Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Puhta Matemaatika Instituut
Algebra õppetool

Riivo Must

Mõned katsed üldistada inversseid poolrühmi

Magistritöö

Juhendaja: prof. Mati Kilp

Tartu 2004

Sisukord

Sissejuhatus

Inverssete poolrühmade teooria algus on seotud injektiivsete osaliste teisendustega mingil mittetühjal hulgal X (vt. täpsemalt [Ki], näide VI.6.10). Sisuliselt on tegemist bijektiivsete kujutustega f : dom$f \to$ im$f$, kus dom$f$, im$f \subseteq X$ on vastavalt kujutuse f määramis- ja muutumispiirkond. Nende hulka loetakse ka nullkujutus 0, mille korral dom $0 = \emptyset$. Kõigi selliste kujutuste hulka tähistatakse $I(X)$ (või ka $\mathcal{I}_X$). Hulgas $I(X)$ saab defineerida korrutamise, nii et tulemuseks on inversne poolrühm (ja mitte rühm). Seda nimetatakse *sümmeetriliseks inversseks poolrühmaks*. Tuntud Vagner-Prestoni sisestusteoreemi järgi on iga inversne poolrühm sisestatav mingisse inverssesse poolrühma $I(X)$ (vt. [La], Theorem 1.5.1). Seega saab iga inversse poolrühma elemente vaadelda teatavate kujutustena.

Et kujutus g on kujutuse f inversne element, tähendab seda, et $f = fgf$ ja $g = gfg$ (me saame defineerida g kui bijektsiooni f : dom$f \to$ im$f$ pöördkujutuse). Ehk iga $x \in A =$ dom$f$ korral $f(x) = (fgf)(x)$ ja iga $y \in B =$ dom$g =$ im$f$ korral $g(y) = (gfg)(y)$. Vaatleme esimest võrdust. See tähendab, et kui võtame elemendi $x \in A$, siis $f(x)$ kuulub f kujutisse, g viib selle tagasi f määramispiirkonda, ja siis rakendatakse uuesti f — tulemus on sama, kui rakendada ainult f. Seega toimub ”tegutsemine”kujutuse f määramis- ja muutumispiirkondade vahel. Neid hulki on kaks tükki.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=3, "f"] \arrow[r, shift right=3, "f"'] & B \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

Minu idee (esimene samm) inverssuse üldistamiseks seisnes selles, et nõuda võrduse $f = fgf$ kehtimist juhul, kui g osas on mitme teguri korrutis. See tähendab, et vaatleme suuremat arvu alamhulki. Nõudsin, et leiduksid kujutused g ja h, et kehtiks võrdus $f = fghf$. See tähendab, et kui $x \in A =$ dom$f$, siis f viib elemendi x hulka B, sealt edasi viiakse tulemus funktsiooniga h hulka C, sealt edasi funktsiooniga g hulka A, millest lõpuks funktsiooniga f hulka B ja tulemus on sama, kui oleks rakendatud ainult funktsiooni f.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "f"'] & & B \arrow[dl, "h"] \\
& C \arrow[ul, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Seda mõttekäiku üldistades jõuame võrduseni $f = ff_1 \cdots f_k f$.

Bakalaureusetöös [Mu] tõestasin, et selline definitsioon langeb kokku tavalise regulaarsuse definitsiooniga: iga $s \in S$ korral leidub $x \in S$, nii et $s = sxs$ (siin $I(X)$ asemel on üldine poolrühm S).

Saab nõuda rohkem, et juhul $f = fghf$ kujutused g ja h rahuldaksid veel kahte tingimust: $h = hfgh$ ja $g = ghfg$. Seda üldistades saab nõuda, et olukorras $f = ff_1 \cdots f_k f$ kehtiksid iga $i \in \mathbf{k}$ korral ($\mathbf{k}$ tähendab siin ja edaspidi hulka $\{1, \ldots, k\}$) võrdused $f_i = f_i \cdots f_k f f_1 \cdots f_i$. Näiteks juhul $i = 3 (\leq k)$ on see kujul
$f_3 = f_3 \cdots f_k f f_1 f_2 f_3$. Selliseid elemente (praeguse näite puhul funktsioone f_i) nimetasin elemendi f k-inversseteks elementideks. Nagu selgus töös [Mu], ka selliste elementide leidumise nõue on samaväärne regulaarsusega.

Ootuseks oli, et kui nõuda funktsioonide $f_1, \ldots, f_k$ üheselt määratust, on tulemus midagi üldisemat kui inversne poolrühm. Ühesuse defineerisin üldisel juhul järgmiselt: et $s_1, \ldots, s_k$ on elemendi s üheselt määratud k-inverssed elemendid, tähendab seda, et kui leiduvad veel mingid elemendi s k-inverssed elemendid $t_1, \ldots, t_k$, siis $t_1 = s_1, \ldots, t_k = s_k$. Selgus, et sellise nõudega jõuame välja hoopis väiksemasse poolrühmade klassi kui inverssed poolrühmad: nimelt poolvõrede klassi.

Kõik eelnevad tulemused ja definitsioonid olid originaalsed ning sissejuhatuseks ja eeltööks käesolevale magistritööle (eelnev on põhjalikumalt toodud paragrahvis 2).

Käesolevas töös olen samuti püüdnud üldistada inversse poolrühma definitsiooni, sidudes uue definitsiooni naturaalarvuga k, nii et juhul $k = 1$ langeb uus definitsioon kokku regulaarse või inversse poolrühma definitsiooniga. Saadud tulemused on aga taas kirjeldused tuntud poolrühmadele ja mitte üldistused, sellest tuleneb ka magistritöö pealkiri.

Esimeses paragrahvis meenutame regulaarseid ja inversseid poolrühmi, materjal pärineb õpikust [Ki].

Teises paragrahvis on veidi lühendatult materjal minu bakalaureusetööst [Mu]. Seal olin defineerinud k-regulaarse ja k-inversse poolrühma, $k \in \mathbb{N}$. Osutus, et k-regulaarne poolrühm on parajasti regulaarne, $k \in \mathbb{N}$, ja k-inversne poolrühm on parajasti poolvõre, $k \geq 2$. Seega k-inversne poolrühm ei ole inversse poolrühma üldistus, kuid siiski annab omapärase kirjelduse poolvõredele.

Kahes viimases paragrahvis on selle magistritöö põhiline sisu. Kogu materjal on originaalne. Kui definitsioonides kasutatakse mingi mõiste defineerimisel sõnu "nimetatakse"või "öeldakse", siis on tegemist tuntud definitsiooniga; kui aga "nimetame", "ütleme", siis on tegemist uue originaalse definitsiooniga.

Kolmandas paragrahvis defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ jaoks nõrgalt k-inverssed poolrühmad. Näiliselt üldistab see k-inversse poolrühma definitsiooni; nõrgalt 1-inversne poolrühm on parajasti inversne. Siiski tõestame, et kui $k \geq 2$, siis on nõrgalt k-inversne poolrühm parajasti poolvõre. Seega ka see definitsioon ei andnud $k \geq 2$ korral midagi uut ja üldisemat, vaid andis juurde ühe kirjelduse poolvõredele.

Neljandas paragrahvis defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ jaoks k-pöördregulaarsed, peaaegu k-pöördinverssed ja k-pöördinverssed poolrühmad. Esimesele ja kolmandale neist saame kätte kirjelduse. Nimelt on k-pöördregulaarne poolrühm parajasti E-inversiivne ($k \in \mathbb{N}$); peaaegu 1-pöördinversne poolrühm parajasti regulaarne; 1-pöördinversne poolrühm parajasti inversne ja k-pöördinversne poolrühm parajasti rühm ($k \geq 2$). Leidmata jääb kirjeldus peaaegu k-pöördinverssetele poolrühmadele (kui $k \geq 2$), kuid näitame, kuidas mõjub peaaegu k-pöördinverssuse tingimus erinevatele poolrühmade klassidele. Lõpuks tõestame, et täielikult regulaarne poolrühm on peaaegu k-pöördinversne parajasti siis, kui ta on Reesi maatrikspoolrühm; sellest järeldub, et idempotentne poolrühm on peaaegu k-pöördinversne parajasti siis, kui ta on ristkülikpoolrühm.

Töö lõpeb ingliskeelse resümee ja kasutatud kirjanduse loeteluga.

1 Regulaarsed ja inverssed poolrühmad

Selles paragrahvis tuletame lühidalt meelde regulaarsuse ja inverssuse mõiste poolrühmadel. Täpsemalt võib nende kohta lugeda ingliskeelsetest raamatutest [La] ja [Ho]; järgnev lühiülevaade on pärit eestikeelsest õpikust [Ki], va. lõik peale definitsiooni 1.2.

Definitsioon 1.1 Poolrühma S elementi a nimetatakse ***regulaarseks***, kui leidub element $x \in S$, nii et $a = axa$. Elementi x nimetatakse elemendi a ***pseudoinversseks*** elemendiks. Poolrühma nimetatakse ***regulaarseks***, kui tema kõik elemendid on regulaarsed.

Definitsioon 1.2 Poolrühma S elementi a' nimetatakse elemendi $a \in S$ ***inversseks elemendiks***, kui $a = aa'a$ ja $a' = a'aa'$.

Regulaarses poolrühmas on igal elemendil $a = axa$ olemas inversne element – selleks osutub xax, mida on kerge kontrollida. See on ka põhjuseks, miks elementi x definitsioonis 1.1 pseudoinversseks nimetati: pseudoinversne element indutseerib inversse elemendi. Ning vastupidi, kui elemendil on olemas inversne element, siis on tal ammugi olemas pseudoinversne element. Järelikult saanuks regulaarse poolrühma ka nii defineerida, et selles peab igal elemendil leiduma inversne element (ja mõnikord nii tehaksegi). Seda mõttekäiku meenutame paragrahvi 4.2 juures.

Definitsioon 1.3 Poolrühma nimetatakse ***inversseks***, kui tema igal elemendil leidub parajasti üks inversne element.

Teisiti öeldes on poolrühm inversne, kui tema igal elemendil leidub inversne element ja see on üheselt määratud. See tähendab, et kui S on inversne poolrühm, $s, s' \in S$, element s' on elemendi s inversne element ning $s'' \in S$ on samuti elemendi s inversne element, siis $s'' = s'$. Definitsioonist tuleneb ka, et $(s')' = s$.

Mõistagi on inversne poolrühm regulaarne. Järgmisest teoreemist selgub, kuna kehtib vastupidine.

Teoreem 1.4 *Regulaarne poolrühm on inversne parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu S inversne poolrühm ja $e, f \in S$ suvalised idempotendid. Olgu x korrutise ef inversne element. See tähendab, et

$$efxef = ef \quad \text{ja} \quad xefx = x.$$

Siis

$$(fxe)(fxe) = f(xefx)e = fxe,$$

mis tähendab, et fxe on idempotent ning järelikult iseenda inversne element.

Näitame, et ka ef on elemendi fxe inversne element. Tõepoolest,

$$(ef)(fxe)(ef) = effxeef = efxef = ef$$

ja

$$(fxe)(ef)(fxe) = fxeeffxe = fxefxe = fxe.$$

Kuna S on inversne poolrühm, siis $ef = fxe$. Järelikult $fef = ffxe = fxe = ef$ ehk $fef = ef$. Analoogiliselt (korrutades e-ga) saame $efe = ef$.

Vahetades nüüd idempotentide e ja f rollid ning arutledes analoogiliselt, saame $efe = fe$ ja $fef = fe$. Järelikult $ef = efe = fe$.

