Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Arvutiteaduse instituut

Informaatika eriala

Priit Kalda

Maatriksiülesannete lahendamise õpikeskkonna loomine

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Valdis Laan, Siim Karus

Seminarijuhendaja: Heili Orav

Tartu 2016

Maatriksiülesannete lahendamise õpikeskkonna loomine

Lühikokkuvõte: Käesoleva lõputöö raames luuakse lineaaralgebra ülesannete, täpsemalt maatriksiülesannete lahendamise õppimist abistav veebikeskkond. See, eelkõige üliõpilastele mõeldud rakendus on kõigile kättesaadav ega vaja mingit sisselogimist. Rakendus sisaldab endas ülesandekogu ja elementaarteisenduste rakendajat. Toetatud on järgneva nelja ülesandetüübi lahendamine, millest igaühe saab taandada elementaarteisenduste järjest rakendamisele: determinandi leidmine, pöördmaatriksi leidmine, lineaarvõrrandisüsteemi üldlahendi leidmine ja maatriksi astaku leidmine. Lahendaja peab endiselt otsustama, kuidas elementaarteisendusi kasutades saada maatriks ülesandes nõutud kujule, kuid teisenduse rakendamine ehk maatriksi sisu (antud juhul arvude) algoritmiline töötlemine ei ole lahendaja poolt vajalik.

Võtmesõnad: Lineaaralgebra, maatriks, veebirakendus, õpitarkvara

CERCS: P175 informaatika, süsteemiteooria; S281 arvutipõhine õpe

Web application for solving matrix problems

Abstract: This thesis involves the development of a web application for solving linear algebra exercises, more precisely matrix problems. This student-focused web-app is accessible for anyone to use with no log in required. It includes a collection of matrix problems and an elementary transformation applying tool. The following four problem types are supported: finding a determinant, finding an inverse matrix, solving a system of linear equations and finding a rank. The solver must still decide, using a series of elementary transformations, how to reach a proper form for given matrix. However applying the elementary transformation, by algorithmically micro-managing the contents of a matrix (in this case, numbers) is not required.

Keywords: linear algebra, matrix, web application, educational software

CERCS: P175 informatics, system theory; S281 computer-assisted education

Sisukord

1. Sissejuhatus

Suur osa ülikoolides õpetatavast algebra esimese kursuse õppeainest on tegelemine maatriksitega. Lühidalt kirjeldatuna on maatriks tabel, mille iga rea ja iga veeru lõikekohal on mingi reaalarv ja mis on ümbritsetud ümarsulgudega. Näiteks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

on maatriks. Maatriksiülesanded hõlmavad endas maatriksile teatud teisenduste rakendamist. Näiteks üheks nendest on mingile reale mingi arvuga korrutatud mingi muu rea liitmine. Kui eelnevas näites liita esimesele reale arvuga üks korrutatud teine rida, on tulemuseks selline maatriks:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Niiviisi muutub maatriksi kuju. Vastavalt ülesande tüübile on soovitav kuju erinev. Sellistest teisendustest ja maatriksitest on lähemal juttu peatükis „Lineaaralgebra”.

Juba selles näites oli vaja selle teisenduse tegemiseks teha peast kaheksa tehet (koos korrutamistega) ning kui teha kaks sellist teisendust, siis oleks kokku juba kuusteist tehet. Need lihtsana tunduvad tehted võivad muutuda veaohtlikuks, kui neid sellises mahus teha. Näiteks tehtes *(-2*1)+3* on lihtne kogemata kirjutada *1* asemel *-1*, mis aga muudaks kogu lahenduse valeks. See näide on üks lihtsamaid, nende arvude hulgas võib olla ka murde, mis lisab kuni kaks korda rohkem potentsiaalseid veakohti juurde koos lugejate ja nimetajatega.

Selliseid tegevusi oleks mugav jätta arvuti hoolde. Praegu seda kuigi laialdaselt klassiruumides ei tehta, sest sooritada kaheksa tehet tavalisel taskuarvutil ei ole kuigi palju mugavam kui neid peast teha ning valides mingi osa, mis kalkulaatoril teha, ei lahenda see tehete paljusust.

Sellest lähtub ka käesoleva töö tulemusena valminud veebirakendus, mis sõltuvalt kasutaja valikust rakendab kaasasoleva ülesandekogu antud ülesande maatriksile teisendust. Kasutaja otsustab, millal on maatriks sobival kujul antud ülesande lahendamiseks ja teatab siis vastuse. Programm sooritab siis automaatkontrolli ja annab kasutajale selle põhjal tagasisidet.

2. Funktsionaalsed nõuded

Käesolevas peatükis käsitletakse peamiselt lisas „Rakenduse funktsionaalsus” välja toodud rakenduse funktsionaalsuse nimekirja, mis on jaotatud põhifunktsionaalsuseks ja lisafunktsionaalsuseks. Põhifunktsionaalsus peab kindlasti olema saadaval valmivas programmis. Lisafunktsionaalsuse all peetakse silmas neid omadusi, mida edasise arendamise käigus lisada.

Rakenduse põhifunktsionaalsus hõlmab maatriksiülesannete kogu, näiteks nagu Tartu Ülikooli kursusel „Algebra I” [1] kasutusel olev ülesannete kogu [2] ning maatriksile arvutusreegli (teisenduse) rakendamise tööriista. Selle all pean silmas programmi osa, mis rakendab maatriksile kasutaja poolt määratud elementaarteisendust. Teisenduse rakendaja funktsionaalsus on välja toodud lisas „Rakenduse funktsionaalsus” põhifunktsionaalsuse esimeses punktis. Selle arendamine moodustab rakenduse programmeerimise seisukohalt valdava enamuse, sest selle baasil saab üles ehitada kõigi ülesandetüüpide lahendamise liidese.

Rakendus toetab nelja tüüpi maatriksiülesandeid: determinandi leidmine, pöördmaatriksi leidmine, lineaarvõrrandisüsteemi lahendamine ja astaku leidmine. Lisas „Rakenduse funktsionaalsus” põhifunktsionaalsuse punktides 2-5 on täpsemalt kirjas, kuidas elementaarteisenduse rakendamise tööriist on kohandatud iga ülesande tüübi jaoks. Maatriksi elementideks võivad olla nii täisarvud, kümnendmurrud kui ka harilikud murrud, sest teisenduste käigus esineb sagedasti olukord, kus mingiks maatriksi elemendiks jääb murd.

3. Lineaaralgebra

Käesolevas peatükis käsitletakse rakendusega seonduvaid matemaatilisi mõisteid ja nende formaalseid definitsioone. Seda matemaatika valdkonda kutsutakse lineaaralgebraks. Üheks lineaaralgebra alamharuks on ka maatriksite teooria. Esimese kursuse algebra loengukonspektis [3] antud maatriksi definitsioon, mis on järgnev:

Olgu m ja n naturaalarvud. ($m \times n$)-maatriks on m reast ja n veerust koosnev tabel, mille iga rea ja iga veeru lõikekohal on mingi reaalarv ja mis on ümbritsetud ümarsulgudega. Neid reaalarve nimetatakse maatriksi elementideks. Kõigi ($m \times n$)-maatriksite hulka tähistatakse $\mathrm{Mat}_{m,n}$ või $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Töös vaadeldavad ülesandetüübid on seotud nelja mõistega: determinant, pöördmaatriks, lineaarvõrrandisüsteem, astak. Kõigil neljal juhul saab ülesande lahendamise taandada rea elementaarteisenduste rakendamisele. Loengukonspekt [3] annab elementaarteisendustele järgneva definitsiooni.

Elementaarteisendused maatriksi ridadega on järgmised teisendused:

1. maatriksi kahe rea äravahetamine;
2. maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga;
3. maatriksi mingile reale mingi arvuga korrutatud teise rea liitmine.

Analoogiliselt defineeritakse elementaarteisendused maatriksi veergudega.

3.1. Determinant

Loengukonspektis [3] antud determinandi definitsioon: ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

determinandiks nimetatakse reaalarvu, mida tähistatakse

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ja mis defineeritakse kui summa

$$|A| := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

n-ndat järku ruutmaatriksi determinanti nimetatakse n-ndat järku determinandiks. Korrutisi $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ nimetatakse determinandi $|A|$ liikmeteks.

