

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Paul Meerits

OPTIMAALSE JUHTIMISE RAKENDUSI

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Jaan Lellep, *füüs.-mat.-dr.*

Tartu 2016

Optimaalse juhtimise rakendusi

Bakalaureusetöö

Paul Meerits

Lühikokkuvõte. Käesolevas töös esitatakse optimaalse juhtimise teooria rakendusi. Mehaanika valdkonnas esitatakse jaotatud koormuse ja kontsentreeritud koormuse korral konsooltala paindemoment ja läbipaine. Konstantse ja muutuva paksusega konsooltala võrdluses leitakse konsooltala optimaalne projekt etteantud läbipainde korra. Majanduse valdkonnas leitakse monopoolses seisus oleva ettevõtte toote hind ja kogus nii, et etteantud perioodi lõpuks kasum oleks maksimaalne.

CERCS teaduseriala. P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Märksõnad. Optimaalse juhtimise teooria, konsooltala, paindemoment, läbipaine, Euleri võrrandid, hind, kasum.

Applications of Optimal Control Theory

Bachelor's thesis

Paul Meerits

Abstract. Thesis introduces some applications of optimal control theory. In the field of mechanics the bending of a cantilever is studied. The beam under consideration is subjected to the concentrated load at the free edge and to the uniformly distributed transverse loading. The optimal project of the beam is determined for given maximal deflection. In the field of economics the price and quantity of a monopolistic firm's product is presented so that at the end of the given period the firm's profit is maximized.

CERCS research specialisation. P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Keywords. Control theory, cantilever beam, bending moment, deflection, Euler's equations, price, profit.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1. Konsooltala deformeerumine ristkoormuse mõjul	4
1.1 Põhivõrrandid	5
1.1.1 Tasakaaluvõrrandid	5
1.1.2 Hooke'i seadus	7
1.2 Üksikjõuga koormatud konsooltala	8
1.3 Jaotatud koormus	12
1.4 Tala optimaalne projekt	17
2. Firma maksimaalne kasum	23
2.1 Ülesande püstitus	23
2.2 Euleri võrrandid	25
2.3 Karakteristlik võrrand	27
2.4 Konstantide määramine	28
2.5 Üldlahend	30
Kirjandus	32

Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö valdkond on optimaalse juhtimise teooria. Töö eesmärk on esitada selle valdkonna rakendusi mehaanikas ja majanduses. Optimaalse juhtimise teooria on võrdlemisi uus ala võrdluses klassikaliste valdkondadega nagu algebra ja geomeetria. Samas võib seda valdkonda käsitleda kui süsteemide käitumise optimeerimist, millega on ühiskond tegelenud aegade algusest peale. Tänapäeval on optimeeritavad süsteemid hoopis teistsugused, kuid säilinud on vajadus leida neile süsteemidele parim viis funktsioneerimiseks. Selle jaoks leitakse süsteemi olekust (asendist) sõltuv funktsionaal ning parimaks lahendiks loetakse lahend, mille korral funktsionaal saavutab minimaalse väärtuse.

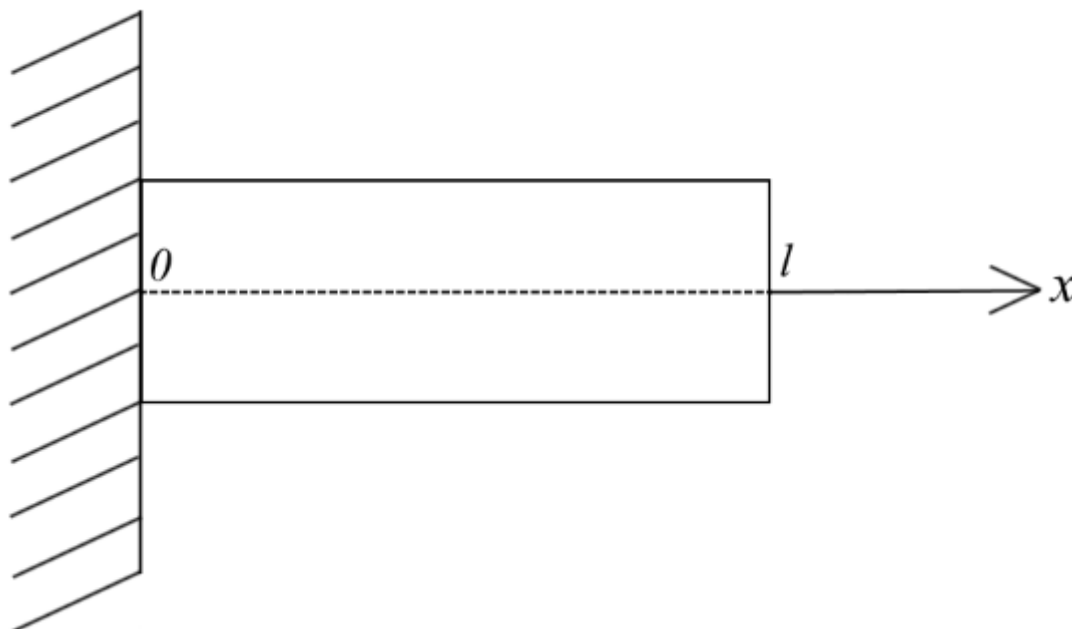
Antud bakalaureusetöö on peamiselt referatiivne ja koosneb kahest peatükist. Bakalaureusetöö kirjutamisel oli põhiallikaks J. Lellepi õpik-monograafia [6]. Mehaanika valdkonnas oli kasutatud allikatena veel [1] ning J. N. Reddy töid [8], [10]. Mõistete defineerimisel kasutati eestikeelseid õpikuid [3] ja [5]. Majanduse osa kirjutamisel toetuti suuresti A. C. Chiangi õpikule [2]. Samuti kasutati õpikuid [4], [6], [7] ja [9].

Esimene peatükk tutvustab optimaalse juhtimise rakendusi mehaanika valdkonnas, täpsemalt konsooltala deformeerumist ristkoormuse mõjul. Vaatluse all on konsooltala, millele mõjub jaotatud koormus või kontsentreeritud koormus ehk üksikjõud. Esitatakse vastavate olukordade puhul konsooltala paindemoment ja läbipaine. Saadud tulemuste illustreerimiseks on esitatud graafikud erinevate koormuste korral. Samuti esitatakse lugejale konsooltala optimaalne projekt ehk minimaalse materjalikuluga konsooltala, mis vastab etteantud läbipaindele. Selle jaoks võrreldakse konstantse paksusega ja muutuva paksusega konsooltala.

Teises peatükis vaadeldakse majandusvaldkonna rakendust. Optimeeritavaks protsessiks on monopoolses seisus oleva firma kasum. Antud ülesande puhul eeldame, et protsess on ajaliselt piiratud. Samuti eeldame, et antud on hind selle perioodi alguses ja lõpus. Kasutades ettevõtte tulude kirjeldamiseks toote hinna ja koguse korrutist ning kulude jaoks Evansi mudelit saadakse maksimeeritav kasumifunktsioon. Süsteemi optimeerimise tulemusena esitatakse valem toote hinna ja koguse kohta nii, et kasum oleks maksimaalne. Leitud valemite illustreerimiseks on esitatud ka graafikud.

1. Konsooltala deformeerumine ristkoormuse mõjul

Vaatleme konsooltala, millele mõjub ristkoormus (joonis 1). Tala pikkus olgu l ning koordinaatide alguspunkt 0 asugu vasaku otsa keskpunktis. Antud töös vaatleme ristkülikukujulise ristlõikega talasid. Ristlõike mõõtmed olgu h (kõrgus) ja b (laius).