PIISAVUS. Olgu S regulaarne poolrühm, mille idempotendid kommuteeruvad ja olgu $a \in S$ suvaline element. Oletame, et $a', a'' \in S$ on mõlemad elemendi a inverssed elemendid. Siis

$$a = aa'a,\ a' = a'aa',\ a = aa''a,\ a'' = a''aa''$$

ning elemendid $aa', aa'', a'a, a''a$ on idempotendid. Viimaste kommuteerumisest saame

$$aa' = (aa''a)a' = (aa'')(aa') = (aa')(aa'') = (aa'a)a'' = aa''.$$

Analoogiliselt tuleb $a'a = a''a$. Neid võrdusi kasutades saame

$$a' = a'aa' = (a'a)a' = (a''a)a' = a''(aa') = a''(aa'') = a''aa'' = a''.$$

$\square$

2 k-inverssed poolrühmad

Selles paragrahvis on veidi lühendatud kujul materjal bakalaureusetööst [Mu]; mõningaid selle väiteid läheb tarvis ka paragrahvides 3 ja 4. Näiteks lemma 2.7 on üks selline, kusjuures see on esitatud üldisemal kujul kui see oli bakalaureusetöös.

Olgu k naturaalarv ja S poolrühm.

Definitsioon 2.1 Elementi $s \in S$ nimetame ***k-regulaarseks***, kui leiduvad elemendid $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$, nii et

$$s = ss_1s_2 \cdots s_ks.$$

Elemente $s_1, s_2, \ldots, s_k$ (selles järjekorras) nimetame elemendi s ***k-pseudoinversseteks*** elementideks. Poolrühma nimetame ***k-regulaarseks***, kui tema iga element on k-regulaarne.

Lause 2.2 *Element $s \in S$ on k-regulaarne parajasti siis, kui ta on regulaarne.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Ilmne.

PIISAVUS. Paneme tähele, et kui $s = sxs$, siis $s = s(xs)^n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, kuna xs on idempotent. Juhtum $k = 1$ on triviaalne. Olgu $k \geq 2$. Siis

$$s = s(xs)(x)s = s(xs)(xs)(x)s = \ldots = s(xs)^{k-1}(x)s.$$

$\square$

Järeldus 2.3 *Olgu $k \in \mathbb{N}$. Siis on k-regulaarne poolrühm parajasti regulaarne.* $\square$

Tuletame meelde, et kui $s = sxs$, siis on sx ja xs idempotendid. Tähendab, võttes suvalise regulaarse elemendi, saame üldjuhul kaks idempotenti. Seda lihtsat fakti üldistab järgmine lause, mida läheb tarvis ka järgmistes paragrahvides.

Lause 2.4 *Kui mingite $s, s_1, \ldots, s_k \in S$ korral $s = ss_1s_2 \cdots s_ks$ (st. element s on k-regulaarne), siis elemendid $s_1 \cdots s_ks$, $ss_1 \cdots s_k$ ja*

$$s_i \cdots s_kss_1 \cdots s_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots, k,$$

on idempotendid.

TÕESTUS.

$$\begin{aligned}
(s_1 \cdots s_ks)(s_1 \cdots s_ks) &= s_1 \cdots s_k(ss_1 \cdots s_ks) = s_1 \cdots s_ks, \\
(ss_1 \cdots s_k)(ss_1 \cdots s_k) &= (ss_1 \cdots s_ks)s_1 \cdots s_k = ss_1 \cdots s_k,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& (s_i \cdots s_k s s_1 \cdots s_{i-1})(s_i \cdots s_k s s_1 \cdots s_{i-1}) \\
= \; & s_i \cdots s_k (s s_1 \cdots s_{i-1} s_i \cdots s_k s) s_1 \cdots s_{i-1} \\
= \; & s_i \cdots s_k s s_1 \cdots s_{i-1}.
\end{aligned}
$$

□

Näiteks, kui $s = ss_1s_2s$, siis on idempotendid s_1s_2s, s_2ss_1 ja ss_1s_2; kui $s = ss_1s_2s_3s$, siis on idempotendid $s_1s_2s_3s$, $s_2s_3ss_1$, $s_3ss_1s_2$ ja $ss_1s_2s_3$.

Definitsioon 2.5 Poolrühma S elemente $s_1, s_2, \ldots, s_k$ (selles järjekorras) nimetame elemendi $s \in S$ ***k*-inversseteks elementideks**, kui

$$
\begin{array}{rcl}
s & = & ss_1s_2\cdots s_ks, \\
s_1 & = & s_1s_2\cdots s_kss_1, \\
s_2 & = & s_2s_3\cdots s_kss_1s_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
s_{k-2} & = & s_{k-2}s_{k-1}s_kss_1\cdots s_{k-3}s_{k-2}, \\
s_{k-1} & = & s_{k-1}s_kss_1\cdots s_{k-2}s_{k-1}, \\
s_k & = & s_kss_1s_2\cdots s_{k-1}s_k.
\end{array}
$$

On selge, et varem vaadeldud inversne element on selle definitsiooni mõttes 1-inversne element. Nagu eelnevas paragrahvis mainisime, saab regulaarset poolrühma defineerida kahte moodi. Osutub, et regulaarset elementi saab kirjeldada ka k-inverssete elementide kaudu. Nimelt regulaarne element *omab* k-inversseid elemente — seda väidab järgmine lause —, aga vastupidine on ilmne.

Lause 2.6 *Olgu $k \in \mathbb{N}$. Siis regulaarsel elemendil on olemas k-inverssed elemendid.*

TÕESTUS. Olgu $x \in S$ elemendi $s \in S$ inversne element, see tähendab $s = sxs$ ja $x = xsx$. Siis on sx ja xs idempotendid. Defineerime elemendid $t_1, \ldots, t_k$ järgmiselt:

$$t_1 = x, t_2 = s, t_3 = x, t_4 = s, \ldots, t_{2n} = s, t_{2n+1} = x,$$

kui $k = 2n + 1$, ja

$$t_1 = x, t_2 = s, t_3 = x, t_4 = s, \ldots, t_{2n-1} = x, t_{2n} = sx,$$

kui $k = 2n$. Näitame, et $t_1, \ldots, t_k$ sobivad elemendi s k-inversseteks elementideks.

Olgu $k = 2n + 1$. Siis

$$\begin{aligned}
&st_1t_2\cdots t_{2n+1}s = sxs\cdots xs = s(xs)\cdots(xs) = sxs = s,\\
&t_1t_2\cdots t_{2n+1}st_1 = xs\cdots xsx = x(sx)\cdots(sx) = xsx = x = t_1,\\
&t_2t_3\cdots t_{2n+1}st_1t_2 = sx\cdots xsxs = s(xs)\cdots(xs) = sxs = s = t_2,\\
&\dots\\
&t_{2n+1}st_1\cdots t_{2n}t_{2n+1} = xsx\cdots sx = x(sx)\cdots(sx) = xsx = x\\
&\qquad\qquad = t_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Kui $k = 2n$, siis

$$\begin{aligned}
&st_1t_2\cdots t_{2n}s = sxs\cdots(sx)s = s(xs)\cdots(xs) = sxs = s,\\
&t_1t_2\cdots t_{2n}st_1 = xs\cdots(sx)sx = x(sx)\cdots(sx) = xsx = x = t_1,\\
&t_2t_3\cdots t_{2n}st_1t_2 = sx\cdots(sx)sxs = s(xs)\cdots(xs) = sxs = s = t_2,\\
&\dots\\
&t_{2n-1}t_{2n}st_1\cdots t_{2n-1} = x(sx)sx\cdots x = x(sx)\cdots(sx) = xsx = x\\
&\qquad\qquad = t_{2n-1},\\
&t_{2n}st_1\cdots t_{2n} = (sx)sx\cdots(sx) = (sx)(sx)\cdots(sx) = sx = t_{2n}.
\end{aligned}$$

□

Märkus. Viimases lauses oleks saanud k-inverssed elemendid t_i, $i \in \mathbf{k}$, defineerida ka teisiti, koguni loomulikumal viisil, lähtudes võrdusest $s = ss_1\cdots s_ks$. Nimelt, iga $i \in \mathbf{k}$ korral

$$t_i := (\prod_{j=i}^{k} s_j)s(\prod_{j=1}^{i} s_j) = s_i\cdots s_kss_1\cdots s_i.$$

Saab tõestada, et need on elemendi s k-inverssed elemendid, kuid tõestus (induktsiooniga k järgi) osutub pikaks ja ei ole ka vajalik, sest saime väidet tõestada lihtsamalt.

Selle märkuse tõttu on selge, miks nimetasime k-pseudoinversseid elemente just selliselt.

Nii selles kui järgnevates paragrahvides läheb korduvalt tarvis ühte lemmat, mille tõestame üsna üldisel juhul. Üks selle lemma erijuht oli olemas ka töös [Mu]; teise erijuhu aga tõestasime eelmise lause näol. Lemma sisu seisneb järgnevas.

Olgu regulaarsel elemendil s k-inverssed elemendid $s_1, \dots, s_k$. Siis $s = ss_1\cdots s_ks$ ja veel k tingimust, mis praegu pole olulised (küll aga lemma tõestamisel). Sellest järeldub, et $s = ss_1\cdots s_kss_1\cdots s_ks$ jne. — me võime niiviisi kuitahes palju kordi itereerida. Kui teeme seda m korda (m võib olla ka 0, sel juhul on tegemist esialgse võrdusega $s = ss_1\cdots s_ks$), siis saame võrduse

$$s = s(s_1\cdots s_ks)^m s_1\cdots s_ks. \quad (\star)$$

Äärmiste s-ide vahel on $(k+1)m + k = mk + m + k$ elementi. Järgnev lemma väidab, et kui seda äärmiste s-de vahel olevat avaldist "tükeldada", tekitades sellega mingi arvu q elemente, $1 \leq q \leq mk + m + k$, siis need osutuvad elemendi s q-inversseteks elementideks. (Eelmises lauses itereerisime võrdust $s = sxs$ ja saime niiviisi 1-inversse elemendi x abil k-inverssed elemendid.)

Üldisust kitsendamata eeldame, et avaldises $(\star)$ ei ole peale sulgude paigutust uusi elemente (korrutisi), milles on üle $k+1$ teguri. Sest arvestades võrdust $s_i \cdots s_k s s_1 \cdots s_i = s_i$, $i \in \mathbf{k}$, saab sulgudega välja eraldatud korrutist, milles on üle $k+1$ teguri, lühendada $k+1$ võrra. Näiteks, kui $k = 4$ ja sulgude paigutamisega oleme tekitanud uue elemendi $s_2 s_3 s_4 s s_1 s_2 s_3 s_4$, siis võrduse $s_2 = s_2 s_3 s_4 s s_1 s_2$ tõttu (või sarnaste avaldiste tõttu, mis kehtivad s_3 ja s_4 jaoks) saab selle lihtsustada kujule $s_2 s_3 s_4$. Seda nõuet võib vaadata ka nii, et m asemel on $m-1$ (või veelgi väiksem arv), st. ühe iteratsiooni jätame tegemata, siis tõestame lemma ning vajaduse korral ennistame elemendi esialgse kuju.

Lemma 2.7 *Olgu S poolrühm, $s \in S$, $s_1, \ldots, s_k \in S$ elemendi s k-inverssed elemendid ja $m \in \mathbb{N}_0$ võrduse $s = ss_1 \cdots s_k s$ iteratsioonide arv. Olgu võrduses $(\star)$ (lahtikirjutatud kujul) paigutatud mingil moel sulud (nii et ei tekiks korrutisi pikkusega üle $k+1$ — vt. eelmist lõiku) ja saadud sellega q tegurit $t_1, \ldots, t_q$, $1 \leq q \leq mk + m + k$. Siis $t_1, \ldots, t_q$ on elemendi s q-inverssed elemendid.*

Tõestus. Esimene võrdus definitsioonis 2.5 on täidetud tänu võrdusele $(\star)$ ehk selle tõttu, kuidas elemendid $t_1, \ldots, t_q$ moodustati.

Olgu $j \in \mathbf{q}$ suvaline. Tahame kontrollida, kas

$$t_j \cdots t_q s t_1 \cdots t_j = t_j.$$

Olgu elemendi t_j kirjapildis esimene element s_u ja viimane s_v, see tähendab $t_j = s_u \cdots s_v$. (Kui kas esimeseks või viimaseks elemendiks osutub s, siis võime tähistada $s = s_0$, sel juhul on kas $u = 0$ või $v = 0$.)