Determinandi hõlpsamaks leidmiseks saab maatriksitel rakendada järgnevaid arvutusreegleid:

- Kui maatriksis vahetada ära kaks rida, siis determinant muudab märki (elementaarteisendus 1).
- Kui maatriksi mingi rea kõik elemendid korrutada arvuga *c*, siis tema determinant korrutub ka arvuga *c* (elementaarteisendus 2).
- Kui ruutmaatriksi mingile reale liita suvalise arvuga korrutatud teine rida, siis selle maatriksi determinant ei muutu (elementaarteisendus 3).
- Kui ruutmaatriks sisaldab nullidest koosnevat rida, siis tema determinant on 0.
- Kui ruutmaatriksis on kaks võrdset rida, siis tema determinant on 0.
- Determinandi saab avaldada ka summana väiksemate ruutmaatriksite determinantidest. Näiteks ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  determinandi saab kirjutada *n* liikmest koosneva summana, millest igaüks sisaldab ruutmaatriksit kujul

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n\text{-}1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n\text{-}1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n\text{-}11} & b_{n\text{-}1\,2} & \dots & b_{n\text{-}1n\text{-}1} \end{pmatrix},$$

  mis on saadud maatriksist A ühe kindla rea ja mingi veeru väljajätmisel. Iga liidetav on korrutatud ka väljajäänud rea ja väljajäänud veeru ristekohal oleva elemendiga ja täisarvuga *-1*, mis on viidud väljajäänud rea ja veeru indeksi summast moodustatud astmele. Kirjeldatud protsessi nimetatakse determinandi arendamiseks rea järgi ja see põhineb *Laplace*'i teoreemil.
- Transponeerimisel (ridade ja veergude äravahetamisel) determinant ei muutu, seetõttu kehtib kõik ülaltoodu mis kehtib ridade kohta analoogselt ka veergude kohta.
- Ülemise kolmnurkmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  determinant on

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} \ldots a_{nn}.$$

3.2. Pöördmaatriks

Loengukonspektis [3] antud pöördmaatriksi definitsioon on järgmine:

Maatriksi $A \in Mat_n$ pöördmaatriksiks nimetatakse sellist maatriksit $B \in Mat_n$, mille korral

$$AB = BA = E.$$

Ühtlasi avaldub loengukonspekti [3] järgi ühest tõestusest, et maatriksi A pöördmaatriksi saamiseks tuleb ühikmaatriksi E ridadega teha täpselt samad teisendused (ja täpselt samas järjekorras), mis maatriksi A ridadegagi, et saada A-st ühikmaatriks. See annab meile järgmise praktilise meetodi A pöördmaatriksi leidmiseks. Koostame $(n \times 2n)$-indat järku maatriksi nii, et kirjutame A kõrvale paremale n-indat järku ühikmaatriksi:

$$(A|E).$$

Teeme selle maatriksi ridadega elementaarteisendusi eesmärgiga saada vasakule poole ühikmaatriks. Eelpoolöeldut arvestades jõuame lõpuks maatriksini

$$(E|A^{-1}),$$

mille põhjal saame välja kirjutada A pöördmaatriksi.

3.3. Lineaarvõrrandisüsteem

Loengukonspektis [3] antud lineaarvõrrandisüsteemi definitsioon on järgmine.

Lineaarvõrrandisüsteem üle korpuse K on võrrandisüsteem kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

kus $x_1, \ldots, x_n$ on tundmatud ja $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in K$. Elemente $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in K$ nimetatakse selle võrrandisusteemi kordajateks ja elemente $b_1, \ldots, b_m \in K$ nimetatakse vabaliikmeteks. Märgime, et nii võrrandite arv m, kui tundmatute arv n võivad olla suvalised naturaalarvud.

Maatriksite teooriaga seostuvad lineaarvõrrandisüsteemid selliselt, et defineeritakse lineaarvõrrandisüsteemi laiendatud maatriks, mis oleks järgmine:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

Defineeritakse ka lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriks, mis on analoogne ülaltoodud maatriksiga, kus on ära jäetud vabaliikmete veerg $b_1, \ldots, b_m$.

Kui lineaarvõrrandisusteemi laiendatud maatriksi reavektorite süsteemiga teha elementaarteisendusi või jätta sellest välja nullvektorid, siis tulemuseks saadavale maatriksile vastav lineaarvõrrandisüsteem on ekvivalentne esialgsega mis tähendab, et neil on samad lahendid.

Kui lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksi astak ei ole võrdne laiendatud maatriksi astakuga, siis öeldakse, et lineaarvõrrandisüsteem on mittelahenduv.

Kui lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksi astak on võrdne tundmatute arvuga (ülaltoodud näidetes n), siis on lineaarvõrrandisüsteemil täpselt üks lahend. See näeb välja järgmine:

$x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$, kus $k_1, \dots, k_n \in K$ on kindlad väärtused korpusest K.

Kui lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksi astak on väiksem tundmatute arvust (ülaltoodud näidetes n), siis on lineaarvõrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid. Üldlahendis on välja kirjutatud iga tundmatu, näiteks ülaltoodud lineaarvõrrandisüsteemis oleks need $x_1, \dots, x_n$ ja igaühele neist on antud väärtus, kusjuures $n-r$ tükki nendest fikseeritakse vabadeks tundmatuteks $c_1, \dots, c_{n-r}$, kus r on võrdne astmete arvuga (astakuga) lineaarvõrrandisüsteemi mittelaiendatud maatriksis. Ülejäänud tundmatud avaldatakse vabade kaudu, kasutades korpuse definitsioonis kirjeldatud tehteid (liitmine ja korrutamine) ja kindlaid korpuse elemente. Neid tundmatuid on r tükki ja neid nimetatakse sõltuvateks tundmatuteks.

3.4. Astak

Loengukonspekti [3] definitsiooni põhjal on maatriksi astak võrdne astmete arvuga selle maatriksi astmelises kujus.

Loengukonspekti [3] järgi defineeritakse maatriksi astmeline kuju järgnevalt:

1. nullidest koosnevad read on nullist erinevaid elemente sisaldavatest ridadest allpool;
2. iga $i \geq 2$ korral i-nda rea esimene nullist erinev element (kui see leidub) on kaugemal (s.t. tema veeruindeks on suurem) kui $(i-1)$-se rea esimene nullist erinev element.

Niisiis maatriks on astmelisel kujul, kui tal on kuju

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & a_{1j_1} & \dots & a_{1,j_2-1} & a_{1j_2} & \dots & a_{1,j_3-1} & a_{1j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & a_{2,j_3-1} & a_{2j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{3j_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{3n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{rj_r} & \dots & a_{rn} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

kus $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_r \leq n$ ja elemendid $a_{1j1}, a_{2j2}, \dots, a_{rjr}$ on nullist erinevad. Sellise kuju puhul ütleme, et astmelises kujus on r astet ja et astmekohad on $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (r, j_r)$.

Iga maatriksi saab ridade elementaarteisenduste abil viia astmelisele kujule.

3.5. Ülesanded

Nagu näha, on iga nelja mõistega seotud algoritmiliselt lahendatav (järjest elementaarteisenduste rakendamine) ülesanne. Nendeks on

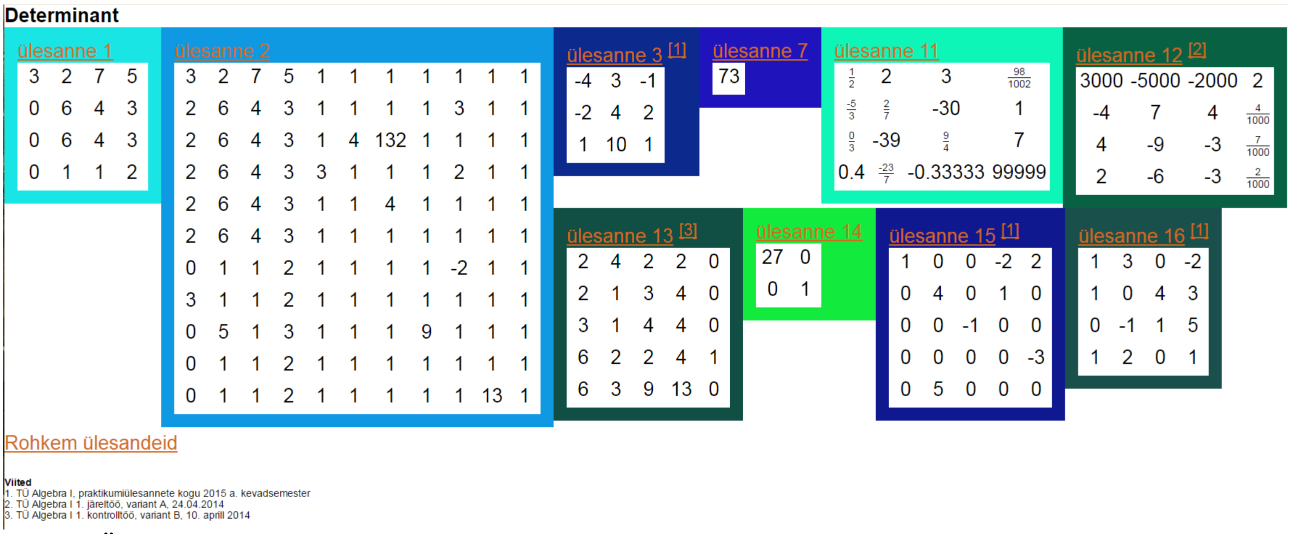
- maatriksi determinandi leidmine;
- maatriksi pöördmaatriksi leidmine;
- lineaarvõrrandisüsteemi üldlahendi leidmine lineaarvõrrandisüsteemi laiendatud maatriksi põhjal;
- maatriksi astaku leidmine.

