# Guilielmi Struvii

## diem semisaecularem

### XVIII m. Octobris celebrandum

indicit

## Universitas Caesarea Dorpatensis.



---

Insunt Ferdinandi Mindingii De curvatura superficierum quaestiones.

---

Dorpati Livonorum.

Typis C. Mattiesenii.

MDCCCLXIII.

Imprimatur
ex decreto Senatus academici.
Dorpati d. III m. Oct. a. MDCCCLXIII.
Nr. 211.

***Dr. Bidder,*** Rector.



Viro

**Perillustri atque Excellentissimo**

# Friderico Georgio Guilielmo Struve

**Universitatis Dorpatensis Professori Emerito et Socio Honorario**

*Augustissimo Rossorum Imperatori* a Consiliis Intimis, Academiae Caesareae Scientiarum Petropolitanae Sodali Honorario, Speculae Astronomicae Primariae Pulcovensis Directori, Ordd. Imperialium S. Vladimiri, S. Annae, S. Stanislai Summo Praefecto, Ordd. Complurium Exterorum Praefecto et Equiti, Plurimarum Societatum Doctarum Sodali etc. etc.

## Quinquagennalia Doctoris Philosophiae Sacra

***die XVIII m. Octobris celebranti***

## Universitas Literarum Caesarea Dorpatensis

**Omni qua par est observantia et reverentia**

***gratulatur.***

Quod unicuique bonarum artium cultori gratissimum solet esse, vitae longae et in literis gloriosae cursum contemplari, id animos praecipue eorum, quos inter haec gloria primum oborta est, quique radios hujus splendoris ad se ipsos quasi reflexos viderunt, singulari delectatione complebit. Itaque cum universitas nostra Te, Vir Eximie, jure suo sibi vindicare possit, quod in ea non solum primis disciplinarum fundamentis egregie operam navasti, sed etiam postea speculae astronomicae praefectus maximorum operum per quinque lustra continuatorum sempiternam memoriam, ne dicam apud nos, in toto orbe literarum reliquisti, fieri nullo modo potest, ut diem illum sollennem, quo abhinc decem lustra Doctoris philosophiae honores apud nos capessivisti, silentio praetermittamus.

Non est concessum nobis vel leviter hic adumbrare insignia Tua merita, quorum fama atque admiratio sensim adeo increverat, ut summa Augustissimi Imperatoris erga optimas artes gratia ac benevolentia Te dignissimum rei astronomicae praesidem in eum locum avocaret, ubi mox omnia artis subsidia, quae ad promovendam siderum scientiam facere possunt, cumulare ac perfectissimum scientiae astronomicae templum exstruere Caesarea munificentia ingenio Tuo permisit. In illa sede eodem semper animi ardore, eadem ingenii vi ac sollertia totum coelum perscrutans, ut maximorum phaenomenorum sideralium notitiam nobis comparasti, ita ipsam observandi ac dimetiendi artem, qua fere tota naturae scientia nititur, novis subsidiis ac methodis ad fastigium antea ignotum evexisti.

Quae cum ita sint, nihil habuimus antiquius, quam ut intimos gratiae atque admirationis sensus, quibus Te Tuaque merita semper prosequimur, oblata sollenni hac occasione his literis publice declaremus.

Vale, Vir Eximie, nobisque et universitati nostrae, gloriae Tuae cunabulis, ut semper fecisti, favere perge.

Dabamus Dorpati Livonorum d. III m. Octobris a. MDCCCLXIII.

**Universitatis Caesareae Dorpatensis**

***Rector et Senatus.***

# De curvatura superficierum quaestiones.

Constat theoriam curvaturae superficierum non modo per se elegantissimam esse, sed etiam fecundissimam, quippe quae ad plura insignia incrementa, quibus nostra aetate geometria sublimior aucta est, aditum aperuerit. Hoc enim e fonte Mongii inventum celeberrimnm linearum curvaturae maximae vel minimae directionem indicantium demanavit, quod genus curvarum postea ad integrationem aequationis notissimae, qua in superficie secundi gradus linearum brevissimarum cursus definitur, Jacobii ingenio viam monstravit, nec non, quae est res gravissima, novam coordinatarum speciem suppeditavit, efficacissimis artis analyticae promovendae instrumentis adnumerandam. Eodem fundamento innititur doctrina nova flexionis superficierum, quam antea plane ignotam Gaussius in celeberrimis disquisitionibus circa superficies curvas in lucem protulit. Nam casus particularis superficierum in planum explicabilium, quamquam diu notus, tamen adeo sterilis manserat, ut ne ansam quidem quaestionis generalioris attingendae alicui praebuisse videatur, donec disquisitiones laudatae veram ejus naturam patefacerent.

Igitur quum diem semisaecularem illustrissimi astronomi quondum Dorpatensis, nunc Petropolitani sollenni aliqua scriptione auspicandi munus a Senatu nostro academico mihi demandatum esset, nolui quidem meam qualemcunque operam recusare, sed circumspiciens materiem, quae et hac sollenni occasione non esset indigna et quam per angustum quod concessum erat temporis spatium satis ad publicam lucem sustinendam maturare valerem, substiti tandem in eligendis quibusdam propositionibus theoriam curvaturae superficierum spectantibus, quas velut spicilegium in agro, messe jam congesta, antehac conquisiveram. Quippe moverat animum meum cogitatio: dictam doctrinam, etsi jam dudum egregie elaboratam, tamen ideo fortasse nondum penitus exhaustam esse, quia exstruere Caesarea munificentia ingenio Tuo permisit. In illa sede eodem semper animi ardore, eadem ingenii vi ac sollertia totum coelum perscrutans, ut maximorum phaenomenorum sideralium notitiam nobis comparasti, ita ipsam observandi ac dimetiendi artem, qua fere tota naturae scientia nititur, novis subsidiis ac methodis ad fastigium antea ignotum evexisti.

Quae cum ita sint, nihil habuimus antiquius, quam ut intimos gratiae atque admirationis sensus, quibus Te Tuaque merita semper prosequimur, oblata sollenni hac occasione his literis publice declaremus.

Vale, Vir Eximie, nobisque et universitati nostrae, gloriae Tuae cunabulis, ut semper fecisti, favere perge.

Dabamus Dorpati Livonorum d. III m. Octobris a. MDCCCLXIII.

**Universitatis Caesareae Dorpatensis**

***Rector et Senatus.***

# De curvatura superficierum quaestiones.

Constat theoriam curvaturae superficierum non modo per se elegantissimam esse, sed etiam fecundissimam, quippe quae ad plura insignia incrementa, quibus nostra aetate geometria sublimior aucta est, aditum aperuerit. Hoc enim e fonte Mongii inventum celeberrimnm linearum curvaturae maximae vel minimae directionem indicantium demanavit, quod genus curvarum postea ad integrationem aequationis notissimae, qua in superficie secundi gradus linearum brevissimarum cursus definitur, Jacobii ingenio viam monstravit, nec non, quae est res gravissima, novam coordinatarum speciem suppeditavit, efficacissimis artis analyticae promovendae instrumentis adnumerandam. Eodem fundamento innititur doctrina nova flexionis superficierum, quam antea plane ignotam Gaussius in celeberrimis disquisitionibus circa superficies curvas in lucem protulit. Nam casus particularis superficierum in planum explicabilium, quamquam diu notus, tamen adeo sterilis manserat, ut ne ansam quidem quaestionis generalioris attingendae alicui praebuisse videatur, donec disquisitiones laudatae veram ejus naturam patefacerent.