Olgu $u \leq v$. Siis lause 2.4 abil saame

$$\begin{aligned}
t_j \cdots t_q s t_1 \cdots t_j &= s_u \cdots s_k s s_1 \cdots s_k s s_1 \cdots \cdots s_k s s_1 \cdots s_v \\
&= s_u \cdots s_k (s s_1 \cdots s_k)^r s s_1 \cdots s_v \\
&\overset{2.4}{=} s_u \cdots s_k (s s_1 \cdots s_k) s s_1 \cdots s_v \\
&= s_u \cdots s_k (s s_1 \cdots s_k s) s_1 \cdots s_v \\
&= s_u \cdots s_k s s_1 \cdots s_v \\
&= s_u \cdots s_v \cdots s_k s s_1 \cdots s_v \\
&= s_u \cdots s_{v-1} (s_v \cdots s_k s s_1 \cdots s_v) \\
&= s_u \cdots s_{v-1} s_v \\
&= t_j,
\end{aligned}$$

kus $r \in \mathbb{N}_0$ täpne väärtus pole oluline. Alt viienda ja alt teise võrduse saime sellepärast, et $s_1, \ldots, s_k$ olid elemendi s k-inverssed elemendid. Analoogiliselt tõestatakse juhtum $u > v$. □

Definitsioon 2.8 Poolrühma S nimetame ***k*-inversseks**, kui tema igal elemendil leiduvad üheselt määratud k-inverssed elemendid.

Tähendab, kui k-inversses poolrühmas on nii $s_1, \ldots, s_k$ kui ka $t_1, \ldots, t_k$ elemendi s k-inverssed elemendid, siis $t_i = s_i, i \in \mathbf{k}$. On selge, et inversne poolrühm on uues mõttes 1-inversne.

Lemma 2.9 *Olgu $k \in \mathbb{N}$, S poolrühm ja $s \in S$ selline regulaarne element, mille $(k+1)$-inverssed elemendid on üheselt määratud. Siis selle elemendi jaoks leiduvad üheselt määratud k-inverssed elemendid.*

Tõestus. Kõigepealt mainime, et regulaarsel elemendil *leiduvad* $(k+1)$-inverssed elemendid lause 2.6 põhjal. Olgu elemendi s üheselt määratud $(k+1)$-inverssed elemendid $s_1, \ldots, s_{k+1}$. Siis

$$\begin{aligned}
&s = s s_1 \cdots s_k s_{k+1} s, \\
&s_i = s_i \cdots s_{k+1} s s_1 \cdots s_i, \quad i \in \mathbf{k+1}.
\end{aligned}$$

Defineerime

$$t_1 = s_1,\ t_2 = s_2,\ \ldots,\ t_{k-1} = s_{k-1},\ t_k = s_k s_{k+1}. \quad (\star)$$

Kuna elemendid $t_1, \ldots, t_k$ on saadud elementidest $s_1, \ldots, s_{k+1}$ teatud grupeerimise teel, siis lemma 2.7 tõttu ($k = k+1$, $q = k$, $m = 0$) *on* tegemist elemendi s k-inversssete elementidega. Jääb veel näidata, et need on üheselt määratud.

Selleks oletame, et elemendil s on veel mingid k-inverssed elemendid $t'_1, \ldots, t'_k$:

$$\begin{aligned}
&s = s t'_1 \cdots t'_k s, && (*) \\
&t'_i = t'_i \cdots t'_k s t'_1 \cdots t'_i, \quad i \in \mathbf{k}. && (i)
\end{aligned}$$

Tahame näidata, et $t'_i = t_i, i \in \mathbf{k}$. Võrdust $(*)$ üks kord itereerides saame

$$s = st'_1 \cdots t'_k s = st'_1 \cdots t'_k(st'_1 \cdots t'_k)s.$$

Taas lemmast 2.7 ($k = k$, $q = k+1$, $m = 1$) saame, et $t'_1, \ldots, t'_k$, $st'_1 \cdots t'_k$ on elemendi s $(k+1)$-inverssed elemendid.

Seega on elemendil s $(k+1)$-inverssed elemendid nii $s_1, \ldots, s_k, s_{k+1}$ kui ka $t'_1, \ldots, t'_k, st'_1 \cdots t'_k$. Eelduse põhjal olid need aga üheselt määratud. Järelikult

$$s_i = t'_i, i \in \mathbf{k}, \text{ ja } s_{k+1} = st'_1 \cdots t'_k. \quad (\star\star)$$

Nüüd $t_i \overset{(\star)}{=} s_i \overset{(\star\star)}{=} t'_i$, kui $i \in \mathbf{k-1}$, ja

$$t_k \overset{(\star)}{=} s_k s_{k+1} \overset{(\star\star)}{=} s_k(st'_1 \cdots t'_k) \overset{(\star\star)}{=} t'_k(st'_1 \cdots t'_k) = t'_k st'_1 \cdots t'_k \overset{(i)_{i=k}}{=} t'_k.$$

Sellega oleme näidanud, et $t'_i = t_i, i \in \mathbf{k}$. □

Lause 2.10 *Olgu $k \in \mathbb{N}$. Siis $(k+1)$-inversne poolrühm on k-inversne.*

Tõestus. Kui S on $(k+1)$-inversne poolrühm ja $s \in S$ suvaline element, siis sellel elemendil on olemas üheselt määratud $(k+1)$-inverssed elemendid ja ammugi on ta regulaarne. Lemma 2.9 põhjal leiduvad sellele elemendile üheselt määratud k-inverssed elemendid. Kuna s oli suvaline, siis S on k-inversne poolrühm. □

Järeldus 2.11 *Olgu $k \geq 2$. Siis k-inversne poolrühm on 2-inversne.*

Tõestus. Lause 2.10 järgi on k-inversne poolrühm $(k-1)$-inversne. Kui seda teadmist $k-2$ korda rakendame, saamegi, et k-inversne poolrühm on 2-inversne. □

Järeldus 2.12 *Olgu $k \in \mathbb{N}$. Siis k-inversne poolrühm on inversne.*

Tõestus. Kui $k = 1$, on poolrühm, nagu juba varem märgitud, inversne. Kui $k \geq 2$, siis järelduse 2.11 põhjal on poolrühm 2-inversne. Lause 2.10 põhjal, võttes seal $k = 1$, on S inversne. □

Lemma 2.13 *Olgu S poolrühm ja $s \in S$ selline regulaarne element, mille 2-inverssed elemendid on üheselt määratud ja mille 3-inverssetest elementidest esimene ja kolmas omavad üheselt määratud 2-inversseid elemente. Siis on s idempotent.*

Tõestus. Kõigepealt, element s *omab* nii 2- kui 3-inversseid elemente lause 2.6 põhjal, sest s on regulaarne. Tähistame elemendi s 3-inversseid elemente t_1, t_2, t_3. Siis

$$
\begin{array}{rcll}
s & = & st_1t_2t_3s, & (0) \\
t_1 & = & t_1t_2t_3st_1, & (1) \\
t_2 & = & t_2t_3st_1t_2, & (2) \\
t_3 & = & t_3st_1t_2t_3. & (3)
\end{array}
$$

Elemendid t_1 ja t_2t_3 ning ka t_1t_2 ja t_3 on elemendi s 2-inverssed elemendid lemma 2.7 põhjal ($k = 3$, $q = 2$, $m = 0$).

Kuna t_2, t_3, s on elemendi t_1 3-inverssed elemendid (vt. võrdusi (1)-(3) ja (0)), siis lemma 2.7 põhjal (samade parameetritega) on nii t_2 ja t_3s kui ka t_2t_3 ja s elemendi t_1 2-inverssed elemendid.

Kuna s, t_1, t_2 on elemendi t_3 3-inverssed elemendid (vt. võrdusi (3) ja (0)-(2)), siis lemma 2.7 põhjal (samade parameetritega) on nii s ja t_1t_2 kui ka st_1 ja t_2 elemendi t_3 2-inverssed elemendid.

Eelduse põhjal olid elementide s, t_1 ja t_3 2-inverssed elemendid üheselt määratud. Järelikult

$$
\begin{array}{l}
t_1 = t_1t_2 \text{ ja } t_2t_3 = t_3; \\
t_2 = t_2t_3 \text{ ja } t_3s = s; \\
s = st_1 \text{ ja } t_1t_2 = t_2.
\end{array}
$$

Nendest võrdustest läheb vaja järgmist kolme: $t_1 = t_1t_2$, $t_3s = s$ ja $s = st_1$. Nende põhjal

$$
s \overset{(0)}{=} st_1t_2t_3s = s(t_1t_2)(t_3s) = st_1s = (st_1)s = ss
$$

ehk $s = s^2$. □

Nüüdseks on kogu eeltöö tehtud ja saame tõestada selle paragrahvi põhiteoreemi.

Teoreem 2.14 *Olgu $k \geq 2$. Siis k-inversne poolrühm on parajasti poolvõre.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu S k-inversne poolrühm ja $s \in S$ suvaline element. Siis on S loomulikult k-regulaarne ning järelduse 2.3 põhjal regulaarne. Seega on s regulaarne element. Järelduse 2.11 põhjal on S 2-inversne. Järelikult omab element s üheselt määratud 2-inversseid elemente. Lause 2.6 põhjal omab element s 3-inversseid elemente poolrühmas S. Seega on neil olemas üheselt määratud 2-inverssed elemendid. Sellega on täidetud lemma 2.13 eeldused ja järelikult on s idempotent. Kuid s oli suvaline, seega on S idempotentne.

Kuna S on k-inversne, siis on ta järelduse 2.12 põhjal inversne, mistõttu tema idempotendid kommuteeruvad (teoreem 1.4). Kuna aga S on idempotentne, siis on ta ka kommutatiivne ja kokkuvõttes poolvõre.

Piisavus. Olgu S poolvõre ja $s \in S$. Kuna S on idempotentne, siis sobivad tema k-inversseteks elementideks elemendid $s, \ldots, s$, mida on k tükki. Näitame, et need on üheselt määratud. Selleks oletame, et elemendil s on olemas veel mingid k-inverssed elemendid $t_1, \ldots, t_k$, see tähendab

$$\begin{aligned} s &= st_1 \cdots t_k s, \\ t_i &= t_i \cdots t_k s t_1 \cdots t_i, \quad i \in \mathbf{k}, \end{aligned}$$

ja näitame, et $t_i = s, i \in \mathbf{k}$. Tõepoolest, idempotentsuse ja kommutatiivsuse tõttu on

$$s = st_1 \cdots t_k s = (st_1 \cdots t_k)s = s(st_1 \cdots t_k) = sst_1 \cdots t_k = st_1 \cdots t_k$$

ja

$$\begin{aligned} t_i = t_i \cdots t_k s t_1 \cdots t_i &= (t_i \cdots t_k)(st_1 \cdots t_i) = (st_1 \cdots t_i)(t_i \cdots t_k) \\ &= st_1 \cdots t_i t_i \cdots t_k = st_1 \cdots t_i \cdots t_k = st_1 \cdots t_k, \quad i \in \mathbf{k}, \end{aligned}$$

ehk $t_i = s, i \in \mathbf{k}$. $\square$

Järeldus 2.15 *Kui $k \geq 2$, siis on k-inversne poolrühm parajasti 2-inversne.* $\square$

Järeldus 2.16 *Kui $k, l \geq 2$, siis on k-inversne poolrühm parajasti l-inversne.* $\square$

3 Nõrgalt k-inverssed poolrühmad

Eelmises paragrahvis oli k-inversse poolrühma juures k-inverssete elementide ühesuse nõue üsna tugev (ühesus komponenthaaval järjest võttes), sest selgus, et tegemist on poolvõredega.

Selles paragrahvis nõrgendame ühesuse nõuet nii, et nõuame ühesust vaid hulkade täpsuseni. Paragrahvi lõpus on selle magistritöö üks põhitulemusi, mis väidab, et ka sellise nõrgendamise tulemus viib taas välja poolvõredeni. See tähendab muuhulgas eelmise paragrahvi (st. töö [Mu]) tulemuse üldistamist. Alustame definitsioonidest. Enne meenutame veel, et lause 2.6 põhjal regulaarne element s *omab* k-inversseid elemente.

