



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

KÕRGEM MATEMAATIKA

II

TARTU 1978

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Teoreetilise mehaanika kateeder

KÕRGEM MATEMAATIKA

Majandusteaduskonna üliõpilastele

II

L. Roots, K. Soonets, I. Vainikko

Tartu 1978

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 16. aprillil 1976

S a a t e k s

Käesolev õppevahend on mõeldud kasutamiseks esmajoonelises majandusteaduskonnas ning on jätkuks 1977. a. ilmunud J. Lellepi samanimelisele loengukonseptile.

Konseptis on vaatluse all mitme muutuja funktsioonid koos rakendustega empiiriliste valemite konstrueerimiseks ja lineaaralgebra elemendid: matriksid, determinandid, lineaarsed võrrandisüsteemid. Paragrahvide lõppu on lisatud küsimused enesekontrolliks. Suhteliselt suur arv näitülesandeid on toodud selleks, et õppija ei piirduks lahenduskäikude jälgimisega, vaid põhiliselt lahendaks neid ülesandeid iseseisvalt.

Autorid tänavad K. Velskerit asjalike nõuannete eest konsepti üksikpalade valikul ja vormistamisel.

Autorid

§1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste

Funktsionaalse sõltuvuse mõiste esineb matemaatikas kõikjal, kus on tegemist mitmesuguste muutuvate suuruste koosmuutumisega (s.t. muutumisega sõltuvalt üksteisest).

Kui näiteks mingis protsessis muutuvad seoses teineteisega kaks muutuvat suurust x ja y ning sealjuures niiviisi, et igale muutuva suuruse x kindlale väärtusele vastab üks (või mitu) teise muutuva suuruse y täiesti kindlat väärtust, siis ütleme, et need on omavahel funktsionaalses sõltuvuses, ehk: muutuv suuruse y on muutuva suuruse x funktsioon.

Tegelikkuses esineb aga ka selliseid nähtusi, kus muutuvad koos rohkem kui kaks suurust. Näiteks 1) Koonuse ruumala V sõltub tema kõrgusest h ja põhja raadiusest r , nende suuruste vahel on sõltuvus

$$V = \frac{1}{3} r^2 h.$$

2) Rentaablus R sõltub kasumist Π , mis saadakse kauba realiseerimisel, samuti aga ka põhi- ja käibefondide suurustest a ja b :

$$R = \frac{\Pi}{a + b}.$$

Neil juhtudel räägitakse mitme muutuja funktsioonidest. Nii on koonuse ruumala kahe muutuja funktsioon, mille argumentideks on põhja raadius r ja kõrgus h :

$$V = V(r, h),$$

rentaablus aga kolme muutuja Π , a ja b funktsioon R :

$$R = R(\Pi, a, b).$$

Defineerime kahe muutuja funktsiooni:

Kui igale muutuvate suuruste x ja y väärtuste paarile vastab üks (või mitu) täiesti kindlat muutuva suuruse z väärtust, siis öeldakse, et z on kahe muutuja x ja y funktsioon ning kirjutatakse

$$z = f(x, y) .$$

Kolme ning enama arvu muutujate funktsioonid defineeritakse täiesti analoogiliselt.

Kui argumentide väärtuste paarile $x = x_0, y = y_0$ vastav z väärtus on olemas, siis öeldakse, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on punktis (x_0, y_0) määratud: vastupidiisel juhul ta selles punktis määratud ei ole.

Kõigi niisuguste punktide hulka tasapinnal O_{xy} , milles z on määratud, nimetatakse selle funktsiooni määramispiirkonnaks. Näiteks funktsioon $z = 2x + 3y + 5$ on määratud kogu tasapinnal Oxy ; funktsiooni $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ määramispiirkonnaks on ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ sisse jääv ala, kaasa arvatud ka selle ringjoone enese punktid.

Nagu ühe muutuja funktsiooni, nii ka kahe muutuja funktsiooni võib esitada analüütiliselt ehk valemiga, tabeliga või graafiliselt. Kõige sagedamini esitatakse kahe muutuja funktsioon valemiga, mis näitab, milliseid tehteid tuleb sooritada argumentide väärtustega, et saada funktsiooni väärtust, mis nendele argumentide väärtustele vastab. Näiteks

$$z = xy .$$

Teades sõltuvust väljendavat valemit, saame, andes selles argumentidele vajalikud väärtused, neile vastava funktsiooni väärtuse arvutada. Kui näiteks $x = 3$ ja $y = 5$, siis $z = 3 \cdot 5 = 15$; kui $x = 2$ ja $y = 3,5$, siis $z = 7$.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ esitamisel tabeliga antakse lihtsalt tabeli kujul teatud arv kokkukuuluvaid argumentide ja funktsioonide väärtusi. Niisuguse tabeli üldkuju on järgmine:

$x \backslash y$	x_1	x_2	x_3
y_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_2, y_1)$	$f(x_3, y_1)$
y_2	$f(x_1, y_2)$	$f(x_2, y_2)$	$f(x_3, y_2)$
⋮
⋮

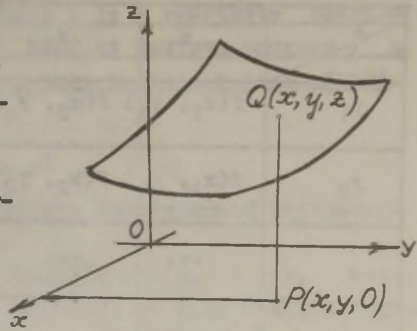
Toome ka ühe konkreetse näite:

$x \backslash y$	1	2	3	4	5
0,1	1,105	2,210	3,316	4,421	5,526
0,2	1,221	2,443	3,664	4,886	6,107
0,3	1,350	2,700	4,050	5,400	6,750
0,4	1,492	2,984	4,475	5,967	7,459
0,5	1,649	3,297	4,946	6,595	8,244

Sellest tabelist võime leida, et kui $x = 4$ ja $y = 0,3$, siis $z = 5,400$. Tabelist on aga võimalik leida ainult selles sisalduvate argumentide väärtustele vastavaid funktsiooni väärtusi.

Kahe muutuva funktsiooni graafiliseks esitamiseks vajame kolmemõõtmelises ruumis ristkoordinaadistikku $Oxyz$ (joon. 1).

Igale arvupaarile (x, y) vastab tasapinnal Oxy punkt $P(x, y, 0)$. Selles punktis tasapinnale Oxy tõmmatud rist-sirgel märgime punkti $Q(x, y, z)$, kus z on parajasti argumentide valitud väärtustele x ja y vastav funktsiooni väärtus. Niiviisi saadud punktid ruumis, mis vastavad kõikvõimalikele arvupaarile (x, y) , moodustavad



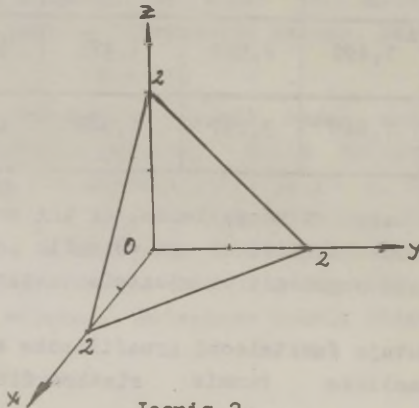
Joonis 1.

ruumis pinna. See pind ongi funktsiooni $z = f(x, y)$ geomeetriliseks vasteks; teda nimetatakse selle funktsiooni graafikuks.

Niisiis: funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks on niisugune pind, mille punktide aplikaadid sõltuvad abstsissidest ja ordinaatidest samuti nagu z väärtused oma argumentide väärtustest.

Funktsionaalset sõltuvust väljendav valem on ühtlasi funktsiooni graafikuks oleva pinna võrrandiks.

N ä i d e. Funktsiooni $z = 2 - x - y$ graafikuks on tasapind, mis läbib punkte $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ja $(0, 0, 2)$ (joon. 2).



Joonis 2.

2. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

Me ütleme, et punktide $P_n(x_n, y_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) jada läheneb punktile $P_0(x_0, y_0)$, kui indeksi n tõkestamatu kasvamisel punktide P_n ja P_0 vaheliste kauguste jada läheneb nullile. S.t. jada P_n läheneb P_0 -le, kui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

ehk, mis on seesama, kui x_n läheneb arvule x_0 , y_n aga arvule y_0 .

Defineerime. Arvu A nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks punkti (x, y) lähenemisel punktile (x_0, y_0) , kui iga punktide jada (x_n, y_n) korral, kus $n \rightarrow \infty$ läheneb punktile (x_0, y_0) , vastav funktsiooni väärtuste jada $f(x_n, y_n)$ läheneb arvule A .

Asjaolu, et arv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtus lähenemisel punktile $P_0(x_0, y_0)$, märgime kirjas järgmiselt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

ehk

$$f(x, y) \rightarrow A, \text{ kui } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) .$$

N ä i t e i d:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (2x^2 - y^2) = -2, \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5 - xy}{x^2 + y^2} = \frac{5}{1} = 5 .$$

Kahe muutuja funktsioonide piirväärtuste puhul kehtivad ühe muutuja funktsiooni piirväärtuste teooria põhilised laused.

1) Funktsioonide summa (vahe) piirväärtus võrdub nende funktsioonide piirväärtuste summaga (vastavalt - vahega).
S.t. et kui $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ puhul $f(x, y) \rightarrow A$ ja $g(x, y) \rightarrow B$,

siis

$$f(x, y) + g(x, y) \rightarrow A + B,$$

$$f(x, y) - g(x, y) \rightarrow A - B.$$

2) Funktsioonide korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega. S.t. et $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ puhul $f(x, y) \rightarrow A$ ja $g(x, y) \rightarrow B$, siis

$$f(x, y) g(x, y) \rightarrow AB.$$

3) Kahe funktsiooni jagatise piirväärtus võrdub nende funktsioonide piirväärtuste jagatisega tingimusel, et jaja ja piirväärtus pole null. S.t. et kui $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ puhul $f(x, y) \rightarrow A$ ja $g(x, y) \rightarrow B \neq 0$, siis

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \rightarrow \frac{A}{B}.$$

Kahe muutuja funktsiooni pidevus defineeritakse samuti analoogiliselt ühe muutuja funktsiooni pidevusega.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse pidevaks punktis (x_0, y_0) , kui ta on selles punktis määratud ning

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

$$x \rightarrow x_0$$

$$y \rightarrow y_0$$

s.t. kui funktsiooni väärtus punktis (x_0, y_0) võrdub tema piirväärtusega lähenemisel sellele punktile.

N ä i t e i d:

1) Funktsioon $z = x + y$ on pidev kõikjal, s.t. O_{xy} -tasapinna kõigis punktides. Tõepoolest, missugused arvud ka oleksid x_0 ja y_0 , ikka on

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} (x + y) = x_0 + y_0,$$

$$x \rightarrow x_0$$

$$y \rightarrow y_0$$

mis on ka funktsiooni väärtuseks punktis (x_0, y_0) .

2) Funktsioon $z = \frac{1 - xy}{x^2 + y^2}$ on pidev punktis $x = 0$,

$$y = 1, \text{ sest } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{1 - xy}{x^2 + y^2} = 1 = f(0, 1) .$$

Näiteks punktis $x = 0, y = 0$ aga see funktsioon pidev ei ole.

Funktsioonide korral, mille argumentide arv on suurem kui kaks, mõistetakse piirväärtust ja pidevust täiesti analoogiliselt eelnevaga.

3. Osatuletised

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Lähtume tema argumentide suvalistest väärtustest x, y . Jätame y väärtuse muutumatuks, x -le aga anname juurdekasvu Δx . Siis funktsioon z saab juurdekasvu

$$\Delta z_x = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

(indeks x osutab sellele, et juurdekasvu põhjuseks on ainult ühe argumenti, nimelt x , muutumine).

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} ,$$

siis seda nimetatakse funktsiooni z esimest järku osatuletiseks x järgi ja tähistatakse $\frac{\partial z}{\partial x}$ [või $f'_x(x, y)$ või ka lihtsalt z'_x].

Analoogiliselt defineeritakse esimest järku osatuletis y järgi:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

[tähistatakse ka $f'_y(x, y), z'_y$].

Kuna osatuletised on defineeritud täiesti analoogiliselt ühe muutuja funktsiooni tuletisega - ühe argumenti

väärtuse muutumatuna hoidmisel z ongi ju ainult ühe muutuja funktsioon, siis

1) osatuletist ühe argumendi järgi arvutame nagu ühe muutuja funktsiooni tuletist, lugedes teise argumendi konstandiks;

2) osatuletiste arvutamisel võime kasutada kõiki ühe muutuja funktsiooni tuletiste jaoks tõestatud reegleid, valemmeid ja lauseid.

N ä i t e d.

1) Leida funktsiooni $z = x^2y - 2\ln y + 4x + 5$ osatuletised.

Osatuletise arvutamisel x järgi loeme y konstandiks; saame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 4 .$$

Defineerimisel y järgi loeme aga x konstandiks; seega

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{2}{y} .$$

2) Leida funktsiooni $z = \frac{xy}{x+y}$ osatuletiste väärtused punktis $(2, 3)$.