Joonis 1: Konsooltala

Konsooltala defineerimisel on lähtutud ehitusmehaanika õpikutest [3] ja [5].

Definitsioon 1.1. Varras on prismaline või silindriline keha, mille kõrgus (varda paksus) on võrreldes teiste mõõtmetega väike.

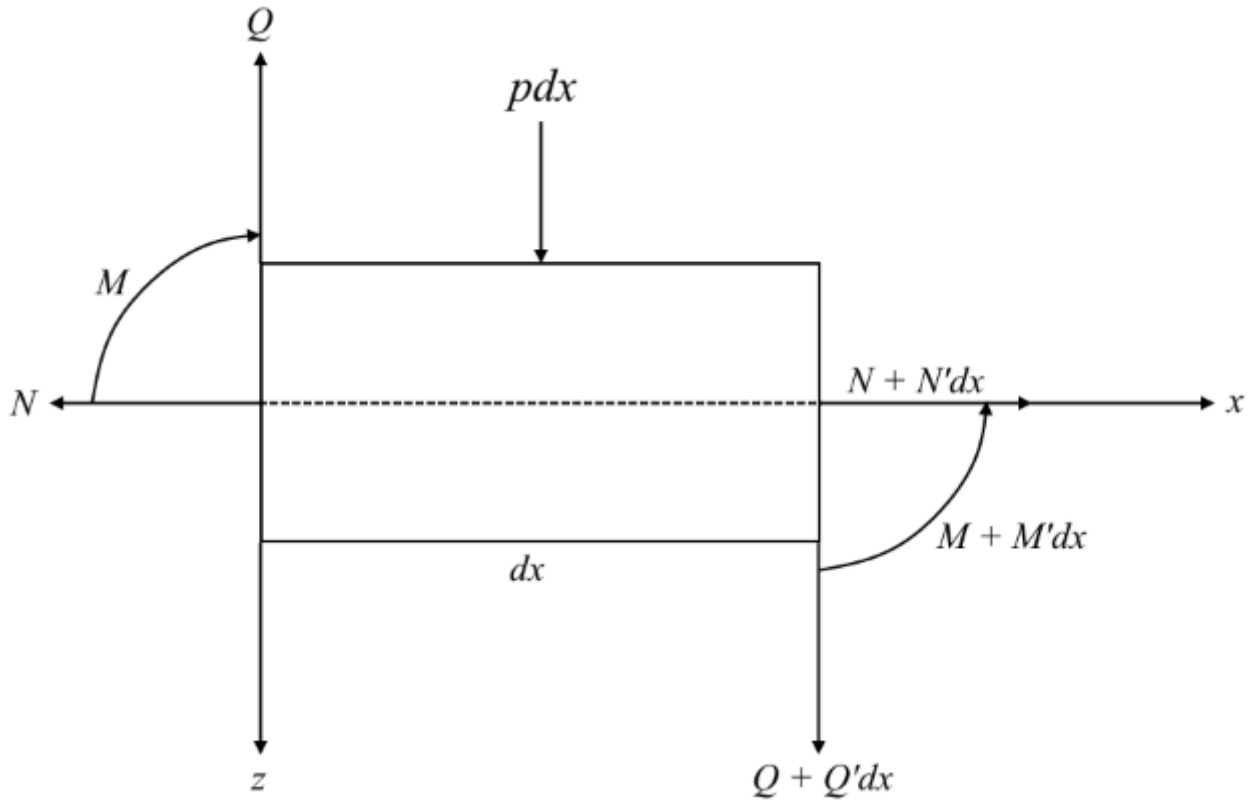
Definitsioon 1.2. Tala on horisontaalne varras, millele mõjub vertikaalne koormus.

Definitsioon 1.3. Konsooltalaks nimetame tala, mille üks ots on jäigalt kinnitatud ning teine ots on täiesti vaba (joonis 1).

1.1. Põhivõrrandid

1.1.1. Tasakaaluvõrrandid

Tasakaaluvõrrandite tuletamiseks vaatleme tala elementi, mille pikkus on dx (joonis 2).



Joonis 2: Konsooltala element

Olgu konsooltalale (joonis 1) mõjuvad üldistatud jõud membraanjõud ehk normaaljõud N , paindemoment M ja lõikejõud Q . Joonisel 2 on kujutatud konsooltala element ning talle mõjuvad jõud ja momendid. Samuti mõjub talale jaotatud koormus p . Eeldades, et mainitud jõud, momendid ja jaotatud koormus moodustavad tasakaalus oleva jõudude süsteemi ja kasutades jõudude tasakaalu tingimusi saame tasakaaluvõrrandid. Seejuures x - ja z -telje sihiliste jõudude projektsioonide summa võrdsustamine nulliga annab vastavalt

$$-N + N + N'dx = 0 \quad (1.1)$$

(siin ja edaspidi tähistab priim tuletist muutuja x järgi) ja

$$-Q + Q + Q'dx + p dx = 0. \quad (1.2)$$

Momentide summa võrdsustamisel nulliga saame

$$-M + M + M'dx - Q \cdot \frac{dx}{2} - (Q + Q'dx) \cdot \frac{dx}{2} = 0. \quad (1.3)$$

Koondades võrrandites (1.1), (1.2) ja (1.3) sarnased liikmed, saame piirprotsessi $dx \rightarrow 0$ süsteemi

$$\begin{cases} N' = 0, \\ Q' = -p, \\ M' = Q \end{cases} \quad (1.4)$$

ehk

$$\begin{cases} N = const, \\ M'' = -p. \end{cases}$$

1.1.2. Hooke'i seadus

Vastavalt Hooke'i seadusele kehtib elastse materjali korral seos (vaata [6])

$$M = EI\kappa. \quad (1.5)$$

Siin

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

ja

$$\kappa = -w''. \quad (1.6)$$

Sealjuures E on materjali elastsusmoodul, I on ristlõike inertsimoment ja w tala läbipaine. Suurus κ esitab tala keskjoone kõveruse ligikaudse väärtuse.

Tõepoolest, kuna joone $w = w(x)$ kõverus ε avaldub kujul

$$\varepsilon = \frac{|w''|}{(1 + w'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

siis väikeste läbipainete korral, kui $w'^2 < 1$, võime võtta $\kappa \approx \varepsilon$.

Avaldame w'' . Hooke'i seaduse (1.5) ja valemi (1.6) põhjal saame

$$M = -EIw''.$$

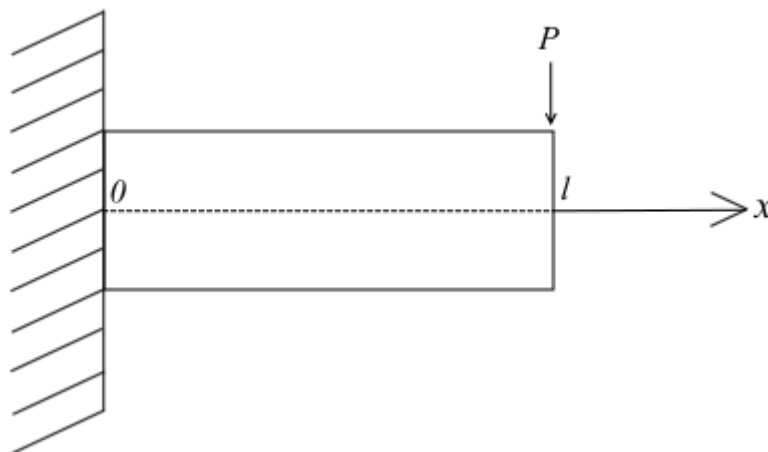
Siit leiame

$$w'' = -\frac{M}{EI}. \quad (1.7)$$

Kui paindemomendi jaotus $M = M(x)$ on teada, siis võib võrrandist (1.7) integreerimise teel leida läbipainde $w = w(x)$ iga koormuse väärtuse korral.

