Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Ksenia Niglas

Lähendusteooria

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja: lektor Indrek Zolk, PhD

Tartu 2016

Lähendusteooria

Magistritöö

Ksenia Niglas

Lühikokkuvõte. Käesoleva magistritöö eesmärk oli luua lähendusteooria eestikeelne õppematerjal tudengitele. Töös tutvustatakse lähendusteooria klassikalisi tulemusi, muu hulgas tõestatakse Korovkini teoreem, Kolmogorovi teoreemi, Tšebõšovi alternansi teoreemi, Jacksoni teoreemid, Bernsteini võrratused, Markovi võrratus, Schoenberg-Whitney teoreem, Karlini teoreem ja näidatakse, kuidas toimib kuulus Remezi algoritm. Lisaks teoreetilisele materjalile on magistritöös ka suur hulk ülesandeid, mis on mõeldud iseseisvaks lahendamiseks. Töö lõpus on olemas ka vihjed, lahendused ja vastused. Lisatud on ka mõned arvuti abil lahendamiseks mõeldud ülesanded.

Märksõnad. Lähendusteooria, splainid, normeeritud ruumid.

CERCS kood: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Approximation theory

Master's Thesis

Ksenia Niglas

Abstract. The aim of this master's thesis is to provide an Estonian-language learning material on approximation theory for undergraduate and graduate students. In this thesis, many different basic results of approximation theory are introduced. Amongst others, the following results are proven: Korovkin theorem, Kolmogorov theorem, Chebyshev alternation theorem, Jackson theorems, Bernstein inequalities, Markov inequality, Scheonberg-Whitney theorem, Karlin theorem. We also show how famous Remez algorithm works. In addition to theoretical material, many exercises are included for the reader together with solutions and answers in the end of the thesis. Some computer exercises are also provided.

Key words. Approximation theory, splines, normed spaces.

CERCS code: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev magistritöö on mõeldud lähendusteooriaalaseks õppematerjaliks matemaatika tudengitele ja kõigile, kellele see valdkond huvi pakub. Tegemist on referatiivse tööga, mis põhineb suurel määral Cambridge'i ülikooli vanemlektori Alexei Shadrini magistriõppe kursuse "Approximation theory" loengukonspektil [1]. Autori panus oli tulemuste üksikasjalik lahti kirjutamine, ülesannete lahendamine, täiendamine ja lisamine.

Lisaks teoreetilisele materjalile on töös palju ülesandeid, mille lahendused ja vastused on kirjas töö lõpus. Lahendamiseks on antud ka mõned arvutiülesanded.

Käesolev magistritöö koosneb viiest peatükist.

Esimeses peatükis katame vajalikud eelteadmised. Sealhulgas defineerime funktsioonide ortogonaalsuse, trigonomeetriliste polünoomide ruumi ja muud edaspidi vajaminevad mõisted.

Teises peatükis tutvustame lähendusteooria põhilisi tulemusi. Muu hulgas tõestame Lebesgue'i võrratuse ja Weierstrassi teoreemi trigonomeetriliste polünoomide jaoks. Näitame, et parim lähend ei pruugi alati üldse leiduda ning kui leidub, siis ei pruugi see ühene olla.

Kolmandas peatükis tõestame Kolmogorovi teoreemi ja Tšebõšovi alternansi teoreemi. Tutvustame Tšebõšovi polünoomi ja süsteemi mõisteid ning uurime nende põhilisi omadusi.

Neljandas peatükis tõestame Jacksoni esimese ja teise teoreemi ning vastava pöördteoreemi. Selleks toome kõigepealt sisse pidevusmooduli mõiste ja uurime selle tähtsamaid omadusi. Muu hulgas tutvume Jacksoni ja Fejeri operaatoritega. Tõestame Szego ja Bernsteini võrratused tringonomeetriliste polünoomide jaoks. Uurime lähendamist algebraliste polünoomidega ning tõestame ka Bernsteini teoreemi algebraliste polünoomide jaoks ning selle abil Markovi võrratuse.

Viies peatükk on pühendatud splainidele. Toome sisse lõigatud splaini, B-splaini ja diferentssuhte mõisted ning uurime nende omadusi. Samuti uurime de Boori funktsionaale ehk kaasfunktsionaale ning teeme tutvust splainidega interpoleerimisega, sh ka kvaasi-interpoleerimisega. Tõestame Schoenberg-Whitney teoreemi, Karlini teoreemi ja uurime, kuidas toimib Remezi algoritm. Lõpetuseks tutvume ka vähimruutude meetodiga.

Magistritöö viimases osas on toodud kõigi ülesannete vastused ja lahendusvihjed.

PEATÜKK 1
Vajalikud eelteadmised

Esitame siinkohal mõned vajalikud definitsioonid, et värskendada lugeja mälu ja teha edasise töö lugemist hõlpsamaks.

Kui $a < b$ on reaalarvud, siis $C[a,b]$ tähistab pidevate funktsioonide hulka $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Tegemist on vektorruumiga, kus liitmine ja skalaariga korrutmine on defineertud punktiviisi:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x),\\ (kf)(x) &= kf(x),\end{aligned}$$

iga $f,g \in C[a,b]$ ja $x \in [a,b]$ korral. Tegemist on ka normeeritud ruumiga normi $\|f\| = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$ suhtes. Samuti vaatleme k korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide ruumi $C^k[a,b]$, kus norm on antud seosega

$$\|f\|_\infty^{(k)} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \left\|f^{(i)}\right\|.$$

Olgu a_i, $b_i \in \mathbb{R}$. Funktsiooni kujul

$$t(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,\ \ x \in \mathbb{R},$$

nimetatakse n. astme *trigonomeetriliseks polünoomiks*, kus $a_n \neq 0$ või $b_n \neq 0$. Kõigi trigonomeetriliste polünoomide hulka tähistatakse sümboliga $\mathcal{T}$ ja ülimalt n. astme trigonomeetriliste polünoomide hulka tähistatakse $\mathcal{T}_n$. Algebra põhiteoreemi abil saab näidata, et polünoomil $t \in \mathcal{T}_n$ on ülimalt $2n$ erinevat nullkohta intervallis $(-\pi,\pi]$.

Trigonomeetrilised polünoomid on perioodilised funktsioonid perioodiga 2π. Seega võime neid vaadata kui funktsioone, mis on defineeritud hulgal $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$. Ruum $L_1(\mathbb{T})$ on kõigi funktsioonide $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ruum, mille korral $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt < \infty$. Neid funktsioone võime vaadata perioodiliste funktsioonidena $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mille periood on pikkusega $|\mathbb{T}| = 2\pi$.

Kui $f,g \in L_1(\mathbb{T})$ on sellised, et $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |fg|dt < 0$ (ehk $fg \in L_1(\mathbb{T})$), siis ütleme, et funktsioonid f ja g on ortogonaalsed, kui $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} fg = 0$ ning sel juhul kirjutame $f \perp g$.

Näiteks, kui $f \in L_1(\mathbb{T})$, siis $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f = 0$ tähendab, et $f \perp 1$. Kui $f \perp g$ kehtib iga $g \in U$ korral, kus $U \subset L_1(\mathbb{T})$ on mingi alamhulk, siis kirjutame $f \perp U$.

Nulliks koonduvate jadade ruum $c_0 = \{(u_n)_{n=1}^{\infty} \colon \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\}$ on normeeritud ruum normi $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ suhtes, kus $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Sümboliga $\mathcal{P}_n$ tähistame ülimalt n. astme polünoomide ruumi, st

$$\mathcal{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \colon\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, n\}.$$

Kõigi polünoomide ruumi tähistame sümboliga $\mathcal{P}$.

Operaatorit $Q \colon X \to Y$, mis tegutseb mingist hulgast X tema alamhulka $Y \subset X$ nimetatakse projektoriks, kui $Q(Q(x)) = Q(x)$ kehtib iga elemendi $x \in X$ korral. $\mathcal{P}_n[a, b]$ tähistab ülimalt n. astme polünoomide hulka, mille elemente $p \in \mathcal{P}_n[a, b]$ vaatleme funktsioonidena $p \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Ruum $\mathcal{P}_n[a, b]$ on normeeritud ruum normi

$$\|p\| = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |p(x)|$$

suhtes.

Kui meil on funktsioon g, siis kirjutame $g(t) = \mathcal{O}(t)$, kui leidub konstant $C > 0$ nii, et iga t korral $|g(t)| \leqslant C|t|$.

Kui X on mingi hulk, siis funktsiooni $f \colon X \to \mathbb{K}$ kandjaks nimetatakse hulka

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \colon\ f(x) \neq 0\}}.$$

PEATÜKK 2
Klassikalised tulemused

2.1 Põhimõisted

Tutvustame kõigepealt võimalikult üldisel kujul lähendusteooria põhiülesannet. Olgu (X, d) meetriline ruum ning olgu $Y \subset X$ mittetühi alamhulk.

Definitsioon. Ütleme, et element $y_* \in Y$ on *parim lähend* elemendile $x_0 \in X$ hulgast Y, kui kehtib

$$d(x_0, y_*) = \inf_{y \in Y} d(x_0, y) =: \operatorname{dist}(x_0, Y).$$

Lähendusteooria tegeleb järgmiste küsimustega:

- parima lähendi olemasolu;
- parima lähendi ühesus;
- parima lähendi iseloomustamine – kuidas, vältides hulga Y kõigi elementide võrdlemist elemendiga x_0, tunda ära element y_*;
- parima lähendi leidmine ja konstrueerimine.

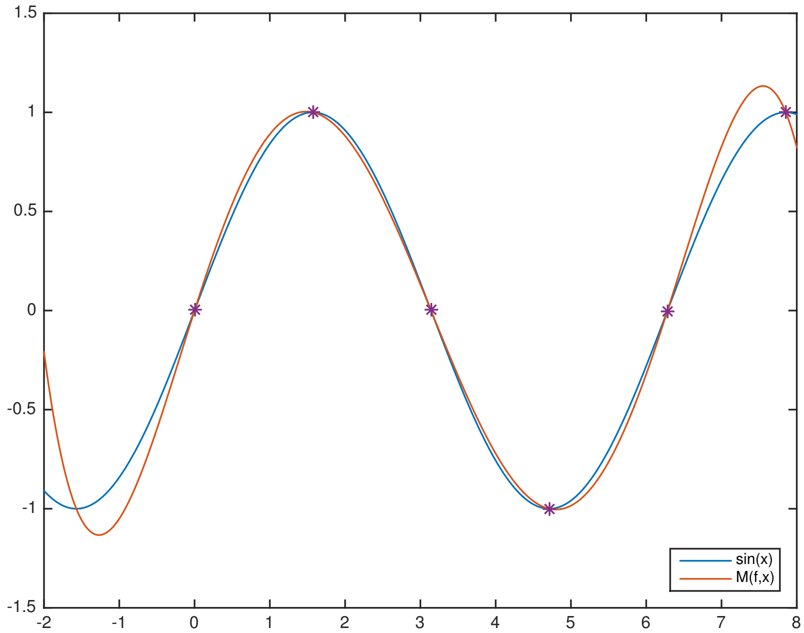
Näide 2.1. Võtame $X = \mathbb{R}$ ja $Y = \mathbb{Q}$ ning olgu $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Siis $\operatorname{dist}(x, \mathbb{Q}) = 0$, aga iga $q \in Q$ korral $d(x, q) = |x - q| > 0$, seega parimat lähendit ei leidu.

Definitsioon. Operaatorit $M \colon X \to Y$ nimetatakse *lähendusskeemiks* või *lähendusmeetodiks.* Kui X on normeeritud ruum ja operaator M on lineaarne, siis öeldakse, et tegemist on *lineaarse lähendusmeetodiga*.

Olgu edaspidi X normeeritud ruum.

Ülesanne 2.1. Näidake, et kui M on lineaarne projektor, siis $\|M\| \geqslant 1$

Ülesanne 2.2. Öeldakse, et lähendusmeetod annab peaaegu parima lähendi, kui mingi konstandi $\gamma > 0$ korral kehtib $\|x - Mx\| \leqslant \gamma \operatorname{dist}(x, Y)$ iga elemendi $x \in X$ korral. Näidake, et selline operaator on projektor.



Joonis 2.1: Funktsiooni $\sin x$ ja selle Lagrange'i interpolant punktides $\frac{k\pi}{2}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$.

Näide 2.2. Vaatame juhtu, kui $X = C[a,b]$ ning olgu $Y = \mathcal{P}_n$. Fikseerime $f \in C[a,b]$ ja valime punktid $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$. Olgu M operaator, mis seab funktsioonile f vastavusse üheselt määratud ülimalt n. astme polünoomi $p = M(f)$, mille korral kehtib tingimus

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

(veenduge ühesuses! ✠$_{2.3}$). Antud juhul on M lineaarne projektor, mille saab Lagrange'i interpoleerimisvalemit kasutades kirja panna ilmutatud kujul

$$M(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x), \quad x \in [a,b],$$

kus $\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ on Lagrange'i polünoomid (vt ka joonist 2.1).

Paneme tähele, et interpoleerimisoperaatori puhul

$$\begin{aligned} \|M\| &= \sup\left\{ \left| \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) \right| : \ \|f\| = 1,\ x \in [a,b] \right\} \\ &= \sup\left\{ \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| : \ x \in [a,b] \right\} \end{aligned}$$

(veenduge! ✠$_{2.4}$).

Tõestame nüüd Lebesgue'i võrratuse, mis aitab hinnata seda, kui hästi etteantud pidev lineaarne projektor lähendab elementi $x \in X$.

Teoreem 2.3 (Lebesgue'i võrratus). *Pidev lineaarne projektor $M\colon X \to Y$ rahuldab võrratust*

$$\|x - Mx\| \leqslant (\|M\| + 1)\,\mathrm{dist}(x, Y) \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

TÕESTUS. Olgu $x \in X$ ja $y \in Y$, siis

$$\begin{aligned}\|x - Mx\| &= \|x - y - M(x - y)\| \\ &= \|(I - M)(x - y)\| \\ &\leqslant \|I - M\|\|x - y\| \\ &\leqslant (\|M\| + 1)\|x - y\|.\end{aligned}$$

Võttes saadud võrratuses $\|x - Mx\| \leqslant (\|M\| + 1)\|x - y\|$ infiimumi üle hulga Y, saamegi soovitud tulemuse. □

Ülesanne 2.5. Tõestage, et leidub selline ruum X ja nullist erinev element $x \in X$, mille korral võrratustes $\|M\| \geqslant 1$ ja $\|x - Mx\| \leqslant (\|M\| + 1)\,\mathrm{dist}(x, Y)$ kehtib võrdus.
Näpunäide. Kasutage projektorit $M\colon C[a, b] \to \mathcal{P}_1$, mis interpoleerib lõigu $[a, b]$ otspunktides, ning seda, et funktsiooni $f(x) = 2x^2 - 1$ korral kehtib $\mathrm{dist}(f, \mathcal{P}_1) = 1$.

2.2 Parima lähendi olemasolu ja ühesus

Antud peatükis uurime tarvilikke ja piisavaid tingimusi parima lähendi olemasolu ja ühesuse jaoks. Tõestame muu hulgas, et normeeritud ruumi lõplikumõõtmelisest alamruumist parim lähend alati leidub, ning kui esialgne ruum on lisaks rangelt kumer, siis on parim lähend ühene.

Lemma 2.4. *Olgu K kompaktne hulk meetrilises ruumis (X, d). Igal elemendil $x \in X$ leidub parim lähend hulgast K.*

TÕESTUS. Olgu $m = \inf\{d(x, k)\colon k \in K\}$ ning olgu k_i, $i \in \mathbb{N}$, minimiseeriv jada, st $d(x, k_i) \to m$. Kuna hulk K on kompaktne, siis jadal k_i leidub koonduv osajada, üldisust kitsendamata $k_i \to k_*$ mingi $k_* \in K$ korral. Siis

$$m \leqslant d(x, k_*) \leqslant d(x, k_i) + d(k_i, k_*) \to m,$$

ja seega $d(x, k_*) = m = \inf\{d(x, k)\colon k \in K\}$. □

Teoreem 2.5. *Olgu U normeeritud ruumi X lõplikumõõtmeline alamruum. Siis igal elemendil $x \in X$ leidub parim lähend hulgast U.*

TÕESTUS. Fikseerime suvalised elemendid $x \in X$ ja $u_0 \in U$. Paneme tähele, et kui parim lähend leidub, siis ta paikneb hulgas

$$U_0 = \{u \in U\colon \|x - u\| \leqslant \|x - u_0\|\}.$$

Kuna U_0 on kinnine tõkestatud hulk lõplikumõõtmelises ruumis, siis seega ta on kompaktne. Parim lähend leidub eelmise lemma kohaselt. □

Järgmisest lemmast näeme, et alamruumi lõplikumõõtmelisus on oluline eeldus. Selleks vaatleme nulliks koonduvate jadade ruumi c_0 alamruumi

$$U = \left\{ u \in c_0 \colon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u_k = 0 \right\}$$

(veenduge, et see on alamruum! ✠).

Lemma 2.6. *Suvalise $x \in c_0 \backslash U$ korral ei leidu elemendil x parimat lähendit hulgast U.*

TÕESTUS. Fikseerime elemendi $x = (x_k) \in c_0 \backslash U$ ja tähistame $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k$. Eelduse kohaselt $\lambda \neq 0$. Vaatame elemente

$$\begin{aligned}
u^1 &= x - \frac{2}{1}\lambda(1, 0, 0, 0, \dots), \\
u^2 &= x - \frac{4}{3}\lambda(1, 1, 0, 0, \dots), \\
u^3 &= x - \frac{8}{7}\lambda(1, 1, 1, 0, \dots), \\
&\dots
\end{aligned}$$

Paneme tähele, et $u^n \in U$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ning

$$\|x - u^n\| = \left(\frac{2^n}{2^n - 1} \right) |\lambda| \searrow |\lambda|.$$

Seega $d(x, U) \leqslant |\lambda|$. Teiselt poolt aga iga elemendi $u \in U$ korral kehtib $\|x - u\| > |\lambda|$, sest

$$\begin{aligned}
|\lambda| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} x_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} (x_k - u_k) \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} |x_k - u_k| < \|x - u\| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \\
&= \|x - u\|,
\end{aligned}$$

kus range võrratus on tingitud sellest, et piisavalt suure indeksi k korral $|x_k - u_k| < \|x - u\|$, sest nii x_k kui ka u_k on nulliks koonduvad jadad. □

Definitsioon. Normeeritud ruumi X nimetatakse *rangelt kumeraks*, kui kehtib implikatsioon

$$\|x\| = \|y\| = 1,\ x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|y\|.$$

Antud definitsioon ütleb seda, et kui võtta kaks erinevat punkti rangelt kumera ruumi ühiksfäärilt, siis nende keskpunkt ühiksfääri peal ei asu. Saab anda sellega samaväärse üldisema tingimuse: kui võtta kaks erinevat punkti rangelt kumera ruumi ühiksfäärilt, siis ühiksfäär ei sisalda ühtegi punkti neid ühendavalt lõigult (v.a otspunktid). Selles saab veenduda, lahendades järgmise ülesande.

Ülesanne 2.6. Olgu ruum X rangelt kumer. Näidake, et kui $x, y \in X$, $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$, ning $\lambda \in (0, 1)$, siis

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| < 1.$$

Lemma 2.7. *Olgu U rangelt kumera ruumi X alamruum. Siis igal elemendil x on ülimalt üks parim lähend.*

TÕESTUS. Oletame, et u_1 ja $u_2 \in U$ on mõlemad parimad lähendid elemendile $x \in X$. Olgu $\|x - u_1\| = \|x - u_2\| = m$. Siis

$$\begin{aligned}\left\|x - \frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right\| &= \left\|\frac{1}{2}(x - u_1) + \frac{1}{2}(x - u_2)\right\| \\ &< \frac{1}{2}\|x - u_1\| + \frac{1}{2}\|x - u_2\| = m,\end{aligned}$$

mis on vastuolus parima lähendi definitsiooniga. □

Varasematest tulemustest järeldub lihtsalt järgmine teoreem.

Teoreem 2.8. *Olgu U rangelt kumera ruumi X lõplikumõõtmeline alamruum. Siis igal elemendil $x \in X$ leidub parajasti üks parim lähend hulgast U.*

Ülesanne 2.7. Tõestada see teoreem.

Järgmisena toome näite mitteühesuse kohta.

Lemma 2.9. *Olgu $f \in L_1(\mathbb{T})$. Siis $k = 1, \ldots, n-1$ korral kehtib*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(nx)\cos(kx)dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(nx)\sin(kx)dx = 0.$$

Kui lisaks sellele $f \perp 1$, siis $f(n\cdot) \perp \mathcal{T}_{n-1}$, st

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(nx)t(x)dx = 0$$

iga $t \in \mathcal{T}_{n-1}$ korral.

TÕESTUS. Tähistame $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(nx)\cos(kx)dx$ ja $I_2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(nx)\sin(kx)dx$. Kasutades muutujavahetust $x = t + \dfrac{2\pi}{n}$, saame tänu vaadeldavate funktsioonide perioodilisusele, et

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(nx)\cos(kx)dx \\
&= \int_{-\pi-\frac{2\pi}{n}}^{\pi-\frac{2\pi}{n}} f(nt+2\pi)\cos\left(kt+\frac{2k\pi}{n}\right)dt \\
&= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi} f(nx)\cos(kt)dt - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi} f(nx)\sin(kt)dt \\
&= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) I_1 - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) I_2.
\end{aligned}
$$

Analoogiliselt saame tingimuse

$$
I_2 = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) I_2 + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) I_1.
$$

Oleme saanud lineaarvõrrandisüsteemi

$$
\begin{cases}
\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right) I_1 - \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) I_2 = 0, \\
\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) I_1 + \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right) I_2 = 0,
\end{cases}
$$

mille determinant on nullist erinev, seega tegemist on Crameri peajuhuga ja ainus lahend on $I_1 = I_2 = 0$, nagu soovitud.

Teine väide järeldub esimesest, kuna iga polünoom $t \in \mathcal{T}_{n-1}$ on liidetavate $\sin(kx)$, $\cos(kx)$, $0 < k < n$, ja konstandi 1 lineaarkombinatsioon. □

Lause 2.10. *Olgu $F(x) = \operatorname{sgn}\sin(nx)$ (vaata joonist 2.2). Iga polünoom $s \in \mathcal{T}_{n-1}$, $\|s\| < 1$, on parim lähend funktsioonile F.*

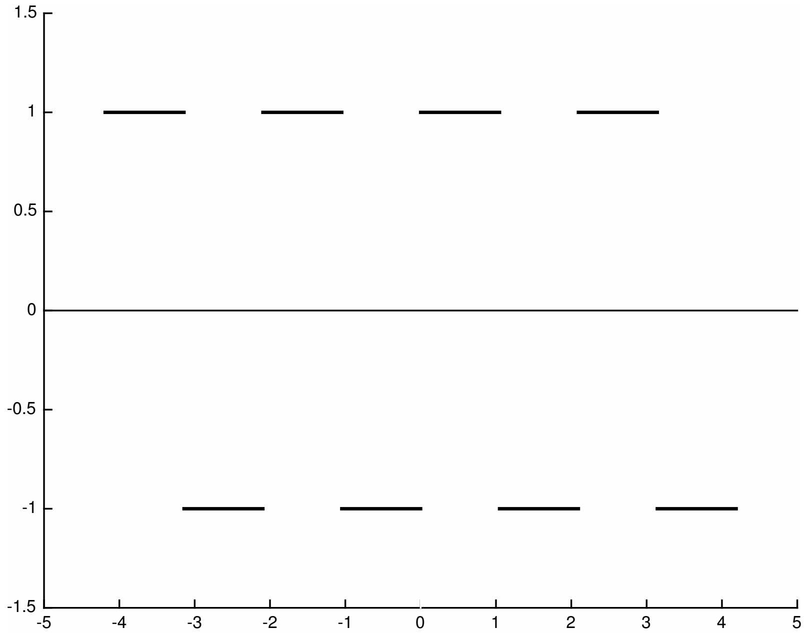
Tõestus. Lihtne on veenduda, et funktsioon F rahuldab eelmise lemma eeldusi, seega $F \perp \mathcal{T}_{n-1}$. Järelikult iga $t \in \mathcal{T}_{n-1}$ korral kehtib

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |F(x) - t(x)|dx &\geqslant \left| \int_{\mathbb{T}} (F(x) - t(x)) \operatorname{sgn}\sin(nx)dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{T}} F(x) \operatorname{sgn}\sin(nx)dx \right| \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

Kui nüüd $|s(x)| < 1 = |F(x)|$, siis

$$
\operatorname{sgn}(F(x) - s(x)) = \operatorname{sgn} F(x) = \operatorname{sgn}\sin(nx)
$$

ja esimene võrratus muutub võrduseks. □



Joonis 2.2: Funktsiooni $F(x)$ graafik, kui $n = 3$.

2.3 Weierstrassi teoreem

Matemaatilise analüüsi kursusest tunneme hästi järgmist teoreemi.

Teoreem 2.11 (Weierstrass). *Iga funktsiooni $f \in C[a,b]$ ja arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub polünoom $p \in \mathcal{P}$ nii et $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ iga $x \in [a,b]$ korral. Teisisõnu, algebraliste polünoomide hulk on tihe hulgas $C[a,b]$.*

Ülesanne 2.8. Tõestage Weierstrassi teoreemi abil, et polünoomide ruum on kõikjal tihe ruumis $C^k[0,1]$.

Weierstrassi teoreem ja selle esialgne tõestus [2] ei anna ilmutatud informatsiooni lähendava polünoomi kohta; meie eesmärk on näidata nende polünoomide konstrueerimist ilmutatud kujul.

Olgu K kompaktne hulk, vaatame sellel hulgal defineeritud pidevate reaalväärtustega funktsioonide hulka $C(K)$. Paneme tähele, et ruum $C(K)$ on osaliselt järjestatav: kui $f, g \in C(K)$, siis $f \leqslant g$ võib defineerida nii, et $f(x) \leqslant g(x)$ iga elemendi $x \in K$ korral.

Definitsioon. Olgu $U \colon C(K) \to C(K)$ operaator. Öeldakse, et operaator U on *positiivne*, kui iga funktsiooni $f \in C(K)$ korral kehtib implikatsioon

$$f \geqslant 0 \implies U(f) \geqslant 0.$$

Ülesanne 2.9. Tõestage, et iga positiivse lineaarse operaatori U korral kehtib $\|U\| = \|U(1, \cdot)\|$, kus 1 on funktsioon konstantse väärtusega 1, st $1(x) = 1$.

Näide 2.12. Kui $K\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ on selline $K(x,t)\geqslant 0$ iga $x,t\in[a,b]$ korral, siis

$$U(f,x)=\int_a^b K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

on positiivne operaator ruumis $C[a,b]$.

