TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehaanika kateeder

MATEMAATIKA ÜLESANDEID TRÜ-sse ASTUJAILE

(1986. a. sisseastumiseksamitel)

Lahenduste ja kommentaaridega varustanud
Elvi Meidla ja Endel Meidla

TARTU 1987

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 19. detsembril 1986.a.

S a a t e k s

Kogumik sisaldab ülesandeid, mida lahendasid 1986. aastal Tartu Riikliku Ülikooli geoloogia ja geograafia osakonda ning füüsika-keemia, majandus- ja matemaatikateaduskonda astujad. Eksamiülesanded valisid või koostasid ise matemaatika ainekomisjoni liikmed, TRÜ matemaatikateaduskonna õppejõud U.Kaljulaid, T.Lepmann, A.Pedas, M.Somelar, V.Soomer, M.Tombak ja üldhariduskoolide õpetajad H.Keerutaja, R.Kivistik, K.Kruse, E.Meidla, J.Reinson, L. Tartes ja S. Tiirik. Koos ülesannetega esitas koostaja ka lahendused, ent need olid sageli väga lakoonilises vormis ja raskesti jälgitavad. Ülesannete lahendused on ühtlustatud, lisatud vajalikud kommentaarid ja kirjutatud ülikooli vastuvõtueksamiteks valmistujatele sobival kujul Elvi ja Endel Meidla poolt.

Kõik kirjaliku eksami tööd sisaldasid seitse ülesannet, mille lahendamiseks oli aega 4 tundi (240 minutit). Ülesande korrektset lahendust hinnati nelja punktiga. Hinnati ka osalist ning vigast lahendust. Sel juhul võis saada üks kuni kolm punkti. Täiesti vään lahendus ning lahendamata ülesanne punkte ei andnud. Igasse teaduskonda ning osakonda astujaid hinnati eraldi. Tüüpiline hindamise skaala oli järgmine:

0 – 8 punkti – hinne „2", 9 – 18 punkti – hinne „3",
19 – 25 punkti – hinne „4", 26 – 28 punkti – hinne „5".

Matemaatika kirjaliku eksami keskmine hinne oli statsionaarsesse osakonda kandideerijail 3,61 ning kaugõppesse pürgijail 3,00.

J.Lellep
Matemaatika ainekomisjoni
esimees 1986. aastal.

I ÜLESANDED

1. Protsendid

1.1. Kauplusse toodud kangast müüdi esimesel päeval 25 %, teisel päeval 30 % ülejäägist ja kolmandal päeval 40 % uuest ülejäägist. Mitu protsenti kangast oli alles kolmanda päeva õhtuks?

1.2. Kauba hinda alandati 20 % võrra, hiljem uut hinda 15 % võrra. Pärast inventuuri langes kauba hind veel 10 %. Mitme protsendi võrra oli kauba esialgne hind suurem tema lõpphinnast?

1.3. Mitme protsendi võrra muutub ristküliku pindala, kui tema pikkust suurendada 11 % võrra ja laiust vähendada 10 % võrra?

1.4. Mitu protsenti suureneb ristküliku pindala, kui tema pikkust ja laiust suurendada 10 % võrra?

1.5. Mitu liitrit vett tuleb lisada 1,5 liitrile 30 %-lisele äädikhappe lahusele, et saada 3 %-list lahust?

1.6. Mitu protsenti moodustab arv

$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\right]^{-0,75} \cdot 0,09^{-0,5} \cdot 0,1^{-3} \cdot 8^{0}$$

arvust 2000?

1.7. Leida arv, mis on avaldise

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

väärtusest 20 % võrra suurem.

2. Arvutamine ja algebraline teisendamine

2.1. Arvutada

$$\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}\cdot\left[(0{,}45)^{-2}\cdot 8^{\frac{1}{3}}\right]^{0} : (0{,}01)^{\frac{1}{2}} .$$

2.2. Leida suurus x täpse arvutamise teel.

$$\left\{\left[\left(\frac{756 + 32x}{111} + 6138\right) : 82 - 29\right]\cdot 404 + 44658\right\} : 307 = 206 .$$

2.3. Lihtsustada

$$\left[\frac{a + 3b}{(a - b)^2} + \frac{a - 3b}{a^2 - b^2}\right] : \frac{a^2 + 3b^2}{(a - b)^2} .$$

2.4. Lihtsustada

$$\frac{3}{y - 2} + \frac{3y + 12}{25 - y^2} : \left(\frac{2y - 1}{y^2 - 25} - \frac{y - 5}{2y^2 + 9y - 5}\right) .$$

2.5. Lihtsustada

$$\left(\frac{a}{a - 1} - \frac{1}{b - ab}\right) : \frac{ab + 1}{b} - \frac{a}{a^2 - 1}$$

ja arvutada avaldise väärtus, kui $a = -10^{-1}$.

2.6. Lihtsustada

$$\left[\frac{x^2}{x^2 - y^2} - \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{xy + y^2} + \frac{y}{x^2 + xy}\right)\right] : \frac{y}{x - y} .$$

2.7. Lihtsustada

$$\left(m + n - \frac{4mn}{m + n}\right) : \left(\frac{m}{m + n} - \frac{n}{n - m} - \frac{2mn}{m^2 - n^2}\right) .$$

2.8. Lihtsustada

$$\left(\frac{4(a - 2)}{a^2 - a - 6} + \frac{a - 3}{4 - a^2}\right)\cdot\frac{a^2 - 4}{a - 1} - \frac{2}{a - 3} .$$

2.9. Lihtsustada

$$\frac{7}{\sqrt{10} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} .$$

2.10. Lihtsustada

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{ab}+b)}{a^2b-2ab^2+b^3}\cdot\left(\frac{\sqrt{a^2b}}{a^2-ab}\right)^{-1},$$

kui $a > 0,\ b > 0,\ a \neq b$.

2.11. Lihtsustada, kui $x > 0$ ja $x \neq 2$

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x-\frac{2}{\sqrt{x}}}.$$

2.12. Lihtsustada

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}.$$

3. Funktsiooni määramispiirkonna leidmine

3.1. Leida funktsiooni

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}$$

määramispiirkond.

3.2. Leida funktsiooni

$$y=\log(4x-x^2-3)$$

määramispiirkond.

3.3. Leida funktsiooni

$$y=\sqrt{x+3}+\sqrt{\log_2(x-1)}$$

määramispiirkond.

3.4. Leida funktsiooni

$$y=0{,}5\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}$$

määramispiirkond.

4. Võrrandid ja võrrandisüsteemid

4.1. Leida kahekohaline arv teades, et tema üheliste number on kahe võrra suurem kümneliste numbrist ja et otsitav arvu korrutis tema numbrite summaga on 144.

2

4.2. Kiirrong peatati semafori juures 16 minutiks. Pärast seda suurendas ta kiirust 10 km/h võrra ja likvideeris hilinemise 80 km pikkusel teel. Leida rongi plaanikohane kiirus.

4.3. Jalgrattur sõidab igas minutis 500 m vähem kui mootorrattur. Seepärast kulutab ta 120 km pikkuse tee läbimiseks 2 tundi enam aega kui mootorrattur. Arvutada kummagi kiirus.

4.4. Mootorrattur peatus bensiini võtmiseks 12 minutiks. Pärast seda suurendas ta sõidukiirust 15 km/h võrra, tehes kaotatud aja tasa 60 km pikkusel teelõigul. Missuguse kiirusega sõitis ta pärast peatumist?

4.5. Ühele asutusele eraldati erinevaid turismituusikuid 300 rbl eest, teisele 270 rbl eest. Teine asutus, kes sai 5 tuusikut vähem, maksis iga tuusiku eest 3 rubla rohkem kui esimene asutus. Kui palju tuusikuid sai kumbki asutus?

4.6. Linnade A ja B vaheline kaugus (mööda maanteed) on 160 km. Auto väljus linnast A 3 tundi hiljem kui jalgrattur, aga linna B jõudsid üheaegselt. Auto keskmine kiirus oli 2,5 korda suurem kui jalgratturil. Leida need kiirused.

4.7. Ühe detaili valmistamiseks kulutab esimene tööline 6 minutit vähem kui teine. Mitu detaili valmistavad mõlemad 7 tunniga, kui esimene valmistab selle ajaga 8 detaili rohkem kui teine?

4.8. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x - y} + y = -5, \\ \dfrac{y}{2x - y} = 6 . \end{cases}$$

4.9. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x + y} + x = -1 , \\ \dfrac{x}{x + y} = -2 . \end{cases}$$

4.10. Kaks tigu hakkavad roomama 13 m kauguselt teineteise poole. Nad liiguvad konstantse kiirusega ja kohtuvad ühe tunni pärast. Mitu meetrit roomab ühe tunni jooksul esimene tigu, kui on teada, et 10 m läbimiseks kulub tal ühe tunni võrra rohkem aega kui teisel teol 8 m läbimiseks?

4.11. Leida kolm järjestikust paarisarvu, kui on teada, et nende arvude ruutude summa on 980.

5. Võrratused ja võrratusesüsteemid.

5.1. Lahendada võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 3,4x - (x + 0,6) < 0,6x , \\ 3,5 - x + 2,5(2x - 2,4) \geqslant 0,5x - 13 . \end{cases}$$

5.2. Lahendada võrratusesüsteem

$$\begin{cases} 1,25x - 0,12 > 0,3x + 0,07 \\ 1 - x \geqslant 0,5x - 4 . \end{cases}$$

5.3. Leida võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} \frac{x - 1}{2} - \frac{2x + 3}{3} + \frac{x}{6} < 2 - \frac{x + 5}{2} , \\ 1 - \frac{x + 5}{8} + \frac{4 - x}{2} < 3x - \frac{x + 1}{4} \end{cases}$$

täisarvulised lahendid.

5.4. Lahendada võrratus

$$\frac{2x - 3}{x} < 0 .$$

5.5. Lahendada võrratus

$$\frac{4 - 2x}{1 + 3x} > 0 .$$

5.6. Lahendada võrratus

$$\frac{x - 5}{3x + 1} > 1 .$$

5.7. Lahendada võrratus

$$\frac{x - 1}{x + 3} \geqslant 3 .$$

5.8. Lahendada võrratus

$$\frac{16 - x^2}{4x^2 + 1} \geqslant 0 .$$

5.9. Millistel a väärtustel on võrrandi

$$2 - a = \frac{5 + x}{1 + 2x}$$

lahend positiivne?

5.10. Millistel a väärtustel on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = a , \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

lahendis x ja y positiivsed?

5.11. Milliste b väärtuste korral on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x - y = b \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$$

lahendiks negatiivsete arvude paar?

5.12. Leida x väärtuste hulk, mis rahuldavad võrratust

$$2\,|x - 3{,}5| - 15 < 0 .$$

5.13. Leida kõik reaalarvude paarid (x, y), mis rahuldavad

võrrandit $2^{x+1} = 4y^2 + 1$ ja võrratust $2^x \leqslant 2y$.

6. Juurvõrrandid

6.1. Lahendada võrrand $x - \sqrt{x + 2} = 4$.

6.2. Lahendada võrrand $\sqrt{3x - 3} + \sqrt{3x - 8} = 5$.

6.3. Lahendada võrrand $\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1$.

6.4. Lahendada võrrand $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - x = 2$.

6.5. Lahendada võrrand

$$\sqrt[5]{29 + \sqrt[3]{x - 4}} = 2 .$$

6.6. Lahendada võrrand

$$\sqrt{3x - 3} + \sqrt{x^2 - x} + 5\sqrt{x - 1} = 0 .$$

7. Jadad

7.1. Paigutada arvude 4 ja 130 vahele 6 arvu nii, et nad koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise jada.

7.2. Aritmeetilise jada esimese ja viienda liikme summa on 26, teise ja neljanda liikme korrutis 160. Leida jada kuue esimese liikme summa.

7.3. Aritmeetilise jada kolmanda ja seitsmenda liikme summa on 6, korrutis aga 8. Leida selle jada 16 esimese liikme summa.

7.4. Leida aritmeetilise jada esimene liige ja vahe, kui esimesel viiel paariskohal oleva liikme summa on 15. Esimese kolme liikme summa on -3.

7.5. Arvud a^2, b^2, c^2 moodustavad aritmeetilise jada. Näidata, et siis arvud

$$\frac{1}{b + c}, \frac{1}{c + a}, \frac{1}{a + b}$$

moodustavad samuti aritmeetilise jada.

7.6. Aritmeetilise jada 3 esimest liiget on

$$(a + b)^2, a^2 + b^2, (a - b)^2.$$

Leida selle jada n esimese liikme summa.

7.7. Geomeetrilise jada viies liige on 486 ja tegur 3. Leida see jada.

7.8. Geomeetrilises jadas nelja esimese liikme summa on 30, järgneva nelja liikme summa on 480. Leida jada esimene liige.

7.9. Leida 3 arvu, mis moodustavad geomeetrilise jada, kui esimese ja kolmanda liikme summa on 52, aga teise liikme ruut on 100.

7.10. Kolm arvu moodustavad aritmeetilise jada. Kui selle jada esimesele liikmele liita 8, siis saadakse geomeetriline jada, mille summa on 26. Leida need arvud.

7.11. Võrdkülgse kolmnurga külg on a. Kolmnurga külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk, selle külgede keskpunktide ühendamisel jälle uus kolmnurk jne. lõpma-

tuseni. Leida kõigi nii saadud kolmnurkade ümbermõõtude summa.

7.12. **Leida kõikide selliste kolmekohaliste paaritute arvude summa, mis jagamisel viiega annavad jäägi üks.**

7.13. **Pall langeb lauale 1 m kõrguselt ja põrkab tagasi $\frac{1}{2}$ m kõrgusele; siis langeb uuesti lauale ja põrkab tagasi $\frac{1}{4}$ m kõrgusele jne. Kui pika tee läbib pall seismajäämiseni?**

8. Logaritmid, eksponent- ja logaritmvõrrandid

8.1. Lahendada võrrand

$$4^x - 10 \cdot 2^{x-1} - 24 = 0.$$

8.2. Lahendada võrrand

$$9^x - 3^{x+1} = 4 .$$

8.3. Lahendada võrrand

$$2^{2x+1} - 33 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0.$$

8.4. Lahendada võrrand

$$4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0.$$

8.5. Lahendada võrrand

$$3^{2x-3} - 9^{x-1} + 3^{2x} = 675.$$

8.6. Lahendada võrrand

$$6 \cdot 5^{x+1} - 5^{x+2} + 6 \cdot 5^x = 22 .$$

8.7. Arvutada

$$9^{1 - \log_3 2} - 5^{-\log_5 4} .$$

8.8. Lahendada võrrand

$$10^{\log(x^2+x-8)} = 4 .$$

8.9. Lahendada võrrand

$$\log(x^2 - 4x + 3,1) = -1 .$$

8.10. Lahendada võrrand

$$\log_5^2 x - 3\log_5 x = 0 .$$

8.11. Lahendada võrrand

$$1 + \log(1+x^2-2x) - \log(1+x^2) = 2\log(1-x).$$

8.12. Lahendada võrrand

$$\log_3 |x+1|^2 + \log_3 |x+1| = 3 .$$

8.13. Lahendada võrrand

$$\log_3\left(\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b}\right) = 1.$$

8.14. Milliste muutuja x väärtuste korral moodustavad arvud $\log x$, $\log(x+6)$ ja $\log(2x+7)$ (esitatud järjekorras) aritmeetilise jada?

9. Vektorid

9.1. Leida vektori $\vec{a} + \vec{b}$ pikkus, kui $\vec{a} = (1;\ -2;\ 3)$, $\vec{b} = (3;\ 1;\ -4)$. Kontrollida, kas vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on risti.

9.2. Kas punktid $A(-2;\ 3;\ 4)$, $B(2;\ -4;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ -3)$ ja $D(7;\ -12;\ -1)$ võivad olla trapetsi tippudeks?

9.3. Näidata, et kolmnurk ABC on võrdhaarne, kui

$$A(3;\ -1;\ 2),\quad B(3;\ 3;\ 2),\quad C(2;\ 1;\ 3).$$

Leida küljele AB tõmmatud kõrgus.

9.4. Leida nurk vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ vahel, kui

$$\vec{a} = (1;\ 0;\ 3),\quad \vec{b} = (-3;\ -2;\ 7),\quad \vec{c} = (-1;\ -2;\ 8).$$

9.5. Tõestada, et kolmnurk tippudega $A(-2;\ -1)$, $B(6;\ 1)$, $C(3;\ 4)$ on täisnurkne.

9.6. Kolmnurga KLM tipud on $K(1;\ 2;\ 1)$, $L(0;\ 1;\ 5)$ ja $M(2;\ 0;\ 3)$. Leida tipu K juures asuv sisenurk.

9.7. Kolmnurga tipud on $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(0;\ 1;\ 1)$, $C(1;\ 1;\ 0)$. Leida tipu C juures asuv sisenurk.

9.8. Leida kolmnurga ABC ümbermõõt, kui A(-5; 0; 3), B(2; -4; -1), C(0; 3; -2).

10. Trigonomeetrilised teisendused

10.1. Tõestada samasus

$$\frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \cos 2\alpha .$$

10.2. Lihtsustada

$$\cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x .$$

10.3. Tõestada samasus

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1 - \cos\alpha)} = \cos^2\frac{\alpha}{2} .$$

10.4. Lihtsustada ja arvutada, kui $\alpha = 225°$

$$\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} \cdot \tan^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha .$$

10.5. Tõestada samasus

$$\frac{\cot x \cdot \sin 4x}{(\sin^4 x - \cos^4 x)\sin^2(90° - x)} = -4 .$$

10.6. Lihtsustada

$$\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} .$$

10.7. Tõestada samasus

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = 2\tan 2\alpha .$$

10.8. Tõestada, et

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y .$$

10.9. Tõestada, et

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y .$$

10.10. Tõestada samasus

$$16\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = 1 .$$

10.11. Olgu α ja β positiivsed teravnurgad. Näidata, et seostest $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ ja $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ järeldub, et $\alpha + 2\beta = 45°$.