1.2. Üksikjõuga koormatud konsooltala

Uurime konsooltala, mille vabale otsale mõjub kontsentreeritud koormus P ehk üksikjõud. Antud olukorda kirjeldab joonis 3.



Joonis 3: Konsooltala (üksikjõud vabal otsal)

Tasakaaluvõrranditest (1.4) järelduvad seosed

$$\begin{cases} N = \text{const}, \\ Q' = 0, \\ M' = Q. \end{cases} \quad (1.8)$$

Paneme tähele, et jaotatud koormust ei mõju ja seega jaotatud koormuse intensiivsus $p = 0$.

Integreerides kahte viimast seost süsteemis (1.8) saame

$$Q = C_1 \quad (1.9)$$

ja

$$M = C_1 x + C_2, \quad (1.10)$$

kus C_1, C_2 on suvalised konstandid.

Paneme tähele, et paindemomendi valem (1.10) sisaldab määramata konstante. Järgmisena määrame ära konstandid C_1 ja C_2 .

Vaadeldavale talale mõjub üksikjõud P konsooltala vabal otsal. Seega konsooltala vabal otsal kehtivad tingimused

$$\begin{cases} M(l) = 0, \\ Q(l) = P. \end{cases} \quad (1.11)$$

Kasutades seoseid (1.9), (1.10) ja (1.11) saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1 l + C_2 = 0, \\ C_1 = P. \end{cases} \quad (1.12)$$

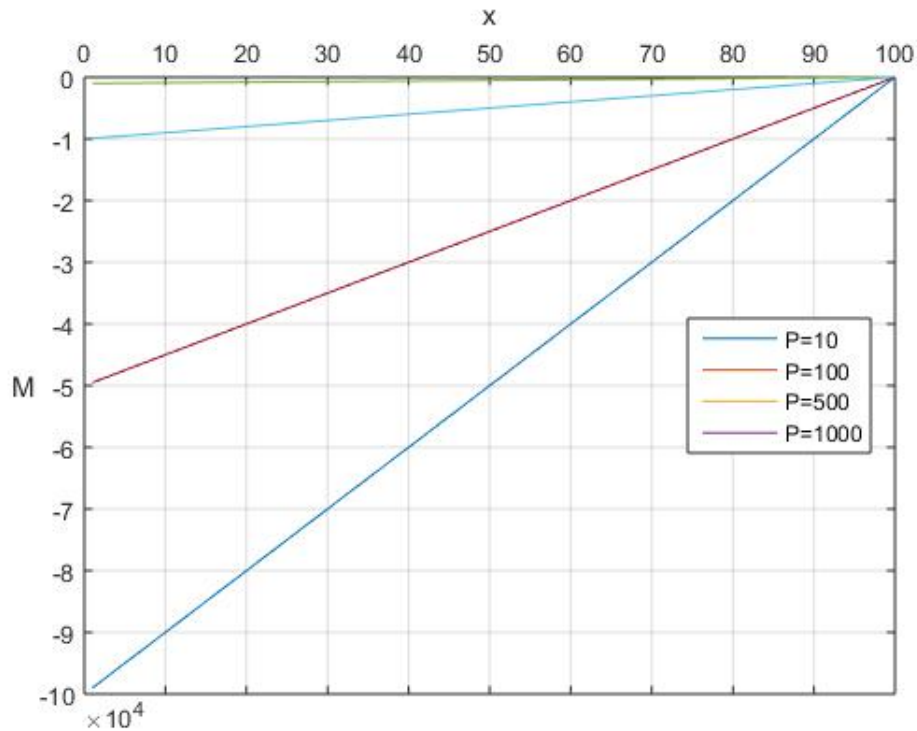
Võrrandisüsteemi (1.12) lahendid on

$$\begin{cases} C_1 = P, \\ C_2 = -Pl. \end{cases}$$

Asendame saadud määratud konstandid C_1 ja C_2 paindemomendi võrrandisse (1.10). Saame tulemuseks konsooltala paindemomendi üksikjõu P korral

$$M = P(x - l). \quad (1.13)$$

Joonis 4 näitab konsooltala paindemomenti, kui üksikjõud P on vabal otsal suurusega 10, 100, 500 ja 1000 njuutonit. Joonisel 4 ning edaspidi esitatavad tulemused on saadud tala jaoks, mille mõõtmed on $l = 100$ cm (pikkus), $b = 20$ cm (laius) ja $h = 20$ cm (kõrgus). Kuna tala materjaliks on valitud alumiinium, siis $E = 69 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$ [1].



Joonis 4: Konsooltala paindemoment üksikjõu korral

Läbipainde w leidmiseks kasutame Hooke'i seadust. Asendame Hooke'i seadusest saadud võrrandisse (1.7) leitud paindemomendi (1.13). Seega

$$w'' = -\frac{P(x-l)}{EI}. \quad (1.14)$$

Integreerides seda seost leiame

$$w' = -\frac{P}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - lx + C_1 \right). \quad (1.15)$$

Integreerides veel üks kord leiame

$$w = -\frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} + C_1x + C_2 \right). \quad (1.16)$$

Saime läbipainde valemi üksikjõu korral. Paneme tähele, et see sisaldab määramata konstante C_1 ja C_2 . Järgmisena määrame need konstandid.

Kinnituskohas kehtivad tingimused (vaata [8], [10])

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ w'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Seostest (1.15), (1.16) ja (1.17) saame tingimustele võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} -\frac{P}{EI}C_2 = 0, \\ -\frac{P}{EI}C_1 = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Võrrandisüsteemi (1.18) lahendid on

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

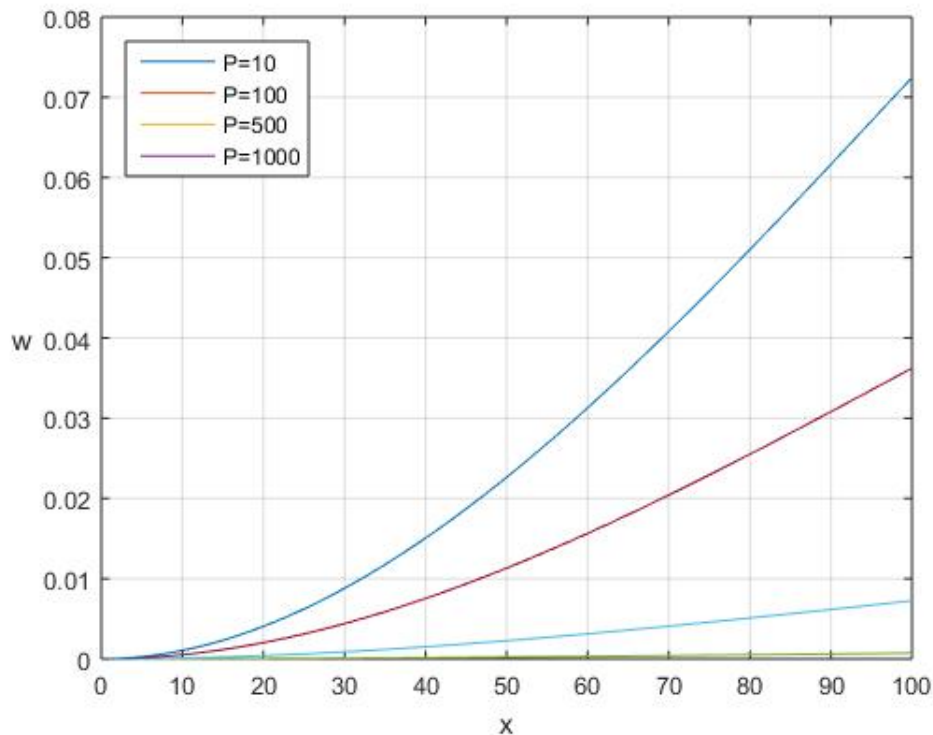
Asendame määratud konstandid C_1 ja C_2 läbipainde võrrandisse (1.16). Nii saame