Näide 2.13. Olgu $a\le t_1<t_2<\cdots<t_n\le b$ ja $k_i\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,n$, sellised funktsioonid, et $k_i(x)\geqslant 0$ iga $i=1,\ldots,n$ ja $x\in[a,b]$ korral, siis

$$U(f,x)=\sum_{i=1}^n k_i(x)f(t_i),$$

on positiivne operaator ruumis $C[a,b]$.

Järgmisena tõestame Korovkini teoreemi, mida hiljem kasutame abivahendina Weierstrassi teoreemi tõestamises. Tõestuse viime läbi vaid erijuhul.

Teoreem 2.14 (Korovkin)**.** *Olgu hulk K kompaktne hulk ning olgu $U_n\colon C(K)\to C(K)$, $n\in\mathbb{N}$, positiivsete lineaarsete operaatorite jada. Leidugu mingi naturaalarvu $m\in\mathbb{N}$ korral funktsioonid $a_i,p_i\in C(K)$, $i=1,\ldots,m$, nii, et*

$$p_t(x):=\sum_{i=1}^m a_i(t)p_i(x)\geqslant 0$$

kehtib iga $x,t\in K$ korral, kusjuurs võrdus leiab aset parajasti siis, kui $x=t$.

Kui $U_n(p_i)\to p_i$ iga $i=1,\ldots,m$ korral, siis $U_n(f)\to f$ iga $f\in C(K)$ korral.

Tõestus. Fikseerime $f\in C(K)$ ja $\varepsilon>0$. Näitame, et iga $t\in K$ korral saame leida kaks funktsiooni q_t^+ ja $q_t^-\in\operatorname{span}\{p_1,\ldots,p_m\}$ nii, et:

1) $q_t^-\leqslant f\leqslant q_t^+$,

2) $|q_t^+(x)-q_t^-(x)|\,|_{x=t}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{4}$,

3) $U_n(q_t^\pm)\to q_t^\pm$ ühtlaselt t suhtes.

Siis tingimusest 1) saame, et kehtib

$$1')\ U_n(q_t^-)\leqslant U_n(f)\leqslant U_n(q_t^+),$$

ning koonduvus 3) tähendab, et piisavalt suure indeksi n korral kehtib

$$3')\ |U_n(q_t^\pm,x)-q_t^\pm(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\quad \forall x,t\in K.$$

Järelikult iga $t\in K$ korral

$$\begin{aligned}|U_n(f,x)-f(x)|\,|_{x=t} &\overset{1),1')}{\leqslant} |U_n(q_t^+,x)-q_t^-(x)|\,|_{x=t}\\ &\leqslant |U_n(q_t^+,x)-q_t^+(x)|\,|_{x=t}+|q_t^+(x)-q_t^-(x)|\,|_{x=t}\\ &\overset{2),3')}{\leqslant}\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\end{aligned}$$

millest järeldubki teoreemi väide. Oma tõestuses aga piirdume erijuhuga

$$K = [a, b], \quad p_i(x) = x^i, \ i = 0, 1, 2, \quad p_t(x) = (x - t)^2.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kuna K on kompaktne, siis funktsioon f on ühtlaselt pidev, seega leidub $\delta > 0$ nii, et kehtib implikatsioon

$$|x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon.$$

Defineerime polünoomid $q^{\pm}$ järgmiselt:

$$q_t^{\pm}(x) = f(t) \pm \left(\varepsilon + 2\|f\| \frac{(x-t)^2}{\delta^2}\right)$$

ning veendume, et tingimused 1) – 3) on täidetud.

1) Paneme tähele, et kui $|x - t| < \delta$, siis

$$f(x) - q_t^-(x) = f(x) - f(t) + \left(\varepsilon + 2\|f\| \frac{(x-t)^2}{\delta^2}\right) \geqslant f(x) - f(t) + \varepsilon > 0$$

   ning kui $|x - t| \geqslant \delta$, siis

$$f(x) - q_t^-(x) > f(x) - f(t) + 2\|f\| \geqslant 0,$$

   nagu soovitud (veenduge, et soovitud tingimus on täidetud ka funktsiooni q_t^+ jaoks! ✠$_{2.10}$).

2) Lihtne on näha, et $|q_t^+(x) - q_t^-(x)| \,|_{x=t} = 2\varepsilon$. Kui teeme suuruse ε väiksemaks, saame soovitud hinnangu.

3) Kuna q_t^+ on teise astme polünoom, võime kirjutada

$$q_t^+(x) = c_2(t)p_2(x) + c_1(t)p_1(x) + c_0(t)p_0(x),$$

   kus $c_i(\cdot)$ on funktsioonid, mis määravad selle polünoomi kordajaid. Mingi konstandi c_ε korral kehtib $|c_i(t)| \leqslant c_\varepsilon$ (miks? ✠$_{2.11}$) ning tänu sellele

$$\begin{aligned} |U_n(q_t^+, x) - q_t^+(x)| &= |c_2(t)(U_n(p_2(x)) - p_2(x)) + c_1(t)(U_n(p_1(x)) - p_1(x)) \\ &\quad + c_0(t)(U_n(p_0(x)) - p_0(x))| \\ &\leqslant 3c_\varepsilon \max_{i=0,1,2} |U_n(p_i(x)) - p_i(x)|, \end{aligned}$$

   millest järeldub, et $\|U_n(q_t^+) - q_t^+\| \leqslant 3c_\varepsilon \max_{i=0,1,2} \|U_n(p_i) - p_i\|$. Tänu koonduvusele $U_n(p_i) \to p_i$ iga i korral, saame valida indeksi n_0 nii, et $\|U_n(p_i) - p_i\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3c_\varepsilon}$, kui $n \geqslant n_0$. See omakorda annab hinnangu $\|U_n(q_t^+) - q_t^+\| \leqslant \varepsilon$, millest järeldubki koonduvus 3). Funktsiooni q_t^- korral on tõestus analoogiline (teha ise läbi! ✠).

□

Ülesanne 2.12. Ülesannet 2.9 kasutades näidake, et Korovkini teoreemi eeldustel kehtib $\sup\limits_n \|U_n\| < M < \infty$ mingi konstandi M korral.

Näide 2.15. Olgu $U_n\colon C([a,b]) \to C([a,b])$ positiivsed lineaarsed operaatorid. Kui leiab aset koonduvus $U_n(p_i) \to p_i$, kus $p_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$, siis iga funktsiooni $f \in C(K)$ korral $U_n(f) \to f$, kuna sobib $p_t(x) = (x-t)^2$. Meie eesmärgiks nüüd on leida sobivad operaatorid U_n.

Ülesanne 2.13. Näidake, et ainus positiivne lineaarne operaator $U\colon C[a,b] \to C[a,b]$, mille korral

$$U(p_i) = p_i, \quad p_i(x) = x^i, \ i = 0, 1, 2,$$

on samasusoperaator, st $U(f) = f$ iga funktsiooni $f \in C[a,b]$ korral.

Definitsioon. Funktsiooni $f \in C[0,1]$ *Bernsteini polünoom* on defineeritud valemiga

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ülesanne 2.14. Leidke järgmistele funktsioonidele vastavad Bernsteini polünoomid (vt ka joonist 2.3):

(a) $f(x) = x + 1$, $n = 2$;

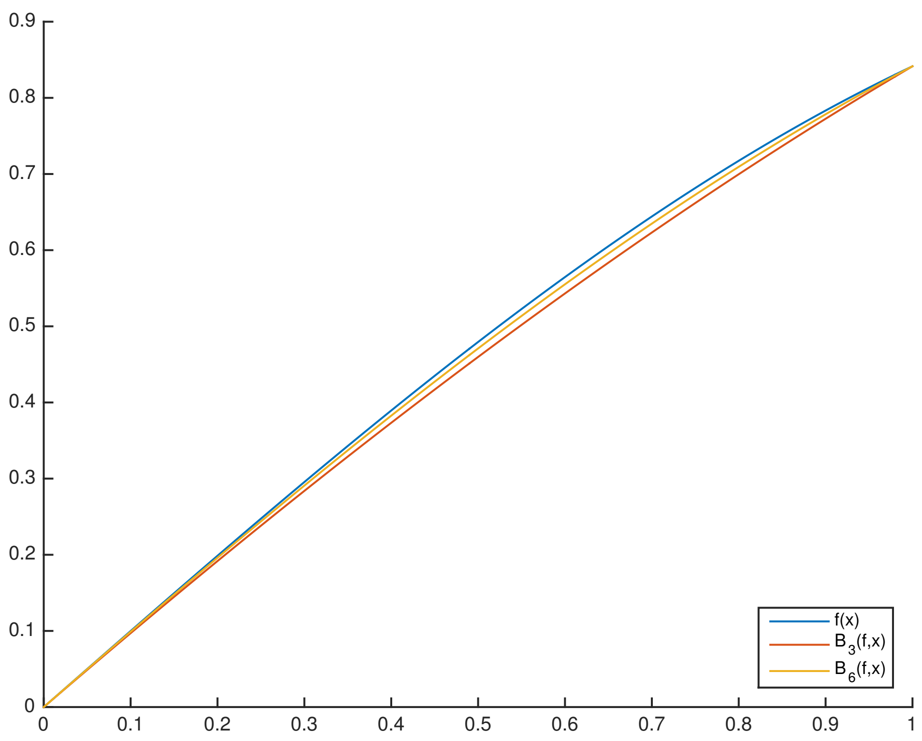
(b) $f(x) = x(1-x)$, $n = 2$;

(c) $f(x) = x(1-x)$, $n = 3$;

(d) $f(x) = \ln(x+1)$, $n = 2$;

(e) $f(x) = \sin x$, $n = 2$;

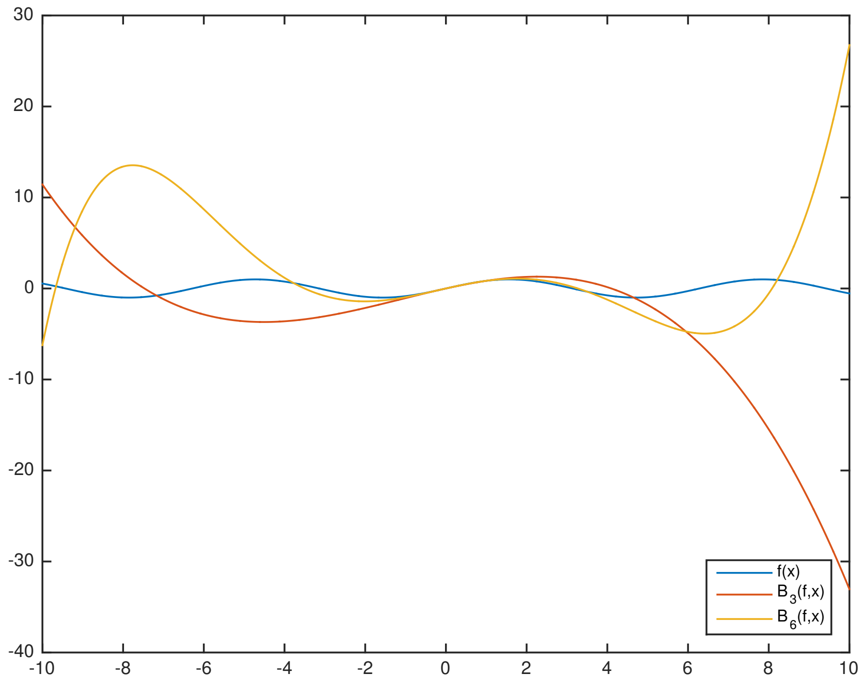
(f) $f(x) = x^2$, $n = 4$.



Joonis 2.3: Funktsiooni $f(x) = \sin x$ Bernsteini polünoomid lõigus $[0,1]$.

Ülesanne 2.15. Kirjutage arvutiprogramm, mis seab funktsioonile f vastavasse tema Bernsteini polünoomi $B_n(f,x)$.

Paneme tähele, et B_n on positiivne lineaarne operaator ruumist $C(K)$ ruumi $\mathcal{P}_n$ (veenduge! ✠$_{2.16}$).



Joonis 2.4: Funktsiooni $f(x) = \sin x$ Bernsteini polünoomid lõigus $[-10, 10]$.

Jooniselt 2.4 on näha, et juba väikeste n väärtuste korral on on B_n hea lähend (funktsioonile $f(x) = \sin x$), aga väljaspool lõiku $[0, 1]$ erineb oluliselt funktsioonist endast.

Lemma 2.16. *Suvaliste naturaalarvude m ja n korral kehtib sisalduvus*

$$B_n(\mathcal{P}_m) \subset \mathcal{P}_m.$$

TÕESTUS. Näitame, et $(B_n(\mathcal{P}_m))^{(m+1)} = 0$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et

$$B_n'(f, x) = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

(tehke läbi! ✠$_{2.17}$), mis on konstandi n täpsusega Bernsteini polünoom funktsiooni

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = \Delta^1_{1/n} f(x)$$

jaoks. Paneme tähele, et kui f on m. astme polünoom, siis

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$$

on $(m-1)$. astme polünoom. Niimoodi jätkates jõuame m. sammul konstantse funktsiooni, millest järeldubki väide (kuidas? ✠$_{2.18}$). $\square$

Lemma 2.17. *Kehtib koondumine $B_n(p_i) \to p_i$, kus $p_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, 2$.*

TÕESTUS. Paneme kõigepealt tähele, et $B_n(f, 0) = f(0)$ ja $B_n(f, 1) = f(1)$ suvalise funktsiooni $f \in C([0, 1])$ korral, ning eelmise lemma kohaselt $B_n(p) \in \mathcal{P}_1$ iga $p \in \mathcal{P}_1$ korral. Järelikult, $B_n(x^i) = x^i$, kui $i = 0, 1$ ja seega $B_n(x^i) \to x^i$, kui $i = 0, 1$.

Tõestuse lõpetamiseks piisab lineaarsuse tõttu näidata, et $B_n(q) \to q$ mingi polünoomi $q \in \mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P}_1$ korral (selgitage! $\maltese_{2.19}$). Me võtame $q(x) = x(1 - x)$. Teise astme polünoomi $B_n(q)$ juured on 0 ja 1 (miks? $\maltese_{2.20}$), järelikult $B_n(q) = \gamma q$ mingi arvu $\gamma \in \mathbb{R}$ korral. Sel juhul $B_n'(q, 0) = \gamma q'(0) = \gamma$. Samas lemma 2.16 tõestuse kohaselt

$$B_n'(q, 0) = n\left(q\left(\frac{1}{n}\right) - q(0)\right) = nq\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

mis annab $\gamma = 1 - \dfrac{1}{n}$ ja seega $B_n(q) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) q \to q$, nagu soovitud. □

Ülesanne 2.21. Tõestage, et kui $f \in C^k[0, 1]$, siis kehtib ka koonduvus

$$B_n^{(k)}(f) \to f^{(k)}.$$

WEIERSTRASSI TEOREEMI 2.11 TÕESTUS.

Lõigu $[0, 1]$ jaoks võtame Korovkini teoreemis $p_t(x) = (x - t)^2$ ja $U_n = B_n$ (kontrollige! $\maltese_{2.22}$). □

Ülesanne 2.23. Tõestada Weierstrassi teoreem suvalise lõigu $[a, b]$ jaoks.

Ülesanne 2.24. Olgu $f \in C[0, 1]$ selline, et $f(0) = f(1) = 0$. Vaatame funktsiooni B_n^*, mis on defineeritud seosega

$$B_n^*(f, x) = \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right\rfloor x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Tegemist on täisarvuliste kordajatega polünoomiga. Näidake, et $B_n^*(f) \to f$ ühtlaselt hulgas $C[0, 1]$.

Näpunäide. Kehtib hinnang $|B_n(f, x) - B_n^*(f, x)| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Selles veendumiseks võib näidata, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^k = 1$ ning seda kasutades hinnata summat

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^k (1 - x)^k.$$

2.4 Weierstrassi teoreemi trigonomeetriline versioon

Järgmiseks eesmärgiks võtame Weierstrassi teoreemi trigonomeetrilise versiooni tõestamise.

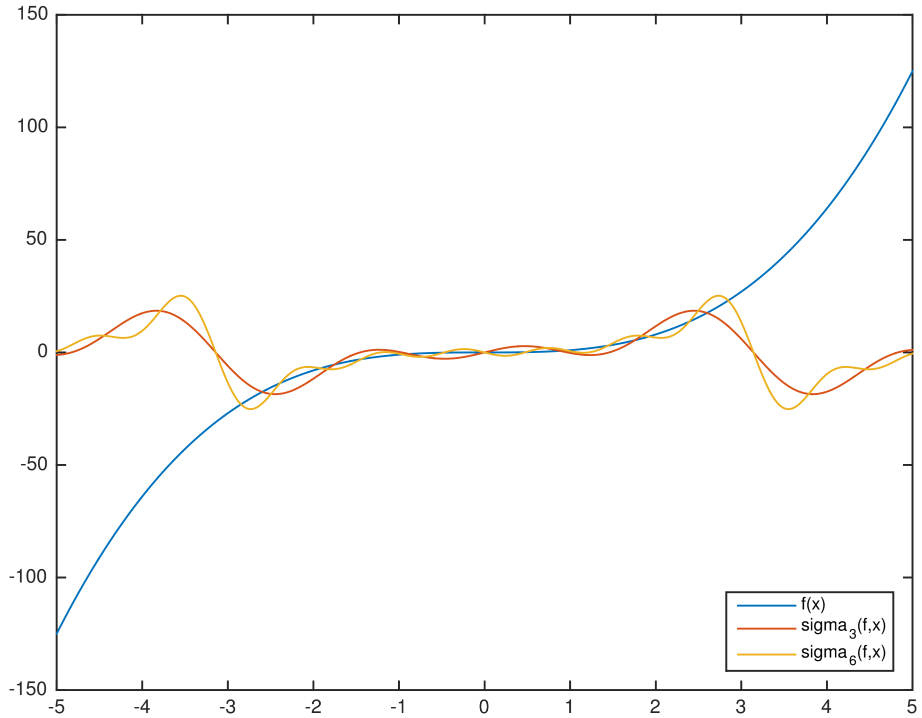
Käesolevas peatükis vaatleme perioodilisi funktsioone. Meenutame, et sümbol $\mathbb{T}$ tähistab perioodi pikkusega 2π ning sümbol $C(\mathbb{T})$ perioodiliste funktsioonide ruumi (perioodiga 2π).

Definitsioon. Funktsiooni $f \in L_1(\mathbb{T})$ *Fourier' rea osasummad* on antud seosega (vt ka joonist 2.5)

$$s_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

kus

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos kt \,\mathrm{d}t, \;\; k = 0,1,2,\ldots,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin kt \,\mathrm{d}t, \;\; k = 1,2,\ldots.$$



Joonis 2.5: Funktsiooni $f(x) = x^3$ Fourier' rea osasummad $n = 3$ ja $n = 6$ korral.

Lemma 2.18. *Kehtib seos*

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} D_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t,$$

kus $D_n(x) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ *on* Dirichlet' tuum.

Tõestus. Kuna

$$\begin{aligned} a_k \cos kx + b_k \sin kx &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)[\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos k(x-t) \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

siis seega

$$s_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right) \mathrm{d}t.$$

Paneme tähele, et

$$2 \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right) = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x$$

(veenduge! ✠$_{2.25}$), mis annab

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{1}{2} x} = D_n(x),$$

nagu soovitud. □

Kahjuks ei saa me operaatorit s_n kasutada Korovkini teoreemis (miks? ✠$_{2.26}$), aga appi tuleb järgmine mõiste.

Definitsioon. Operaatorit σ_n, mis tegutseb eeskirja

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} s_i(f)$$

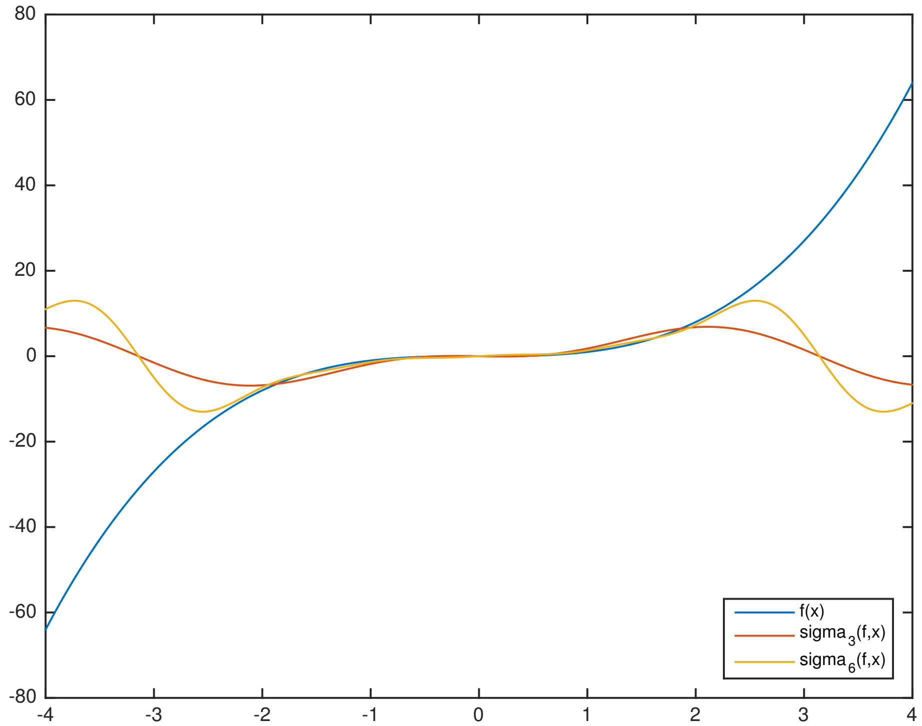
järgi, nimetatakse *Fejéri operaatoriks* (vaata ka joonist 2.6).

Paneme tähele, et kehtib seos

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(x-t) f(t) \, \mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

kus $F_n(x) = \dfrac{\sin^2 \frac{n}{2} x}{2n \sin^2 \frac{x}{2}}$ on nn *Fejéri tuum*.

Ülesanne 2.27. Tõestage valem (2.2).



Joonis 2.6: Funktsiooni $f(x) = x^3$ Fejéri summad $n = 3$ ja $n = 6$ korral.

Lemma 2.19. *σ_n on positiivne lineaarne operaator ning kehtib*

$$\sigma_n(\cos kt, x) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos kx, \;\; \sigma_n(\sin kt, x) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \sin kx.$$

TÕESTUS. Lihtne kontroll näitab, et tegemist on tõepoolest positiivse lineaarse operaatoriga (veenduge! ✠). Viime tõestuse läbi $f(x) = \cos kx$ jaoks. Paneme tähele, et

$$\int_{\mathbb{T}} \cos nt \cos kt \, \mathrm{d}t = 0, \; \forall k \neq n,$$
$$\int_{\mathbb{T}} \cos^2 kt \, \mathrm{d}t = \pi \; \forall k \neq 0,$$
$$\int_{\mathbb{T}} \cos nt \sin kt \, \mathrm{d}t = 0 \; \forall k$$

(veenduge! ✠), seega $s_n(f, x) = \cos kx$, kui $n \leqslant k$, ning $s_n(f, x) = 0$ vastasel juhul, millest järeldubki väide. □

Ülesanne 2.28. Tõestage, et $\|F_n\|_{L_1[-\pi,\pi]} = \pi$.

Ülesanne 2.29. Tõestage, et kehtib võrdus $\|\sigma_n\| = 1$. Miks ei ole korrektne Lebesgue'i võrratuse abil saadud hinnang $\|f - \sigma_n(f)\| \leqslant 2 \,\mathrm{dist}(f, \mathcal{T}_n)$?

Nüüd saame näidata, et kehtib Weierstrassi teoreemi trigonomeetriline versioon.

Teoreem 2.20 (Weierstrass)**.** *Trigonomeetriliste polünoomide hulk on tihe ruumis $C(\mathbb{T})$.*

TÕESTUS. Võtame Korovkini teoreemis $p_t(x) = 1 - \cos(x - t)$ ja $U_n = \sigma_n$ ning vaatame koonduvust funktsioonidel $\{1, \cos x, \sin x\}$ (kontrollige $\maltese_{2.30}$). $\square$

PEATÜKK 3
Parim lähend ruumis $C(K)$

Edaspidi tähistame sümboliga $C(K)$ funktsioonide ruumi, mis on pidevad kompaktsel hulgal K. Kui meil on vaja täpsustada, kas funktsioon on reaalarvuliste või kompleksarvuliste väärtustega, kirjutame vastavalt $C(K, \mathbb{R})$ ja $C(K, \mathbb{C})$.

Käesolevas peatükis uurime parima lähendi olemasolu ja ühesust ruumis $C(K)$. Alguses vaatame ruumi $C(K, \mathbb{R})$ ja algebralisi polünoome, mille jaoks tõestame Tšebõšovi alternansi tingimuse, ja siis üldistame oma tulemusi Tšebõšovi süsteemidele suvalises ruumis $C(K)$. Samuti tutvustame selles peatükis Tšebõšovi polünoome.

3.1 Tšebõšovi alternansi tingimus

Käesolevas alapeatükis tõestame kõigepealt Kolmogorovi kriteeriumi, mis annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et funktsioon p_* ruumi $C(K, \mathbb{R})$ mingist alamruumist U oleks parim lähend etteantud funktsioonile $f \in C(K, \mathbb{R})$. Kolmogorovi kriteeriumi abil tõestame Tšebõšovi alternansi tingimuse, mis annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et polünoom $p_* \in \mathcal{P}_n$ oleks parim lähend funktsioonile $f \in C[a, b]$.

Teoreem 3.1 (Kolmogorov)**.** *Olgu K kompaktne hulk ning olgu $\mathcal{U}$ alamruum normeeritud ruumis $C(K) = C(K, \mathbb{R})$. Element $p_* \in \mathcal{U}$ on parim lähend elemendile $f \in C(K)$ parajasti siis, kui*

$$\max_{x \in \mathcal{Z}} (f(x) - p_*(x))q(x) \geqslant 0 \quad \forall q \in \mathcal{U}, \tag{3.1}$$

kus $\mathcal{Z} = \{x \in K \colon |f(x) - p_*(x)| = \|f - p_*\|\}$.

Tõestus. Oletame, et tingimus (3.1) on täidetud. Võtame suvalise elemendi $p \in \mathcal{U}$ ja defineerime $q = p_* - p$, siis leidub $x_0 \in \mathcal{Z}$, mille korral $(f(x_0) - p_*(x_0))q(x_0) \geqslant 0$. Sellisel juhul

$$\begin{aligned}(f(x_0) - p(x_0))^2 &= (f(x_0) - p_*(x_0) + q(x_0))^2 \\ &= (f(x_0) - p_*(x_0))^2 + 2(f(x_0) - p_*(x_0))q(x_0) + (q(x_0))^2 \\ &\geqslant \|f - p_*\|^2,\end{aligned}$$

seega $\|f - p\| \geqslant \|f - p_*\|$ ja järelikult funktsioon p ei ole parem lähend kui funktsioon p_* ning seega p_* on parim lähend.