Kõigepealt leiame osatuletiste üldavaldised:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)y - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2} ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x+y)x - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2} .$$

Seejärel asetame saadud valemitesse antud punkti koordinaadid; nii leiame, et

$$f'_x(2, 3) = \frac{3^2}{(2+3)^2} = \frac{9}{25} ,$$

$$f'_y(2, 3) = \frac{4}{25} .$$

Leides osatuletised osatuletistest, saame teist järku osatuletised. Neid tähistatakse järgmiselt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (\text{või ka } z''_{xx}, f''_{xx}(x, y)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (\text{või } z''_{xy}, \text{ või } f''_{xy}(x, y)) \text{ jne.}$$

N ä i d e. Leida funktsiooni

$$z = x^4 - 5x^2y^2 + 6xy + 7$$

teist järku osatuletised.

Esimest järku osatuletised on

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 6y ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -10x^2y + 6x .$$

Diferentseerides neid veel kord, saame teist järku osatuletised:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2 ;$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -20xy + 6$ (enne diferentseeritud x , siis y järgi);

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -20xy + 6 \text{ (enne } y, \text{ siis } x \text{ järgi);}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10x^2 .$$

Osatuletisi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} , \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

nimetatakse funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku segatuletisteks. Nad on võrdsed pideva funktsiooni z korral, s.t.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} .$$

Eelnevas näites nägimegi, et see on nii.

Teist järku osatuletisi diferentseerides saame kolmandat järku osatuletised jne., jne.

N ä i d e. Leida funktsiooni $z = x^4 - 5x^2y^2 + 3xy^3$ kolmandat järku osatuletis $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 3y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -20y.$$

Diferentseerimise järjekord ei ole ka siin oluline (võib näiteks alguses diferentseerida y järgi, siis kaks korda x järgi).

Rohkem kui kahe muutuja funktsioonide korral defineeritakse osatuletised analoogiliselt. Segatuletiste võrdus kehtib ka siin.

N ä i d e. Leida funktsiooni $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 2x_1x_2 - x_2^2x_3^2$ esimest järku osatuletised.

Leiame, lugedes x_1 järgi diferentseerimisel x_2 ja x_3 konstantseteks,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 2x_2;$$

analoogiliselt

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_1 - 2x_2x_3^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = -2x_2^2x_3.$$

4. Täisdiferentsiaal

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Eeldame, et see funktsioon on pidev; samuti olgu pidevad tema esimest järku osatuletised.

Lähtume argumentide suvalistest väärtustest x, y . Kui

neile anda juurdekasvud Δx , Δy , siis funktsioon saab juurdekasvu

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) .$$

Sealjuures pideva funktsiooni korral argumentide juurdekasvude tõkestamatul lähenemisel nullile Δz on tõkestamatult ka hanev,

kui $\Delta x \rightarrow 0$ ja $\Delta y \rightarrow 0$, siis $\Delta z \rightarrow 0$.

Teisendame funktsiooni juurdekasvu Δz avaldist:

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] .$$

Nüüd on mõlemates nurksulgudes sisuliselt ühe muutuja funktsioonid. Rakendame neile ühe muutuja funktsioonide teooriast tuntud Lagrange'i keskväärtuse lauset; selle kohaselt

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) &= \\ &= f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x, \\ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) &= f'_y(x, y + \theta_1 \Delta y) \Delta y , \end{aligned}$$

kus

$$0 < \theta_1 < 1 , \quad 0 < \theta_2 < 1 .$$

Et eelduse kohaselt esimest järku osatuletised on pidevad, siis

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y)$$

ja

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f'_y(x, y + \Delta y) = f'_y(x, y)$$

ning järelikult

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1$$

ja

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2 ,$$

kus $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ja $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, kui $\Delta x \rightarrow 0$ ja $\Delta y \rightarrow 0$.

Seega funktsiooni juurdekasv

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y .$$

Ilmselt on siin kaks viimast liidetavat argumentide ja juur-

dekasvude lähenemisel nullile kõrgemat järku väikesed suurused võrreldes kahe esimese liidetavaga. Seega kujutab avaldis

$$f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

endast funktsiooni juurdekasvu Δz peassa argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel.

Defineerime. Kahe muutuja funktsiooni juurdekasvu peassa argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel nimetatakse selle funktsiooni täisdiferentsiaaliks.

Täisdiferentsiaali tähistatakse sümboliga dz , Eelnevast järeldub, et

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Argumentide juurdekasve nimetatakse enamikul juhtudel argumentide diferentsiaalideks ning tähistatakse dx , dy :

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy.$$

Seega

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

N ä i d e. Leida funktsiooni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ täisdiferentsiaal. Leiame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Seega

$$dz = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali võib kasutada funktsiooni juurdekasvu ligikaudseks arvutamiseks; selle juures loetakse funktsiooni juurdekasv Δz ligikaudu võrdseks täisdiferentsiaaliga dz . Niisugune talitusviis on lubatav loomulikult ainult siis, kui argumentide juurdekasvud on väikesed.

N ä i d e. Olgu koonuse kõrgus $h = 30$ cm, põhja raadius $r = 10$ cm. Kui palju suureneb koonuse ruumala, kui tema kõrgust suurendada 3 mm võrra, põhja raadiust aga vähendada 1 mm võrra.

Koonuse ruumala

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

on kahe muutuja r ja h funktsioon.

Leiame osatuletised:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3} ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi}{3} r^2 ;$$

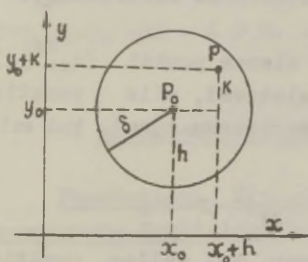
võttes $\Delta V \approx dV$, leiame, et koonuse ruumala muut

$$\begin{aligned} \Delta V &\approx \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi}{3} r^2 dh = \\ &= \frac{\pi}{3} (2r h dr + r^2 dh) = \frac{\pi}{3} (2 \cdot 10 \cdot 30 (-0,1) + 100 \cdot 0,3) = \\ &= -10\pi \approx -31,4 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Märk "miinus" viitab sellele, et võrreldes esialgsuga ruumala väheneb.

5. Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumid

Vaatleme mingit ringi keskpunktiga $P_0(x_0, y_0)$ ja raadiusega $\delta > 0$. Selle ringi sisepunktide hulka nimetatakse punkti P_0 ümbruseks raadiusega δ ehk δ -ümbruseks. Punkt $P(x_0 + h, y_0 + k)$ kuulub punkti $P_0(x_0, y_0)$ δ -ümbrusesse siis ja ainult siis, kui $h^2 + k^2 < \delta^2$ (joon.3).



Joon. 3.

Üeldakse, et funktsioonil $z = f(x, y)$ on maksimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti (küllalt väike) ümbrus, mille punktides

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

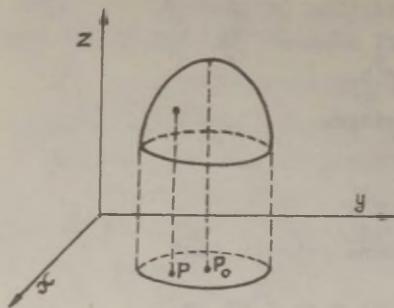
(vt. joon.4).

Analoogiliselt üeldakse, et funktsioonil $z = f(x, y)$ on miinimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti (küllalt väike)

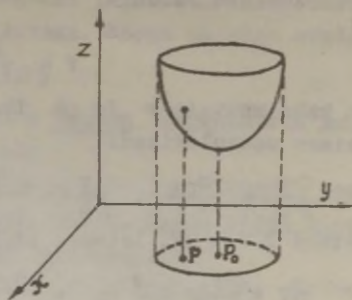
ümbrus, mille punktides

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

(vt. joon. 5).



Joon. 4.



Joon. 5.

Kuidas leida funktsiooni ekstreemumeid? Osutub, et kui funktsioonil $f(x, y)$ on punktis (x_0, y_0) ekstreemum, siis

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Tõepoolest, kui kahe muutuja funktsioonil $f(x, y)$ on punktis (x_0, y_0) ekstreemum, siis ka ühe muutuja funktsioonil $F(x, y_0)$ on punktis $x = x_0$ ekstreemum ja järelikult tema tuletis argumenti x järgi on võrdne nulliga. Samuti peab ekstreemumpunktis olema null ka osatuletis argumenti y järgi.

Osutub aga, et tingimused $f'_x(x, y) = 0$ ja $f'_y(x, y) = 0$ ei ole piisavad ekstreemumi olemasoluks. Näiteks funktsiooni $z = xy$ osatuletised punktis $x = 0, y = 0$ on võrdsed nulliga, kuid antud punktis ei ole sellel funktsioonil ekstreemumit.

Võib tõestada järgmise teoreemi.

Kui funktsioonil $z = f(x, y)$ on olemas punkti (x_0, y_0) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis (x_0, y_0) , kus $f'_x = 0, f'_y = 0$, on ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$W(x, y) = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0;$$

sealjuures on punktis (x_0, y_0) maksimum, kui selles punktis $f''_{xx} < 0$, ja miinimum, kui $f''_{xx} > 0$.

Kui $W(x, y) < 0$, siis funktsioon $f(x, y)$ selles punktis ekstreemumit ei oma. Kui aga $W = 0$, siis tuleb funktsi-

ooni käitumist lähemalt uurida. Suurust $W(x, y)$ nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ diskriminandiks.

N ä i d e. Leida funktsiooni $z = 3x + 24y - x^3 - 2y^3$ ekstreemumpunktid.

$$\text{Leiame } f'_x = 3 - 3x^2, f'_y = 24 - 6y^2.$$

Tarvilik tingimus ekstreemumi olemasoluks punktis (x_0, y_0) on

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

ehk antud juhul

$$3 - 3x^2 = 0, \quad 24 - 6y^2 = 0.$$

Lahendades selle süsteemi, saame neli punkti, kus võiks olla ekstreemum: $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(1, -2)$ ja $(-1, 2)$. Arvutame välja diskriminandi

$$f''_{xx} = -6x, \quad f''_{yy} = -12y, \quad f''_{xy} = 0;$$

$$W = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = (-6x)(-12y) = 72xy.$$

Leiame diskriminandi saadud punktides:

$$W(1, 2) = 144 \quad W(-1, -2) = 144,$$

$$W(1, -2) = -144, \quad W(-1, 2) = -144.$$

Osutub, et punktides $(1, -2)$, $(-1, 2)$ ekstreemumit pole, sest nende punktide korral $W < 0$.

Antud juhul on ekstreemumpunktideks punktid $(1, 2)$ ja $(-1, -2)$, kusjuures punktis $(1, 2)$ on maksimum, sest $f''_{xx}(1, 2) = -6 < 0$ ja punktis $(-1, -2)$ miinimum, kuna $f''_{xx}(-1, -2) = 6 > 0$.

6. Homogeensed funktsioonid

Funktsiooni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nimetatakse k-järku homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib võrdus

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

kõikide x_1, x_2, \dots, x_n väärtuste ja iga t väärtuse korral.

N ä i t e i d. 1) Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y) = ax + by$$

Kui t on meelevaldne arv, siis

$$f(tx, ty) = atx + bty = t(ax + by) = tf(x, y).$$

Järelikult antud funktsioon on esimest järku homogeenne funktsioon.

2) Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Kui t on meelevaldne arv, siis

$$f(tx, ty, tz) = (tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 + t^2z^2 = t^2(x^2 + y^2 + z^2) = t^2f(x, y, z).$$

Järelikult see funktsioon on teist järku homogeenne funktsioon.

3) Vaatleme funktsiooni

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^4 - y^4}.$$

Meelevaldse arvu t puhul kehtib

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \frac{tx + ty}{t^4x^4 - t^4y^4} = \frac{x + y}{t^3(x^4 - y^4)} = \\ &= \left(\frac{1}{t}\right)^3 \frac{x + y}{x^4 - y^4} = t^{-3} f(x, y). \end{aligned}$$

Järelikult antud funktsiooni homogeensuse järk on -3 . Kehtib järgmine teoreem (Euleri teoreem).

Kui funktsioon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on k -järku homogeenne funktsioon, siis

$$x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \dots + x_n f'_{x_n} = kf(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

N ä i t e i d. 4) Funktsioon $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ on teist järku homogeenne funktsioon. Siin

$$f'_x = 2x, f'_y = 2y, f'_z = 2z,$$

millest

$$\begin{aligned} x f'_x + y f'_y + z f'_z &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= 2f(x, y, z). \end{aligned}$$

5) Funktsiooni $f(x, y) = \frac{x}{y}$ on 0. järku homogeenne funktsioon.

$f'_x = \frac{1}{y}$, $f'_y = -\frac{x}{y^2}$,
järelikult

$$xf'_x + yf'_y = \frac{x}{y} - \frac{x}{y} = 0 = 0. \quad f(x, y).$$

6) Funktsioon

$f(x, y) = \frac{x+y}{x^4 - y^4}$ on (-3). järku homogeenne funktsioon. Järelikult

$$xf'_x + yf'_y = -3 \frac{x+y}{x^4 - y^4}.$$

7. Empiiriliste valemite leidmine vähimruutude meetodil

Loodusteaduses, tehnikas, ökonomikas kohtame tihti empiirilisi valemid, s.o. valemid, mis on koostatud katsetulemuste põhjal. Üheks kõige enam kasutatavaks võtteks selliste valemite leidmiseks on vähimruutude meetod. Esitame selle meetodi idee.