$$w = -\frac{P}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right).$$

Läbipaine konsooltala vabal otsal üksikjõu P korral avaldub kujul

$$w(l) = \frac{Pl^3}{3EI}.$$

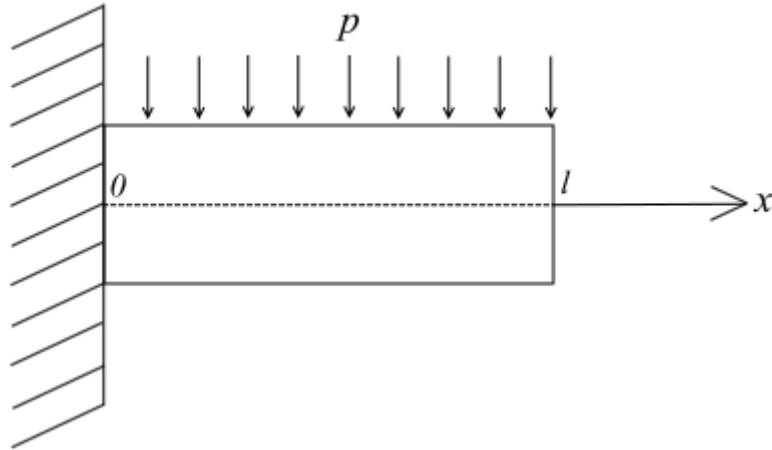
Joonis 5 kirjeldab konsooltala läbipainet, kui üksikjõu P suurus vabal otsal on 10, 100, 500 ja 1000 njuutonit.



Joonis 5: Konsooltala läbipaine üksikjõu korral

1.3. Jaotatud koormus

Uurime konsooltala, millele mõjub jaotatud koormus p (joonis 6).



Joonis 6: Konsooltala (jaotatud koormus)

Tasakaaluvõrrandite (1.4) põhjal

$$\begin{cases} N = \text{const}, \\ Q' = -p, \\ M' = Q. \end{cases}$$

Integreerides kahte viimast seost saame

$$\begin{aligned} Q &= -px + C_1, \\ M &= -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Järgmisena määrame ära konstandid C_1 ja C_2 .

Vaadeldaval juhul mõjub talale jaotatud koormus p . Seega konsooltala vabal otsal kehtivad tingimused

$$\begin{cases} M(l) = 0, \\ Q(l) = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Tingimustele (1.20) vastab võrrandisüsteem

$$\begin{cases} -\frac{pl^2}{2} + C_1l + C_2 = 0, \\ -pl + C_1 = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Avaldades võrrandisüsteemi (1.21) teisest võrrandist C_1 saame

$$C_1 = pl.$$

Asendame konstandi C_1 võrrandisüsteemi (1.21) esimesse võrrandisse. Seega

$$C_2 = -\frac{1}{2}pl^2.$$

Seega võrrandisüsteemi (1.21) lahenditeks on

$$\begin{cases} C_1 = pl, \\ C_2 = -pl^2 + \frac{pl^2}{2}. \end{cases}$$

Asendame saadud määratud konstandid C_1 ja C_2 paindemomendi võrrandisse (1.19). Saame tulemuseks

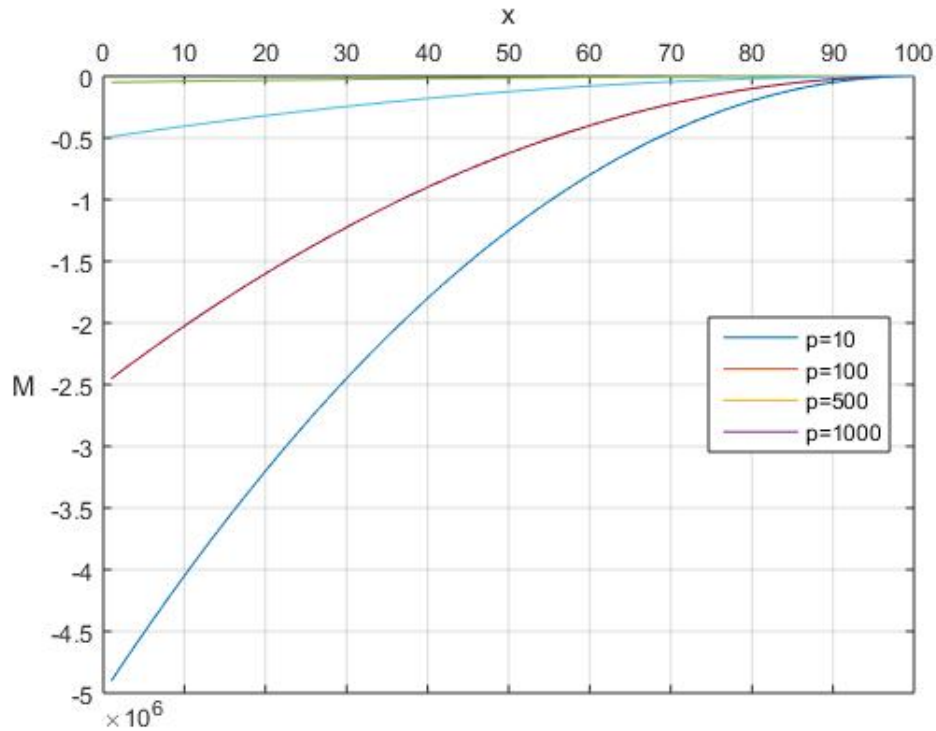
$$M = -\frac{px^2}{2} + plx - \frac{1}{2}pl^2$$

ehk

$$M = -\frac{p}{2}(x - l)^2. \quad (1.22)$$

Saadud valem (1.22) näitab konsooltala paindemomenti jaotatud koormuse p korral.

Joonisel 7 on esitatud konsooltala paindemoment juhul, kui jaotatud koormus p on suurusega 10, 100, 500 ja 1000 njuutonit.



Joonis 7: Konsooltala paindemoment jaotatud koormuse korral

Läbipainde w leidmiseks kasutame Hooke'i seadust. Asendades Hooke'i seadusest saadud võrrandisse (1.7) leitud paindemomendi (1.22) saame

$$w'' = \frac{p}{2EI} \cdot (x - l)^2.$$

Integreerides seda seost kaks korda leiame

$$w' = \frac{p}{2EI} \cdot \frac{(x - l)^3}{3} + B_1$$

ja

$$w = \frac{p}{24EI} \cdot (x - l)^4 + B_1x + B_2. \quad (1.23)$$

Saime läbipainde valemi, mis sisaldab määramata konstante.

