$$2\pi r \sin\theta = \frac{2\pi(Fs' - Fs)}{h} = \frac{Z}{h};$$

Z ist der Flächeninhalt der Zone zwischen den zu s und s' gehörigen Querschnitten. Um diese Eigenschaft in einer möglichst anschaulichen Weise auszusprechen, werde in einem Punkte s der Curve die Berührungsebene an die Fläche gelegt, der Umfang des entsprechenden Querschnitts $2\pi r$ auf diese Ebene, vom Punkte s ausgehend, abgewickelt und auf die durch s gelegte Tangente der Curve projicirt, so ist diese Projection ($= 2\pi r \sin\theta$) der Zone Z proportional.

(Tiré du Bulletn, T. XXIV, pag. 398 — 409.)

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.
Novembre 1877. C. Vessélovski, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME V.

$\frac{5}{17}$ Septembre 1878.

Eine Anwendung der Differenzen-Rechnung. Von Ferd. Minding. (Lu le 5 septembre 1878.)

Es sei m eine positive ganze Zahl, a eine beliebige Constante, x ein ächter Bruch und

$$S_m = a^m + (a+1)^m x + (a+2)^m x^2 + \ldots + (a+\mu)^m x^\mu + \ldots \text{ in inf.}$$

Obgleich es nicht an Mitteln fehlt um diese convergente Reihe zu summiren, da man z. B. mit Hülfe der Relation $\frac{d(x^a S_m)}{x^{a-1}dx} = S_{m+1}$ allmälich zu immer höheren Potenzen aufsteigen kann, so ist es doch vielleicht nicht überflüssig das einfachste und zugleich wirksamste dieser Mittel bosonders hervorzuheben; es besteht darin, S_m mit $(1-x)^{m+1}$ zu multipliciren. Schreibt man

$$(1-x)^{m+1} = 1 - (m+1)_1 x + (m+1)_2 x^2 \ldots + (-1)^\lambda (m+1)_\lambda x^\lambda + \ldots$$

und setzt man

$$(1-x)^{m+1} S_m = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_\mu x^\mu + \ldots$$

so folgt: $C_\mu =$

a) $(a+\mu)^m - (m+1)_1 (a+\mu-1)^m + (m+1)_2 (a+\mu-2)^m \ldots$
$+ (-1)^\lambda (m+1)_\lambda (a+\mu-\lambda)^m \ldots + (-1)^\mu (m+1)_\mu a^m.$

Bezeichnet, wie gewöhnlich, $\Delta(z^m)$ die Differenz $z^m - (z-1)^m$, so ist nach einem bekannten Satze

$$\Delta^{m+1}(z^m) = z^m - (m+1)_1 (z-1)^m + (m+1)_2 (z-2)^m \ldots + (-1)^{m+1} (z-m-1)^m = 0;$$

für $z = a + \mu$ erhält man also

$$(a+\mu)^m - (m+1)_1 (a+\mu-1)^m + \ldots + (-1)^{m+1} (a+\mu-m-1)^m = 0.$$

Die Vergleichung dieser Formel mit obigem Werthe von C_μ lehrt, dass für $\mu = m+1$ und für $\mu > m+1$, $C_\mu = 0$ wird, da $(m+1)_\lambda = 0$ ist, sobald $\lambda > m+1$.

Ist hingegen $\mu = m$ oder $\mu < m$, so erhält C_μ den in der Formel *a*) angegebenen Werth, zugleich aber hat man

$$\Delta^{m+1}(a+\mu)^m = C_\mu + (-1)^{\mu+1} (m+1)_{\mu+1} (a-1)^m + \ldots + (-1)^{m+1} (a+\mu-m-1)^m = 0,$$

wodurch C_μ in einer zweiten Form erhalten wird, nämlich

b) $C_\mu = (m-\mu+1-a)^m - (m+1)_1 (m-\mu-a)^m + \ldots$
$+ (-1)^{m-\mu} (m+1)_{\mu+1} (1-a)^m.$

Hiernach ist

$$S_m = \frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_m x^m}{(1-x)^{m+1}}$$

und zwar hat man nach der ersten Form *a*) $C_0 = a^m$,

$$C_1 = (a+1)^m - (m+1)_1 a^m$$
$$C_2 = (a+2)^m - (m+1)_1 (a+1)^m + (m+1)_2 a^m$$
$$C_3 = (a+3)^m - (m+1)_1 (a+2)^m + (m+1)_2 (a+1)^m + (m+1)_3 a^m$$

u. s. w.;

nach der zweiten Form *b*)

$$C_1 = (m-a)^m - (m+1)_1 (m-a-1)^m \ldots + (-1)^{m-1} (m+1)_2 (1-a)^m$$
$$C_2 = (m-a-1)^m - (m+1)_1 (m-a-2)^m \ldots + (-1)^m (m+1)_3 (1-a)^m$$

. . . .