Definitsioon 3.1 Olgu S poolrühm ja $s \in S$ regulaarne element. Elemendi s k-inversseid elemente $s_1, \ldots, s_k \in S$ nimetame ***nõrgalt määratuks***, kui sellest, et mingid $t_1, \ldots, t_k \in S$ on elemendi s k-inverssed elemendid, järeldub, et

$$\{t_1, \ldots, t_k\} = \{s_1, \ldots, s_k\}.$$

Definitsioon 3.2 Poolrühma nimetame ***nõrgalt k-inversseks***, kui selle iga elemendi jaoks leiduvad nõrgalt määratud k-inverssed elemendid.

On selge, et nõrgalt k-inversne poolrühm on regulaarne. Samuti on selge, et k-inversne poolrühm (vt. definitsiooni 2.8) on nõrgalt k-inversne: kui üle-eelmise definitsiooni tähistustes $t_i = s_i, i \in \mathbf{k}$, siis ilmselt $\{t_1, \ldots, t_k\} = \{s_1, \ldots, s_k\}$.

Märgime veel, et nõrgalt k-inversses poolrühmas on igal elemendil ülimalt $k!$ komplekti k-inversseid elemente, sest nii palju on võimalusi paigutada ümber elemente hulgas $\{s_1, \ldots, s_k\}$.

Kuna teoreemi 2.14 põhjal on poolvõre k-inversne (ka juhul $k = 1$), siis järelikult on poolvõre nõrgalt k-inversne iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Edasises hakkame näitama vastupidist. Meenutame, et $E(S)$ tähistab idempotentide hulka poolrühmas S.

Lause 3.3 *Nõrgalt k-inversne poolrühm on inversne, $k \in \mathbb{N}$.*

TÕESTUS. Kui $k = 1$, on väide selge. Olgu $k \geq 2$, S nõrgalt k-inversne poolrühm, $e \in E(S)$ ja $x \in S$ idempotendi e inversne element: $e = exe$ ja $x = xex$. Tõestus jaguneb kolme ossa.

A) Esmalt näitame, et nõrgalt k-inversses poolrühmas on idempotendi inversne element samuti idempotent ja veel enamgi: tema ise.

Kui k on paaritu arv, võime kirjutada $e = exexe \cdots xexe = (ex)^{\frac{k+1}{2}}e$. Selles avaldises on $2\frac{k+1}{2}+1 = k+2$ elementi, äärmiste e-de vahel on seega k elementi, x ja e vaheldumisi. Lemma 2.7 põhjal on need elemendi e k-inverssed elemendid. Kuna seda on samuti k elementi e, sest e on idempotent, siis poolrühma nõrgalt k-inverssuse tõttu

$$\{x, e, x, e, \ldots, x, e, x\} = \{e, e, \ldots, e\}$$

ehk ilma elementide kordusteta $\{x, e\} = \{e\}$. Järelikult $x = e$.

Kui k on paarisarv, siis võime kirjutada $e = exexe \cdots xexe = (ex)^{\frac{k+2}{2}}e$. Siin on $2\frac{k+2}{2}+1 = k+3$ elementi, äärmiste e-de vahel on $k+1$ elementi. Et saada k elementi, kirjutame $e = e(xe)xexe \cdots xexe$. Elemendid $xe, x, e, x, e, \ldots, x, e, x$ on taas lemma 2.7 tõttu elemendi e k-inverssed elemendid. Kuna ka k elementi e on seda, siis

$$\{xe, x, e, x, e \ldots, x, e, x\} = \{e, e, \ldots, e\}$$

ehk $\{xe, x, e\} = \{e\}$ (kui $k = 2$, siis $\{xe, x\} = \{e\}$). Järelikult $xe = x = e$ ka sellel juhul.

B) Järgmiseks näitame, et idempotentide korrutis on idempotent (ehk idempotendid moodustavad alampoolrühma).

Olgu $e, f \in E(S)$ ja $x \in S$ korrutise ef inversne element. Nagu on näidatud teoreemi 1.4 tarvilikkuse tõestuse juures, on $fxe \in E(S)$ ja ef on fxe inversne element. Nüüd **A)**-osa põhjal on ef idempotent (ja $ef = fxe$).

C) Lõpuks näitame, et idempotendid kommuteeruvad.

Olgu $e, f \in E(S)$ suvalised kaks idempotenti. Kuna idempotentide korrutis on idempotent, siis

$$(ef)fe(ef) = efef = (ef)^2 = ef$$

ja

$$(fe)ef(fe) = fefe = (fe)^2 = fe,$$

mis tähendab, et idempotent fe on idempotendi ef inversne element. Nagu eespool nägime, on idempotendi inversne element võrdne tema endaga, praegusel juhul $fe = ef$, mis tähendabki, et idempotendid kommuteeruvad. Kuna S on ka regulaarne, siis oleme saanud, et S on inversne (vt. teoreemi 1.4). □

Definitsioon 3.4 Nimetame ***k-idempotendiks*** sellist elementi s, mille korral $s = ss^k$, $k \in \mathbb{N}$. Poolrühma nimetame ***k-idempotentseks***, kui tema iga element on k-idempotent.

On selge, et idempotent (ehk siis 1-idempotent uues mõttes) on k-idempotent iga $k \in \mathbb{N}$ korral. (Definitsioon on antud selliselt, et idempotent olekski 1-idempotent.) See definitsioon ei mängi edasises olulist rolli, aga see on antud, et elemendil $s = s^3$ oleks mingi nimi.

Lause 3.5 *Kui $k \geq 3$, siis on nõrgalt k-inversne poolrühm kommutatiivne ja 2-idempotentne.*

TÕESTUS. Olgu $s \in S$ ja $t \in S$ tema inversne element: $s = sts$ ja $t = tst$. Siis

$$s = s(ts)(ts)\cdots(ts)ts = s(ts)^{k-1}(t)s \quad \text{ja}$$

$$s = s(ts)(ts)\cdots(ts)tsts = s(ts)^{k-3}(t)(s)(t)s,$$

kust lemma 2.7 ja poolrühma nõrgalt k-inverssuse tõttu $\{ts, t\} = \{ts, t, s\}$, kui $k > 3$. Kui $k = 3$, siis on see võrdus kujul $\{ts, t\} = \{t, s\}$.

Sõltumata $k \geq 3$ väärtusest kehtib, et kui $ts = t$, siis $s = s(ts) = st$, millest $s = (st)s = ss$ (ja järelikult on s ka 2-idempotent). Seda kasutame kohe järgnevas.

Vaatame esmalt läbi juhtumi $k = 3$. Ülaltoodud hulkade vahelist võrdust arvestades peab vasakpoolse hulga element ts olema üks kahest parempoolse hulga $\{t, s\}$ elemendist. Juhu $ts = t$ vaatasime läbi eelmises lõigus, seal saime $s = ss$; juhul $ts = s$ saame samuti $s = s(ts) = ss$. Niisiis on nõrgalt 3-inversne poolrühm idempotentne ja järelikult ka 2-idempotentne.

Olgu nüüd $k > 3$. Juhuga $ts = t$ on kõik korras, selles veendusime üle-eelmises lõigus. Olgu $ts \neq t$. Kuna nüüd on võrduses $\{ts, t\} = \{ts, t, s\}$ vasakul kaks elementi ja paremal kolm, siis parempoolses hulgas peavad mingid kaks elementi kokku langema. Kuna $ts \neq t$, siis kas $ts = s$ või $t = s$. Kui $ts = s$, siis $s = s(ts) = ss$. Kui aga $t = s$, siis $s = sts = sss$.

Sellega oleme näidanud, et üldiselt on S 2-idempotentne, $k \geq 3$. Muuseas, sellises poolrühmas on iga elemendi inversne element tema ise ning iga $s \in S$ korral on s^2 idempotent.

Lõpuks näitame, et S on kommutatiivne. Olgu $s, t \in S$. Siis st on iseenda inversne element ning, nagu eespool mainitud, on $s^2, t^2 \in E(S)$. Tuletame meelde, et lause 3.3 põhjal on S inversne ja et inversses poolrühmas idempotendid kommuteeruvad (teoreem 1.4). Nüüd, kuna

$$st(ts)st = st^2s^2t = ss^2t^2t = s^3t^3 = st$$

ja samamoodi

$$ts(st)ts = ts^2t^2s = tt^2s^2s = t^3s^3 = ts,$$

siis on ts elemendi st inversne element. Kuna S on inversne, siis järelikult $ts = st$. $\square$

Eeldus $k \geq 3$ oli viimase tulemuse saamisel oluline. Lähemalt vaatame juhtumit $k = 2$ selle paragrahvi lõpus.

Lause 3.6 *Kui $k \geq 3$, siis on nõrgalt k-inversne poolrühm idempotentne.*

Tõestus. Olgu S nõrgalt k-inversne poolrühm ja $s \in S$. Sõltuvalt k paarsusest jaguneb tõestus kaheks.

Olgu $k = 2n + 1$. Siis $n \in \mathbb{N}$, sest $k \geq 3$. Kuna

$$s = ss^2 = s(s^2)^{2n+1} = s(s^2)^{2n}ss = ss^2s^2 \cdots s^2ss,$$

siis on elemendi s k-inverssete elementide hulgaks $\{s^2, s\}$ (lemma 2.7 põhjal). Kuna

$$s = ss^2 = s(s^2)^{n+1} = ss^{2n+2} = ss^{2n+1}s,$$

siis on elemendi s k-inverssete elementide hulgaks $\{s\}$. Aga S on nõrgalt k-inversne, järelikult $\{s^2, s\} = \{s\}$, kust tulebki $s^2 = s$.

Olgu $k = 2n$. On selge, et s^2 kui idempotendi k-inversseteks elementideks sobivad k elementi s^2. Näitame, et nendeks sobivad ka k elementi s. Tõepoolest, esimene võrdus (vt. definitsiooni 2.5) peab ilmselt paika:

$$s^2s \cdots ss^2 = s^2s^{2n}s^2 = s^2(s^2)^n s^2 = s^2s^2s^2 = s^2.$$

Tähistame $s_1 = \ldots = s_{2n} = s$ ja olgu $i \in \mathbf{k}$ suvaline. Peame tõestama, et $s_i \cdots s_{2n}s^2s_1 \cdots s_i = s_i = s$. See on tõesti nii:

$$\begin{aligned} s_i \cdots s_{2n}s^2s_1 \cdots s_i &= s^{2n-i+1}s^2s^i = s^{2n-i+1+2+i} \\ &= s^{2n+3} = (s^2)^n s^3 = s^2s = s. \end{aligned}$$

S on nõrgalt k-inversne, järelikult $\{s^2\} = \{s\}$, kust ilmselt $s^2 = s$. $\square$

Märkus. Tõestuse kommentaariks märgime, et nii, nagu me saime idempotentsuse kätte paarisarvulisel juhul, oleksime saanud ka paarituarvulisel juhul ($k = 2n + 1$), vaadeldes elemendi s^2 k-inversseid elemente. Nimelt, me võime kirjutada $s^2 = s^2s^2 \cdots s^2sss^2$, mistõttu esimene võrdus definitsioonis 2.5 on täidetud, kui defineerime $s_1 = \ldots = s_{2n-1} = s^2$, $s_{2n} = s_{2n+1} = s$. Sellisel juhul on täidetud ka ülejäänud võrdused:

$$s_i \cdots s_{2n+1}(s^2)s_1 \cdots s_i = s^2 \cdots s^2ss(s^2)s^2 \cdots s^2 = s^2 \cdots s^2 = s^2 = s_i,$$

kui $1 \leq i \leq 2n-1$, ja

$$s_{2n}s_{2n+1}s^2s_1\cdots s_{2n} = sss^2s^2\cdots s^2s = s^2s = s,$$
$$s_{2n+1}s^2s_1\cdots s_{2n+1} = ss^2s^2\cdots s^2ss = ss^2 = s$$

ning elemendi s^2 k-inverssete elementide hulgaks oleks nii $\{s^2\}$ kui ka $\{s^2, s\}$.