Läbipaine peab rahuldama tingimusi

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ w'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Tingimustele (1.24) vastav võrrandisüsteem on

$$\begin{cases} \frac{p(-l)^4}{24EI} + B_2 = 0, \\ \frac{p(-l)^3}{6EI} + B_1 = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \frac{pl^4}{24EI} + B_2 = 0, \\ -\frac{pl^3}{6EI} + B_1 = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Võrrandisüsteemi (1.25) lahendid on

$$\begin{cases} B_1 = \frac{pl^3}{6EI}, \\ B_2 = -\frac{pl^4}{24EI}. \end{cases}$$

Asendame leitud konstandid B_1 ja B_2 läbipainde võrrandisse (1.23). Saame

$$w = \frac{p}{24EI} \cdot (x-l)^4 + \frac{pl^3}{6EI} \cdot x - \frac{pl^4}{24EI}$$

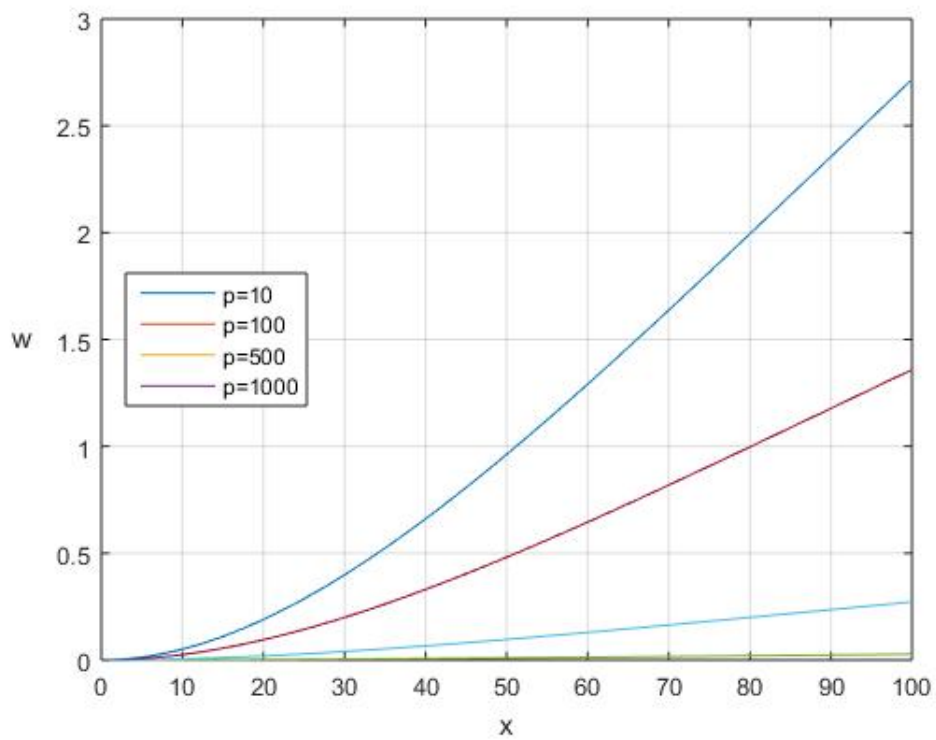
ehk

$$w = \frac{p(x-l)^4 + 4pl^3x - pl^4}{24EI}.$$

Läbipaine konsooltala vabal otsal avaldub kujul

$$w(l) = \frac{pl^3}{8EI}.$$

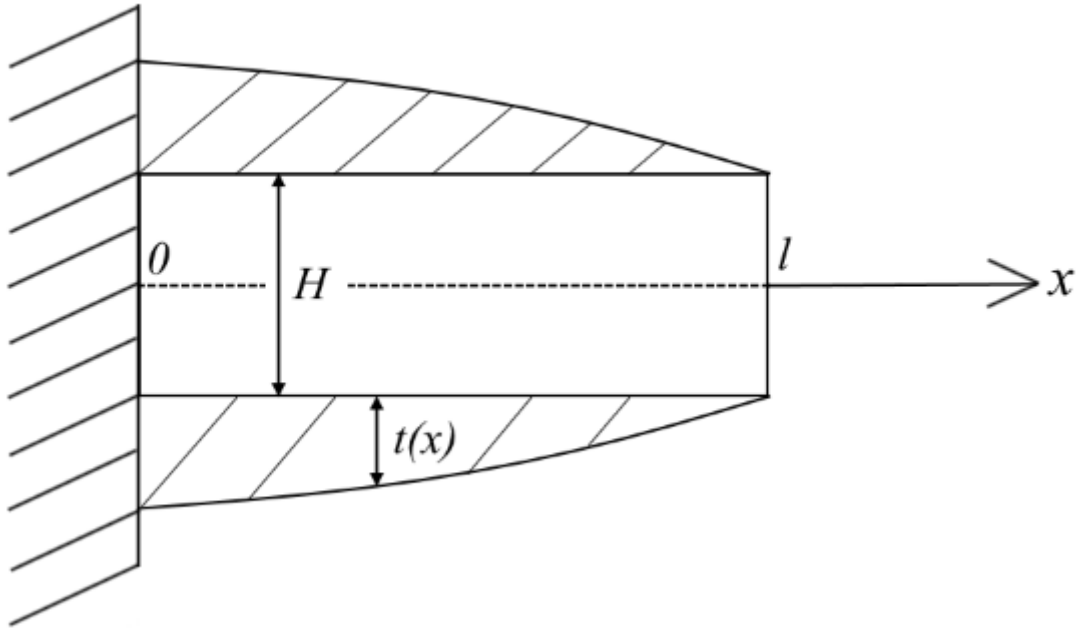
Joonis 8 kirjeldab konsooltala läbipainet, kui jaotatud koormus p on 10, 100, 500 ja 1000 njuutonit.



Joonis 8: Konsooltala läbipaine jaotatud koormuse korral

1.4. Tala optimaalne projekt

Vaatleme ideaalselt kahekihilist tala, mis koosneb kahest kandvast kihist ja nendevahelisest täitekihist (joonis 9). Olgu kandvate kihtide paksus $t = t(x)$ ning täitekihi paksus $H = \text{const}$.



Joonis 9: Muutuva paksusega konsooltala

Järgnevalt püüame leida tala optimaalse projekti, s.t. minimiseerida materjali kulu. Seejuures on mõistlik eeldada, et läbipaine konsooltala vabal otsal on antud ehk $w(l) = w_0$. Seega on meie eesmärk leida minimaalne väärtus funktsionaalile

$$J = 2b \int_0^l t(x) dx$$

nii, et tala oleks võimeline taluma talle rakendatud koormust. Koormuseks olgu üksikjõud, mis on rakendatud tala vabal otsal.

Eelpool nägime (võrrand (1.14)), et üksikjõu puhul kehtib seos

$$w'' = -\frac{P(x-l)}{EI}.$$

Samuti teame, et kahekihilise keha ristlõike inertsimoment avaldub kujul

$$I = \frac{btH^2}{2}. \quad (1.26)$$

Asendades inertsimomendi (1.26) eelmisse võrrandisse saame

$$w'' = -\frac{2P(x-l)}{EbtH^2}.$$

Osutub, et mõistlik on sisse tuua faasimuutujad

$$\begin{cases} y_1 = w, \\ y_2 = w'. \end{cases} \quad (1.27)$$

Faasimuutujad (1.27) rahuldavad (põhi)süsteemi

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{2P(x-l)}{EH^2bt(x)}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Optimaalse juhtimise teoorias kasutatav Hamiltoni funktsioon saab antud juhul kuju

$$L = -bt + \psi_1 \cdot y_2 + \psi_2 \cdot \left(-\frac{2P(x-l)}{EH^2bt(x)} \right).$$

Kuna

$$\dot{\psi}_j = -\frac{\partial L}{\partial y_j} \quad (j = 1, 2),$$

siis antud juhul

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1. \end{cases}$$

Integreerides saame siit

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1, \\ \psi_2 = -C_1x + C_2, \end{cases}$$

kus C_1, C_2 on suvalised konstandid.