11. Trigonomeetrilised võrrandid

11.1. Lahendada võrrand

$$\sin(2x + \tfrac{5}{2}\pi) - 3\cos(x - \tfrac{7}{2}\pi) = 1 + 2\sin x .$$

11.2. Lahendada võrrand

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0 .$$

11.3. Lahendada võrrand

$$\sin 3x + \sin x = \cos x .$$

11.4. Lahendada võrrand

$$\cos 7x + \cos x = \cos 4x .$$

11.5. Lahendada võrrand

$$\sin 3x + \sin 5x + \sin 4x = 0 .$$

11.6. Lahendada võrrand

$$\cos 2x + 3\sin x = 2 .$$

11.7. Lahendada võrrand

$$\cos^2 2x - 5\sin^2 x + 1 = 0 .$$

11.8. Lahendada võrrand

$$4\sin x \cdot \cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) + 1 = 0 .$$

11.9. Lahendada võrrand

$$\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x} .$$

11.10. Lahendada võrrand

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{\tan x} = \sqrt{2} .$$

11.11. Lahendada võrrand

$$2\tan^2 x + 4\cos^2 x = 7 .$$

11.12. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x + \cos y = 0 . \end{cases}$$

11.13. Lahendada võrrand

$$2^{\sin 3x} = \sqrt{2} .$$

4

12. Tuletise rakendamine

12.1. Leida funktsiooni

$$y = \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{4\sqrt{x}}{x} \quad \text{tuletis.}$$

12.2. Leida funktsiooni

$$y = \frac{2x}{5\sqrt{x}} \quad \text{tuletis, kui} \quad x = 0{,}25.$$

12.3. Leida funktsiooni $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad. Joonestada graafik.

12.4. Leida funktsiooni $y = x^3 - 4x^2 - 3x$ kasvamispiirkond.

12.5. Leida funktsiooni $y = x^3 - 12x$ kasvamispiirkond ja maksimumpunkt.

12.6. Leida funktsiooni $y = xe^x$ ekstreemumkohad ja kasvamis- ning kahanemispiirkonnad.

12.7. Leida funktsiooni $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x - 5$ suurim ja vähim väärtus lõigul $[-1; 1]$.

12.8. Leida funktsiooni $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$ kasvamis- ja kahanemispiirkonnad. Visandada graafik.

12.9. Milline peab olema ringi diameeter, kui ringi on kujundatud maksimaalse pindalaga ristkülik, kusjuures ristküliku ümbermõõt on 40 cm? Leida otsitava ristküliku pindala.

12.10. Leida joone $y = x^2 + x - 4$ puutuja võrrand punktis, kus puutuja on paralleelne sirgega $y+5x-2 = 0$.

12.11. Millistes punktides on joone $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ puutujad paralleelsed sirgega $y - 12x + 10 = 0$?

12.12. Leida $y'(\frac{\pi}{6})$, kui $y = 2 \sin x - \sin x \cdot \cos x$.

12.13. Koostada puutuja võrrand joonele $y = \frac{x-6}{x-2}$ punktis, kus joon lõikab y-telge.

12.14. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 36 cm. Leida kolmnurga küljed nii, et kolmnurga pindala oleks maksimaalne.

12.15. Leida avaldise $3(\sin x + \cos x)$ suurim väärtus piirkonnas $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

12.16. Silindrikujulise paagi ruumala on V m^3. Millised peavad olema paagi põhja raadius ja paagi kõrgus, et paagi valmistamiseks kuluks vähim hulk plekki?

12.17. Traadist, mille pikkus on 120 cm, on tarvis valmistada ruudukujulise põhjaga risttahuka mudel. Kui suur peab olema põhiserv, et risttahuka täispindala oleks suurim?

12.18. Leida joone $y = 2x^2 + 2$ need puutujad, mis läbivad koordinaatide alguspunkti.

13. Planimeetria

13.1. Leida võrdhaarse trapetsi pindala, kui aluste pikkused on 5 cm ja 13 cm ning diagonaal on haaraga risti.

13.2. Leida võrdhaarse kolmnurga pindala, kui alus on 6 cm ja alusele tõmmatud kõrgus on võrdne aluse keskpunkti ja haara keskpunkti vahelise kaugusega.

13.3. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 3:4:6. Ühendades kolmnurga kõigi külgede keskpunktid üksteisega, saame kolmnurga ümbermõõduga 5,2. Arvutada kolmnurga küljed.

13.4. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on teisest 10 cm võrra pikem, kuid 10 cm lühem kui hüpotenuus. Leida kolmnurga hüpotenuus.

13.5. Ristküliku ümbermõõt on 34 dm ja tema diagonaal 13 dm. Leida selle ristküliku pindala.

13.6. Trapetsi alused on $(\sqrt{3} + 6)$ cm ja 5 cm ning nurgad pikema aluse juures on 45° ja 60°. Leida trapetsi pindala.

13.7. Võrdhaarse trapetsi alused on 12 cm ja 20 cm ning pindala 144 cm^2. Arvutada trapetsi diagonaal.

13.8. Kolmnurga kaks külge on a ja b. Leida kolmas külg, kui see võrdub temale tõmmatud mediaaniga.

13.9. Trapetsi kesklõik, pikkusega 10 cm, jaotab trapetsi osadeks, millede pindalade suhe on 3:5. Leida trapetsi alused.

13.10. Kolmnurga alus on 4 cm võrra lühem kõrgusest. Kolmnurga pindala on 96 cm^2. Leida kolmnurga alus ja kõrgus.

13.11. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b. Leida täisnurga poolitaja pikkus selles kolmnurgas.

13.12. Rööpküliku küljed on 23 cm ja 11 cm. Nurk nende külgede vahel on 120°. Leida rööpküliku pikem diagonaal.

13.13. Võrdhaarse kolmnurga pindala on S ja tipunurk α. Leida selle kolmnurga ümberringjoone raadius.

13.14. Täisnurkse kolmnurga täisnurga poolitaja jaotab hüpotenuusi osadeks pikkustega 15 cm ja 20 cm. Arvutada sellise kolmnurga ümbermõõt.

13.15. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 70 cm, hüpotenuus 29 cm. Leida selle kolmnurga pindala.

13.16. Rombi teravnurk on 60° ja tema lühem diagonaal 10 cm. Arvutada rombi pindala.

13.17. Arvutada rombi nurgad, kui nürinurga tipust joonestatud rombi kõrgus poolitab vastaskülje.

13.18. Kolmnurga ABC küljel AB on võetud punkt D nii, et

$$\frac{AD}{AB} = \alpha < 1$$

ning küljel BC punkt E nii, et

$$\frac{BE}{BC} = \beta < 1.$$

Punktist E tõmmatakse küljele AC paralleel, mis lõikab külge AB punktis F. Leida kolmnurkade BDE ja BEF pindalade suhe.

14. Tahk- ja pöördkehad

14.1. Võrdhaarse kolmnurga alus on a ja tipunurk α. Läbi kolmnurga aluse on pandud tasand, mis moodustab kummagi haaraga nurga β. Leida selle tasandi kaugus kolmnurga tipust.

14.2. Võrdhaarse kolmnurga ABC alus AC asub tasandil α, tipp B on aga sellest tasandist $3\sqrt{2}$ cm kaugusel. Arvutada kolmnurga ABC pindala, kui $AC = 18$ cm ja kolmnurga ABC tasand moodustab tasandiga α nurga $45°$.

14.3. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille külgede pikkused on 5 cm, 5 cm ja 6 cm. Väiksema külgtahu diagonaali ja suurima külgtahu vaheline nurk on $45°$. Leida prisma ruumala.

14.4. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on 8 cm ja külgtahk moodustab põhjaga $60°$-se nurga. Arvutada püramiidi täispindala.

14.5. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ja külgtahu tipunurk on α. Avaldada ruumala V.

14.6. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on a ning nurk külgserva ja põhitahu vahel $60°$. Arvutada püramiidi ruumala.

14.7. Korrapärase nelinurkse prisma põhiserv on a. Prisma diagonaal moodustab külgtahuga nurga α. Leida sellise prisma ümber kujundatud silindri külgpindala.

14.8. Kolmnurkse püstprisma kaks põhiserva on 3 cm ja 5 cm ning nende külgede vaheline nurk on $120°$. Suurima külgtahu pindala on 35 cm^2. Leida prisma ruumala.

14.9. Avaldada korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala ja täispindala, kui tema põhiserv on a ja külgserv moodustab põhjaga nurga $45°$.

14.10. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhiserv on a ning kahetahuline nurk külg- ja põhitahu vahel on $45°$. Arvutada püramiidi täispindala.

14.11. Leida regulaarse tetraeedri ruumala, kui tema kõrgus on H.

14.12. Korrapärase kolmnurkse püramiidi serv on a. Avaldada ruumala ja täispindala.

14.13. Silindri külgpindala on $\frac{\pi}{3}$ m^2 ja põhja ümbermõõt on π m. Arvutada silindri ruumala.

14.14. Suurim nurk koonuse moodustajate vahel on 60°. Leida koonuse külgpindala ja põhja pindala suhe.

14.15. Kerasse raadiusega R = 4 cm on kujundatud silinder. Leida silindri ruumala, kui silindri telglõike diagonaali ja silindri põhja vaheline nurk on 60°.

14.16. Kuubi ümber on kujundatud silinder. Avaldada silindri täispindala kuubi serva a kaudu.

14.17. Kerasse raadiusega R = 10 cm on kujundatud koonus, mille kõrgus on pool kera raadiusest. Leida selle koonuse ruumala ja koonuse telglõike tipunurk.

14.18. Koonusesse kujundatud kera ruumala on 8 cm^3. Lõik, mis ühendab selle kera keskpunkti koonuse põhja piirava ringjoonega, moodustab põhjaga 30° nurga. Leida koonuse ruumala.

14.19. Kolmnurgas on antud külg a ja tema lähisnurgad β ja γ. Leida niisuguse pöördkeha ruumala, mis tekib selle kolmnurga pöörlemisel ümber külje a.

II

LAHENDUSED JA VASTUSED

1.1. Olgu algul kangast x pikkusühikut. Pärast esimest päeva jäi kangast alles $(x - 0{,}25x) = 0{,}75x$ (pikkusühikut). Teisel päeval müüdi kangast $0{,}3 \cdot 0{,}75x = 0{,}225x$ (pikkusühikut) ja alles jäi $0{,}75x - 0{,}225x = 0{,}525x$ (pikkusühikut). Kolmandal päeval müüdi kangast $0{,}4 \cdot 0{,}525x = 0{,}21x$ (pikkusühikut) ning alles jäi $0{,}525x - 0{,}21x = 0{,}315x$ (pikkusühikut).

Pärast kolmandat päeva oli esialgsega võrreldes alles

$$\frac{0{,}315x \cdot 100\ \%}{x} = 31{,}5\ \%.$$

Vastus: 31,5 %.

1.2. Olgu kauba esialgne hind x. Pärast esimest hinnaalandust on kauba hind $0{,}8x$. Teisel korral alandati hinda $0{,}15 \cdot 0{,}8x = 0{,}12x$ võrra. Kaup maksab pärast teist hinnaalandust $0{,}8x - 0{,}12x = 0{,}68x$. Inventuuriga langes kauba hind $0{,}1 \cdot 0{,}68x = 0{,}068x$ võrra ning kaup maksis pärast inventuuri

$$0{,}68x - 0{,}068x = 0{,}612x\ .$$

Kauba esialgne hind oli suurem lõpphinnast $x - 0{,}612x = 0{,}388x$ võrra ja see on protsentides

$$\frac{0{,}388x \cdot 100\ \%}{0{,}612x} \approx 63{,}4\ \%\ .$$

Vastus: $\approx$ 63,4 %.

1.3. Olgu ristküliku pikkus a ja laius b. Et pikkus suurenes $0{,}11a$ võrra ja laius vähenes $0{,}1b$ võrra, siis ristküliku uued mõõtmed on $1{,}11a$ ja $0{,}9b$ ning uus pindala on $0{,}999ab$. Ristküliku pindala vähenes

$$ab - 0{,}999ab = 0{,}001\ ab$$

võrra ning see muutus protsentides on 0,1 %.

Vastus: 0,1 %.

1.4. Olgu ristküliku küljed a ja b, siis pindala on ab. Peale külgede suurenemist on ristküliku küljed $1{,}1a$ ja $1{,}1b$ ning pindala on sel juhul $1{,}21ab$. Pindala muut on $1{,}21ab - ab = 0{,}21ab$ (protsentides 21%).

Vastus: 21 %.

1.5. 1,5 liitris 30 %-ses äädikhappe lahuses on äädikhapet $\frac{1,5 \cdot 30}{100} = 0,45$ liitrit. Lisades x liitrit vett, saame $(x + 1,5)$ liitrit, milles on äädikhapet ikka 0,45 liitrit. See lahus on $\frac{0,45 \cdot 100}{x + 1,5}$ protsendiline. Et hape oleks 3 %-line, peab $\frac{45}{x + 1,5} = 3$, millest $x = 13,5$.

Vastus: 13,5 l.

1.6. Et $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-4}\right]^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3}$; $0,09^{-0,5} = 0,3^{-1} = \frac{10}{3}$;

$0,1^{-3} = 1000$ ja $8^0 = 1$, siis

$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{10}{3} \cdot 1000 = 720$ ja see moodustab 2000-st

$$\frac{720 \cdot 100\ \%}{2000} = 36\ \%.$$

Vastus: 36 %.

1.7. Võttes ühisele nimetajale ja lihtsustades saame

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} =$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 6.$$

Et $6 \cdot \frac{20}{100} = 1,2$, siis otsitav arv on 7,2.

Vastus: 7,2.

2.1. Arvutamist teostame tehete kaupa:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25\ , \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} = 4\ ,$$

$$(25 \cdot 4)^{-1} = 100^{-1} = 0,01; \quad \left[(0,45)^{-2} \cdot 8^{\frac{1}{3}}\right]^0 = 1\ ;$$

Saame

$$0,01 \cdot 1 : (0,01)^{\frac{1}{2}} = 0,01 : 0,1 = 0,1\ .$$

Vastus: 0,1 .

6

2.2. Aritmeetiliste tehete omaduste põhjal peab olema loogelistes sulgudes oleva avaldise väärtus $206 \cdot 307 = 63242$. Esimene liidetav loogelistes sulgudes on

$$63242 - 44658 = 18584.$$

Nurksulgavaldise väärtus on $18584 : 404 = 46$.
Nurksulgudes esimene liidetav on $46 + 29 = 75$.
Ümarsulgavaldise väärtus on $82 \cdot 75 = 6150$.
Ümarsulgavaldise esimene liidetav on $6150 - 6138 = 12$,

s.t. $\frac{756 + 32x}{111} = 12$, millest $756 + 32x = 1332$ ehk

$$32x = 576, \text{ kust } x = 18.$$

Vastus: $x = 18$.

2.3. Leiame sulgavaldisele ühise nimetaja ja teisendame:

$$\left[\frac{a + 3b}{(a - b)^2} + \frac{a - 3b}{a^2 - b^2}\right] : \frac{a^2 + 3b^2}{(a - b)^2} =$$

$$= \frac{2a^2 + 6b^2}{(a-b)^2(a+b)} : \frac{a^2 + 3b^2}{(a-b)^2} = \frac{2}{a + b}.$$

Vastus: $\frac{2}{a + b}$.

2.4. Sulgudesse jääb pärast algebraliste murdude lahutamist

$$\frac{2y - 1}{y^2 - 25} - \frac{y - 5}{2y^2 + 9y - 5} = \frac{3y^2 + 6y - 24}{(y^2 - 25)(2y - 1)} = \frac{3(y+4)(y-2)}{(y^2-25)(2y-1)}.$$

Lähteülesanne teisendub kujule

$$\frac{3}{y-2} + \frac{3y^2 + 12}{25 - y^2} : \frac{3(y+4)(y-2)}{(y^2 - 25)(2y-1)} = \frac{3}{y - 2} - \frac{2y - 1}{y - 2} = -2.$$

Vastus: -2.

2.5. Teostades kõigepealt tehted sulgudes saame

$$\left(\frac{a}{a - 1} - \frac{1}{b - ab}\right) : \frac{ab + 1}{b} - \frac{a}{a^2 - 1} =$$

$$= \left[\frac{a}{a-1} + \frac{1}{b(a-1)}\right] : \frac{ab + 1}{b} - \frac{a}{a^2 - 1} = \frac{1}{a-1} - \frac{a}{a^2 - 1} = \frac{1}{a^2 - 1}.$$

Saadud avaldisse asetame a arvulise väärtuse ning saame $-1\frac{1}{99}$.

Vastus: $-1\frac{1}{99}$.