Olgu tarvis leida seos suuruste x ja y vahel. Katse või vaatluse tulemusena oleme saanud suuruse x väärtustele vastavad suuruse y väärtused, mis on esitatud tabeli kujul

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Tahame nende suuruste vahelist seost kirjutada ligikaudse (empiirilise) valemi kujul $y = f(x)$. Vähimruutude meetodi idee seisneb selles, et parimaks valemiks, mis esitab katsetel saadud sõltuvust, peetakse seda, mille puhul katsel saadud väärtuste ja valemi järgi arvutatud väärtuste vahede ruutude summa on vähim. Antud meetodi puhul tuleb kõige enne anda ette funktsiooni $y = f(x)$ kuju, milles esinevate parameetrite leidmiseks kasutame vähimruutude meetodit. Kui teoreetiliste kaalutluste põhjal ei ole võimalik teha mitte min-

gisuguseid oletusi, milline selle funktsiooni kuju olema peaks, siis on otstarbekohane kanda saadud katseandmed joonisele. Selleks kanname Oxy-tasandile punktid (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ... (x_n, y_n) . Kui graafikult on näha, et need punktid on grupeerunud teatud sirge lähedale, siis võib eeldada, et suuruste x ja y vahel on lineaarne sõltuvus, mis on esitatav valemiga

$$y = ax + b,$$

kus kordajad a ja b on otsitavad parameetrid. Kui graafikult on näha, et punktid on grupeerunud mingi kõvera ümbruses, siis võib suuruste y ja x vahel olla näiteks ruutsõltuvus

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kus parameetrid a , b , c leiame vähimruutude meetodil. Võib esineda ka juht, kus suuruste y ja x vaheline sõltuvus on esitatav eksponentfunktsioonina

$$y = ab^x,$$

kus a ja b on otsitavad parameetrid.

1) Olgu empiiriline valem kujul $y = ax + b$. Leiame a ja b (parameetrid) tingimusest, et see sirge tuleb tõmmata nii, et empiiriliselt saadud punktide ordinaatide ja samadele abtsissidele vastavate sirge punktide ordinaatide vahede ruutude summa oleks minimaalne, s.t. suurus

$$u = [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \dots + [y_n - (ax_n + b)]^2$$

oleks minimaalne. Saadud summat võib vaadelda kui kahe muutuja a ja b funktsiooni, sest x_k ja y_k on antud suurused. Nüüd tuleb leida selle funktsiooni $u = u(a, b)$ miinimum. Kahe muutuja funktsiooni miinimumi tarvilik tingimus on mõlema esimest järku osatuletise võrdumine nulliga, s.t.

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0.$$

Leiame need osatuletised:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -2[y_1 - (ax_1 + b)] \cdot (-x_1) + 2[y_2 - (ax_2 + b)] \cdot (-x_2) + \dots + 2[y_n - (ax_n + b)] \cdot (-x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -2[y_1 - (ax_1 + b)] - 2[y_2 - (ax_2 + b)] - \dots - 2[y_n - (ax_n + b)].$$

Võrrutades saadud tulemused 0-ga ja jagades kahega, saame a ja b leidmiseks kaks lineaarset võrrandit kahe tundmatuga:

$$(ax_1 + b - y_1)x_1 + \dots + (ax_n + b - y_n)x_n = 0,$$

$$(ax_1 + b - y_1) + \dots + (ax_n + b - y_n) = 0.$$

Pärast lihtsustamist võib selle võrrandsüsteemi kirjutada kujul:

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = x_1y_1 + y_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

$$a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nb = y_1 + y_2 + \dots + y_n;$$

ehk

$$a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Saadud süsteemi nimetatakse ka normaalvõrrandite süsteemiks. Siit leiame a ja b väärtused ning asetame need empirilisse valemisse $y = ax + b$.

2) Olgu x ja y vaheline seos niisugune, mille kirjeldamiseks näib sobivat ruutsõltuvust

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Kordajad a, b, c määrame siis vähimruutude meetodil järgmiselt. Suurus u on praegusel juhul järgmine:

$$u = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)]^2;$$

tema osatuletised

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2 \left[y_i - (ax_1^2 + bx_1 + c) \right] (-x_1^2) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2 \left[y_i - (ax_1^2 + bx_1 + c) \right] (-x_1) ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \sum_{i=1}^n 2 \left[y_i - (ax_1^2 + bx_1 + c) \right] (-1) .$$

Funktsiooni u miinimumi tarvilikud tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 0 ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = 0$$

annavad pärast lihtsustamist a, b ja c jaoks lineaarse võrandsüsteemi

$$a \sum_{i=1}^n x_1^4 + b \sum_{i=1}^n x_1^3 + c \sum_{i=1}^n x_1^2 = \sum_{i=1}^n x_1^2 y_1 ,$$

$$a \sum_{i=1}^n x_1^3 + b \sum_{i=1}^n x_1^2 + c \sum_{i=1}^n x_1 = \sum_{i=1}^n x_1 y_1$$

$$a \sum_{i=1}^n x_1^2 + b \sum_{i=1}^n x_1 + cn = \sum_{i=1}^n y_1 .$$

3) Kui on alust eeldada x ja y vahel eksponentsiaalset sõltuvust, otsime seda kujul

$$y = ab^x$$

Logaritmime seda funktsiooni:

$$\log y = x \log b + \log a .$$

Siit on näha, et log y sõltub argumentidest x lineaarselt, kusjuures log b ja log a võime vaadelda parameetritena, mis tuleb sobivalt määrata. Nende parameetrite leidmiseks kasutame

jälle vähimruutude meetodit. Antud juhul on

$$u = \sum_{i=1}^n (x_i \log b + \log a - \log y_i)^2 ;$$

tema miinimumi tarvilikud tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial (\log a)} = 0 , \quad \frac{\partial u}{\partial (\log b)} = 0$$

(diferentseerimine toimub $\log a$ ja $\log b$ järgi).

Need tingimused annavad $\log a$ ja $\log b$ jaoks võrrandüsteemi, mis oma ehituselt on analoogiline juhul 1 saadud süsteemiga:

$$\log b \sum_{i=1}^n x_i^2 + \log a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \log y_i,$$

$$\log b \sum_{i=1}^n x_i + n \log a = \sum_{i=1}^n \log y_i.$$

Selle süsteemi lahendamisel saadud parameetrite $\log a$ ja $\log b$ järgi leiame logaritmade tabelitest a ja b .

N ä i t e i d: 1) Nelja aasta jooksul on suurused x ja y omandanud järgmised väärtused:

Aasta	1	2	3	4
x_i	-3	-1	1	3
y_i	1	2	2	3

Leida sirge võrrand, mis väljendaks võimalikult hästi suuruse y sõltuvust suurusest x .

Lahendamisel on otstarbekohane kasutada järgnevat tabelit:

Aasta	x_i	y_i	xy_i	x_i^2
1	-3	1	-3	9
2	-1	2	-2	1
3	1	2	2	1
4	3	3	9	9
Summa	0	8	6	20

Tabelist on näha, et

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i = 8, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i = 6, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 20.$$

Järelikult saame a ja b määramiseks süsteemi

$$a \cdot 20 + b \cdot 0 = 6,$$

$$a \cdot 0 + b \cdot 4 = 8,$$

millest $a = 0,3$ ja $b = 2$. Otsitava sirge võrrand on

$$y = 0,3x + 2.$$

2) Kasutades vähimruutude meetodit, määrata funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ kordajate väärtused nii, et ta võimalikult hästi kirjeldaks järgmise tabeliga esitatud sõltuvust;

x_1	0,5	1	1,5	2	2,5
y_1	0,8	1,9	4,9	8,8	13,9

Nõutavate summade leidmiseks koostame tabeli

i	x_1	y_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
1	0,5	0,8	0,25	0,125	0,0625	0,4	0,2
2	1,0	1,9	1,0	1,0	1,0	1,9	1,9
3	1,5	4,9	2,25	3,375	5,0625	7,35	11,025
4	2,0	8,8	4,0	8,0	16,0	17,6	35,2
5	2,5	13,9	6,25	15,625	39,0625	34,75	86,875
Σ	7,5	30,3	13,75	28,125	61,1875	62,0	135,2

Saame järgmise süsteemi kordajate a , b , c määramiseks:

$$61,1875a + 28,125b + 13,75c = 135,2,$$

$$28,125a + 13,75b + 7,5c = 62,0,$$

$$13,75a + 7,5b + 5c = 30,3$$

Selle süsteemi lahendamisel leiame, et $a = 2,54$, $b = -1$ ja $c = 0,575$.

3) Leida eksponentsiaalne sõltuvus $y = ab^x$, mis väljen-

daks võimalikult hästi järgmise tabeliga esitatud sõltuvust:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	45,5	48,5	55,8	65,7	86	96,3	105

Koostame tabeli

x_i	y_i	$\log y_i$	$x_i \log y_i$	x_i^2
0	45,5	1,6580	0,0000	0
1	48,5	1,6857	1,6857	1
2	55,8	1,7466	3,4932	4
3	65,7	1,8176	5,4528	9
4	86,0	1,9345	7,7380	16
5	96,3	1,9836	9,9180	25
6	106,0	2,0212	12,1272	36
$\sum x_i = 21$		$\sum \log y_i = 12,8472$	$\sum x_i \log y_i = 40,4149$	$\sum x_i^2 = 91$

Vastavalt eeltoodule saame a ning b jaoks võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} 91 \log b + 21 \log a &= 40,4149, \\ 21 \log b + 7 \log a &= 12,8472. \end{aligned}$$

Sellest

$$\log a = 1,6346, \quad \log b = 0,0669$$

ning järelikult

$$a = 43,1 \quad \text{ja} \quad b = 1,167.$$

Otsitav seos on seega

$$y = 43,1 \cdot 1,167^x.$$

K o n t r o l l k ü s i m u s e d

1. Defineerige kahe muutuja funktsioon. Mis on selles analoogilist ja uut ühe muutuja funktsiooni definitsiooniga võrreldes?

2. Mis on kahe muutuja funktsiooni graafikuks?
3. Defineerige kahe muutuja funktsiooni piirväärtus.
4. Esitage pidevuse definitsioon funktsiooni juurdekasvu abil. Kuidas pidevust geomeetriliselt tõlgendada?
5. Defineerige osatuletis ühe argumendi järgi. Mitme muutuja funktsioon on kahe muutuja funktsiooni osatuletis ühe argumendi järgi?
6. Kuidas defineeritakse kõrgemat järku osatuletised?
7. Mis on täisdiferentsiaal? Kirjutage üles kolme muutuja funktsiooni $f(x,y,z)$ täisdiferentsiaal.
8. Defineerige tasandi punkti ümbrus.
9. Tõlgendage kahe muutuja ekstreemumeid geomeetriliselt.
10. Millised on ekstreemumi tarvilikud tingimused?
11. Kuidas määratakse kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi olemasolu ja iseloomu funktsiooni diskriminandi abil?
12. Andke homogeense funktsiooni definitsioon. Tooge näiteid.
13. Veenduge funktsiooni $f(x,y) = x^3 - 5x^2y + 2y^3$ korral Euleri teoreemi täidetuses.
14. Mida mõistetakse empiirilise valemi all? Milles seisneb vähimruutude meetodi idee empiirilise valemi konstrueerimisel?
15. Tuletage normaalvõrrandite süsteem funktsiooni ab^x parameetrite leidmiseks.

§ 2. MAATRIKSID JA DETERMINANDID

1. Vektorid n-mõõtmelises ruumis

Varemast teame, et igale ruumpunktile vastab kohavektor ning punkti koordinaadid ühtivad kohavektori koordinaatidega. Kohavektori koordinaatide arv on võrdne vektorbaasi moodustavate baasivektorite arvuga. Sirgel asuval vektoril on üks, tasandil asuval vektoril kaks ja ruumis asuval vektoril kolm koordinaati - niisama palju kui baasivektoreid. Öeldakse, et vektorbaas määrab sirgel ühemõõtmelise, tasandil kahemõõtmelise ja ruumis kolmemõõtmelise vektorruumi. Koha-

vektorite lõpp-punktidel on ka vastavalt üks, kaks või kolm koordinaati, s. t. igaüks neist kuulub vastavamõõtmelisse ruumi. Seega on igal vektorbaasil vabavektorite hulk üksüheses vastavuses vektorruumi punktidega ja seega arvujärjenditega.

Järjestatud arvukolmikud ei pea tingimata tähistama punkti geomeetrilist asukohta. Näiteks ettevõtteid võib iseloomustada järgmiste näitajatega: toodangu mahu, omahinna ja tööviljakuse plaani täitmise protsendid. Siin on ettevõtte iseloomustamiseks võetud 3 parameetrit ehk arvukolmik. Arvukolmikut tõlgendame vektorina kolmemõõtmelises ruumis. Õpperühmade õppeedukust ülikoolis võib iseloomustada järgmiste parameetritega: eksamisessiooni sooritanute protsent ning ainult hinnetele "hea" ja "väga hea" õppijate protsent. Arvupaarid määravad vektori kahemõõtmelises ruumis (tasandil).