Et optimaalne juhtimine peab andma Hamiltoni funktsioonile maksimaalse väärtuse, siis peab kehtima seos $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, sest t on juhtimine. Viimane nõue annab

$$-b + \psi_2 \frac{2P(x-l)}{EH^2bt^2} = 0$$

ehk

$$t^2 = \frac{\psi_2 2P(x-l)}{EH^2b^2}.$$

Siit järeldub

$$t = \sqrt{\frac{\psi_2 2P(x-l)}{EH^2b^2}}. \quad (1.29)$$

Kuna transversuaalsuse tingimuste tõttu $\psi_2(l) = 0$, siis $C_2 = C_1l$, mistõttu kaasmuutujad on

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1, \\ \psi_2 = -C_1x + C_1l \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \psi_1 = C, \\ \psi_2 = C(l-x), \end{cases}$$

kus $C := C_1$ on konstant.

Asendades ψ_2 juhtimise t võrrandisse (1.29) saame

$$t = \sqrt{\frac{C(l-x)2P(x-l)}{EH^2b^2}}$$

ehk

$$t = \frac{l-x}{Hb} \cdot \sqrt{\frac{-2PC}{E}}. \quad (1.30)$$

Asendame juhtimise t põhissüsteemi (1.28), misjärel saame

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{2P(x-l)}{EH^2bt(x)} \cdot \frac{Hb}{l-x} \cdot \sqrt{\frac{E}{-2PC}} \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{1}{H} \cdot \sqrt{\frac{2P}{-EC}}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Võrrandisüsteemi (1.31) teise võrrandi integreerimine annab

$$y_2 = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2P}{-EC}} \cdot x + B_1,$$

kus B_1 on konstant.

Kuna $y_2(0) = 0$, siis $B_1 = 0$.

Võrrandisüsteemi (1.31) esimese võrrandi integreerimine annab

$$y_1 = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2P}{-EC}} \cdot \frac{x^2}{2} + B_2,$$

kus B_2 on konstant.

Kuna $y_1(0) = 0$, siis $B_2 = 0$. Seega määratud konstandid on nullid.

Järelikult, faasimuutujad on

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2P}{-EC}} \cdot \frac{x^2}{2}, \\ y_2 = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{2P}{-EC}} \cdot x. \end{cases}$$

Meil on antud läbipaine vabal otsal ehk $y_1(l) = w_0$. Seetõttu

$$\frac{1}{H} \sqrt{\frac{2P}{-EC}} \cdot \frac{l^2}{2} = w_0.$$

Siit saame konstandi C

$$C = -\frac{Pl^4}{2EH^2w_0^2}.$$

Asendades määratud konstandi C juhtimise t avaldisse (1.30) saame

$$t = \frac{l-x}{Hb} \cdot \sqrt{\frac{2P}{E} \cdot \frac{Pl^4}{2EH^2w_0^2}}$$

ehk

$$t = \frac{(l-x)Pl^2}{EH^2bw_0}. \quad (1.32)$$

Saadud valem (1.32) näitab muutuva paksusega konsooltala kandvate kihtide optimaalset paksust t .

Muutuva paksusega konsooltala kandvate kihtide ruumala väljendub valemiga

$$V_{opt} = 2b \int_0^l t dx$$

ehk

$$V_{opt} = 2b \int_0^l \frac{(l-x)Pl^2}{EH^2bw_0} dx.$$

Integreerides leiame

$$V_{opt} = \frac{Pl^4}{EH^2w_0}. \quad (1.33)$$

Optimaalse projekti efektiivsuse hindamiseks nõuame, et konstantse paksusega t_* võrdlustala läbipaine vabal otsal oleks samasugune antud koormuse väärtuse korral. Konstantse kihi paksusega tala korral kehtib seos (1.14). Siin tuleb võtta $I = \frac{bt_*H^2}{2}$. Võrdlustala ruumala leidmiseks võtame kihi paksuseks $t = t_*$. Konstantse paksuse korral on võimalik integreerida võrrandit

$$w'' = -\frac{2P(x-l)}{EbH^2t_*}.$$

Integreerides saame

$$w' = -\frac{2P}{EbH^2t_*} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + C_1.$$

Kuna $w'(0) = 0$, siis $C_1 = 0$.

Integreerides uuesti saame

$$w = -\frac{2P}{EbH^2t_*} \cdot \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right) + C_2.$$

Kuna $w(0) = 0$, siis $C_2 = 0$.

Meil on antud läbipaine tala vabal otsal ehk $w(l) = w_0$. Seega

$$\frac{2Pl^3}{3EbH^2t_*} = w_0.$$

Siit saame avaldada konsooltala võrdlustala konstantse paksuse

$$t_* = \frac{2Pl^3}{3EbH^2w_0}.$$

Võrdlustala kandvate kihtide ruumala väljendub valemiga

$$V_* = 2t_*lb$$

ehk

$$V_* = \frac{4Pl^4}{3EH^2w_0}. \quad (1.34)$$

Muutuva paksusega konsooltala korral tekkiwat materjali säästu saame kirjeldada koeffitsendiga

$$e = \frac{V_{opt}}{V_*}.$$

Võrduste (1.33) ja (1.34) kohaselt

$$e = \frac{3}{4}.$$

Materjali kokkuhoidu protsentides iseloomustab suurus

$$\gamma = \frac{V_* - V_{opt}}{V_*} \cdot 100\%.$$

Ilmselt

$$\gamma = (1 - e) \cdot 100\%.$$

Seega antud juhul $\gamma = 25\%$. Järelikult on muutuva paksusega tala korral vaja kasutada 25 protsenti vähem materjali võrreldes konstantse paksusega konsooltalaga.

2. Firma maksimaalne kasum

Selle peatüki kirjutamisel on kasutatud A. C. Chiangi õpikut “Elements of Dynamic Optimization” (1999) [2]. Samuti on kasutatud allikaid [4], [6], [7] ja [9].

2.1. Ülesande püstitus

Olgu meil vaatluse all monopoolses seisus firma. Meie eesmärk on maksimeerida selle ettevõtte kasumit. Selleks leiame valemid, mis annavad müüdava toodangu ühikuhinna ja koguse nii, et perioodi lõpuks oleks kasum maksimaalne. Eeldame, et meil on antud toote hind perioodi alguses P_0 ja perioodi lõpus P_T .

Olgu $Q = Q(t)$ toodangu hulk tükides, $P = P(t)$ toodangu ühe ühiku hind ning t aeg. Tulud on siis esitatud kujul $R = P \times Q$. Olgu tootmiskulud esitatud kujul $C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma$, kus α , β ja γ on konstandid. Olgu $\dot{P} = \dot{P}(t)$ toote hinna muutumise kiirus. Vastavalt Evansi mudelile

$$Q = a - bP(t) + h\dot{P}(t), \quad (2.1)$$

kus a , b ja h on antud konstandid.