Vaatame nüüd teises suunas implikatsiooni. Oletame vastuväiteliselt, et p_* on parim lähend, aga tingimus (3.1) ei ole täidetud. Siis leidub selline $q \in \mathcal{U}$, et

$$\max_{x \in \mathcal{Z}} (f(x) - p_*(x))q(x) = -2\varepsilon$$

mingi $\varepsilon > 0$ korral. Tänu vaadeldavate funktsioonide pidevusele leidub lahtine hulk $G \subset K$ nii, et $\mathcal{Z} \subset G$ ning

$$\max_{x \in G} (f(x) - p_*(x))q(x) < -\varepsilon$$

(veenduge! ✠). Vaatame, kuidas funktsioon $p := p_* - \lambda q$ lähendab funktsiooni f. Konstandi $\lambda > 0$ valime hiljem.

Kui $x \in G$, siis

$$\begin{aligned}(f(x) - p(x))^2 &= (f(x) - p_*(x) + \lambda q(x))^2 \\ &= (f(x) - p_*(x))^2 + 2\lambda(f(x) - p_*(x))q(x) + (\lambda q(x))^2 \\ &< \|f - p_*\|^2 - 2\lambda\varepsilon + \lambda^2\|q\|^2.\end{aligned}$$

Võttes $0 < \lambda < \dfrac{\varepsilon}{\|q\|^2}$, saame hinnangu $|f(x) - p(x)|^2 < \|f - p_*\|^2 - \lambda\varepsilon$.

Iga elemendi $x \in K \setminus G$ korral kehtib võrratus $|f(x) - p_*(x)| < \|f - p_*\|$ (kuna $\mathcal{Z} \subset G$). Hulk $K \setminus G$ on aga kinnine, seega saame valida $\delta > 0$ nii, et

$$|f(x) - p_*(x)| < \|f - p_*\| - 2\delta, \quad x \in K \setminus G.$$

Nõudes nüüd $\lambda < \dfrac{\delta}{\|q\|}$, saame, et

$$\begin{aligned}|f(x) - p(x)| &\leqslant |f(x) - p_*(x)| + \lambda|q(x)| \\ &\leqslant \|f - p_*\| - 2\delta + \lambda\|q\| \\ &< \|f - p_*\| - \delta.\end{aligned}$$

Tõestuse lõpetamiseks tuleb vaid nõuda, et $\lambda < \min\left\{\dfrac{\delta}{\|q\|}, \dfrac{\varepsilon}{\|q\|^2}\right\}$. □

Ülesanne 3.1. Tõestage, et Kolmogorovi teoreem kehtib ka kompleksel juhul, kui (3.1) asendada tingimusega

$$\max_{z \in \mathcal{Z}} \mathrm{Re}[f(z) - p_*(z)]\overline{q(z)} \geqslant 0 \quad \forall q \in \mathcal{U}.$$

Ülesanne 3.2. Tõestage Kolmogorovi teoreemi abil, et kui $K = [-1, 1]$, $f(x) = x^3$ ja $\mathcal{U} = \mathrm{span}\{1, x^2\}$, siis parim lähend funktsioonile f ruumist $\mathcal{U}$ on $p_*(x) = 1 - x^2$.

Ülesanne 3.3. Veenduda, et funktsiooni $f \in C[a, b]$ parim lähend hulgast $\mathcal{P}_0$ on

$$p_*(x) = \frac{1}{2}(\max f + \min f).$$

Oleme nüüd valmis selleks, et sõnastada ja tõestada kuulus Tšebõšovi alternansi tingimus.

Teoreem 3.2 (Tšebõšov)**.** *Polünoom* $p_* \in \mathcal{P}_n$ *on parim lähend funktsioonile* $f \in C[a,b]$ *parajasti siis, kui leiduvad* $n+2$ *punkti* $a \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+2} \leqslant b$ *nii, et*

$$f(t_i) - p_*(t_*) = (-1)^i \varepsilon \|f - p_*\|, \tag{3.2}$$

kus $|\varepsilon| = 1$.

Tõestus. Tõestuses vaatame juhtu $\varepsilon = 1$, juht $\varepsilon = -1$ on analoogiline.

Fikseerime $f \in C[a,b]$. Oletame vastuväiteliselt, et p_* on parim lähend, aga et leidub vaid $m \leqslant n+1$ punkti, kus vahe $f - p_*$ saavutab vahelduvate märkidega normi. Defineerime hulgad

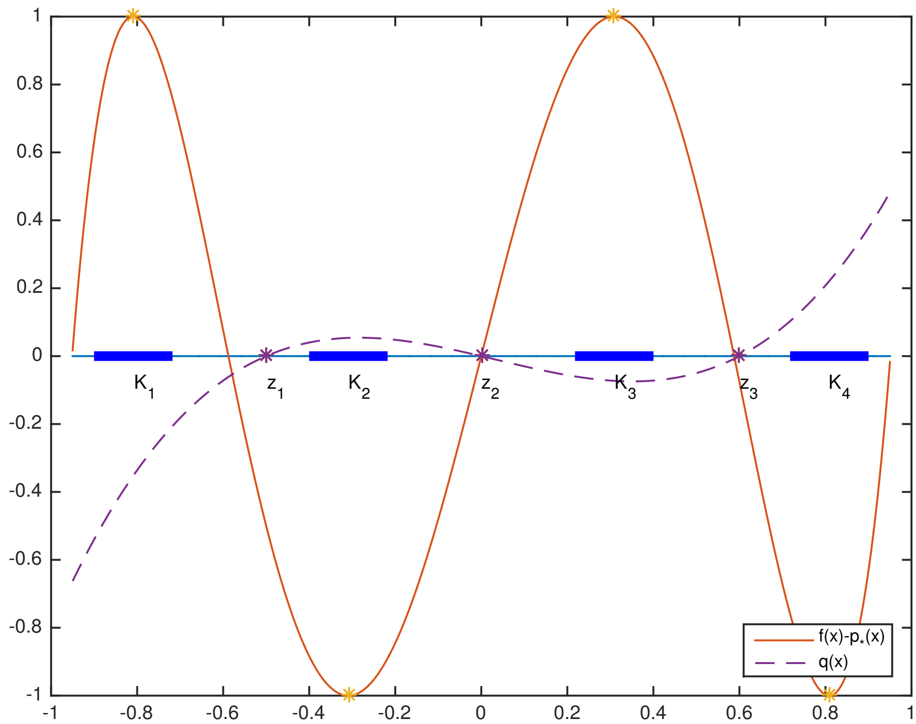
$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \{x \in [a,b] \colon |f(x) - p_*(x)| = \|f - p_*\|\}, \\
\mathcal{Z}_+ &= \{x \in [a,b] \colon f(x) - p_*(x) = \|f - p_*\|\}, \\
\mathcal{Z}_- &= \{x \in [a,b] \colon f(x) - p_*(x) = -\|f - p_*\|\}.
\end{aligned}$$

Siis leiduvad vahemikud K_i, $i = 1, \dots, m$ nii, et $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$, ning punktid hulkadest $\mathcal{Z}_+$ ja $\mathcal{Z}_-$ kuuluvad vaheldumisi hulkadesse K_i. Võtame punktid z_i, $i = 1, \dots, m-1$ nii, et $\max K_i < z_i < \min K_{i+1}$.

Vaatleme polünoomi $q(x) = \prod_{i=1}^{m-1} (x - z_i)$. Kuna $m - 1 \leqslant n$, siis $q \in \mathcal{P}_n$ ja see polünoom vahetab märki punktides z_i. Seega polünoomi q jaoks (vajadusel võtame q asemel $-q$, vt joonist 3.1) kehtib

$$(f(x) - p_*(x))q(x) < 0,$$

kui $|f(x) - p_*(x)| = \|f - p_*\|$. Kolmogorovi teoreemi kohaselt polünoom p_* ei saa olla parim lähend.



Joonis 3.1: Illustratsioon Tšebõšovi teoreemi tõestuse juurde.

Eeldame nüüd, et võrdus (3.2) on täidetud. Olgu $q \in \mathcal{P}_n$ suvaline polünoom. Tingimusest

$$\max_{i\in\{1,\dots,n+2\}} (f(t_i) - p_*(t_i))q(t_i) < 0$$

järelduks, et polünoom q vahetab märki $n+2$ punktis (ehk $n+1$ korda), mis on aga vastuolu, sest polünoomil q on ülimalt n nullkohta. Seega

$$\max_{i\in\{1,\dots,n+2\}} (f(t_i) - p_*(t_i))q(t_i) \geqslant 0$$

ja Kolmogorovi teoreemi kohaselt polünoom p_* on parim lähend funktsioonile f. □

Tšebõšovi teoreem kehtib ka trigonomeetriliste funktsioonide jaoks järgmisel kujul.

Teoreem 3.3. *Polünoom $p_* \in \mathcal{T}_n$ on parim lähend funktsioonile $f \in C(\mathbb{T})$ parajasti siis, kui leidub $2n+2$ punkti $-\pi < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n+2} \leqslant \pi$ nii, et*

$$f(t_i) - p_*(t_i) = (-1)^i \varepsilon \|f - p_*\|, \ i = 1, \dots, 2n+2, \tag{3.3}$$

kus $|\varepsilon| = 1$.

Ülesanne 3.4. Tõestada teoreem 3.3.

3.2 Tšebõšovi polünoomid

Käesolevas alapeatükis tutvustame Tšebõšovi polünoome ning näitame, kuidas nad osutuvad lahendiks erinevate lähendusteooria ülesannete jaoks.

Definitsioon. Polünoomi T_n, mis on antud seosega

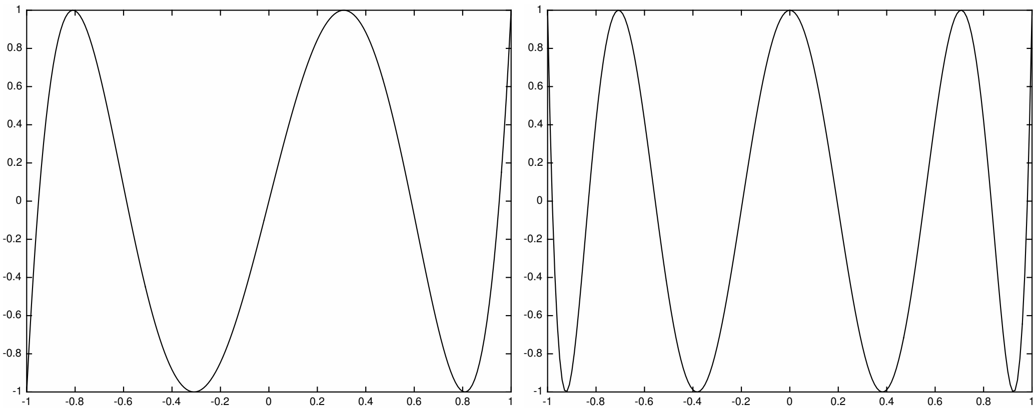
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \ x \in [-1, 1],$$

nimetatakse *Tšebõšovi polünoomiks*.

Tšebõšovi polünoom on algebraline polünoom pealiikme kordajaga 2^{n-1} (vt ka joonist 3.2), mis järeldub rekurrentset seosest

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \ T_1(x) = x, \\ &T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Et selles veenduda, võib kasutada seost $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ (veenduge! ✠$_{3.5}$).



Joonis 3.2: Tšebõšovi polünoomid T_5 ja T_8.

On lihtne tähele panna Tšebõšovi polünoomi põhiomadusi (tõestage! ✠$_{3.6}$):

1. Lõigus $[-1, 1]$ leidub $n + 1$ punkti, kus Tšebõšovi polünoom saavutab vahelduvate märkidega oma maksimumi:

$$\|T_n\| = 1,\ T_n(x_k^*) = (-1)^k,\ x_k^* = \cos\frac{\pi k}{n},\ k = 0, \dots, n.$$

2. Lõigus $[-1, 1]$ leidub Tšebõšovi polünoomil n nullkohta:

$$T_n(t_k^*) = 0,\ t_k^* = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ k = 1, \dots, n.$$

Lause 3.4. *Olgu $|\tau| > 1$. Siis kehtib võrdus*

$$\inf\{\|p\|_{[-1,1]} \colon p \in \mathcal{P}_n,\ p(\tau) = 1\} = \frac{1}{|T_n(\tau)|}.$$

TÕESTUS. Olgu $q(x) = \dfrac{T_n(x)}{T_n(\tau)}$ ning olgu $p \in \mathcal{P}_n$ selline, et $p(\tau) = 1$. Sellisel juhul

$$q(\tau) = p(\tau) = 1,\ q(x_k^*) = (-1)^k \|q\|,\ k = 0, \dots, n,$$

kus x_k^* on Tšebõšovi polünoomi maksimumkohad. Oletades, et $\|p\| < \|q\|$ saame, et n. astme polünoom $q-p$ vahetab märki $n+1$ punktis x_k^* , mistõttu sellel funktsioonil peab olema n nullkohta lõigus $[-1, 1]$ ning lisaks veel üks nullkoht punktis τ, mis on vastuolu. Seega

$$\|p\| \geqslant \|q\| = \frac{1}{|T_n(\tau)|},$$

nagu soovitud. □

3.3 Tšebõšovi süsteemid

Antud peatükis võtame eesmärgiks üldistada Tšebõšovi alternansi tingimust. Tšebõšovi alternansi tingimuse tõestus kasutab järgmisi polünoomide omadusi:

1. Iga erineva m punkti korral, $m \leqslant n$, leidub polünoom $q \in \mathcal{P}_n$, mis vahetab märki parajasti nendes punktides;

2. Igal polünoomil $p \in \mathcal{P}_n$ on ülimalt n nullkohta.

See viib meid järgmise üldisema definitsioonini.

Definitsioon. Ruumi $C(K)$ alamhulka $\Phi = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ nimetatakse *Tšebõšovi süsteemiks*, kui see rahuldab nn Haari tingimust: igal funktsioonil

$$p = a_0 u_0 + \cdots + a_n u_n,$$

kus $a_i \in \mathbb{R}$ on fikseeritud ja ei võrdu kõik korraga nulliga, on ülimalt n nullkohta. Ruumi $\operatorname{span}(\Phi) =: \mathcal{U}_n$ nimetatakse *Tšebõšovi (alam)ruumiks*.

Näide 3.5. Ruum P_n on ruumi $C[a,b]$ Tšebõšovi alamruum (veenduge! ✠$_{3.7}$).

Ülesanne 3.8. Tõestage, et trionomeetriliste polünoomide ruum $\mathcal{T}_n$ on ruumi $C(\mathbb{T})$ Tšebõšovi alamruum.
Näpunäide. Avaldage $t_n \in \mathcal{T}_n$ kujul

$$t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

ning asendusega $z = e^{ix}$ taandage algebralise juhu peale.

Ülesanne 3.9. Tõestage, et kui reaalarvud $(\lambda_k)_{k=0}^n$ on paarikaupa erinevad, siis hulk $\mathcal{U}_n = \operatorname{span}\left(e^{\lambda_k x}\right)_{k=0}^n$ on ruumi $C[a,b]$ Tšebõšovi alamruum.

Näpunäide. Kui $p(x) = c_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} c_k e^{\mu_k x} \in \mathcal{U}_{n+1}$ (kus $\mu_{n+1} = 0$), siis $p' \in \mathcal{U}_n$. Kasutage seda fakti koos induktsiooniga n järgi.

Lemma 3.6. *Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) $(u_i)_{i=0}^n$ *on Tšebõšovi süsteem;*

(ii) Kui punktid $(x_i)_{i=1}^n \subset K$ *on paarikaupa erinevad, siis*

$$D(x_0, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} u_0(x_0) & u_1(x_0) & \dots & u_n(x_0) \\ u_0(x_1) & u_1(x_1) & \dots & u_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0(x_n) & u_x(x_1) & \dots & u_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0;$$

(iii) Kui punktid $(x_i)_{i=1}^n \subset K$ on paarikaupa erinevad ja $(y_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ on etteantud arvud, siis süsteem

$$\begin{cases} a_0u_0(x_0) + a_1u_1(x_0) + \cdots + a_nu_n(x_0) = y_0, \\ a_0u_0(x_1) + a_1u_1(x_1) + \cdots + a_nu_n(x_1) = y_1, \\ \ldots \\ a_0u_0(x_n) + a_1u_1(x_n) + \cdots + a_nu_n(x_n) = y_n, \end{cases}$$

on üheselt lahenduv.

TÕESTUS. Tšebõšovi süsteemi definitsiooni saab ümber kirjutada järgmiselt: kui punktid $(x_i)_{i=1}^n \subset K$ on paarikaupa erinevad, siis süsteemil

$$\begin{cases} a_0u_0(x_0) + a_1u_1(x_0) + \cdots + a_nu_n(x_0) = 0, \\ a_0u_0(x_1) + a_1u_1(x_1) + \cdots + a_nu_n(x_1) = 0, \\ \ldots \\ a_0u_0(x_n) + a_1u_1(x_n) + \cdots + a_nu_n(x_n) = 0, \end{cases}$$

leidub ainult triviaalne lahend $a_j = 0$, kus $j = 0, \ldots, n$. Lineaaralgebrast teame, et see on samaväärne tingimustega (*ii*) ja (*iii*) (selgitage ✠$_{3.10}$). □

Teoreem 3.7. *Olgu $\mathcal{U}_n$ $(n+1)$-mõõtmeline Tšebõšovi alamruum ruumis $C[a,b]$. Element $p_* \in \mathcal{U}_n$ on parim lähend funktsioonile $f \in C[a,b]$ parajasti siis, kui leidub $n+2$ punkti $a \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+2} \leqslant b$ nii, et*

$$f(t_i) - p_*(t_*) = (-1)^i \varepsilon \|f - p_*\|, \tag{3.4}$$

kus $|\varepsilon| = 1$.

Ülesanne 3.11. Tõestada teoreem 3.7.

Esmapilgul võib tunduda, et järgmine väide on lihtne järeldus Tšebõšovi teoreemist, tegelikult see nii ei ole. Tšebõšovi teoreem kehtib ainult siis, kui tegemist on reaalväärtustega funktsioonidega lõplikus lõigus või perioodil. Lemma aga katab ka kompleksväärtustega funktsioone.

Lemma 3.8. *Olgu kompaktses ruumis K vähemalt $n+2$ punkti ning olgu $\mathcal{U}_n$ Tšebõšovi alamruum ruumis $C(K, \mathbb{C})$. Kui $p_* \in \mathcal{U}_n$ on parim lähend funktsioonile $f \in C(K, \mathbb{C})$, siis hulgas $\mathcal{Z} = \{x \in K \colon |f(x) - p_*(x)| = \|f - p_*\|\}$ on vähemalt $n+2$ elementi.*

TÕESTUS. Tähistame hulga $\mathcal{Z}$ elemente x_i, $i = 1, \ldots, m$, ning oletame vastuväiteliselt, et $m \leqslant n+1$. Lemma 3.6 kohaselt leidub polünoom $q \in \mathcal{U}_n$ nii, et $q(x_i) = -(f(x_i) - p_*(x_i))$, $i = 1, \ldots, m$. See polünoom aga rikub Kolmogorovi kriteeriumit, sest

$$\max_{i=1,\ldots,m} \operatorname{Re}(f(x_i) - p_*(x_i))\overline{q(x_i)} = \max_{i=1,\ldots,m} -|f(x_i) - p_*(x_i)|^2 < 0.$$

□

Teoreem 3.9. *Olgu $\mathcal{U}_n$ ruumi $C(K) = C(K,\mathbb{C})$ Tšebõšovi alamruum. Siis igal funktsioonil $f \in C(K)$ on parim lähend ruumist $\mathcal{U}_n$ üheselt määratud.*

TÕESTUS. Oletame, et polünoomid p ja $q \in \mathcal{U}_n$ on mõlemad parimad lähendid funktsioonile $f \in C(K)$, seega

$$\|f - p\| = \|f - q\| = \operatorname{dist}(f, \mathcal{U}_n).$$

Kolmnurga võrratuse abil näeme, et ka polünoom $r := \frac{1}{2}(p + q)$ on parim lähend funktsioonile f. Eelmise lemma kohaselt leiduvad punktid x_i, $i = 1, \ldots, n+2$, mille korral kehtib

$$|f(x_i) - r(x_i)| = \operatorname{dist}(f, \mathcal{U}_n),\ i = 1, \ldots, n+2.$$

Samaväärselt võime kirjutada

$$|(f(x_i) - p(x_i)) + (f(x_i) - q(x_i))| = 2\operatorname{dist}(f, \mathcal{U}_n),\ i = 1, \ldots, n+2,$$

kuid samas $|f(x_i) - p(x_i)|$, $|f(x_i) - q(x_i)| \leqslant \operatorname{dist}(f, \mathcal{U}_n)$. Need kaks tingimust saavad kehtida korraga vaid siis, kui $f(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - q(x_i)$ ehk $p(x_i) = q(x_i)$. Kuna vaadeldavad polünoomid langevad kokku $n + 2$ punktis, siis Haari tingimuse tõttu peavad nad võrdsed olema. □

Järeldus 3.10. *Parim lähend ruumist P_n funktsioonile $f \in C[a, b]$ on üheselt määratud.*

Ülesanne 3.12. Tõestada järeldus 3.10.

Kehtib ka järgmine üldine tulemus.

Teoreem 3.11 (Haar)**.** *Olgu $\Phi = (u_i)_{i=0}^n$ lineaarselt sõltumatud funktsioonid kompaktsel hulgal K, $|K| \geqslant n + 2$. Siis igal funktsioonil $f \in C(K,\mathbb{C})$ leidub täpselt üks parim lähend parajasti siis, kui Φ on Tšebõšovi süsteem.*

Järgmine teoreem ütleb, et Tšebõšovi polünoom on kõige väiksem polünoom ($\|\cdot\|_{[-1,1]}$ suhtes), mille pealiikme kordaja on vähemalt 2^{n-1}.

Teoreem 3.12. *Tšebõšovi polünoom $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ erineb lõigus $[-1, 1]$ kõige vähem nullist nende n. astme polünoomide hulgas, mille pealiikme kordaja on 1. Teisisõnu,*

$$\inf_{a_{n-1},\ldots,a_0 \in \mathbb{R}} \|x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\| = \frac{1}{2^{n-1}}\|T_n\|.$$

TÕESTUS. Tegelikult taandub meie ülesanne selle peale, et leida lõigus $[-1, 1]$ parim lähend funktsioonile $f(x) = x^n$ hulgast $\mathcal{P}_{n-1}$ (veenduda ✠$_{3.13}$). Olgu $p_* \in \mathcal{P}_{n-1}$ soovitud parim lähend, siis vahe $f - p_* \in \mathcal{P}_n$ pealiikme kordaja on 1 ning Tšebõšovi teoreemi kohaselt saavutab see vahe vahelduvate märkidega oma maksimumi $n + 1$ punktis. Polünoomil $\frac{1}{2^{n-1}}T_n$ on samad omadused, seega $f - p_* = \frac{1}{2^{n-1}}T_n$ parima lähendi ühesuse tõttu (vt järeldust 3.10). □

PEATÜKK 4
Jacksoni teoreemid

Käesolevas peatükis tõestame Jacksoni esimese ja teise teoreemi ning pöördteoreemi. Sellel teel on meile abiks Bernsteini teoreem trigonomeetriliste polünoomide jaoks ja sellest veidi üldisem Szego võrratus. Tõestame ka Bernsteini teoreemi algebraliste polünoomide jaoks ning selle abil Markovi võrratuse.

4.1 Pidevusmoodul

Definitsioon. Funktsiooni $f \in C(\mathbb{T})$ *pidevusmoodul* on defineeritud seosega

$$\omega(f,t) = \sup_{0<h<t} \sup_{x\in\mathbb{T}} |\Delta_h^1(f,x)|,$$

kus $\Delta_h^1(f,x) = f(x+h) - f(x)$.

Ülesanne 4.1 . Leidke järgmiste funktsioonide pidevusmoodulid (kui funktsioon pole perioodiline, vaatame seda lõigus $[-\pi,\pi]$):

1. $f(x) = x$,
2. $f(x) = x^2$,
3. $f(x) = \sin x$,
4. $f(x) = e^x$.

Lause 4.1. *Pidevusmoodulil on järgmised omadused:*

(i) $\omega(f,t) \searrow 0$, *kui* $t \searrow 0$;

(ii) $\omega(f+g,t) \leqslant \omega(f,t) + \omega(g,t)$;

(iii) $\omega(f,t) \leqslant 2\|f\|$;

(iv) $\omega(f,nt) \leqslant n\omega(f,t)$;

(v) $\omega(f,t) \leqslant t\|f'\|$, *kui* $f \in C^1(\mathbb{T})$;

(vi) $\omega(f,\lambda t) \leqslant (\lambda+1)\omega(f,t)$, *kui* $\lambda > 0$.

Tõestus. Veenduge, et kehtivad omadused (i) – (v) ✠$_{4.2}$. Omadus (vi) järeldub omadustest (iv):

$$\omega(f,\lambda t) \leqslant \omega(f,\lfloor\lambda+1\rfloor t) \leqslant \lfloor\lambda+1\rfloor\omega(f,t) \leqslant (\lambda+1)\omega(f,t).$$

□

Pidevusmoodul annab parema iseloomustuse funktsioonile f kui diferentseeruvus. Funktsioon on ühtlaselt pidev parajasti siis, kui $\lim\limits_{t\searrow 0}\omega(f,t) = 0$ (veenduge! ✠$_{4.3}$).

Diferentseeruvate funktsioonide puhul hoopis $\omega(f,t) = \mathcal{O}(t)$, aga vahepeal on palju erinevad funktsioone. Näiteks kui $\omega(f,t) = \mathcal{O}(t^\alpha)$ mingi $0 < \alpha < 1$, siis funktsioon f pole üldjuhul diferentseeruv, aga ta on teatud mõttes siledam kui lihtsalt pidev funktsioon.

Edaspidi vaatame lähemalt konvolutsiooni tüüpi operaatoreid ehk operaatoreid kujul

$$L_n(f,x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t)K_n(t)dt = \int_{\mathbb{T}} f(t)K_n(x-t)dt,$$

kus $K_n \in \mathcal{T}_n$. Siis $L_n(f) \in \mathcal{T}_n$ iga $f \in C(\mathbb{T})$ korral (veendu selles! ✠). Funktsiooni K_n nimetatakse *tuumaks.*

Paneme tähele, et oleme juba varem selliseid operaatoreid näinud: konvolutsiooni tüüpi operaatorid on näiteks Fourier' rea osasummad s_n, mille tuumaks on Dirichlet' tuum ning Fejéri operaator σ_n koos Fejéri tuumaga.