(Kuna siin korrutasime enamasti idempotente, siis ei olnud tarvis nende astmeid täpselt välja arvutada, nagu eelmises lauses, kus oli rohkem s-de korrutisi.)

Nüüd saame järeldada selle paragrahvi põhitulemuse.

Teoreem 3.7 *Kui $k \geq 3$, siis on nõrgalt k-inversne poolrühm parajasti poolvõre.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu S nõrgalt k-inversne poolrühm. Lausete 3.5 ja 3.6 põhjal on S kommutatiivne idempotentne poolrühm.

PIISAVUS. On seletatud peale definitsiooni 3.2. □

Märgime siinkohal, et eelmise teoreemi väidet silmas pidades ei oleks lauses 3.5 vaja olnud kommutatiivsust tõestada. Kui selle oleksime jätnud tegemata, siis oleks nõrgalt k-inversne poolrühm inversne lausest 3.3 ja idempotentne lausest 3.6, seega poolvõre, sest idempotendid kommuteeruvad.

Lõpuks kirjeldame nõrgalt 2-inverssed poolrühmad. Ka need osutuvad parajasti poolvõredeks.

Meenutame poolrühmateooriast, et regulaarset poolrühma nimetatakse ***Cliffordi poolrühmaks***, kui tema idempotendid on tsentraalsed, st. kommuteeruvad kõigi poolrühma elementidega. Loomulikult on see siis ka inversne poolrühm. Järgnev teoreem on pärit raamatust [La], Theorem 5.2.12. Selles olev $\mathcal{H}$ on Greeni seos ja μ maksimaalne idempotente eraldav kongruents. Järgneva kahe teoreemi mõistmiseks läheb vaja järgnevat definitsiooni.

Definitsioon 3.8 Öeldakse, et poolrühm S on oma ***alampoolrühmade*** S_α, $\alpha \in I$***, poolvõre***, kui $S = \dot{\bigcup}_{\alpha\in I} S_\alpha$ ja iga $\alpha, \beta \in I$ korral leidub üheselt määratud $\gamma \in I$ nii, et $S_\alpha S_\beta, S_\beta S_\alpha \subseteq S_\gamma$, see tähendab

$$x \in S_\alpha,\ y \in S_\beta \Rightarrow xy, yx \in S_\gamma.$$

On teada, et poolvõre saab ekvivalentselt defineerida kui osaliselt järjestatud hulka, milles igal kahel elemendil on olemas alumine raja. Sellest viimasest saame (idempotentse kommutatiivse) poolrühma, kui kahe elemendi korrutiseks defineerime nende alumise raja. Täpsemalt vt. [Ki], teoreem VI.4.5. Seega eelmises definitsioonis esinenud γ jaoks kehtib $\gamma = \alpha\beta = \beta\alpha \leq \alpha, \beta$. Mainime veel, et alampoolrühmade tugev poolvõre on lisatingimustega alampoolrühmade poolvõre, aga sellel ei ole siin tarvis peatuda.

Nimetatud fakte läheb põhiliselt tarvis järgmise paragrahvi lõpus.

Teoreem 3.9 *Olgu S inversne poolrühm. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) S on Cliffordi poolrühm.
(ii) Iga $s \in S$ korral $st = ts$, kus t on s inversne element.
(iii) Iga $\mathcal{H}$-klass on rühm.
(iv) Iga μ-klass on rühm.
(v) S on isomorfne rühmade tugeva poolvõrega.

Teoreem 3.10 *Nõrgalt 2-inversne poolrühm on parajasti poolvõre.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu S nõrgalt 2-inversne poolrühm. Siis on S inversne lause 3.3 põhjal. Kasutame teoreemi 3.9 ja näitame, et on täidetud tingimus (ii).

Olgu $s \in S$ ja $s = sts$, $t = tst$. Järgides lause 3.5 tõestust, saame võrdustest $s = st(st)s = s(ts)ts$, et $\{t, st\} = \{ts, t\}$, millest tuleneb $st \in \{ts, t\}$. Kui $st = ts$, siis ei ole midagi tõestada. Kui $st = t$, siis $s = (st)s = ts$, millest $s = s(ts) = ss$. Järelikult on s iseenda inversne element, seega $t = s$ ja loomulikult ta iseendaga kommuteerub. Seega mõlemal juhul kommuteerus s oma inversse elemendiga, mistõttu on tegemist Cliffordi poolrühmaga.

Järelikult on S rühmade (tugev) poolvõre sama teoreemi põhjal. Kui näitame, et iga rühm selles poolvõres osutub üheelemendiliseks, siis saamegi, et S on poolvõre.

Olgu $S = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} G_\alpha$ ja $\alpha \in I$ fikseeritud. Olgu $1_\alpha \in G_\alpha$ rühma G_α ühikelement ja $g \in G_\alpha$ suvaline element. On selge, et $1_\alpha, 1_\alpha$ on ühiku 1_α 2-inverssed elemendid. Kuid samuti on g, g^{-1} ühiku 1_α 2-inverssed elemendid:

$$
\begin{aligned}
1_\alpha &= 1_\alpha g g^{-1} 1_\alpha, \\
g &= g g^{-1} 1_\alpha g, \\
g^{-1} &= g^{-1} 1_\alpha g g^{-1}.
\end{aligned}
$$

Seega nõrgalt 2-inverssuse tõttu $\{1_\alpha, 1_\alpha\} = \{g, g^{-1}\}$ ehk $1_\alpha = g = g^{-1}$.

PIISAVUS. On seletatud peale definitsiooni 3.2. □

Niisiis oleme üldistanud töö [Mu] tulemust ja saanud poolvõredele veel ühe kirjelduse.

Järeldus 3.11 *Kui* $k \geq 2$, *siis on nõrgalt* k*-inversne poolrühm parajasti nõrgalt 2-inversne.* □

Järeldus 3.12 *Kui* $k, l \geq 2$, *siis on nõrgalt* k*-inversne poolrühm parajasti nõrgalt* l*-inversne.* □

Järeldus 3.13 *Kui* $k \geq 2$, *siis on nõrgalt* k*-inversne poolrühm parajasti* k*-inversne.* □

4 k-pöördinverssed poolrühmad

Selles paragrahvis anname kolme poolrühmade klassi definitsioonid ja täieliku kirjelduse neist kahele. Saame kirjeldused rühmadele ja E-inversiivsetele poolrühmadele, aga ka Reesi maatrikspoolrühmadele täielikult regulaarsete poolrühmade klassis; need kuuluvad käesoleva töö põhitulemuste hulka. Kõigepealt aga mõttekäigust, mis andis tõuke uutele definitsioonidele.

4.1 Kaks eeskirja

Olgu $k \geq 2$ ja defineerime regulaarses poolrühmas eeskirja $f : S \to S^k$ selliselt, et f seab elemendile s vastavusse tema k-inverssed elemendid (oma fikseeritud järjekorras).

Me teame, et lause 2.6 tõttu on f kõikjal defineeritud. Kui tahame, et f oleks korrektselt defineeritud, siis see tähendab, et ühelgi elemendil ei tohi olla üle ühe komplekti k-inversseid elemente. Selleks peab aga S olema k-inversne. Ning vastupidi, kui S on k-inversne, on ka f korrektselt defineeritud. Oleme saanud, et f on korrektselt defineeritud parajasti siis, kui S on k-inversne.

Kui me regulaarses poolrühmas võtame mingi suvalise elemendi, siis sellele elemendile leidub inversne element. Võib aga küsida, kas see suvaliselt võetud element *ise* osutub mingi teise elemendi inversseks elemendiks? Või pseudoinversseks elemendiks? Sama võib küsida inversse poolrühma puhul. Enamgi, teades k-inverssete elementide definitsiooni, võib küsida, et kui võtame poolrühmas suvalised k elementi fikseeritud järjekorras (või ka mitte), kas need siis osutuvad mingi elemendi k-inversseteks elementideks? Või k-pseudoinversseteks elementideks?

Selleks vaatleme eeskirja g, mis on mingis mõttes eeskirja f pöördeeskiri. Olgu S poolrühm (mis ei pea olema regulaarne). Eeskiri $g : S^k \to S$ olgu selline, mis kindlas järjekorras etteantud k-le elemendile seab vastavusse elemendi, mille jaoks need antud elemendid on k-inverssed elemendid. Kui g on korrektselt defineeritud, siis igale k-le elemendile leidub üheselt määratud element, millele need k elementi on k-inversseteks elementideks. Sellise tingimuse loemegi järgnevalt defineeritava k-pöördinversse poolrühma definitsiooniks.

Funktsiooni f korrektsuse nõudmine viis meid poolvõrede kirjelduseni. Selgub, et funktsiooni g korrektsuse nõudmine viib meid rühmade kirjelduseni.

4.2 k-pöördregulaarsus ja k-pöördinverssus

Regulaarset poolrühma saab defineerida kahte moodi — vt. selgitust peale definitsiooni 1.2. Hakates defineerima "pöörd"-eesliitega poolrühmi, teeme selguse mõttes vahet kõigil kolmel võimalikul juhul. Selgub, et selline vahetegemine on põhjendatud, kuna tulemused on tõepoolest erinevad (definitsioonid ei ole samaväärsed). Olgu S poolrühm ja $k \in \mathbb{N}$.

Definitsioon 4.1 Elemente $s_1, \dots, s_k \in S$ nimetame ***k-pöördregulaarseteks***, kui leidub $s \in S$, nii et $s_1, \dots, s_k$ on elemendi s k-pseudoinverssed elemendid: $s = ss_1 \cdots s_k s$. Poolrühma nimetame ***k-pöördregulaarseks***, kui tema suvalised k elementi on k-pöördregulaarsed.

Definitsioon 4.2 Elemente $s_1, \dots, s_k \in S$ (selles järjekorras) nimetame ***k-pöördinversseteks***, kui leidub $s \in S$, nii et $s_1, \dots, s_k$ on elemendi s k-inverssed elemendid. Poolrühma nimetame ***peaaegu k-pöördinversseks***, kui tema suvalised k elementi on k-pöördinverssed.

Definitsioon 4.3 Poolrühma nimetame ***k-pöördinversseks***, kui tema suvalisele k-le elemendile leidub element, millele need k elementi on k-inversseteks elementideks ning see leiduv element on üheselt määratud.

Üheselt määratuse all tuleb mõista seda, et kui k-pöördinversses poolrühmas on elemendid $s_1, \dots, s_k$ elementide s ja t k-inverssed elemendid, siis $t = s$.

Muidugi tekib selliselt defineeritud poolrühmade olemasolu küsimus, aga see laheneb peagi, sest me näitame, et rühm on k-pöördinversne. Teise kahe poolrühma olemasolu järeldub järgmise elementaarseid seoseid avava lause esimesest väitest.

Selle lause juures vajame regulaarset poolrühma üldistava E-inversiivse poolrühma mõistet (võetud artiklist [We]; inglise keeles *E-inversive semigroup*).

Definitsioon 4.4 Poolrühma S nimetatakse ***E-inversiivseks***, kui iga $s \in S$ korral leidub $x \in S$, nii et $sx \in E(S)$.

Mainime, et definitsioon on sümmeetriline - ei ole tähtis, kummal pool asub x, sest võttes $y = xsx$, saame $sy, ys \in E(S)$ ([Mi], Lemma 1).

Artiklis [We] tuuakse tõestuseta üks tarvilik ja piisav tingimus, millal on poolrühm E-inversiivne. Käesoleva paragrahvi definitsioonide mõttes on see sama, et S on 1-pöördregulaarne. Kohe näeme, et seda saab üldistada ja me saame kirjelduse k-pöördregulaarsetele poolrühmadele.