2.6. Võttes sulgavaldisest mõlemad liidetavad ühisele nimetajale ning taandades saame

$$\left[\frac{x^2}{x^2 - y^2} - \frac{x^2y}{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{xy + y^2} + \frac{y}{x^2 + xy}\right)\right] : \frac{y}{x - y} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{x^2 - y^2} - \frac{x}{x + y}\right) : \frac{y}{x - y} = \frac{xy(x - y)}{(x^2 - y^2)y} = \frac{x}{x + y}.$$

Vastus: $\frac{x}{x + y}$.

2.7. Võttes jagatavas ning jagajas liikmed ühisele nimetajale saame

$$\left(m + n - \frac{4mn}{m + n}\right) : \left(\frac{m}{m + n} - \frac{n}{n - m} - \frac{2mn}{m^2 - n^2}\right) =$$

$$= \frac{m^2 + n^2 - 2mn}{m + n} : \frac{m^2 + n^2 - 2mn}{(m + n)(m - n)} = m - n.$$

Vastus: $m - n$.

2.8. Avaldise lihtsustamiseks on kasulik korrutada sulgudes olev hulkliige murruga $\frac{a^2 - 4}{a - 1}$. Peale taandamist jääb

$$\frac{4(a - 2)^2}{(a - 3)(a - 1)} - \frac{a - 3}{a - 1} - \frac{2}{a - 3} = \frac{3a^2 - 12a + 9}{(a - 3)(a - 1)} = 3.$$

Vastus: 3.

2.9. Vabaneme juurtest murdude nimetajates. Selleks laiendame esimest murdu teguriga $\sqrt{10} + \sqrt{3}$, teist murdu teguriga $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ja kolmandat murdu teguriga $\sqrt{10} - \sqrt{2}$. Selle tulemusena saame

$$\frac{7(\sqrt{10} + \sqrt{3})}{7} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \frac{8(\sqrt{10} - \sqrt{2})}{8} = 2\sqrt{10}.$$

Vastus: $2\sqrt{10}$.

2.10. Avaldise $ab \pm b$ saab kirjutada kujul $\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, mistõttu esialgne avaldis võtab kuju

6*

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot\sqrt{b}\cdot a(a-b)}{b(a^2-2ab+b^2)\cdot a\cdot\sqrt{b}} = \frac{1}{b}\ .$$

Vastus: $\frac{1}{b}$.

2.11. Avame sulud lugejas oleva juure all ja teisendame nimetaja üheks murruks. Pärast koondamist ja jagamist saame:

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}\cdot\sqrt{x}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \frac{|x-2|\sqrt{x}}{x-2}\ .$$

a) Kui $x > 2$, siis $|x-2| = x-2$ ja lihtsustatud kuju on $\sqrt{x}$;

b) Kui $x < 2$, siis $|x-2| = -(x-2)$ ja avaldise lihtsustatud kuju on $-\sqrt{x}$.

Vastus: $\sqrt{x}$ või $-\sqrt{x}$.

2.12.. Võttes ühisele nimetajale ja koondades saame

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}} - \frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}} = \frac{(x+\sqrt{x^2-4x})^2-(x-\sqrt{x^2-4x})^2}{x^2-(x^2-4x)} =$$

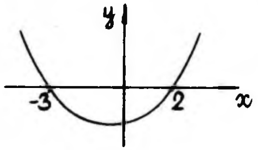
$$= \frac{2x\cdot 2\sqrt{x^2-4x}}{4x} = \sqrt{x^2-4x}\ .$$

Vastus: $\sqrt{x^2-4x}$.

3.1. Funktsioon $f(x)$ on määratud neil x reaalarvulistel väärtustel, mil

$$x^2+x-6 \geq 0 \quad \text{ja} \quad x^2-4 \neq 0.$$

Ruutfunktsiooni x^2+x-6 nullkohad on -3 ja 2 ja graafikult leiame positiivsuspiirkonna:



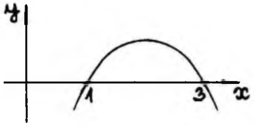
$x < -3$ või $x > 2$.

Seega funktsioon $f(x)$ on määratud, kui

$$]-\infty, -3] \cup]2, \infty[$$

Vastus: $]-\infty, -3] \cup]2, \infty[$

3.2. Logaritmid on määratud ainult positiivsete arvude korral, seega $4x - x^2 - 3 > 0$. Ruutfunktsiooni nullkohad on 1 ja 3. Graafikult leiame ruutkolmliikme positiivsuspiirkonna



$$(1 < x < 3),$$

mis ongi ühtlasi funktsiooni määramispiirkonnaks.

Vastus: $]1 ; 3[$.

3.3. Funktsiooni määramispiirkonna leiame tingimustest

$\log_2(x - 1) \geq 0$, $x+3 \geq 0$, millest $\begin{cases} x - 1 \geq 1, \\ x \geq -3. \end{cases}$

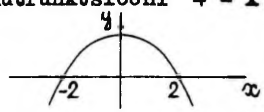
Selle võrratusesüsteemi lahendiks on $x \geq 2$.

Vastus: $[2, \infty[$.

3.4. Määramispiirkonna leidmiseks on tingimused

$$4 - x^2 \geq 0 \quad \text{ja} \quad x \neq 1.$$

Ruutfunktsiooni $4 - x^2$ nullkohad on ± 2 ja võrratuse $4 - x^2 \geq 0$ lahendid



$$(-2 \leq x \leq 2)$$

leiame graafiku abil.

Vastus: $[-2; 1[\cup]1; 2]$.

4.1. Olgu kahekohalise arvu kümneliste number x, siis üheliste number on $x+2$. Kahekohaline arv on $10x + (x+2)$ ja ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandi

$$[10x + (x + 2)] \cdot [x + (x + 2)] = 144,$$

ehk $$(11x + 2)(2x + 2) = 144, \text{ millest}$$

$$11x^2 + 13x - 70 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendid on 2 ja $-3\frac{4}{11}$. Et kümneliste number ei ole negatiivne, siis kahekohaline arv on 24.

Vastus: 24.

4.2. Olgu rongi plaanikohane kiirus $x\ \frac{km}{h}$, siis 80 km läbimiseks oli planeeritud $\frac{80}{x}$ tundi.

Tegelikult kulus 80 km läbimiseks $\frac{80}{x+10}$ tundi.

Seega $\frac{80}{x} - \frac{80}{x+10} = \frac{16}{60}$, millest

$x^2 + 10x - 3000 = 0$ ja $x = 50$.

Vastus: $50\ \frac{km}{h}$.

4.3. Olgu mootorratturi kiirus $x\ \frac{km}{h}$, siis jalgratturi kiirus on $(x - 30)\ \frac{km}{h}$, sest $500\ \frac{m}{min} = 30\ \frac{km}{h}$. Vahemaa läbimiseks kulutab mootorrattur $\frac{120}{x}$ tundi ja jalgrattur $\frac{120}{x-30}$ tundi, seega

$$\frac{120}{x-30} - \frac{120}{x} = 2, \text{ siit}$$

$x^2 - 30x - 1800 = 0$ ja $x = 60$.

Vastus: $60\ \frac{km}{h}$, $30\ \frac{km}{h}$.

4.4. Olgu mootorratturi kiirus pärast peatumist $x\ \frac{km}{h}$, siis enne peatumist oli see $(x - 15)\ \frac{km}{h}$. Pärast peatust kulus 60 km läbimiseks aega $\frac{60}{x}$ tundi ja enne peatust $\frac{60}{x-15}$ tundi. Seega

$$\frac{60}{x-15} - \frac{60}{x} = \frac{1}{5}, \text{ millest}$$

$x^2 - 15x - 4500 = 0$, $x_1 = 75$, $x_2 = -60$.

-60 ei sobi.

Vastus: $75\ \frac{km}{h}$.

4.5. Oletame, et I asutus sai x tuusikut, siis teine asutus sai $x - 5$ tuusikut.

I asutus maksis tuusiku eest $\frac{300}{x}$ rubla ja II $\frac{270}{x-5}$ rubla.

Ülesande tingimuste kohaselt $\frac{270}{x-5} - \frac{300}{x} = 3$, millest ülesannet rahuldav lahend on $x = 20$. Seega esimene asutus sai 20 ja teine 15 tuusikut.

Vastus: 20; 15.

4.6. Olgu jalgratturi kiirus $x\ \frac{km}{h}$, siis on auto kiirus $2{,}5x\ \frac{km}{h}$. Jalgratturil kulub sõiduks $\frac{160}{x}$ tundi, autol $\frac{160}{2{,}5x}$ tundi. Kuna jalgratturi sõiduaeg oli 3 tunni võrra suurem kui autol, siis saame võrrandi

$$\frac{160}{x} - \frac{160}{2{,}5x} = 3 .$$

Kuna $x \neq 0$, siis korrutades võrrandit $2{,}5x$-ga, saame

$$2{,}5 \cdot 160 - 160 = 7{,}5x \quad \text{ja siit} \quad x = 32.$$

Seega jalgratturi kiirus oli $32\ \frac{km}{h}$, autol $2{,}5 \cdot 32 = 80\ \frac{km}{h}$.

Vastus: $32\ \frac{km}{h}$; $80\ \frac{km}{h}$.

4.7. Valmistagu I tööline 7 tunniga x detaili, siis valmistab II tööline selle ajaga $(x - 8)$ detaili. Ühe detaili valmistamiseks kulub I töölisel $\frac{7}{x}$ minutit ja teisel töölisel $\frac{7}{x-8}$ minutit. Seega

$$\frac{7}{x-8} - \frac{7}{x} = \frac{1}{10} .$$

Siit saame ruutvõrrandi, mille lahendid on

$$x_1 = 28, \quad x_2 = -20 \quad (-20 \text{ ei sobi}).$$

Järelikult valmistab esimene tööline 28 ja teine 20 detaili.

Vastus: 28 ; 20.

4.8. Võrrandisüsteemi teisest võrrandist avaldame $\frac{1}{2x-y} = \frac{6}{y}$ ja asendame selle esimesse võrrandisse.

Siis saame $\frac{6}{y} + y = -5$ ehk $y^2 + 5y + 6 = 0$, millest

$$y_1 = -3 , \quad y_2 = -2.$$

Asendades y_1 ja y_2, leiame $x_1 = -1\frac{3}{4}$ ja $x_2 = -1\frac{1}{6}$.

Võrrandisüsteemi lahendid on

7*

$$\begin{cases} x_1 = -1\frac{3}{4}, \\ y_1 = -3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = -1\frac{1}{6} \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

Vastus: $(-1\frac{3}{4};\ -3)\ ;\ (-1\frac{1}{6};\ -2)$.

4.9. Võrrandisüsteemi teisest võrrandist leiame $\frac{1}{x+y} = -\frac{2}{x}$. Asendades selle esimesse võrrandisse saame

$-\frac{2}{x} + x = -1$ ehk $x^2 + x - 2 = 0$, millest $x_1=-2$; $x_2=1$.

Asendades x_1 ja x_2, saame, et $y_1 = 3$; $y_2 = -1\frac{1}{2}$.

Võrrandisüsteemi lahendid on

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -1\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vastus: $(-2;\ 3)\ ;\ (1;\ -1\frac{1}{2})$.

4.10. Olgu tigude liikumiskiirused $x\ \frac{m}{h}$ ja $y\ \frac{m}{h}$. Et nad ühe tunni jooksul läbivad kokku 13 km, siis

$$x + y = 13 .$$

Esimene tigu kulutab 10 m läbimiseks $\frac{10}{x}$ tundi ja teine 8 m läbimiseks $\frac{8}{y}$ tundi, mistõttu

$$\frac{8}{y} + 1 = \frac{10}{x} .$$

Seega x ja y peavad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 13, \\ \frac{8}{y} + 1 = \frac{10}{x}, \end{cases} \quad \text{mille lahend on} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 8 . \end{cases}$$

Vastus: $5\ \frac{m}{h}$.

4.11. Olgu otsitavad paarisarvud $2n - 2$, $2n$ ja $2n + 2$. Ülesande tingimuste kohaselt

$$(2n - 2)^2 + (2n)^2 + (2n + 2)^2 = 980,$$

millest $n_1 = -9$ ja $n_2 = 9$.

Otsitavad paarisarvud on seega −20, −18, −16 või 16, 18, 20.

Vastus: −20, −18, −16 või 16, 18, 20.

5.1. Peale lihtsustamist jõuame võrratusesüsteemini

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x \geqslant -3 \end{cases}, \qquad \text{millest} \qquad -3 \leqslant x < \frac{1}{3}.$$

Vastus: $\left[-3\,,\,\frac{1}{3}\right[$.

5.2. Lihtsustamine annab võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \leqslant 2 \end{cases}, \qquad \text{millest} \qquad \frac{1}{5} < x \leqslant 2.$$

Vastus: $\left]\frac{1}{5},\,2\right]$.

5.3. Korrutame esimest võrratust teguriga 6, teist teguriga 8. Peale lihtsustamist jõuame võrratusesüsteemini

$$\begin{cases} x > \frac{26}{27} \\ x < 2 \end{cases}, \qquad \text{millest} \qquad \frac{26}{27} < x < 2.$$

Selle võrratuse täisarvuline lahend on $x = 1$.

Vastus: $x = 1$.

5.4. Murd on negatiivne sel juhul, kui lugeja ja nimetaja korrutis on negatiivne, s.o. $x(2x - 3) < 0$. Võrratuse vasakul poolel oleva ruutfunktsiooni nullkohad on $x_1 = 0$ ja $x_2 = 1{,}5$ ning see ruutfunktsioon on negatiivne siis kui $0 < x < 1{,}5$.

Vastus: $]0;\ 1{,}5[$.

5.5. Antud võrratuse lahendeid otsime ruutvõrratuse

$$(4 - 2x)(1 + 3x) > 0$$

lahendihulgast. Võrratuse vasakul pool oleva ruutfunktsiooni nullkohad on $x_1 = 2$ ja $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Seega võrratuse lahend on $-\frac{1}{3} < x < 2$.

Vastus: $\left]-\frac{1}{3}\,;\,2\right[$.

5.6. Viime kõik liikmed võrratuse vasakule poole, siis

$$\frac{x - 5}{3x + 1} - 1 > 0.$$

Teisendades võrratuse vasakut poolt saame

$$\frac{-2x - 6}{3x + 1} > 0 \qquad \text{ehk} \qquad \frac{x + 3}{3x + 1} < 0 \quad .$$

Ülesannete 5.4 ja 5.5 eeskujul saab leida antud võrratuse lahendi

$$-3 < x < -\frac{1}{3} \,.$$

Vastus: $\left]-3\ ;\ -\frac{1}{3}\right[$.

5.7. Teisendades antud võrratust näeme, et

$$\frac{x - 1}{x + 3} - 3 \geqslant 0 \quad ;$$

$$\frac{-2x - 10}{x + 3} \geqslant 0 \qquad \text{ehk} \qquad \frac{x + 5}{x + 3} \leqslant 0 \,.$$

Selle võrratuse lahend on

$$-5 \leqslant x < -3 \,.$$

Vastus: $\left[-5\ ;\ -3\right[$.

5.8. Murru nimetaja on x mistahes reaalarvulisel väärtusel positiivne, seega antud murd on mittenegatiivne, kui

$$16 - x^2 \geqslant 0 \,.$$

Selle ruutvõrratuse lahendi ($-4 \leqslant x \leqslant 4$) saab välja lugeda ruutfunktsiooni graafikult.

Vastus: $[-4\ ;\ 4]$.

5.9. Kuna siin $x > 0$ ja sel juhul murru nimetaja $1+2x \neq 0$ võime võrrandit korrutada avaldisega $1 + 2x$. Saame

$$(2 - a)(1 + 2x) = 5 + x, \text{ millest } x = \frac{3 + a}{3 - 2a} \,.$$

Lahend x on positiivne kui $\frac{3 + a}{3 - 2a} > 0$. Leides selle võrratuse lahendi eelmiste ülesannete eeskujul saame

$$-3 < a < 1{,}5 \,.$$

Vastus: $\left]-3\ ;\ 1{,}5\right[$

5.10. Lahendame võrrandisüsteemi x ja y suhtes. Korrutades süsteemi esimest võrrandit -2-ga ja liites teisele saame

$$x = 10 - 2a.$$

Esimesest võrrandist leiame

$$y = 3a - 10.$$

Suurused x ja y on positiivsed, kui

$$\begin{cases} 10 - 2a > 0 \\ 3a - 10 > 0 . \end{cases}$$

Siit saame $\begin{cases} a < 5 \\ a > 3\frac{1}{3} \end{cases}$ ehk $3\frac{1}{3} < a < 5 .$

Vastus: $]3\frac{1}{3} ; 5[.$

5.11. Korrutades süsteemi esimest võrrandit 2-ga ja liites tulemuse teisele võrrandile saame

$$x = \frac{2b + 4}{7} .$$

Esimese võrrandi põhjal

$$y = x - b = \frac{4 - 5b}{7} .$$

Et lahend oleks negatiivne, peavad kehtima võrratused

$$\begin{cases} \frac{2b + 4}{7} < 0 , \\ \frac{-5b + 4}{7} < 0 , \end{cases} \quad \text{millest} \quad \begin{cases} b < -2 \\ b > \frac{4}{5} \end{cases} .$$

Siit nähtub, et sellist b väärtust ei leidu, mille puhul x ja y mõlemad oleksid negatiivsed.

Vastus: Lahend puudub.