4. Kasutajaliidese disain

Rakendusel on kaks vaadet: ülesandekogu vaade ja ülesande lahendamise vaade. Ülesandekogu vaate eesmärk on aidata kasutajal valida endale jõukohane ja meelepärane ülesanne. Ülesande lahendamise vaate eesmärk on toetada lahendajal ülesande lahendamist ning õppimist.

4.1. Ülesandekogu vaade

Ülesandekogu vaade on osaliselt inspireeritud *metro* [4] kasutajaliidese kavandamise stiilist, mille töötas välja Microsoft ning mis on kasutusel näiteks Windows 8 avakuva realiseerimiseks. See näitab juhusliku värviga värvitud kastikesi, mis on paigutatud ekraanil püüdes ülesande erinevatest suurustest tulenevalt võimalikult suure pinna ära katta. Selline kuva võimaldab külastajal saada kiire ülevaate saadaolevast ülesannete valikust, mida rakendus pakub.



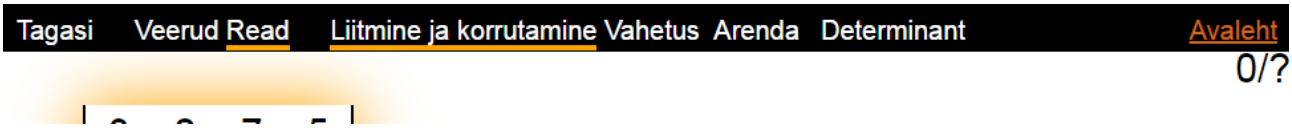
Pilt 1: Ülesandekogu kuvatõmmis determinandi leidmise ülesannete kataloogi esimeselt leheküljelt.

4.2. Ülesande lahendamise vaade

Selles alapeatükis kirjeldatakse kasutajaliidest rakenduse põhiosa vaates, milleks on teisendamise tööriist.

Teisenduse rakendamiseks peab kõigepealt otsustama, kas teha teisendusi veergude või ridadega. Seda saab valida lehe päises olevatest raadionuppude paarist.

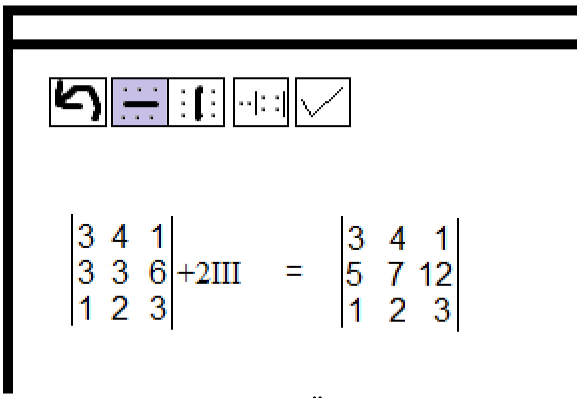
Oletame, et valitud on rida. Siis tuleb klõpsata aktiivse maatriksi rea peale, kusjuures kui liikuda hiirega rea peale, siis rea taust märgitakse värviga, et anda parem visuaalne ülevaade rea sisust,. Seejärel tuleb uuesti vajutada mingi rea peale. Siis küsitakse kordajat, mille kasutaja peab sisestama klaviatuurilt. Kui vajutati teisena sama rea peale, siis korrutatakse see rida selle kordajaga (elementaarteisendus 2). Kui mingi muu rida, siis liidetakse kordajaga korrutatud esimene rida teisena klõpsatud reale (elementaarteisendus 3).



Pilt 2: Tööriistariba välimus. Valitud funktsioonid on oranži värviga alla joonitud.

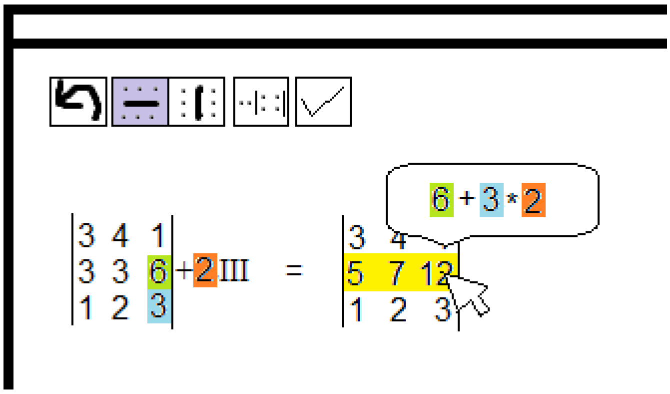
Ridade vahetamiseks ja muude operatsioonide tegemiseks (näiteks determinandi leidmine arendamise teel) on tööriistaribal teine raadionuppude komplekt. Vaikimisi toimub rea või veeru korrutamine mingi nullist erineva arvuga või reale või veerule mingi arvuga korrutatud muu rea liitmist. Kui mingi raadionupp on märgitud, siis sooritatakse operatsiooni mis on raadionupu sildil kirjeldatud. Kui teist korda vajutada mingile muule märgendatud raadionupule, siis valitakse uuesti vaikimisi „Liitmine ja korrutamine".

Pildil 2 on välja toodud tegeliku rakenduse tööriistariba välimus ja pildil 3 on esialgne kavand. Nagu näha, seisneb peamine erinevus selles, et kasutusel on tekstid, mitte ikoonid, sest see muudab programmi üheselt mõistetavamaks ja ühtlasi teeb nupud ka suuremaks.



Pilt 3. Maatriksi teisendaja esmane kavand. Ülemised nupud vasakult paremale: viimati rakendatud teisenduse tagasivõtmine, operatsioonid ridadega, operatsioonid veergudega, arendamine ja vastuse esitamine.

Eelmine maatriks jääb teisenduse rakendamise järel ekraanile ja uus maatriks märgitakse ülesandele vastavalt paremale poole ning lisatakse kõik matemaatilised märgid, mida lisataks, kui lahendataks paberil. Nüüd on parempoolne maatriks uus aktiivne maatriks ning protsess kordub.