Igitur quum diem semisaecularem illustrissimi astronomi quondum Dorpatensis, nunc Petropolitani sollenni aliqua scriptione auspicandi munus a Senatu nostro academico mihi demandatum esset, nolui quidem meam qualemcunque operam recusare, sed circumspiciens materiem, quae et hac sollenni occasione non esset indigna et quam per angustum quod concessum erat temporis spatium satis ad publicam lucem sustinendam maturare valerem, substiti tandem in eligendis quibusdam propositionibus theoriam curvaturae superficierum spectantibus, quas velut spicilegium in agro, messe jam congesta, antehac conquisiveram. Quippe moverat animum meum cogitatio: dictam doctrinam, etsi jam dudum egregie elaboratam, tamen ideo fortasse nondum penitus exhaustam esse, quia geometrae fere omnes, qui hanc rem attigerunt, ad contrahendos calculos compendiis quibusdam atque artificiis usi sint, quae licet ratiociniis singularem brevitatem et simplicitatem conciliarent, tamen ad formulas analyticas generalissimas perducere non poterant. Solus auctor disquisitionum jam supra laudatarum valorem mensurae curvaturae in forma generalissima exhibuit, reliqua tamquam ab instituto suo aliena non attigit. Igitur non supervacaneum duxi, theoriam curvaturae superficierum denuo ita repetere, ut demonstrationum non simplicitatem, sed formularum generalitatem spectarem, omissis omnibus calculi compendiis, quae vel e forma particulari aequationis superficiei, vel e delectu axium petuntur. Quo conatu quae pauca in lucem protrahere mihi contigit, aliquid tamen ad rem uberius explicandam conferre ideoque geometrarum judicio submitti posse mihi visa sunt.

Proficiscamur ab aequationibus

$$u = x + qa$$
$$v = y + qb$$
$$w = z + qc,$$

in quibus $x\,y\,z$ repraesentant coordinatas orthogonales puncti arbitrarii in superficie siti, $q$ longitudinem lineae normalis a dicto puncto, quod per signum $(x\,y\,z)$ commode denotatur, ad aliud punctum $(u\,v\,w)$ in ipsa normali situm productae, denique $a\,b\,c$ cosinus angulorum, inter directiones rectae $q$ et axium (positivarum) $x\,y\,z$ deinceps comprehensorum. Quibus aequationibus ita differentiatis, ut argumenta $u\,v\,w$ tamquam invariabilia considerentur, obtinemus:

$$0 = dx + qda + adq$$
$$0 = dy + qdb + bdq$$
$$0 = dz + qdc + cdq;$$

quibus cum accedant relationes

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$
$$adx + bdy + cdz = 0,$$

statim colligitur esse: $dq = 0$, nec non:

$$dx : dy : dz = da : db : dc,$$

qua proportione, specie quidem duplici, re vera unica, constat directiones maximae et minimae curvaturae determinari, quas directiones principales in sequentibus nuncupare placet.



Consideremus praeeunte auctore disquisitionum sphaeram radio 1 circa initium axium descriptam, ponamusque cuilibet superficiei puncto $(x\,y\,z)$ respondere in sphaera punctum, cujus coordinatae in eodem systemate axium $x\,y\,z$ sint deinceps $a\,b\,c$, ita ut punctum $(x\,y\,z)$ alteri puncto $(a\,b\,c)$, quod brevitatis causa interdum prioris imaginem sphaericam appellabimus, per normales parallelas respondeat. Igitur lineolae $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ inter duo puncta superficiei infinite parum distantia imago erit $d\sigma = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$.

His positis e proportione supra stabilita protinus intelligitur, si $ds$ sit elementum lineare in directione principali situm, ejus imaginem $d\sigma$ ipsi elemento $ds$ parallelam esse; quae est proprietas curvarum directiones principales indicantium et notissima et geometrice intuenti statim obvia. Praeterea curvatura maxima vel minima superficiei erit $\frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{1}{q}$.

Concipiamus aequationem superficiei datam esse in forma $\Phi\,(x, y, z) = 0$, ponamusque brevitatis gratia $\sqrt{\frac{d\Phi}{dx}^2 + \frac{d\Phi}{dy}^2 + \frac{d\Phi}{dz}^2} = N$; tunc $a\,b\,c$ his formulis exprimentur:

$$a = \frac{1}{N} \cdot \frac{d\Phi}{dx}, \quad b = \frac{1}{N} \cdot \frac{d\Phi}{dy}, \quad c = \frac{1}{N} \cdot \frac{d\Phi}{dz}.$$

Igitur aequationi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ valores quicunque arbitrarii argumentorum $x\,y\,z$ satisfaciunt, nulla relationis $\Phi = 0$ inter ea intercedentis ratione habita: unde concluditur etiam ejus differentialia partialia identice evanescere. Qua de causa statuendo

$$da = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$
$$db = \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz$$
$$dc = \alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz,$$

habemus:

$$a\alpha + b\alpha' + c\alpha'' = 0$$
$$a\beta + b\beta' + c\beta'' = 0$$
$$a\gamma + b\gamma' + c\gamma'' = 0.$$

Supra inventae erant ad directiones principales determinandas aequationes: $dx + qda = 0, \; dy + qdb = 0, \; dz + qdc = 0$; sive statuendo $-\frac{1}{q} = k$,

$$kdx = da, \; kdy = db, \; kdz = dc,$$

unde valoribus differentialium $da, \ldots$ substitutis obtinemus:

$$(\alpha - k)\, dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$
$$\alpha' dx + (\beta' - k)\, dy + \gamma' dz = 0$$
$$\alpha'' dx + \beta'' dy + (\gamma'' - k)\, dz = 0$$

quibus accedit:

$$a dx + b dy + c dz = 0.$$

Quarum aequationum partes a sinistra positae si per factores $a\ b\ c\ k$ deinceps multiplicantur, summam $= 0$ praebent, ideoque tribus tantum conditionibus aequivalent. Unde omissa ultima e tribus prioribus statim nanciscimur aequationem tertii quidem gradus determinando $k$ inservientem, puta hanc:

$$(\alpha - k) \left\{ (\beta' - k)(\gamma'' - k) - \beta''\gamma' \right\} + \alpha' \left\{ \beta''\gamma - \beta(\gamma'' - k) \right\} + \alpha'' \left\{ \beta\gamma' - \gamma(\beta' - k) \right\} = 0,$$

quae tamen, cum sit:

$$\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \alpha'(\beta''\gamma - \beta\gamma'') + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = 0,$$

radicem $k = 0$ offert, quam facile perspicitur progressum in ipsa normali indicare, quia in praesenti combinatione quarta aequatio, factore $k = 0$ multiplicata, omnino excidit vimque suam perdidit.

Igitur rejecta radice $k = 0$ obtinemus aequationem:

$$k^2 - (\alpha + \beta' + \gamma'')\, k + \alpha\beta' - \alpha'\beta + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = 0,$$

sive ponendo brevitatis gratia:

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = 2P$$
$$\alpha\beta' - \alpha'\beta + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = Q,$$

invenimus:

$$k^2 - 2Pk + Q = 0,$$

cujus radices $k_1$ et $k_2$ curvaturas principales exhibent, ita ut sit:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} = P, \quad k_1 k_2 = Q,$$

quorum valorum priorem $P$ curvaturam mediam, alterum $Q$ mensuram curvaturae appellari constat. Quarum formas nunc accuratius examinare placet.

Primum si aequationem superficiei datam supponimus in forma $\Phi = f(x,y) - z = 0$, cosinus $a\ b\ c$ a $z$ independentes evadunt; erit igitur $\gamma = \gamma' = \gamma'' = 0$, ideoque $2P = \alpha + \beta'$, $Q = \alpha\beta' - \alpha'\beta$, sive

$$2P = \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy}$$



$$Q = \frac{da}{dx} \cdot \frac{db}{dy} - \frac{da}{dy} \cdot \frac{db}{dx};$$

quae sunt formae valorum $P$ et $Q$ usitatae.