5.12. Jagades võrratuse mõlemaid pooli kahega saame

$$|x - 3,5| < 7,5.$$

Viimane võrratus on rahuldatud, kui

$$-7,5 < x - 3,5 < 7,5 .$$

Liites selle võrratuse kõikidele liikmetele $3,5$ saame

$$-4 < x < 11 .$$

Vastus: $]-4 ; 11[.$

5.13. Jagades võrrandi $2^{x+1} = 4y^2 + 1$ mõlemaid pooli arvuga 2 saame

$$2^x = 2y^2 + \frac{1}{2}.$$

Asendades 2^x antud võrduse abil võrratusse $2^x \leqslant 2y$ saame

$$2y^2 + \frac{1}{2} \leqslant 2y.$$

Seega $y^2 - y + \frac{1}{4} \leqslant 0$ ehk $(y - \frac{1}{2})^2 \leqslant 0$.

Viimasest võrratusest järeldub, et $y = \frac{1}{2}$. Siis

$$2^{x+1} = 2, \text{ s.o. } x = 0.$$

Ülesande tingimusi rahuldab ainus reaalarvude paar $(0;\frac{1}{2})$.

Vastus: $(0 ; \frac{1}{2})$.

6.1. Kuna $x - 4 = \sqrt{x + 2}$, siis tõstes võrrandi mõlemad pooled ruutu saame

$$x^2 - 8x + 16 = x + 2 \quad \text{ehk} \quad x^2 - 9x + 14 = 0.$$

Ruutvõrrandi lahendid on $x_1 = 2$ ja $x_2 = 7$. Kontroll näitab, et $x = 7$ on lähteülesande lahend, $x = 2$ aga mitte.

Vastus: $x = 7$.

6.2. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$\sqrt{3x - 8} = 5 - \sqrt{3x - 3}$$

ja tõstame saadud võrrandi mõlemad pooled ruutu

$$3x - 8 = 25 - 10\sqrt{3x - 3} + 3x - 3.$$

Siit avaldame $\sqrt{3x - 3} = 3$, millest $x = 4$.

Vastus: $x = 4$.

6.3. Esitame võrrandi kujul

$$\sqrt{2x - 4} = 1 + \sqrt{x + 5}$$

ja tõstame mõlemad pooled ruutu. See annab

$2x - 4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x + 5$, millest $x - 10 = 2\sqrt{x+5}$.

Saadud võrrandi mõlemad pooled tõstame veel kord ruutu.

Siis saame $x^2 - 20x + 100 = 4x + 20$ ehk

$$x^2 - 24x + 80 = 0 .$$

Seega $x_1 = 4$ ja $x_2 = 20$.
Kontroll näitab, et ruutvõrrandi lahend $x = 20$ sobib ja $x = 4$ ei sobi esialgse võrrandi lahendiks.

Vastus: $x = 20$.

6.4. Võrrandi mõlemaid pooli ruutu tõstes saame võrrandile

$$\sqrt{2x^2 + 8x + 7} = 2 + x$$

anda kuju $2x^2 + 8x + 7 = 4 + 4x + x^2$. Siit $x^2 + 4x + 3 = 0$, millest $x_1 = -3$, $x_2 = -1$. Kontrollides selgub, et -3 ei sobi esialgse võrrandi lahendiks.

Vastus: $x = -1$.

6.5. Tõstame võrrandi mõlemad pooled viiendasse astmesse. Siis $29 + \sqrt[3]{x - 4} = 32$ ehk $\sqrt[3]{x - 4} = 3$.
Tõstes viimase võrrandi mõlemad pooled kuupi saame

$$x - 4 = 27 \quad \text{ehk} \quad x = 31.$$

Vastus: $x = 31$.

6.6. Selle võrrandi kõikidest liikmetest saab $\sqrt{x - 1}$ tuua sulgude ette. Tehes seda saame

$$\sqrt{x - 1}\,(\sqrt{3} + \sqrt{x} + 5) = 0 .$$

Kuna $\sqrt{3} + \sqrt{x} + 5 \neq 0$, siis $\sqrt{x - 1} = 0$, millest $x = 1$.

Vastus: $x = 1$.

7.1. Selles aritmeetilises jadas esimene liige $a_1 = 4$, kaheksas liige $a_8 = 130$ ja liikmete arv $n = 8$. Jada üldliikme valemi põhjal

$130 = 4 + 7d$, millest $7d = 126$ ehk $d = 18$.
Otsitavad arvud on seega $a_2 = 22$, $a_3 = 40$, $a_4 = 58$, $a_5 = 76$, $a_6 = 94$, $a_7 = 112$.

Vastus: 4, 22, 40, 58, 76, 94, 112, 130.

7.2. Et $a_1 + a_5 = 26$ ja $a_2 a_4 = 160$, siis asendades aritmeetilise jada liikmed a_1 ja d kaudu saame

$$\begin{cases} 2a_1 + 4d = 26 \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 160 \end{cases}.$$

Esimesest võrrandist leiame, et $a_1 = 13 - 2d$. Asendame a_1 selle seose abil teise võrrandisse. Peale lihtsustamist jõuame võrrandini

$$d^2 = 9 \text{ . Siit } \quad d = \pm 3.$$

Seega $a_1 = 19$ või $a_1 = 7$. Jada liikmete summa leidmiseks kasutame jada n liikme summa valemit, mille põhjal leiame, et kuue liikme summa on 69 või 87.

Vastus: 69 või 87.

7.3. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\begin{cases} a_3 + a_7 = 6, \\ a_3 \cdot a_7 = 8. \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendid on

$$\begin{cases} a_3 = 4, \\ a_7 = 2 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} a_3 = 2, \\ a_7 = 4. \end{cases}$$

Jada esimese liikme ja vahe leidmiseks kasutame üldliikme valemit, mille põhjal

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 4, \\ a_1 + 6d = 2 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 2, \\ a_1 + 6d = 4. \end{cases}$$

Esimese süsteemi lahendamisel leiame, et

$$a_1 = 5, \quad d = -\frac{1}{2},$$

teine süsteem annab

$$a_1 = 1. \quad d = \frac{1}{2}.$$

Aritmeetilise jada esimese 16 liikme summa on 20 või 76.

Vastus: $S_{16} = 20$ või $S_{16} = 76$.

7.4. Tingimuste kohaselt

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15 ,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -3 .$$

Asendame kõik jada liikmed a_1 ja d kaudu; siis jõuame süsteemini

$$\begin{cases} 5a_1 + 25d = 15 \\ 3a_1 + 3d = -3 . \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahend on $\begin{cases} a_1 = -2 , \\ d = 1 . \end{cases}$

Vastus: $a_1 = -2$, $d = 1$.

7.5. Aritmeetilise jada liikmete vahel kehtib seos

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 .$$

Seega antud juhul

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2.$$

Paneme tähele, et

$$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{b-a}{(a+c)(b+a)} = \frac{b^2-a^2}{(a+c)(b+c)(a+b)}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} = \frac{c-b}{(a+b)(a+c)} = \frac{c^2-b^2}{(a+b)(a+c)(b+c)} . \qquad (2)$$

Võrduste (1) ja (2) paremad pooled on võrdsed, mistõttu ka vasakud pooled peavad olema võrdsed. Seega arvud

$$\frac{1}{b+c} , \quad \frac{1}{c+a} , \quad \frac{1}{a+b}$$

on aritmeetilise jada järjestikused liikmed.

7.6. Aritmeetilise jada liikmete vahe $d = a_2 - a_1$, s.t.

$$d = (a^2 + b^2) - (a + b)^2 = -2ab.$$

Et jada esimene liige $a_1 = (a + b)^2$ ja $d = -2ab$, siis jada n esimese liikme summa

$$S_n = \frac{2(a+b)^2 - 2ab(n-1)}{2} \cdot n = (a^2 + 3ab + b^2 - abn)n.$$

Vastus: $(a^2 + 3ab + b^2 - abn)n$.

7.7. Geomeetrilise jada üldliige

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Selle põhjal $486 = a_1 \cdot 3^{5-1}$, millest $a_1 = 6$.

Seega geomeetriline jada on 6, 18, 54, ...

Vastus: 6, 18, 54, ...

7.8. Selle geomeetrilise jada 8 esimese liikme summa on

$$30 + 480 = 510.$$

Seetõttu $\frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 510$ ehk $\frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} \cdot (q^4 + 1) = 510$.

Tegur $\frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1}$ viimases võrduses kujutab endast jada esimese 4 liikme summat, mis tingimuste kohaselt on 30. Seega

$$30 \cdot (q^4 + 1) = 510 \quad \text{ehk} \quad q^4 = 16.$$

Siit leiame $q = \pm 2$.

Jada esimese liikme leiame seosest

$$\frac{a_1(16 - 1)}{\pm 2 - 1} = 30, \quad \text{millest} \quad a_1 = 2 \quad \text{või} \quad a_1 = -6.$$

Vastus: 2 või −6.

7.9. Olgu geomeetrilise jada kolm esimest järjestikust liiget a_1, a_2 ja a_3. Et geomeetrilise jada liikmete vahel kehtib seos

$$a_2^2 = a_1 a_3, \text{ siis } a_1 a_3 = 100.$$

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 52, \\ a_1 \cdot a_3 = 100. \end{cases}$$

Selle süsteemi lahendid on

$$\begin{cases} a_1 = 50, \\ a_3 = 2 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} a_1 = 2, \\ a_3 = 50. \end{cases}$$

Geomeetrilise jada teine liige on ± 10.

Otsitavad arvud on 2, 10, 50 või 2, −10, 50, sest jada esimese ja kolmanda liikme järjekord ei muuda ülesande sisu.

Vastus: 2, 10, 50 või 2, -10, 50 .

7.10. Olgu aritmeetilise jada liikmed a_1, a_2 ja a_3, siis

$$3a_1 + 3d = 18 \quad \text{ehk} \quad a_1 + d = 6 .$$

Seega aritmeetilise jada teine liige on 6, esimene on siis $6 - d$ ja kolmas $6 + d$.

Geomeetrilise jada esimene liige on $14 - d$, teine 6 ja kolmas $6 + d$. Geomeetrilises jadas teise liikme ruut võrdub esimese ja kolmanda liikme korrutisega, seega

$$6^2 = (14 - d)(6 + d) \quad \text{ehk} \quad 36 = 84+14d-6d-d^2 .$$

Siit saame ruutvõrrandi $d^2 - 8d - 48 = 0$, mille lahendid on $d = -12$ ja $d = 4$.

Aritmeetilise jada liikmed on 18, 6, -6 või 2, 6, 10.

Vastus: 18, 6, -6 või 2, 6, 10.

7.11. Antud kolmnurga ümbermõõt $ü_1 = 3a$, järgmiste kolmnurkade ümbermõõdud $ü_2 = \frac{1}{2}\cdot 3a$, $ü_3 = \frac{1}{4}\cdot 3a$ jne.

Tekkinud lõpmatult kahanevas geomeetrilises jadas esimene liige on $3a$ ja jada tegur on $\frac{1}{2}$. Kõigi saadud kolmnurkade ümbermõõtude summa on

$$S = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a .$$

Vastus: 6a.

7.12. Vaadeldavad arvud on

$$101, 111, 121, \ldots , 981, 991.$$

Seega tuleb leida aritmeetilise jada n liikme summa, kus jada esimene liige $a_1 = 101$, vahe $d = 10$ ja $a_n = 991$.

Jada üldliikme valemi põhjal

$$991 = 101 + (n - 1)10, \quad \text{millest} \quad n = 90.$$

Otsitav summa $S_{90} = \frac{(a_1 + a_{90})\cdot 90}{2} = 49140.$

Vastus: 49140.

7.13. Palli läbimise teekonna pikkust arvutame valemi

$S = \frac{a_1}{1 - q}$ põhjal, kus $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

Pall läbis teekonna $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Vastus: 2 m.

8.1. Võrrandit võib esitada kujul

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 24 = 0 .$$

See on ruutvõrrand 2^x suhtes. Selle ruutvõrrandi lahenditeks on

$$2^x = 8 \quad \text{ja} \quad 2^x = -3.$$

Arvu 2 aste ei saa olla negatiivne, seega -3 ei sobi. Jääb $2^x = 8$ ehk $2^x = 2^3$. Siit $x = 3$.

Vastus: $x = 3$.

8.2. Võrrandit võib esitada kujul

$$3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 4 = 0.$$

Sellest ruutvõrrandist 3^x suhtes leiame, et $3^x = 4$, millest $x \log 3 = \log 4$ ehk $x = \frac{\log 4}{\log 3}$.

Ruutvõrrandi teine lahend $3^x = -1$ ei sobi.

Vastus: $x = \frac{\log 4}{\log 3}$.

8.3. Korrutame võrrandi mõlemaid pooli arvuga 2 ja esitame võrrandi kujul

$$4 \cdot 2^{2x} - 33 \cdot 2^x + 8 = 0 .$$

Sellest ruutvõrrandist 2^x suhtes leiame, et

$$2^x = \frac{1}{4} \quad \text{ja} \quad 2^x = 8.$$

Seega $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Vastus: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

8.4. Korrutame võrrandi mõlemaid pooli 16-ga ja esitame võrrandi kujul

$$2^{2x} - 17\cdot 2^x + 16 = 0$$

Sellest võrrandist saame, et $2^x = 1$ (ssit $x = 0$) ja $2^x = 16$ $(x = 4)$.

Vastus: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

8.5. Antud võrrandit võib kirjutada kujul

$$\frac{3^{2x}}{27} - \frac{3^{2x}}{9} + 3^{2x} = 675.$$

Võttes 3^{2x} sulgude ette saame

$$3^{2x}\left(\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + 1\right) = 675,$$

Seetõttu $3^{2x}\cdot \frac{25}{27} = 675$; siit $3^{2x} = 3^6$, millest $x = 3$.

Vastus: $x = 3$.

8.6. Toome võrrandi vasakult poolt 5^x sulgude ette. Siis saame $5^x(30 - 25 + 6) = 22$ ehk $5^x = 2$.

Selle võrrandi lahend on $x = \log_5 2$ (või $x = \frac{\log 2}{\log 5}$).

Vastus: $x = \log_5 2$.

8.7. Kasutades logaritmi definitsiooni võime kirjutada

$$9^{1 - \log_3 2} - 5^{-\log_5 4} = 3^2\cdot\left(3^{\log_3 2}\right)^{-2} - \left(5^{\log_5 4}\right)^{-1} =$$

$$= 9 \cdot 2^{-2} - 4^{-1} = 2 .$$

Vastus: 2.

8.8. Logaritmides võrrandi mõlemaid pooli, jõuame võrrandini $\log(x^2+x-8)\log 10 = \log 4$ ehk $\log(x^2+x-8) = \log 4$. Kui arvude logaritmid on võrdsed, siis ka arvud ise on võrdsed, järelikult

$$x^2 + x - 8 = 4, \text{ millest } x_1 = 3, \; x_2 = -4.$$

Kontrollist nähtub, et mõlemad lahendid sobivad.

Vastus: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$.

8.9. Arvu -1 asemele võib kirjutada $\log 0{,}1$, mistõttu teiseneb võrrand kujule

$$\log(x^2 - 4x + 3{,}1) = \log 0{,}1,$$

millest saame

$$x^2 - 4x + 3{,}1 = 0{,}1 \quad \text{ehk} \quad x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahendid $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$ on ka lähtevõrrandi lahenditeks.

Vastus: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

8.10. See on mittetäielik ruutvõrrand $\log_5 x$ suhtes:

$$\log_5 x(\log_5 x - 3) = 0.$$

Viimane võrrand on rahuldatud juhtudel, kui

$\log_5 x = 0$, millest $x = 1$ või

$\log_5 x - 3 = 0$, millest $x = 125$.

Vastus: $x_1 = 1$, $x_2 = 125$.

8.11. Et $\log(1 + x^2 - 2x) = \log(1 - x)^2 = 2 \log(1 - x)$, siis lähtevõrrandi võib kirjutada kujul

$$1 + 2 \log(1 - x) - \log(1 + x^2) = 2 \log (1 - x).$$

Siit $\log(1 + x^2) = 1$, kust omakorda järeldub, et

$$1 + x^2 = 10. \quad \text{Seega } x = \pm 3 .$$

Kuna negatiivsetel arvudel ei ole logaritmi, siis -3 ei sobi.

Vastus: $x = 3$.

8.12. Et $\log_3|x + 1|^2 = 2 \log_3|x + 1|$, siis võime lähtevõrrandi asemel kirjutada

$$3 \log_3|x + 1| = 3 \quad \text{ehk} \quad \log_3|x + 1| = 1.$$

Sellest võrrandist saame

$$|x + 1| = 3, \quad \text{millest} \quad x + 1 = \pm 3.$$

Seega $x_1 = 2$, $x_2 = -4$.

Kontroll näitab, et mõlemad lahendid sobivad.

Vastus: $x_1 = 2$, $x_2 = -4$.

8.13. Kuna võrrandi parema poole võime esitada kujul $\log_3 3$, siis $\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$.

Saadud võrrandi mõlemaid pooli korrutame teguriga abc. See annab

$$abx-a^2b-ab^2+bcx-b^2c-bc^2+acx-ac^2-a^2c = 3abc.$$

Liikmeid rühmitades saame

$$x(ab + bc + ac) = 3abc + ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c),$$

millest

$$x = \frac{ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ac(a+b+c)}{ab + bc + ac} =$$

$$= \frac{(a+b+c)(ab+bc+ac)}{ab+bc+ac} = a + b + c.$$

Vastus: $x = a + b + c$.