Lause 4.5 *Olgu $k \in \mathbb{N}$.*

(i) k-pöördinversne poolrühm on peaaegu k-pöördinversne; peaaegu k-pöördinversne poolrühm on k-pöördregulaarne.
(ii) Taandamisega peaaegu k-pöördinversne poolrühm on peaaegu $(k+1)$-pöördinversne.
(iii) Peaaegu k-pöördinversne poolrühm on regulaarne.
(iv) k-pöördregulaarne poolrühm on parajasti E-inversiivne.
(v) Peaaegu 1-pöördinversne poolrühm on parajasti regulaarne.
(vi) 1-pöördinversne poolrühm on parajasti inversne.
(vii) Regulaarne poolrühm on k-pöördregulaarne.
(viii) k-pöördregulaarne poolrühm on parajasti 1-pöördregulaarne.

Tõestus. (i) Otse definitsioonidest.

(ii) Olgu S taandamisega peaaegu k-pöördinversne poolrühm ja $s_1, \ldots, s_{k+1} \in S$. Siis leidub $s \in S$, nii et $s_1, \ldots, s_{k-1}, s_k s_{k+1}$ on elemendi s k-inverssed elemendid:

$$\begin{array}{rcll} s & = & ss_1 \cdots s_{k-1}(s_k s_{k+1})s, & (0) \\ s_1 & = & s_1 \cdots s_{k-1}(s_k s_{k+1})ss_1, & (1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & = & s_{k-1}(s_k s_{k+1})ss_1 \cdots s_{k-1}, & (k-1) \\ s_k s_{k+1} & = & (s_k s_{k+1})ss_1 \cdots s_{k-1}(s_k s_{k+1}). & (k) \end{array}$$

Kuna S on taandamisega, siis võrdusest (k) saame, kord elemendiga s_{k+1} paremalt, kord elemendiga s_k vasakult taandades, vastavalt võrdused

$$\begin{array}{rcl} s_k & = & s_k s_{k+1} ss_1 \cdots s_{k-1} s_k, \\ s_{k+1} & = & s_{k+1} ss_1 \cdots s_{k-1} s_k s_{k+1}. \end{array}$$

Need võrdused koos võrdustega (0) kuni $(k-1)$ näitavad, et $s_1, \ldots, s_{k+1}$ on elemendi s $(k+1)$-inverssed elemendid.

(iii) Olgu S peaaegu k-pöördinversne poolrühm ja $s \in S$. Siis k-le elemendile $s, \ldots, s$ leidub $t \in S$, nii et

$$\begin{array}{rcl} t & = & ts^k t, \\ s & = & s^k ts, \\ s & = & s^{k-1} ts^2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s & = & sts^k. \end{array}$$

Teisest reast saame $s = s(s^{k-1}t)s$ (kui $k = 1$, siis $s = sts$).

(iv) TARVILIKKUS. Olgu S k-pöördregulaarne ja $s \in S$. Siis leidub $x \in S$, nii et $x = xs^kx$, kust tuleb $s^kx \in E(S)$ ehk $s(s^{k-1}x) \in E(S)$, kui $k \geq 2$; kui $k = 1$, siis saame lihtsamalt $sx \in E(S)$.

PIISAVUS. Olgu S E-inversiivne, $s_1, \ldots, s_k \in S$ ja $s = s_1 \cdots s_k$. Siis leidub $x \in S$, nii et $sx \in E(S)$. Siis aga $(xsx)s(xsx) = x(sx)^3 = xsx$ ehk $(xsx)s_1 \cdots s_k(xsx) = xsx$, mis tähendab, et leidus element, mille pseudoinversseteks elementideks $s_1, \ldots, s_k$ osutusid.

(v) Tarvilikkus on tõestatud punktis (iii). Olgu S regulaarne ja $s \in S$. See tähendab, et $s = sxs$ mingi $x \in S$ korral. Siis aga $s = s(xsx)s$ ja $xsx = (xsx)s(xsx)$, mis tähendab, et definitsiooni 4.2 tingimus on täidetud ehk me leidsime elemendi xsx, millele s on inversne element.

(vi) TARVILIKKUS. Olgu S 1-pöördinversne poolrühm ja $s \in S$. Siis leidub $t \in S$, nii et $t = tst$ ja $s = sts$, kusjuures t on üheselt määratud. Tahame näidata, et S on inversne. Elemendi s inversne element on t. Peame näitama, et see on üheselt määratud. Olgu $t' \in S$ selline, et $s = st's$ ja $t' = t'st'$. Kuna nüüd t' on selline, et s on tema inversne element, siis 1-inverssusest saame $t' = t$, seega on elemendi s inversne element üheselt määratud.

PIISAVUS. Saab tõestada analoogiliselt tarvilikkusega.

(vii) ja (viii) Järeldub väitest (iv). $\square$

Niisiis on meil olemas kirjeldus k-pöördregulaarsetele poolrühmadele iga $k \in \mathbb{N}$ jaoks ja esialgu kirjeldused ülejäänud poolrühmadele juhul $k = 1$. Näiteid E-inversiivsete poolrühmade kohta võib leida artiklist [Mi]. Järgnevalt kirjeldame k-pöördinverssed poolrühmad.

4.3 k-pöördinverssete poolrühmade kirjeldus

Väidete (v) ja (vi) sarnasuse ning väite (iii) tõttu lauses 4.5 võib püstitada hüpoteesi, et k-pöördinversne poolrühm on inversne. Näitame, et see ongi nii.

Lause 4.6 *k-pöördinversne poolrühm on inversne, $k \in \mathbb{N}$.*

TÕESTUS. Olgu S k-pöördinversne poolrühm. Kui $k = 1$, siis on tegemist lause 4.5 kuuenda väite tarvilikkusega.

Olgu $k \geq 2$. Siis leidub k-le elemendile s parajasti üks $t \in S$, nii et

$$\begin{array}{rcl} t & = & ts^k t, \\ s & = & s^k ts, \\ s & = & s^{k-1}ts^2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s & = & sts^k. \end{array}$$

Kuna

$$s(s^{k-1}t)s = s^k ts = s$$

ja

$$(s^{k-1}t)s(s^{k-1}t) = s^{k-1}(ts^k t) = s^{k-1}t,$$

siis on $s^{k-1}t$ elemendi s inversne element. Peame näitama, et see on üheselt määratud. Selleks olgu veel mingi $t' \in S$ elemendi s inversne element: $s = st's$ ja $t' = t'st'$. Peame tõestama, et $t' = s^{k-1}t$. Edasine tõestus jaguneb kaheks, sõltuvalt k paarsusest.

A) Olgu k paarisarv. Defineerime

$$t_1 = s,\ t_2 = t',\ t_3 = s,\ t_4 = t', \ldots, t_{k-1} = s,\ t_k = t's.$$

Lemma 2.7 põhjal on $t_1, \ldots, t_k$ elemendi t' k-inversseteks elementideks (sest s on t' inversne element). Näitame, et $t_1, \ldots, t_k$ on ka elemendi $s^{k-1}t$ k-inversseteks elementideks. Edasises on alla joonitud see osa, mida teisendatakse. Esiteks,

$$\begin{array}{rcl} (s^{k-1}t)t_1 \cdots t_k(s^{k-1}t) & = & (s^{k-1}t)\underline{(st')^{r_0}}s(t's)(s^{k-1}t) \\ & = & (s^{k-1}t)\underline{(st')(st's)}(s^{k-1}t) \\ & = & (s^{k-1}t)s(s^{k-1}t) \\ & = & s^{k-1}\underline{(ts^k t)} \\ & = & s^{k-1}t, \end{array}$$

kus $r_0 \in \mathbb{N}_0$ täpne väärtus pole oluline (kui $k = 2$, siis $r_0 = 0$); tähtis on see, et st' on idempotent. Sellega on näidatud esimese võrduse kehtivus definitsioonis 2.5. Olgu nüüd $i \in \mathbf{k-1}$ paaritu arv. Siis

$$\begin{array}{rcl} t_i \cdots t_k(s^{k-1}t)t_1 \cdots t_i & = & \underline{(st')^{r_1}}\ \underline{s(t's)}(s^{k-1}t)\underline{(st')^{r_2}}s \\ & = & \underline{(st')s}(s^{k-1}t)\underline{(st')s} \\ & = & s(s^{k-1}t)s \\ & = & s^k ts \\ & = & s \\ & = & t_i. \end{array}$$

Siin pole $r_1, r_2 \in \mathbb{N}_0$ täpne väärtus oluline (kui $i = k-1$, siis $r_1 = 0$, kui $i = 1$, siis $r_2 = 0$).

Olgu $i \in \mathbf{k-2}$ paarisarv. Siis

$$\begin{aligned}
t_i \cdots t_k (s^{k-1}t) t_1 \cdots t_i &= (t's)^{r_3}(t's)(s^{k-1}t)(st')^{r_4} \\
&= (t's)(t's)(s^{k-1}t)(st') \\
&= (t's)(s^{k-1}ts)t' \\
&= t'(s^k ts)t' \\
&= t'st' \\
&= t' \\
&= t_i.
\end{aligned}$$

Siin pole samuti $r_3, r_4 \in \mathbb{N}$ täpne väärtus oluline (kui $i = k-2$, siis $r_3 = 1$, kui $i = 2$, siis $r_4 = 1$).

Olgu lõpuks vaatluse all element t_k. Ka sel juhul

$$\begin{aligned}
t_k (s^{k-1}t) t_1 \cdots t_k &= (t's)(s^{k-1}t)\,(st')^{r_5} s(t's) \\
&= t'(s^k t)s \\
&= t's \\
&= t_k,
\end{aligned}$$

kus $r_5 \in \mathbb{N}_0$ täpne väärtus pole oluline (kui $k = 2$, siis $r_5 = 0$).

Seega oleme leidnud k elementi, mis on nii elemendi t' kui ka $s^{k-1}t$ k-inversseteks elementideks. Kuna S on k-pöördinversne, siis $t' = s^{k-1}t$.

B) Olgu k paaritu arv. Defineerime

$$t_1 = s,\ t_2 = t',\ t_3 = s,\ t_4 = t', \ldots, t_{k-1} = t',\ t_k = s.$$

Ka need elemendid on elemendi t' k-inverssed elemendid lemma 2.7 põhjal. Selle tõestamine, et $t_1, \ldots, t_k$ on elemendi $s^{k-1}t$ k-inverssed elemendid, on analoogiline **A)**-osaga. Järelikult ka sel juhul $t' = s^{k-1}t$. $\square$

Inverssete poolrühmade teooriast on teada ([La]), et inversne poolrühm on rühm parajasti siis, kui temas leidub vaid üks idempotent (vt. näiteks [La], Proposition 1.4.4). Tuletame veel meelde, et loomulik osaline järjestus defineeritakse inversses poolrühmas järgmiselt:

$$s \leq t \Leftrightarrow \exists e \in E(S) :\ s = te.$$

Siin pole oluline, kummal pool elemendist t idempotent e asub (kui $f = tet^{-1}$, kus t^{-1} on t inversne element, siis $s = te = ft$ — vt. [La], Lemma 1.4.2). Idempotentide hulgal $E(S)$ on see järjestus kujul $e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e$.

Lause 4.7 *Olgu S inversne poolrühm ja $l \geq 2$. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

(i) S on peaaegu l-pöördinversne.

(ii) Leidub $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, nii et iga $s_1, \ldots, s_k \in S$ korral

$$s_1 \leq s_1 \cdots s_k s' s_1 \quad \textit{ja} \quad s_k \leq s_k s' s_1 \cdots s_k,$$

kus $s' = (s_1 \cdots s_k)^{-1}$.

(iii) S on rühm.

(iv) S on peaaegu 2-pöördinversne.