Contra si resolutionem aequationis $\Phi = 0$ nullam admittimus, formae prodeunt multo prolixiores, attamen evolutione perdignae. Nam cum sit:

$$a = \frac{1}{N} \cdot \frac{d\Phi}{dx},$$

obtinemus:

$$da = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = \frac{N^2 d\frac{d\Phi}{dx} - \frac{d\Phi}{dx} \cdot N dN}{N^3} = \frac{1}{N}\, d\frac{d\Phi}{dx} - a\frac{dN}{N}.$$

Jam statuatur:

$$F = \frac{1}{N} \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2} \qquad G = \frac{1}{N} \cdot \frac{d^2\Phi}{dy^2} \qquad H = \frac{1}{N} \cdot \frac{d^2\Phi}{dz^2}$$
$$f = \frac{1}{N} \cdot \frac{d^2\Phi}{dydz} \qquad g = \frac{1}{N} \cdot \frac{d^2\Phi}{dxdz} \qquad h = \frac{1}{N} \cdot \frac{d^2\Phi}{dxdy};$$

unde prodit:

$$\frac{1}{N} \cdot d\frac{d\Phi}{dx} = F dx + h dy + g dz$$
$$\frac{1}{N} \cdot d\frac{d\Phi}{dy} = h dx + G dy + f dz$$
$$\frac{1}{N} \cdot d\frac{d\Phi}{dz} = g dx + f dy + H dz,$$

quibus aequationibus per $a\ b\ c$ deinceps multiplicatis et in summam collectis sequitur:

$$\frac{dN}{N} = (aF + bh + cg)\, dx + (ah + bG + cf)\, dy + (ag + bf + cH)\, dz.$$

Cum autem sit:

$$da = F dx + h dy + g dz - a \cdot \frac{dN}{N},$$

obtinemus $\frac{da}{dx} = \alpha = F - a(aF + bh + cg) = (b^2 + c^2)\, F - abh - acg;$

$$\frac{da}{dy} = \beta = h - a(ah + bG + cf) = (b^2 + c^2)\, h - abG - acf;$$

similiter de ceteris; ita prodeunt novem valores, quos tabula sequens ob oculos sistit:

$$\alpha = + (b^2 + c^2)\, F - abh - acg$$
$$\beta = + (b^2 + c^2)\, h - abG - acf$$
$$\gamma = + (b^2 + c^2)\, g - abf - acH$$
$$\alpha' = - abF + (a^2 + c^2)\, h - bcg$$
$$\beta' = - abh + (a^2 + c^2)\, G - bcf$$
$$\gamma' = - abg + (a^2 + c^2)\, f - bcH$$

$$\alpha'' = -\, acF - bch + (a^2 + b^2)\, g$$
$$\beta'' = -\, ach - bcG + (a^2 + b^2)\, f$$
$$\gamma'' = -\, acg - bcf + (a^2 + b^2)\, H.$$

Hinc statim dirivatur:

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = (b^2 + c^2)\, F + (a^2 + c^2)\, G + (a^2 + b^2)\, H - 2bcf - 2acg - 2abh;$$

qui valor cum sit $= 2P$, nacti sumus expressionem generalem curvaturae mediae hanc:

$$P = \tfrac{1}{2}\,(b^2 + c^2)\, F + \tfrac{1}{2}\,(a^2 + c^2)\, G + \tfrac{1}{2}\,(a^2 + b^2)\, H - bcf - acg - abh.$$

Praeterea facili calculo colligimus:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = (FG - h^2)\, c^2 + (gh - fF)\, bc + (fh - gG)\, ac$$
$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = (GH - f^2)\, a^2 + (fh - gG)\, ac + (fg - hH)\, ab$$
$$\gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = (HF - g^2)\, b^2 + (fg - hH)\, ab + (gh - fF)\, bc;$$

quorum terminorum summa cum sit $= Q$, obtinemus valorem mensurae curvaturae

$$Q = (GH - f^2)\, a^2 + (HF - g^2)\, b^2 + (FG - h^2)\, c^2$$
$$+\, 2\,(gh - fF)\, bc + 2\,(hf - gG)\, ca + 2\,(fg - hH)\, ab,$$

eundem quem disquisitionum saepius laudatarum articulus nonus exhibet.

Si brevitatis causa statuitur:

$$\tfrac{1}{2}\,\tfrac{dQ}{da} = (GH - f^2)\, a + (fg - hH)\, b + (fh - gG)\, c = I_1$$
$$\tfrac{1}{2}\,\tfrac{dQ}{db} = (fg - hH)\, a + (HF - g^2)\, b + (gh - fF)\, c = I_2$$
$$\tfrac{1}{2}\,\tfrac{dQ}{dc} = (fh - gG)\, a + (gh - fF)\, b + (FG - h^2)\, c = I_3,$$

manifesto erit:

$$Q = I_1 a + I_2 b + I_3 c.$$

Praeterea notamus relationes sequentes, quarum tres jam supra exhibitae sunt, reliquae simili calculo comprobantur:

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = I_1 a \qquad \alpha''\gamma' - \alpha'\gamma'' = I_2 a \qquad \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = I_3 a$$
$$\beta''\gamma - \beta\gamma'' = I_1 b \qquad \alpha\gamma'' - \alpha''\gamma = I_2 b \qquad \alpha''\beta - \alpha\beta'' = I_3 b$$
$$\beta\gamma' - \beta'\gamma = I_1 c \qquad \alpha'\gamma - \alpha\gamma' = I_3 c \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = I_3 c.$$

His praemissis jam aequationem $k^2 - 2Pk + Q = 0$ accuratius examinemus eique radices reales semper competere demonstremus. Nam etsi haec propositio ratiocinio simplicissimo stabiliri solet, tamen quomodo ex aequatione generalissima elicienda



sit quaerere minime otiosum est. Manifesto quaestio in hanc redit, num differentia $P^2 - Q$ unquam negativum valorem adsciscere possit. Ponamus igitur:

$$P^2 - Q = \Omega,$$

praeterea brevitatis causa:

$$bcf + acg + abh = n$$
$$abfg + bcgh + cahf = l$$
$$a^2f^2 + b^2g^2 + c^2h^2 = m^2$$

unde fit:

$$\Omega = \tfrac{1}{4}\left\{ (b^2 + c^2)\, F + (c^2 + a^2)\, G + (a^2 + b^2)\, H - n \right\}^2 + m^2 - 2l$$
$$- a^2GH - b^2HF - c^2FG + 2bcfF + 2cagG + 2abhH.$$

Consideremus formam $\Omega$ quatenus ex argumentis $F\ G\ H$ composita est, et quaeramus minimum valorem quem illis $F\ G\ H$ ad libitum mutatis, omnibus reliquis intactis manentibus, $\Omega$ induere possit. Quem in finem adhibita differentiatione colligimus:

$$\frac{d\Omega}{dF} = \tfrac{1}{2}\left\{ (b^2 + c^2)\, F + (c^2 + a^2)\, G + (a^2 + b^2)\, H - 2n \right\}\left\{ b^2 + c^2 \right\}$$
$$- b^2H - c^2G + 2bcf,$$

qui valor propter relationem $(a^2 + c^2)\,(b^2 + c^2) - 2c^2 = a^2b^2 - c^2$, et quae his similia hoc loco occurrunt, in formam simpliciorem redit, quam una cum reliquis ejusdem generis tabula sequens ostendit:

$$2\,\frac{d\Omega}{dF} = (b^2 + c^2)^2\, F + (a^2b^2 - c^2)\, G + (a^2c^2 - b^2)\, H + 4bcf - 2(b^2 + c^2)\, n$$
$$2\,\frac{d\Omega}{dG} = (a^2b^2 - c^2)\, F + (a^2 + c^2)^2\, G + (b^2e^2 - a^2)\, H + 4acg - 2(a^2 + c^2)\, n$$
$$2\,\frac{d\Omega}{dH} = (a^2c^2 - b^2)\, F + (b^2c^2 - a^2)\, G + (a^2 + b^2)^2\, H + 4abh - 2(a^2 + b^2)\, n.$$

Quam tabulam accurate inspicientes manifesto deprehendimus relationem:

$$\frac{d\Omega}{dF} + \frac{d\Omega}{dG} + \frac{d\Omega}{dH} = 0.$$

Videlicet est:

$$(b^2 + c^2)^2 + a^2\,(b^2 + c^2) - b^2 - c^2 = (a^2 + b^2 + c^2 - 1)\,(b^2 + c^2) = 0;$$

praeterea summa terminorum extremorum $4(bcf + acg + abh - n) = 0$.