Kui lisada eespool ettevõtteid iseloomustavatele parameetritele toodangu realiseerimisplaani täitmise protsent, saame juba arvude neliku. Mõnede objektide kirjeldamisel on parameetrite hulk veelgi suurem. Seepärast osutub otstarbekaks laiendada vektorruumi mõistet. Järjestatud n arvu (x_1, x_2, \dots, x_n) nimetatakse punkti koordinaatideks n-mõõtmelises ruumis. Punkti koordinaatidega $(0, 0, \dots, 0)$ nimetatakse n-mõõtmelise ruumi nullpunktiks. Igale ruumpunktile $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ seatakse vastavusse n-mõõtmeline kohavektor, mis "viib" nullpunktist $O(0, 0, \dots, 0)$ punkti P ja mida tähistatakse

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.1)$$

Vektor \vec{X} n-mõõtmelises ruumis teisendab selle ruumi punktid sama ruumi punktideks. Reaalarve x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) nimetatakse n-mõõtmelise vektori koordinaatideks. Kui ühe-, kahe- ja kolmemõõtmelisi vektoreid saab geomeetriliselt esitada, siis nelja- jne. mõõtmeliste vektorite korral see võimalus puudub.

Lineaartehted n-mõõtmeliste vektoritega defineeritakse analoogiliselt tehetege kolmemõõtmeliste vektoritega.

Vektorite $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja $\vec{Y} = (y_1, \dots, y_n)$

summaks (vaheks) nimetatakse vektorit $\vec{X} \pm \vec{Y}$ koordinaatidega

$$\vec{X} \pm \vec{Y} = (x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm y_n); \quad (2.2)$$

vektori \vec{X} korrutiseks skalaariga k nimetatakse vektorit

$$k\vec{X} = (kx_1, \dots, kx_n). \quad (2.3)$$

Defineeritakse veel vektorite \vec{X} ja \vec{Y} skalaarkorrutis:

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^n x_iy_i. \quad (2.4)$$

Kehtima jäävad kõik kolmemõõtmeliste vektorite tehete omadused.

Vektori \vec{X} pikkuseks (mooduliks) nimetatakse mittenegatiivset arvu

$$|\vec{X}| = \sqrt{\vec{X} \cdot \vec{X}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (2.5)$$

N ä i d e . Leida viiemõõtmeliste vektorite $\vec{X} = (0, 1, -2, 3, 2)$ ja $\vec{Y} = (1, 4, 1, 0, -3)$ summa ning skalaarkorrutis.

Vektorite liitmisel liidetakse vastavad koordinaadid ja seega

$$\vec{X} + \vec{Y} = (1, 5, -1, 3, -1).$$

Skalaarkorrutis $\vec{X} \cdot \vec{Y} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) = -4$.

Nullvektoriks nimetatakse vektorit, mille kõik koordinaadid on nullid. Nullvektori pikkus on 0. Näiteks nullvektor viiemõõtmelises ruumis on $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Vektorite $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_m$ linearkombinatsiooniks nimetatakse avaldist $k_1\vec{X}_1 + k_2\vec{X}_2 + \dots + k_m\vec{X}_m$. Vektoreid nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui null on ainult nende vektorite triviaalne linearkombinatsioon, ning lineaarselt sõltuvateks, kui nulliga võrdub mittetriviaalne linearkombinatsioon.

Osutub, et n -mõõtmelise ruumi maksimaalne lineaarselt sõltumatute vektorite arv on parajasti n . Valime n -mõõtmelise ruumi baasiks vektorid

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n + D = 0 \quad (2.8)$$

- n muutujaga lineaarvõrrand määrab hüpertasandi n-mõõtmelises ruumis.

Hüpertasandiks kahemõõtmelises ruumis on sirge üldvõrrandiga $ax + by + c = 0$; ühemõõtmelises ruumis (sirgel) - punkt. Hüpertasandit nelja- jne. mõõtmelises ruumis ei saa enam geomeetriliselt näitlikult esitada.

3. Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetatakse ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\begin{array}{|cccc|}
 \hline
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 m \text{ rida} \\
 \\
 \\
 \\
 n \text{ veergu}
 \end{array}
 \quad (2.9)$$

N ä i d e . Tabelis on antud kulunormid viie toote valmistamiseks kahest erinevast materjalist:

Materjal	Tooted				
	1	2	3	4	5
I	10	8	12	20	6
II	5	6	2	4	6

Kui eelnevalt on kokku lepitud tabeli ridade ja veergude tähenduses, võime kulunormide maatriksi esitada järgmisel kujul:

$$\begin{array}{|ccccc|}
 \hline
 10 & 8 & 12 & 20 & 6 \\
 5 & 6 & 2 & 4 & 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

Tabelis olevaid arve nimetatakse maatriksi elementideks. Elementid on paigutatud ridade (horisontaalselt) ja veergude

(vertikaalselt) kaupa. Maatriksi elemente tähistatakse tavaliselt väikeste tähtedega, mis on varustatud kahe indeksiga: esimene indeks näitab rea, teine veeru järjekorranumbrit, kusjuures indeksite vahele koma ei panda. Element a_{ij} asub i -nda rea ja j -nda veeru lõikekohas. Maatrikseid tähistatakse kas suurte tähtedega (maatriks A) või näidatakse tema üld-element a_{ij} kahekordsete püstkriipsude vahel (sageli ka ümarsulgudes (a_{ij})), s. t.

$$A = \left\| a_{ij} \right\| . \quad (2.10)$$

Kui maatriksis on m rida ja n veergu, siis nimetatakse teda $m \cdot n$ -maatriksiks (näites kulunormide kohta on $2 \cdot 5$ -maatriks). Erineva ridade ja veergude arvuga maatriksit nimetatakse ristkülikmaatriksiks, võrdse ridade ja veergude arvu korral räägitakse $n \cdot n$ -ruutmaatriksist ehk n -järku ruutmaatriksist. Maatriksi A ridade ja veergude arv näidatakse vajaduse korral järgmiselt: $A_{m \cdot n}$. Ruutmaatriksi peadiagonaaliks nimetatakse diagonaali, mis ühendab vasakul üllemises nurgas asuvat elementi a_{11} paremal alumises nurgas asuva elemendiga a_{nn} . Alumisest vasakust nurgast ülemisse paremasse nurka läheb kõrvaldiagonaal.

Maatriksist A ridade ja veergude ümbervahetamisel saadud maatriksit nimetatakse transponeeritud maatriksiks.

A^T : $m \cdot n$ -maatriksi A transponeeritud maatriksiks on $n \cdot m$ -maatriks. Ruutmaatriksi A transponeeritud maatriks A^T saadakse maatriksi A pööramisel ümber peadiagonaali 180° võrra.

N ä i d e . Allpool on esitatud maatriks A koos transponeeritud maatriksiga A^T :

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 6 & 0 \\ -1 & 5 & 7 \end{array} \right\| , \quad A^T = \left\| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 6 & 5 \\ 0 & 7 \end{array} \right\| .$$

Ruutmaatriksit, millel on väljaspool peadiagonaali ainult nullelemendid, nimetatakse diagonaalmaatriksiks:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Ruutmaatriksit, mille peadiagonaali elementideks on ainult ühed ja ülejäänud elemendid on nullid, nimetatakse ühikmaatriksiks I. Nullmaatriksil on kõik elemendid nullid. Näiteks

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

1·n-maatriks on n-mõõtmeline vektor:

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (2.13)$$

mida nimetatakse ka reavektoriks.

Analoogiliselt n·1-maatriksit

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

nimetatakse veeruvektoriks. Veeruvektor saadakse reavektori transponeerimisel. Maatriksi $A_{m \cdot n}$ iga rida või veergu võib tõlgendada n-mõõtmelise reavektorina või m-mõõtmelise veeruvektorina.

Maatriksi jagamisel osadeks horisontaalsete ja vertikaalsete sirgetega jaotub ta ristkülikuteks, mis on omakorda maatriksid. Neid nimetatakse plokkideks.

Näiteks maatriks

$$A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 8 & 5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -2 & 5 \\ \hline 2 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & -1 & 4 & 6 \end{array} \right|$$

on jagatud neljaks plokiks. Mõnikord tähistatakse üksikuid plokkide (maatrikseid) suurte tähtedega, mille indeksid näitavad ploki asukohta lähtemaatriksis. Vaadeldavas näites

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}, \quad A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

4. Tehted maatriksitega

Esmalt defineerime maatriksite võrdsuse. Kaht sama järku maatriksit nimetatakse võrdseteks, kui vastavatel kohtadel seisvad elemendid on võrdsed, s. t.

$A_{m \cdot n} = \| a_{ij} \|$ ja $B_{m \cdot n} = \| b_{ij} \|$ jaoks kehtib võrdus $A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga i ning j korral.

Maatriksite jaoks defineeritakse järgmised tehted: liitmine (lahutamine), korrutamine skalaariga ja maatriksite korrutamine.

Kahe $m \cdot n$ -maatriksi $A = \| a_{ij} \|$ ja $B = \| b_{ij} \|$ summaks (vaheks) nimetatakse maatriksit $C = A \pm B = \| c_{ij} \|$, mille elemendid saadakse maatriksite A ja B vastavate elementide liitmisel (lahutamisel), s. t.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}. \quad (2.15)$$

Maatriksi $A = \| a_{ij} \|$ korrutiseks skalaariga k nimetatakse maatriksit kA , mille elementideks on arvuga k korrutatud maatriksi A elemendid

$$kA = \| ka_{ij} \|. \quad (2.16)$$

N ä i d e 1. Leida maatriks $2A - 3B$, kui

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Arvutame

$$2A - 3B = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 10 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 0 & 12 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 6 & -2 & -20 \end{vmatrix} .$$

Kaht maatriksit saab omavahel korrutada ainult siis, kui esimese teguri veergude arv n on võrdne teise teguri ridade arvuga m , s. t. korrutada saab maatrikseid $A_{m \times n}$ ja $B_{n \times p}$. Kahe maatriksi korrutiseks $C = AB$ nimetatakse $m \times p$ -maatriksit $C = \|c_{ij}\|$, mille elemendid leitakse järgmiselt:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad (2.17)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, p) .$$

Näiteks maatriksi C element

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1n}b_{n1} .$$

Rea- ja veeruvektori mõistet kasutades võime öelda, et maatriksi $C = AB$ element c_{ij} on võrdne esimese teguri i -nda reavektori ja teise teguri j -nda veeruvektori skalaarkorrutisega.

N ä i d e 2 . Leida $C_1 = AB$ ja $C_2 = BA$, kui

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} .$$

Arvutame kõigepealt elemendi c_{11} . Selleks kirjutame selguse mõttes välja 1. rea- ja 1. veeruvektori ning korrutame neid skalaarselt:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 5 .$$

$$c_{12} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 12 ,$$

$$c_{21} = 3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -2 ,$$

$$c_{22} = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 14 ,$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} .$$

Samuti leiame, et

$$C_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 10 & 20 & -8 \\ 19 & 30 & -4 \end{vmatrix}.$$

Kahe maatriksi korrutis ei ole üldjuhul kommutatiivne, s. t. $AB \neq BA$. Selles veendusime juba lahendatud näites 2.

Ruutmaatriksi A korrutamisel ühikmaatriksiga I saame

$$AI = IA = A,$$

s. t. korrutamisel on ühikmaatriksi osa sama mis reaalarvude puhul arvul 1 (kontrollige eeskirja (2.17) abil!).

$$\text{Analoogiliselt } 0 \cdot A = A \cdot 0 = 0.$$

Tehete puhul maatriksitega kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ (A + B) + C &= A + (B + C), \\ (AB) \cdot C &= A \cdot (BC), \\ (A + B) \cdot C &= AC + BC. \end{aligned}$$

Nende omaduste õigsuses on kerge veenduda valemite (2.15) ja (2.17) abil.

N ä i d e 3. Leida maatriksi A korrutis ühikmaatriksiga I :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Arvutame

$$AI = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = A.$$

Sama tulemuse annab IA .

5. Determinandi mõiste

Ruutmaatriksile kindla eeskirja järgi vastavusse seatud arvu nimetatakse determinandiks. Selle eeskirja anname allpool. Ruutmaatriksile järguga n vastavat determinanti tä-

histame edaspidi järgmiselt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}| \quad (2.19)$$

Determinandil on n rida ja n veergu. Arv n kannab determinandi järgu nime. Sageli räägitakse n -järku determinandi asemel n -realisest determinandist. Arvud a_{ij} on determinandi elemendid.

Keskkoolis kasutatakse teist järku determinante kahe tundmatuga võrrandisüsteemi lahendamisel. Võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

kordajate determinant esitud kujul

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ja tema arvutuseeskiri on järgmine:

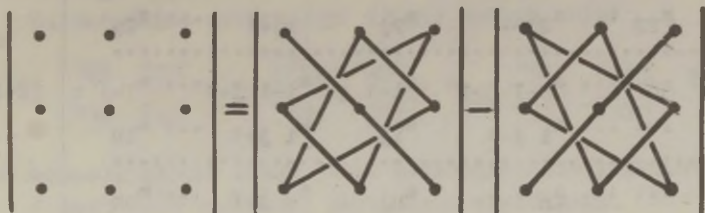
$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2.20)$$

Kõrgemat järku determinantide arvutuseeskiri on keerukam. Esitame siin kolmandat järku determinandi arvutuseeskirja:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{31}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}) - \\ &- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{21}a_{12}a_{33}) \quad (2.21) \end{aligned}$$

Skemaatilisel võib eeskirja anda kujul, kus lõikudega on ühendatud elemendid, mis tulevad omavahel korrutada. Peadiagonaali elementide korrutis ja temaga paralleelsete mitte-täielike diagonaalide elementide korrutised üle peadiagonaa-

li asuva elemendiga liidetakse ning nende summast lahutatakse analoogilised korrutised kõrvaldiagonaali sihis.