(v) Iga $s_1, s_2 \in S$ korral

$$s_1 \leq s_1 s_2 (s_1 s_2)^{-1} s_1 \quad \textit{ja} \quad s_2 \leq s_2 (s_1 s_2)^{-1} s_1 s_2.$$

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii) Olgu S peaaegu l-pöördinversne poolrühm. Näitame, et otsitavaks arvuks k sobib l. Olgu $s_1, \ldots, s_l \in S$ suvalised elemendid. Siis leidub $s \in S$, nii et

$$\begin{array}{rcl} s & = & s s_1 \cdots s_l s, \\ s_1 & = & s_1 \cdots s_l s s_1, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{l-1} & = & s_{l-1} s_l s s_1 \cdots s_{l-1}, \\ s_l & = & s_l s s_1 \cdots s_l. \end{array}$$

Esimese võrduse ja võrduse

$$(s_1 \cdots s_l) s (s_1 \cdots s_l) = (s_1 \cdots s_l s s_1) s_2 \cdots s_l = s_1 s_2 \cdots s_l$$

põhjal on s korrutise $s_1 \cdots s_l$ inversne element (seega s' osas lause sõnastuses). Nõutavad kaks võrratust järelduvad nüüd otseselt ülal toodud võrduste hulga teisest ja viimasest võrdusest.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Kehtigu tingimus (ii) ja olgu k fikseeritud. Võtame $s_1 = s_2 = \ldots = s_{k-1} = e \in E(S)$ ja $s_k = f \in E(S)$. Siis $s_1 \cdots s_k = ef$ ja $s' = (s_1 \cdots s_k)^{-1} = (ef)^{-1} = ef$ ning

$$s_1 \cdots s_k s' s_1 = ef(ef)e = ef$$

ja

$$s_k s' s_1 \cdots s_k = f(ef)ef = ef,$$

sest inversses poolrühmas idempotendid kommuteeruvad. Eelduse (ii) põhjal on $s_1 = e \leq ef$ ja $s_k = f \leq ef$. Kuna aga $ef \leq e$ ja $ef \leq f$ alati, siis $e = ef$ ja $f = ef$, kust tuleb $e = f$. Järelikult on vaadeldavas inversses poolrühmas vaid üks idempotent. Kuid selline inversne poolrühm on (parajasti) rühm, nagu juba eespool mainitud.

(iii)⇒(i) Olgu S rühm ja $s_1, \ldots, s_l \in S$. Võttes $t = (s_1 \cdots s_l)^{-1} = s_l^{-1} \cdots s_1^{-1}$, saame $ts_1 \cdots s_l t = 1t = t$ ja iga $i \in \mathbf{l}$ korral

$$\begin{aligned} s_i \cdots s_l t s_1 \cdots s_i &= (s_i \cdots s_l s_l^{-1} \cdots s_i^{-1})(s_{i-1}^{-1} \cdots s_1^{-1} s_1 \cdots s_{i-1}) s_i \\ &= 11 s_i = s_i. \end{aligned}$$

Järelikult on S peaaegu l-pöördinversne.

(iv)⇒(v) See on tõestus (i)⇒(ii) juhul $l = 2$.

(v)⇒(iii) See on tõestus (ii)⇒(iii) juhul $k = 2$.

(iii)⇒(iv) See on tõestus (iii)⇒(i) juhul $l = 2$. □

Märgime veel lause sõnastuse kohta, et tingimused (iv) ja (v) on väited (i) ja (ii) vastavalt juhtudel $l = 2$ ja $k = 2$. Need saime lisada seetõttu, et tingimus (iii) ei sisalda ühtegi naturaalarvu.

Eelmisest lausest järeldub muuseas, et k-pöördregulaarsus ja peaaegu k-pöördinverssus on erinevad mõisted. Näitame seda.

Oletame vastuväiteliselt, et k-pöördregulaarne poolrühm on alati peaaegu k-pöördinversne. Kui vaatleme suvalist inversset poolrühma, siis see on regulaarne, mis on E-inversiivne, mis on aga k-pöördregulaarne ja tehtud eelduse tõttu peaaegu k-pöördinversne. Aga inversne peaaegu k-pöördinversne poolrühm on rühm, seega oleks iga inversne poolrühm rühm, mis on muidugi vastuolu.

Eelmisest lausest tuleb ka

Järeldus 4.8 *Kui $k \geq 2$, siis peaaegu k-pöördinversne poolrühm on rühm parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad.*

Tõestus. Tarvilikkus. Ilmne.

Piisavus. Peaaegu k-pöördinversne poolrühm on regulaarne lause 4.5.(iii) põhjal, regulaarne poolrühm koos kommuteeruvate idempotentidega on inversne. Lause 4.7 ütleb aga, et inversne peaaegu k-pöördinversne poolrühm on rühm. □

Nüüd tõestame selle paragrahvi põhitulemuse.

Teoreem 4.9 *Kui $k \geq 2$, siis on k-pöördinversne poolrühm parajasti rühm.*

Tõestus. Tarvilikkus. Lause 4.6 tõttu on k-pöördinversne poolrühm inversne ja lause 4.5.(i) tõttu peaaegu k-pöördinversne. Lause 4.7 põhjal on vaadeldav poolrühm rühm.

Piisavus. Olgu S rühm ja $s_1, \ldots, s_k \in S$. Siis S on peaaegu k-pöördinversne lause 4.7 tõestuse (iii)⇒(i) põhjal (me saame seda kasutada, sest rühm on inversne poolrühm). Teiseks näitame, et nõutud omadusega leiduv element $t = s_k^{-1} \cdots s_1^{-1} \in S$ on ka üheselt määratud. Oletame, et elemendid $s_1, \ldots, s_k$ on veel mingi elemendi $s \in S$ k-inverssed elemendid. Siis nii s kui t on korrutise $s_1 \cdots s_k$ inversne element ehk pöördelement, kuna S on rühm. Järelikult $s = t$. $\square$

Järeldus 4.10 *Kui $k \geq 2$, siis on k-pöördinversne poolrühm parajasti 2-pöördinversne.*

Järeldus 4.11 *Kui $k, l \geq 2$, siis on k-pöördinversne poolrühm parajasti l-pöördinversne.*

Lõpuks toome veel ühe huvitava järelduse. Teoreem 1.4 väitis, et regulaarne poolrühm on inversne parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad. Lause 4.5 väidete (v) ja (vi) järgi võib öelda, et peaaegu 1-pöördinversne poolrühm on 1-inversne parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad (tähendab, juhul $k = 1$). Osutub, et see väide jääb kehtima ka siis, kui $k > 1$.

Järeldus 4.12 *Iga $k \in \mathbb{N}$ korral on peaaegu k-pöördinversne poolrühm k-pöördinversne parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad.*

TÕESTUS. Juhtum $k = 1$ on selge. Olgu $k \geq 2$.

TARVILIKKUS. k-pöördinversne poolrühm on eelmise teoreemi põhjal rühm, kus on vaid üks idempotent, mis iseendaga muidugi kommuteerub.

PIISAVUS. Kommuteeruvate idempotentidega peaaegu k-pöördinversne poolrühm on rühm järelduse 4.8 tõttu. Väide järeldub nüüd taas eelmisest teoreemist. $\square$

4.4 Peaaegu k-pöördinverssed poolrühmad

Peaaegu k-pöördinverssete poolrühmade kirjeldus jääb selles töös lahtiseks küsimuseks, kui $k \geq 2$. Järgnevas anname siiski tulemused, millest on näha, kuidas mõjub peaaegu k-pöördinverssuse tingimus erinevatele poolrühmadele.

Lause 4.13 *Kui $k \geq 2$, siis S on nulliga peaaegu k-pöördinversne poolrühm parajasti siis, kui $S = \{0\}$.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu S nulliga peaaegu k-pöördinversne poolrühm, $k \geq 2$ ja $s \in S$. Kui võtame k elementi $s, 0, \ldots, 0 \in S$, siis leidub $t \in S$, nii et

$$\begin{array}{ccl} t & = & ts0\cdots0t, \\ s & = & s0\cdots0ts, \\ 0 & = & 0\cdots0ts0, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & = & 0ts0\cdots0. \end{array}$$

Teisest reast saame $s = 0$.

PIISAVUS. Ilmne. $\square$

Sellega on sarnane

Lause 4.14 *Kui $k \geq 2$, siis S on peaaegu k-pöördinversne poolvõre parajasti siis, kui $|S| = 1$.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu $k \geq 2$, S peaaegu k-pöördinversne poolvõre ja $s, t \in S$. Kui võtame k elementi $s, t, \ldots, t$, siis leidub $u \in S$, nii et

$$\begin{array}{ccl} u & = & ust^{k-1}u, \\ s & = & st^{k-1}us, \\ t & = & t^{k-1}ust, \\ t & = & t^{k-2}ust^2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t & = & tust^{k-1}. \end{array}$$

Idempotentsusest ja kommutatiivsusest saame (teisest ja näiteks kolmandast reast), et $s = stu = t$.

PIISAVUS. Ilmne. $\square$

Lause 4.15 *Kui $k \geq 2$, siis on peaaegu k-pöördinversne monoid parajasti rühm.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu $k \geq 2$, S peaaegu k-pöördinversne monoid ja $s \in S$. Võttes kord k elementi $s, 1, \ldots, 1$ ja teine kord k elementi $1, \ldots, 1, s$, leiduvad vastavalt elemendid $t, u \in S$, nii et

$$\begin{array}{cclcccl} t & = & ts1\cdots1t, & \qquad & u & = & u1\cdots1su, \\ s & = & s1\cdots1ts, & & 1 & = & 1\cdots1su1, \\ 1 & = & 1\cdots1ts1, & & 1 & = & 1\cdots1su11, \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & = & 1ts1\cdots1, & & s & = & su1\cdots1s. \end{array}$$

Näiteks kolmandatest võrdustest kummaski tulbas näeme, et s vasak- ja parempoolne pöördelement on vastavalt t ja u. Lõpuks näitame, et need võrduvad omavahel. Tõepoolest, kuna $ts = su = 1$, siis

$$t = t1 = tsu = 1u = u.$$

Piisavus. Rühm on mõistagi monoid, ta on ka peaaegu k-pöörd-inversne teoreemi 4.9 ja lause 4.5.(i) põhjal. $\square$

Järeldus 4.16 *Kui $k \geq 2$, siis on peaaegu k-pöördinversne poolrühm monoid parajasti siis, kui tema idempotendid kommuteeruvad.*

Tõestus. See on nii järelduse 4.8 ja lause 4.15 tõttu. $\square$

Lause 4.17 *Kui $k \geq 2$, siis monogeenne poolrühm on peaaegu k-pöördinversne parajasti siis, kui ta on rühm.*

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu S monogeenne peaaegu k-pöörd-inversne poolrühm. Kuna S on regulaarne (vt. lause 4.5.(iii)), siis ei saa monogeenne S olla lõpmatu, sest sel juhul oleks ta isomorfne poolrühmaga $(\mathbb{N}, +)$, mis aga regulaarne ei ole (vt. [Ki], paragrahv VI.5). Seega on S lõplik ja õpiku [Ki] Lemma VI.5.2 järgi on seal vaid üks idempotent. Aga ühe idempotendiga regulaarne poolrühm on rühm.

Piisavus. Kuna rühm on inversne poolrühm, siis lause 4.7 tõttu on tegemist peaaegu k-pöördinversse poolrühmaga. $\square$

Niisiis, peaaegu k-pöördinverssuse tingimus muudab poolvõre ja nulliga poolrühma üheelemendiliseks, inversse poolrühma ja monoidi aga rühmaks. Siit järeldub, et üldiselt ei saa ortodoksne ega regulaarne poolrühm olla peaaegu k-pöördinverssed, sest vastasel juhul oleks seda ka inversne poolrühm (kuna inversne poolrühm on ortodoksne, see aga regulaarne) ja lause 4.7 tõttu oleks iga inversne poolrühm rühm. (Ortodoksne poolrühm on regulaarne poolrühm, kus idempotendid moodustavad alampoolrühma.)

Järgmiseks näitame, et peaaegu k-pöördinversset poolrühma ei saa mittetriviaalselt oma alampoolrühmade poolvõreks lahutada.

Lause 4.18 *Kui peaaegu k-pöördinversne poolrühm on oma alampoolrühmade $S_\alpha, \alpha \in I$, poolvõre, siis $|I| = 1$.*

Tõestus. Olgu S peaaegu k-pöördinversne ja ühtlasi esitatud oma alampoolrühmade poolvõrena: $S = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} S_\alpha$.