Hinc apparet aequationes $\frac{d\Omega}{dF} = 0$, $\frac{d\Omega}{dG} = 0$, $\frac{d\Omega}{dH} = 0$, quibus ad investigandum minimum $\Omega$ opus esse videbatur, nequaquam inter se independentes esse, sed duabus ex iis positis tertiam necessario valere. Igitur ejusmodi valores argumentorum $F\ G\ H$, qui $\Omega$ minimum reddant, determinati non exstant, imo aequatio differentialis partialis supra proposita docet, $\Omega$ omnino a singulis argumentis $F\ G\ H$ non pendere, sed a solis earum differentiis $F - G$, $H - G$, quas ideo in valorem hujus $\Omega$ introduci necesse est. Unde posito

$$F = G + U, \quad H = G + V,$$

primo loco obtinemus:

$$4\Omega = \left\{ (b^2 + c^2)\, U + (a^2 + b^2)\, V + 2G - 2n \right\}^2$$
$$- 4G \left\{ (b^2 + c^2)\, U + (a^2 + b^2)\, V - 2n \right\}$$
$$- 4G^2 - 4b^2UV + 8bcfU + 8abhV + 4m^2 - 8l,$$

quae formula secundum potestates argumenti $G$ evoluta statim in hanc abit:

$$4\Omega = \left\{ (b^2 + c^2)\, U + (a^2 + b^2)\, V - 2n \right\}^2 - 4b^2UV + 8bcfU$$
$$+ 8abhV + 4m^2 - 8l,$$

e qua $G$ omnino excidit.

Igitur ut $\Omega$ quam minimum fiat, computandi sunt valores

$$2\frac{d\Omega}{dU} = \left\{ (b^2 + c^2)\, U + (a^2 + b^2)\, V - 2n \right\} \left\{ b^2 + c^2 \right\} - 2b^2V + 4bcf$$

$$2\frac{d\Omega}{dV} = \left\{ (b^2 + c^2)\, U + (a^2 + b^2)\, V - 2n \right\} \left\{ a^2 + b^2 \right\} - 2b^2U + 4abh,$$

qui facile contrahuntur in sequentes:

$$2\frac{d\Omega}{dU} = (b^2 + c^2)^2\, U + (a^2c^2 - b^2)\, V + 4bcf - 2(b^2 + c^2)\, n$$

$$2\frac{d\Omega}{dV} = (a^2c^2 - b^2)\, U + (a^2 + b^2)^2\, V + 4abh - 2(a^2 + b^2)\, n;$$

unde eliminato $U$ prodit:

$$2\left\{ \frac{d\Omega}{dV} - \frac{a^2c^2 - b^2}{(b^2 + c^2)^2} \frac{d\Omega}{dU} \right\} = \left\{ (a^2 + b^2)^2 - \frac{a^2c^2 - b^2}{(b^2 + c^2)^2} \right\} V$$
$$+ 4b \left\{ ah - \frac{a^2c^2 - b^2}{(b^2 + c^2)^2}\, cf \right\} - 2n \left\{ a^2 + b^2 - \frac{a^2c^2 - b^2}{b^2 + c^2} \right\}$$
$$= \frac{4a^2b^2c^2V + 4ab\,(b^2 + c^2)^2\, h + 4bc\,(b^2 - a^2c^2)\, f - 4b^2\,(b^2 + c^2)\, n}{(b^2 + c^2)^2}.$$



Scribatur brevitatis gratia

$$\Omega_1 \text{ pro } \frac{\Omega}{dU}, \quad \Omega_2 \text{ pro } \frac{d\Omega}{dV} - \frac{a^2c^2 - b^2}{(b^2 + c^2)^2} \cdot \frac{d\Omega}{dU};$$

deinde in locum termini $n$ substituatur ejus valor

$$n = bcf + acg + abh;$$

quo pacto prodit:

$$2\Omega_1 = (b^2 + c^2)^2\, U + (a^2c^2 - b^2)\, V + 2(1 + a^2)\, bcf - 2a\,(b^2 + c^2)\,(cg + bh),$$

$$2\Omega_2 = \frac{4abc\,\big(abcV + (b^2 - c^2)\, af - (b^2 + c^2)\,(bg - ch)\big)}{(b^2 + c^2)^2}$$

Ita denique $\Omega$ hanc in formam redactum est:

$$\Omega = \frac{\Omega_1{}^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{\Omega_2{}^2}{\left(\frac{2abc}{b^2 + c^2}\right)^2} + R,$$

cujus summae terminus extremus $R$ neutrum argumentorum $U$, $V$ continet. Jam vero statim monstrabitur, terminum $R$ omnino nullum adesse. Quem in finem sufficit, argumentis $U$ et $V$ valores quoslibet constantes attribuisse, quorum ope residuum $R$ quam facillime computari possit. Ponamus igitur

$$V = 0, \quad U = \frac{2n}{b^2 + c^2};$$

unde fit

$$\Omega = \frac{4bcfn}{b^2 + c^2} + m^2 - 2l,$$

$$\Omega_1 = 2bcf, \quad \Omega_2 = \frac{2abc}{b^2 + c^2} \cdot S,$$

siquidem compendii causa paulisper statuimus:

$$\frac{(b^2 - c^2)\, af - (b^2 + c^2)\,(bg - ch)}{b^2 + c^2} = S.$$

Unde evenit:

$$R = \frac{4bcfn}{b^2 + c^2} + m^2 - 2l - \frac{4b^2c^2f^2}{(b^2 + c^2)^2} - S^2$$

sive $R = \dfrac{4bcf}{b^2 + c^2} \left\{ n - \dfrac{bcf}{b^2 + c^2} \right\} + m^2 - 2l - S^2.$

Jam adscitis valoribus

$$n - \frac{bcf}{b^2 + c^2} = a\,(cg + bh) - \frac{a^2bcf}{b^2 + c^2},$$

$$m^2 - 2l = a^2f^2 - 2(bg + ch)\, af + (bg - ch)^2$$

obtinemus

$$R = \frac{4abcf\,(cg + bh)}{b^2 + c^2} - \frac{4\,a^2b^2c^2f^2}{(b^2 + c^2)^2} + a^2f^2 - 2a\,(bg + ch)\,f + (bg - ch)^2$$

$$- \frac{(b^2 - c^2)^2\, a^2f^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{2(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2}\,(bg - ch)\, af - (bg - ch)^2,$$

ubi pro $S^2$ ejus valorem restituimus.

Qua e formula singulos terminos factore $a^2f^2$ affectos in summam colligendo invenimus:

$$1 - \frac{(b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2}{(b^2 + c^2)^2} = 1 - \frac{(b^2 + c^2)^2}{(b^2 + c^2)^2} = 0;$$

summa terminorum in $2af$ multiplicatorum fit:

$$\frac{2bc}{b^2 + c^2}\,(cg + bh) + \frac{(b^2 - c^2)}{b^2 + c^2}\,(bg - ch) - bg - ch$$

$$= \frac{2bc}{b^2 + c^2}\,(cg + bh) - \frac{2c^2bg}{b^2 + c^2} - \frac{2b^2ch}{b^2 + c^2} = 0;$$

denique termini a factore $f$ liberi manifesto se mutuo destruunt; est igitur $R = 0$ ac denique:

$$\Omega = \frac{\Omega_1{}^2}{(b^2 + c^2)^2} + \frac{\Omega_2{}^2}{\left(\frac{2abc}{b^2 + c}\right)^2}$$

sive $$\Omega = \left\{\frac{(b^2 + c^2)^2\, U + (a^2c^2 - b^2)\, V + 2\,(1 + a^2)\, bcf - 2a\,(b^2 + c^2)\,(cg + bh)}{2(b^2 + c^2)}\right\}^2$$

$$+ \left\{\frac{abcV + (b^2 - c^2)\, af - (b^2 + c^2)\,(bg - ch)}{b^2 + c^2}\right\}^2,$$

ubi notandum est, $U$ pro $F - G$, $V$ pro $H - G$ scriptum esse.