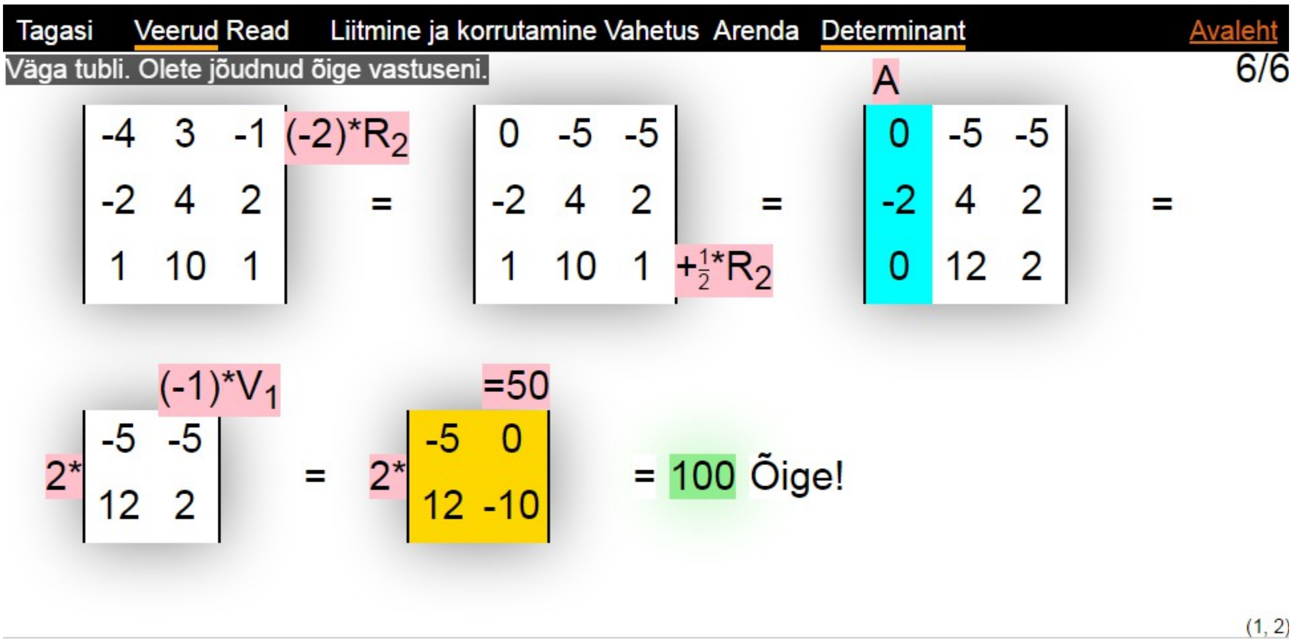


Pilt 4. Maatriksi teisendaja visuaalne abi, mille aktiveerimiseks hoida kursorit väärtuse peal ja mis näitab, kuidas on leitud väärtus 12. Ülemised nupud vasakult paremale: viimati rakendatud teisenduse tagasivõtmine, operatsioonid ridadega, operatsioonid veergudega, arendamine ja vastuse esitamine. Tegemist on esmase kavandiga.

Esmase kavandi kohaselt kuulusid kasutajaliidese elementide hulka mitmed visuaalsed abivahendid, mis aitavad õppimise käigus väga sageli matemaatika (üli)õpilaste poolt esitatavale küsimusele: „Kust see arv tuli?”. Hoides hiirt pikemat aega maatriksi lahtril (et see ei segaks muid operatsioone), näidatakse värviliselt, millisest komponentidest just täpselt selline väärtus pärineb, seetähendab, täpselt millise tehte tulemusena ning millistest eelmise maatriksi väärtustest (märgitakse värviga) saadi uus väärtus (pilt 4). Piiratud aja tõttu selline omadus rakendusse ei jõudnud, sarnaselt lisafunktsionaalsusega, millest on juttu peatükis „Funktsionaalsed nõuded”.

Liides ei tohi juurutada halbu harjumusi, kasutajakogemus peaks sarnanema paberil lahendamisega. See on vajalik näiteks juhul, kui algebra kontrolltööd viiakse läbi endiselt paberil, erinevalt loogika kursustest (millest on rohkem juttu peatükis „Ülevaade sarnastest programmidest”). Sellepärast on programmis kasutatav lahenduse kirjapanek sarnane tüüpilise paberkandjal lahendatud ülesande kirjapanekuga, kaasa arvatud vihjed, mis märgitakse eelmise maatriksi juurde, et millist teisendust rakendati.

Samuti tuleb juhtida tähelepanu mitmele olulisele nüansile, mille kasutaja eest ära tegemist ei tohi harjumuseks kujundada, näiteks asjaolu, et kui maatriksi mingit rida korrutada mingi nullist erineva arvuga, siis ka determinant korrutub selle arvuga. Selleks küsitakse enne edasiminekut seda väärtust, ning vale vastuse korral ei minda lahenduskäiguga edasi.

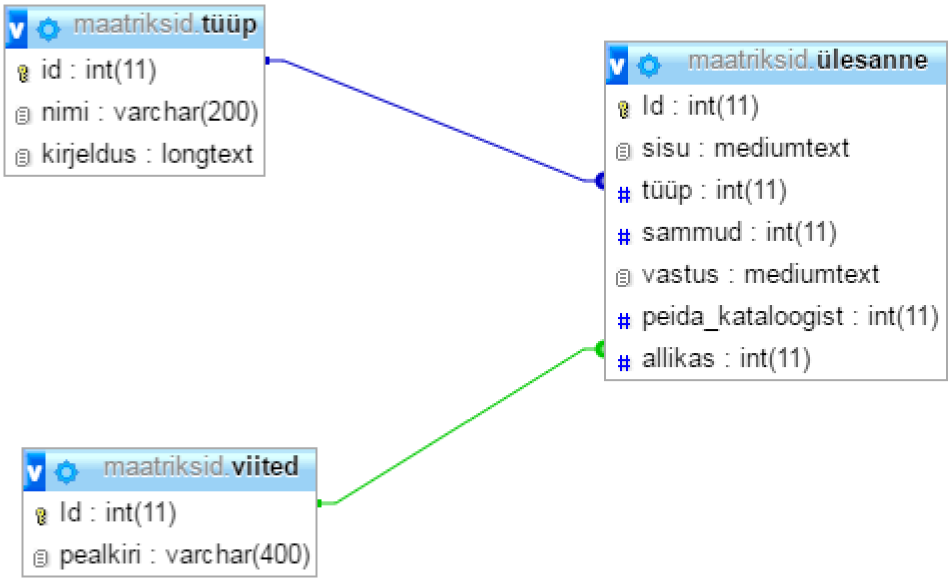


Pilt 5: Kuvatõmmis lahendatud ülesandest, demonstreerimaks lahendusarutelu üldist kujundust.

Pildil 5 on välja toodud peamine kasutajaliidese välimus kasutusel oleva programmi lõplikust kujundusest. Elementideks ülevalt alla on tööriistariba, vasakul on teatelahter, paremal sammuloendur, põhiosa moodustab lahenduskäik ja all paremal hiirekursori all oleva maatriksi elemendi rea- ja veeruindeks.

5. Andmebaasi disain

Vastavalt lisas „Rakenduse funktsionaalsus” kirjeldatud põhifunktsionaalsusele, sisaldab see ainult ülesandekogu. Ülesannete andmeid hoitakse kolmes tabelis nimedega „Ülesanne”, „Tüüp” ja „Viited”. Tabelis „Ülesanne” on ülesanded ise, õiged vastused ja viidad vastavale tabeli „Tüüp” ja „Viited” ridadele. „Tüüp” hoiab endas nelja ülesande tüüpi ja „Viited” sisaldab teoste loetelu, kust mingi ülesanne algselt pärineb (vt. peatükk „Ülesannete originaalallikad”). Selline disain võimaldab täita kõiki põhifunktsionaalsuse all kirjeldatud nõudeid.



Pilt 6: Andmebaasi disain koos seostega.

Maatrikseid hoitakse andmebaasis sõnena, kus tühik on rea liikmete omavaheliseks eristamiseks ja reavahetus on ridade omavahel eristamiseks. Tühikute vahel on kas täisarvud, harilikud murrud (kaks kaldkriipsuga eraldatud täisarvu) või kümnendmurrud (kaks punktiga eraldatud täisarvu) Vastuse veerg on samuti sõne tüüpi, sest pöördmaatriksi ja lineaarvõrrandisüsteemi ülesannete korral korrektne vastus sisaldab rohkem kui ühe arvu, pöördmaatriksi korral pöördmaatriks ise ja lineaarvõrrandisüsteemi korral ei saagi vastust kontrollida pelgalt andmebaasi väljaga kõrvutamise teel.

Lahter „peida_kataloogist” sisaldab kas 0 või 1 vastavalt „peida” ja „ära peida”, otsustamiseks kas näidata ülesannet rakenduse ülesannetekogu vaates või mitte. Lahtri eesmärk on ära peita ülesanded, mis on lahendamise seisukohalt triviaalsed, ning lisatud ainult testimise hõlbustamise eesmärgil.

Lahter „sammud” sisaldab soovitatavat laheduskäigu pikkust, et lahendaja saaks otsustada, kas tema lahendus on optimaalne või mitte. Seda kuvatakse ülesande lahendamise vaate ekraani nurgas kõrvutatult hetkeseisuga. See lahter võib olla ka tühi, siis kuvatakse kasutajaliideses selle koha peal küsimärk.