8.14. Kui aritmeetilise jada kolm järjestikust liiget on a_1, a_2, a_3, siis kehtib seos $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$. Kasutades seda omadust, saame

$$\log(x + 6) - \log x = \log(2x + 7) - \log(x + 6)$$

ehk teisiti

$$2 \log(x + 6) = \log(2x + 7) + \log x.$$

Seetõttu

$$\log\left[x(2x + 7)\right] = \log(x + 6)^2,$$

kust saame

$$2x^2 + 7x = x^2 + 12x + 36 \quad \text{ehk} \quad x^2 - 5x - 36 = 0.$$

Selle ruutvõrrandi lahendid on $x_1 = -4$ ja $x_2 = 9$. Esimene neist ei võimalda määrata logaritmi, aga log 9, log 15 ja log 16 moodustavad aritmeetilise jada.

Vastus: $x = 9$.

9.1. Vektori $\vec{a} + \vec{b}$ koordinaadid on

$$\vec{a} + \vec{b} = (4, -1, -1)$$

ning selle vektori pikkus

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{16 + 1 + 1} = 3\sqrt{2}.$$

Vektorite ristseisu saab kontrollida vektorite skalaarkorrutise valemi põhjal, s.o.

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi .$$

Teiselt poolt $\quad \vec{a}\,\vec{b} = 1\cdot 3 - 2\cdot 1 - 3\cdot 4 = -11.$

Et $\vec{a}\,\vec{b} \neq 0$, siis vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole risti.

Vastus: $|\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{2}$; $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole risti.

9.2. Leiame vektorid

$$\vec{AB} = (4, -7, 1), \qquad \vec{AD} = (9, -15, -5),$$
$$\vec{DC} = (-8, 14, -2), \qquad \vec{BC} = (-3, 6, -8).$$

Et $\frac{4}{-8} = \frac{-7}{14} = \frac{1}{-2}$ ja $\frac{9}{-3} \neq \frac{-15}{6} \neq \frac{-5}{-8}$, siis

vektorite $\vec{AB}$ ja $\vec{DC}$ koordinaadid on võrdelised, aga $\vec{AD}$ ja $\vec{BC}$ koordinaadid ei ole võrdelised, seega vektorid $\vec{AB}$ ja $\vec{DC}$ on kollineaarsed, aga $\vec{AD}$ ja $\vec{BC}$ ei ole kollineaarsed. Järelikult punktid A, B, C ja D võivad olla trapetsi tipud.

Vastus: Punktid A, B, C, D on trapetsi tipud.

9.3. Leiame vektorite $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ ja $\vec{BC}$ pikkused.

Et $\vec{AB} = (0, 4, 0)$, $\vec{AC} = (-1, 2, 1)$, $\vec{BC} = (-1, -2, 1)$

siis $|\vec{AB}| = \sqrt{4^2} = 4$, $|\vec{AC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$, $BC = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

Seega Δ ABC on võrdhaarne, kus AC = BC. Küljele AB tõmmatud kõrgus

$$h = \sqrt{AC^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}.$$

Vastus: AC = BC ; kõrgus $h = \sqrt{2}$.

9.4. Vektori $\vec{a}$ pikkus on $|\vec{a}| = \sqrt{10}$.

Kuna $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (-1, 0, 2)$, siis $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{5}$.

Arvutades vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ skalaarkorrutise koordinaatide kaudu, näeme et

$$\vec{a}\cdot(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 3\cdot 2 = 5 .$$

Seega
$$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

kust järeldub, et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Vastus: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

9.5. Kolmnurga tippude koordinaatidega on määratud kolmnurga külgede pikkused. Leides vastavad vektorid, näeme, et

$$\vec{AB} = (8, 2)\ ,\quad \vec{BC} = (-3, 3)\ ,\quad \vec{AC} = (5, 5)$$

ja

$$|\vec{AB}| = \sqrt{68}\ ,\quad |\vec{BC}| = \sqrt{18}\ ,\quad |\vec{AC}| = \sqrt{50}\ .$$

Kolmnurga kõige pikem külg on AB ja selle ruut võrdub teiste külgede ruutude summaga, seega $\triangle$ ABC on täisnurkne, kus $\angle$ ACB = 90°.

9.6. Määrame vektorid $\vec{KL} = (-1, -1, 4)$ ja $\vec{KM} = (1, -2, 2)$. Olgu $\vec{KL}$ ja $\vec{KM}$ vaheline nurk φ, siis

$$\cos\varphi = \frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ .\qquad \text{Seega}\ \ \varphi = \frac{\pi}{4}\ .$$

Vastus: $\angle LKM = \frac{\pi}{4}$.

9.7. Tähistame kolmnurga tipu C juures oleva sisenurga tähega φ. Leiame

$\vec{CA} = (0, 1, -1)$, $\vec{CB} = (1, 0, -1)$ ja $|\vec{CA}| = \sqrt{2}$, $|\vec{CB}| = \sqrt{2}$.

Et $$\cos\varphi = \frac{\vec{CA}\cdot\vec{CB}}{|\vec{CA}|\cdot|\vec{CB}|} = \frac{1}{2}\ ,\quad \text{siis}\ \ \varphi = \frac{\pi}{3}\ .$$

Vastus: $\angle ACB = \frac{\pi}{3}$.

9.8. Kolmnurga ümbermõõdu leidmiseks määrame külgede pikkused. Tehes seda vektorite abil saame

$$\vec{AB} = (7, -4, -4)\ ;\quad |\vec{AB}| = \sqrt{81} = 9\ ,$$
$$\vec{BC} = (-2, 7, -1)\ ;\quad |\vec{BC}| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}\ ,$$
$$\vec{AC} = (5, 3, -5)\ ;\quad |\vec{AC}| = \sqrt{59}\ .$$

Kolmnurga ümbermõõt on seega $(9+3\sqrt{6} + \sqrt{59})$ pikkusühikut.

Vastus: $9 + 3\sqrt{6} + \sqrt{59}$.

10.1. Teisendades võrduse vasakut poolt ja asendades selles

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\quad \text{saame}$$

$$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 2\alpha}{1} = \cos 2\alpha .$$

10.2. Ruutude vahe valemi põhjal

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x).$$

Seega

$$\cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin^2 x =$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 .$$

Vastus: 1.

10.3. Teisendame avaldise $1-\cos\alpha$ korrutiseks:

$$1 - \cos\alpha = \cos 0° - \cos \ = -2\sin\frac{}{2}\sin(-\frac{}{2}) = 2\sin^2\frac{}{2} .$$

Asendades tulemuse lähteülesandesse ja lihtsustades saame

$$\frac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Et $\sin^2\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$, siis

$$\frac{\sin^2\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \cos^2\frac{\alpha}{2} .$$

10.4. Kuna $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, siis

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\tan^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}} -$$

$$- \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

Arvutame arvulise väärtuse:

$$\sin^2 225° = \sin^2(180° + 45°) = \sin^2 45° = \frac{1}{2} .$$

Vastus: $\frac{1}{2}$.

10.5. Asendame võrduse vasakul pool

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x,$$

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

ja $\sin^2(90° - x) = \cos^2 x$. Sel juhul teisendub samasuse vasak pool kujule

$$\frac{\cot x \cdot \sin 4x}{(\sin^4 x - \cos^4 x)\cdot\sin^2(90° - x)} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot 2 \sin 2x \cos 2x}{\sin x \cdot (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot \cos^2 x} =$$

$$= \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\sin x\cdot(-\cos 2x)\cdot\cos x} = -4 .$$

10.6. Asendades lähteülesandes

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \quad \text{ja} \quad 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

ning teostades lihtsustused saame

$$\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} =$$

$$= \frac{2 \sin x(\sin x + \cos x)}{2 \cos x(\sin x + \cos x)} = \tan x .$$

Vastus: $\tan x$.

10.7. Teisendame samasuse vasakut poolt, leides murdude ühise nimetaja:

$$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{4 \sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 2 \tan 2\alpha.$$

10.8. Rakendame kahe nurga summa koosinuse ning samade nurkade vahe koosinuse valemeid. Siis

$$\cos(x+y)\cos(x-y) = (\cos x\cos y - \sin x\sin y)(\cos x\cos y + \sin x\sin y) =$$

$$= \cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y = \cos^2 x(1 - \sin^2 y) - (1 - \cos^2 x)\sin^2 y =$$

$$= \cos^2 x - \cos^2 x\sin^2 y - \sin^2 y + \cos^2 x\sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

10.9. Seda samasust saab tõestada eelmise ülesande eeskujul. Tõestame selle aga teisiti. Samasuse vasakul pool on siinuste korrutis, mille võib teisendada vaheks, s.o.

$$\sin(x+y)\sin(x-y) = \frac{\cos 2y - \cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{\cos^2 y - \sin^2 y - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{2} = \frac{1 - \sin^2 y - \sin^2 y - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x}{2} =$$

$$= \sin^2 x - \sin^2 y .$$

10.10. Korrutades ja jagades selle samasuse vasakut poolt teguriga $\sin 20°$ saame

$$16 \cos 20° \cos 40° \cos 60° \cos 80° =$$

$$= \frac{16 \cos 20° \cos 40° \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 80° \sin 20°}{\sin 20°} =$$

$$= \frac{4(2 \sin 20° \cos 20°) \cos 40° \cos 80°}{\sin 20°} = \frac{4 \sin 40° \cos 40° \cos 80°}{\sin 20°} =$$

$$= \frac{2(2 \sin 40° \cos 40°) \cos 80°}{\sin 20°} = \frac{2 \sin 80° \cos 80°}{\sin 20°} = \frac{\sin 160°}{\sin 20°} =$$

$$= \frac{\sin 20°}{\sin 20°} = 1 .$$

10.11. Seosest $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ järeldub, et

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{ja} \quad \tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{3} \quad \text{ning}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{3}{4} .$$

Kasutame valemit $\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 2\beta}$.

Tehes vastavad asendused saame

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1.$$

Sellest järeldub, et $\alpha + 2\beta = 45°$.

11.1. Taandamisvalemite põhjal

$$\sin(2x + \tfrac{5}{2}\pi) = \sin(2x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos 2x,$$

ja $\cos(x - \frac{7}{2}\pi) = \cos(x - \frac{7}{2}\pi + 4\pi) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x.$

Seega võrrand saab kuju

$$\cos 2x + 3 \sin x = 1 + 2 \sin x.$$

Kasutame kahekordse nurga koosinuse valemit ning asendame $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, siis saame

$1 - 2 \sin^2 x = 1 - \sin x$ ehk $2\sin^2 x - \sin x = 0,$

millest $\sin x(2 \sin x - 1) = 0.$

See võrrand on rahuldatud, kui

$\sin x = 0$, millest $x = \pi n$, kus $n \in Z$, või

$2 \sin x - 1 = 0$ ehk $\sin x = \frac{1}{2}$, millest

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad \text{kus} \quad n \in Z.$$

Vastus: $x = \pi n$ ja $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ kus $n \in Z$.

11.2. Asendades $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ saame $\sin x$ suhtes ruutvõrrandi

$6(1-\sin^2 x)+5 \sin x-7=0$ ehk $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$

Selle ruutvõrrandi lahendid on

$\sin x = \frac{1}{2}$, millest $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ kus $n \in Z$ ja

$\sin x = \frac{1}{3}$, millest $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n$ kus $n \in Z$.

Vastus: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$ kus $n \in Z$.

11.3. Teisendame võrrandi vasakul pool siinuste summa korrutiseks:

$$2 \sin 2x \cos x - \cos x = 0.$$

Tuues $\cos x$ sulgude ette saame

$$\cos x(2 \sin 2x - 1) = 0.$$

Sellel võrrandil on järgmised lahendid:

I $\cos x = 0$, siit $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, kus $n \in Z$.

Muidugi võib üldlahendit x avaldada ka kujul

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \text{kus} \quad n \in Z.$$

II $2 \sin 2x - 1 = 0$ ehk $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Siit $2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ja $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$ kus $n \in Z$.

Vastus: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n$ kus $n \in Z$.

11.4. Teisendame võrrandi vasakul pool koosinuste summa korrutiseks ja toome seejärel $\cos 4x$ sulgude ette. See annab

$$2 \cos 4x \cos 3x - \cos 4x = 0 \quad \text{ja}$$

$$\cos 4x (2 \cos 3x - 1) = 0 .$$

Lahendid leiame võrdsustades mõlemad tegurid nulliga

I $\cos 4x = 0$, siit $4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ehk $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k$ kus $k \in Z$. (Võib aga ka selliselt: $4x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$).

II $2 \cos 3x - 1 = 0$ ehk $\cos 3x = \frac{1}{2}$. Siit järeldub

$3x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ehk $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k$, kus $k \in Z$.

Vastus: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k$, $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi k$, kus $k \in Z$.

11.5. Teisendades $\sin 3x + \sin 5x$ korrutiseks ja tuues seejärel $\sin 4x$ sulgude ette jõuame võrrandini

$$\sin 4x (2 \cos x + 1) = 0.$$

See võrrand on rahuldatud, kui

I $\sin 4x = 0$ ehk $x = \frac{\pi}{4} n$, kus $n \in Z$, või

II $2 \cos x + 1 = 0$, kust $\cos x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, kus $n \in Z$.

Vastus: $x = \frac{\pi}{4} n$, $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$ kus $n \in Z$.

11.6. Kasutades kahekordse nurga koosinuse valemit ning seejärel asendades $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, saame

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0,$$

millest peale lihtsaid teisendusi järeldub

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 .$$

Saadud ruutvõrrandi lahendid on $\frac{1}{2}$ ja 1. Seega

I $\sin x = \frac{1}{2}$, millest $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, kus $n \in Z$,

II $\sin x = 1$, millest $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, kus $n \in Z$.

Vastus: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, kus $n \in Z$.

11.7. Asendades poolnurga siinuse valemi kohaselt

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

saame võrrandi

$$2\cos^2 2x + 5\cos 2x - 3 = 0.$$

Saadud ruutvõrrandi lahenditest -3 ei sobi, jääb

$$\cos 2x = \frac{1}{2}, \text{ millest}$$

$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ehk $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, kus $n \in Z$.

Vastus: $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, kus $n \in Z$.

11.8. Kasutades kahekordse nurga siinuse ja kahekordse nurga koosinuse valemeid saame

$$2\sin 2x(-\cos 2x) + 1 = 0 \text{ ning } \sin 4x = 1.$$

Siit $4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ja $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, kus $k \in Z$.

Vastus: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$, kus $k \in Z$.

11.9. Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu. See annab võrrandi

$$2 - 3\cos 2x = \sin x .$$

Asendades $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ saame ruutvõrrandi

$$6\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

mille lahendid on $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{3}$.

Seetõttu tuleb vaadelda kahte juhtu.

I $\sin x = \frac{1}{2}$, millest $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, kus $n \in Z$.

II Ruutvõrrandi lahend $-\frac{1}{3}$ ei sobi lähtevõrrandi lahendiks, sest negatiivsetel arvudel ei ole ruutjuurt.

Vastus: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, kus $n \in Z$.

11.10. Murru nimetaja ei tohi olla null, s.t.

$$\cos x \neq -1 , \quad \tan x \neq 0, \text{ millest}$$

$$x \neq \pi + 2\pi n , \quad x \neq \pi n, \text{ kus } n \in Z.$$

Võtame võrrandi vasakul pool mõlemad liidetavad ühisele nimetajale:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos x}{(1 + \cos x)\sin x} = \sqrt{2} ,$$

$$\frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)\sin x} = \sqrt{2} .$$

Tehtud eeldustel võime lugejat ja nimetajat jagada teguriga $(1 + \cos x)$, mille järel saame

$$\frac{1}{\sin x} = \sqrt{2} \quad \text{ehk} \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Järelikult $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, kus $n \in Z$.

Vastus: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, kus $n \in Z$.

11.11. Asendus

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

annab ruutvõrrandi $\cos^2 x$ suhtes:

$$4 \cos^4 x - 9 \cos^2 x + 2 = 0 .$$

Siit saame kaks lahendit:

I $\cos^2 x = \frac{1}{4}$ ehk $\cos x = \pm \frac{1}{2}$.

a) Kui $\cos x = \frac{1}{2}$, siis $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ja

b) kui $\cos x = -\frac{1}{2}$, siis $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, kus $n \in Z$.

Neid kahte lahendite seeriat saab esitada ka ühe üldlahendina $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, kus $k \in Z$, kuid sisseastumiseksamil ei ole see kohustuslik.

II Teine ruutvõrrandi lahend $\cos^2 x = 2$ ei sobi, sest

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 .$$

Vastus: $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$ kus $k \in Z$.

11.12. Esimesest võrrandist avaldame $y = \frac{\pi}{4} - x$ ja asendame selle teise võrrandisse.

Siis saame $\qquad \cos x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0 .$

Teisendades siin koosinuste summa korrutiseks jõuame võrrandini

$$2 \cos\frac{\pi}{8} \cos(x - \frac{\pi}{8}) = 0.$$

Et $2 \cos \frac{\pi}{8} \neq 0$, siis $\cos(x - \frac{\pi}{8}) = 0$, millest

$x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ehk $x = \frac{5}{8}\pi + \pi n$, kus $n \in Z$.

Esimese võrrandi põhjal

$$y = \frac{\pi}{4} - x = -\frac{3}{8}\pi - \pi n \text{ , kus } n \in Z.$$

Vastus: $x = \frac{5}{8}\pi + \pi n$, $y = -\frac{3}{8}\pi - \pi n$, kus $n \in Z$.

11.13. Võrrandit võib esitada kujul

$$2^{\sin 3x} = 2^{\frac{1}{2}} \text{ millest } \sin 3x = \frac{1}{2} .$$

Seetõttu

$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ja $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n$, kus $n \in Z$.