Cum sit $\Omega = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2$, formula inventa docemur, differentiam inter curvaturam maximam et minimam non pendere a singulis valoribus $F\ G\ H$, sed a solis differentiis $F - G$, $H - G$.

Ex eadem formula petendae sunt conditiones quibus ea puncta superficiei determinantur, quae umbilicorum nomine designari solent. In quibus cum sit $k_1 - k_2 = 0$ sive $\Omega = 0$, locum habent aequationes sequentes:

$$(b^2 + c^2)^2\,(F - G) + (b^2 - a^2c^2)\,(G - H) + 2(1 + a^2)\, bcf - 2(b^2 + c^2)\, a(cg + bh = 0$$

$$abc\,(G - H) + (c^2 - b^2)\, af + (b^2 + c^2)\,(bg - ch) = 0.$$



Vix opus est monere, calculos praecedentes deficere, si in puncto aliquo habetur $b = 0$, $c = 0$, ideoque $b^2 + c^2 = 0$. Quo in casu remedium axem $x$ cum $z$ commutandi in promtu est, nisi ad formam primitivum, qua supra $\Omega$ repraesentavimus, recurrere mavis, quae statim in hujusmodi casu suggerit:

$$\Omega = \left(\frac{H - G}{2}\right)^2 + f^2.$$

E tabula argumenta $\alpha\ \beta\ \gamma\ \ldots$ exhibente facile colliguntur relationes quaedam, quae inter ea et cosinus $a\ b\ c$ intercedunt; quas evolvi necesse est. Eliminatis enim deinceps $F\ G\ H$ ex aequationibus quibus $\alpha$ et $\alpha'$, $\beta$ et $\beta'$, $\gamma$ et $\gamma'$ exprimuntur, prodeunt relationes:

$$ab\alpha + (b^2 + c^2)\,\alpha' = -\,bcg + c^2h$$
$$-\,(a^2 + c^2)\,\beta - ab\beta' = acf - c^2h$$
$$bc\gamma - ac\gamma' = bcg - acf,$$

quibus in summam collectis etiam reliqua argumenta $f\ g\ h$ excidunt. Ita prodit sequentium aequationum prima; similiter secunda et tertia:

$$ab\alpha - (a^2 + c^2)\,\beta + bc\gamma = -\,(b^2 + c^2)\,\alpha' + ab\beta' + ac\gamma'$$
$$ac\alpha' + bc\beta' - (a^2 + b^2)\,\gamma' = ab\alpha'' - (a^2 + c^2)\beta'' + bc\gamma''$$
$$-\,(b^2 + c^2)\,\alpha'' + ab\beta'' + ac\gamma'' = ac\alpha + bc\beta - (a^2 + b^2)\,\gamma.$$

Attamen ut calculos quantum fieri potest contrahamus, supponamus $c$ non evanescere, quod licet cum $a\ b\ c$ omnes simul evanescere non possint, ac statuamus:

$$\alpha - \frac{a\gamma}{c} = \mathfrak{A},\quad \beta - \frac{b\gamma}{c} = \mathfrak{B}$$

$$\alpha' - \frac{a\gamma'}{c} = \mathfrak{A}',\quad \beta' - \frac{b\gamma'}{c} = \mathfrak{B}';$$

unde fit:

$$ab\alpha - (a^2 + c^2)\,\beta + bc\gamma = ab\mathfrak{A} - (a^2 + c^2)\,\mathfrak{B};$$

quo pacto relationum praecedentium prima hanc formam induit:

$$ab\mathfrak{A} - (a^2 + c^2)\,\mathfrak{B} = -\,(b^2 + c^2)\,\mathfrak{A}' + ab\mathfrak{B}'.$$

Praeterea fit: $2P = \alpha + \beta' + \gamma'' = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}' + \frac{a\gamma + b\gamma' + c\gamma''}{c}$

sive quia $a\gamma + b\gamma' + c\gamma'' = 0$,

$$2P = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}';$$

similiter obtinetur

$$Q = \alpha\beta' - \alpha'\beta + \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' + \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = \mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B};$$

itaque $\Omega = P^2 - Q = \left(\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}'}{2}\right)^2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B})$

sive

$$4\Omega = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B}')^2 + 4\mathfrak{A}'\mathfrak{B};$$

quae formula accedente relatione

$$(b^2 + c^2)\,\mathfrak{A}' = -\,ab\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}') + (a^2 + c^2)\,\mathfrak{B}$$

in hanc redit:

$$4(b^2 + c^2)\,\Omega = (b^2 + c^2)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}')^2 - 4ab\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}')\,\mathfrak{B} + 4(a^2 + c^2)\,\mathfrak{B}^2$$

sive $4(b^2 + c^2)^2\,\Omega = \left\{(b^2 + c^2)\,(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}') - 2ab\mathfrak{B}\right\}^2 + 4c^2\mathfrak{B}^2.$

Ita, si aequatio $k^2 - 2Pk + Q = 0$ in ea forma data est, quam primo loco obtinuimus, quomodo illam radicibus realibus gaudere demonstrari possit, ostensum est.

Directionibus principalibus determinandis inservit aequatio

$$(\alpha - k)\,dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

combinata cum hac:

$$adx + bdy + cdz = 0;$$

unde eliminato $dz$ habetur:

$$(\mathfrak{A} - k)\,dx + \mathfrak{B}dy = 0.$$

Erit igitur in directione principali

$$dx : dy : dz = -\,c\mathfrak{B} : c\,(\mathfrak{A} - k) : a\mathfrak{B} - b\,(\mathfrak{A} - k),$$

qua in proportione pro $k$ deinceps radices $k_1$ et $k_2$ aequationis $k^2 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}')\,k + \mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B} = 0$ substituendae sunt, ut binae directiones determinentur, quas angulum rectum comprehendere notissimum est et facillime demonstratur. Jam vero ut eandem propositionem e formulis generalibus eliciamus, ostendendum est esse:

$$S = c^2\mathfrak{B}^2 + c^2\,(\mathfrak{A} - k_1)\,(\mathfrak{A} - k_2) + (a\mathfrak{B} - b\mathfrak{A} + bk_1)\,(a\mathfrak{B} - b\mathfrak{A} + bk_2) = 0.$$

Introductis valoribus $k_1 + k_2 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}_1$, $k_1k_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}$, fit:

$$S = c^2\,(\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{A}^2) + (a\mathfrak{B} - b\mathfrak{A})^2 + (b\,(a\mathfrak{B} - b\mathfrak{A}) - c^2\mathfrak{A})\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}')$$
$$+ (b^2 + c^2)\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{B}),$$

unde facili reductione colligitur:

$$S = \left((c^2 + a^2)\,\mathfrak{B} + ab\mathfrak{B}' - (b^2 + c^2)\,\mathfrak{A}' - ab\mathfrak{A}\right)\mathfrak{B},$$

sive cum secundum praecedentia summa uncis inclusa evanescat, $S = 0$.