5.1. Ülesannete originaalallikad

Andmebaasi tabelis „viited” leiduvad järgnevad teosed, millest pärinevad rakenduses sisalduvad ülesanded:

1. TÜ Algebra I, praktikumiülesannete kogu 2015 a. kevadsemester [2];
2. TÜ Algebra I 1. järeltöö, variant A, 24.04.2014;
3. TÜ Algebra I 1. kontrolltöö, variant B, 10. aprill 2014.

Ülesandekogu vaates, lehe alumises servas, kuvatakse kasutajale ülesande algallikate viited. Kasutatud nummerdus on analoogne ülaltooduga.

6. Rakenduse arendamine

Käesolevas peatükis käsitletakse platvormide versiooninumbreid ning selgitatakse rakenduse keskset mootorit. Rakenduse lähtekood on kättesaadav siin:

https://github.com/priitkalda/linalg

Infot rakenduse hetkel kättesaadavuse kohta leiab sellelt *github*-i viki leheküljelt:

https://github.com/priitkalda/linalg/wiki/Avaldatud-kohtades

6.1. Platvorm

Testkeskkonnana on kasutusel tarkvarakomplekt EasyPHP[1] versioon 1.4.1, mis ühendab endas järgnevaid platvorme ning mille versioonid olid:

- Apache-i server[2], versioon 2.4.7;
- MySQL-i andmebaas[3], versioon 5.6.15;
- PHP skriptimine[4], versioon 5.5.8.

Andmebaas on kasutusel ülesandekogu hoidmiseks. Ülesannete kogu on kättesaadav kõigile veebilehe külastajatele erinevalt peatükis „Ülevaade sarnastest programmidest” nimetatud loogika kursuse õpiprogrammidest.

Rakenduse põhiosa, milleks on maatriksi teisendamine, töötab täielikult kliendi poolel ning kasutab selleks JavaScripti[5] koos järgnevate teekidega

- JQuery[6], versioon 1.11.2;
- sylvester.js[7], versioon 0.1.3;
- math.js[8], versioon 3.2.1;
- PDFObject[9], versioon 2.0;

ning HTML-i[10] ja CSS-i[11] veebilehe visualiseerimiseks.

1 http://www.easyphp.org/
2 https://httpd.apache.org/
3 https://www.mysql.com/
4 http://php.net/
5 https://www.javascript.com/
6 https://jquery.com/
7 http://sylvester.jcoglan.com/
8 http://mathjs.org/
9 https://pdfobject.com/
10 https://www.w3.org/html/
11 https://www.w3.org/Style/CSS/

Koodi kirjutamiseks ja testimiseks olid kasutusel peamiselt järgnevad programmid:

- Notepad++[12];
- Google Chrome arendaja tööriistad[13];
- php myAdmin[14] 4.1.4;

Testimise kestel:

- Google Chrome;
- Mozilla Firefox[15];
- Internet Explorer 11[16].

6.2. Rakenduse tööpõhimõte

Maatriksi andmete hoidmiseks on kolm muutujat: *a*, *ad* ja *ak*.

Muutuja *a* on kolmemõõtmeline massiiv ehk massiiv, mis koosneb kahemõõtmelistest massiividest. Kahemõõtmelised massiivid kujutavad maatrikseid. Need sisaldavad *math.fraction* tüüpi objekte, mida kasutan, et kujutada reaalarve maatriksis. Ühemõõtmeline massiiv *ak* (*a* kordajad), sisaldab maatriksi ees olevaid kordajaid ja muutuja *ad* sisaldab naturaalarve, kui suur grupp *a* ja *ak* lõpust loendama hakates on aktiivsed maatriksid, st. kui mitu maatriksi visuaalset kujutist kuulavad hiire sündmusi. Lahenduskäigu varasematelt maatriksitelt eemaldatakse hiire sündmused ja tagasi kerides pannakse tagasi.

12 https://notepad-plus-plus.org/

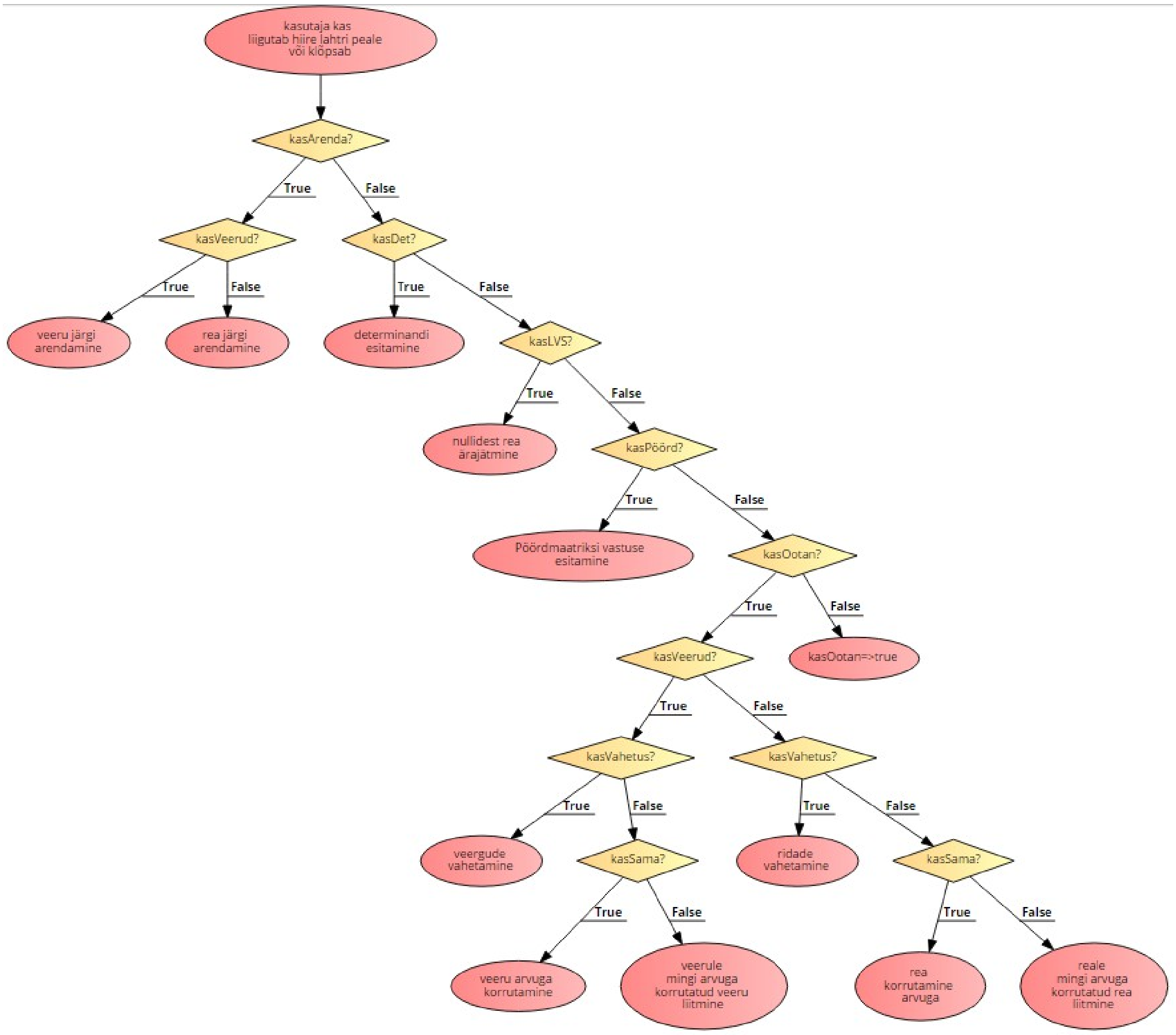
13 https://www.google.com/chrome/browser/desktop/index.html

14 https://www.phpmyadmin.net/

15 https://www.mozilla.org/et/firefox/new/

16 https://www.microsoft.com/en-us/download/Internet-Explorer-11-for-Windows-7-details.aspx

Aktiivsete maatriksite pärilus on lahendatud selliselt, et valitakse massiivi *ad* viimane element ning selle võrra loendatakse massiivi *a* ja *ak* lõpust vastav arv elemente. Algul on kõigi massiivide pikkus üks. Igal hetkel peaks olema *a* pikkus võrdne *ak* pikkusega. Kõigis ülesande tüüpides (va. determinandi leidmine) saab olla vaid üks aktiivne maatriks. Hiire sündmused on rakendatud tabeli lahtritele. Vastavalt muutuja *kasVeerud* väärtusele leitakse hiire all oleva lahtri kaudu üles muud lahtrid, mida on vaja värvida või mille sisu on vaja teada saada maatriksist *a*. Maksimaalne ja minimaalne arv hiire sündmusi lehel on võrdne aktiivsete lahtrite arvuga. Seda saab rekursiivselt kasvatada, arendades suure maatriksi determinanti, mis moodustab halvima juhu.