Vastus: $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}n$, kus $n \in Z$.

12.1. Väljendame kõik liikmed suuruse x astmena ja leiame seejärel tuletise:

$$y = 2x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-1} =$$

$$= 2 x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{7}{6}} - 4x^{-\frac{1}{2}} .$$

Edasi $y' = 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{2} x^{\frac{1}{6}} + 2x^{-\frac{3}{2}} = 3\sqrt{x} + 3\frac{1}{2}\sqrt[6]{x} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$.

Vastus: $y' = 3\sqrt{x} + 3\frac{1}{2}\sqrt[6]{x} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$.

12.2. Muutuja y saab väljendada muutuja x astme kaudu, s.o. $y = \frac{2}{5} x^{\frac{1}{2}}$. Selle tuletis $y' = \frac{1}{5} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5\sqrt{x}}$

ning $y'(0{,}25) = \frac{1}{5\sqrt{0{,}25}} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4.$

Vastus: $f'(0{,}25) = 0{,}4.$

12.3. Leiame funktsiooni tuletise:

$$y' = 6x^2 + 6x .$$

Tuletise nullkohad leiame võrrandist

$$6x^2 + 6x = 0 \quad \text{ehk} \quad x(x + 1) = 0.$$

Tuletise nullkohad on $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Funktsiooni kasvamispiirkonnas on $y' > 0$, s.o.

$$6x^2 + 6x > 0, \text{ seega } x < -1 \quad \text{või} \quad x > 0.$$

Funktsiooni kahanemispiirkonnas on

$$y' < 0, \text{ s.t. } \quad -1 < x < 0.$$

Funktsiooni teine tuletis

$$y'' = 12x + 6 \quad \text{ning} \quad y''(-1) = -6 < 0,$$

millest järeldub, et $x = -1$ on maksimumkoht. Maksimumväärtus on

$$y_{max} = 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 2 = -1.$$

Graafiku maksimumpunkt on järelikult $(-1; -1)$.
Kuna $y''(0) = 6 > 0$, siis $x = 0$ on miinimumkoht ja miinimumväärtus $y_{min} = 2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 2 = -2.$

Graafiku miinimumpunkt on $(0; -2)$.
Funktsiooni käänukoht on punktis, kus $y'' = 0$.
Antud juhul $12x + 6 = 0$, kust saame $x = -\frac{1}{2}$.

Käänupunkti ordinaat

$$y(-\tfrac{1}{2}) = 2(-\tfrac{1}{2})^3 + 3(-\tfrac{1}{2})^2 - 2 = -1\tfrac{1}{2}.$$

Graafiku käänupunkt on $(-\tfrac{1}{2}, -1\tfrac{1}{2})$.

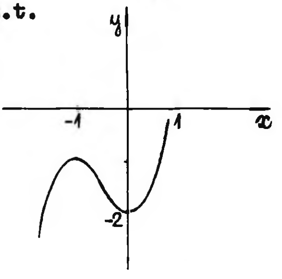
Funktsiooni kumeruspiirkonnas on $y'' < 0$, s.o.

$$12x + 6 < 0, \text{ millest } x < -\tfrac{1}{2}.$$

Nõgususpiirkonnas on $y'' > 0$, s.t.

$12x + 6 > 0$ ehk $x > -\tfrac{1}{2}$.

Arvestades eelnevalt funktsiooni uurimisel saadud tulemusi, võime visandada graafiku järgmisel kujul:



Vastus: Kasvamispiirkond on $]-\infty; -1[$ või $]0; \infty[$ ja kahanemispiirkond on $]-1; 0[$.

12.4. Leiame funktsiooni tuletise:

$$y' = 3x^2 - 8x - 3.$$

Arvestades, et funktsiooni kasvamispiirkonnas

$f'(x) > 0$ saame $3x^2 - 8x - 3 > 0$.

Saadud ruutfunktsiooni nullkohad on

$$x_1 = -\tfrac{1}{3} \quad \text{ja} \quad x_2 = 3,$$

mistõttu võrratus on rahuldatud, kui

$$x < -\tfrac{1}{3} \quad \text{või} \quad x > 3.$$

Vastus: $]-\infty; -\tfrac{1}{3}[\vee]3; \infty[$.

12.5. Funktsiooni esimene tuletis $y' = 3x^2 - 12$. Kasvamispiirkonnas

$$y' > 0, \text{ s.t. } 3x^2 - 12 > 0.$$

Ruutfunktsiooni $3x^2 - 12$ nullkohad on $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ruutvõrratuse lahendid on $x < -2$ ja $x > 2$, mis ühtlasi on funktsiooni kasvamispiirkondadeks. Funktsiooni ekstreemumkohad on $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Kontrollime, milline neist on maksimumkoht.

Et $y'' = 6x$ ja $y''(-2) = -12 < 0$, siis maksimumkoht on $x = -2$ ning $y_{max} = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$.
Seega maksimumpunkt on $(-2; 16)$.

Vastus: Kasvamispiirkond on $]-\infty; -2[\vee]2; \infty[$ ja maksimumpunkt $(-2; 16)$.

12.6. Leiame funktsiooni tuletise:

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x) .$$

Ekstreemum punktis

$$y' = 0, \text{ s.o. } e^x(1 + x) = 0.$$

Et $e^x \neq 0$, siis $1 + x = 0$, millest $x = -1$.

Funktsiooni kasvamispiirkonnas $y'(x) > 0$ ja kahanemispiirkonnas $y'(x) < 0$. Kui $e^x(1 + x) > 0$, siis $1 + x > 0$ ehk $x > -1$, sest $e^x > 0$ x mistahes reaalarvulisel väärtusel.
Kui $e^x(1 + x) < 0$, siis $1 + x < 0$ ja $x < -1$.

Vastus: Ekstreemumkoht $x = -1$, kasvamispiirkond $]-1; \infty[$ ja kahanemispiirkond $]-\infty; -1[$.

12.7. Funktsiooni tuletis on $f' = 12x^2 - 30x - 18$. Ekstreemumkohad on need x väärtused, mille puhul $f' = 0$. Seega ekstreemumkohad saame võrrandist

$$12x^2 - 30x - 18 = 0 \quad \text{ehk} \quad 2x^2 - 5x - 3 = 0, \text{millest}$$

$$x_1 = -0,5, \quad x_2 = 3.$$

Viimane arvudest on väljaspool nõutud piirkonda.
Et $f''(x) = 24x - 30$ ja $f''(-0,5) \quad 0$, siis $x = -0,5$ on maksimumkoht ning

$f_{max} = 4 \cdot (-0,5)^3 - 15 \cdot (-0,5)^2 - 18 \cdot (-0,5) - 5 = -0,25$.

Leiame funktsiooni $f(x)$ väärtused lõigu otspunktides:

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 15 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot (-1) - 5 = -6 ,$$

$$f(1) = 4\cdot 1^3 - 15\cdot 1^2 - 18\cdot 1 - 5 = -34.$$

Järelikult $f(1)$ on funktsiooni vähim väärtus lõigul $[-1, 1]$.

Vastus: $-0,25$; -34.

12.8. Leiame funktsiooni tuletise, selle järgi ekstreemumkohad.

Et $y' = 2x^2 - 2x - 4$, siis $y' = 0$, kui $2x^2-2x-4 = 0$.

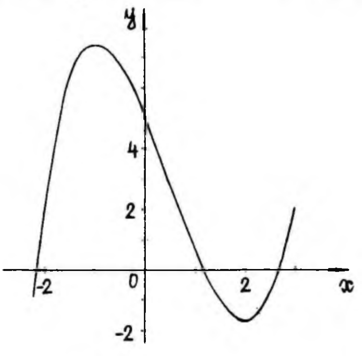
Seega ekstreemumkohad on $x_1 = -1$ ja $x_2 = 2$.

Funktsiooni kasvamispiirkonna leiame võrratusest $y' > 0$, mis antud juhul saab kuju

$$2x^2 - 2x - 4 > 0 \quad \text{ehk} \quad x^2 - x - 2 > 0.$$

Seega $x < -1$ või $x > 2$.

Funktsiooni kahanemispiirkonnaga on tegemist siis, kui $y'(x) < 0$. Siit $-1 < x < 2$.



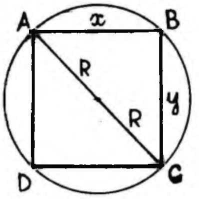
Funktsiooni graafiku visandamiseks uurime eelnevalt funktsiooni (ülesande 12.3 eeskujul) ja veendume, et maksimumpunkt on $(-1; 7\frac{1}{3})$ ning miinimumpunkt $(2; -1\frac{2}{3})$. Funktsiooni kumeruspiirkond on $x < \frac{1}{2}$, nõgususpiirkond $x > \frac{1}{2}$ ja graafiku käänupunkt $(\frac{1}{2}; 2\frac{5}{6})$. Graafiku visandamiseks võib valida veel täiendavaid punkte.

Vastus: Kasvamispiirkond on $]-\infty; -1[\vee]2; \infty[$ ja kahanemispiirkond $]-1; 2[$.

12.9. Olgu ringi raadius R, ristküliku küljed x ja y. Esitatud tingimuste kohaselt

$2x + 2y = 40$, $x + y = 20$, millest $y = 20 - x$.

Ristküliku pindala $S = xy = x(20 - x) = 20x - x^2$.



Pindala tuletis $S' = 20 - 2x$. Ekstreemumkoha leidmiseks peab võtma $S' = 0$. Seega $20 - 2x = 0$, millest saame $x = 10$.

Et $S'' = -2 < 0$, siis $x = 10$ on maksimumkoht, millele vastab

$$y = 20 - 10 = 10.$$

Maksimaalse ristküliku pindala

$$S_{max} = 10 \cdot 10 = 100\ (cm^2).$$

Kolmnurgast ABC leiame, et ringi diameeter

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ ehk $2R = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ (cm).

Vastus: $2R = 10\sqrt{2}$ cm, $S_{max} = 100$ cm^2.

12.10. Joone puutuja võrrand on

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ kus $(x_0;y_0)$ on puutepunkt.

Sirge $y + 5x - 2 = 0$ ehk $y = -5x + 2$ tõus on -5, seega ka puutuja tõus on -5.

Et $y' = 2x + 1$, siis $2x + 1 = -5$, kust $x = -3$.

Puutepunkti abstsiss on $x_0 = -3$ ja puutepunkti ordinaat $y_0 = (-3)^2 + (-3) - 4 = 2$.

Puutuja võrrand on $y-2 = -5(x+3)$ ehk $5x+y+13 = 0$.

Vastus: $5x + y + 13 = 0$.

12.11. Sirge $y - 12x + 10 = 0$ ehk $y = 12x - 10$ tõus on 12, järelikult ka puutuja tõus on 12. Otsitavate punktide abstsissid leiame võrrandi $6x^2 - 6x = 12$ lahendite hulgast, kuna $y' = 6x^2 - 6x$. Võrrandi $x^2 - x - 2 = 0$ lahendid on $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Otsitavate punktide ordinaadid on

$$y_1 = 2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + 2 = -3 \quad \text{ja}$$

$$y_2 = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 2 = 6 \quad \text{ning}$$

punktid on $(-1; -3)$ ja $(2 ; 6)$.

Vastus: $(-1 ; -3)$ ja $(2 ; 6)$.

12.12. Funktsiooni tuletis on:

$$y' = (2 \sin x)^2 - \left[(\sin x)' \cos x + (\cos x)' \sin x\right] =$$
$$= 2 \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos x - \cos 2x.$$

Selle tuletise väärtus kohal $\frac{\pi}{6}$ on:

$$y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2} .$$

Vastus: $\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}$.

12.13. Joon $y = \frac{x - 6}{x - 2}$ lõikab y-telge punktis (0; 3), s.t. et ka puutepunkt on (0; 3).

Et $y'(x) = \frac{x - 2 - (x - 6)}{(x - 2)^2} = \frac{4}{(x - 2)^2}$, siis

joone puutuja tõus on $y'(0) = 1$ ja puutuja võrrand on $y - 3 = 1\cdot(x - 0)$ ehk $y = x + 3$.

Vastus: $y = x + 3$.

12.14. Olgu täisnurkse kolmnurga kaatetid a ja b. Siis

$$a + b = 36, \quad b = 36 - a .$$

Kolmnurga pindala $S = \frac{ab}{2} = \frac{36a - a^2}{2}$.

Pindala tuletis on $S' = 18 - a$. Ekstreemumkoht on punktis, kus $S' = 0$, siit $18 - a = 0$ ja $a = 18$. Et $S'' = -1 < 0$, siis $a = 18$ on maksimumkoht ning maksimaalse pindalaga kolmnurga kaatetid on 18 cm ja 18 cm ning hüpotenuus on $18\sqrt{2}$ cm.

Vastus: 18 cm, 18 cm, $18\sqrt{2}$ cm.

12.15. Lahendame selle ülesande kahel viisil.

Esimene lahendus.

Siin kasutame tuletise mõistet. Tähistame $f(x) = 3(\sin x + \cos x)$ ja leiame $f'(x)=3(\cos x - \sin x)$. Ekstreemumpunktis $f'(x) = 0$. Seega $3(\cos x - \sin x)=0$, millest $\tan x = 1$ ja $x = \frac{\pi}{4}$.

Kuna $f''(x) = 3(-\sin x - \cos x) = -3(\sin x + \cos x)$, siis $f''(\frac{\pi}{4}) < 0$, mistõttu $x = \frac{\pi}{4}$ on maksimumkoht ning avaldise $3(\sin x + \cos x)$ suurim väärtus on $3\sqrt{2}$.

Teine lahendus.
Teisendame lähteülesannet, korrutades ja jagades avaldist $\sqrt{2}$-ga, siis saame

$$3(\sin x + \cos x) = 3\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x) =$$

$$= 3\sqrt{2}(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}).$$

Saadud korrutis on maksimaalne (maksimaalne väärtus on $3\sqrt{2}$) juhul, kui $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$, s.t. kui $x = \frac{\pi}{4}$.

Vastus: $3\sqrt{2}$.

12.16. Olgu silindri põhja raadius R ja kõrgus H, siis silindri täispindala

$$S_t = 2\pi R^2 + 2\pi RH.$$

Antud tingimuste kohaselt ruumala

$$V = \pi R^2 H, \text{ millest } H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Asendame täispindala valemis suuruse H ja leiame tuletise R järgi. Siis saame

$$S_t = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R} \quad \text{ning} \quad S_t' = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}.$$

Funktsiooni ekstreemumkoht on punktis, kus $S_t' = 0$,

s.o. $4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0$, millest $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 V}{2\pi}}$.

Et $S'' = 4\pi + \frac{4V}{R^3}$ ja $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$,

siis $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ on miinimumkoht.

Minimaalne kõrgus $H = \frac{\sqrt[3]{4V\pi^2}}{\pi}$.

Vastus: $R = \frac{\sqrt[3]{4V\pi^2}}{2\pi}$, $H = \frac{\sqrt[3]{4V\pi^2}}{\pi}$.

12.17. Olgu risttahuka mudeli põhiserv x ja kõrgus h, siis tingimuste kohaselt

$8x + 4h = 120$ ehk $2x + h = 30$, millest $h = 30 - 2x$.

Risttahuka täispindala on

$$S_t = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + 4x(30 - 2x) = 120x - 6x^2.$$

Täispindala tuletise abil saame võrrandi ekstreemumkoha leidmiseks.

Et $S_t' = 120 - 12x$, siis $S_t' = 0$ kui $120 - 12x = 0$ ehk

$$x = 10.$$

Kuna $S_t'' = -12 < 0$, siis $x = 10$ on maksimumkoht ning mudeli kõrgus $h = 30 - 2 \cdot 10 = 10$ (cm).

Vastus: 10 cm.

12.18. Olgu joone $y = 2x^2 + 2$ puutepunkt $P(x_0; y_0)$, siis puutuja tõus on $y'(x_0)$, s.t. antud juhul $y'(x_0) = 4x_0$.

Koordinaatide alguspunkti läbiva puutuja võrrand on

$$y = y'(x_0) \cdot x, \text{ s.t. } y = 4x_0x.$$

Et punkti $P(x_0; y_0)$ koordinaadid rahuldavad parabooli võrrandit $y = 2x^2 + 2$ kui ka puutuja võrrandit $y = 4x_0x$, siis

$$\begin{cases} y_0 = 2x_0^2 + 2, \\ y_0 = 4x_0^2 . \end{cases}$$

Sellest süsteemist leiame $2x_0^2 + 2 = 4x_0^2$ ehk $x_0^2 = 1$.

Seetõttu $x_0 = \pm 1$ ja $y_0 = 4$. Seega puutepunktid on $(1; 4)$ ja $(-1; 4)$ ning puutujate võrrandid vastavalt

$$y = 4x \text{ ja } y = -4x.$$

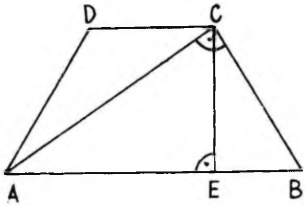
Vastus: $y = 4x$; $y = -4x$.