Restat ut curvaturam mediam eodem modo, quo disquisitiones saepius laudatae mensuram curvaturae, ope argumentorum ex arbitrio electorum $p$ et $q$ generalissime repraesentemus. Quem in finem optimum erit, signa in disquisitionibus adhibita abhinc omnino adoptare, quorum igitur brevem conspectum in tabula sequente offerre placet, ne notationes, quibus hucusque usi sumus, cum iis quas abhinc adoptabimus confundantur. Statuamus igitur duce auctore disquisitionum:

$$dx = adp + a'dq,\quad dy = bdp + b'dq,\quad dz = cdp + c'dq$$
$$da = \alpha dp + \alpha' dq,\quad db = \beta dp + \beta' dq,\quad dc = \gamma dp + \gamma' dq$$
$$da' = \alpha' dp + \alpha'' dq,\quad db' = \beta' dp + \beta'' dq,\quad dc' = \gamma' dp + \gamma'' dy.$$
$$bc' - cb' = A,\quad ca' - ac' = B,\quad ab' - ba' = C.$$

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = D,\ A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D',\ A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D''.$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = E,\ aa' + bb' + cc' = F,\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = G.$$
$$EF - G^2 = A^2 + B^2 + C^2 = \Delta.$$

$$\frac{A}{\sqrt{\Delta}} = X,\ \frac{B}{\sqrt{\Delta}} = Y,\ \frac{C}{\sqrt{\Delta}} = Z.$$

Proficiscamur ab expressione notissima curvaturae mediae, quae superficei aequationem in forma $z - f(x, y) = 0$ datam supponit, ex qua deducitur: $dz = tdz + udy$, $dt = Tdx + Udy$, $du = Udx + Vdy$; quibus positis curvatura media hunc valorem nanciscitur:

$$P = \frac{(1 + u^2)\,T - 2tuU + (1 + t^2)\,V}{2(1 + t^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui, cum ex aequatione $Adx + Bdy + Cdz = 0$ habeatur:

$$t = -\frac{A}{C},\quad u = -\frac{B}{C},$$

statim transformatur in sequentem:

$$2P = \frac{(B^2 + C^2)\,C^3T - 2AB\,C^3U + (A^2 + C^2)\,C^3V}{\Delta^{\frac{3}{2}}\,.\,C^2}.$$

Deinde differentialia $dt$ et $du$ evoluta suppeditant (cf. disqu. art. 10):

$$C^3T = Db'^2 - 2D'bb' + D''b^2$$
$$C^3U = Da'b' + D'\,(ab' + a'b) - D''ab$$
$$C^3V = Da'^2 - 2D'aa' + D''a^2.$$

In expressione proposita curvaturae mediae duas partes distinguere juvat, quarum prior terminos $C^3T + C^3V$, altera reliquos terminos amplectatur, ita ut sit:

$$2P \, . \, \Delta^{\frac{3}{2}} = C^3T + C^3V + \frac{S}{C^2},$$

siquidem $B^2C^3I - 2ABC^3U + A^2C^3V$ brevitatis gratia litera $S$ denotamus. Manifesto summa $S$ introductis valoribus terminorum $C^3T, \ldots$ supra exhibitis, per $C^2$ divisibilis esse debet; quod levi calculo confirmatur. Fit enim:

$$\begin{aligned} S = D\,(B^2b'^2 + 2ABa'b' + A^2a'^2) &+ D''\,(B^2b^2 + 2ABab + A^2a^2) \\ &- 2D'\,(B^2bb' + AB\,(ab' + a'b) + A^2aa') \\ = D\,(Aa' + Bb')^2 + D''\,(Aa + Bb)^2 &- 2D'\,(Aa + Bb)\,(Aa' + Bb'). \end{aligned}$$

Unde colligitur, cum sit $Aa + Bb + Cc = 0$, $Aa' + Bb' + Cc' = 0$,

$$S = (Dc'^2 - 2D'cc' + D''c^2)\,C^2.$$

Insuper cum habemus

$$C^3T + C^3U = D\,(a'^2 + b'^2) - 2\,D'\,(aa' + bb') + D''\,(a^2 + b^2),$$

addendo

$$\frac{S}{C^2} = Dc'^2 - 2Dcc' + D''c^2$$

colligimus valorem curvaturae mediae:

$$P = \frac{DG - 2D'F + D''E}{2\,.\,\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

Jam vero est:

$$\frac{D}{\sqrt{\Delta}} = X\alpha + Y\beta + Z\gamma = X\frac{d^2x}{dp^2} + Y\frac{d^2y}{dp^2} + Z\frac{d^2z}{dp^2}$$

$$= \frac{d}{dp}\left\{X\frac{dx}{dp} + X\frac{dy}{dp} + Z\frac{dz}{dp}\right\} - \left\{\frac{dX}{dp}\cdot\frac{dx}{dp} + \frac{dY}{dp}\cdot\frac{dy}{dp} + \frac{dZ}{dp}\cdot\frac{dz}{dp}\right\};$$

unde sequitur, quoniam $X\frac{dx}{dp} + Y\frac{dy}{dp} + Z\frac{dz}{dp} = \frac{Aa + Bb + Cc}{\sqrt{\Delta}}$

pro quibuslibet argumentorum $p$ et $q$ valoribus evanescit,

$$\frac{D}{\sqrt{\Delta}} = -\left(a\frac{dX}{dp} + b\frac{dY}{dp} + c\frac{dZ}{dp}\right).$$

Similem in modum ostenditur esse:

$$\frac{D''}{\sqrt{\Delta}} = -\left(a'\frac{dX}{dq} + b'\frac{dY}{dq} + c'\frac{dZ}{dq}\right),$$



nec non:

$$\frac{D'}{\sqrt{\Delta}} = -\left(a\frac{dX}{dq} + b\frac{dY}{dq} + c\frac{dZ}{dq}\right) = -\left(a'\frac{dX}{dp} + b'\frac{dY}{dp} + c'\frac{dZ}{dp}\right).$$

Jam consideremus imaginem sphaericam elementi

$$ds = \sqrt{Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2},$$

quae erit $d\sigma = \sqrt{E'dp^2 + 2F'dpdq + G'dq^2}$,

siquidem statuitur:

$$E' = \left(\frac{dX}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dp}\right)^2$$

$$F' = \frac{dX}{dp}\cdot\frac{dX}{dq} + \frac{dY}{dp}\cdot\frac{dY}{dq} + \frac{dZ}{dp}\cdot\frac{dZ}{dq}$$

$$G' = \left(\frac{dX}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dq}\right)^2.$$

Praeterea convenit directiones elementorum linearium

$$\sqrt{E}\,.\,dp,\quad \sqrt{G}\,.\,dq,\quad \sqrt{E'}\,.\,dp,\quad \sqrt{G'}\,.\,dq$$

sive rectarum ea tangentium per symbola

$$t_p \qquad t_q \qquad t'_p \qquad t'_q$$

deinceps indicare, quorum ope anguli inter binas directiones commode repraesentantur; ita exempli causa angulum inter directiones elementorum $\sqrt{E}\,.\,dp$ et $\sqrt{G'}\,.\,dq$ per $(t_p\,t'_q)$ denotabimus. His praemissis manifesto habemus:

$$\frac{D}{\sqrt{\Delta}} = -\sqrt{EE'}\,.\,\cos\,(t_p\,t'_p), \qquad \frac{D''}{\sqrt{\Delta}} = -\sqrt{GG'}\,.\,\cos\,(t_q\,t'_q),$$

$$\frac{D'}{\sqrt{\Delta}} = -\sqrt{EG'}\,.\,\cos\,(t_p\,t'_q) = -\sqrt{E'G}\,.\,\cos\,(t_q\,t'_p),$$

unde demanat expressio quaesita curvaturae mediae:

$$P = -\frac{G\sqrt{EE'}\,.\,\cos\,(t_p\,t'_p) + E\sqrt{GG'}\,.\,\cos\,(t_q\,t'_q) - 2F\sqrt{EG'}\,.\,\cos\,(t_p\,t'_q)}{2(EG - F^2)}$$

in qua propter inventam relationem

$$\sqrt{EG'}\,\cos\,(t_p\,t'_q) = \sqrt{E'G}\,\cos\,(t_q\,t'_p)$$

pro termino ultimo numeratoris etiam scribere licet:

$$-\,2F\sqrt{E'G}\,\cos\,(t_q\,t'_p)$$

Inventa formula docet, quomodo curvatura media pendeat ab elemento lineari ejusque imagine, nec non a situ, quem illud respectu alterius occupat. Ponamus elementa $\sqrt{E}\,.\,dp$, $\sqrt{G}\,.\,dq$ sequi directiones principales, quo in casu elementa imaginis $\sqrt{E'}\,.\,dp$, $\sqrt{G'}\,.\,dq$ prioribus deinceps parallela sunt, ita ut anguli $(t_p\, t'_p)$, $(t_q\, t'_q)$ valores $o$ aut $\pi$ obtineant. Praeterea hypothesis nostra suppeditat: $F = 0$, unde fit:

$$P = \frac{\pm G\sqrt{EE'} \pm E\sqrt{GG'}}{2EG}$$

$$\text{sive } 2P = \pm\sqrt{\frac{E'}{E}} \pm \sqrt{\frac{G'}{G}}$$

quo valore manifesto ad formam primitivam curvaturae mediae delati sumus; patet enim, si $R_1$ et $R_2$ radios curvaturae extremos designant, esse

$$\pm\sqrt{\frac{E'}{E}} = \frac{1}{R_1},\quad \pm\sqrt{\frac{G'}{G}} = \frac{1}{R_2},$$

$$\text{ideoque } 2P = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Conditioni $\sqrt{EG'}\cos(t_p\, t'_q) = \sqrt{E'G}\cos(t_q\, t'_p)$ casus praesens ita satisfacit ut ambo termini evanescant, cum anguli $(t_p\, t'_q)$, $(t_q\, t'_p)$ recti sint.

Verumtamen ut formam inventam curvaturae mediae magis illustremus, aliam viam ingrediamur.

Notum est particulam superficiei circa punctum datum (quod litera $O$ designabimus) sitam repraesentari posse per formulam:

$$z = \tfrac{1}{2}Ax^2 + Bxy + \tfrac{1}{2}Cy^2 + W,$$

siquidem continuitas curvaturae ibi non abrumpitur. Qua in suppositione axes $x$ et $y$, a puncto $O$ inchoantes, in plano superficiem in ipso puncto $O$ tangente accipiuntur, et quidem axis $x$ in directione arbitraria, cui axis $y$ perpendiculariter insistit; denique axis $z$ in normalem puncti $O$ cadit. Signo $W$ reliquam seriei partem, quae altiores argumentorum $x$ et $y$ potestates complectitur, indicare voluimus, cujus tamen in sequentibus nullus usus erit.

Axibus $x$ et $y$ adjungamus novas axes rectilineas obliquangulas $p$ et $q$, in eodem plano tangente sitas, quae igitur cum prioribus in hujusmodi relatione erunt:



$$x = p\cos\alpha + q\cos\beta$$
$$y = p\sin\alpha + q\sin\beta;$$

angulus inter axes $p$ et $q$ comprehensus est $\beta - \alpha = \gamma$. Quas in aequationem superficiei introducendo obtinemus formam:

$$z = \tfrac{1}{2}lp^2 + l'pq + \tfrac{1}{2}l''q^2 + W,$$

siquidem statuimus:

$$A\cos\alpha^2 + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin\alpha^2 = l$$
$$A\cos\alpha\cos\beta + B\sin(\alpha+\beta) + C\sin\alpha\sin\beta = l'$$
$$A\cos\beta^2 + 2B\cos\beta\sin\beta + C\sin\beta^2 = l'',$$

quibus ex aequationibus colligitur:

$$l\,l'' - l'^2 = (AC - B^2)\sin\gamma^2$$
$$l - 2l'\cos\gamma + l'' = (A + C)\sin\gamma^2.$$

Erit igitur in puncto $O$ curvatura media

$$P = \frac{l - 2l'\cos\gamma + l''}{2\sin\gamma^2}$$

$$\text{mensura curvaturae } Q = \frac{l\,l'' - l'^2}{\sin\gamma^2}.$$

His relationibus accedunt sequentes:

$$l\sin\beta^2 - 2l'\sin\alpha\sin\beta + l''\sin\alpha^2 = A\sin\gamma^2$$
$$l\cos\beta\sin\beta - l'\sin(\alpha+\beta) + l''\cos\alpha\sin\alpha = -B\sin\gamma^2.$$
$$l\cos\beta^2 - 2l'\cos\beta\cos\alpha + l''\cos\alpha^2 = C\sin\gamma^2.$$

Differentiando obtinemus:

$$dx = \cos\alpha\,.\,dp + \cos\beta\,.\,dq$$
$$dy = \sin\alpha\,.\,dp + \sin\beta\,.\,dq$$
$$dz = (lp + l'q)\,dp + (l'p + l''q)\,dq$$

omissis in valore differentialis $dz$ potestatibus prima altioribus argumentorum $p$ et $q$, quae in sequentibus nullius momenti sunt. Porro fit:

$$E = 1 + (lp + l'q)^2$$
$$F = \cos\gamma + (lp + l'q)(l'p + l''q)$$
$$G = 1 + (l'p + l''q)^2.$$

Imago puncti $(x\,y\,z)$ determinatur coordinatis quae e formulis supra propositis facile computantur:

$$X = \frac{(l'p + l''q)\sin\alpha - (lp + l'q)\sin\beta}{\sqrt{\Delta}}$$

$$Y = \frac{(lp + l'q)\cos\beta - (l'p + l''q)\cos\alpha}{\sqrt{\Delta}}$$

$$Z = \frac{\sin\gamma}{\sqrt{\Delta}},$$

ubi $\Delta = EG - F^2$, ut ante.

Sed nequaquam hos valores longius evolvi oportet, cum eatenus tantum desiderentur quatenus ad punctum initiale $(O)$ referuntur. In quo cum $p$ et $q$ evanescant, habemus:

$$E = 1,\ F = \cos\gamma,\ G = 1,\ \sqrt{\Delta} = \sin\gamma;\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = 1.$$

Restat ut evolvantur valores quos $\frac{dX}{dp}, \frac{dX}{dq}, \ldots$ in puncto initiali induunt. Qui sunt:

$$\frac{dX}{dp} = \frac{l'\sin\alpha - l\sin\beta}{\sin\gamma},\quad \frac{dY}{dp} = \frac{l\cos\beta - l'\cos\alpha}{\sin\gamma},\quad \frac{dZ}{dp} = 0;$$

$$\frac{dX}{dq} = \frac{l''\sin\alpha - l'\sin\beta}{\sin\gamma},\quad \frac{dY}{dq} = \frac{l'\cos\beta - l''\cos\alpha}{\sin\gamma},\quad \frac{dZ}{dq} = 0.$$

Igitur lineolae $ds = \sqrt{dp^2 - 2\cos\gamma\,.\,dp\,dq + dq^2}$ in superficie data inter puncta $(dp, o)$ et $(o, dq)$, a puncto initiali infinite parum distantia, descriptae respondebit in sphaera lineola

$$d\sigma = \sqrt{E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G'dq^2},$$

ubi $E'$ $F'$ $G'$ his aequationibus definiuntur:

$$E' = \frac{l^2 - 2ll'\cos\gamma + l'^2}{\sin\gamma^2}$$

$$F' = \frac{(l + l'')l' - (ll'' + l'^2)\cos\gamma}{\sin\gamma^2}$$

$$G' = \frac{l'^2 - 2l'l''\cos\gamma + l''^2}{\sin\gamma^2}.$$

Jam consideranda sunt duo triangula, quorum vertices symbolis $(o, o)$, $(dp, o)$, $(o, dq)$ repraesentantur, siquidem symbolo $(p, q)$ punctum, cujus situs argumentis $p$ et $q$ determinatur, denotare placet. Quae triangula cum sint infinite parva, ideoque pro planis habenda, et quidem sita in planis parallelis, quorum alterum superficiem, alterum sphaeram tangit, nihil obstat quominus imaginem e sphaera in superficiem transferamus, ita ut vertices symbolo $(o, o)$ definiti ambo coincidant, ceterum autem situs relativus alterius trianguli ad alterum nihil mutetur.