Skeem 1: Hiire sündmustega käivituva tingimuslause skeem. Hiire pealeviimisel tegeletakse operatsiooniga seotud tabeli lahtri värvimistega, hiire klõpsamisel rakendatakse operatsiooni. Valmistatud veebipõhise mõistekaardi koostajaga. [5]

Esmane maatriks ja sellega seonduv informatsioon saadakse andmebaasist ja trükitakse *php* skripti kaudu serveri pool valmiva dokumendi *javascript-i* muutujatesse. Seejärel omistab kliendipoolne *javascript-i* interpretaator vastavatele muutujatele vastavad väärtused.

Vastuse kontrollimine toimub kliendi poolel *sylvester-i* teegi meetoditega ja seejärel võrreldakse

POST-päringu kaudu seda andmebaasi väljaga. Klient ei saa otse pärida vastuse välja andmeid, vaid ainult võrrelda seda tema poolt saadud vastusega. Välja arvatud lineaarvõrrandisüsteemi ülesanded, kus võib olla erinevaid lubatud vastuseid ning seetõttu server ei tegele vastuse kontrollimisega, sest *php*-s puudub mõistlik viis, kuidas avaldist sõeluda (*parse*), sest *php eval* lubab misiganes php koodirida rakendada ning põhjustaks turvaaugu.

Kui klient ja server on samal seisukohal vastuse korrektsuse suhtes, siis teavitatakse kasutajat vastuse korrektsusest. Kui ei, siis kuvatakse vastav veateade.

6.3. Töö käigu aruanne

Esimese etapina oli kavas teha kõik osad, mis on kõigis ülesande tüüpides ühesugused, näiteks elementaarteisenduste rakendamine, ning seejärel lisada andmebaas ülesannetega ja ülesande tüübipõhised kitsendused. Lõplikus rakenduses on kõik, mis on kirjeldatud põhifunktsionaalsuse loetelus (mõningate erinevustega, mis töö kestel ümber kavandati) ja mitte ühtegi omadust, mis on kirjeldatud lisafunktsionaalsuse all.

Plaani järgides omadused ka valmisid, alustades maatriksi kujutamisest tabelina, seejärel hiire poolt käivitatavad sündmused tabeli lahtritele, mis võimaldas käsitleda maatriksi veergu. Kuna *HTML*-is on tabel selliselt üles ehitatud, et lahtrid on ridade alamtipud *DOM*-mudeli puus, ei saa tabeli vertikaalselet tulpa pärida ühe sündmuse kuulajaga. Ehk teisisõnu, veerg tuleb üles leida lahtri järgi. Ridade puhul oleks see võimalik, kuid antud juhul seda ei kasuta, sest lahendades selle analoogselt veergudega, on stseenis kokku selle võrra vähem sündmuste kuulajaid.

Sellist loogikat kasutades valmis elementaarteisenduste implementatsioon. Sealt edasi lisandus tagasivõtmine, mis hõlmas endas kolmemõõtmelise massiivi loomist, ja arendamine, mis muutis asja märkimisväärselt keerulisemaks. Nimelt tuleb hallata korraga mitut maatriksit ning täpset järge pidada selle üle, mitu kuulub viimasesse aktiivsesse gruppi, mis võib veel suureneda, kui kasutaja arendab determinanti mitu korda järjest.

Kuna eelmises lõigus kirjeldatud programmi osa muutis olukorra keerulisemaks, tekkis vajadus erinevate ülesannetega programmi testida ning sellest tulenevalt oli mõistlik lisada järgmisena andmebaas. Selle struktuur on peaaegu muutmatuna säilinud lõpliku variandini, väljaarvatud ainult viited ja mõned väljad tabelites. Andmebaasile lähedane omadus on ülesannete kogu leht, millest algeline variant valmis paralleelselt koos andmebaasi loomisega.

Seejärel sai hakata looma erinevusi kasutajaliidesesse vastavalt ülesande tüübile, näiteks pöördmaatriksi ülesandes joonistada automaatselt ühikmaatriks paremale poole. Algul olid need kõik saadaval ühes liideses, et hõlbustada testimist, kuid see osutus mittevajalikuks. Näiteks ei ole vaja testida, kas determinandi arendamine töötab, kui maatriks ei ole ruutmaatriks (sama arv veerge ja ridu).

Edasi lisandus vastuse esitamine, vastuse kontrollimine, kujundus ja mõistagi ka kõigi omaduste lihvimine, mis võttis oodatust kauem aega, näiteks vastuse teatamine determinandi ülesandes peab olema intuitiivne ka siis, kui on viimati determinanti arendatud ja teatatakse osadeterminandi väärtust ning ka siis, kui ekraanil on üks aktiivne determinant.

6.4. Kasutajakogemuse analüüs

Tagasisidet kasutajakogemuse osas jagasid lisaks käesoleva töö juhendajatele ka kaks Tartu Ülikooli algebra [1] õppeaine praktikumijuhendajat. Kõigil juhtudel kritiseeriti puudujääke intuitiivsuses (näiteks kummas järjekorras kaks liidetavat rida klõpsata) ning kuidas täpselt arvu sisestatakse. Jõuti järeldusele, et praegu kasutatavad lahendused on head kogenud kasutajatele, kuid uutele kasutajatele keerulised. Selle lahendamiseks on lisatud lõplikku versiooni abiinfo.

Toodi välja mitmeid programmivigu (*bugs*), näiteks automaatkontrolli vead mõnedes astaku ülesannetes, mis näib olevat tingitud kas maatriksite teegi veast või selle mitte kuigi heast ühilduvusest murdude teegiga. Selle silumine toimub erandite nimekirja põhjal. Determinandi ülesandes rea iseendaga vahetamisel korrutus determinant ka arvuga *-1* ühes algses versioonis.

Nõuti ka omadust, mis küsiks kasutajalt determinandi ülesandes pärast rea korrutamist arvuga või pärast ridade vahetamist, millega võrdub determinandi ees olev kordaja, et sundida lahendajat sellele detailile tähelepanu pöörama. See omadus on olemas lõplikus variandis.

Soovitati veel mitmeid uusi võimalusi, näiteks mitme teisenduse ühe sammuna tegemist, ülesande juhuslik genereerimine, adjungeeritud maatriksi abil pöördmaatriksi leidmine ja maatriksvõrrandi lahendamine. Ajapuudusest tingituna need omadused lõplikku varianti ei jõua.

7. Programmi kasutamine

Järgnevalt antakse juhised rakenduse kasutamiseks. Kõik järgnevas peatükis kirjeldatu on kättesaadav ka rakenduse liidesest.

7.1. Ülesande valimine

Esmalt avada veebileht sisestades rakenduse veebiaadressi veebilehitseja aadressiribale.

Avaekraani moodustab valik esimesi ülesandeid neljast ülesande liigist:

- determinandi leidmine;
- pöördmaatriksi leidmine;
- lineaarvõrrandisüsteemi üldlahendi leidmine;
- astaku leidmine.

Valige sealt huvipakkuv ülesanne või vajutage „Rohkem ülesandeid”, et sirvida kindla ülesandetüübi kõiki ülesandeid. Seal on samuti ülesanded grupeeritud lehekülgede kaupa, kus „Rohkem ülesandeid” kerib lehekülje edasi ja „Eelmised ülesanded” tagasi.

Selleks, et teada saada, millisest allikast ülesanne pärineb, klõpsake kantsulgudes oleva viite peale ülesande numbri järel. See viib kuva alla viidete loetelu juurde.

Ülesannete nummerdus ei sõltu ülesande tüübist, igal ülesandel on eraldi number. Jättes meelde ülesande numbri, saab kergesti selle ülesande uuesti üles leida, minnes sellisele aadressile:

<*rakenduse veebiaadress*>/lahenda.php?ülesanne=8

Näiteks ülaltoodud link viib kaheksanda ülesande juurde.