Seega monopoolse firma kasum on

$$\Pi = R - C$$

ehk

$$\Pi = PQ - \alpha Q^2 - \beta Q - \gamma. \quad (2.2)$$

Asendame kasumi valemisse (2.2) Evansi mudeli kaudu avaldatud koguse (2.1). Saame

$$\Pi = \Pi(P, \dot{P}) = P(a - bP + h\dot{P}) - \alpha(a - bP + h\dot{P})^2 - \beta(a - bP + h\dot{P}) - \gamma.$$

Oleme saanud maksimeeritava funktsiooni. Paneme tähele, et kasum avaldub ainult toote hinna ja toote hinna muutumise kiiruse kaudu.

Edasise arutluskäigu lihtsustamiseks korrastame ja lihtsustame avaldist. Avades sulud saame

$$\begin{aligned} \Pi &= aP - bP^2 + hP\dot{P} - \alpha a^2 - \alpha b^2 P^2 - \alpha h^2 \dot{P}^2 \\ &\quad + 2\alpha abP - 2\alpha ah\dot{P} + 2\alpha bhP\dot{P} - \beta a + \beta bP - \beta h\dot{P} - \gamma. \end{aligned}$$

Muutes liidetavate järjekorda saab valem kuju

$$\begin{aligned} \Pi &= -bP^2 - \alpha b^2 P^2 + 2\alpha abP + \beta bP + aP - \alpha h^2 \dot{P}^2 \\ &\quad - 2\alpha ah\dot{P} - \beta h\dot{P} + hP\dot{P} + 2\alpha bhP\dot{P} - \alpha a^2 - \beta a - \gamma. \end{aligned}$$

Tuues tegurid ette saame

$$\begin{aligned} \Pi &= -b(1 + \alpha b)P^2 + (2\alpha ab + \beta b + a)P - \alpha h^2 \dot{P}^2 \\ &\quad - h(\beta + 2\alpha a)\dot{P} + h(1 + 2\alpha b)P\dot{P} - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma). \end{aligned}$$

Oleme kasumi valemit piisavalt lihtsustanud. Järgmisena hakkame rakendama Euleri võrrandit.

Firma kasum vaadeldava perioodi $[0, T]$ jooksul on

$$K_T = \int_0^T \Pi(t) dt.$$

2.2. Euleri võrrandid

Variatsioonarvutuses näidatakse ([6], [4], [9]), et pideva lineaarse funktsionaali

$$J = \int_0^T F(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$$

ekstreemumi tarvilik tingimus on (siin $\vec{x} = \vec{x}(t)$ on pidev ja pidevalt diferentseeruv lõigul $[0, T]$).

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} = 0, \quad (2.3)$$

kus $j = 1, \dots, n$.

Võrrandeid (2.3) nimetatakse Euleri võrranditeks.

Antud ülesande korral on $n = 1$, $x = P$, $F = \Pi$. Seetõttu saavad Euleri võrrandid kuju

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{P}} = 0.$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P} = -2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1 + 2\alpha b)\dot{P}$$

ja

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{P}} = -2\alpha h^2 \dot{P} - h(2\alpha a + \beta) + h(1 + 2\alpha b)P.$$

Asendame osatuletised Euleri võrrandisse. Saame

$$\begin{aligned} & -2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1 + 2\alpha b)\dot{P} \\ & - \frac{d}{dt} \left[-2\alpha h^2 \dot{P} - h(2\alpha a + \beta) + h(1 + 2\alpha b)P \right] = 0. \end{aligned}$$

Lihtsustades seda avaldist saame

$$-2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1 + 2\alpha b)\dot{P} + 2\alpha h^2 \ddot{P} - h(1 + 2\alpha b)\dot{P} = 0.$$

Näeme, et liidetav $h(1 + 2\alpha b)\dot{P}$ taandub välja ja alles jääb võrrand kujul

$$2\alpha h^2 \ddot{P} - 2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) = 0.$$

Jagades läbi teguriga $2\alpha h^2$ saame

$$\ddot{P} - \frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2} P + \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2} = 0.$$

Viime saadud võrrandi kujule

$$\ddot{P} - \frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2} P = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}. \quad (2.4)$$

Paneme tähele, et see on lineaarne konstantsate kordajatega teist järku mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand.

2.3. Karakteristlik võrrand

Selle punkti kirjutamisel on kasutatud A. Pedase ja G. Vainikko õpikut „Harilikud diferentsiaalvõrrandid“ [7].

Võrrandi (2.4) lahendamiseks tuleb esmalt lahendada vastav homogeenne võrrand

$$\ddot{P} - \frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2} P = 0. \quad (2.5)$$

Koostame võrrandi (2.5) jaoks karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 - \frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2} = 0.$$

Karakteristliku võrrandi lahendid on

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda = \sqrt{\frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2}}, \\ \lambda_2 = -\lambda = -\sqrt{\frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2}}. \end{cases}$$

Seega võrrandi (2.5) üldlahend on

$$P_h = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t},$$

kus $\lambda = \sqrt{\frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2}}$ ja $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Paneme tähele, et võrrandi (2.4) erilahend on

$$P_{eri} = \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)}.$$

Seega saame lineaarse konstantsate kordajatega teist järku mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (2.4) üldlahendi kirjutada kujul

$$P = P_h + P_{eri}$$

ehk

$$P = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} + \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)}. \quad (2.6)$$

Järgmisena määrame ära konstandid.

2.4. Konstantide määramine

Konstantide C_1 ja C_2 määramiseks kasutame rajatingimusi $P(0) = P_0$ (hind perioodi alguses) ja $P(T) = P_T$ (hind perioodi lõpus). Kirjutades need rajatingimused lahti saame võrrandid

$$P_0 = C_1 e^{\lambda \cdot 0} + C_2 e^{-\lambda \cdot 0} + \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)}$$

ja

$$P_T = C_1 e^{\lambda T} + C_2 e^{-\lambda T} + \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)}.$$

Konstantide määramiseks peame lahendama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} P_0 = C_1 + C_2 + \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)}, \\ P_T = C_1 e^{\lambda T} + C_2 e^{-\lambda T} + \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Järgnevalt kasutame loetavuse nimel tähistust

$$eri \doteq \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)}.$$

Esiteks, avaldame teisest võrrandist $C_1 e^{\lambda T}$ ehk

$$C_1 e^{\lambda T} = P_T - C_2 e^{-\lambda T} - eri.$$

Jagades läbi teguriga $e^{\lambda T}$ saame

$$C_1 = \frac{P_T - C_2 e^{-\lambda T} - eri}{e^{\lambda T}}$$

ehk

$$C_1 = e^{-\lambda T}(P_T - eri) - C_2 e^{-2\lambda T}. \quad (2.8)$$

Asendame avaldatud teguri C_1 võrrandisüsteemi (2.7) esimesse võrrandisse. Saame

$$P_0 = e^{-\lambda T}(P_T - eri) - C_2 e^{-2\lambda T} + C_2 + eri$$

ehk

$$P_0 = e^{-\lambda T}(P_T - eri) + C_2(-e^{-2\lambda T} + 1) + eri. \quad (2.9)$$

Järgmisena on meil vaja avaldada konstant C_2 . Võrrandi (2.9) põhjal

$$C_2(1 - e^{-2\lambda T}) = P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri.$$

Jagades läbi teguriga $(1 - e^{-2\lambda T})$ saame

$$C_2 = \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{-2\lambda T}}. \quad (2.10)$$

Konstandi C_1 määramiseks asendame võrrandisse (2.8) avaldise (2.10). Saame

$$C_1 = e^{-\lambda T}(P_T - eri) - \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{-2\lambda T}} \cdot e^{-2\lambda T}$$

ehk

$$C_1 = e^{-\lambda T}(P_T - eri) - \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{e^{2\lambda T} - 1}$$

ehk

$$C_1 = e^{-\lambda T}(P_T - eri) + \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}}.$$