Lemma 4.2. *Olgu tuum $K_n \in \mathcal{T}_n$ selline, et mingi arvu $\delta_n > 0$ ja konstandi $c_1 \in \mathbb{R}$ korral kehtivad järgmised tingimused:*

1) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} K_n(t)dt = 1$;

2) $K_n(t) = K_n(-t)$;

3) $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right)|K_n(t)| < c_1$.

Siis kehtib hinnang

$$\|f - L_n(f)\| \leqslant 2c_1\omega(f,\delta_n).$$

Tõestus. Tõestuseks tuleb panna tähele, et

$$\begin{aligned}
|L_n(f,x) - f(x)| &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt - f(x)\right| \\
&\overset{1)}{=} \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_n(t)dt\right| \\
&\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \omega(f,|t|)|K_n(t)|dt \\
&\overset{2)}{=} 2\int_0^\pi \omega(f,t)|K_n(t)|dt \\
&= 2\int_0^\pi \omega\left(f, \frac{t}{\delta_n}\delta_n\right)|K_n(t)|dt \\
&\leqslant 2\omega(f,\delta_n)\int_0^\pi \left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right)|K_n(t)|dt \\
&\overset{3)}{\leqslant} 2c_1\omega(f,\delta_n),
\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

4.2 Jacksoni teoreemid

Dirichlet' tuuma puhul kehtib $\displaystyle\int |D_n(t)|dt = \mathcal{O}(\ln n)$, seega lemma 4.2 tingimus 3) on rikutud. Fejéri tuum rahuldab selle lemma tingimusi konstandiga $\delta_n = \dfrac{\ln n}{n}$. Meie eesmärk on saada hinnang $\|f - L_n(f)\| \leqslant c\,\omega\Big(f, \dfrac{1}{n}\Big)$, mis annab lähendite kiirema koondumise kui Fejéri tuum.

Definitsioon. Funktsiooni J_n, mis on antud seosega

$$J_n(t) = \gamma_n \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}},$$

kus $\gamma_n = \dfrac{3}{2\pi n(2n^2+1)}$, nimetatakse *Jacksoni tuumaks*. Jacksoni tuuma võib ka panna kirja kujul

$$J_n(t) = \gamma_n^* F_n^2(t),$$

kus F_n on Fejéri tuum ja $\gamma_n^* = 4n^2\gamma_n$. Kuna Fejéri tuum on $(n-1)$. astme trigonomeetiriline polünoom, siis Jacksoni tuuma aste on $2n-2$. Operaatorit

$$j_n(f,x) = \int_{\mathbb{T}} f(x-t) J_n(t)dt$$

nimetame *Jacksoni operaatoriks*. Seega $j_n(f) \in \mathcal{T}_{2n-2}$ iga funktsiooni $f \in C(\mathbb{T})$ korral (vt ka joonist 4.1).

Lemma 4.3. *Jacksoni tuum rahuldab hinnangut*

$$\int_0^\pi \left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right) J_n dt \leqslant \frac{c}{(n\delta_n)^3} \leqslant c_1,$$

kui $\delta_n = \dfrac{1}{n}$.

Tõestus. Jagades integraali kaheks osaks ja kasutame võrratust

$$\left(\frac{t}{\delta} + 1\right) \leqslant 2 \max\left\{\frac{t}{\delta}, 1\right\},$$

saame, et

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right) J_n(t)dt &= \int_0^\delta \left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right) J_n(t)dt + \int_\delta^\pi \left(\frac{t}{\delta_n} + 1\right) J_n(t)dt \\ &\leqslant 2\int_0^\delta J_n(t)dt + 2\int_\delta^\pi \frac{t}{\delta} J_n(t)dt.\end{aligned}$$

Esimene integraal on tõkestatud tänu tingimusele $\int_{\mathbb{T}} J_n(t)dt = 1$. Teise integraali hindamiseks paneme tähele, et kuna $\sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{\pi}$ kehtib iga $t \in [0, \pi]$ korral (miks? ✠$_{4.4}$), siis saame hinnangu

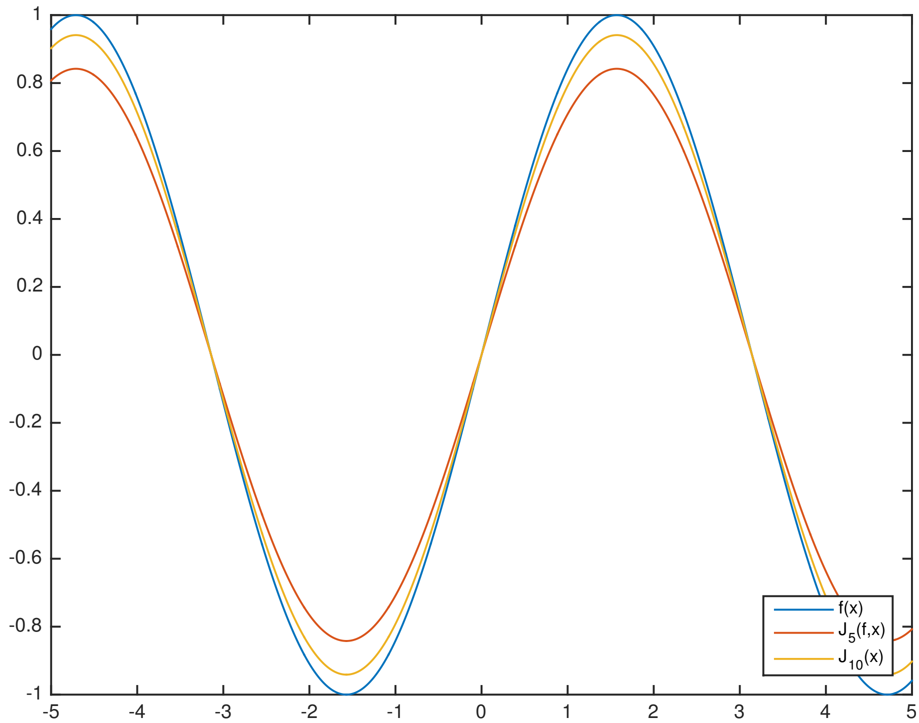
$$\begin{aligned}\int_\delta^\pi \frac{t}{\delta} J_n dt &= \gamma_n \int_\delta^\pi \frac{t}{\delta} \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt \\ &\leqslant \frac{c}{n^3} \int_\delta^\pi \frac{t}{\delta} \frac{1}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^4} \\ &= \frac{c'}{n^3 \delta} \int_\delta^\pi \frac{dt}{t^3} \\ &\leqslant \frac{c''}{(n\delta)^3}.\end{aligned}$$

□

Teoreem 4.4 (Jacksoni esimene teoreem)**.** *Olgu $f \in C(\mathbb{T})$. Kehtib hinnang*

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n) \leqslant c\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right).$$

TÕESTUS. Võtame lemmas 4.2 $K_n = J_m$, kus $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, et J_m aste oleks ülimalt n ning kasutame lemmat 4.3. □



Joonis 4.1: Funktsiooni $f(x) = \sin x$ lähendamine Jacksoni operaatori abil.

Jacksoni teine teoreem on esimese teoreemi analoog r korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide jaoks.

Teoreem 4.5 (Jacksoni teine teoreem)**.** *Iga funktsiooni $f \in C^r(\mathbb{T})$ korral kehtib hinnang*

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n) \leqslant \frac{c_r}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{c_r{}'}{n^r}\|f^{(r)}\|.$$

TÕESTUS. Olgu funktsioon t_n selline, et t_n' on parim lähend funktsioonile f', siis eelmise teoreemi kohaselt

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n) = \operatorname{dist}(f - t_n, \mathcal{T}_n) \leqslant \frac{c}{n}\|f' - t_n'\| = \frac{c}{n}\operatorname{dist}(f', \mathcal{T}_n).$$

Sama võttega jätkates saame, et iga r korral kehtib võrratus

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n) \leqslant \frac{c^r}{n^r}\operatorname{dist}\left(f^{(r)}, \mathcal{T}_n\right)$$

ja kasutades veelkord Jacksoni esimest teoreemi saame, et

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n) \leqslant \frac{c^r}{n^r}\operatorname{dist}\left(f^{(r)}, \mathcal{T}_n\right) \leqslant \frac{c^{r+1}}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right).$$

Paneme tähele, et see tõetus ei pruugi aga üldjuhul olla õige: parim lähend funktsioonile f' võib sisaldada konstantset liiget, t_n' aga mitte. Seda probleemi saab lahendada järgmiselt.

Iga funktsiooni $f \in C^1(\mathbb{T})$ korral kehtib $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f'(t)dt = 0$. Olgu $q_n = a_0 + \dots$ parim lähend funktsioonile f' ruumist $\mathcal{T}_n$. Siis

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} q_n(t)dt = a_0,$$

ja seega

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(q_n(t) - f'(t))dt$$

ning järelikult

$$\begin{aligned}
|a_0| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|q_n(t) - f'(t)|dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\|q_n - f'\|dt \\
&= \|q_n - f'\| = \operatorname{dist}(f', \mathcal{T}_n).
\end{aligned}$$

Võttes $t_n \in \mathcal{T}_n$ sellise, et $t_n' = q_n - a_0$, võime kirjutada

$$\|f' - t_n'\| = \|f' - (q_n - a_0)\| \leqslant \|f' - q_n\| + \|a_0\| \leqslant 2\operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n)$$

ning seda teades võime kasutada esialgset tõestust, lisades igal sammul kordaja 2. $\square$

4.3 Pöördteoreem

Jacksoni teoreemid annavad infot, kui kiire saab olla koondumine $L_n(f) \to f$ sõltuvalt funktsiooni f siledusest ja kuidas hinnata ülevalt funktsiooni kaugust alamruumist $\mathcal{T}_n$, siis pöörteoreem ütleb, kuidas hinnata funktsiooni pidevusmoodulit ülevalt teades funktsiooni kaugust alamruumidest $\mathcal{T}_n$.

Teoreem 4.6 (Szego võrratus)**.** *Olgu $n \geqslant 0$ täisarv. Iga elemendi $\xi \in \mathbb{T}$ ja polünoomi $t_n \in \mathcal{T}_n$ korral kehtib võrratus*

$$t_n'(\xi)^2 + n^2 t_n(\xi)^2 \leqslant n^2 \|t_n\|^2.$$

Tõestus. Kui $n = 0$, siis väide on ilmne. Seega eeldame, et $n \geqslant 1$. Kui $t_n'(\xi) = 0$, siis tõestatav võrratus ilmselt kehtib. Seega edaspidi olgu $t_n'(\xi) \neq 0$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $t_n'(\xi) > 0$ (vastasel korral võime t_n asendada funktsiooniga $-t_n$). Olgu $\gamma > \|t_n\|$ fikseeritud arv ja tähistame $\alpha = t_n(\xi)$. Defineerime funktsiooni $s_n(x) = \gamma \cos nx$. Nüüd, kuna $t_n'(\xi) \neq 0$, siis $|\alpha| = |t_n(\xi)| < \|t_n\|$ ja järelikult leidub üheselt määratud arv $\eta \in \Big(-\dfrac{\pi}{n}, 0\Big)$, mille korral $s_n(\eta) = \alpha$. Defineerime trigonomeetrilise polünoomi $\bar{t}_n(x) = t_n(x + \xi - \eta)$ (veenduda, et on tegemist trigonomeetrilise polünoomiga! ✠). Siis $\bar{t}_n(\eta) = t_n(\xi) = \alpha$ ja $\bar{t}_n'(\eta) = t_n'(\xi)$. Seega vaja on näidata, et

$$\bar{t}_n'(\eta)^2 + n^2 \bar{t}_n(\eta)^2 \leqslant n^2 \|t_n\|^2.$$

Paneme tähele, et

$$\operatorname{sgn} \bar{t}_n'(\eta) = \operatorname{sgn} t_n'(\xi) = \operatorname{sgn} s_n'(\eta) > 0. \tag{4.1}$$

Vaatleme trigonomeetrilist polünoomi $q_n(x) = s_n(x) - \bar{t}_n(x)$ ja olgu $x_k = \dfrac{\pi k}{n}$, kus $k = -n, -n+1, \ldots, n$. Paneme tähele, et iga $k = -n, -n+1, \ldots, n-1$ korral

$$\operatorname{sgn} q_n(x_k) = \operatorname{sgn} s_n(x_k) = -\operatorname{sgn} s_n(x_{k+1}) = -\operatorname{sgn} q_n(x_{k+1}) \neq 0,$$

kus esimene ja kolmas võrdus kehtivad, sest punktid x_k on parajasti s_n ekstreemumkohtadeks ja $\bar{t}_n$ väärtus igas punktis jääb rangelt nende ekstremaalsete väärtuste $-\gamma$ ja γ vahele ning teine võrdus ja mittevõrdus kehtivad, sest $\cos(k\pi) = -\cos((k+1)\pi) = \pm 1$. Seega igas intervallis (x_k, x_{k+1}), kus $k = -n, -n+1 \ldots, n-1$, leidub trigonomeetrilisel polünoomil q_n vähemalt üks nullkoht. Kuna aga neid intervalle on $2n$ tükki ning q_n aste on ülimalt n ja $q_n \not\equiv 0$, siis igas intervallis (x_k, x_{k+1}) leidub täpselt üks nullkoht (ja seega q_n aste on täpselt n). Intervallis $(x_{-1}, x_0) = \Big(-\dfrac{\pi}{n}, 0\Big)$ on selleks nullkohaks η, sest $q_n(\eta) = s_n(\eta) - \bar{t}_n(\eta) = s_n(\eta) - t_n(\xi) = \alpha - \alpha = 0$. Nüüd, kuna $q_n(0) = \gamma - \bar{t}_n(0) > 0$, siis $q_n'(\eta) > 0$. Tõepoolest, kui $q_n'(\eta) = 0$, siis oleks polünoomil q_n punktis η kahekordne juur, mis annaks kõigi intervallide (x_k, x_{k+1}) peale kokku vähemalt $2n+1$ juurt ja see oleks vastuolu, sest q_n aste on n ja seega on tal ülimalt $2n$ juurt. Kui $q_n'(\eta) < 0$, siis vahemikus $(\eta, 0)$ peaks q_n omama nullkohta ja seega kokku peaks tal olema vähemalt $2n+1$ nullkohta, mis on vastuolu. Seega $q_n'(\eta) > 0$ ja järelikult (4.1) põhjal

$$\begin{aligned} 0 < \bar{t}_n'(\eta) < s_n'(\eta) &= \gamma n \sin(n\eta) = n\sqrt{\gamma^2 - \gamma^2\cos^2(n\eta)} \\ &= n\sqrt{\gamma^2 - s_n(\eta)^2} = n\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2} = n\sqrt{\gamma^2 - \bar{t}_n(\eta)^2}, \end{aligned}$$

mis annab

$$\bar{t}_n'(\eta)^2 + n^2\bar{t}_n(\eta)^2 < \gamma^2 n^2.$$

Kuna see kehtib iga $\gamma > \|t_n\| = \|\bar{t}_n\|$ korral, siis järelikult

$$\bar{t}_n'(\eta)^2 + n^2\bar{t}_n(\eta)^2 \leqslant n^2\|t_n\|^2.$$

□

Sellest teoreemist järeldub vahetult Bernsteini võrratus.

Teoreem 4.7 (Bernsteini võrratus)**.** *Iga täisarvu $n \geqslant 0$ ja polünoomi $t_n \in \mathcal{T}_n$ korral kehtib võrratus*

$$\|t_n'\| \leqslant n\|t_n\|.$$

Bernsteini võrratus kehtib ka algebraliste polünoomide jaoks järgmisel kujul.

Teoreem 4.8 (Bernsteini võrratus)**.** *Iga $p_n \in \mathcal{P}_n[-1,1]$ korral kehtib hinnang*

$$|p_n'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|p_n\|_\infty$$

iga arvu $x \in (-1,1)$ korral.

Ülesanne 4.5. Tõestage Bernsteini võrratus algebraliste polünoomide jaoks ehk teoreem 4.8.

Järgmise kolme ülesande raames teeme eeltööd, et tõestada Markovi võrratus, mis näitab, kuidas algebralise polünoomi tuletise normi ülevalt hinnata tema enda normiga.

Ülesanne 4.6. Tõesta, et Tšebõšovi polünoomi T_n korral kehtib võrdus

$$1 - T_n(x)^2 = \frac{1}{n^2}\left(1-x^2\right)T_n'(x)^2$$

iga $x \in [-1,1]$ korral ning järeldada sellest, et

$$T_n'(t_k) = (-1)^{k+1}\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

kehtib iga $t_k = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1,\ldots,n$, korral.

Ülesanne 4.7. Näita, et $T'(1) = n^2$.

Ülesanne 4.8. Tõesta, et kui $p \in P_n[-1,1]$, $\|p\| \leqslant 1$, siis iga $x, |x| \geqslant \cos\dfrac{\pi}{2n}$, korral kehtib võrratus

$$|p'(x)| \leqslant T_n'(x).$$

Teoreem 4.9 (Markovi võrratus)**.** *Iga polünoomi $p \in P_n[-1,1]$ korral kehtib võrratus*

$$\|p'\| \leqslant n^2\|p\|.$$

Üldisemalt iga polünoomi $p \in P_n[a,b]$, $a<b$, ja positiivse täisarvu k korral kehtib võrratus

$$\left\|p^{(k)}\right\|_{[a,b]} \leqslant \frac{2^k n!^{2k}}{(k!)^{2k}(b-a)^k}\,\|p\|\,.$$

TÕESTUS. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\|p\|=1$. Vaadeldes vajadusel polünoomi p asemel polünoomi $q(x)=p(-x)$ piisab tõestada $|p(x)| \leqslant n^2$ iga $x \in [0,1]$ korral. Kui $x \geqslant \cos\frac{\pi}{2n}$, siis ülesande 4.8 põhjal

$$|p'(x)| \leqslant T_n'(x) \leqslant T_n'(1) = n^2,$$

kus iimase võrratuse juures kasutame teadmist, et T_n' kõik nullkohad on arvust $\cos\frac{\pi}{2n}$ vasakul pool ja T_n' pealiikme kordaja on positiivne, mis annab, et T_n' on lõigus $\left[\cos\frac{\pi}{2n},1\right]$ kasvav. Kui $x \in \left[0,\frac{\pi}{2n}\right]$, siis Bernsteini võrratuse põhjal

$$\begin{aligned}|p'(x)| &\leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{n}{1-\cos\frac{\pi}{2n}}\\ &= T_n'\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right) \leqslant T_n'(1)\\ &= n^2,\end{aligned}$$

nagu soovitud, kus esimene võrdus kehtib ülesande 4.6 põhjal □

Jacksoni teoreemid annavad meile informatsiooni sellest, kui hea on parim lähend ruumist $\mathcal{T}_n$, kui teame funktsiooni pidevusmoodulit. Pöördteoreemi abil saame aga ülevalt hinnata pidevusmooduli väärtust, kui teame funktsiooni kaugust alamruumidest $\mathcal{T}_n$.

Teoreem 4.10 (Pöördteoreem)**.** *Iga funktsiooni $f \in C(\mathbb{T})$ ja täisarvu $n \geqslant 1$ korral kehtib võrratus*

$$\omega\left(f,\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_k).$$

TÕESTUS. Antud tõestuse raames tähistagu $t_n \in \mathcal{T}_n$ parimat lähendit funktsioonile $f \in C(\mathbb{T})$. Iga $\delta > 0$ ja iga $m \in \mathbb{N}$ korral kehtib

$$\omega(f,\delta) \leqslant \omega(f-t_{2^m},\delta) + \omega(t_{2^m},\delta) \leqslant 2\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_{2^m}) + \delta\,\|t_{2^m}'\|\,,$$

kus oleme hindamisel kasutanud pidevusmooduli omadusi. Esiteks paneme tähele, et kuna $\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_k)$ on kahanev suurus k suhtes, siis

$$\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_{2^m}) = 2^{-m}\sum_{k=1}^{2^m}\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_{2^m}) \leqslant 2^{-m}\sum_{k=1}^{2^m}\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_{2^k}).$$

Seega jääb hinnata suurust $\|t'_{2^m}\|$. Selleks kasutame järgmisi seoseid:

$$\begin{aligned}\|t_{n+k} - t_n\| &\leqslant \|t_{n+k} - f\| + \|f - t_n\| \\ &= \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_{n+k}) + \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n) \\ &\leqslant 2 \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_n)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}2^{s-1} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_{2^s}) &= \sum_{k=2^{s-1}+1}^{2^s} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_{2^s}) \\ &\leqslant \sum_{k=2^{s-1}+1}^{2^s} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_k).\end{aligned}$$

Nüüd

$$\begin{aligned}\|t'_{2^m}\| &= \|t'_{2^m} - t'_{2^{m-1}} + t'_{2^{m-1}} - t'_{2^{m-2}} + \ldots + t'_2 - t'_0\| \\ &\leqslant \|t'_2 - t'_0\| + \sum_{s=1}^{m-1} \|t'_{2^{s+1}} - t'_{2^s}\| \\ &\leqslant 2\|t_2 - t_0\| + \sum_{s=1}^{m-1} 2^{s+1} \|t_{2^{s+1}} - t_{2^s}\| \\ &\leqslant 4 \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_0) + 2 \sum_{s=1}^{m-1} 2^{s+1} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_{2^s}) \\ &= 4 \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_0) + 8 \sum_{s=1}^{m-1} 2^{s-1} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_{2^s}) \\ &\leqslant 4 \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_0) + 8 \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{k=2^{s-1}+1}^{2^s} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_k) \\ &= 4 \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_0) + 8 \sum_{k=2}^{2^{m-1}} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_k) \\ &\leqslant 8 \sum_{k=0}^{2^{m-1}} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_k),\end{aligned}$$

kus kolmandal sammul kasutamise Bernsteini võrratust. Kombineerides saadud tulemusi, saame võrratuse

$$\omega(f, \delta) \leqslant 8(2^{-m} + \delta) \sum_{k=0}^{2^m} \operatorname{dist}(f, \mathcal{T}_k).$$

Valides $\delta = \dfrac{1}{n}$ ja $m \in \mathbb{N}$ nii, et $2^m \leqslant n < 2^{m+1}$, saame

$$\begin{aligned}\omega(f,\delta) &\leqslant 8\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{2^m}\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_k)\\ &\leqslant \frac{24}{n}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{dist}(f,\mathcal{T}_k),\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

4.4 Lähendamine algebraliste polünoomidega

Olgu $f \in C[-1,1]$, siis defineerime funktsiooni $\tilde{f}$ järgmiselt:

$$\tilde{f}(\theta) = f(\cos\theta).$$

Niimoodi defineeritud funktsioon on pidev hulgal $\mathbb{T}$, st $\tilde{f} \in C(\mathbb{T})$ (miks? ✠), seejuures tegemist on paarisfunktsiooniga. Kehtivad järgmised omadused:

1) $\|f\|_{C[-1,1]} = \|\tilde{f}\|_{C(\mathbb{T})}$;

2) kui $p_n \in \mathcal{P}_n$, siis $\tilde{p}_n$ on avaldatav kujul $\tilde{p}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\theta$;

3) kui $t_n \in \mathcal{T}_n$, $t_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\theta$, siis $t_n = \tilde{p}$, kus $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$;

4) $\omega(\tilde{f},t) \leqslant \omega(f,t)$.

Põhjendame ainult viimast omadust (veenduge, et kehtivad omadused 1) − 3) ✠$_{4.9}$):

$$\begin{aligned}\omega(\tilde{f},t) &= \sup_{|\theta-\xi|\leqslant t}\left|\tilde{f}(\theta)-\tilde{f}(\xi)\right| = \sup_{|\theta-\xi|\leqslant t}|f(\cos\theta)-f(\cos\xi)|\\ &\leqslant \sup_{|\cos\theta-\cos\xi|\leqslant t}|f(\cos\theta)-f(\cos\xi)|\\ &= \sup_{|x-y|\leqslant t}|f(x)-f(y)| = \omega(f,t).\end{aligned}$$

Nüüd saame tõestada esimese Jacksoni teoreemi ruumi $C[-1,1]$ jaoks.

Teoreem 4.11. *Kui $f \in C[-1,1]$, siis kehtib hinnang*

$$\operatorname{dist}(f,\mathcal{P}_n) \leqslant c\,\omega\!\left(f,\frac{1}{n}\right).$$

TÕESTUS. Olgu $t_n \in \mathcal{T}_n$ parim lähend funktsioonile $\tilde{f}$. Paneme tähele, et t_n on paarisfunktsioon. Tõepoolest, kui t_n ei oleks paarisfunktsioon, siis ka funktsioon $\dfrac{t_n(\theta)+t_n(-\theta)}{2}$ oleks parim lähend, teoreemi 3.9 kohaselt on aga parim lähend üheselt määratud. Järelikult leidub $p \in \mathcal{P}_n$ nii, et $t_n = \tilde{p_n}$. Nüüd kasutades Jacksoni teoreemi 4.4 saame

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{P}_n) \leqslant \|f - p_n\| = \|\tilde{f} - \tilde{p}_n\| = \operatorname{dist}(\tilde{f}, \mathcal{T}_n) \leqslant c\,\omega\Big(\tilde{f}, \frac{1}{n}\Big) \leqslant c\,\omega\Big(f, \frac{1}{n}\Big),$$

nagu soovitud. $\square$

Teoreem 4.12. *Olgu $f \in C^r[-1,1]$ ja $n \geqslant 2r$, siis*

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{P}_n) \leqslant c_r n^{-r} \omega\Big(f^{(r)}, \frac{1}{n}\Big).$$

Ülesanne 4.10. Tõestada teoreem 4.12.

PEATÜKK 5
Splainid

Siiamaani oleme vaadelnud funktsioonide lähendamist nii algebraliste kui ka trigonomeetriliste polünoomidega. Seejuures on lähendav polünoom olnud kogu lõigul sama. Siin peatükis tegeleme splainidega, mis on tükiti polünoomid. See tähendab, et lõik on jagatud alamlõikudeks ning igal alamlõigul on lähendav funktsioon mingi polünoom, aga erinevates alamlõikudes võib olla erinev polünoom. Sealjuures nõuame, et nende alamlõikude otspunktides oleksid täidetud teatud pidevusekriteeriumid.

5.1 Põhimõisted

Siin alapeatükis tutvume splainidega seotud põhiliste mõistetega, mida järgnevas kasutame.

Olgu $a, b \in \mathbb{R}$ ja $N, k \in \mathbb{N}$ fikseeritud, ning olgu

$$\Delta_* = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N, \tau_{N+1}),$$

kus $\tau_0 = a$, $\tau_{N+1} = b$ ning $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i = 0, \dots, N$. Hulga Δ_* elemente kutsume *sõlmedeks.*

Definitsioon. *Splainide ruumiks* $\mathcal{S}_k(\Delta_*)$ astmega k (ja defektiga 1) nimetatakse funktsioonide ruumi, mille elemendid $s \in \mathcal{S}_k$ rahuldavad tingimusi

1) $s \in \mathcal{P}_{k-1}$ igas lõigus $[\tau_i, \tau_{i+1}]$;

2) $s \in C^{k-2}(\tau_{i-1}, \tau_{i+1})$.