13.1. Olgu antud võrdhaarne trapets ABCD, milles $BC = AD$. Joonestame trapetsi kõrguse CE, siis

$$EB = \frac{AB - DC}{2} = \frac{13 - 5}{2} = 4 \text{ (cm)}.$$

Joonise põhjal

$$AE = AB - EB = 13 - 4 = 9 \text{ (cm)}.$$

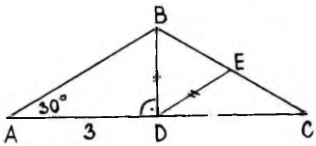


Et kolmnurk ABC on täisnurkne, siis $EC^2 = AE \cdot EB$, seega $EC^2 = 9 \cdot 4$ ehk $EC = 6$ cm. Trapetsi pindala $S = \frac{a+b}{2}h$. Antud juhul

$$S = \frac{13+5}{2} \cdot 6 = 54\ (\mathrm{cm}^2).$$

Vastus: 54 cm^2.

13.2.



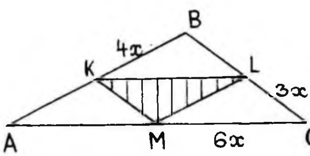
Olgu antud võrdhaarne kolmnurk, milles $AB = BC$ ja $BD = DE$. Lõik DE on kolmnurga kesklõik ning seetõttu $DE = \frac{1}{2}AB$. Analoogiliselt leiame, et $BD = \frac{1}{2}AB$. Täisnurkses kolmnurgas ABD $\sin\alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$, kus α on tipu A juures asuv sisenurk. Siit järeldub, et $\alpha = 30°$. Samas kolmnurgas $\tan\alpha = \frac{BD}{AD}$ ehk $\tan\alpha = \frac{BD}{3}$. Viimasest võrdusest leiame

$$BD = 3\tan 30° = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ (\mathrm{cm}).$$

Kolmnurga pindala $S = \frac{1}{2}ah$, s.o. $S = 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

Vastus: $S = 3\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

13.3.



Paneme tähele, et kolmnurga külgede pikkused peavad olema

$3x$, $4x$ ja $6x$.

Tõepoolest, sellisel juhul nende suhe on 3:4:6. Kolmnurga iga kesklõik on paralleelne ühe küljega ja võrdub poolega sellest küljest, seetõttu kolmnurga KLM küljed on

$$1{,}5x;\quad 2x \quad \text{ja} \quad 3x.$$

Tingimuste kohaselt

$$1{,}5x + 2x + 3x = 5{,}2 \quad \text{ehk} \quad 6{,}5x = 5{,}2 \quad \text{ja} \quad x = 0{,}8.$$

Antud kolmnurga küljed on seega 2,4; 3,2 ja 4,8.

Vastus: 2,4; 3,2; 4,8.

13.4. Kui täisnurkse kolmnurga kaatetid on a ja b, kus $b > a$ ning hüpotenuus c, siis $b = a+10$ ja $c = a+20$. Pythagorase teoreemi järgi

$$a^2 + (a + 10)^2 = (a + 20)^2.$$

Siit saame ruutvõrrandi

$a^2 - 20a - 300 = 0$, millest $a_1 = -10$, $a_2 = 30$.

Lahend -10 ei sobi kolmnurga kaatetiks. Hüpotenuus on $30 + 20 = 50$ (cm).

Vastus: 50 cm.

13.5. Olgu ristküliku üks külg x, siis teine on $17 - x$, sest ristküliku kahe külje summa on 17. Pythagorase teoreemi järgi

$$(17 - x)^2 + x^2 = 13^2.$$

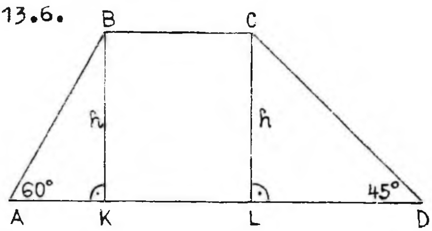
Siit saame võrrandi

$$x^2 - 17x + 60 = 0, \text{ millest } x_1 = 5, \quad x_2 = 12.$$

Ristküliku pindala on $12 \cdot 5 = 60$ (dm^2).

Vastus: 60 dm^2.

13.6.



Olgu trapetsi kõrgus h. Täisnurksest kolmnurgast ABK avaldame lõigu AK trapetsi kõrguse h kaudu. Kuna $\tan 60° = \frac{h}{AK}$, siis

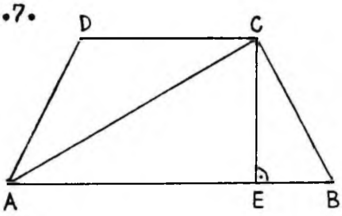
$$AK = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Võrdhaarses täisnurkses kolmnurgas CDL on $LD = h$. Et alus $AD = AK + KL + LD$, siis $\sqrt{3} + 6 = \frac{h}{\sqrt{3}} + 5 + h$, millest $h = \sqrt{3}$.

Trapetsi pindala $S = \frac{\sqrt{3} + 6 + 5}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3 + 11\sqrt{3}}{2}$ (cm^2).

Vastus: $\frac{3 + 11\sqrt{3}}{2}$ cm^2.

13.7.



Trapetsi pindala valemist $S = \frac{a + b}{2}\cdot h$

avaldame
$$h = \frac{2S}{a + b}.$$

Teades trapetsi pindala ja aluseid saame siit

$$h = \frac{2 \cdot 144}{12 + 20} = 9 \text{ (cm)}.$$

Kuna trapets on võrdhaarne, siis

$$EB = \frac{AB - DC}{2} = \frac{20 - 12}{2} = 4 \text{ (cm)} \quad \text{ja}$$

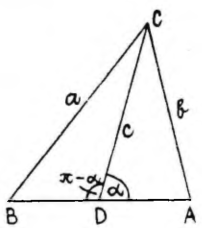
$$AE = AB - EB = 20 - 4 = 16 \text{ (cm)}.$$

Täisnurkses kolmnurgas ACE Pythagorase teoreemi järgi trapetsi diagonaal

$$AC = \sqrt{AE^2 + EC^2} = \sqrt{16^2 + 9^2} = \sqrt{337} \text{ (cm)}.$$

Vastus: $\sqrt{337}$ cm.

13.8.



Olgu kolmnurga küljed a, b ja c, siis eeldatavasti $AB = DC = c$.

Tähistame $\angle ADC = \alpha$ siis $\angle BDC = \pi - \alpha$.

Kolmnurgas ACD koosinusteoreemi põhjal

$$b^2 = c^2 + \frac{c^2}{4} - 2c\cdot \frac{c}{2}\cos = \frac{5c^2}{4} - c^2\cos\alpha.$$

Rakendades sama teoreemi kolmnurgas BCD saame

$$a^2 = c^2 + \frac{c^2}{4} - 2c\cdot \frac{c}{2}\cos(\pi - \alpha) = \frac{5c^2}{4} + c^2\cos\alpha.$$

Liites võrduste vastavad pooled leiame

$$a^2 + b^2 = 2\cdot \frac{5c^2}{4}, \qquad \text{millest}$$

$$c^2 = \frac{2}{5}(a^2 + b^2) \quad \text{ja} \quad c = \sqrt{\frac{2}{5}(a^2 + b^2)}.$$

Vastus: $\sqrt{\frac{2}{5}(a^2 + b^2)}$.

13.9. Olgu trapetsi alused a ja b ning kõrgus h. Trapetsi kõrgus jaotub kaheks võrdseks osaks. Ühe trapetsi pindala on

$$S_1 = \frac{10 + a}{2} \cdot \frac{h}{2},$$

teise trapetsi pindala

$$S_2 = \frac{10 + b}{2} \cdot \frac{h}{2}.$$

Ülesande sisule vastavalt

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{5}, \text{ s.o. } \frac{10 + a}{10 + b} = \frac{3}{5}$$

Arvestades trapetsi kesklõigu omadust, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{10 + a}{10 + b} = \dfrac{3}{5}, \\ \dfrac{a + b}{2} = 10. \end{cases}$$

Teisest võrrandist avaldame $b = 20 - a$. Asendades selle esimesse võrrandisse saame

$$50 + 5a = 30 + 60 - 3a, \text{ millest } a = 5 \text{ cm}.$$

Trapetsi teine alus $b = 20 - 5 = 15$ (cm).

Vastus: 5 cm ja 15 cm.

13.10. Olgu kolmnurga kõrgus h, siis alus on $h - 4$. Kasutades kolmnurga pindala valemit saame

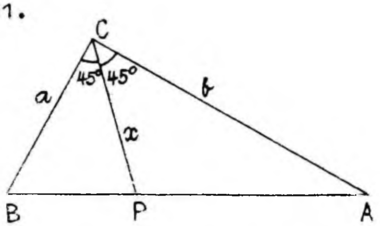
$$\frac{h(h - 4)}{2} = 96. \text{ Siit } h^2 - 4h - 192 = 0, \text{ millest}$$

$$h_1 = -12 \text{ (ei sobi) ja } h_2 = 16.$$

Järelikult kolmnurga kõrgus on 16 cm ja alus 12 cm.

Vastus: 12 cm ja 16 cm.

13.11.



Tähistame täisnurga poolitaja pikkuse tähega x. Jooniselt näeme, et

$$S_{ABC} = S_{BCP} + S_{CPA}.$$

Kasutades kolmnurga pindala avaldamiseks valemit kahe külje ja nende külgede vahelise nurga siinuse kaudu, võib kirjutada

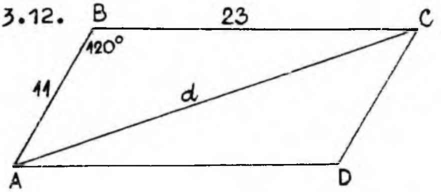
$$\frac{ab}{2} = \frac{ax \sin 45°}{2} + \frac{bx \sin 45°}{2} .$$

Seega

$$ab = (a \sin 45° + b \sin 45°)x, \text{ millest } x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} .$$

Vastus: $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

13.12.



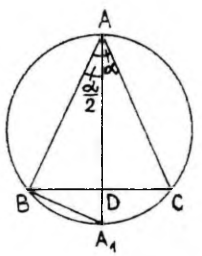
Rööpküliku diagonaali d avaldamiseks kasutame koosinusteoreemi, mille kohaselt

$$d^2 = 11^2 + 23^2 - 2 \cdot 23 \cdot 11 \cos 120°.$$

Siit $d^2 = 903$ ja $d = \sqrt{903}$.

Vastus: $d = \sqrt{903}$ cm.

13.13.



Olgu kolmnurga ümberringjoone raadius R. Ühendame võrdhaarse kolmnurga ABC tipust A tõmmatud kolmnurga ümberringjoone diameetri teise otspunkti A_1 tipuga B, siis nurk ABA_1 on täisnurk kui diameetrile toetuv piirdenurk. Täisnurksest kolmnurgast ABA_1 saame, et võrdhaarse kolmnurga haar

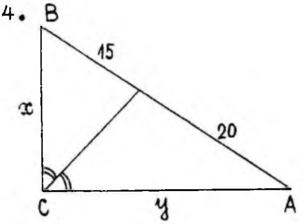
$$AB = 2R \cos \frac{\alpha}{2} .$$

Raadiuse avaldamiseks kasutame kolmnurga pindala valemit kahe külje ja nende vahelise nurga siinuse kaudu. Selle kohaselt

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2R \cos \frac{\alpha}{2} \sin \alpha , \text{ ehk}$$

$$S = 2R^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \alpha , \text{ millest } R = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S}{2 \sin}} .$$

Vastus: $\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{S}{2 \sin \alpha}}$.

13.14. 

Olgu täisnurkse kolmnurga kaatetid x ja y. Kolmnurga sisenurga poolitaja omaduse kohaselt võime kirjutada, et

$$\frac{x}{15} = \frac{y}{20}.$$

Täisnurkses kolmnurgas Pythagorase teoreemi järgi

$$x^2 + y^2 = 35^2.$$

Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1225, \\ \frac{x}{15} = \frac{y}{20} \end{cases}$$

leiame, et

$$\begin{cases} x = 21, \\ y = 28. \end{cases}$$

Kolmnurga ümbermõõt on $21 + 28 + 35 = 84$ (cm).

Vastus: 84 cm.

13.15. Olgu täisnurkse kolmnurga üks kaatet x, siis teine kaatet on $70 - 29 - x = 41 - x$. Pythagorase teoreemi kohaselt

$$(41 - x)^2 + x^2 = 29^2.$$

Selle võrrandi lahendid on $x_1 = 21$, $x_2 = 20$.

Kolmnurga pindala on $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$ (cm^2).

Vastus: 210 cm^2.

13.16. Kui rombi teravnurk on 60°, siis lühem diagonaal jaotab rombi kaheks võrdkülgseks kolmnurgaks, mille külg on 10 cm, seega ka rombi külg on 10 cm. Rombi pindala leiame kahe külje ja nende külgede vahelise nurga siinuse kaudu. Rombi pindala on seega

$$10^2 \sin 60° = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \quad (\text{cm}^2).$$

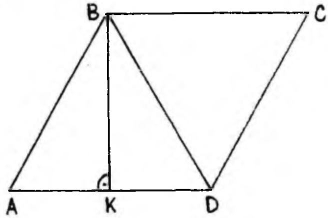
Vastus: $50\sqrt{3}$ cm^2.

13.17. Joonise järgi

$$AK = KD.$$

Seega kahe külje ja nende vahelise nurga võrdsuse tõttu

13.17.

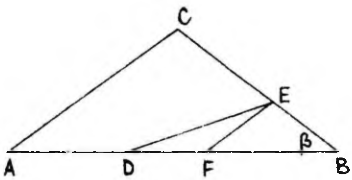


$\triangle AKB = \triangle DKB$.

Siit $AB = BD$ ning $\triangle ABD$ on võrdkülgne ja $\angle BAD = 60°$.
Rombi nurgad on 60° ja 120°.

Vastus: 60°; 120°.

13.18.



Kolmnurga ABC pindala on $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\beta$.
Ülesandes esitatud tingimuste kohaselt

$\frac{AD}{AB} = \alpha$, millest $AD = \alpha \cdot AB$ ja $\frac{BE}{BC} = \beta$,

$BE = \beta \cdot BC$.

Joonise järgi $AD + DB = AB$. Asendades siis AD avaldame DB AB kaudu, s.o.

$$\alpha \cdot AB + DB = AB, \quad DB = (1 - \alpha)AB.$$

Kolmnurgad BEF ja ABC on sarnased. Kuna sarnaste kolmnurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud, siis

$$\frac{S_{BEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BE}{BC}\right)^2 = \beta^2. \text{ Seega } S_{BEF} = \beta^2 \cdot S_{ABC}.$$

Kolmnurga BDE pindala

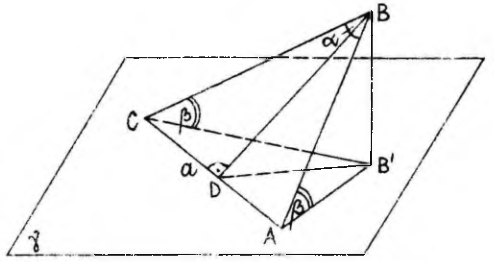
$$S_{BDE} = \frac{1}{2} BD \cdot BE \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha) \cdot AB \cdot \beta \cdot BC \sin\beta =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (1 - \alpha) \cdot \beta \cdot AB \cdot BC \sin\beta = (1 - \alpha) \cdot \beta \cdot S_{ABC}.$$

Leiame kolmnurkade BDE ja BEF pindalade suhte

$$\frac{S_{BDE}}{S_{BEF}} = \frac{(1 - \alpha) \cdot \beta \cdot S_{ABC}}{\beta^2 \cdot S_{ABC}} = \frac{1 - \alpha}{\beta}.$$

Vastus: $\frac{1 - \alpha}{\beta}$.

14.1.



Joonestame punktist B lõigu $BD \perp AC$ ja ühendame punktid D ja B', kus B' on punkti B projektsioon tasapinnal γ. Kolme ristsirge pöördteoreemi põhjal on $B'D \perp AC$. Täisnurksest kolmnurgast ABD saame, et

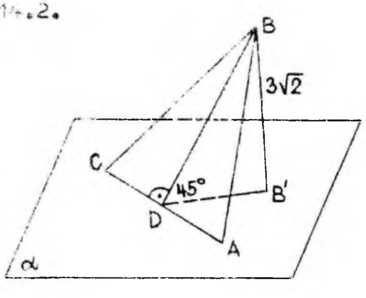
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{AD}{AB}. \quad \text{Seega} \quad AB = \frac{AD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Täisnurksest kolmnurgast ADB' saame, et

$$\sin\beta = \frac{BB'}{AB}, \text{ millest } BB' = AB\sin\beta = \frac{a\sin\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vastus: $\dfrac{a\sin\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

14.2.



Kolmnurga tasapinna ja tasandi α vahelise kahetahulise nurga joonnurk on $\angle BDB' = 45°$. Täisnurksest kolmnurgast BDB' saame

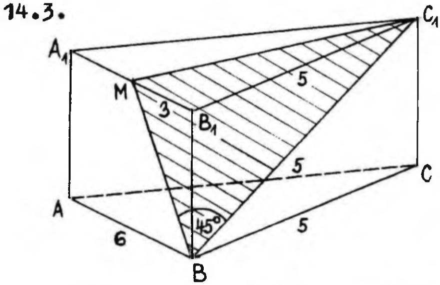
$$\sin 45° = \frac{3\sqrt{2}}{BD} \text{ ehk}$$

$$BD = 3\sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \text{(cm)}.$$

Kolmnurga ABC pindala on $\dfrac{6 \cdot 18}{2} = 54$ (cm^2).

Vastus: 54 cm^2.

14.3.