Joon. 6.

Näeme, et teist ja kolmandat järku ruutmatriksile vastab teatud eeskirja järgi leitav arv - vastavalt teist ja kolmandat järku determinant.

N ä i d e 1 . Leida determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{väärtus.}$$

Esmalt leiame korrutiste summa peadiagonaali sihis:

$$1 \cdot 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 7 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 = -62.$$

Kõrvaldiagonaali sihis saame

$$5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \cdot 3 = 37.$$

Determinandi väärtus $D = -62 - 37 = -99$.

Kõrgemat järku determinantide arvutamine taandatakse madalamat järku determinantide arvutamisele. Sellest räägime järgmises punktis.

6. Minor ja algebraline täiend.

Determinandi leidmise eeskiri

Anneme mõned täiendavad mõisted.

Vaatleme n -järku determinanti (19). Kustutame determinantist ühe rea järjekorranumbriga i ja ühe veeru järje-

korranumbriga j ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Järelejäänud elementid moodustavad $(n-1)$ -järku determinandi

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{i-1} & \dots & \dots & a_{i-1 j-1} & a_{i-1 j} & a_{i-1 j+1} & \dots & a_{i-1 n} \\
 a_{i1} & \dots & \dots & a_{i j-1} & a_{ij} & a_{i j+1} & \dots & a_{in} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 a_{n1} & \dots & \dots & a_{n j-1} & a_{nj} & a_{n j+1} & \dots & a_{nn}
 \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

Kustutatud rea ja veeru lõikekohas asub element a_{ij} .

Determinandi elemendi a_{ij} miinoriks M_{ij} nimetatakse $(n-1)$ -järku determinanti, mis tekib lähtedeterminandist i -nda rea ja j -nda veeru kustutamisel.

M ä i d e 1. Leida determinandi

$$\begin{vmatrix}
 3 & 6 & -1 \\
 0 & 2 & 5 \\
 7 & -3 & 4
 \end{vmatrix}$$

elementide a_{11}, a_{23}, a_{33} miinorid.

Esimese rea ja esimese veeru kustutamisel saame miinori

M_{11} jne.:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 23; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 51; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 15.$$

Determinandiks (2.19) järguga n nimetatakse järgmise eeskirja järgi leitavat arvu:

$$D = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} + \dots + (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + \dots + (-1)^{1+n}M_{1n}, \quad (2.23)$$

kus M_{1j} ($j = 1, 2, \dots, n$) on determinandi esimese rea elementidele vastavad miinorid.

Valemiga (2.23) antud eeskirja nimetatakse ka determinandi arendamiseks esimese rea järgi.

Kaherealise determinandi elemendi a_{11} minoriks on a_{22} ja elemendi a_{12} minoriks a_{21} . Eeskirja (2.23) kohaselt $D = a_{11}a_{22} + (-1)^{1+2}a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, mis ühtib valemiga (2.20).

Kolmerealine determinant (2.21) esitub kujul

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (2.24)$$

mis omakorda pärast teist järku determinantide leidmist ühtib võrduse (2.21) paremal pool oleva avaldisega.

Defineeritud determinandi arvutuseeskirja saab kasutada kõrgemat järku determinantide arvutamiseks madalamat järku determinantide kaudu. Näiteks 5. järku determinandi arvutamisel tuleb leida 4. järku minorid, igauht neist saab aga avaldada minorite kaudu, mis on juba 3. järku determinandid. Viimast oskame juba leida. Praktikas toimub determinandi arvutamine põhimõtteliselt kirjeldatud viisil koos täiendavate lihtsustavate võtete kasutamisega.

N ä i d e 2 . Leida 4-realise determinandi D väärtus:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Definitsiooni (2.23) kohaselt $D = 1 \cdot M_{11} - (-3) \cdot M_{12} + 0 \cdot M_{13} - 0 \cdot M_{14}$. Minorite M_{13} ja M_{14} leidmine pole praegu vajalik, sest nende kordajateks on null.

Arvutame:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -8; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -3.$$

Nüüd saame $D = 1 \cdot (-8) + 3 \cdot (-3) = -17$.

Nägime, et nullelementide esinemine determinandis kergendab arvutustööd.

Elemendi a_{ij} algebraaliseks täiendiks A_{ij} nimetatakse

arvuga $(-1)^{1+j}$ korrutatud miinorit:

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j} . \quad (2.25)$$

Kui rea ja veeru järjekorranumbrite summa on paarisarv, siis $A_{1j} = M_{1j}$, kui vastav summa on paarituur, siis $A_{1j} = -M_{1j}$.

N ä i d e 3 . Leida näites 1 antud determinandi jaoks elementide a_{11} , a_{31} , a_{23} algebralised täiendid.

Vastavalt definitsioonile (2.25) saame

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 23 ; \quad A_{23} = -M_{23} = 51 ;$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 32 .$$

Valemi (2.23) võib nüüd esitada ka kujul

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} . \quad (2.26)$$

7. Determinantide omadusi

Loetleme determinantide tähtsamaid omadusi, mis leiavad kasutamist determinantide arvutamisel.

1. Determinandi kahe rea ümbervahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks, absoluutväärtus jääb muutumatuks.

Illustratsiooniks leiame kolmerealise determinandi D_1 valemi (2.24) abil, kui lähtedeterminandis D on vahetatud

1. ja 3. rida:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{11} & a_{13} \end{vmatrix} + \\ + a_{33} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} .$$

Leides kaherealiste determinantide väärtused ja korrutades vastavate kordajatega, saame pärast liidetavate grupeerimist märkide järgi

$$D_1 = (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{11}a_{23} + a_{33}a_{21}a_{12}) - (a_{31}a_{12}a_{23} + \\ + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{33}a_{11}a_{22}) .$$

Tulemuse võrdlemisel avaldisega (2.21) näeme, et $D_1 = -D$. Seega 1. rea vahetamisel mingi reaga muutub determinandi märk. Determinandi 2. ja 3. rea vahetamine on realiseeritav kolme vahetamisega 1. rea abil: algul tõstame 3. rea esimeseks ja 1. rea kolmandaks, seejärel 2. rea esimeseks ja 1. rea kohal seisva esialgse 3. rea teiseks ning lõpuks vahetame 3. rea kohal seisva esialgse 1. rea praeguse 1. rea kohal seisva esialgse 2. reaga. Iga vahetamise käigus muutub determinandi märk ning kokkuvõttes kolmekordse vahetamise tulemusena

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} .$$

2. Determinanti saab arendada mis tahes rea järgi, s. t. kehtib võrdus

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in} = \\ &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Viimane võrdus on kirjutatud seost (2.26) arvestades.

Vahetades i -nda rea esimesega ja kasutades valemit (2.23), saame 1. omaduse põhjal tulemuseks $-D$. Seega, kui i -s rida asub oma õigel kohal, saame valemi (2.27) põhjal determinandi väärtuse D .

3. Determinandi väärtus ei muutu, kui tema i -ndale reale liita mingi arvuga k korrutatud muu rida, s. t.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ka_{j1} & \dots & a_{in} + ka_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.28)$$

4. Determinandi mingi rea elementide ühise teguri võib tuua determinandi märgi ette, s. t.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} . \quad (2.29)$$

5. Kui determinandis on kaks rida võrdsete elementidega või mingi rea elemendid on kõik nullid, siis on determinant võrdne nulliga.

6. Determinandi ühe rea elementide korrutised mingi teise rea algebraliste täienditega annavad summas nulli, s. t.

$$a_{k1}^A a_{11} + a_{k2}^A a_{12} + \dots + a_{kn}^A a_{1n} = 0, \text{ kui } i \neq k . \quad (2.30)$$

Võrduse (2.30) vasak pool on vaadeldav võrduse (2.27) kohaselt sellise determinandi arendisena i -nda rea järgi, mille i -nda rea elemendid on võrdsed k -nda rea elementidega. See on aga determinant kahe võrdse reaga ning 5. omadusest tulenebki (2.30) kehtivus.

7. Determinandi read ja veerud on võrdväärised. See tähendab, et eespool sõnastatud omadused kehtivad täpselt samuti ka veergude puhul. Näiteks võib determinanti arendada ka j -nda veeru järgi või determinandi väärtus ei muutu ühele veerule mingi arvu kordse muu veeru liitmisel jne.

8. Determinandi arvutamine

Determinandi praktiline arvutamine tugineb eelmises punktis loetletud omadustele.

Kolmanda omaduse põhjal püüame teisendada determinandi elemente nii, et mingisse ritta (veergu) tekiks võimalikult palju nullelemente. Võimaluse korral kasutame ka rea ühise teguri ettetoomist (4. omadus). Seejärel arendame teisendatud determinandi võrduse (2.27) kohaselt selle rea (veeru) järgi, milles on rohkem nullelemente. Niiviisi taandame järku determinandi arvutamise $(n-1)$ -järku determinantide ar-

utamisele. Viimaste arvutamise saame vajaduse korral taandada $(n-2)$ -järku determinantide arvutamisele jne., kuni jõuame 3. või 2. järku determinantideni.

Illustreerime esitatud mõttekäiku näidetega.

N ä i d e 1 . Leida determinandi väärtus:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 12 & 0 \end{vmatrix} .$$

Toome esimesest ning viimasest reast determinandi märgi ette vastavalt ühised tegurid 2 ja 3. Siis

$$D = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} .$$

Kuna 1. reas on juba üks nullelement, siis teisendame determinanti nii, et 1. ritta jääb ainult üks nullist erinev element. Selleks liidame 2. veerule kahekordse 1. veeru ning lahutame 4. veerust kolmekordse 1. veeru. Saame

$$D = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & -5 \\ 3 & 6 & 1 & -7 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} .$$

Nüüd arendame determinandi 1. rea järgi. Kuna 1. rea elemendid on nullid peale elemendi a_{11} , siis valemi (2.26) kohaselt

$$D = 6 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 6 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} .$$

Kolmerealises determinandis liidame 1. ja 2. reale vastavalt kuue- ning kolmekordse viimase rea; seejärel arendame determinandi 1. veeru järgi. Saame

$$D = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 18 & 4 \\ 0 & 25 & 11 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 18 & 4 \\ 25 & 11 \end{vmatrix} = -6 \cdot 98 = -588.$$

N ä i d e 2 . Leida determinandi väärtus:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & -4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Liidame 2. reale 1. ja 4. rea, 3. reale 4. rea ning lahutame 4. ja 5. reast vastavalt 4- ja 2-kordse esimese rea. Siis saame determinandi, kus 2. veerus on nullelemendid peale esimese:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 8 & 0 & 6 & -3 & 11 \\ 6 & 0 & 8 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -5 & 10 & -15 \\ 7 & 0 & -5 & 9 & -4 \end{vmatrix}$$

Arendame determinandi 2. veeru järgi, tuues samaaegselt miinori 3. reast teguri 5 determinandi ette:

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 6 & -3 & 11 \\ 6 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & -5 & 9 & -4 \end{vmatrix}.$$

Siin lahutame 1. reast 3. ja 4. rea summa, 4. reast 2. ja 3. rea summa, seejärel 2. reast 6-kordse 3. rea:

$$D = -5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 12 & -14 & 18 \\ 0 & 14 & -11 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -12 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -5 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & -7 & 9 \\ 0 & 14 & -11 & 21 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Arendame esimese veeru järgi (3-realises determinandis lahutame veel 3. reast 1. rea ja toome 1. veerust ette ühise teguri 2):

$$D = 20 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 14 & -11 & 21 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 20 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 14 & -11 & 21 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 40 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & 9 \\ 7 & -11 & 21 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Kui antud vektorite hulk m on suurem vektorite jär-
gust n , siis kindlasti on nende vektorite vahel lineaar-
ne sõltuvus, sest sõltumatute vektorite maksimaalne arv saab
olla n (vt. p. 1 § 2), kuid võib olla ka väiksem. Kui $m \leq n$
ja vektorite vahel on lineaarne sõltuvus, siis saab mingi
ühe vektori avaldada ülejäänud $m-1$ vektori lineaarkombinat-
sioonina. Nende $m-1$ vektori hulgas võib omakorda olla li-
neaarselt sõltuvaid ja saame jälle mingi ühe vektori avada
ülejäänud $m-2$ vektori lineaarkombinatsioonina. Igal üks-
sikhul tuleks lahendada (2.32) tüüpi süsteem vastavalt
 $m-1$, $m-2$ jne. tundmatuga. Nii järjestikusest jätkates jõuak-
sime lõpuks olukorrani, kus vektor järjekorranumbriga $r+1$
avaldub r sõltumatu vektori lineaarkombinatsioonina. Siis
saame kõik ülejäänud $m-r$ vektorit avaldada r sõltumatu
vektori kaudu.