Üldisemalt saame vaadata splaine, mille defekt on $m < k$ – siis teine tingimus asendub tingimusega $s \in C^{k-1-m}(\tau_{i-1}, \tau_{i+1})$. Niimoodi saadakse ruumid $\mathcal{S}_{k,m}(\Delta_*)$. Kehtib sisaldavus

$$\mathcal{P}_{k-1} = \mathcal{S}_{k,0}(\Delta_*) \subset \mathcal{S}_{k,1}(\Delta_*) \subset \mathcal{S}_{k,2}(\Delta_*) \subset \dots \subset \mathcal{S}_{k,k}(\Delta_*) =: \mathcal{P}_{k-1}(\Delta_*),$$

kus $\mathcal{P}_{k-1}(\Delta_*)$ on tükiti polünoomide ruum, kus ei ole mingeid pidevuse nõudeid. Selle ruumi eeliseks on see, et saame lokaalselt lähendada funktsiooni igas intervallis eraldi, kahjuks aga need sellised splainid ei pruugi olla siledad. Sellepärast hakkame me edaspidi töötama ruumis $\mathcal{S}_k(\Delta_*) = \mathcal{S}_{k,1}(\Delta_*)$.

Näide 5.1. Esimest järku splainid on treppfunktsioonid. Teist järku splainid on murdjooned.

Definitsioon. Tähistame

$$x_+ = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{kui } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Olgu $t \in \mathbb{R}$ fikseeritud. Funktsiooni $(x-t)_+^{k-1}$ nimetatakse *lõigatud astmefunktsiooniks*. Siis

$$(x-t)_+^{k-1} = \begin{cases} (x-t)^{k-1}, & \text{kui } x \geqslant t, \\ 0, & \text{kui } x \leqslant t. \end{cases}$$

Näide 5.2. Lõigatud astmefunktsioon $(x-\tau_i)_+^{k-1}$ on k. astme splain (veenduge! ✠$_{5.1}$). Veelgi enam, kui lõigus $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ kehtib võrdus $s(x) = p(x)$ mingi polünoomi $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ korral, siis mingi arvu $a_i \in \mathbb{R}$ korral kehtib lõigus $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ võrdus $s(x) = p(x) + a_i(x-\tau_i)_+^{k-1}$ (veenduge! ✠$_{5.2}$). Kuid see tähendab, et ka lõigus $[\tau_{i-1}, \tau_{i+1}]$ kehtib $s(x) = p(x) + a_i(x-\tau_i)_+^{k-1}$.

Selles näitest järeldub järgmine tulemus.

Teoreem 5.3. *Iga splain $s \in \mathcal{S}_k(\Delta_*)$ on esitatav kujul*

$$s(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i(x-\tau_i)_+^{k-1}. \tag{5.1}$$

Täpsemalt, ruumi $\mathcal{S}_k(\Delta_*)$ baasiks on ükskõik millise ruumi P_{k-1} baasi ning lõigatud astmefunktsioonide ühend $\{(x-\tau_i)_+^{k-1}\}_{i=1}^{N}$ ühend. Järelikult $\dim(\mathcal{S}_k) = k + N$.

Ülesanne 5.3. Tõestage, et iga splain on avaldatav ka kujul

$$s(x) = q_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(\tau_i - x)_+^{k-1}. \tag{5.2}$$

Mis on seos a_i ja b_i vahel?
Ülesanne 5.4. Vaatame ruumi $\mathcal{S}_2(\Delta_*)$, kus sõlmedeks võtame $\tau_i = i$, $i = 0, \ldots, 4$ (seega $N = 3$). Pange kujudel (5.1) ja (5.2) kirja splainid s_i, $i = 2, 3$, mis rahuldavad tingimusi

$$s_i(\tau_j) = \delta_{ij}, \; j = 0, \ldots, 4.$$

Kahjuks on aga lõigatud astmefunktsioonid suure kandjaga ning protsessis $\tau_i \to \tau_{i+1}$ põhimõtteliselt muutuvad lineaarselt sõltuvaks, seega soovime leida parema baasi.

Definitsioon. Olgu $f \in C[a,b]$ ning olgu punktid $(t_0, \ldots, t_k)$ paarikaupa erinevad. *Diferentssuhe* $[t_0, \ldots, t_k]f$ on defineeritud kui sellise polünoomi pealiikme kordaja, mis interpoleerib funktsiooni f punktides t_i.

Kuna interpoleeriv polünoom on üheselt määratud, siis seda on ka diferentssuhe.

Märkus. Võib vaadata ka üldisemat juhtu, kus on kordsed punktid lubatud. Kui

$$(t_0, \dots, t_k) = (\underbrace{\tau_1, \dots, \tau_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\tau_l, \dots, \tau_l}_{m_l}),$$

siis *Langrange–Hermite'i interpolant* p funktsioonile f on polünoom, mis rahuldab tingimusi

$$p^{(s-1)}(\tau_i) = f^{(s-1)}(\tau_i), \ s = 1, \dots, m_i, \ i = 1, \dots, l, \ \sum_{i=1}^{l} m_i = k + 1$$

ning vastav diferentssuhe on selle polünoomi pealiikme kordaja.

Diferentssuhutel on järgmised omadused (kontrollige ✠$_{5.5}$):

1. Diferentssuhe avaldub ilmutatud kujul järgmiselt $[t_0, \dots, t_k]f = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(t_i)}{\omega'(t_i)}$, kus $\omega(x) = \prod_{i=0}^{k}(x - t_i)$;

2. Diferentssuhted rahuldavad rekurrentset seost

$$\begin{aligned} [t_i]f &= f(t_i), \\ [t_0, \dots, t_k]f &= \frac{[t_1, \dots, t_k]f - [t_0, \dots, t_{k-1}]f}{t_k - t_0}. \end{aligned}$$

3. Kehitb nn. Leibnizi reegel:

$$[t_0, \dots, t_k]fg = \sum_{i=0}^{k} [t_0, \dots, t_i]f[t_i, \dots, t_k]g.$$

Ülesanne 5.6. Tõestage, et $[t_0, \dots, t_k]f = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi)$ mingi $\xi \in [t_0, t_k]$ korral, kus $f \in C^k[t_0, t_k]$.

5.2 B-splainid

Olgu k, $n \in \mathbb{N}$ ning olgu meil antud sõlmed $\Delta = (t_1, t_2, \dots, t_{n+k})$, kus $t_1 \geqslant a$, $t_i < t_{i+1}$ ja $t_{n+k} \leqslant b$.

Definitsioon. Splaine, mis on defineeritud seostega

$$\begin{aligned} M_i(t) &= k[t_i, \dots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1}, \\ N_i(t) &= (t_{i+k} - t_i)[t_i, \dots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1}, \end{aligned}$$

$i = 1, \dots, n$, nimetatakse *B-splainideks.*

Ilmselt kehtib seos $M_i(t) = \dfrac{k}{t_{i+k} - t_i} N_i(t)$. Tegemist on tõepoolest splainiga – diferentssuhte arvutamise valemi kohaselt (veenduge! ✠$_{5.7}$)

$$M_i(t) = k \sum_{l=i}^{i+k} \frac{(t_l - t)_+^{k-1}}{\omega'(t_l)}.$$

Lause 5.4. *B-splainidel on kompaktne kandja. Täpsemalt,* $\operatorname{supp} M_i = [t_i, t_{i+k}]$.

TÕESTUS. Paneme tähele, et kui $t \geqslant t_{i+k}$, siis $(t_l - t)_+^{k-1} = 0$, kus $l = i, \dots, i+k$, ja järelikult $[t_i, \dots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} = 0$ (veenduge! ✠$_{5.8}$).

Analoogiliselt, kui $t \leqslant t_i$, siis $(t_l - t)_+^{k-1} = (t_l - t)^{k-1}$, kus $l = i, \dots, i+k$. Järelikult $[t_i, \dots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} = 0$ (veenduge! ✠$_{5.9}$). □

Lemma 5.5. *Kehtib võrdus*

$$[t_i, \dots, t_{i+k}]f = \frac{1}{k!} \int_a^b M_i(t) f^{(k)}(t) dt,$$

kus $f \in C^k[a, b]$.

TÕESTUS. Taylori valemist järeldub (kuidas? ✠$_{5.10}$), et funktsioon f avaldub kujul

$$f(x) = p_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b (x - t)_+^{k-1} f^{(k)}(t) dt,$$

kus $p_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}$. Võttes mõlemast poolest diferentssuhte, saame soovitud tulemuse. □

Öeldakse, et M_i on *Peano tuum*, mis esitab funktsiooni $[t_i, \dots, t_{i+k}]f$.

Lemma 5.6. *Suvaliste sõlmede* Δ *korral kehtivad järgmised võrdused:*

$$\int_a^b M_i(t) dt = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} N_i(t) = 1, \quad \text{kui } t \in [t_k, t_{n+1}].$$

TÕESTUS. Esimese võrduse tõestamiseks võtame lemmas 5.5 $f(x) = x^k$ (tehke ise läbi! ✠$_{5.11}$).

Teise võrduse tõestamiseks paneme tähele, et kasutades diferentssuhte omadusi saame

$$\begin{aligned} N_i(t) &= (t_{i+k} - t_i)[t_i, \dots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} \\ &= ([t_{i+1}, \dots, t_{i+k}] - [t_i, \dots, t_{i+k-1}])(\cdot - t)_+^{k-1} \end{aligned}$$

ja seega

$$\sum_{i=1}^{n} N_i(t) = ([t_{n+1}, \dots, t_{n+k}] - [t_1, \dots, t_k])(\cdot - t)_+^{k-1}.$$

Nüüd kui $t \geqslant t_k$, siis $(t_l - t)_+^{k-1} = 0$, kus $l = 1, \dots, k$. Järelikult $[t_1, \dots, t_k](\cdot - t)_+^{k-1} = 0$. Analoogiliselt kui $t \leqslant t_{n+1}$, siis $(t_l - t)_+^{k-1} = (t_l - t)^{k+1}$, kus $l = n + 1, \dots, n+k$. Järelikult $[t_{n+1}, \dots, t_{n+k}](\cdot - t)_+^{k-1} = 1$. □

Lause 5.7. *Tähistagu $M_{i,k}$ splaini M_i sõlmedega $t_i, \ldots, t_{i+k}$, siis kehtib rekurrentne seos*
$$\frac{1}{k}M_{i,k}(t) = \frac{1}{k-1}\left[\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}M_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_i}M_{i+1,k-1}(t)\right].$$

TÕESTUS. Tõestuseks võtame diferentssuhte võrdusest
$$(x-t)_+^{k-1} = (x-t)(x-t)_+^{k-2}$$
ja kasutame Leibnizi reeglit. Saame (kuidas? ✠$_{5.12}$)
$$\begin{aligned}\frac{1}{k}M_{i,k}(t) &= (t_i-t)[t_i,\ldots,t_{i+k}](x-t)_+^{k-2} + [t_{i+1},\ldots,t_{i+k}](x-t)_+^{k-2}\\ &= \frac{t_i-t}{t_{i+k}-t_i}([t_{i+1},\ldots,t_{i+k}](x-t)_+^{k-2} - [t_i,\ldots,t_{i+k}](x-t)_+^{k-2})\\ &\quad + [t_{i+1},\ldots,t_{i+k}](x-t)_+^{k-2}\\ &= \frac{1}{k-1}\left[\frac{t_i-t}{t_{i+k}-t_i}\left(M_{i+1,k-1}(t) - M_{i,k-1}(t)\right) + M_{i+1,k-1}(t)\right]\end{aligned}$$
ning see avaldis on samaväärne väites oleva avaldisega (tehke läbi ✠$_{5.13}$). □

Ülesanne 5.14. Tõestage, kasutades lauset 5.7 või teisiti, et kehtib seos
$$N_{i,k}(y) = \frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k-1}-t_i}N_{i+1,k-1}(t).$$

Märkus. Splainid $N_{i,1}$ on treppfunktsioonid kandajaga $[t_i, t_{i+1}]$. Täpsemalt,
$$N_{i,1}(t) = \begin{cases}1, & \text{kui } t \in [t_i, t_{i+1}],\\ 0, & \text{mujal.}\end{cases} = \chi_{[t_i,t_{i+1}]}(t)$$
(veenduge! ✠$_{5.15}$). Siit ja rekurrentsest seosest omakorda järeldub, et $N_{i,k} > 0$ oma kandjas.

Olgu meil sõlmed $\Delta = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ fikseeritud. Edaspidi kasutame järgmisi tähistusi.

1. $\omega_i(x) = (x-t_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-t_{i+k-1})$;
2. $\phi_i(x) = \dfrac{1}{(k-1)!}\omega_i(x)$;
3. $\ell_i(\cdot, t)$ olgu ($(k-1)$. astme) polünoom, mis interpoleerib funktsiooni $f(x) = (x-t)_+^{k-1}$ sõlmedes $t_i, \ldots, t_{i+k-1}$.

Lause 5.8 (Lee valem)**.** *Iga $x, t \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrdus*
$$\omega_i(x)N_i(t) = \ell_{i+1}(x,t) - \ell_i(x,t). \tag{5.3}$$

TÕESTUS. Fikseeritud $t \in \mathbb{R}$ korral on võrduse paremal poolel $(k-1)$. astme polünoom, mis võrdub nulliga punktides $t_{i+1}, \ldots, t_{i+k-1}$, seega mingi suurusest t sõltuva konstandi $c(t)$ korral

$$\ell_{i+1}(x,t) - \ell_i(x,t) = c(t)\omega_i(x).$$

Konstandi $c(t)$ väärtus on vaadeldava polünoomi pealiikme kordaja, ehk polünoomide $\ell_{i+1}(\cdot, t)$ ja $\ell_i(\cdot, t)$ pealiikmete kordajate vahe ehk vastavate diferentssuhete vahe. Need polünoomid interpoleerivad funktsiooni $(\cdot - t)_+^{k-1}$, seega

$$\begin{aligned} c(t) &= ([t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}] - [t_i, \ldots, t_{i+k-1}])(\cdot - t)_+^{k-1} \\ &= (t_{i+k} - t_i)[t_i, \ldots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} = N_i(t). \end{aligned}$$

□

Lause 5.9 (Marsdeni samasus)**.** *Fikseeritud $k, n \in \mathbb{N}$ ja sõlmede $\Delta = (t_i)_{i=1}^{n+k}$ korral kehtib võrdus*

$$(x-t)^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) N_i(t), \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{n+1}, \; x \in \mathbb{R}.$$

TÕESTUS. Summeerime Lee valemis (5.3) mõlemad pooled, saame

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) N_i(t) = \ell_{n+1}(x,t) - \ell_1(x,t).$$

Kui $t \geqslant t_k$, siis $\ell_1(t_i) = (t_i - t)_+^{k-1} = 0$, kui $i = 1, \ldots, k$, seega $\ell_1(x,t) = 0$. Analoogiliselt, kui $t \leqslant t_{n+1}$, siis $\ell_{n+1}(t_i) = (t_i - t)_+^{k-1} = (t_i - t)^{k-1}$, kui $i = n+1, \ldots, n+k$, seega $\ell_{n+1}(x,t) = (x-t)^{k-1}$, mis annabki soovitud tulemuse. □

Järeldus 5.10. *Polünoomide ruum $\mathcal{P}_{k-1}[t_k, t_{n+1}]$ moodustab ruumi* $\operatorname{span}(N_i)_{i=1}^{n}$ *alamruumi.*

TÕESTUS. Marsdeni samasuse võib kirjutada ümber järgmiselt:

$$\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) N_i(t)$$

(kontrollige! ✠). Diferentseerides seda avaldist $k-1-m$ korda, $m = 0, \ldots, k-1$, saame

$$\frac{(x-t)^m}{m!} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(k-1-m)}(x) N_i(t), \; m = 0, \ldots, k-1, \tag{5.4}$$

ehk

$$(t-x)^m = \sum_{i=1}^{n} (-1)^m m! \phi_i^{(k-1-m)}(x) N_i(t), \; m = 0, \ldots, k-1$$

(veenduge! ✠). Siit järeldub, et polünoomid $((t-a)^m)_{m=0}^{k-1}$ kuuluvad ruumi

$$\operatorname{span}(N_i)_{i=1}^n$$

ja seega

$$\mathcal{P}_{k-1} \subset \operatorname{span}(N_i)_{i=1}^n.$$

□

Märkus. Võttes võrduses (5.4) $m = 0$, saame (arvestades, et $\phi_i^{(k-1)} = 1$)

$$1 = \sum_{i=1}^n N_i(t),$$

mis annab alternatiivse tõestuse lausele 5.6.

Kui $m = 1$, siis $\phi_i^{(k-1-m)}(x) = \phi_i^{(k-2)}(x) = x - \dfrac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}$ (veenduge! ✠$_{5.16}$) ning saame seose

$$t - x = \sum_{i=1}^n (-1) \left[x - \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1} \right] N_i(t),$$

millest järeldub, et suvalise polünoomi $p \in \mathcal{P}_1$ korral kehtib

$$p(t) = \sum_{i=1}^n p(t_i^*) N_i(t), \;\; t \in [t_k, t_{n+1}] \tag{5.5}$$

(kuidas? ✠$_{5.17}$), kus $t_i^* = \dfrac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}$.

Järeldus 5.11. *Kui sõlmed* $(t_j)_{j=1}^{n+k}$ *on paarikaupa erinevad, siis lõigatud astmefunktsioonid* $(t-t_j)_+^{k-1}$ *kuuluvad ruumi* $\operatorname{span}(N_i)_{i=1}^n$ *lõigus* $[t_k, t_{n+1}]$.

TÕESTUS. Võtame võrduses (5.4) $x = t_j$ ning $m = k-1$. Paneme tähele, et $\phi_i(t_j) = 0$, kui $t_i < t_j < t_{i+k}$, ja seega

$$\frac{(t-t_j)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{i+k \leqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t) + \sum_{i \geqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t).$$

Kui $t \geqslant t_j$, siis esimene summa võrdub nulliga, sest N_i, $i + k \leqslant j$, kandjad on sellest punktist vasakul (selgitage ✠$_{5.18}$). Analoogiliselt, teine summa võrdub nulliga, kui $t \leqslant t_j$. Seega

$$\frac{(t-t_j)_+^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{i \geqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t), \;\; t \in [t_k, t_{n+1}]$$

(põhjendage! ✠$_{5.19}$). □

Teoreem 5.12. *Etteantud sõlmede Δ korral, moodustavad B-splainid $(N_i)_{i=1}^n$ baasi ruumis $\mathcal{S}_k(\Delta_*)$, kus*

$$\begin{aligned}\Delta_*\colon\ a = \tau_0 < \tau_1 \cdots < \tau_N < \tau_{N+1} = b,\\ \Delta\colon t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{k-1} \leqslant a = t_k < t_{k+1} \cdots < t_n < t_{n+1} = b \leqslant t_{n+2} \leqslant \ldots \leqslant t_{n+k}.\end{aligned}$$

TÕESTUS. Oleme just tõestanud, et iga element ruumi $\mathcal{S}_k(\Delta)$ baasist (vt teoreemi 5.3) kuulub ruumi $\operatorname{span}(N_i)_{i=1}^n$. Kuna ruumide $\mathcal{S}_k(\Delta)$ ja $\operatorname{span}(N_i)_{i=1}^n$ dimensioonid on samad (ning võrdsed arvuga $N+k$), siis B-splainid moodustavad samuti baasi. $\square$

5.3 Kaasfunktsionaalid

Lemma 5.13. *Iga polünoomi $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ saab avaldada B-splainide kaudu järgmiselt:*

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p,x) N_i(t),\ \ t \in [t_k, t_{n+1}],$$

kus funktsionaalid λ_i on antud seosega

$$\lambda_i(p) = \lambda_i(p,x) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m p^{(m)}(x) \phi_i^{(k-1-m)}(x),\ \ x \in \mathbb{R}.$$

TÕESTUS. Kasutades Taylori valemit koos seosega (5.4), saame

$$p(t) = \sum_{m=0}^{k-1} p^{(m)}(x) \frac{(t-x)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{k-1} p^{(m)}(x) \sum_{i=1}^{n} \phi_i^{(k-1-m)}(x) N_i(t).$$

Vahetades summeerimisjärjekorra, saame, et

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{m=0}^{k-1} p^{(m)}(x) \phi_i^{(k-1-m)}(x) \right] N_i(t),$$

nagu soovitud. $\square$

Definitsioon. Funktsionaale $\lambda_i\colon C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, mis on defineeritud eeskirjaga

$$\lambda_i(f,x) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m f^{(m)}(x) \phi_i^{(k-1-m)}(x),\ \ x \in \mathbb{R},$$

nimetatakse *de Boor'i funktsionaalideks* ehk *kaasfunktsionaalideks*.

Ülesanne 5.20. Leidke de Boor'i funktsionaalid järgmiste funktsioonide jaoks, kui $k = 3$:

(a) $f(x) = x + 1$;

(b) $f(x) = x(1 - x)$;

(c) $f(x) = \ln(x + 1)$;

(d) $f(x) = \sin x$;

(e) $f(x) = x^2$;

(f) $f(x) = e^{2x}$.

Näide 5.14. Kui $p(x) = 1$, siis $\lambda_i(p, x) = p(x)\phi_i^{(k-1)}(x) = 1$ ning järjekordselt saame võrduse $\sum_{i=1}^{n} N_i(t) = 1$.

Näide 5.15. Kui $p \in \mathcal{P}_1$, siis kehtib

$$\lambda_i(p, x) = p(x)\phi_i^{(k-1)}(x) - p'(x)\phi_i^{(k-2)}(x) = p(x) - p'(x)(x - t_i^*) = p(t_i^*),$$

kus $t_i^* = \dfrac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}$. Sellega on veelkord tõestatud võrdus (5.5).

Lemma 5.16. *Iga polünoomi $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ korral funktsionaalid $(\lambda_i)_{i=1}^n$, ei sõltu argumendi x valikust. Täpsemalt,*

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p, \xi) N_i(t), \ \forall \xi.$$

TÕESTUS. Kuna B-splainid N_i, $i = 1, \ldots, n$, moodustavad baasi ruumis $\mathcal{S}_k(\Delta)$, siis iga polünoomi kordajad baasi suhtes on üheselt määratud. □

Teoreem 5.17. *Iga splain $s \in \mathcal{S}_k(\Delta)$ on avaldatav kujul*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(s, \xi_i) N_i(t) \ \forall \xi_i \in [t_i, t_{i+k}]. \tag{5.6}$$

TÕESTUS. Olgu $\xi_i \in [t_i, t_{i+k}]$, siis $\xi_i \in [t_l, t_{l+1}]$ mingi $l \in \{i, \ldots, i + k - 1\}$ korral. Olgu $p_j \in \mathcal{P}_{k-1}$ polünoom, mis langeb lõigus kokku $[t_l, t_{l+1}]$ splainiga N_j, siis lemma 5.16 tõttu

$$\lambda_i(N_j, \xi_i) = \lambda_i(p_j, \xi_i) = \lambda_i(p_j)$$

ning

$$\begin{aligned} p_j(t) &= \sum_{i=k-l+1}^{l} \lambda_i(p_j) N_i(t) = \sum_{i=k-l+1}^{l} \lambda_i(p_j) p_i(t) \\ &= \sum_{i=k-l+1}^{l} \lambda_i(p_j) p_i(t), \ t \in [t_l, t_{l+1}], \end{aligned}$$

kus esimene võrdus tuleb sellest, et ülejäänud B-splainide kandjad ei sisalda punkte lõigust (t_l, t_{l+1}). Kuna polünoomid $p_i = N_i\big|_{[t_l, t_{l+1}]}$ on lineaarselt sõltumatud igal lõigul $[t_l, t_{l+1}]$ (miks? ✠), siis võrdusest

$$p_j(t) = \sum_{i=k-l+1}^{l} \lambda_i(p_j) p_i(t)$$

järeldub, et $\lambda_i(N_j, \xi_i) = \lambda_i(p_j) = \delta_{ij}$. □

Lemma 5.18. *Funktsionaalid λ_i on tõkestatud. Täpsemalt,*

$$|\lambda_i(s)| \leqslant d_k \|s\|_{C[t_i,t_{i+k}]}.$$

TÕESTUS. Olgu $[t_l, t_{l+1}]$ intervalli $[t_i, t_{i+k}]$ suurim alamintervall, siis $\dfrac{t_{i+k}-t_i}{t_{l+1}-t_l} \leqslant k$. Kehtib võrratus

$$|\lambda_i(s,x)| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} \left|s^{(m)}(x)\right| \cdot \left|\phi_i^{(k-1-m)}(x)\right|, \ x \in [t_l, t_{l+1}].$$

Esimene tegur $\left|s^{(m)}(x)\right|$ on lõigus $[t_l, t_{l+1}]$ m. astme tuletis polünoomist, mille aste on $k-1$. Rakendame Markovi võrratust (vt teoreemi 4.9):

$$\left|s^{(m)}(x)\right| \leqslant \frac{c'_m}{(t_{l+1}-t_l)^m} \|s\|_{C[t_l,t_{l+1}]}.$$

Teise teguri hindamiseks paneme tähele, et tegemist on m. astme polünoomiga, mille kõik nullkohad η_j asuvad lõigus $[t_i, t_{i+k}]$ (miks? ✠) ning mille pealiikme kordaja on $c_m = \dfrac{1}{m!}$. Järelikult,

$$\left|\phi_i^{(k-1-m)}(x)\right| = c_m|(x-\eta_1)\cdot \dots \cdot (x-\eta_m)| \leqslant c_m|t_{i+k}-t_i|^m.$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\begin{aligned}
|\lambda_i(s,x)| &\leqslant \sum_{m=0}^{k-1} \frac{c'_m}{(t_{l+1}-t_l)^m} \|s\|_{C[t_l,t_{l+1}]} c_m |t_{i+k}-t_i|^m \\
&= \|s\|_{C[t_i,t_{i+k}]} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{c'_m c_m |t_{i+k}-t_i|^m}{(t_{l+1}-t_l)^m} \\
&= \|s\|_{C[t_i,t_{i+k}]} \sum_{m=0}^{k-1} c'_m c_m k^m \\
&\leqslant d_k \|s\|_{C[t_i,t_{i+k}]},
\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Kuna selgus, et tegemist on tõkestatud funktsionaalidega, saame tänu Hahn-Banach teoreemile neid jätkata ruumile $C[t_i, t_{i+k}]$ nii, et norm ei kasva. Edaspidi tähistame neid jätke samuti sümboliga λ_i.

5.4 Kvaasi-interpoleerimine

Definitsioon. Olgu $k, n \in \mathbb{N}$ ning $\Delta = (t_i)_{i=1}^{n+k}$. Operaatorit $Q\colon C[a,b] \to \mathcal{S}_k(\Delta)$, mis on antud seosega

$$Q(f,t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f) N_i(t),$$

nimetatakse *kvaasi-interpolandiks*.