7.2. Ülesande lahendamine

Olenevalt valitud ülesande tüübist, näeb lahendamise tööriist välja erinev. Näiteks on vastavalt lineaaralgebra aksiomaatikale, lubatud elementaarteisendused kas ainult ridadega või nii veergude kui ka ridadega. (vt. peatükk „Lineaaralgebra”)

Vaikimisi on programm olekus, kus tehakse elementaarteisendusi 2 ja 3 (vt. peatükk „Lineaaralgebra”) ridadega.

- Selleks, et liita mingile muule reale mingi arvuga korrutatud rida,
    1. klõpsake esmalt reale, mis jääb sellest tehtest muutmatuks.
    1. Seejärel on programm olekus, kus tuleb valida sihtrida. Sellest annab märku oranž rea märgendamine (kui viia kursor rea peale).
    2. Seejärel tuleb viia kursor sihtrea peale ning siis ilmub sihtrea kõrvale tekstilahter, kuhu tuleb sisestada kordaja.

3. Kui kordaja on sisestatud, siis vajutage *enter* või *vasak klõps*. Tekstilahtri peale eraldi klõpsata pole vaja, kohe pärast tekstikasti ilmumist võib klaviatuuri numbriklahvidest sisestada kordaja.

- Kui soovite teha teisendusi veergudega ja antud ülesande tüübis on see lubatud, siis märkige ära sõna „Veerud”. Juhised on analoogsed ridadega.
- Kui soovite lahutada, siis kasutada negatiivset arvu või kui soovite jagada, siis kasutage murdu notatsiooniga „*a/b*”, kus *a* on lugeja ja *b* on nimetaja. Lubatud on ka segaarvud kujul „*a b/c*” ning kümnendmurrud kujul „*a.b*”.
- Kui soovite korrutada rida mingi nullist erineva arvuga, siis vajutage ka teist korda sama rea peal. Kordaja sisestamine on analoogne ülaltooduga.

Selleks, et sooritada muid operatsioone, näiteks elementaateisendust 1 (veergude/ridade vahetamine), märkige ära sõna „Vahetus”.

Eelmise tegevuse tagasivõtmiseks klõpsake sõnal „Tagasi”.

Vastavalt ülesande tüübist, on kasutajaliideses erinevused:

Determinandi leidmise ülesandes:

- Selleks, et arendamise teel mitmeks liidetavaks lagunenud osaliidetavaid grupeerida või nulle ära kaotada, klõpsake nende peal.
- Arendades mitu korda, ilmuvad viimati arendatud väiksemad determinandid arutelu lõppu.
- Kui korrutada rida mingi arvuga või kui vahetada ridu, siis küsitakse teilt determinandi esist kordajat. Analoog kehtib ka veergude korral.

Pöördmaatriksi leidmise ülesandes:

- Klõpsates „Pöördmaatriks”, avaneb rippmenüü, milles saab otsustada, kas maatriks on pööratav või mitte.
- Vastuse esitamine kasutab notatsiooni A^{-1}. Kuigi seda pole märgitud kasutajaliideses, olgu A ülesande sisendmaatriks.

Lineaarvõrrandisüsteemi üldlahendi leidmise ülesandes:

- Klõpsates „Üldlahend”, avaneb rippmenüü, milles saab otsustada, kas lahendid puuduvad, kas lahendeid on üks või lahendeid on lõpmata palju.
- Valides „Lahendid puuduvad”, annab programm tagasisidet, kas see väide antud ülesanne kohta kehtib või mitte.
- Valides „1 lahend”, ilmuvad ekraanile tekstikastid, millest igaüks on tähistatud vastava tundmatu nimega. Sisestage nendesse tundmatute arvulised väärtused ja klõpsake „Kontroll”. Seejärel saate tagasisidet selle väite õigsuse kohta.

- Kui otsustasite, et lahendeid on lõpmata palju, siis valige õige arv vabu tundmatuid ning avaldage tundmatud nende kaudu. Tekstikastide ja kontrolli kohta kehtib eelmises punktis kirjeldatuga analoogne kord. Lisandub ainult:
  - Lubatud on väikese c-ga tähistatud vabad tundmatud, millele järgneb vahetult ühest algav loendur, näiteks „c1”. Kui neid on ainult 1 märkige ikkagi „c1”.
  - Lubatud on kõik *math.js* funktsiooni *eval* grammatika, näiteks „c1+5+e+sin(30)”.

Astaku leidmise ülesandes, valides „Astaku esitamine”, näidatakse värviga hetke astmete arvu, kui liikuda hiirega maatriksi peale.

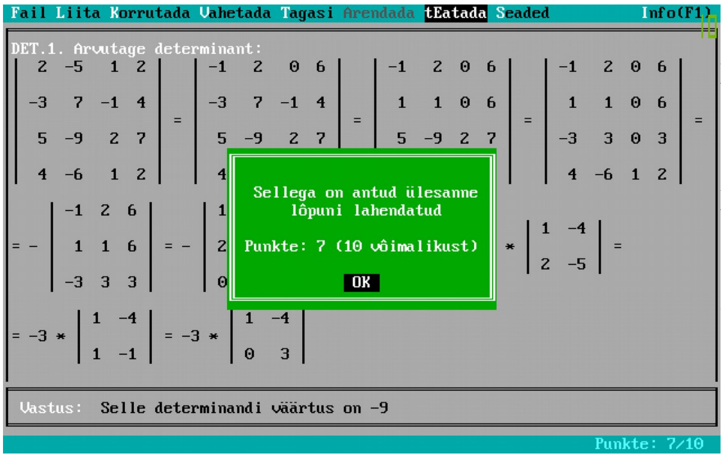
Vastuse kontrollimine toimub esmalt teie veebilehitseja poolt ning seejärel serveri poolt. Esimeses etapis püüab brauser arvutada iseseisvalt ülesande algmaatriksi vastust, erinevalt serverist, mis võrdleb teie saadud vastust andmebaasi väljaga.

Lineaarvõrrandisüsteemi ülesanne on erinev, kus teie brauser kontrollib teie poolt sisestatud lahendeid ning server neid ei kontrolli, sest lahendit ei saa üheselt määrata. Lähemalt on sellest juttu peatüki „Rakenduse tööpõhimõte” lõpus.

8. Ülevaade sarnastest programmidest

1990-ndatel kasutati Tartu Ülikoolis analoogset rakendust, mis on arendatud tollase algebra õppejõu Uve Nummerti poolt. Kuid see lõpetati, kui nimetatud õppejõud töölt lahkus. Programm „Lineaaralgebra” [6] oli programmeeritud DOSi jaoks, mistõttu see ei tööta tänapäevastes operatsioonisüsteemides. Samuti ei vasta rakenduse kasutusmugavus tänapäevastele nõuetele, näiteks on värviskeem vanamoodne ja hiire tugi puudub. Üks võimalik eelis on aga see, et pärast ükskõik missugust teisendust lastakse lahendajal ise sisestada ühte teisendusest mõjutatud juhuslikult valitud maatriksi elementi, erinevalt selle töö raames loodud programmist, mis teeb seda ainult determinandi ülesandes.

Sarnaseid õpiprogramme on kasutusel ka teistel Tartu Ülikooli kursustel, näiteks „Sissejuhatus Matemaatilisse loogikasse” [7] ja „Diskreetse matemaatika elemendid” [8], kuid mõistagi teistsuguse sisuga ülesannete lahendamiseks. Näiteks „Sekventsiaalse predikaatarvutuse veebikeskkond” [9], „Tõeväärtustabeli ülesannete veebikeskkond” [10] ja „Lausearvutuse ja predikaatloogika valemite teisendamise õpiprogramm” [11], millest kõik on samuti loodud sarnaselt käesolevale tööle – Tartu Ülikooli bakalaureusetöö raames. Samuti on kaks esimest veebirakendused. Mitmed nendest on kasutusel nii praktikumides teema õpetamiseks kui ka kontrolltööde läbiviimiseks.



Pilt 7.Kuvatõmmis Uve Nummerti programmist "LA", determinandi leidmise ülesande vaatest.