N ä i d e . Selgitada, kas vektorite $\vec{x}_1 = (1; -3; 0)$,
 $\vec{x}_2 = (1; 2; 2)$, $\vec{x}_3 = (1; 4; 5; 3)$ vahel on lineaarne sõl-
tuvus.

Moodustame nende vektorite lineaarkombinatsiooni ja võr-
rutame nulliga:

$$k_1 \vec{x}_1 + k_2 \vec{x}_2 + k_3 \vec{x}_3 = 0$$

ehk koordinaatkujul

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= 0, \\ -3k_1 + 2k_2 + 4,5k_3 &= 0, \\ 2k_2 + 3k_3 &= 0. \end{aligned}$$

Süsteemi lahendame järgmiselt: avaldame kolmandast võrran-
dist otsitava k_2 otsitava k_3 kaudu ning asendame üle-
jäänud võrrandisse. Saame

$$\begin{aligned} k_1 - \frac{1}{2} k_3 &= 0, \\ -3k_1 + \frac{3}{2} k_3 &= 0. \end{aligned}$$

Need võrrandid on kokkulangevad, sest teise võrrandi jaga-
misel arvuga -3 saame esimese võrrandi. Sellel süsteemil

on lõpmata palju lahendeid. Valime $k_3 = 2$. Siis $k_1 = 1$ ja lähtesüsteemist saame, et $k_2 = -3$. Seega kehtib seos

$$\vec{x}_1 - 3\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3 = 0$$

ehk antud vektorid on lineaarselt sõltuvad. Üks vektor avaldub kahe ülejäänu lineaarkombinatsioonina. Näiteks $\vec{x}_1 = 3\vec{x}_2 - 2\vec{x}_3$ või $\vec{x}_2 = \frac{1}{3}\vec{x}_1 + \frac{2}{3}\vec{x}_3$ või $\vec{x}_3 = -\frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{3}{2}\vec{x}_2$.

Kontrollime veel, kas vektorite \vec{x}_2 ja \vec{x}_3 vahel on lineaarne sõltuvus. Analooiliselt selneva lahenduskäiguga saame

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= 0, \\ 2l_1 + 4,5l_2 &= 0, \\ 2l_1 + 3l_2 &= 0. \end{aligned}$$

Esimesest võrrandist avaldame $l_1 = -l_2$; asendame teise ja saame $2,5l_2 = 0$, kust $l_2 = 0$. Siis ka $l_1 = 0$. Seega saab null olla ainult trivიაalne lineaarkombinatsioon $0\vec{x}_2 + 0\vec{x}_3 = 0$ ehk \vec{x}_2 ja \vec{x}_3 on lineaarselt sõltumatud. Kolmest vaadeldavast vektorist võime kaks valida baasivektoreiks ja üks avaldub nende lineaarkombinatsioonina.

Eespool kirjeldatud moodus on praktiliseks realiseerimiseks tülikas. Lihtsama mooduse esitamise järgmises punktis.

10. Maatriksi astak

Maatriksis $A_{m \times n} = \|a_{ij}\|$ on iga rida tõlgendatav n -mõõtmelise vektorina (reavektorina)

$$\vec{x}_i = \|a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}\| \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

ja analooiliselt iga veerg m -mõõtmelise vektorina (veeruvektorina)

$$\vec{y}_j = \left\| \begin{array}{c} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{array} \right\| \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Reavektoritest \vec{X}_1 (vastavalt veervektoritest \vec{Y}_j) võib olla lineaarselt sõltumatu ja ülejäänud avalduvad juba nende lineaarkombinatsioonina. Oluline on teada lineaarselt sõltumatute reavektorite (veervektorite) maksimaalset arvu. Maatriksi puhul räägitakse tavaliselt maatriksi ridade (veergude) lineaarsest sõltumatusest ja sõltuvusest.

Oletame, et maatriksis on r esimest rida lineaarselt sõltumatud ja järgmised read neist lineaarselt sõltuvad. Siis on iga rida (reavektor) alates reast $r + 1$ avaldatav r esimese rea kaudu:

$$\begin{aligned} \vec{X}_{r+1} &= k_1 \vec{X}_1 + k_2 \vec{X}_2 + \dots + k_r \vec{X}_r, \\ \vec{X}_{r+2} &= l_1 \vec{X}_1 + l_2 \vec{X}_2 + \dots + l_r \vec{X}_r, \end{aligned} \quad (2.33)$$

jne.,

kus kõik kordajad k_i (samuti l_i) ei ole samaaegselt nullid. Iga vektorvõrduse (2.33) asemel saab kirjutada n skalaarset võrdust vektorite vastavate koordinaatide jaoks kujul (2.32).

Maatriksi lineaarselt sõltumatute ridade maksimaalset arvu nimetatakse maatriksi astakuks. Maatriksi astakut tähistame tähega r .

N ä i d e 1. Leida maatriksi A astak, kui

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4,5 & 3 \end{vmatrix} .$$

Käesoleva maatriksi reavektoriteks on parajasti eelmise punkti näites esitatud vektorid. Seal selgus, et kolmest vaadeldud vektorist olid kaks lineaarselt sõltumatud ja üks oli nende kahe lineaarkombinatsioon. Seega on vaadeldava maatriksi A astak $r = 2$.

Valime maatriksist A välja suvalised r rida i_1, \dots, i_r ja r veergu j_1, \dots, j_r ning moodustame neist determinandi

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} ,$$

mida nimetatakse maatriksi r-järku alamdeterminandiks.

N ä i d e 2. Koostada 1. näite maatriksi jaoks kõik alamdeterminandid.

Esimest järku alamdeterminante on 9: iga maatriksi element omaette võetuna.

Teist järku alamdeterminandid on

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4,5 \end{vmatrix} = 7,5; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4,5 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4,5 \end{vmatrix} = 2,5; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4,5 & 3 \end{vmatrix} = -3;$$

Kolmandat järku alamdeterminante on vaid üks: maatriksi A determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4,5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Kui maatriksi astak on r , siis on temas r sõltumatu rida ja iga ülejäänud rida on r sõltumatu rea lineaarkombinatsioon. Kui sõltumatud on näiteks r esimest rida, siis

$$\bar{x}_{r+1} = k_1 \bar{x}_1 + \dots + k_r \bar{x}_r.$$

Moodustame nüüd alamdeterminandi järguga $r + 1$ ja lahutame järjestikuliselt $(r+1)$ -ndast reast k_1 -kordse 1. rea jne. kuni k_r -kordse r -nda rea. Iga sellise tehte korral determinandi väärtus ei muutu. Teisendatud alamdeterminandis osutub rida $(r+1)$ nullreaks ja siis on $(r+1)$ -järku determinandi väärtus null. Analooiliselt arutledes selgub, et nullid on ka kõik teised $(r+1)$ -järku alamdeterminandid ning samuti kõik veelgi kõrgemat järku alamdeterminandid. Selle põhjal võimegi ütelda, et kui maatriksis leidub vähemalt üks nullist erinev r -järku alamdeterminant ja kõik kõrgemat järku alamdeterminandid on nullid, siis maatriksi astak on r .

Maatriksil järguga $m \cdot n$ on kõrgeimat järku alamdeterminandiks determinant järguga $\min(m, n)$ (väikseim arvudest

m ja n) ning astak r ei saa ületada seda arvu, s. t.
 $r \leq \min(m, n)$.

Saab näidata, et maatriksi lineaarselt sõltumatute ridade maksimaalne arv võrdub lineaarselt sõltumatute veergude maksimaalse arvuga.

K o k k u v õ t e . Maatriksi astakuks r nimetatakse maatriksi lineaarselt sõltumatute ridade (veergude) maksimaalset arvu ehk maatriksi nullist erinevate alamdeterminantide kõrgeimat järku (mõlemad definitsioonid on samaväärsed).

Maatriksi astaku leidmine kõigi alamdeterminantide järjestikuse arvutamise teel on tülikas, veelgi tülikam on lineaarselt sõltumatute ridade võrrandisüsteemide lahendamise kaudu. Astaku määramiseks kasutatakse tavaliselt nn. maatriksi elementaarteisendusi, millest räägime järgmises punktis. Seal toome ka näiteid astaku praktilise leidmise kohta.

11. Maatriksi astaku leidmine elementaarteisenduste abil

Maatriksi elementaarteisendusteks nimetatakse 1) maatriksi rea (veeru) korrutamist nullist erineva teguriga k ; 2) ühele reale (veerule) k -kordse teise rea (veeru) liitmist.

Elementaarteisenduste käigus muutuvad maatriksi elemendid, kuid saab näidata, et maatriksi astak jääb muutumatuks. Kahe nimetatud elementaarteisenduse lubatavusest tuleneb, et maatriksi astak ei muutu kahe rea (veeru) vahetamisel või nullelementidest koosneva rea (veeru) ärajätmisel.

Maatriksi astaku määramiseks kasutataksegi elementaarteisendusi. Praktiliselt toimub maatriksi astaku määramine järgmiselt. Elementaarteisenduste abil teisendatakse maatriksi ridu (veerge) selliselt, et ühel pool maatriksi diagonaali elementidega a_{11} , a_{22} , a_{33} , ... saaksid maatriksi elemendid nullideks. Sellisele kujule viidud maatriksist saab kergesti välja lugeda astaku r . Selgitame öeldut näidete-ga.

N ä i d e 1 . Leida maatriksi A astak

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 3 & -4 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

Teisendame maatriksit nii, et ülevalt vasakust nurgast algavast diagonaalist ülalpool oleksid nullelemendid. Selleks liidame 5. veerule kahekordse 2. veeru, seejärel 2. veeruga viiekordse 3. veeru ja siis lahutame kolmekordsest 3. veerust 1. veeru. Saame

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -17 & -13 & 9 & 4 \end{vmatrix} .$$

Edasi liidame 4. veeruga 2. veeru ja 3. veerust lahutame 2. veeru:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -17 & 4 & -8 & 4 \end{vmatrix} .$$

Nüüd liidame 4. veeruga kahekordse 3. veeru ja 5. veerust lahutame 3. veeru:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -17 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -17 & 4 \end{vmatrix} .$$

Kustutasime 4. ja 5. veeru - järele jääb 4.3-maatriks (elementaarteisendustega teisendatud maatriksite vahele pannakse sageli märk \sim). Arvutame ühe 3. järku alamdeterminandi: võtame kolm esimest rida ja kolm veergu. Alamdeterminandi väärtuseks saame -3 . Kõrgeima nullist erineva alamdeterminandi järk on 3 ja seega $r(A) = 3$.

N ä i d e 2 . Leida maatriksi astak

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 19 & 11 \end{vmatrix} .$$

Tekitame nullelemendid peadiagonaalist allapoole. Lahutame 2. ja 3. reast vastavalt kahe- ja kaheksakordse esimese rea, seejärel jagame 2. rida -7-ga ja 3. rida -21-ga ning lahutame lõpuks 3. reast 2. rea. Saame

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -21 & -21 & -21 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Siit nähtub, et astak ei saa ületada kahte ja kuna 2. järku alamdeterminantidest vähemalt üks erineb nullist, siis astak $r(A) = 2$.

K o n t r o l l k ü s i m u s e d

1. Mitu koordinaati on vektoril kuue-, kolme-, ühemõõtmelises ruumis?
2. Kuidas leitakse n-mõõtmeliste vektorite skalaarkorrutis?
3. Kuidas leitakse n-mõõtmelise vektori pikkus?
4. Millal on vektorid lineaarselt sõltuvad? sõltumatud?
5. Kirjutage üldvõrrand hüpertasandile neljamõõtmelises ruumis.
6. Mis on maatriks? Kuidas toimub maatriksi transponeerimine?
7. Kuidas tõlgendada n-mõõtmelist vektorit maatriksina?
8. Millal on kaks maatriksit võrdsed?
9. Kuidas toimub maatriksite liitmine? skalaariga korrutamine?
10. Milliseid maatrikseid saab korrutada? Kuidas leitakse kahe maatriksi korrutis? Kas $AB = BA$?
11. Kuidas arvutatakse kahe- ja kolmerealist determinanti?
12. Mis on determinandi elemendi miinor? algebraline täiend?
13. Kirjeldage determinandi arvutusvõtteid.
14. Näidake, et maatriksi astaku kaks definitsiooni on samaväärsed.
15. Mis on maatriksi elementaarteisendused?

Süsteemi (3.1) on mõnikord otstarbekas esitada nn. maatriks-
kujul. Tähistusi (3.2) arvestades ning maatriksite korruta-
mise reeglile tuginedes võib süsteemi (3.1) esitada kujul

$$A \cdot X = B . \quad (3.3)$$

Seame ülesandeks selgitada, millal süsteem (3.1) on la-
henduv, kui palju tal on lahendeid ja kuidas lahendeid lei-
da.

