{1}{u} - \frac{1}{v}} = \frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = h\left(\frac{2xy}{x + y}\right) = h_1\left(\frac{u + v}{2}\right).$$
Teoreemi 2.1 põhjal
$$f_1(u) = au^2 + bu + c \qquad (u \in D_1)$$
ja
$$h_1(u) = 2au + b \qquad (u \in D_1^\circ),$$
mistõttu
$$f(x) = xf_1(u) = x\left(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c\right) = a\frac{1}{x} + b + cx \qquad (x \in D)$$
ning
$$h(x) = h_1(u) = 2a\frac{1}{x} + b \qquad (x \in D^\circ).$$
Piisavus. Kui
$$f(x) = a\frac{1}{x} + b + cx \qquad (x \in D)$$

ja

$$h(x) = 2a\frac{1}{x} + b \qquad (x \in D^\circ),$$

siis tingimuse $x \neq y$ korral

$$\begin{aligned}
\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} &= \frac{x\left(a\frac{1}{y} + b + cy\right) - y\left(a\frac{1}{x} + b + cx\right)}{x - y} = \frac{a\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) + b(x - y)}{x - y} \\
&= \frac{\frac{a(x-y)(x+y)}{xy} + b(x - y)}{x - y} = \frac{(x - y)\left(\frac{a(x+y)}{xy} + b\right)}{x - y} = \frac{a(x + y)}{xy} + b
\end{aligned}$$

ja

$$h\left(\frac{2xy}{x + y}\right) = 2a\frac{1}{\frac{2xy}{x+y}} + b = \frac{2a(x + y)}{2xy} + b = \frac{a(x + y)}{xy} + b,$$

s.t

$$\frac{xf(y) - yf(x)}{x - y} = h\left(\frac{2xy}{x + y}\right).$$

$\square$

Kirjandus

[1] **J. Aczél, M. Kuczma**, *On two mean value properties and functional equations associated with them.* Aequationes Math. **38** (1989), 216-235

[2] **O. Hutník, J. Molnárová**, *Flett's mean value theorem: A survey.* arXiv:1309.5715v1 [math.CA] 23 Sept 2013.

[3] **O. Hutník, J. Molnárová**, *On Flett's mean value theorem. Aequationes Math.* DOI 10.1007/s00010-0311-5 (2014).

[4] **P. K. Sahoo, T. Riedel**, *Mean value theorems and functional equations.* World Scientific, 260 pp., 1998.

[5] **J. Tong**, *On Flett's mean value theorem.* Int. J. Math. Ed. Sci. Tech. **35** (2004), 936-941.

[6] **D. H. Trahan**, *A new type of mean value theorem.* Math. Magazine **39** (1966), 264-268.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Nele Rosenberg (sünnikuupäev: 24.02.1993),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Keskväärtusteoreemid ja nendega seotud funktsionaalvõrrandid",
   mille juhendaja on Toivo Leiger,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 04.06.2015