Viies ühisele nimetajale saab avaldis kuju

$$C_1 = \frac{e^{-\lambda T}(P_T - eri) - e^{\lambda T}(P_T - eri) + P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}}.$$

Oleme määranud konstandi C_1 kujul

$$C_1 = \frac{P_0 - e^{\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}}.$$

Seega saime võrrandisüsteemi (2.7) lahenditena määratud konstandid C_1 ja C_2 kujul

$$\begin{cases} C_1 = \frac{P_0 - e^{\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}}, \\ C_2 = \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{-2\lambda T}}. \end{cases}$$

2.5. Üldlahend

Nüüd on võimalik üldlahend P (valem (2.6)) esitada määratud konstantide abil kujul

$$P = \frac{P_0 - e^{\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}} \cdot e^{\lambda t} + \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{-2\lambda T}} \cdot e^{-\lambda t} + eri,$$

kus

$$\lambda = \sqrt{\frac{b(1 + \alpha b)}{\alpha h^2}} \quad (2.11)$$

ja

$$eri = \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)} \quad (2.12)$$

Saadud valem näitab toodangu ühe ühiku hinda ajahetkel t , kui antud on hind perioodi algul (P_0) ja hind perioodi lõpus (P_T) nii, et perioodi lõpuks on kasum maksimaalne.

Selleks, et leida vastav valem toodangu koguse jaoks, asendame avaldisse (2.1) hinna P . Saame

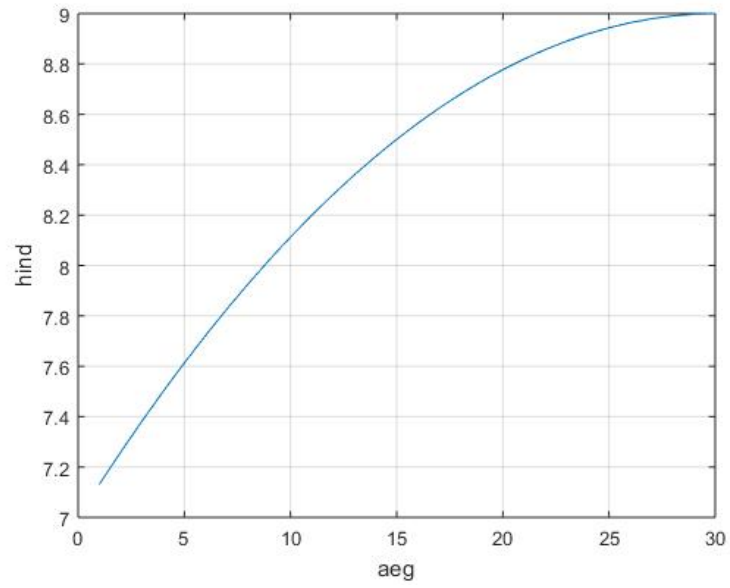
$$\begin{aligned} Q = & a - b \cdot \frac{P_0 - e^{\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}} e^{\lambda t} - b \cdot \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{-2\lambda T}} e^{-\lambda t} \\ & + b \cdot \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1 + \beta b)} + h \cdot \frac{P_0 - e^{\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}} e^{\lambda t} \lambda \\ & - h \cdot \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{-2\lambda T}} e^{-\lambda t} \lambda \end{aligned}$$

ehk

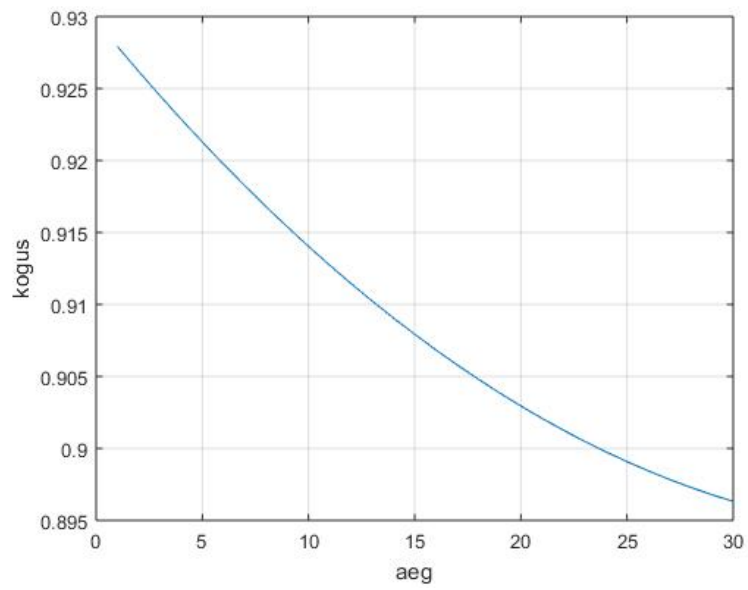
$$\begin{aligned} Q = & \frac{P_0 - e^{\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{2\lambda T}} \cdot e^{\lambda t} (\lambda h - b) \\ & - \frac{P_0 - e^{-\lambda T}(P_T - eri) - eri}{1 - e^{-2\lambda T}} \cdot e^{-\lambda t} (\lambda h + b) + \frac{a - \beta b}{2(1 + \alpha b)}, \end{aligned}$$

kus λ ja eri on määratud seostega (2.11) ja (2.12).

Saadud tulemusi on kujutatud graafiliselt joonistel 10 ja 11. Joonis 10 näitab toodangu ühikuhinda, kui perioodi alghind on $P_0 = 7$, perioodi lõpphind on $P_T = 9$ ja periood on 30 päeva ehk $T = 30$. Evansi mudeli konstandid on $a = 1$, $b = 0,01$, $h = 0,1$ ja klassikalise kulude mudeli konstandid on $\alpha = 1$, $\beta = 4$ ja $\gamma = 8$. Joonis 11 näitab samade andmete puhul toodangu kogust perioodi jooksul.



Joonis 10: Toodangu ühikuhind perioodi jooksul



Joonis 11: Toodangu kogus perioodi jooksul

Kirjandus

- [1] H. ALTENBACH, J. W. ALTENBACH, W. KISSING, *Mechanics of Composite Structural Elements*, Springer-Verlag, Berliin, 2004
- [2] A. C. CHIANG, *Elements of Dynamic Optimization*, Waveland Pr Inc, London, 1999
- [3] R. EEK JA L. POVERUS, *Ehitusmehaanika II*, Kirjastus Valgus, Tallinn, 1967
- [4] M. I. KAMIEN JA N. L. SCHWARTZ, *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Elsevier Science, Amsterdam, 1991
- [5] A. LAHE, *Ehitusmehaanika*, Tallinna Tehnikaülikooli kirjastus, Tallinn, 2012
- [6] J. LELLEP, *Süsteemide optimeerimine*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2013
- [7] A. PEDAS JA G. VAINIKKO, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid*, Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 2011
- [8] J. N. REDDY, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition*, CRC Press, 2006
- [9] J. L. TROUTMAN, *Variational Calculus and Optimal Control*, Springer-Verlag, New York, 1996
- [10] C. M. WANG, J. N. REDDY, K. H. LEE, *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions, First Edition*, Elsevier Science, Amsterdam 2000

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Paul Meerits (sünnikuupäev 27.10.1992),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Optimaalse juhtimise rakendus“, mille juhendaja on professor Jaan Lellep
 - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **10.06.2016**