2. Crameri valemid

Vaatleme võrrandisüsteemi, kus nii tundmatute kui võr-
randite arv on n . Siis on süsteemi maatriks ruutmaatriks
ja tema elementidest moodustatud determinanti nimetatakse
süsteemi determinandiks

$$D = |a_{ij}| .$$

Olgu süsteemi determinant nullist erinev $D \neq 0$. Leia-
me süsteemi determinandi j -nda veeru elementide algebralised
täiendid $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ning korruta-
me nendega järjestikusselt süsteemi võrrandeid ja seejärel
liidame need. Grupeerides liikmed tundmatute järgi, saame

$$\begin{aligned} & (a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + \dots + a_{n1}A_{nj})x_1 + \dots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \\ & + \dots + a_{nj}A_{nj})x_j + \dots + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + \dots + a_{nn}A_{nj})x_n = \\ & = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Determinantide 6. omaduse kohaselt (§ 2, valem(2.30)) on tund-
matute kordajateks olevad sulgavaldised võrdsed nulliga pea-
le x_j kordaja. Viimane kujutab aga endast süsteemi deter-
minandi arendist j -nda veeru järgi, s. t.

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = D .$$

Võrduse (3.4) paremal pool on süsteemi determinandi arendis
 j -nda veeru järgi, kui determinandi veerg järjekorranumbriga
 j on asendatud vabaliikmete veeruga. Tähistame seda deter-
minanti D_j , s. t.

$$D_j = b_1 A_{1j} + \dots + b_n A_{nj} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

Jõuame võrdusteni

$$Dx_j = D_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Siit saame süsteemi (3.1) lahendi leidmiseks valemid

$$x_j = \frac{D_j}{D} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (3.6)$$

mida tuntakse Crameri valemite nime all.

K o k k u v õ t e . Crameri valemitega saab lineaarse võrrandisüsteemi lahendi leida siis, kui 1) võrrandite ja tundmatute arv on võrdne; 2) süsteemi determinant on nullist erinev.

N ä i d e . Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Leiame süsteemi determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5.$$

Asendame süsteemi determinandi veerud järjekorraselt vaba-liikmete veeruga ja leiame

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Süsteemi lahend on

$$x_1 = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{-10}{-5} = 2, \quad x_3 = \frac{-15}{-5} = 3.$$

Suurema tundmatute arvuga süsteemi lahendamisel arvutatakse nõutavad determinandid, arendades neid mingi rea (veeru) järgi.

3. Kroneckeri - Capelli teoreem

Tekib küsimus, kas ja millal on süsteem (3.1) lahenduv. Süsteemi lahenduvuse tingimuse annab Kroneckeri - Capelli teoreem: lineaarne võrrandisüsteem on lahenduv parajasti siis, kui süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakud on võrdsed, s. t. $r(A) = r(L)$. See on nn. astakutingimus.

Tõestame astakutingimuse tarvilikkuse. Selleks oletame, et süsteemil (3.1) on mingi lahend $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$. Sooritame järgmised elementaarteisendused laiendatud maatriksiga L . Lahutame süsteemi laiendatud maatriksi viimasest (vabaliikmete) veerust järjestikuliselt u_1 -kordse esimese veeru, u_2 -kordse teise veeru jne., lõpuks u_n -kordse n -nda veeru. Viimaseks veeruks saame siis

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}u_1 - a_{12}u_2 - \dots - a_{1n}u_n, \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ b_m &= a_{m1}u_1 - a_{m2}u_2 - \dots - a_{mn}u_n. \end{aligned}$$

Saadud avaldised kujutavad endast süsteemi (3.1) võrrandite paremaid pooli, kui kõik liikmed on viidud paremale poole võrdusmärgi ja otsitavad x_j on asendatud süsteemi lahendiga u_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Seega võrduvad need avaldised nulliga. Süsteemi laiendatud maatriks asendub pärast sooritatud elementaarteisendusi järgmisega

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array} \right\|$$

Selle maatriksi astak (seega ka L astak) võrdub süsteemi maatriksi A astakuga, sest nullveeru ärajätmisel jääb järele maatriks A .

Tõestame nüüd astangutingimuse piisavuse. Selleks eeldame, et $r(A) = r(L)$ ja veendume, et siis on süsteemil (3.1) lahend olemas. Kui maatriksi A astak on r , siis on vähemalt üks tema r -järku alamdeterminant D_r nullist erinev. Muudame maatriksite A ja L ridade ning veergude numeratsiooni nii, et nullist erinev determinant D_r asub maatriksi vasakus ülemises nurgas

$$D_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Siis on maatriksi L ridadest esimesed r tükki lineaarselt sõltumatud ja ülejäänud $m-r$ rida avalduvad r esimese rea lineaarkombinatsioonidena. Samuti avalduvad süsteemi (3.1) $m - r$ võrrandit r esimese võrrandi kaudu. Seepärast on vaja selgitada, kas r esimest võrrandit on lahenduvad, sest nende lahend rahuldab ka ülejäänud võrrandeid. Uurime süsteemi

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ \dots & \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rn} x_n &= b_r. \end{aligned}$$

Kui $r = n$, siis on võrrandite ja tundmatute arv sama, kusjuures süsteemi determinant $D_r \neq 0$. Sellisel süsteemil on olemas üks lahend vastavalt Crameri valemitele (3.6).

Kui $r < n$, siis on tundmatuid rohkem kui võrrandeid. Suurused x_1, \dots, x_r jätame otsitavateks ja ülejäänud tundmatud x_{r+1}, \dots, x_n (nn. vabad tundmatud) viime võrduste paremale poole ning anname neile vabadele tundmatutele mis tahes väärtused. Tundmatud x_1, \dots, x_r leiame juba Crameri valemite järgi.

Veendusime, et astakutingimuse täidetuse korral on süsteemil lahend kindlasti olemas. Teoreem on tõestatud.

Belviimases maatriksis on 1. veeru elemente jagatud üheksaga ja kuna 1. ning 2. veerg osutusid ühesugusteks, on üks neist ära jäetud. Nullist erinev on teist järku alamdeterminant ja seega $r(A) = 2$. Nüüd leiame laiendatud maatriksi L astaku. Kahe esimese veeruga teeme samad teisendused nagu maatriksi A puhul. Liidame veel 3. veeru 4. veerule ja jätame ära 1. veeru.

$$L = \left\| \begin{array}{cccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 9 & 1 & 4 & 6 \\ 11 & -12 & 17 & 3 & 45 & 5 & 17 & 20 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 17 & 20 \end{array} \right\| .$$

Leiame saadud maatriksile vastava determinandi:

$$D = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 .$$

Järelikult on $r(L) = 3$. Kuna $r(A) \neq r(L)$, siis on süsteem vastuoluline (lahend puudub).

N ä i d e 2 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 &= 6. \end{aligned}$$

Alustame astakutingimuse kontrollimist. Teisendame maatrikseid A ja L samaaegselt, eraldades vabaliikmete veeru katkendliku joonega.

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -6 & 5 & 6 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & -7 \\ -2 & -11 & 5 & -24 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -10 \\ -1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right\| \sim$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right\| .$$

Siin on tehtud järgmised elementaarteisendused. Teine maatriks

on saadud lähtemaatriksist, lahutades 1. ja 2. veerust 3. veeru ning 4. veerust kuuekordse 3. veeru. Järgmisel etapil on 2. reale liidetud 3. rida ning 4. reast lahutatud kahekordne 3. rida. Uue maatriksi 2. reast on lahutatud 4. rida. Viimasel etapil on 2. ja 4. veerust lahutatud vastavalt kolme- ja seitsmekordne 1. veerg ning 3. veerule liidetud kahekordne 1. veerg.

Süsteemi teisendatud maatriksis on nullist erinev kolmandat järku alamdeterminant.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 10 .$$

Lahendatud maatriksi neljandat järku determinant on null. Selgus, et $r(A) = r(L) = 3$, s. t. süsteem on lahenduv. Praegu on tegemist eelmise punkti kokkuvõtte 3. juhuga. Võtame süsteemist kolm esimest võrrandit (kontrollige, et neljas avaldub nende kaudu). See süsteem on lahendatud 2. punkti näites, kus saime

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3 .$$

N ä i d e 3 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Kerge on näha, et $r(A) = r(L) = 2$. Siin on tegemist kokkuvõtte 2. juhuga, sest $m = r = 2 < 4 = n$. Võtame x_3 ja x_4 vabadeks tundmatuteks (võib võtta ka näiteks x_1 ja x_2 või x_1 ja x_3 või ...) ning tähistame nende meelevaldseid väärtusi sümbolitega c_3 ja c_4 . Saame süsteemi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 - 3c_3 - 4c_4, \\ x_1 - x_2 &= 1 - c_3 + c_4. \end{aligned}$$

Liitmisvõttega leiame

$$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3}c_3 - \frac{2}{3}c_4; \quad x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}c_3 - \frac{5}{3}c_4.$$

Meelevaldseid vabu tundmatuid sisaldavat lahendit nimetatakse üldlahendiks. Omistades vabadele tundmatutele kindlad väärtused, saame erilahendid. Meie süsteemi üldlahendiks on

$$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{5}{3} c_3 - \frac{2}{3} c_4 .$$

$$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} c_3 - \frac{5}{3} c_4 ,$$

$$x_3 = c_3 ,$$

$$x_4 = c_4 .$$

Meelevaldsete konstantide väärtustele $c_3 = 0$, $c_4 = 0$ vastav erilahend on $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = x_4 = 0$.

Analoogiliselt näitega 3 toimub ülesannete lahendamine, kus $r < m < n$ (eespool kirjeldatud 4. juht).

5. Homogeensed võrrandisüsteemid

Homogeense süsteemi laiendatud maatriksi B erineb süsteemi maatriksist A ainult täiendava nullveeru poolest, mis astakut ei mõjusta. Seega on astakutingimus $r(B) = r(A)$ alati täidetud ja homogeensel süsteemil on alati lahend olemas. Tõepoolest, homogeenset süsteemi rahuldab alati null-lahend $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, mida nimetatakse triviaalseks lahendiks.

Kui homogeenses süsteemis on tundmatute ja võrrandite arv sama $n = m$ ning süsteemi determinant $D \neq 0$, siis on süsteemil ühene lahend (vt. punkti 3 lõpus 1. juht) ja selleks ongi triviaalne lahend. Kui süsteemi determinant $D = 0$, siis on süsteemi astak $r < n$. Sel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid (vt. punkti 3 kokkuvõtte 4. juht), vabu tundmatuid on $n - r$.

N ä i d e 1 . Lahendada süsteem

$$3x_1 + 4x_2 = 0 ,$$

$$2x_1 - 5x_2 = 0 .$$

Süsteemi determinant $D = -23 \neq 0$. Seega on süsteemil ainult triviaalne lahend $x_1 = x_2 = 0$.

N ä i d e 2 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ 12x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Määrame süsteemi maatriksi astaku. Liidame 2. ja 3. rea-
le 1. rea. Jätame siis ära 3. rea, mis võrdub kahekordse tei-
se reaga:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 12 & -1 & -1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 14 & -4 & 0 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{ccc} 2 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array} \right\| .$$

Süsteemi maatriksi astak $r = 2$. Süsteemil on lõpmata pal-
ju lahendeid. Võtame kaks esimest võrrandit ning valime x_1
vabaks tundmatuks $x_1 = c_1$. Saame süsteemi

$$\begin{aligned} -3x_2 + x_3 &= -2c_1, \\ x_2 - x_3 &= -5c_1, \end{aligned}$$

mille lahendame liitmisvõttega. Üldlahend omab kuju

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = 7/2 c_1, \quad x_3 = 17/2 c_1 .$$

6. Linearsüsteemi determinandivaba lahendamine

Linearsüsteemide lahendamiseks on sageli otstarbekas ka-
sutada võtteid, mis esinevad maatriksi astaku leidmisel ja ba-
seeruvad süsteemi laiendatud maatriksi elementaarteisendustel.
Siin kasutame elementaarteisendusi ainult (!) ridadega.

Teisendame süsteemi laiendatud maatriksi elemendid all-
pool diagonaali a_{11} , a_{22} , a_{33} , ..., a_{rr} nullideks. Va-
jaduse korral vahetame omavahel maatriksi ridu. Lõpuks jõuame
maatriksini

$$\left\| \begin{array}{cccc|ccc} d_{11} & d_{12} & \dots & \dots & d_{1r} & d_{1r+1} & \dots & d_{1n} & p_1 \\ 0 & d_{22} & \dots & \dots & d_{2r} & d_{2r+1} & \dots & d_{2n} & p_2 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & d_{3r} & d_{3r+1} & \dots & d_{3n} & p_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{rr} & d_{rr+1} & \dots & d_{rn} & p_r \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (3.7)$$

Kordajad alates veerust $r + 1$ on vabade tundmatute kordajad. Kui astak $r = m$, siis ei teki maatriksi teisendamise käigus alla nullridasid. Maatriksi r -ndale reale vastab võrrand

$$d_{rr}x_r = p_r - d_{rr+1}x_{r+1} - \dots - d_{rn}x_n,$$

kust leiame tundmatu x_r . Belviimasele reale vastavasse võrrandisse paneme x_r asemele leitud väärtuse ja leiame x_{r-1} . Nii liigume rida realt ülespoole ja leiame järjest kõik tundmatud. Sellist lineaarsüsteemi lahendusvõtet nimetatakse tundmatute järkjärgulise elimineerimise ehk Gaussi meetodiks. Arvutuskäiku realiseeritakse praktikas üpris mitmeti.