Olgu $\alpha, \beta \in I$ sellised, et $\beta \leq \alpha$; siis $\alpha\beta = \beta$. Võtame mingid $s_\alpha \in S_\alpha$ ja $s_\beta \in S_\beta$. Kuna S on peaaegu k-pöördinversne, siis leidub $\gamma \in I$ ja $s_\gamma \in S_\gamma$, nii et $s_\alpha, s_\beta, s_\beta, \ldots, s_\beta$ on elemendile s_γ k-inversseteks elementideks. Siis kehtivad $k+1$ võrdust, millest järjekorras teine võrdus on $s_\alpha = s_\alpha s_\beta^{k-1} s_\gamma s_\alpha$.

Paneme tähele, et $s_\alpha s_\beta^{k-1} \in S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta} = S_\beta$ (sest ilmselt $s_\beta^{k-1} \in S_\beta$, kuna S_β on alampoolrühm). Siis

$$s_\alpha = s_\alpha s_\beta^{k-1} s_\gamma s_\alpha \in S_\beta S_\gamma S_\alpha \subseteq S_{\beta\gamma\alpha},$$

mis tähendab, et $S_\alpha \subseteq S_{\beta\gamma\alpha}$. Kuna meil on tegemist paarikaupa lõikumatute alampoolrühmade ühendiga, siis $S_\alpha = S_{\beta\gamma\alpha}$ ehk $\alpha = \beta\gamma\alpha$, aga $\beta\gamma\alpha \leq \beta$. Seega $\alpha \leq \beta$ ning kokkuvõttes $\alpha = \beta$. $\square$

Seda lauset hakkame varsti rakendama, aga enne meenutame poolrühmateooriast ([Ho], [Ki]), et *nullita Reesi maatrikspoolrühmaks* nimetatakse hulka

$$\mathcal{M}(G, A, B, P) = \{(a, g, b) \mid a \in A, g \in G, b \in B\},$$

kus G on rühm, A ja B mittetühjad hulgad, $P : B \times A \to G$ kujutus (mida võib vaadelda maatriksina mõõtmetega $|B| \times |A|$, mille elemendid on rühma G elemendid) ja kus korrutamine on defineeritud järgmiselt:

$$(a, g, b)(c, h, d) = (a, gP_{bc}h, d),$$

kus P_{bc} tähendab $P(b, c)$. (Vt. näiteks [Ki], lk. 66). Edaspidi, kui nimetame Reesi maatrikspoolrühma, mõtleme just nullita Reesi maatrikspoolrühma. (Poolrühmateoorias defineeritakse ka *nulliga Reesi maatrikspoolrühm*, aga siin ei ole selleks tarvidust lause 4.13 tõttu.)

Näitame, et nullita Reesi maatrikspoolrühm $S = \mathcal{M}(G, A, B, P)$ on peaaegu k-pöördinversne, $k \in \mathbb{N}$. Olgu $(s_1, g_1, t_1), \ldots, (s_k, g_k, t_k) \in S$. Peame ära näitama elemendi, millele need elemendid on k-inverssseteks elementideks. Olgu $s \in A, t \in B$ ja defineerime

$$\begin{aligned} x &= (P_{ts_1} g_1 P_{t_1 s_2} g_2 P_{t_2 s_3} g_3 \cdots g_{k-1} P_{t_{k-1} s_k} g_k P_{t_k s})^{-1} \\ &= P_{t_k s}^{-1} g_k^{-1} P_{t_{k-1} s_k}^{-1} g_{k-1}^{-1} \cdots g_3^{-1} P_{t_2 s_3}^{-1} g_2^{-1} P_{t_1 s_2}^{-1} g_1^{-1} P_{ts_1}^{-1}. \end{aligned}$$

Näitame, et (s, x, t) on otsitav element. Kõigepealt,

$$\begin{aligned} & (s, x, t)(s_1, g_1, t_1) \cdots (s_k, g_k, t_k)(s, x, t) \\ =\ & (s, x P_{ts_1} g_1 P_{t_1 s_2} g_2 \cdots P_{t_{k-1} s_k} g_k P_{t_k s} x, t) \\ =\ & (s, 1x, t) \\ =\ & (s, x, t). \end{aligned}$$

Olgu nüüd $i \in \mathbf{k}$ fikseeritud. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} x &= P_{t_k s}^{-1} g_k^{-1} P_{t_{k-1} s_k}^{-1} g_{k-1}^{-1} \cdots g_3^{-1} P_{t_2 s_3}^{-1} g_2^{-1} P_{t_1 s_2}^{-1} g_1^{-1} P_{ts_1}^{-1} \\ &= (P_{t_k s}^{-1} g_k^{-1} \cdots g_{i+1}^{-1} P_{t_i s_{i+1}}^{-1} g_i^{-1})(P_{t_{i-1} s_i}^{-1} g_{i-1}^{-1} \cdots g_1^{-1} P_{ts_1}^{-1}) \\ &= (g_i P_{t_i s_{i+1}} g_{i+1} \cdots g_k P_{t_k s})^{-1} (P_{ts_1} g_1 \cdots g_{i-1} P_{t_{i-1} s_i})^{-1}. \end{aligned}$$

Seda arvestades saame

$$\begin{aligned}
& (s_i, g_i, t_i) \cdots (s_k, g_k, t_k)(s, x, t)(s_1, g_1, t_1) \cdots (s_i, g_i, t_i) \\
= \;& (s_i, g_i P_{t_i s_{i+1}} g_{i+1} \cdots g_k P_{t_k s} x P_{t s_1} g_1 \cdots g_{i-1} P_{t_{i-1} s_i} g_i, t_i) \\
= \;& (s_i, g_i P_{t_i s_{i+1}} g_{i+1} \cdots g_k P_{t_k s} (g_i P_{t_i s_{i+1}} g_{i+1} \cdots g_k P_{t_k s})^{-1} \cdot \\
& \cdot (P_{t s_1} g_1 \cdots g_{i-1} P_{t_{i-1} s_i})^{-1} P_{t s_1} g_1 \cdots g_{i-1} P_{t_{i-1} s_i} \cdot g_i, t_i) \\
= \;& (s_i, 11 g_i, t_i) \\
= \;& (s_i, g_i, t_i).
\end{aligned}$$

Sellega oleme näidanud, et Reesi maatrikspoolrühm on peaaegu k-pöördinversne, $k \in \mathbb{N}$. Märgime veel, et kuna saime võtta $s \in A$ ja $t \in B$ suvaliselt, siis sobivaid kolmikuid, millele fikseeritud elemendid $(s_1, g_1, t_1), \ldots, (s_k, g_k, t_k)$ on k-inverssed elemendid, on väga palju (nende arv sõltub hulkade A ja B suurustest).

Definitsioon 4.19 Regulaarset poolrühma S nimetatakse ***täielikult regulaarseks***, kui tema iga element s omab inversset elementi s', mis temaga kommuteerub: $ss' = s's$.

Artikli [Cl] Theorem 2 ütleb (tänapäevastes terminites) seda, et iga täielikult regulaarne poolrühm on (nullita) Reesi maatrikspoolrühmade poolvõre. Järgmises lauses saame peaaegu k-pöördinverssete poolrühmade kirjelduse täielikult regulaarsete poolrühmade klassis.

Järeldus 4.20 *Olgu $k \geq 2$. Täielikult regulaarne poolrühm on peaaegu k-pöördinversne parajasti siis, kui ta on Reesi maatrikspoolrühm.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu S täielikult regulaarne peaaegu k-pöördinversne poolrühm. Enne järeldust nimetatud teoreemi põhjal on tegemist Reesi maatrikspoolrühmade poolvõrega. Lausest 4.18 saame, et S on vaid üksainus Reesi maatrikspoolrühm.

PIISAVUS. Et Reesi maatrikspoolrühm on peaaegu k-pöördinversne, nägime peale lauset 4.18. □

Kui Reesi maatrikspoolrühmas $G = \{1\}$, siis $P_{bc} = 1, b \in B, c \in A$, ja saame kolmikud $(a, g, b) = (a, 1, b)$ samastada paaridega (a, b), kusjuures

$$(a, b)(c, d) \leftrightarrow (a, 1, b)(c, 1, d) = (a, 1P_{bc}1, d) = (a, 1, d) \leftrightarrow (a, d).$$

Sellisel juhul nimetatakse Reesi maatrikspoolrühma ***ristkülikpoolrühmaks*** (inglise keeles *rectangular band*), mis eelneva põhjal on samuti peaaegu k-pöördinversne. On selge, et tegemist on idempotentse poolrühmaga. Kui $|B| = 1$, on tegemist vasakpoolse korrutamisega poolrühmaga (inglise keeles *left zero band*), kus iga kahe elemendi korrutiseks on defineeritud vasakpoolne tegur (tähendab, iga element on vasakpoolne null igale poolrühma elemendile). Analoogiliselt on juhul $|A| = 1$ tegemist parempoolse korrutamisega poolrühmaga.

Nüüd saame kergesti peaaegu k-pöördinverssete poolrühmade kirjelduse idempotentsete poolrühmade klassis.

Järeldus 4.21 *Olgu $k \geq 2$. Idempotentne poolrühm on peaaegu k-pöördinversne parajasti siis, kui ta on ristkülikpoolrühm.*

TÕESTUS. TARVILIKKUS. Olgu S idempotentne peaaegu k-pöördinversne poolrühm. On selge, et idempotentne poolrühm on täielikult regulaarne, seega järelduse 4.20 tõttu on see Reesi maatrikspoolrühm, mis idempotentsel juhul on ristkülikpoolrühm.

PIISAVUS. Et ristkülikpoolrühm on peaaegu k-pöördinversne, nägime üldisemal juhul peale lauset 4.18. $\square$

Some attempts to generalize inverse semigroups

Riivo Must

Résumé

In this master thesis we try to generalize the concept of inverse semigroups. New definitions depend on natural number k so that for $k = 1$ we have precisely definitions of regular or inverse semigroups. Instead of generalizations (ie. larger new classes) new descriptions for known classes of semigroups are found.

First we remind basic facts about regular and inverse semigroups and after that results of my bachelor thesis. The main result of the latter was that k-inverse semigroups are precisely semilattices for $k \geq 2$.

In paragraph 3 we start with main results of this thesis. All the work in this and in the next paragraph is original. We define weakly k-inverse semigroups which seemingly generalize k-inverse semigroups. But we prove that they are also precisely semilattices for $k \geq 2$.

In the last paragraph we define k-turnregular, almost k-turninverse and k-turninverse semigroups. We prove that k-turnregular semigroups are precisely E-inversive semigroups for $k \in \mathbb{N}$. Almost 1-turninverse semigroups are precisely regular. Next, 1-turninverse semigroups are precisely inverse and the main result is that k-turninverse semigroups are precisely groups for $k \geq 2$. Description for almost k-turninverse semigroups remains an open question for $k \geq 2$. But we show how the condition of being almost k-turninverse results in some known classes of semigroups. Finally we show that a completely regular semigroup is almost k-turninverse if and only if it is a Rees matrix semigroup (without zero). Thus, in particular, a band (idempotent semigroup) is rectangular band if and only if it is almost k-turninverse semigroup.

Kasutatud kirjandus

[Cl] Clifford, A. H., *Semigroups admitting relative inverses*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., **42**, No. 4 (Oct., 1941), 1037-1049.

[Ho] Howie, J. M., "An Introduction to Semigroup Theory", Academic Press, London, 1976, 272 lk.

[Ki] Kilp, M., "Algebra II", Tartu, 1998, 164 lk.

[La] Lawson, M. V., "Inverse Semigroups - The Theory of Partial Symmetries", World Scientific, Singapore, 1998, 412 lk.

[Mi] Mitsch, H., *Subdirect products of E-inversive semigroups*, J. Austral. Math. Soc. (Series A), **48** (1990), 66-78.

[Mu] Must, R., *k-inverssed poolrühmad ja ühemõõtmeliste jaotuspoolrühmade konstrueerimine*, bakalaureusetöö, Tartu, 2002, 25 lk.

[We] Weipoltshammer, B., *Certain Congruences on E-inversive E-semigroups*, Semigroup Forum **65** (2002), 233-248.