Joonestame punktist C_1 $MC_1 \perp A_1B_1$ ja ühendame punktid M ja B, sel juhul lõigu BC_1 ristprojektsioon külgtahul AA_1B_1B on lõik MB ning diagonaali BC_1 ja selle külgtahu vaheline nurk on $MBC_1 = 45°$.

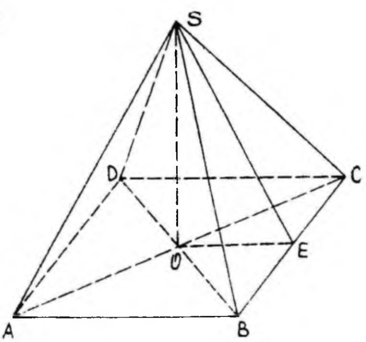
Täisnurksest kolmnurgast MB_1C_1 leiame Pythagorase teoreemi järgi, et $MC_1 = 4$ cm, järelikult ka $MB = 4$ cm. Täisnurksest kolmnurgast MBB_1 Pythagorase teoreemi järgi

$$BB_1^2 = 4^2 - 3^2 = 7, \quad BB_1 = \sqrt{7} \text{ cm.}$$

Prisma põhja pindala on $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ (cm^2) ja ruumala $V = 12\sqrt{7}$ cm^3.

Vastus: $12\sqrt{7}$ cm^3.

14.4.



Joonestame punktist S lõigu SE risti küljega BC ja ühendame punktid O ja E. Kolme ristsirge teoreemi pöördteoreemi põhjal on $OE \perp BC$. Järelikult $\angle$ SEO on külg- ja põhitahu vahelise kahetahulise nurga joonnurk, s.t. $\angle SEO = 60°$. Püramiidi apoteemi leiame täisnurksest kolmnurgast SOE.

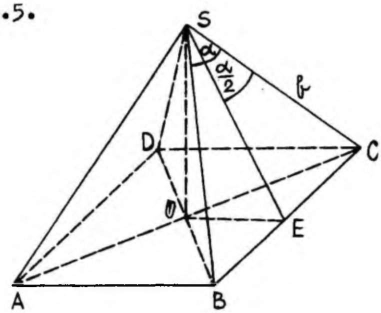
$$\text{Et} \quad \cos 60° = \frac{4}{SE}, \ \text{siis} \quad SE = 8 \text{ cm.}$$

Püramiidi külgpindala on $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 = 128$ (cm^2)

ja täispindala on $64 + 128 = 192$ (cm^2).

Vastus: 192 cm^2.

14.5.



Kuna on joonestatud $SE \perp BC$, siis kolme ristsirge pöördteoreemi kohaselt on $OE \perp BC$. Täisnurksest kolmnurgast SEC leiame, et

$SE = b \cos\frac{\alpha}{2}$ ja $EC = b \sin\frac{\alpha}{2}$.

Et $OE = EC$, siis täisnurksest kolmnurgast SOE saame püramiidi kõrguse

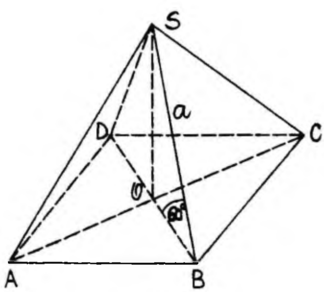
$$h = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = b\sqrt{\cos\alpha}.$$

Püramiidi ruumala avaldub valemiga

$$V = \frac{1}{3}S_p h = \frac{1}{3}\cdot(2b\sin\frac{\alpha}{2})^2 \cdot b\sqrt{\cos\alpha} = \frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Vastus: $\frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

14.6.



Külgserva SB projektsioon põhitahul on OB, järelikult $\angle SBO$ on külgserva ja põhja vaheline nurk s.o.

$\angle SBO = 60°$.

Kolmnurgast SOB saab arvutada OB ja SO.

Et $\cos 60° = \frac{OB}{a}$, siis $OB = \frac{a}{2}$, ning et $\sin 60° = \frac{SO}{a}$, siis $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

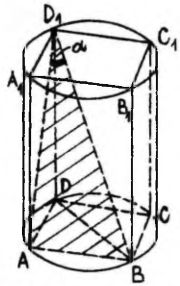
Püramiidi põhjaks oleva ruudu diagonaal on a. Et ruudu pindala võrdub poolega diagonaalide korrutisest, siis põhja pindala

$$S_p = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Püramiidi ruumala

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Vastus: $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

14.7. 

Täisnurksest kolmnurgast ADB saab leida silindri põhja raadiuse r, sest

$$(2r)^2 = a^2 + a^2.$$

Siit $4r^2 = 2a^2$ ja $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Korrapärase nelinurkse püstprisma põhiserv AB on risti külgtahuga AA_1D_1D, seega see põhiserv on risti iga sirgega sel külgtahul, s.t. $AB \perp AD_1$ ja $\triangle ABD_1$ on täisnurkne. Sellest täisnurksest kolmnurgast leiame

$$\tan\alpha = \frac{a}{AD_1}, \text{ s.t. } AD_1 = \frac{a}{\tan\alpha}.$$

Täisnurksest kolmnurgast ADD_1 leiame silindri kõrguse h. Et

$$DD_1^2 = AD_1^2 - AD^2, \text{ siis}$$

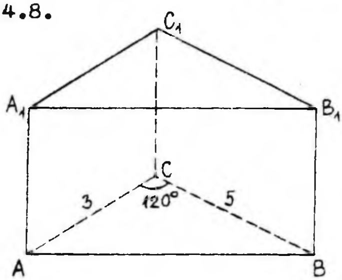
$$DD_1^2 = \frac{a^2}{\tan^2\alpha} - a^2 = \frac{a^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha} \quad \text{ning}$$

$$DD_1 = \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha} = h.$$

Silindri külgpindala on $S_k = 2\pi rh$, seega

$$S_k = 2\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\pi a^2\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Vastus: $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.

14.8. 

Kolmnurgast ABC leiame koosinusteoreemi kohaselt

$$AB^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos 120° =$$
$$= 9 + 25 + 30\cdot\frac{1}{2} = 49.$$

Seega AB = 7 cm.

Et suurima külgtahu pindala on 35 cm^2 ja põhiserv 7 cm, siis prisma kõrgus on 5 cm.

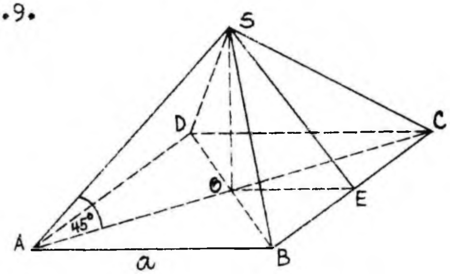
Prisma põhjaks oleva kolmnurga pindala saab leida kahe külje ja nende külgede vahelise nurga siinuse kaudu:

$$S_p = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5 \sin 120° = 7{,}5 \sin 60° = \frac{15}{4}\sqrt{3}\ (cm^3).$$

Prisma ruumala $V = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm^3.

Vastus: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm^3 .

14.9.



Külgserva AS projektsioon püramiidi põhjal on AO, seega külgserva ja põhja vaheline nurk SAO = 45°. Täisnurkses kolmnurgas ABC hüpotenuus AC= $= a\sqrt{2}$. Et kolmnurk ASC on võrdhaarne, siis $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ja püramiidi kõrgus $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Püramiidi ruumala $V = \frac{1}{3}S_p h$, $V = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Püramiidi täispindala avaldamiseks leiame apoteemi m kolmnurgast SOE:

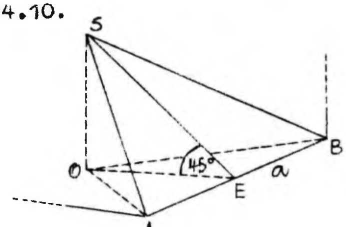
$$m = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Püramiidi täispindala

$$S_t = a^2 + \frac{1}{2}\cdot 4a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3} = a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(\sqrt{3} + 1).$$

Vastus: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$, $S_t = a^2(\sqrt{3} + 1)$.

14.10.



Joonisel vaatleme ühte osa korrapärasest kuusnurksest püramiidist. Kolmnurk AOB on võrdkülgne ja selle pindala on $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Püramiidi põhjapindala on seega $6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Võrdkülgse kolmnurga, mille külg on a, kõrgus on $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Et $OE = OS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ siis püramiidi apoteem

$$SE = \sqrt{OE^2 + OS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{6}.$$

Püramiidi külgpindala

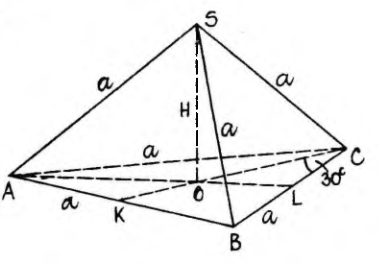
$$S_k = \frac{1}{2}\cdot 6a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{6} = \frac{3a^2\sqrt{6}}{2}$$

ja täispindala

$$S_t = S_p + S_k = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3a^2\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{2}).$$

Vastus: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{2})$.

14.11.



Olgu regulaarse tetraeedri serv a. Siis ühe tahu pindala

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast OLC leiame

$$\cos 30^\circ = LC : OC = \frac{a}{2} : OC.$$

Siit $OC = \frac{a}{2\cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Täisnurksest kolmnurgast SOC võib kirjutada, et

$$OS^2 + OC^2 = SC^2 \quad \text{ehk} \quad H^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = a^2.$$

Siit saame

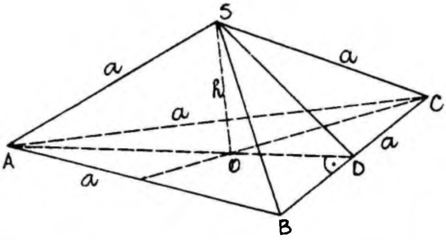
$$a^2 - \frac{a^2}{3} = H^2, \quad \frac{2}{3}a^2 = H^2, \quad a^2 = \frac{3H^2}{2}.$$

Asendades püramiidi ruumala valemis S ja a^2 saame

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3H^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot H = \frac{H^3\sqrt{3}}{8}.$$

Vastus: $V = \frac{H^3\sqrt{3}}{8}$.

14.12.



See püramiid on regulaarne tetraeeder, tema ühe tahu pindala $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ja ruumala $V = \frac{1}{3}\,\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\,h.$

Püramiidi kõrguse h saab avaldada täisnurksest kolmnurgast SOD, kus

$$SD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{ja} \quad OD = \frac{1}{3}\,AD = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Pythagorase teoreemi järgi $SO^2 = SD^2 - OD^2$ ehk

$$h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{2a^2}{3} \quad \text{Seega } h=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Püramiidi ruumala

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Täispindala on neljakordne ühe tahu pindala, s.o.

$$S = 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

Vastus: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, $S = a^2\sqrt{3}$.

14.13. Olgu silindri kõrgus h ja põhja raadius r, siis ülesandes esitatud tingimuste kohaselt

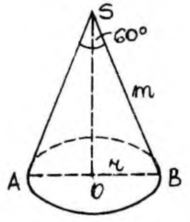
$$\begin{cases} 2\pi rh = \frac{\pi}{3}, \\ 2\pi r = \pi. \end{cases}$$

Süsteemi lahend $r = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{3}$.

Silindri ruumala $V = \pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi$.

Vastus: $\frac{1}{12}\pi m^3$.

14.14.

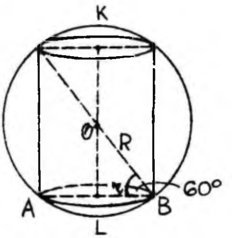


Olgu koonuse moodustaja m ja põhja raadius r. Siis koonuse põhja pindala $S_p = \pi r^2$ ja külgpindala $S_k = \pi rm$. Selle koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, kus $m = 2r$ ja nõutud suhe

$$\frac{S_k}{S_p} = \frac{\pi r \cdot 2r}{\pi r^2} = \frac{2}{1} = 2 : 1.$$

Vastus: 2: 1.

14.15.



Olgu silindri kõrgus H ja põhja raadius r. Täisnurksest kolmnurgast OLB saame:

$\sin 60° = \frac{OL}{R}$, $OL = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja

$\cos 60° = \frac{LB}{R}$, $LB = R \cos 60° = \frac{R}{2}$.

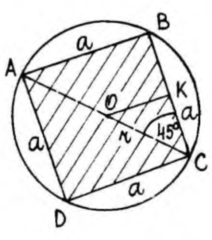
Silindri kõrgus $H = R\sqrt{3}$ ja põhja raadius $r = \frac{R}{2}$ ning silindri ruumala

$$V = \pi r^2 H = \pi \cdot \frac{R^2}{4} \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi R^3}{4}\sqrt{3}.$$

Ruumala arvuline väärtus on $V = 16\pi\sqrt{3}$ cm^3.

Vastus: $16\pi\sqrt{3}$ cm^3.

14.16.



Olgu silindri põhja raadius r ja kõrgus h. Siis silindri täispindala $S_t = 2\pi r(r + h)$.

Joonisel viirutatud kujund on kuubi põhi. Silindri kõrgus võrdub kuubi servaga, s.o. $h = a$. Silindri põhja raadiuse leiame täisnurksest kolmnurgast OKC.

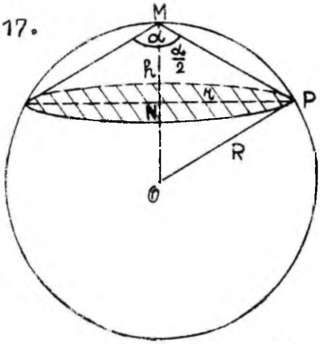
Et $\cos 45° = \frac{a}{2} : r$, siis $r = \frac{a}{2\cos 45°} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Silindri täispindala

$$S_t = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\right) = \pi a^2(\sqrt{2} + 1).$$

Vastus: $\pi a^2(\sqrt{2} + 1)$.

14.17.



Tähistame koonuse põhja raadiuse tähega r ja koonuse kõrguse h-ga. Ülesande tingimuste järgi $h = \frac{R}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast NOP saab avaldada põhja raadiuse r:

$$r^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4},$$

mistõttu $r = \frac{R}{2}\sqrt{3}$.

Koonuse ruumala $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{4}R^2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi R^3}{8}$.

Kui $R = 10$ cm, siis $V = 125$ cm^3.

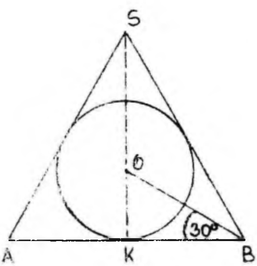
Olgu otsitav nurk α. Kolmnurgast MNP saame

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{h} = \frac{R}{2}\sqrt{3} : \frac{R}{2} = \sqrt{3}.$$

Seega $\frac{\alpha}{2} = 60°$ ja $\alpha = 120°$.

Vastus: $V = 125\pi$ cm^3, $\alpha = 120°$.

14.18.



Joonisel on kujutatud koonuse telglõige. Kera ruumala valemi järgi saab leida kera raadiuse R.

Et $8 = \frac{4}{3}\pi R^3$, siis $6 = \pi R^3$ ja $R = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$.

Koonuse põhja raadiuse $r = KB$ leiame täisnurksest kolmnurgast OKB seose $\tan 30° = \frac{OK}{KB}$ põhjal. Siit

$$KB = \frac{OK}{\tan 30°} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} : \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

Põhja raadiuse ruut $r^2 = 3\sqrt[3]{\frac{36}{\pi^2}}$.

Koonuse kõrguse h avaldame täisnurksest kolmnurgast SKB. Et $\tan 60° = \frac{SK}{KB}$, siis

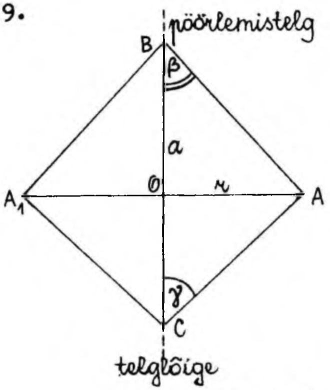
$$SK = KB\cdot\tan 60° = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}.$$

Koonuse ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3\sqrt[3]{\frac{36}{\pi^2}} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = 18 \ (cm^3).$$

Vastus: $18 \ cm^3$.

14.19.



Pöördkeha koosneb kahest koonusest, millede põhjad on koos. Olgu koonuse põhja raadius r. Siis pöördkeha ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot BO + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot OC =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 (BO + OC) = \frac{1}{3}\pi r^2 a.$$

Kolmnurgas ABC siinusteoreemi põhjal

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin[180^\circ - (\beta + \gamma)]},$$

sellest $AB = \dfrac{a \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$. Koonuse põhja raadiuse r avaldame täisnurksest kolmnurgast ABO seosega

$\sin\beta = \dfrac{r}{AB}$. Siit $r = AB \sin\beta = \dfrac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.

Asendades suuruse r^2 pöördkeha ruumala valemis,

saame $V = \dfrac{\pi a^3 \sin^2\beta \sin^2\gamma}{3 \sin^2(\beta + \gamma)}$.

Vastus: $\dfrac{\pi a^3 \sin^2\beta \sin^2\gamma}{3 \sin^2(\beta + \gamma)}$.

S I S U K O R D

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ТГУ.
Составители Эльви Мейдла, Эндель Мейдла.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja J. Lellep.
Paljundamisele antud 12.01.1987.
Formaat 60x84/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 4,65.
Arvestuspoognaid 4,25. Trükipoognaid 5,0.
Trükiarv 2500.
Tell. nr. 20.
Hind 15 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.

15 kop.