Otstarbekas on maatriksi (3.7) teisendamist isegi jätkata selliselt, et ülespoole peadiagonaali kastiga eraldatud osas tekiks id samuti nullid ja ainult peadiagonaalil oleksid nullist erinevad elemendid. Siis saab kohe igast reast välja kirjutada ühe tundmatu väärtuse. Seda võtet nimetatakse ka tundmatute täieliku elimineerimise meetodiks.

Illustreerime näidetega kumbagi meetodit.

N ä i d e 1 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 & & - 6x_4 & = -9, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 & = 8, \\ & 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 & = 0. \end{aligned}$$

Lahendame süsteemi Gaussi meetodil. Paigutame tundmatute kordajad ja vabaliikmed tabelisse ning lisame nn. kontrollveeru, kuhu kanname iga rea elementide summa. Parempoolses lahtris on näidatud sooritataavate elementaarteisenduste iseloom. Arvutuste õigsust kontrollime kontrollveeru abil. Ridade elementidega sooritataavad teisendused teeme ka kontrollveeru elementidega. Saadud tulemus peab ühtima teisenduse tulemusena saadud rea elementide summaga.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	\sum	Teisendus
1	-3	0	-6	-9	-17	
2	1	-5	1	8	7	
0	2	-1	2	-5	-2	
1	4	-7	6	0	4	
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	<u>7</u>	-5	13	26	41	(II) - 2(I)
0	2	-1	2	-5	-2	
0	7	-7	12	9	21	(IV) - (I)
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	7	-5	13	26	41	
0	0	3/7	-12/7	-87/7	-96/7	(III) - 2/7 (II)
0	0	-2	-1	-17	-20	(IV) - (II)
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	7	-5	13	26	41	
0	0	<u>1</u>	-4	-29	-32	7/3 (III)
0	0	-2	-1	-17	-20	
1	-3	0	-6	-9	-17	
0	7	-5	13	26	41	
0	0	1	-4	-29	-32	
0	0	0	<u>-9</u>	-75	-84	(IV) + 2(III)

Kordajate maatriks on teisendatud diagonaalkujule. Viimasele reale vastab võrrand $-9x_4 = -75$, kust leiame $x_4 = 25/3$. Eelviimasele reale vastab võrrand $x_3 - 4x_4 = -29$, kust leiame $x_3 = -29 + 4x_4 = -29 + 4 \cdot 25/3 = 13/3$. Nüüd asendame leitud x_3 ja x_4 väärtused rida kõrgemale vastavasse võrrandisse

$$7x_2 - 5x_3 + 13x_4 = 26$$

ja arvutame $x_2 = 1/7 (26 + 5 \cdot 13/3 - 13 \cdot 25/3) = -26/3$.

Analoogiliselt saame esimesele reale vastavast võrrandist

$$x_1 = -9 + 3x_2 + 6x_4 = -9 - 3 \cdot 26/3 + 6 \cdot 25/3 = 15.$$

Vastuse esitame kujul

$$x_1 = 15, \quad x_2 = -26/3, \quad x_3 = 13/3, \quad x_4 = 25/3$$

või vektorsümbolikas

$$\vec{x} = (15, -26/3, 13/3, 25/3).$$

Elementaarteisenduste abil teisendasime esimesel etapil 1. veerus nulliks elemendid alates 2. reast, 2. veerus alates 3. reast, 3. veerus alates 4. reast. Liikumine tabelis toimus ülalt vasakult alla paremale. Teisel etapil alustasime liikumist tabeli alumisest paremast nurgast üles vasakule, leides igast reast ühe tundmatu. Tabeli igas veerus alalakriipsutatud elemente nimetatakse juhtelementideks ja neile vastavaid veerge juhtveergudeks.

N ä i d e 2 . Lahendada süsteem

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4,$$

$$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.$$

Kasutame taas Gaussi meetodit.

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ	Teisendus
2	7	3	1	6	19	
3	5	2	2	4	16	
9	4	1	7	2	23	
2	7	3	1	6	19	
3	5	2	2	4	16	
0	-11	-5	1	-10	-25	(III) - 3(II)
2	7	3	1	6	19	
0	-11	-5	1	-10	-25	2.(II)-3.(I)
0	-11	-5	1	-10	-25	
2	7	3	1	6	19	
0	-11	-5	1	-10	-25	
0	0	0	0	0	0	(III) - (II)

Kolmanda võrrandi kõik kordajad teisendusid nulliks, s.t. et seda võrrandit rahuldavad tundmatute mistahes väärtused

ja seega ka need väärtused, mis rahuldavad kaht esimest võrrandit. Teisiti öeldes on kolmas võrrand kahe esimese järeldus. Nullrea võime tabelist kustutada. Järelejäänud kaks rida vastavad võrranditele

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6, \\ -11x_2 + 5x_3 + x_4 &= -10. \end{aligned}$$

Vabu tundmatuid on kaks, valime nendeks x_3 ja x_4 ja tähistame $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

Teisest võrrandist leiame, et

$$x_2 = 10/11 - 5/11 x_3 + 1/11 x_4.$$

Asendame x_2 avaldise esimesse võrrandisse ning avaldame seal x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} 6 - 3x_3 - x_4 - 7(10/11 - 5/11 x_3 + 1/11 x_4) = \\ &= -2/11 + 1/11 c_1 - 9/11 c_2. \end{aligned}$$

Süsteemi üldlahend on järgmine:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2/11 + 1/11 c_1 - 9/11 c_2, \\ x_2 &= 10/11 - 5/11 c_1 + 1/11 c_2, \\ x_3 &= c_1, \quad x_4 = c_2. \end{aligned}$$

Võttes näiteks $c_1 = c_2 = 0$, saame erilahendi

$$\vec{x}_1 = (-2/11, 10/11, 0, 0),$$

kui $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, saame

$$\vec{x}_2 = (-1/11, 5/11, 1, 0).$$

N ä l i d e 3. Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 - 7x_5 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 4x_5 &= 8. \end{aligned}$$

Lahendame üllesande tundmatute täieliku elimineerimise võttega. Juhime tähelepanu asjaolule, et nullist erinevad koordinaadid ei pea tingimata seisma peadiagonaalil. Oluline on, et igast reast oleks valitud üks juhtelement.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Teisendus
<u>1</u>	2	2	1	3	5	14	
2	-3	-3	1	-7	3	-7	
1	1	1	2	0	4	9	
3	-1	-1	2	-4	8	7	
1	2	2	1	3	5	14	
0	-7	-7	-1	-13	-7	-35	(II)-2(I)
0	-1	-1	<u>1</u>	-3	-1	-5	(III)-(I)
0	-7	-7	-1	-13	-7	-35	(IV)-3(I)
1	3	3	0	6	6	19	(I)-(III)
0	<u>-1</u>	-1	0	-2	-1	-5	$\frac{1}{8} [(II)+(III)]$
0	-1	-1	1	-3	-1	-5	
0	-1	-1	0	-2	-1	-5	$\frac{1}{8} [(IV)+(III)]$
1	0	0	0	0	3	4	(I)+3(II)
0	1	1	0	2	1	5	-(II)
0	0	0	1	-1	0	0	(III)-(II)
0	0	0	0	0	0	0	(IV)-(II)

Kustutame 4. rea kui nullrea. Seda oleks võinud teha ka juba eelmisel teisenduste sammul, sest 4. rida ühtis 2. reaga. Järele jäi kolm võrrandit viie tundmatu leidmiseks, neist valime kaks vabadeks tundmatuteks. Üheks vabaks tundmatuks võtame x_5 , sest temale vastav veerg sisaldab rohkem kui ühe nullist erineva elemendi. Teiseks vabaks tundmatuks võime valida kas x_2 või x_3 . Käesolevas näites tekkis kaks ainult ühe nullist erineva elemendiga veergu ja need asuvad samas reas. Olgu vaba tundmatu x_3 . Vabad tundmatud on meelevaldselt valitavad, tähistame neid $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$. Arvutuskeemi viimasest osast (3 viimast rida) saame välja kirjutada süsteemi üldlahendi

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1 - c_1 - 2c_2, \quad x_3 = c_1, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_2$$

ehk $\vec{X} = (3, 1 - c_1 - 2c_2, c_1, c_2, c_2)$.

Mõnikord jäetakse märkimata isegi vektori sümbol \vec{x} .

Leiame kaks erilahendit, kui 1) $c_1 = c_2 = 0$, 2) $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Tehes vajalikud arvutused, saame erilahendid 1) (3, 1, 0, 0, 0); 2) (3, -3, 2, 1, 1).

N ä i d e 4 . Lahendada süsteem

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 - x_5 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_5 &= 2. \end{aligned}$$

Kasutame lahendamiseks tundmatute täieliku elimineerimise meetodit. Kuna võrrandeid on 4 viie tundmatu leidmiseks, siis võime kohe järeldada, et süsteemi lahenduvuse korral saame vähemalt ühe vaba tundmatu.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Σ	Teisendus
<u>1</u>	0	0	1	-1	3	4	
1	2	2	1	3	5	14	
0	1	1	1	1	1	5	
1	-3	-3	0	-6	2	-9	
1	0	0	1	-1	3	4	
0	2	2	0	4	2	10	(II)-(I)
0	<u>1</u>	1	1	1	1	5	
0	-3	-3	-1	-5	-1	-13	(IV)-(I)
1	0	0	1	-1	3	4	
0	0	0	-1	1	0	0	$\frac{1}{2} [(II) - 2(III)]$
0	1	1	1	1	1	5	
0	0	0	<u>1</u>	-1	1	1	$\frac{1}{2} [(IV) + 3(III)]$
1	0	0	0	0	2	3	(I)-(IV)
0	0	0	0	0	1	1	(II)+(IV)
0	1	1	0	2	0	4	(III)-(IV)
0	0	0	1	-1	1	1	

Teises reas teisendusid kõigi tundmatute kordajad nullideks, kuid vabaliige erineb nullist. Jõudsime seega võrrandini

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 2,$$

mida ei saa rahuldada tundmatute mistahes väärtuste korral. Tähendab, et lahend puudub ehk süsteem on vastuoluline.

Seega, kui teisenduste tabelis kõik tundmatute kordajad on nullid ja vabaliige nullist erinev, katkestame teisendused lahendi puudumise tõttu (NB! nullrea tekkimisel kustutame selle ja jätkame teisendusi).

K o n t r o l l k ü s i m u s e d

1. Mis on võrrandisüsteemi maatriks? laiendatud maatriks?
2. Millal saab kasutada Crameri valemeid võrrandisüsteemi lahendamiseks?
3. Sõnastage astakutingimus.
4. Olgu süsteemi astakutingimus täidetud. Määrata süsteemi lahendite arv, kui 1) võrrandite arv $m = 5$ ja otsitavate arv $n = 5$ ning süsteemi astak $r = 5$; 2) $m = 5$, $n = 5$, $r = 3$; 3) $n = r = 4$, $m = 3$; 4) $m = n = 4$, $r = 3$.
5. Mis on süsteemi üldlahend? erilahendid?
6. Kas homogeenne süsteem saab olla vastuoluline?
7. Millal homogeenne süsteem omab mittetriviaalse lahendi?
8. Kuidas toimub süsteemi determinandivaba lahendamine?
9. Kuidas saab Gaussi meetodil süsteemi lahendades avastada, et süsteem on vastuoluline?
10. Miks ei või süsteemi lahendamisel teha elementaarteisendusi süsteemi maatriksi veergudega?

S i s u k o r d

§ 1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID	3
1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste	3
2. Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus	7
3. Osatuletised	9
4. Täisdiferentsiaal	12
5. Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumid ..	15
6. Homogeensed funktsioonid	17
7. Empiiriliste valemite leidmine vähim- ruutude meetodil	19
Kontrollküsimused	25
§ 2. MAATRIKSID JA DETERMINANDID	26
1. Vektorid n -mõõtmelises ruumis	26
2. Hüpertasand	29
3. Matriksi mõiste	30
4. Tehted matriksitega	33
5. Determinandi mõiste	35
6. Miinor ja algebraline täiend. Determi- nandi leidmise eeskiri	37
7. Determinantide omadusi	40
8. Determinandi arvutamine	42
9. Koordinaatkujul antud vektorite sõltu- vuse uurimisest	45
10. Matriksi astak	47
11. Matriksi astaku leidmine elementaar- teisenduste abil	50
Kontrollküsimused	52
§ 3. LINEAARSETE VÕRRANDISÜSTEEMIDE LAHENDAMINE	53
1. Lineaarsed võrrandisüsteemid	53
2. Crameri valemid	54

3. Kroneckeri-Capelli teoreem	56
4. Näiteid	58
5. Homogeensed võrrandisüsteemid	61
6. Lineaarsüsteemi determinandi vaba lahendamine	62
Kontrollküsimused	69

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА II. Для студентов экономического факультета. Составители Лембит Роотс, Калью Соонетс, Ииви Вайникко. На эстонском языке. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18.

Vastutav toimetaja J. Lellep. Korrektor V. Lang. Paljundamigele antud 19.01.1978. Kirjutuspaber 30x 42 1/4. Trükipoognaid 4,5. Tingtrükipoognaid 4,19. Arvestuspoognaid 3,9. Trükiarv 500. TRÜ trükikoda, ENSV, Tartu, Pälsoni t. 14. Tell. nr. 71.

Hind 15 kop.