Ülesanne 5.21. Näidake, et selline operaator Q on lineaarne projektor.

Tavaline interpolant lähendab funktsiooni väärtusi etteantud punktides, mida aga teeb kvaasi-interpolant? Teame, et B-splainid moodustavad ruumi $\mathcal{S}_k(\Delta)$ baasi. Kui $s(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(t)$, siis valemist (5.6) näeme, et $\lambda_i(s) = a_i$ ja seega

$$\lambda_i(Q(f)) = \lambda_i(f), \; i = 1, \ldots, n.$$

See tähendab, et operaator Q ei interpoleeri funktsiooni f konkreetsetes sõlmedes, vaid hoopis säilitab informatsiooni sellest, mis väärtused on kaasfunktsionaalidel funktsiooni f peal.

Edaspidi tähistame $I_j^* = [t_{j+1-k}, t_{j+k}]$.

Lemma 5.19. *Operaator Q rahuldab hinnangut*

$$\|Q(f)\|_{C[t_j,t_{j+1}]} \leqslant d_k \|f\|_{C(I_j^*)}.$$

TÕESTUS. Tõestuseks kasutame järgmisi fakte: (1) B-splainid on lõpliku kandjaga, (2) B-splainid moodustavad ühelahutuse (ehk on mittenegatiivsed ja summa igas punktis on 1), (3) kaasfunktsionaalid on ühtlaselt tõkestatud. Kui $t \in [t_j, t_{j+1}]$, siis

$$\begin{aligned} |Q(f,t)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(f) N_i(t)\right| \overset{(1)}{=} \left|\sum_{i=j+1-k}^{j} \lambda_i(f) N_i(t)\right| \\ &\leqslant \max_{j+1-k \leqslant i \leqslant j} |\lambda_i(f)| \sum_{i=j+1-k}^{j} \lambda_i(f) N_i(t) \\ &\overset{(2)}{\leqslant} \max_{j+1-k \leqslant i \leqslant j} |\lambda_i(f)| \\ &\overset{(3)}{\leqslant} d_k \|f\|_{C[t_{ji},t_{i+k}]} = d_k \|f\|_{C(I_j^*)}, \end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Teoreem 5.20. *Kehtib hinnang*

$$\|f - Q(f)\|_{C[t_j,t_{j+1}]} \leqslant c_k \operatorname{dist}(f, \mathcal{S}_k(\Delta)) \leqslant c_k^* |I_j^*|^k \|f^{(k)}\|_{C(I_j^*)}.$$

TÕESTUS. Lebesgue'i võrratus (2.1) koos eelmise lemmaga annab lokaalse hinnangu

$$\|f - Q(f)\|_{C[t_j,t_{j+1}]} \leqslant (\|Q\| + 1) \operatorname{dist}(x, \mathcal{S}_k(\Delta)) \leqslant (d_k + 1) \operatorname{dist}(x, \mathcal{S}_k(\Delta)).$$

Viimane võrratus $c_k^* |I_j^*|^k \|f^{(k)}\|_{C(I_j^*)}$ jaoks saadakse skaleerides Jacksoni hinnangut (kuidas? ✠). □

Järeldus 5.21. *Kehtib võrratus*

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{S}_k(\Delta)) \leqslant c_k \max_{i=1,\ldots,n} |t_{i+1} - t_i|^k \|f^{(k)}\|_{\infty}.$$

TÕESTUS. Paneme tähele, et kui $[t_l, t_{l+1}]$ intervalli I_j^* suurim alamintervall, siis $\dfrac{|I_j^*|}{t_{l+1} - t_l} \leqslant k$ ja seega järeldub väide eelmisest teoreemist. □

5.5 Splainidega interpoleerimine

Lähendusteooria üks põhilisi probleeme on interpoleerimisülesande lahendamine: Kui on antud sõlmed x_i ja väärtused y_i, $i = 1, \dots, n$, leida funktsioon f nii, et

$$f(x_i) = y_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Funktsioonile f võib seada erinevaid nõudeid, näiteks:

1. Võime nõuda, et funktsioon f kuuluks teatud n-mõõtmelisse ruumi, näiteks $\mathcal{S}_k(\Delta)$ või $\mathcal{P}_n$;
2. Võime nõuda, et funktsioon kuuluks mingisse suuremasse (dimensiooni mõttes) ruumi, aga rahuldaks lisaks teisi nõudeid, näiteks minimiseeriks teatud normi (nt $\|f^{(m)}\|_p$);

Edaspidi uurime esimest lähenemist. Olgu meil antud $k, n \in \mathbb{N}$, sõlmed Δ ning punktid $(x_i)_{i=1}^n$ ja $(y_i)_{i=1}^n$. Otsime splaini $s \in \mathcal{S}_k(\Delta)$ nii, et

$$s(x_i) = y_i, \ i = 1, \dots, n.$$

Teame, et iga splain $s \in \mathcal{S}_k$ on avaldatav kujul $s(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j N_j(t)$. Tähistame $A_x = (N_j(x_i))_{i,j=1}^n$, $a = (a_j)_{j=1}^n$ ning $y = (y_j)_{j=1}^n$, siis meie ülesanne taandub võrrandisüsteemi $A_x a = y$ lahendamisele tundmatu a suhtes. Lineaaralgebrast teame, et see süsteem on lahenduv, seejuures üheselt, parajasti siis, kui maatriks A_x on pööratav.

Lemma 5.22. *Kui maatriks A_x on pööratav, kus sõlmed x_i on järjestatud kasvavalt, siis maatriksi A_x diagonaal on positiivne, st $N_i(x_i) > 0$. Teisisõnu, sõlmed kuuluvad B-splainide kandjasse ehk*

$$t_i < x_i < t_{i+k}, \quad i = 1, \dots, n.$$

TÕESTUS. Oletame vastuväiteliselt, et mingi $m \in \{1, \dots, n\}$ korral kehtib $t_{m+k} \leqslant x_m$ või $x_m \leqslant t_m$. Kui $t_{m+k} \leqslant x_m$, siis

$$t_{1+k} < \dots < t_{m-1+k} < t_{m+k} \leqslant x_m < x_{m+1} < \dots < x_n,$$

ja seega $N_j(x_i) = 0$, kui $j \leqslant m \leqslant i$. Järelikult on maatriksil A_x järgmine kuju:

$$A_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & \dots a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kuid selle maatriksi m esimest veergu on lineaarselt sõltuvad ja seega see maatriks ei saa olla pööratav.

Kui $x_m \leqslant t_m$, siis on tõestus analoogiline (teha ise läbi ✠$_{5.22}$) $\square$

Paneme tähele, et tõestuses kasutasime vaid seda, et jadad x_i ja t_i on kasvavad, seega kehtib ka järgmine üldisem tulemus.

Järeldus 5.23. *Kui maatriks $A = N_{j_m}(x_{i_m})$ on pööratav, kus j_m ja x_{i_m} on kasvavad, siis $N_{j_m}(x_{i_m}) > 0$ iga indeksi m korral.*

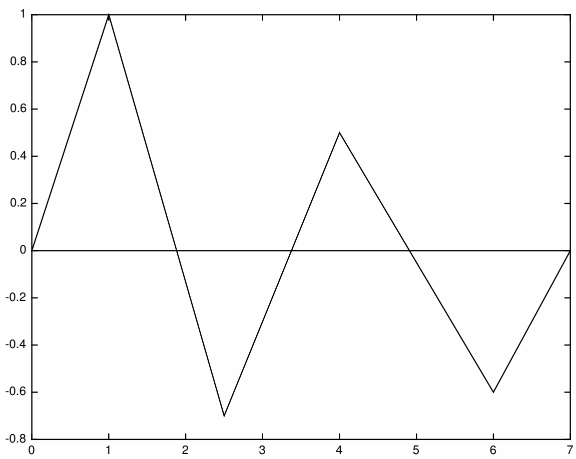
Tähistagu $\nu[s]$ splaini s erinevate nullkohtade arv ning $\mu[s]$ splaini s märgivahetuste arvu.

Lemma 5.24. *Olgu sõlmed $(t_i)_{i=1}^n$ järjestatud kasvavalt ning olgu $s = \sum_{i=p}^{p+r} a_i N_i$. Vahemikus (t_p, t_{p+k+r}) kehtib hinnang $\nu[s] \leqslant r$.*

TÕESTUS. Olgu splainil s erinevate nullkohtade arv q. Kuna $s(t_p+) = s(t_{p+k+r}-) = 0$, siis Rolle'i teoreemi kohaselt vahetab funktsioon s' vähemalt $q+1$ korda märki (miks? ✠$_{5.23}$). Nüüd $s'(t_p+) = s'(t_{p+k+r}-) = 0$ (miks? ✠$_{5.24}$) ja analoogiliselt funktsioon vahetab s'' vähemalt $q+2$ korda märki. Niimoodi jätkates saame, et

$$\mu[s^{(k-2)}] \geqslant q + (k-2).$$

Teiselt poolt, $s^{(k-2)}$ on murdjoon (vt ka joonist 5.1), mis koosneb $k+r$ osast,



Joonis 5.1: Näide funktsioonist $s^{(k-2)}$, kui $k+r=5$.

seejuures

$$s^{(k-2)}(t_p+) = s^{(k-2)}(t_{p+k+r}-) = 0,$$

seega

$$\mu[s^{(k-2)}] \leqslant k + r - 2.$$

Kombineerides neid võrratusi saame, et $\nu[s] = q \leqslant r$, nagu soovitud. $\square$

Selle tulemuse abil saame tõestada lemma 5.22 pöördtulemuse.

Teoreem 5.25 (Schoenberg-Whitney). *Olgu sõlmed $(x_i)_{i=1}^n$ ja $(t_i)_{i=1}^{n+k}$ järjestatud kasvavas järjekorras. Maatriks A_x on pööratav parajasti siis, kui $N_i(x_i) > 0$ iga $i = 1, \dots, n$.*

TÕESTUS. Tarvilikkus on meil juba tõestatud lemmas 5.22. Piisavuse jaoks piisab näidata, et võrdusest $A_x a = 0$ järeldub võrdus $a = 0$ (miks? ✠$_{5.25}$). Selle jaoks omakorda piisab näidata, et kui $s(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i N_i(x)$, siis kehtib implikatsioon

$$s(x_i) = 0,\ i = 1, \dots, n \ \Rightarrow \ s \equiv 0.$$

Tõepoolest, kuna B-splainid moodustavad baasi, siis siit järeldub, et $a = 0$.

Oletame vastuväiteliselt, et $s \not\equiv 0$. Siis leidub intervall $I = (t_p, t_{p+k+r})$ nii, et selles intervallis pole splain s samaselt null, aga intervallides $[t_{p-1}, t_p]$ ja $[t_{p+k+r}, t_{p+k+r+1}]$ on samaselt null. Siis intervallis I kehtib $s = \sum_{i=p}^{p+r} a_i N_i(x)$. Nüüd intervall I sisaldab $r + 1$ splaini kandjad $(N_p, \dots, N_{p+r})$, seega $s(x_i) = 0$, seejuures $x_i \in \operatorname{supp} N_i$, mis on vastuolus lemmaga 5.24. □

Definitsioon. Olgu $x = (x_i)_{i=1}^n$ paarikaupa erinevad kasvavalt järjestatud sõlmed. Defineerime projektori $P_x\colon C[a, b] \to \mathcal{S}_k(\Delta)$, mis seab igale funktsioonile $f \in C[a, b]$ üheselt määratud splaini $P_x(f) = s$, mille korral $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Projektorit P nimetatakse *interpoleerimisprojektoriks*.

Kuna operaator P_x on lineaarne projektor, saame Lebesgue'i võrratusest

$$\operatorname{dist}(f, \mathcal{S}_k(\Delta)) \leqslant \|f - P_x(f)\| \leqslant (1 + \|P_x\|) \operatorname{dist}(f, \mathcal{S}_k(\Delta)).$$

Kui norm $\|P_x\|$ on väike, siis P_x on hea interpoleerimismeetodi kandidaat. Üritame nüüd hinnata suurust $\|P_x\|$

Lemma 5.26. *Olgu $A_x = (N_j(x_i))_{i,j=1}^n$ selline, et $N_i(x_i) > 0$. Siis $\|P_x\|_{L_\infty} \leqslant \|A_x^{-1}\|_{\ell_\infty}$.*

TÕESTUS. Olgu $P_x(f) = s = \sum_{j=1}^{n} a_j N_j$. Kuna $\sum_{i=1}^{n} N_i(x) = 1$, siis

$$\|P_x(f)\|_{L_\infty} = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j N_j \right\|_{L_\infty} \leqslant \|a\|_{\ell_\infty}.$$

Paneme tähele, et $A_x a = s\big|_x = f\big|_x$ ehk $a = A_x^{-1} f\big|_x$, millest saame, et

$$\begin{aligned} \|P_x(f)\|_{L_\infty} &\leqslant \|a\|_{\ell_\infty} = \left\|A_x^{-1} f\big|_x\right\|_{\ell_\infty} \\ &\leqslant \left\|A_x^{-1}\right\|_{\ell_\infty} \|f\big|_x\|_{\ell_\infty} \\ &\leqslant \left\|A_x^{-1}\right\|_{\ell_\infty} \|f\|_{L\infty} \end{aligned}$$

ja järelikult $\|P_x\| \leqslant \|A_x^{-1}\|_{\ell_\infty}$, nagu soovitud. □

Seega saame projektori P_x normi hindamiseks kasutada maatriksi A_x^{-1} normi.

Näide 5.27. Olgu $t_i = i$, $k = 3$ ning $x_i = t_{i+3/2}$, st interpoleerimine toimub sõlmede vahel. Siis

$$N_{i-1}(x_i) = \frac{1}{8},\ N_i(x_i) = \frac{6}{8},\ N_{i+1}(x_i) = \frac{1}{8}.$$

Siis maatriks A_x on tridiagonaalne ning rahuldab hinnangut $\|A_x^{-1}\| \leqslant 2$. Samas, kui võtame $x_i = t_i$ (interpoleerimine sõlmedes), siis

$$N_i(x_i) = N_{i+1}(x_i) = \frac{1}{2}$$

ning

$$A_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies A_x^{-1} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja seega $\|A_x^{-1}\| = 2n$.

Definitsioon. Öeldakse, et maatriks A on *rangelt positiivne*, kui iga reaindeksi i korral

$$|a_{ii}| - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| = t_i \geqslant \gamma > 0.$$

Lemma 5.28. *Kui maatriks A on rangelt positiivne, siis kehtib hinnang*

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\gamma}.$$

Ülesanne 5.26. Tõestage lemma 5.28.

Näide 5.29. Olgu $(t_i)_{i=1}^{n+k}$, $t_i = i$, ning $k = 6$. Võtame $x_i = t_{i+3}$, siis saame

$$\begin{aligned} &N_{i-2}(x_i) = \frac{1}{120},\ N_{i-1}(x_i) = \frac{26}{120},\ N_i(x_i) = \frac{66}{120}, \\ &N_{i+1}(x_i) = \frac{26}{120},\ N_{i+2}(x_i) = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

ja seega

$$A_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 66 & 26 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 26 & 66 & 26 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 26 & 66 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 26 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 26 & 1 \end{pmatrix}$$

Siit järeldub, et $\|P_x\| \leqslant \|A_x^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\frac{12}{120}} = 10$.

Kahjuks aga kui sõlmed ei ole ühtlased, siis ei pruugi kollokatsioonimaatriks A_x olla rangelt positiivne.

Definitsioon. Öeldakse, et maatriks A on *totaalselt positiivne*, kui selle maatriks kõik miinorid on mittenegatiivsed.

Teoreem 5.30 (Karlin)**.** *Suvaliste x ja y ning sõlmede Δ korral on kollokatsiooni maatriks $A_x = (N_j(x_i))$ totaalselt positiivne.*

Tähistagu $A(i,j)$ maatriksi A elementi a_{ij} ning A ning $A(\backslash i, \backslash j)$ maatriksi A miinorit, mis on moodustatud jättes välja i. rea ja j. veeru.

Lemma 5.31. *Olgu A pööratav ja totaalselt positiivne, siis maatriks A^{-1} on "malelaua" struktuuriga, st*

$$(-1)^{i+j} A^{-1}(i,j) \geqslant 0.$$

Lisaks, kui vektor a on selline, et $Aa = [-1, 1-1, \dots]^T$, siis $\|A^{-1}\|_\infty = \|a\|_\infty$.

TÕESTUS. Crameri reegli kohaselt

$$A^{-1}(i,j) = (-1)^{i+j} \frac{\det A^{-1}(\backslash i, \backslash j)}{\det A},$$

kus eelduse kohaselt on mõlemad determinandid positiivsed, millest järeldubki "malelaua" struktuur. Lemma teine väide kehtib suvalise "malelaua" struktuuriga maatriksi korral, nimelt

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_\infty &= \max_i \sum_j |A^{-1}(i,j)| = \max_i \sum_j A^{-1}(i,j)(-1)^{i+j} \\ &= \max_i (-1)^i a_i = \|a\|_\infty, \end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Kokkuvõttes oleme tõestanud järgmise tulemuse.

Lemma 5.32. *Kui $s_x = \sum_{j=1}^{n} a_j^x N_j$ on selline, et $s_x(x_i) = (-1)^i$, siis $\|s\| \leqslant \|a^x\|$.*

Nüüd soovime etteantud sõlmede Δ korral leida x^*, mis minimiseeriks suuruse P_x, st

$$\|P_{x^*}\| = \min_x \|P_x\|.$$

Kuna meil puuduvad vahendid peale lemma 5.32, siis edaspidi üritame minimiseerida normi $\|a^x\|$. See viib meid Tšebõšovi polünoomi analoogini.

Definitsioon. Splaini $T_* \in \mathcal{S}_k(\Delta)$ nimetatakse *Tšebõšovi splainiks*, kui T_* ostsilleerib -1 ja 1 vahel maksimaalne arv kordi.

Teoreem 5.33. *Tšebõšovi splain T_* on üheselt määratud splain, mis minimiseerib suuruse $\|a^x\|$.*

Selle teoreemi tõestamisel on meie põhiliseks abivahendiks teatud märgi muutuste arvu leidmine. Kui $a = (a_i)_{i=1}^n$ on reaalarvude korteež, siis sümboliga $S(a)$ tähistame märgi muutuste arvu selles korteežis. Kui a sisaldab nulle, siis tähistagu $S^-(a)$ minimaalset võimalikku märgimuutute arvu, mida võime saada, asendades nulle nullist erinevate arvudega. Suurust $S^-(a)$ kutsutakse tugevate märgimuutude arvuks. Kui eemaldame korteežist a nullid, siis saadud korteeži a_0 korral kehtib $S(a_0) = S^-(a)$. Näiteks

$$S^-(-1, 0, -1, 0, -1) = 0,\ S^-(-1, 0, 1, 0, -1) = 2.$$

Kui f on lõigus määratud funktsioon, defineerime

$$S^-(f) = \sup_{x_1 < \cdots < x_r} S^-(f(x_1), \ldots, f(x_r)).$$

Järgmine tulemus seob omavahel tugevate märgimuutude arvu ja splaini koefitsendid.

Lause 5.34. *Kui* $s \in \mathcal{S}_k(\Delta)$, $s = \sum_{j=1}^{n} a_j N_j$, *siis kehtib võrratus*

$$S^-(s) \leqslant S^-(a).$$

Sellest lausest järeldub muu hulgas, et igal splainil saab olla ülimalt $n-1$ tugevat märgivahetust, ning sel juhul $\operatorname{sgn} a_j = -\operatorname{sgn} a_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Teoreemi 5.33 tõestame kasutades minimiseerimisprotseduuri, mida kutsutakse Remezi algoritmiks .

Remezi algoritm. Alustuseks võtame suvalise $x = (x_1, \ldots, x_n)$, ning olgu $s_x = \sum_{j=1}^{n} a_x^j N_j$ selline splain, et $s_x(x_i) = (-1)^i$ iga $i = 1, \ldots, n$. Paneme tähele et $(-1)^i a_i^x > 0$, kuna

$$a_i^x = \sum_{j=1}^{n} A_x^{-1}(i,j)(-1)^j = (-1)^i \sum_{j=1}^{n} |A_x^{-1}(i,j)|,$$

kus summa on kindlasti positiivne (miks? ✠$_{5.27}$).

Kuna s_x vahetab märki punktides x_i ning võrdub nulliga punktides t_1, t_{n+k} (seejuures $t_1 < x_1 < \cdots < x_n < t_{n+k}$). Seega splainil s_x on n paarikaupa erinevat ekstreemumi $y_1 < \cdots < y_n$, kus kehtib

$$(-1)^i s_x(y_i) \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Siit järeldub muu hulgas, et $t_i < y_i < t_{i+k}$. Tõepoolest, kui $y_i \leqslant t_i$ mingi i korral, siis $N_j(y_1) = \cdots = N_j(y_i) = 0$ iga $j \geqslant i$ korral. Seega punktides $y_1, \ldots, y_i$ korral kehtib võrdus $s_x = \sum_{j=1}^{n} a_x^j N_j = \sum_{j=1}^{i-1} a_x^j N_j$, kus viimasel summal on vähemalt $i-1$ tugevat märgivahetust. Siis lause 5.34 kohaselt

$$i - 2 = S^-(a_1^x, \ldots, a_{i-1}^x) \geqslant S^-\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_x^j N_j\right) \geqslant i - 1,$$

mis on vastuolu.

Järelikult sõlmed $y = (y_1, \dots, y_n)$ rahuldavad Schoenberg-Whitney teoreemi 5.25 eeldusi, seega leidub parajasti üks s_y selline, et $s_u = \sum_{j=1}^{n} a_u^j N_j$ ja $s_y(y_i) = (-1)^i$. Analoogiliselt kehtib ka $(-1)^i a_i^y > 0$.

Võtame $\gamma \in (0,1)$ ning vaatame vahet $s_x - \gamma s_y$. Paneme tähele, et

$$(-1)^i (s_x - \gamma s_y)(y_i) \geqslant 1 - \gamma > 0,$$

seega $s_x - \gamma s_y$ vahetab märki punktides $y_1, \dots, y_n$. Järelikult $S^-(a_x - \gamma a_y) = n - 1$ ja seega $(-1)^i a_i^x \geqslant (-1)^i \gamma a_i^y > 0$ iga indeksi i korral. Minnes piirile suurusega γ, saame, et

$$(-1)^i a_i^x \geqslant (-1)^i a_i^y > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Niimoodi jätkates saame spainide jada $s_m = \sum_{j=1}^{n} a_j^m N_j$, $m = 1, 2, \dots$ ($s_1 = s_x$ ja $s_2 = s_y$). Nende splainide koefitsendid koonduvad monotoonselt mingiks korteežiks a^*, tähistame $s_* = \sum_{j=1}^{n} a_j^* N_j$ siis $s_m \to s_*$ ühtlaselt lõigus $[t_1, t_{n+k}]$. Vastavad ekstreemumide jadad $(y_m^1, \dots, y_m^n)$ samuti koonduvad jadaks $(x_1^*, \dots, x_n^*)$, kuna s_m vahetab märki punktides y_i^m ning s_* on pidev. Järelikult,

$$1 = (-1)^i s_*(x_i^*) = \|s_*\|_\infty, \quad i = 1, \dots, n,$$

kuna $1 = (-1)^i s_m(y_i^{m-1})$, seejuures $\|s_m\| = \max_i |s_m(y_i^m)|$ ning s_* on splainide s_m piirväärtus.

Remezi algoritm ei garanteeri, et alustades mingi teise korteežiga x ei jõua me mingi teise splainini s_*. Järgnevas tõestame, et tegelikult on piirile minnes saadud splain üheselt määratud.

Lemma 5.35. *Olgu $s_* = \sum_{j=1}^{n} a_j^* N_j$ selline, et $(-1)^i s_*(x_i^*) = \|s_*\|_\infty = 1$ mingi kasvavalt järjestatud sõlmede jada x^* korral. Siis*

$$(-1)^i a_i^* = \|\lambda_i\|,$$

seega selline s_* on üheselt määratud.

Tõestus. Olgu $A_* = (A_*(j,m)) = (N_m(x_j^*))$ ning defineerime funktsionaalid $\lambda_i \colon S(\Delta) \to \mathbb{R}$ seosega

$$\lambda_i(s) = \sum_{j=1}^{n} A_*^{-1}(i,j) s(x_j^*),$$

siis

$$\lambda_i(N_m) = \sum_{j=1}^{n} A_*^{-1}(i,j) N_m(s_j^*) = \sum_{j=1}^{n} A_*^{-1}(i,j) A_*(j,m) = \delta_{im},$$

seega, nagu nägime teoreemis 5.17, on tegemist kaasfunktsionaalidega. Lisaks sellele iga splaini $s \in \mathcal{S}_k$ korral kehtib

$$|\lambda_i(s)| \leqslant \|s\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \left|A_*^{-1}\right|,$$

seejuures splaini $s = s_*$ jaoks on see võrdus täidetud, kuna

$$|\lambda_i(s_*)| = \left|\sum_{j=1}^{n} A_*^{-1}(i,j)(-1)^j\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|A_*^{-1}(i,j)\right| = \|s_*\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \left|A_*^{-1}\right|.$$

Seega $\|\lambda_i\| = \sum_{j=1}^{n} |A_*^{-1}(i,j)|$ ning $|\lambda_i(s_*)| = \|\lambda_i\|$. Samas $|\lambda_i(s_*)| = |a_i^*|$, $(-1)^i a_i^* > 0$, millest järeldubki väide. □

Märkus. Vahetades tähistusi saame, et leidub üheselt määratud element $T_* \in \mathcal{S}_k(\Delta)$, mille korral

$$(-1)^i T_*(x_i^*) = \|T_*\|_\infty = 1$$

etteantud sõlmede x^* jaoks. Splaini T_* nimetatakse *Tšebõšovi splainiks*.

5.6 Vähimruutude lähendamine

Edaspidi vaatame skalaarkorrutisega ruume.

Teoreem 5.36. *Olgu X skalaarkorrutisega ruum ning $U \subset X$ alamruum. Element $u_* \in U$ on parim lähend elemendile $x \in X$ parajasti siis, kui iga $v \in U$ korral*

$$(x - u_*, v) = 0.$$

TÕESTUS. Kehtigu iga $v \in U$ korral võrdus $(x - u_*, v) = 0$. Võtame $v = u_* - u$, kus $u \in U$ on suvaline, siis

$$\|x - u\|^2 = \|(x - u_*) + v\| = \|x - u_*\|^2 + \|v\|^2 > \|x - u_*\|^2,$$

seega u_* on tõepoolest parim lähend.