Sarnast teemat selles mõttes, et need käsitlevad lineaaralgebrat hõlbustavat rakendustarkvara, hõlmavad ka mitmed veebis tasuta saadaolevad maatriksikalkulaatorid, nagu näiteks Matrix RESHISH [12] ja Matrix Calculator [13]. Mõlema põhiline funktsioon on vastuse teatamine (kasutaja sisestab maatriksi ja talle teatatakse vastus) ning lisafunktsionaalsusena võimaldavad ka kuvada lahenduskäiku. Samas ei võimalda kumbki veebirakendus elementaarteisenduste rakendamist. Seda võimaldab aga tasuline matemaatikatarkvara MathCad [14], kuid seda ei saa veebilehitsejas kasutada. Erinevalt käesoleva töö käigus loodud programmist ja Uve Nummerti programmist (kus oli kümmekond ülesannet iga ülesande tüübi kohta) ei sisalda ükski kolmest viimatinimetatud tarkvarast ülesandekogu.

9. Kokkuvõte

Rakenduse eesmärk on aidata (üli)õpilastel maatriksiülesandeid lahendada ja pakkuda veebis kõigile kättesaadavat interaktiivset maatriksiülesannete kogumikku. Selleks on veebikeskkonnal kaasaegse disaini ja värviskeemiga kasutajaliides, mis aitab kasutajal rakendada elementaarteisendusi ja pidada järge senise lahenduskäigu üle. Lahendada saab nelja tüüpi ülesandeid: determinandi leidmine, pöördmaatriksi leidmine, lineaarvõrrandisüsteemi üldlahendi leidmine ja astaku leidmine.

Ülesanded pärinevad rakenduse andmebaasist ning neid on seal kokku 113. Originaalallikateks on algebra kursuse õppematerjalid [2].

Ülesande lahendamise ajal saab hiirekliki tegevust muuta, muutes tööriistaribal olevate raadionuppude olekut. Seal on kaks raadionuppude komplekti. Esimene määrab, kas töödeldakse ridu või veerge, teine määrab, mida nendega tehakse. Mingi arvuga korrutatud rea liitmiseks mingile muule reale tuleb esmalt klõpsata muutumatuks jäävale reale. Ülejäänud nuppude tegevus vastab vastava nupu sildile.

Rakendus on üles ehitatud kuvama maatrikseid tabelitena, mis samal ajal ka kuulavad hiireklõpse, et teada, milliste ridadega operatsioone teha. Maatriksi elementide hoidmine ja teisenduste rakendamine toimub kahemõõtmelistel massiividel, mis sisaldavad murdude teegi objekte.

10. Viited

1. Tartu Ülikooli kursus, Algebra I, https://www.is.ut.ee/rwservlet?oa_ainekava_info.rdf+1307072+HTML+6770690075247318237З+text/html, viimati vaadatud (28.02.2016).
2. Algebra I, Praktikumiülesannete kogu, Tartu Ülikool, 2015 a. kevadsemester.
3. Valdis Laan, Kursuse Algebra I loengukonspekt, Tartu Ülikool, 2015 a. Kevadsemester. http://math.ut.ee/pmi/kursused/algebraI/kon2015.pdf, viimati vaadatud (22.04.2016).
4. Microsoft, modernne disainikeel metro, https://www.microsoft.com/en-us/stories/design/, viimati vaadatud (24.04.2016).
5. Veebipõhine mõistekaardi koostaja code2flow, http://code2flow.com/, viimati vaadatud (25.04.2016).
6. Uve Nummert (1995). Maatriksiülesannete lahendamise programm LA (Lineaaralgebra), Tartu Ülikool.
7. Tartu Ülikooli kursus, Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse, https://www.is.ut.ee/rwservlet?oa_ainekava_info.rdf+1320427+HTML+67706900752473182373+text/html, viimati vaadatud (28.02.2016).
8. Tartu Ülikooli kursus, Diskreetse matemaatika elemendid, https://www.is.ut.ee/rwservlet?oa_ainekava_info.rdf+1301633+HTML+67706900752473182373+text/html, viimati vaadatud (28.02.2016).
9. Dmitri Gabbasov (2014). Sekventsiaalse predikaatarvutuse õpiprogramm, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool.
10. Alari Lukk (2010). Kaasaegse kasutajaliidesega veebikeskkond tõeväärtustabeli lahendamiseks, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool.
11. Vahur Vaiksaar (2003). Lausearvutuse ja predikaatloogika valemite teisendamise õpiprogramm, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool.
12. Maatriksikalkulaator Matrix RESHISH, http://matrix.reshish.com/, viimati vaadatud (28.02.2016).
13. Maatriksikalkulaator Matrix Calculator, https://matrixcalc.org/en/, viimati vaadatud (28.02.2016).
14. Arvutustarkvara MathCAD, http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad, viimati vaadatud (28.02.2016).

Lisad

I. Rakenduse funktsionaalsus

Põhifunktsionaalsus

- Täisarvudest ja harilikest murdudest koosnevale maatriksile teisenduste rakendamine.
  - Veerule mingi arvuga korrutatud teise veeru liitmine.
  - Reale mingi arvuga korrutatud teise rea liitmine.
  - Veergude vahetamine.
  - Ridade vahetamine.
  - Veeru korrutamine nullist erineva arvuga.
  - Rea korrutamine nullist erineva arvuga.
  - Viimati rakendatud teisenduse tagasivõtmine.
  - Teisendusele eelnev maatriks jääb ekraanile.

- Determinandi leidmise ülesande lahendamine
  - Veeru/rea järgi arendamine.
  - Elementaarteisenduse sooritamisel küsitakse lahendajalt, millise arvuga peab saadavat determinanti korrutama, et tulemus oleks võrdne esialgse determinandiga. Determinanti tähistatakse püstkriipsude abil.
  - Vastuse esitamine arvuna (või avaldisena) mis iganes ajal ning siis teatatakse kas on õige.

- Pöördmaatriksi leidmise ülesande lahendamine
  - Veergudega teisendused keelatud.
  - Eelmise maatriksi ja tulemusmaatriksi vahel näidatakse noolt, esialgse maatriksi kõrval on ühikmaatriks ning need eraldatud püstkriipsuga.
  - Vastuse esitamiseks tuleb otsustada, kas pöördmaatriksit ei leidu või ütelda, et kriipsust paremal on pöördmaatriks. Kui vasakul pole ühikmaatriks, siis programm teatab, et vale.

- Lineaarvõrrandisüsteemi ülesande lahendamine
  - Veergudega teisendused keelatud.

    - Nullidest koosenvate ridade eemaldamine.
    - Eelmise maatriksi ja tulemusmaatriksi vahel näidatakse noolt, esialgse maatriksi kõrval on vabaliikmete veerg ning need eraldatud püstkriipsuga.
    - Vastuse esitamise etapp algab otsustamisega, kas lahendeid on 0, 1 või mitu. Seda saab algatada mis iganes ajal lahenduskäigu jooksul.
        - Kui lahendeid on 1, siis küsitakse kõigi tundmatute väärtuseid ning kontrollitakse neid.
        - Kui lahendeid on mitu, siis tuleb leida vabad ja sõltuvad tundmatud ning avaldada sõltuvad vabade kaudu.

- Astaku leidmise ülesande lahendamine
    - Eelmise maatriksi ja tulemusmaatriksi vahel näidatakse võrdusmärki, maatriksite ees on tekst „rank”.
    - Vastuse esitamine arvuna mis iganes ajal ning siis teatatakse, kas on õige.

- Ülesande tüüpide kaupa grupeeritud ülesannete kogu, milles kõik ülesanded on kõigile kättesaadavad.

Lisafunktsionaalsus

- Tartu Ülikooli tudengitele autentimine (kursusele registreerimise järel oma martiklinumbri ja ajutise parooliga).
- Õppejõu vaade, kus näeks tudengi kaupa tulemusi/lahenduskäiku ning saaks anda tagasisidet (õppejõu rolli annab administraator).
- Ülesande loomine (enda maatriksi sisestamine);
- Lineaarvõrrandisüsteemi ülesandesse lahenduse esitamine lahendite fundamentaalsüsteemi ja erilahendi kaudu.
- Maatriks võib sisaldada ka tundmatuid.
- Maatriks võib sisaldada ka kompleksarve.

II. Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Priit Kalda**,

(*autori nimi*)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Maatriksiülesannete lahendamise õpikeskkonna loomine,

   (*lõputöö pealkiri*)

   mille juhendajad on Valdis Laan ja Siim Karus,

   (*juhendajate nimed*)

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.1016**