His praemissis facile intelligitur, vertices trianguli in superficie data inter latera $dp$, $dq$, $ds$ comprehensi determinari coordinatarum $x$ et $y$ valoribus his, tertia $z$ pro omnibus evanescente:

$$x = 0,\ y = 0;\ x_1 = \cos\alpha\,.\,dp,\ y_1 = \sin\alpha\,.\,dp;\ x_2 = \cos\beta\,.\,dq,\ y_2 = \sin\beta\,.\,dq.$$

Sed praestat loco differentialium $dp$, $dq$ simpliciter scribere $p$, $q$; ita obtinemus:

$$x = 0,\ y = 0;\ x_1 = p\cos\alpha,\ y_1 = p\sin\alpha;\ x_2 = q\cos\beta,\ y_2 = q\sin\beta.$$

Contra vertices imaginis prioris trianguli hisce coordinatarum valoribus determinantur, ubi similiter $p$, $q$ pro $dp$, $dq$ scripsimus:

$$x = 0,\ y = 0;\ x_3 = \frac{l'\sin\alpha - l\sin\beta}{\sin\gamma}p,\ y_3 = \frac{l\cos\beta - l'\cos\alpha}{\sin\gamma}\cdot p$$

$$x_4 = \frac{l''\sin\alpha - l'\sin\beta}{\sin\gamma}q,\ y_4 = \frac{l'\cos\beta - l''\cos\alpha}{\sin\gamma}q,$$

ita ut punctum $(x_3 y_3)$ puncto $(x_1 y_1)$, punctum $(x_4 y_4)$ puncto $(x_2 y_2)$, denique punctum initiale sibi ipsi respondeat.

Ex aequationibus propositis statim colligitur relatio:

$$x_2 x_3 + y_2 y_3 = x_1 x_4 + y_1 y_4 = -l',$$

quae est eadem quam in forma generali supra invenimus puta:

$$\sqrt{E'G}\,.\,\cos(t_q, t'_p) = \sqrt{EG'}\,.\,\cos(t_p, t'_q).$$

Aequatio inventa subsistit, quaecunque sit axis $x$ in plano tangente directio. Jam vero si axes $x$ et $y$, quas inter se perpendiculares esse vix necessarium est monere, in directiones principales cadunt, evanescente termino $B$ nova relatio surgit, quam exhibet aequatio

$$l\cos\beta\sin\beta - l'\sin(\alpha + \beta) + l''\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Quae cum ita scribi possit:

$$(l\sin\beta - l'\sin\alpha)\cos\beta = (l'\sin\beta - l''\sin\alpha)\cos\alpha,$$

manifesto redit in hanc:

$$x_2 x_3 = x_1 x_4;$$

aliter vero, puta sic scripta:

$$(l\cos\beta - l'\cos\alpha)\sin\beta = (l'\cos\beta - l''\cos\alpha)\sin\alpha$$

praebet:

$$y_2 y_3 = y_1 y_4,$$

quarum aequationum summa non solum priorem conditionem $x_2 x_3 + y_2 y_3 = x_1 x_4 + y_1 y_4$ restituit, sed etiam veram ejus originem patefacit. Monstrat enim inter utramque figuram respectu directionum principalium ejusmodi relationem intercedere, quam geometrae affinitatem appellare solent. Itaque punctorum in utraque figura sibi correspondentium abscissae in prima directione principali sitae constantem rationem servant:

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{x_4}{x_2} = \frac{l' \sin \alpha - l \sin \beta}{\sin \gamma \cos \alpha} = \frac{l'' \sin \alpha - l' \sin \beta}{\sin \gamma \cos \beta} = -A;$$

facile enim ex aequationibus supra notatis:

$$\frac{l \sin \beta^2 - 2l' \sin \alpha \sin \beta + l'' \sin \alpha^2}{\sin \gamma^2} = A$$

$$l \sin \beta \cos \beta - l' \sin(\alpha + \beta) + l'' \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

eruitur esse:

$$\frac{l'' \sin \alpha - l' \sin \beta}{\sin \gamma \cos \beta} = -A,$$

cujus rei necessitas etiam geometrice rem intuenti obvia est.

Similiter punctorum sibi correspondentium ordinatae in altera directione principali sitae constantem rationem sequuntur, sed a praecedente diversam; est enim

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{y_4}{y_2} = \frac{l \cos \beta - l' \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} = \frac{l' \cos \beta - l'' \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \beta} = -C.$$

Igitur aequatio $x_2x_3 + y_2y_3 = x_1x_4 + y_1y_4$ conditionem affinitatis inter utramque figuram exhibet, quaecunque sit directio axis $x$ in plano figurarum communi. Et re vera si axibus rectangularibus $x$ et $y$ ad libitum datis, haec conditio locum habet, facili calculo inveniuntur axes affinitatis $u$, $v$, quae conditioni $u_2u_3 + v_2v_3 = u_1u_4 + v_1v_4$ ita satisfaciant ut simul habeatur $u_2u_3 = u_1u_4$ et $v_2v_3 = v_1v_4$. Si enim angulus inter axem datam $x$ et directionem incognitam $u$ litera $\delta$ designatur, ita ut sit:

$$u = x \cos \delta + y \sin \delta, \quad v = -x \sin \delta + y \cos \delta,$$

conditiones propositae

$$u_1u_4 = u_2u_3, \quad v_1v_4 = v_2v_3$$

in has formas abeunt:

$$(x_1x_4 - x_2x_3) \cos \delta^2 + (x_1y_4 + x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) \cos \delta \sin \delta + (y_1y_4 - y_2y_3) \sin \delta^2 = 0$$

$$(x_1x_4 - x_2x_3) \sin \delta^2 - (x_1y_4 + x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) \cos \delta \sin \delta + (y_1y_4 - y_2y_3) \cos \delta^2 = 0,$$

quae adhibita additione et subtractione in sequentes contrahuntur:



$$x_1x_4 - x_2x_3 + y_1y_4 - y_2y_3 = 0,$$

$$(x_1x_4 - x_2x_3 - y_1y_4 + y_2y_3) \cos 2\delta + (x_1y_4 + x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) \sin 2\delta = 0,$$

quarum priori cum valores coordinatarum ex hypothesi satisfaciant, manifesto altera directionem quaesitam determinat aequatione

$$tg\, 2\delta = \frac{x_1x_4 - x_2x_3 - y_1y_4 + y_2y_3}{x_2y_3 + x_3y_2 - x_1y_4 - x_4y_1},$$

unde unicum systema axium quaesitarum affinitatis $(u, v)$ adesse colligitur.

E principio affinitatis inter figuram infinite parvam in superficie data ejusque imaginem sphaericam intercedentis demanat etiam propositio: aream imaginis ad aream figurae in superficie datae in quovis loco constantem rationem servare, sive a specie particulari figurae independentem; quam rationem ipsam mensuram curvaturae esse patet.

E valoribus coordinatarum supra exhibitis statim colligitur esse:

$$\frac{x_4y_1 - x_3y_2}{x_1y_2 - x_2y_1} = A, \quad \frac{x_2y_3 - x_1y_4}{x_1y_2 - x_2y_1} = C,$$

unde duplex curvatura media obtinetur

$$A + C = 2P = \frac{x_4y_1 - x_1y_4}{x_1y_2 - x_2y_1} + \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{x_1y_2 - x_2y_1}.$$

Igitur dum mutatione axium $x$ et $y$, quae quidem ubique rectangulares esse supponuntur, singulae sectionum normalium curvaturae $A$ et $C$ mutantur, docet adspectus formae propositae, curvaturam mediam immutatam manere, quippe cujus singulae partes rationes inter areas binorum triangulorum repraesentent, ideoque arbitrario axium delectu affici nequeant.