Teiselt poolt, kui leidub $v \in U$ selline, et $(x - u_*, v) \neq 0$, siis võttes $\lambda = -\dfrac{(x-u_*, v)}{\|v\|^2}$ saame

$$\begin{aligned}
\|(x - u_*) + \lambda v\|^2 &= \|x - u_*\|^2 + 2\lambda(f - u_*, v) + \lambda^2\|v\|^2 \\
&= \|x - u_*\|^2 - \frac{(x-u_*, v)}{\|v\|^2}(x - u_*, v) + \frac{(x-u_*, v)^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 \\
&= \|x - u_*\|^2 - 2\frac{(x-u_*, v)^2}{\|v\|^2} + \frac{(x-u_*, v)^2}{\|v\|^2} \\
&< \|x - u_*\|,
\end{aligned}$$

seega u_* ei ole parim lähend. □

Järeldus 5.37. *Kui $u_* \in U$ on parim lähend elemendile $x \in X$, siis*

$$\|x - u_*\|^2 + \|u_*\|^2 = \|x\|^2$$

ja seega $\|u_*\| \leqslant \|x\|$.

Vaatame järgmist meetodit. Kui U on lõplikumõõtmeline ning $(u_i)_{i=1}^n$ on selle baas, siis saame kirjutada $u_* = \sum_{j=1}^n a_j u_j$. Võttes teoreemis 5.36 $v = u_i$, $i = 1, \ldots, n$, saame tingimuse $(u_*, u_i) = (x, u_i)$. See annab meile lineaarvõrrandisüsteemi kordajate a_j määramiseks. Nimelt

$$Ga = b, \quad G = (u_i, u_j)_{i,j=1}^n, \quad b = (f, u_i)_{i=1}^n.$$

Maatriksit G nimetatakse *Grami maatriksiks*. Kuna süsteem on üheselt lahenduv, siis maatriks G on pööratav.

Definitsioon. Baasi (u_i) *duaalseks baaiks* nimetatakse korteeži $(u_i^*)_{i=1}^n$, kus $u_i^* \in U$ iga indeksi i korral ning

$$(u_i, u_j^*) = \delta_{i,j}.$$

Lemma 5.38. *Kui $u_k^* = \sum_{j=1}^n b_{jk} u_j$, siis $G^{-1} = (b_{j,k})_{j,k=1}^n$.*

TÕESTUS. Kui $H = (b_{j,k})_{j,k=1}^n$, siis

$$(GH)_{ik} = \sum_{j=1}^n (u_i, u_j) b_{jk} = \left(u_i, \sum_{j=1}^n b_{jk} u_j \right) = (u_i, u_k^*) = \delta_{ik}$$

ja seega $H = G^{-1}$. □

Indeks

Arvutiülesandeid

1. Interpoleerimine kasutades Tšebõšovi sõlmi lõigus $[-1, 1]$ annab reeglina väga hea interpolatsiooni. Võrrelge joonise abil interpoleerimist Tšebõšovi sõlmedes, sõlmedes, mis jaotavad lõigu ühtlaselt ning enda poolt vabalt valitud sõlmedes. Proovige funktsioone $\sin x$, $\operatorname{sgn} x$ ja teisi tuttavaid funktsioone.

2. Analoogiline eelmisega, aga funktsiooni asemel lihtsalt juhuslikud genereeritud või valitud punktid (10, 100, 1000 punkti).

3. Olgu $f = e^x$. Tehke jooniseid logaritmilisel skaalal väärtusest $\|f - p_n\|$ kui muutuja n funktsioonist, kus p_n on interpolant Tšebõšovi sõlmedes. Kui suur peab olema n, et arvutus oleks täpne (ehk viga on masina täpsusega samas suurusjärgus)? Teha sama funktsiooni $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ jaoks.

4. Kirjutage programm, mis leiab kõige väiksema paarisarvu n nii, et $x_{\frac{n}{2}} \neq 0$, kus $x_k = \cos \dfrac{\pi k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$.

5. Kirjutage programm, mis võtab sisendina punktid $x_0, \ldots, x_n$ ning väljastab joonise, kus x-teljel on punktid x_j ja y-teljel on iga punkti geomeetriline keskmine kaugus teistest punktidest. Proovige $n = 5, 10, 20$ korral Tšebõšovi punkte, ühtlaselt jaotatud punkte (moodustavad aritmeetilise jada) ja vabalt valitud punkte.

6. Kirjutage programmid, mis leiavad etteantud funktsiooni korral vastavalt Fourier', Fejeri ja Jacksoni lähendid. Võrrelge tulemusi joonise abil.

Vastused ja lahendusvihjed

Ül. 2.1. Panemne tähele, et $y \in Y$ korral $\|My\| = \|M(My)\| \leqslant \|M\|\|My\|$.

Ül. 2.2. Kui $y \in Y$, siis $\|y - My\| \leqslant \gamma \operatorname{dist}(y, Y) = 0$, seega $My = y$.

Ül. 2.3. Oletame, et leidub kaks sellist polünoomi p ja q, siis $p - q \in \mathcal{P}_n$ ja $p(x_i) - q(x_i) = 0$, kui $i = 0, \dots, n$. See on võimalik vaid kui $p - q$ on nullpolünoom.

Ül. 2.4. Ühelt poolt, suvalise $x \in [a, b]$ jaoks kehtib

$$\left|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |f(x_i)||\ell_i(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|.$$

Teiselt poolt fikseerime $x \in [a, b]$ ning valime $f \in C[a, b]$ nii, et $f(x_i) = \operatorname{sgn}(\ell_i(x))$ ja $\|f\| = 1$. Selliseid funktsioone f on palju, piltlikuse mõttes võime nt vaadata tükiti defineeritud funktsiooni, millel on punktides x_i etteantud väärtused ja punktide vahel on neid punkte ühendavad sirged. Siis

$$\sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x) \leqslant \left|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \left|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)\right|.$$

Ül. 2.5. Paneme tähele, et antud juhul $\ell_0(x) = \dfrac{x-b}{a-b}$ ja $\ell_1(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ ning

$$\|M\| = \sup_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{1} |\ell_i(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \frac{|x-a| + |x-b|}{|a-b|} = 1.$$

Olgu nüüd $f(x) = 2x^2 - 1$. Oletame vastuväiteliselt, et $\operatorname{dist}(f, \mathcal{P}_1) < 1$, siis leidub $p \in \mathcal{P}_1$ nii, et

$$p(-1) > 0,\ p(0) < 0,\ p(1) > 0,$$

mis on võimatu p lineaarsuse tõttu. Samas $d(f, 0) = 1$, seega $\operatorname{dist}(f, \mathcal{P}_1) = 1$. Nüüd $M(f, x) = 1$ iga $x \in [-1, 1]$ ning $\|f - Mf\|{=}2$ ja $(\|M\| + 1) \operatorname{dist}(f, \mathcal{P}_1) = 2$.

Ül. 2.6. Fikseerime $x, y \in S_X$ ja $\lambda \in (0, 1)$. Paneme tähele, et eelduse kohaselt $\|x + y\| < 2$. Üldisust kitsendamata eeldame, et $\lambda > \dfrac{1}{2}$. Tähistame $\alpha = 2\lambda - 1$, siis

$0 < \alpha < 1$ ja $\alpha x + (1-\alpha)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \lambda x + (1-\lambda)y$ ja seega saame, et

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\| &= \left\|ax + (1-a)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right\| \\
&\leq a\|x\| + (1-a)\left\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right\| \\
&< a + (1-a) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

nagu soovitud.

Ül. 2.7. Teoreemi 2.5 põhjal parim lähend leidub ning lemma 2.7 kohaselt see lähend on ühene.

Ül. 2.8. Olgu $f \in C^{(k)}[0,1]$ ning $\varepsilon > 0$. Weierstrassi teoreemi abil saame leida $p_k \in \mathcal{P}$ nii, et $\left|f^{(k)}(x) - p_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2^k}$ iga $x \in [0,1]$ korral. Defineerime $p_{k-i}(x) = \int_0^x p_{k-i+1}(t)dt$ iga $i = 1, \ldots, k$, siis $\|f - p_0\|_\infty^{(k)} < \varepsilon$.

Ül. 2.9. Paneme kõigepealt tähele, et

$$\|U\| = \sup_{\|f\|=1} \|Uf\| \geqslant \|U1\| = \|U(1,\cdot)\|.$$

Teiselt poolt, kui $\|f\| = 1$, siis $-1 \leqslant f \leqslant 1$, seega $U(-1,\cdot) \leqslant U(f,\cdot) \leqslant U(1,\cdot)$ ehk $-U(1,\cdot) \leqslant U(f,\cdot) \leqslant U(1,\cdot)$, millest $\|U(f,\cdot)\| \leqslant \|U(1,\cdot)\|$. Järelikult,

$$\|U\| = \sup_{\|f\|=1} \|Uf\| = \sup_{\|f\|=1} \|U(f,\cdot)\| \leqslant \|U(1,\cdot)\|,$$

nagu soovitud.

Ül. 2.10. Paneme tähele, et kui $|x-t| < \delta$, siis

$$f(x) - q_t^+(x) = f(x) - f(t) - \left(\varepsilon + 2\|f\|\frac{(x-t)^2}{\delta^2}\right) \leqslant f(x) - f(t) - \varepsilon < 0$$

ning kui $|x-t| \geqslant \delta$, siis

$$f(x) - q_t^+(x) < f(x) - f(t) - 2\|f\| \leqslant 0.$$

Ül. 2.11. Antud juhul

$$\begin{aligned}
c_2(t) &= 2\|f\|, \\
c_1(t) &= -2\|f\|t, \\
c_0(t) &= f(t) + \varepsilon + 2\|f\|t^2,
\end{aligned}$$

ning väide kehtib, kuna f on tõkestatud ja t väärtus on a ja b vahel.

Ül. 2.12. Korovkini teoreemi kohaselt $U_n(1) \to 1$, seega

$$|\|U_n(1)\| - 1| \leqslant \|U_n(1) - 1\| \to 0,$$

ning ülesane 1.10 abil saame, et $\|U_n\| = \|U_n(1)\| \to 1$. Jada $\|U_n\|$ on koonduv ja seega tõkestatud.

Ül. 2.13. Valime $U_n = U$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis triviaalselt $U_n(p_i) \to p_i$ ja Korovkini teoreemi kohaselt $U_n(f) \to f$ iga funktsiooni f korral, teiselt poolt aga $U_n(f) \to U(f)$, seega $U_n(f) = f$.

Ül. 2.14. Vastused on (vt ka lemmat 2.16):

(a) $x + 1$,

(b) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$,

(c) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$,

(d) $-\ln\frac{9}{8} \cdot x^2 + \ln\frac{9}{4} \cdot x$,

(e) $\left(-2\sin\frac{1}{2} + \sin 1\right) x^2 + 2\sin\frac{1}{2} \cdot x$,

(f) $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x$.

Ül. 2.15.

```
function bern=bernst(f, n, x)
   bern=0;
   for k=0:n
      bern=sum+nchoosek(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k)*f(k/n);
   end
end
```

Ül. 2.16. Veendume lineaarsuses. Olgu f ja g suvalised funktsioonid ja α, $\beta \in \mathbb{R}$, siis

$$\begin{aligned}
B_n(\alpha f + \beta g, x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (\alpha f + \beta g)\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) + \beta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \alpha B_n(f, x) + \beta B_n(g, x).
\end{aligned}$$

Kui funktsioon f on positiivne, siis suvaliste $x \in [0, 1]$ ja $k \in \{0, \ldots, m\}$ korral suurused x^k, $(1-x)^{n-k}$ ka $f\left(\frac{k}{n}\right)$ on positiivsed, seega seda on ka $B_n(f, x)$.

Ül. 2.17. Paneme tähele, et suvalise funktsiooni f korral kehtib

$$
\begin{aligned}
B_n'(f,x) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) x^{k}(1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\binom{n}{k+1} (k+1) f\left(\frac{k+1}{n}\right) + \binom{n}{k} (n-k) f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right] x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right).
\end{aligned}
$$

Ül. 2.18. Lihtne integreerimine näitab, et kui m. tuletis on konstant, siis funktsioon ise on ülimalt m. astme polünoom.

Ül. 2.19. Paneme tähele, et $x^2 = -x(1-x) + x$, ehk $p_2 = -q + p_1$.

Ül. 2.20. $B_n(q,0) = q(0) = 0$, $B_n(q,1) = q(1) = 1$.

Ül. 2.21. Võib avaldada $B_n^{(k)}(f)$ lemma 2.16 abil ning võrrelda seda avaldisega $B_{n-k}(f^{(k)})$. Võib kasutada fakti, et $h^{-k}\Delta_h^k(f,t) = f^{(k)}(\xi)$ mingi $\xi \in [t, t+kh]$ korral.

Ül. 2.22. Kuna $p_(x) = x^2 - 2xt + t^2$, Korovkini teoreemis $a_1 = 1$, $a_2 = -t$, $a_3 = t^2$ ning $p_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1,2,3$. Nagu nägime, B_n on positiivne lineaarne operaator, mis koondub funktsioonide p_i korral.

Ül. 2.23. Tuleb kasutada teisendust ϕ: $[0,1] \to [a,b]$, $\phi(x) = (b-a)x + a$, ja selle pöördteisendust.

Ül. 2.24. Paneme tähele, et

$$
\begin{aligned}
1 = (x - (1-x))^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + x^n + (1-x)^n \\
&> n \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k},
\end{aligned}
$$

mis annab võrratuse $\sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} < \frac{1}{n}$. Nüüd

$$\begin{aligned} |B_n(f,x) - B_n^*(f,x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \left\lfloor \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right\rfloor \right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left| \left(\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \left\lfloor \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right\rfloor \right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Fikseerime suvalise $\varepsilon > 0$ ja valime $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Siis $|B_n(f,x) - B_n^*(f,x)| < \varepsilon$, kui $n \geqslant N$.

Ül. 2.25. Kasutage valemit $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$.

Ül. 2.26. Tegemist ei ole positiivse operaatoriga.

Ül. 2.27. On vaja näidata, et $\sum_{i=0}^{n-1} D_i(x) = \frac{\sin^2 \frac{n}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$. Selleks võib kasutada valemit $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$.

Ül. 2.28. Paneme tähele, et

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} D_i(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{i}\cos kx\right],$$

seega

$$\int_{\mathbb{T}} F_n(x)dx = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{i}\cos kx\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[\pi + 0] = \pi.$$

Ül. 2.29. Kui $\|f\| \leq 1$, siis võrratus $|\sigma_n(f,x)| \leqslant 1$ kehtib tänu ülesandele 2.28 ja võrdusele

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lisaks

$$\|\sigma_n(\sin x, \cdot)\| = 1 - \frac{1}{n} \to 1.$$

Kuna σ_n ei ole projektor, siis Lebesgue'i võrratus ei pruugi kehtida.

Ül. 2.30. Et veenduda koonduvuses, tuleb kasutada lemmat 2.19.

Ül. 3.1. Korrake Kolmogorovi teoreemi tõestust, tehes vajalikke muudatusi kompleksfunktsioonide jaoks. Näiteks esimene võrratuste rida saab kuju

$$\begin{aligned}|(f(x_0)-p(x_0))|^2 &= |(f(x_0)-p_*(x_0)+q(x_0))|^2\\ &= (f(x_0)-p_*(x_0)+q(x_0))\overline{(f(x_0)-p_*(x_0)+q(x_0))}\\ &= |f(x_0)-p_*(x_0)|^2+|q(x_0)|^2+2\,\mathrm{Re}[f(x_0)-p(x_0)]\overline{q(x_0)}\\ &\geqslant \|f-p_*\|^2.\end{aligned}$$

Ül. 3.2. Antud juhul $\mathcal{Z}=\{-1,0,1\}$ ning funktsiooni $q\in\mathcal{U}$ üldkuju on $q(x)=ax^2+b$. Tuleb veenduda, et suvalise $a,b\in\mathbb{R}$ korral kehtib

$$\max_{x\in\{-1,0,1\}}(x^3+x^2-1)(ax^2+b)\geqslant 0$$

ehk

$$\max\{-(a+b),-b,a+b\}\geqslant 0,$$

mis on tõepoolest tõene.

Ül. 3.3. Paneme tähele, et antud juhul

$$f(x)-p_*(x)=\frac{1}{2}\left[(f(x)-\max f)+(f(x)-\min f)\right].$$

ja seega

$$f(x)-p_*(x)\leqslant\frac{1}{2}|\max f-\min f|,$$

seejuures võrratus on range, kui $f(x)\notin\{\min f,\max f\}$. Siit järeldub, et $\mathcal{Z}=\{x\in K\colon f(x)=\min f \text{ või } f(x)=\max f\}$. Nüüd suvaline funktsioon ruumist $\mathcal{P}_0$ on kujul $q(x)=c$ mingi $c\in\mathbb{R}$ korral ja seega

$$\max_{z\in\mathcal{Z}}(f(x)-p_*(x))q(x)=\max\{(\max f-\min f)c,-(\max f-\min f)c\}\geqslant 0$$

ning Kolmogorovi kriteeriumi kohaselt p_* on parim lähend.

Ül. 3.4. Tuleb panna tähele, et perioodilisuse tõttu punktide arv, kus vahe $|f-p|$ saavutab vahelduvate märkidega maksimumi, on paaris, nt $2m$. Kui $2m\leqslant 2n$, leidub $2m$ punkti z_k , et

$$K_1<z_i<K_2<z_2<\cdots<z_{2m-1}<K_{2m}<z_{2m}<K_1+2\pi.$$

Polünoom, mis rikub Kolmogorovi kriteeriumi, on antud seosega

$$q(x)=\prod_{i=1}^{m}2\sin\frac{x-z_{2i-1}}{2}\sin\frac{x-z_{2i}}{2}\prod_{i=1}^{m}(a_i-\cos(x+b_i)),$$

kus $a_i=\cos\left(\frac{z_{2i}-z_{2i-1}}{2}\right)$ ja $b_i=-\frac{z_{2i}+z_{2i-1}}{2}$. Et näidata teistpidi kehtivust, tuleb kasutada seda, et polünoomil $q\in\mathbb{T}_n$ võib ühe perioodi sees olla ülimalt $2n$ nullkohta.

Ül. 3.5. Ilmselt $T_0(x) = \cos 0 = 1$ ja $T_1(x) = \cos(n \arccos x) = x$. Nüüd

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\arccos x) \\ &= 2\cos(\arccos x)\cos(n \arccos x) - \cos((n-1)\arccos x) \\ &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Ül. 3.6. Kuna koosinuse maksimaalne väärtus on 1, siis punktide x_k^* leidmiseks tuleb lahendada võrrand $\cos(n \arccos x) = \pm 1$ lõigus $[-1, 1]$. Nullkohtade t_k^* leidmiseks tuleb lahendada võrrand $\cos(n \arccos x) = 0$ lõigus $[-1, 1]$.

Ül. 3.13. Kui $p(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$ on parim lähe funktsioonile x^k ruumist $\mathcal{P}_{k-1}$, siis

$$\|x^k - p(x)\| = \inf_{a_{n-1},\ldots,a_0 \in \mathbb{R}} \|x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0\|.$$

Ül. 3.7. Kehtib võrdus $\mathcal{P}_n = \operatorname{span}\{1, x, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$ ning igal polünoomil

$$p = a_0 + \cdots + a_n x^n,$$

kus $a_i \in \mathbb{R}$ on fikseeritud ja ei võrdu kõik korraga nulliga, on ülimalt n nullkohta.

Ül. 3.8. Olgu $t_n \in \mathcal{T}_n$, $t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + (-ib_k)i \sin kx$. Tähistades $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, võime kirjutada ümber $t_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, kus kordajad c_k on sellised, et

$$\begin{cases} c_{-k} + c_k = a_k, \\ c_{-k} - c_k = -ib_k. \end{cases}$$

Muutujavahetusega $e^{ix} = z$ (paneme tähele, et $z \neq 0$), saame

$$t_n(x) = 0 \Leftrightarrow z^n t_n(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} z^k,$$

ning algebralisest juhust teame, et sellisel võrrandil on ülimalt $2n$ lahendit, ning iga z korral leidub parajasti üks $x \in [-\pi, \pi)$ nii, et $e^{ix} = z$.

Ül. 3.9. Kui $n = 1$, siis meil on võrrand kujul $c_0 e^{\lambda_0 x} + c_1 e^{\lambda_1 x} = 0$, mille ainsaks lahendiks, kui see leidub, on $x = \dfrac{\ln\left(-\frac{c_0}{c_1}\right)}{\lambda_1 - \lambda_0}$, st sellisel võrrandil on ülimalt üks lahend.
Oletame nüüd, et kui $k \leqslant n$, siis $\mathcal{U}_n$ on Tšebõšovi alamruum ning näitame, et siis seda on ka $\mathcal{U}_{n+1}$. Olgu $p \in \mathcal{U}_{n+1}$, $p(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i e^{\lambda_i x}$. Oletame, on polünoomil p on

vähemalt $n+2$ nullkohta, olgu need $x_0, \dots, x_{n+1}$. Defineerime

$$r(x) = \frac{p(x)}{e^{\lambda_0 x}} = c_0 + \sum_{i=1}^{n+1} c_i e^{(\lambda_i - \lambda_0)x},$$

siis $r(x_i) = 0$ iga $i = 0, \dots, n+1$. Rolle'i teoreemi kohaselt iga $i = 1, \dots, n$ korral leidub punkt $c_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n$ nii, et $r'(c_i) = 0$, samas aga $r' \in \mathcal{U}_n$ ja sellel saab olla ülimalt n nullkohta. Vastuolu, seega $\mathcal{U}_{n+1}$ on Tšebõšovi alamruum.

Ül. 3.10. Kui vaadeldaval homogeensel süsteemil oleks mittetriviaalne lahend, siis funktsioonil $a_0u_0 + a_1u_1 + \dots + a_nu_n$ oleks $n+1$ nullkohta $x_0, \dots, x_n$ ja seega Haari tingimus ei saaks olla täidetud.

Ül. 3.11. Tuleb samm-sammult korrata teoreemi 3.2 tõestust.

Ül. 3.12. Ruum P_n on ruumi $C[a,b]$ Tšebõšovi alamruum.

Ül. 4.1. Meenutame definitsiooni

$$\omega(f,t) = \sup_{0<h<t} \sup_{x \in \mathbb{T}} \left|\Delta_h^1(f,x)\right|,$$

kus $\Delta_h^1(f,x) = f(x+h) - f(x)$.

1. Kui $f(x) = x$, siis $\Delta_h^1(f,x) = h$ ja seega

$$\omega(f,t) = \sup_{0<h<t} \sup_{x \in \mathbb{T}} |\Delta_h^1(f,x)| = t.$$

2. Kui $f(x) = x^2$, siis $\Delta_h^1(f,x) = (x+h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$ ja seega

$$\omega(f,t) = \sup_{0<h<t} \sup_{x \in \mathbb{T}} |\Delta_h^1(f,x)| = 2\pi t + t^2 = t(2\pi + t).$$

3. Kui $f(x) = \sin x$, siis $\Delta_h^1(f,x) = \sin(x+h) - \sin x$. Võime eeldada, et $t \leq \dfrac{\pi}{2}$ (meile pakuvad huvi vaid t väiksed väärtused). Vaatleme funktsiooni $g(x) = \sin(x+h) - \sin x = 2\cos\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}$, kus h on fikseeritud. Kui g saavutab ekstreemumi, siis $g'(x) = -2\sin\left(x + \dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2} = 0$, mis tähendab $x + \dfrac{h}{2} = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ja seega $|g(x)| = 2\left|\sin\dfrac{h}{2}\right|$ ning järelikult (võttes $x = -\dfrac{h}{2}$)

$$\omega(f,t) = \sup_{0<h<t} \sup_{x \in \mathbb{T}} |\Delta_h^1(f,x)| = \sin\frac{t}{2}.$$

4. Kui$f(x) = e^x$, siis $\Delta_h^1(f,x) = e^{x+h} - e^x = e^x\left(e^h - 1\right)$ ja seega

$$\omega(f,t) = \sup_{0<h<t} \sup_{x \in \mathbb{T}} |\Delta_h^1(f,x)| = e^{\pi}\left(e^t - 1\right).$$

Ül. 4.2.

(i) Kui $t_1 \leqslant t_2$, siis $\omega(f,t_1) \leqslant \omega(f,t_2)$, kuna supreemum võetakse üle suurema hulga;

(ii)

$$\begin{aligned}\omega(f+g,t) &= \sup_{0<h<t}\sup_{x\in\mathbb{T}}|\Delta_h^1(f+g,x)| \\ &\leqslant \sup_{0<h<t}\sup_{x\in\mathbb{T}}|\Delta_h^1(f,x)| + \sup_{0<h<t}\sup_{x\in\mathbb{T}}|\Delta_h^1(g,x)| \\ &= \omega(f,t)+\omega(g,t);\end{aligned}$$

(iii) $\omega(f,t) = \sup\limits_{0<h<t}\sup\limits_{x\in\mathbb{T}}|f(x+h)-f(x)| \leqslant \sup\limits_{0<h<t}\sup\limits_{x\in\mathbb{T}}|f(x+h)|+|f(x)| \leqslant 2\|f\|$;

(iv) Selle omaduse tõestamisel tuleb kasutada seda, et $\Delta_{nh}^1(f,x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta_h^1 g(x,x+ih)$. Nüüd

$$\begin{aligned}\omega(f,nt) &= \sup_{0<h<nt}\sup_{x\in\mathbb{T}}|\Delta_h^1(f,x)| \\ &\leqslant n\omega(f,t)\end{aligned}$$

(v) Selle omaduse tõestamisel tuleb kasutada seda, et $\Delta_h^1(fx,h) = \int_0^h f'(x+z)dz$. Nüüd

$$\begin{aligned}\omega(f,t) &= \sup_{0<h<t}\sup_{x\in\mathbb{T}}|\Delta_h^1(f,x)| \\ &= \sup_{0<h<t}\sup_{x\in\mathbb{T}}\left|\int_0^h f'(x+z)dz\right| \\ &\leqslant \|f'\|\sup_{0<h<t}\sup_{x\in\mathbb{T}} h = t\|f'\|.\end{aligned}$$

Ül. 4.3. Kui f on ühtlaselt pidev, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$, nii et iga $x \in \mathbb{T}$ ja $|h| < \delta$ korral $|f(x+h)-f(x)| < \delta$. Seega kui $t < \delta$, siis $\omega(f,t) < \varepsilon$ ning järelikult $\omega(f,t) \to 0$, kui $t \searrow 0$.
Teiselt poolt, kui $\lim\limits_{t\searrow 0}\omega(f,t) = 0$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$, nii et $\omega(f,t) < \varepsilon$, kui $t < \delta$. Nüüd, kui $h < \delta$, siis $t \in (h,\delta)$ korral $|f(x+h)-f(x)| \leqslant \omega(f,t) < \varepsilon$, mis annabki ühtlase pidevuse.

Ül. 4.4. Vaatame funktsiooni $f(t) = \sin\dfrac{t}{2} - \dfrac{t}{\pi}$. Siis $f(0) = f(\pi) = 0$ ja $f''(t) = -\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{t}{2} < 0$ iga $t \in (0,\pi)$ korral. See tähendab, et funktsioon f on nõgus lõigus $(0,\pi)$, kusjuures võrdne nulliga otspunktides. Järelikult $f(t) \geq 0$ igas punktis $t \in (0,\pi)$, nagu soovitud.

Ül. 4.5. Fikseerime polünoomi $p \in \mathcal{P}_n$ ning vaatleme trigonomeetrilist polünoomi $t(\theta) = p(\cos\theta)$. Teame, et selle trigonomeetrilise polünoomi jaoks kehtib Bernsteini võrratus $\|t'\| \leqslant n\|t\|$, st

$$\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |t'(\theta)| \leqslant n \sup_{\theta\in(0,2\pi]} |t(\theta)|$$

ehk

$$\sup_{\theta\in(0,2\pi]} |\sin\theta p'(\cos\theta)| \leqslant n \sup_{\theta\in(0,2\pi]} |p(\cos\theta)|$$

ehk

$$\sup_{x\in[-1,1]} \left|\sqrt{1-x^2}p'(x)\right| \leqslant n \sup_{x\in[-1,1]} |p(x)|,$$

millest

$$|p'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|p\|,$$

nagu soovitud.

Ül. 4.6. Võrduse

$$1 - T_n(x)^2 = \frac{1}{n^2}\left(1-x^2\right)T_n'(x)^2$$

mõlemal pool on $2n$. astme polünoom, mille pealiikme kordaja on $-n^2 2^{n-1}$. Veel on vaja veenduda, et nendel polünoomidel on samad juured. Polünoomi $\frac{1}{n^2}\left(1-x^2\right)T_n'(x)^2$ ühekordsed nullkohad on $1, -1$ ja kahekordsed nullkohad on $t_k^* = \cos\frac{\pi k}{n}$, $k = 1, \ldots, n-1$. Need on ka polünoomi $1 - T_n(x)^2$ juured. Kuna $(1 - T_n(x)^2)' = -2T_n(x)T_n'(x)$, siis $t_k^* = \cos\frac{\pi k}{n}$, $k = 1, \ldots, n-1$, on ka vasaku poole tuletise nullkohad, seega vasaku poole kahekordsed nullkohad, mida oligi vaja tõestada.
Nüüd, kui $x = x_k^* = \cos\frac{(2k-1)\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, siis

$$1 - T_n(x)^2 = \frac{1}{n^2}\left(1-x^2\right)T_n'(x)^2$$

annab

$$1 = \frac{1}{n^2}\left(1-x^2\right)T_n'(x)^2,$$

kust saame, et

$$T_n'(x) = \varepsilon_k\frac{n}{\sqrt{1-x^2}},$$

kus $\varepsilon_k = \pm 1$. Kuna $x_n^*, x_{n-1}^*, \ldots, x_1^*$ on T_n järjestikused nullkohad, siis ε_k on vaheldumisi 1 ja -1. Nüüd piisab veel vaid tähele panna, et $\varepsilon_1 = 1$, sest $T_n(x) > 0$, kui $x > x_1^*$ (viimase nullkoha juures on T_n kasvav, kuna pealiikme kordaja on positiivne ja seega $T_n(x) > 0$, kui x on piisavalt suur).

Ül. 4.7. Vastavalt definitsioonile $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ja seega

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= n\frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = n\frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} \\ &= n\frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}. \end{aligned}$$

Kui $x \nearrow 1$ $(x > 0)$, siis $\arccos x > 0$ ja $\arccos x \searrow 0$ ning l'Hospitali reegli põhjal saame

$$\lim_{x\nearrow 1} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)} = \lim_{y\searrow 0} \frac{\sin(ny)}{\sin y} = \lim_{y\nearrow 0} \frac{n\cos(ny)}{\cos y} = n.$$

Järelikul $T_n'(1) = \lim\limits_{x\nearrow 1} T_n'(x) = n^2$.

Ül. 4.8. Bernsteini võrratuse põhjal

$$|p_n'(x)| \leqslant \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

ja ülesandest 4.6 teame, et $T_n'(x_k^*) = (-1)^{k+1}\dfrac{n}{\sqrt{1-(x_k^*)^2}}$, kus $x_k^* = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, n$. Oletame vastuväiteliselt, et mingi $x_0 > \cos\dfrac{\pi}{2n}$ korral $p'(x_0) = \gamma T_n'(x_0)$, kus $|\gamma| > 1$. Siis

$$\left|\frac{p'(x_k^*)}{\gamma}\right| < |T_n'(x_k^*)|$$

iga $k = 1, \ldots, n$ korral. Seega polünoom $g(x) = \dfrac{p'(x)}{\gamma} - T_n'(x)$ on punktides x_k vaheldumisi erimärgline, st igas vahemikus (x_k, x_{k-1}) on polünoomil g nullkoht (kokku $n-1$ tükki). Samas ka $x_0 > x_1^*$ on g nullkoht, mis annab kokku vähemalt n nullkohta. Kuid g on ülimalt $(n-1)$. astme polünoom, mis pole ka nullpolünoom. Järelikult oli meie vastuväiteline oletus väär ja väide kehtib.

Ül. 4.9.

1) Paneme tähele, et

$$\|f\|_{C[-1,1]} = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)| = \max_{\cos\theta\in[-1,1]} |f(\cos\theta)| = \max_{\theta\in\mathbb{T}} |f(\cos\theta)| = \|\tilde{f}\|_{C(\mathbb{T})};$$

2) Olgu $p_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k$, siis $\tilde{p}_n(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k \cos^k\theta$. Lõpetamiseks kasutada näiteks seost $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$;

3) Paneme tähele, et

$$\tilde{p}_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k \arccos(\cos\theta)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta).$$

Ül. 4.10. Olgu p_{n-1} funktsiooni f' parim lähend ruumist $\mathcal{P}_{n-1}$. Siis Jacksoni esimese teoreemi põhjal

$$E_n(f) = E_n\left(f - \int p_{n-1}\right) \leqslant \frac{c}{n}\|f' - p_{n-1}\| = \frac{c}{n}E_{n-1}(f').$$

Nii jätkates saame

$$\begin{aligned}
E_n(f) &\leqslant \frac{c}{n}E_{n-1}(f') \leqslant \frac{c^2}{n(n-1)}E_{n-2}\left(f''\right) \leqslant \dots \\
&\leqslant \frac{c^r}{n(n-1)\dots(n-r+1)}E_{n-r}\left(f^{(r)}\right) \\
&\leqslant \frac{c^{r+1}}{n(n-1)\dots(n-r+1)}\,\omega\!\left(f^{(r)}, \frac{1}{n-r}\right) \\
&\leqslant \frac{c^{r+1}}{n(n-1)\dots(n-r+1)}\,\omega\!\left(f^{(r)}, \frac{2}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{2c^{r+1}}{n(n-1)\dots(n-r+1)}\,\omega\!\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{2c^{r+1}}{\left(\frac{n}{2}\right)^r}\,\omega\!\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{c_r}{n^r}\,\omega\!\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

kus $c_r = 2^{r+1}c^{r+1}$.

Ül. 5.1. Kui $l < i$, siis lõigus $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ võrdub funktsioon nulliga. Kui $l > i$, siis lõigus $[\tau_l, \tau_{l+1}]$ funktsiooni avaldis on $(x - \tau_i)^{k-1}$. Mõlemad funktsioonid kuuluvad ruumi $\mathcal{P}_{k-1}$. Diferentseeruvusega ainus probleem võib tekkida punktis τ_i, seal aga on funktsioon $k-2$ korda pidevalt differentseeruv.

Ül. 5.2. Vaja on näidata, et mingi arvu $a_i \in \mathbb{R}$ korral kehtib lõigus $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ võrdus $s(x) = p(x) + a_i(x - \tau_i)^{k-1}$. See järeldub sellest, et iga $(s-p)^j(\tau_i) = 0$ iga $j = 0, \dots, k-2$ korral.

Ül. 5.3. Teame juba, et iga splain avaldub kujul

$$s(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i(x - \tau_i)_+^{k-1}. \tag{5.7}$$

Nüüd piisab vaid tähele panna, et iga i ja x korral kehtib

$$(x - \tau_i)_+^{k-1} = (x - \tau_i)^{k-1} + (-1)^k(\tau_i - x)_+^{k-1}$$

ja seega (5.7) annab, et

$$\begin{aligned}
s(x) &= p_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i\left[(x - \tau_i)^{k-1} + (-1)^k(\tau_i - x)_+^{k-1}\right] \\
&= p_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i(x - \tau_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^{N}(-1)^k a_i(\tau_i - x)_+^{k-1}.
\end{aligned}$$

Seega $q_{k-1}(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i(x-\tau_i)^{k-1}$ ja $b_i = (-1)^k a_i$.

Ül. 5.4. Need splainid on $s_2(x) = (x-1)_+ - 2(x-2)_+ + (x_3)_+$ ja $s_3(x) = (x-2)_+ - 2(x-3)_+$.

Ül. 5.5.

1. Tuleb kasutada seda, et interpoleeriv polünoom on avaldatav kujul
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{f(t_i)}{\omega'(t_i)} \frac{\omega(t_i)}{x-t_i}.$$

2. Kui p_0 ja p_k on polünoomid, mis interpoleerivad funktsiooni f vastavalt sõlmedes $(t_1, \ldots, t_k)$ ja $(t_0, \ldots, t_{k-1})$, siis punktides $(t_0, \ldots, t_k)$ interpoleetiv polünoom avaldub kujul
$$\frac{x-t_0}{t_k-t_0} p_k(x) - \frac{t_k-x}{t_k-t_0} p_0(x).$$

3. Tõestame väite induktsiooniga k järgi. Selge, et
$$[t_0, \ldots, t_k]fg = \sum_{i=0}^{k} [t_0, \ldots, t_i]f[t_i, \ldots, t_k]g.$$
kehtib $k = 0$ korral ehk $[t_0]fg = [t_0]f[t_0]g$. Induktsiooni sammu jaoks kasutame korduvalt eelmises punktis tõestatud võrdust
$$[t_0, \ldots, t_k]f = \frac{[t_1, \ldots, t_k]f - [t_0, \ldots, t_{k-1}]f}{t_k - t_0}.$$
Seega oletame, et kehtib
$$[t_0, \ldots, t_{k-1}]fg = \sum_{i=0}^{k-1} [t_0, \ldots, t_i]f[t_i, \ldots, t_{k-1}]g$$
ja näitame, et kehtib ka
$$[t_0, \ldots, t_k]fg = \sum_{i=0}^{k} [t_0, \ldots, t_i]f[t_i, \ldots, t_k]g.$$

Tähistame $S = (t_k - t_0)[t_0,., t_k]fg$. Nüüd paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
S &= [t_1, \dots, t_k]fg - [t_0, \dots, t_{k-1}]fg \\
&= \sum_{i=1}^{k}[t_1, \dots, t_i]f[t_i, \dots, t_k]g - \sum_{i=0}^{k-1}[t_0, \dots, t_i]f[t_i, \dots, t_{k-1}]g \\
&= \sum_{i=1}^{k}((t_i - t_0)[t_0, \dots, t_i]f + [t_0, \dots, t_{i-1}]f)[t_i, \dots, t_k]g \\
&\quad - \sum_{i=0}^{k-1}[t_0, \dots, t_i]f([t_{i+1}, \dots, t_k]g - (t_k - t_i)[t_i, \dots, t_k]g) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(t_i - t_0)[t_0, \dots, t_i]f[t_i, \dots, t_k]g \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}(t_k - t_i)[t_0, \dots, t_i]f[t_i, \dots, t_k]g \\
&= \sum_{i=0}^{k}(t_k - t_0)[t_0, \dots, t_i]f[t_i, \dots, t_k]g,
\end{aligned}$$

nagu soovitud.

Ül. 5.6. Olgu p polünoom, mis interpoleerib funktsiooni f punktides $t_0, \dots, t_k$, siis $p(t_i) = f(t_i)$, $i = 0, \dots, k$. Cauchy keskväärtusteoreemi kohaselt leiduvad punktid δ_i, $i = 0, \dots, k-1$, nii, et

$$1 = \frac{p(t_{i+1}) - p(t_i)}{f(t_{i+1}) - f(t_i)} = \frac{p'(\delta_i)}{f'(\delta_i)}.$$

Korrates sama protseduuri uuesti, saame leida punktid $\eta_0, \dots, \eta_{k-2}$, mille korral $p''(\eta_i) = f''(\eta_i)$. Niimoodi jätkates leiame punki ξ, mille puhul $p^{(k)}(\xi) = f^{(k)}(\xi)$. Nüüd paneme tähele, et $p^{(k)}(x) = k![t_0, \dots, t_k]f$, millest

$$[t_0, \dots, t_k]f = \frac{1}{k!}p^{(k)}(\xi) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(\xi),$$

nagu soovitud.

Ül. 5.7. See võrdus järeldub otse omadusest $[t_0, \dots, t_k]f = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(t_i)}{\omega'(t_i)}$.

Ül. 5.8. Nullpolünoomi pealiikme kordaja on null.

Ül. 5.9. Interpoleerides $(k-1)$. astme polünoomi $k+1$ punktis saame tulemuseks esialgse polünoomi, seega k. astme kordaja on 0.

Ül. 5.10. Vaja on näidata, et

$$f(x) = p_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f^{(k)}(t)dt,$$

mis ongi Taylori valem, kus jääkliige on integraalsel kujul:

$$f(x) = f(t) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t)dt.$$

Et selles esituses veenduda võib aksutada ositi integreerimist alustades võrdusest $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. See annab näiteks esimesel sammul

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(t)(t-b)|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f''(t)(t-x)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt. \end{aligned}$$

Edasi saab jätkata induktsiooniga k järgi.

Ül. 5.11. Võtame $f(x) = x^k$, siis lemma 5.5 kohaselt kehtib

$$[t_i, \ldots, t_{i+k}]f = \frac{1}{k!}\int_a^b M_i(t) f^{(k)}(t)dt.$$

Kuna $\left(x^k\right)^{(k)} = k!$, siis võrduse parem pool on $\int_a^b M_i(t) f^{(k)}(t)dt$. Teiselt poolt, $[t_i, \ldots, t_{i+k}]f$ on selle polünoomi pealikme kordaja, mis interpoleerib funktsiooni x^k punktides $t_i, \ldots, t_{i+k}$. Selleks polünoomiks aga ongi x^k, mille pealiikme kordaja on 1.

Ül. 5.12. Leibnizi valem ütleb meile

$$[t_i, \ldots, t_k]fg = \sum_{j=i}^{k} [t_i, \ldots, t_j]f[t_j, \ldots, t_k]g.$$

Antud juhul $f(x) = x - t$ ja $g(x) = (x-t)_+^{k-2}$. Kuna $f(x)$ on esimese astme polünoom, siis teda interpoleerivad polünoomid on ka ülimalt esimese astme polünoomid ning seega $[t_i, t_{i+1}, t_{i+2}]f = [t_i, \ldots, t_{i+3}]f = \cdots = [t_i, \ldots, t_k]f = 0$. Samas $[t_i, t_i]f = t_i - t$ ja $[t_i, t_{i+1}]f = 1$, mis annabki soovitud tulemuse

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}M_{i,k}(t) &= [t_i, \ldots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1} = [t_i, \ldots, t_{i+k}]\left((x-t)(x-t)_+^{k-2}\right) \\ &= (t_i - t)[t_i, \ldots, t_{i+k}](x-t)_+^{k-2} + [t_{i+1}, \ldots, t_{i+k}](x-t)_+^{k-2}. \end{aligned}$$

Ül. 5.13. Vaja on näidata, et

$$\frac{t_i - t}{t_{i+k} - t_i}\left(M_{i+1,k-1}(t) - M_{i,k-1}(t)\right) + M_{i+1,k-1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i}M_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i}M_{i+1,k-1}(t),$$

kuid see ilmselt kehtib, sest $M_{i+1,k-1}(t)$ kordaja mõlemal pool võrdusmärki on $\dfrac{t_i - t}{t_{i+k} - t_i}$ ja $M_{i,k-1}(t)$ kordaja on vastavalt $\dfrac{t_i - t}{t_{i+k} - t_i} + 1 = \dfrac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i}$.

Ül. 5.14. Lause 5.7 põhjal

$$\frac{1}{k} M_{i,k}(t) = \frac{1}{k-1}\left[\frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} M_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_i} M_{i+1,k-1}(t)\right]. \tag{5.8}$$

Samas $M_{i,k}(t) = \dfrac{k}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k}(t)$ ehk $\dfrac{1}{k} M_{i,k}(t) = \dfrac{1}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k}(t)$. Sarnaselt

$$\frac{1}{k-1} M_{i,k-1}(t) = \frac{1}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t)$$

ja

$$\frac{1}{k-1} M_{i+1,k-1}(t) = \frac{1}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t).$$

Asendades need seosesse (5.8) saamegi võrduse

$$N_{i,k}(y) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i+1,k-1}(t).$$

Ül. 5.15. Definitsiooni kohaselt

$$N_i(t) = (t_{i+k} - t_i)[t_i, \ldots, t_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1}.$$

Seega

$$N_{i,1}(t) = (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}](\cdot - t)_+^0.$$

Nüüd, kui $t < t_i$, siis $(t_i - t)_+^0 = 1$ ja $(t_{i+1} - t)_+^0 = 1$ ning seega esimese astme interpoleeriv polünoom on konstantne polünoom väärtusega 1, mis tähendab, et pealiikme kordaja on 0, st $[t_i, t_{i+1}](\cdot - t)_+^0 = 0$. Sarnaselt, kui $t > t_{i+1}$, siis $(t_i - t)_+^0 = 0$ ja $(t_{i+1} - t)_+^0 = 0$ ning järelikult $[t_i, t_{i+1}](\cdot - t)_+^0 = 0$.
Olgu nüüd $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Siis $(t_i - t)_+^0 = 0$ ja $(t_{i+1} - t)_+^0 = 1$. Seega interpoleeriv polünoom on $p(x) = \dfrac{1}{t_{i+1} - t_i}(x - t_i)$. Selle pealiikme kordaja on $\dfrac{1}{t_{i+1} - t_i}$ ning seega

$$N_{i,1}(t) = (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}](\cdot - t)_+^0 = 1.$$

Ül. 5.16. Sulud avades saame, et

$$\begin{aligned}\phi_i(x) &= \frac{1}{(k-1)!}(x - t_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - t_{i+k-1}) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} - \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{(k-1)!} x^{k-2} + a_{k-3} x^{k-3} + \cdots + a_0,\end{aligned}$$

kus $a_0, \ldots, a_{k-3}$ on reaalarvulised kordajad. Seega

$$\phi_i^{(k-2)}(x) = x - \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}.$$

Ül. 5.17. Arvestades, et
$$\sum_{i=1}^{n} N_i(t) = 1,$$
siis võrdus
$$t - x = \sum_{i=1}^{n} (-1)\left[x - \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1}\right] N_i(t)$$
annab, et
$$t = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{i+1} + \cdots + t_{i+k-1}}{k-1} N_i(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i^* N_i(t).$$
Seega, kui $p \in \mathcal{P}_1$ on kujul $p(t) = at + b$, siis
$$\sum_{i=1}^{n} p(t_i^*) N_i(t) = \sum_{i=1}^{n} (at_i^* + b) N_i(t) = a \sum_{i=1}^{n} t_i^* N_i(t) + b = at + b,$$
nagu soovitud.

Ül. 5.18. Splaini N_i kandja on $[t_i, t_{i+k}]$.

Ül. 5.19. Kui $t \leqslant t_j$, siis $\dfrac{(t-t_j)_+^{k-1}}{(k-1)!} = 0$ ja $N_i(t) = 0$ iga $i \geqslant j$ korral. Seega $\displaystyle\sum_{i \geqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t) = 0$. Kui $t > t_j$, siis $\dfrac{(t-t_j)_+^{k-1}}{(k-1)!} = \dfrac{(t-t_j)^{k-1}}{(k-1)!}$ ja nagu tõestuses märgitud (vt eelmist ülesannet) $\displaystyle\sum_{i+k \leqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t) = 0$. Seega
$$\begin{aligned}\frac{(t-t_j)_+^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(t-t_j)^{k-1}}{(k-1)!} &= \sum_{i+k \leqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t) + \sum_{i \geqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t) \\ &= \sum_{i \geqslant j} (-1)^{k-1} \phi_i(t_j) N_i(t).\end{aligned}$$

Ül. 5.20. Meenutame definitsiooni
$$\lambda_i(f, x) = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m f^{(m)}(x) \phi_i^{(k-1-m)}(x), \; x \in \mathbb{R},$$
kus $\phi_i(x) = \dfrac{1}{(k-1)!}(x - t_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - t_{i+k-1})$. Seega, kui $k = 3$, siis $\phi_i(x) = \dfrac{1}{2}(x - t_{i+1})(x - t_{i+2})$ ja järelikult
$$\lambda_i(f, x) = f(x) - f'(x)\left(x - \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2})\right) + \frac{1}{2} f''(x)(x - t_{i+1})(x - t_{i+2}).$$

(a) $f(x) = x + 1$ korral $f'(x) = 1$ ja $f''(x) = 0$, mis annab

$$\lambda_i(f, x) = x + 1 - \left(x - \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2})\right) = 1 + \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2}).$$

(b) $f(x) = x(1 - x)$ korral $f'(x) = -2x$ ja $f''(x) = -2$, mis annab

$$\begin{aligned}\lambda_i(f, x) &= x(1 - x) + 2x\left(x - \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2})\right) - (x - t_{i+1})(x - t_{i+2})\\ &= x + t_{i+1}t_{i+2}.\end{aligned}$$

(c) $f(x) = \ln(x + 1)$ korral $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ja $f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$, mis annab

$$\lambda_i(f, x) = \ln(x + 1) - \frac{x - \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2})}{x + 1} - \frac{(x - t_{i+1})(x - t_{i+2})}{2(x + 1)^2}.$$

(d) $f(x) = \sin x$ korral $f'(x) = \cos x$ ja $f''(x) = -\sin x$, mis annab

$$\lambda_i(f, x) = \sin x - \cos x\left(x - \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2})\right) - \frac{1}{2}\sin x(x - t_{i+1})(x - t_{i+2}).$$

(e) $f(x) = x^2$ korral $f'(x) = 2x$ ja $f''(x) = 2$, mis annab

$$\lambda_i(f, x) = x^2 - 2x\left(x - \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2})\right) + (x - t_{i+1})(x - t_{i+2}) = t_{i+1}t_{i+2}.$$

(f) $f(x) = e^{2x}$ korral $f'(x) = 2e^{2x}$ ja $f''(x) = 4e^{2x}$, mis annab

$$\lambda_i(f, x) = e^{2x} - 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}(t_{i+1} + t_{i+2})\right) + 2e^{2x}(x - t_{i+1})(x - t_{i+2}).$$

Ül. 5.21. Kaasfunktsionaalide definitsioonist

$$\lambda_i(f, x) = \sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m f^{(m)}(x)\phi_i^{(k-1-m)}(x),\ \ x \in \mathbb{R},$$

on lihtne näha, et nad on lineaarsed, st

$$\begin{aligned}\lambda_i(f + g, x) &= \lambda_i(f, x) + \lambda_i(g, x),\\ \lambda_i(af, x) &= a\lambda_i(f, x),\end{aligned}$$

iga reaalarvu a ja funktsioonide $f, g \in C(\mathbb{R})$ korral. Seega ka operaator Q on lineaarne:

$$\begin{aligned}Q(f + g, t) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f + g)N_i(t) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i(f) + \lambda_i(g))N_i(t)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f)N_i(t) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g)N_i(t) = Q(f, t) + Q(g, t),\\ Q(af, t) &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(af)N_i(t) = \sum_{i=1}^{n}a\lambda_i(f)N_i(t) = aQ(f, t).\end{aligned}$$

Nüüd teoreemist 5.17 me teame, et $\lambda_i(N_j, \xi_i) = \lambda_i(p_j) = \delta_{ij}$, seega

$$\begin{aligned} Q(Q(f,t),t) &= Q\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(f)N_i(t)\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i(f)N_i\right) N_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \lambda_i(f)\lambda_j(N_i)N_j(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(f)N_i(t) = Q(f,t), \end{aligned}$$

nagu soovitud.

Ül. 5.22. Kui $x_m \leqslant t_m$, siis $N_j(x_i) = 0$ iga $i \leqslant m \leqslant j$ korral. Seega maatriksi A_x esimeses m reas on nullist erinevad elemendid vaid $m-1$ esimeses veerus. Järelikult ei saa see maatriks olla pööratav (m esimest rida on lineaarselt sõltuvad).

Ül. 5.23. Funktsioonil s on q nullkohta intervalli sees ning ka nullkohad otspunktides. Seega leidub $q+1$ intervalli, mille otspunktides on s väärtus 0 ja Rolli teoreemi kohaselt leidub igas sellises intervallis ekstreemum, milles s' vahetabki märki.

Ül. 5.24. Siin s' on pidev funktsioon, mis on võrdne nulliga väljaspool s kandjat $[t_p, t_{p+k+r}]$.

Ül. 5.25. Kui homogeensel võrrandsüsteemil leidub vaid triviaalne lahend, siis süsteemi maatriks on pööratav.

Ül. 5.26. Vaja on näidata, et iga vektori $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ korral kehtib

$$\frac{\|A^{-1}x\|}{\|x\|} \leqslant \gamma.$$

Olgu $y = A^{-1}x$, siis $x = Ay$ ning seega vaja on näidata, et

$$\frac{\|y\|}{\|Ay\|} \leqslant \gamma. \tag{5.9}$$

Olgu $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$. Paneme tähele, et

$$\|Ay\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \right|$$

Olgu $i \in \{1, \ldots, n\}$ selline, et $\|y\| = |y_i|$. Siis

$$\begin{aligned} \|Ay\| &\geq \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j\right| \geq |a_{ii}y_i| - \left|\sum_{j=1, j\neq i}^n a_{ij}y_j\right| \geq |a_{ii}y_i| - \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ij}y_j| \\ &\geq |a_{ii}y_i| - \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{ii}y_j| = |a_{ii}|\left(|y_i| - \sum_{j=1,j\neq i}^n |y_j|\right) \\ &\geq t_i \geq \gamma|y_i| = \gamma\|y\|. \end{aligned}$$

Ül. 5.27. Kuna maatriks A_x^{-1} on pööratav, siis ükski tema veerg ei saa koosneda vaid nullidest.

Kirjandus

[1] A. Shadrin, *Approximation Theory*, University of Cambridge (2014).

[2] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*, Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin **633-639** (1885).

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ksenia Niglas (sünnikuupäev 12.03.1992),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Lähendusteooria", mille juhendaja on lektor Indrek Zolk,
   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **19.12.2016**