$$C_{m-1} = (2-a)^m - (m+1)_1 (1-a)^m$$
$$C_m = (1-a)^m.$$

Für beide Formen besteht dasselbe Bildungsgesetz; in der ersten geht man von $a+\mu$ bis a, in der zweiten von $1-a+m-\mu$ bis $1-a$ herab; schreibt man in der ersten für a, $1-a$ und für μ, $m-\mu$, so entsteht die zweite oder man hat in kurzer symbolischer Bezeichnung

$$C_\mu = [a+\mu,\, a] = [1-a+m-\mu,\, 1-a].$$

Daher wird nach der zweiten Form

$$C_{m-\mu+1} = [-a+\mu,\, 1-a] \text{ und } C_{m-\mu-1} = [2-a+\mu,\, 1-a].$$

Für $a = 0$ ist $C_\mu = [\mu, 0]$, wofür man auch $[\mu, 1]$

schreiben kann, also $C_\mu = [\mu, 1]$; $C_{m-\mu+1}$ wird aber ebenfalls $= [\mu, 1]$; also ist für $a = 0$, $C_\mu = C_{m-\mu+1}$.

Für $a = 1$ hat man $C_\mu = [m-\mu, 0] = [m-\mu, 1]$, $C_{m-\mu-1} = [m-\mu, 1]$, daher $C_\mu = C_{m-\mu-1}$.

Für $a = \frac{1}{2}$ wird $C_\mu = [\frac{1}{2} + \mu, \frac{1}{2}]$, $C_{m-\mu} = [\frac{1}{2} + \mu, \frac{1}{2}]$ (nach der zweiten Form), also $C_\mu = C_{m-\mu}$.

Setzt man $A_m = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 \ldots + (-1)^m C_m$, so ist also für $a = 0$, $C_0 = 0$, $C_1 = C_m$, u. s. w., daher wenn m eine gerade Zahl ist, $A_m = 0$.

Für $a = 1$ wird $C_m = 0$, $C_0 = C_{m-1}$ u. s. w.; daher wieder für ein gerades m, $A_m = 0$.

Für $a = \frac{1}{2}$ ist $C_0 = C_m$, $C_1 = C_{m-1}$ u. s. w., also für ein ungerades m, $A_m = 0$.

Das Polynom A_m ist folglich durch $a(a-1)$ theilbar, wenn m gerade, hingegen durch $2a - 1$, wenn m ungerade ist.

Insbesondere ist daher für $a = 1$

$$(1-x)^{m+1} S_m = 1 + x^{m-1} + C_1(x + x^{m-2}) + \ldots$$

$$+ C_\mu (x^\mu + x^{m-\mu-1}) \ldots$$

$$+ C_{\frac{m}{2}-1}\left(x^{\frac{m}{2}-1} + x^{\frac{m}{2}}\right) \text{ wenn } m \text{ gerade}$$

oder

$$+ C_{\frac{m-1}{2}} x^{\frac{m-1}{2}} \text{ wenn } m \text{ ungerade ist.}$$

Eine andere Eigenschaft der C wird ausgedrückt durch die Gleichung:

$$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_m = m!$$

Zum Beweise multiplicire man S_m mit $(1-x)^m$; es sei

$$(1-x)^m S_m = E_0 + E_1 x + E_2 x^2 + \ldots + E_\mu x^\mu + \ldots$$

so wird $E_0 = a^m$, $E_1 = (a+1)^m - m_1 a^m$, u. s. w., $E_{m-1} = (a+m-1)^m - m_1 (a+m-2)^m \ldots\ldots + (-1)^{m-1} m_1 a^m$ oder $E_{m-1} = \Delta^m (a+m-1)^m - (1-a)^m$.

Da aber allgemein $\Delta^m (z^m) = m!$ ist, so folgt

$$E_{m-1} = m! - (1-a)^m.$$

Für $\mu = m$ oder $\mu > m$ wird $E_\mu = \Delta^m (a+\mu)^m = m!$, daher $(1-x)^m S_m = E_0 + E_1 x + E_2 x^2 \ldots$

$$+ E_{m-2} x^{m-2} - (1-a)^m x^{m-1} + \frac{m!\, x^{m-1}}{1-x}$$

oder $$(1-x)^{m+1} S_m = (E_0 + E_1 x \ldots$$

$$+ E_{m-2} x^{m-2} - (1-a)^m x^{m-1})(1-x) + m!\, x^{m-1}.$$

Das Polynom rechter Hand muss mit dem obigen $C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_m x^m$ übereinstimmen, und zwar für jedes x; daher folgt für $x = 1$, $C_0 + C_1 \ldots + C_m = m!$.

Es sei

$$S_{m+1} = \frac{C'_0 + C'_1 x + C'_2 x^2 + \ldots + C'_{m+1} x^{m+1}}{(1-x)^{m+2}}$$

oder nach der im Eingange erwähnten Relation

$$\frac{d(x^a S_m)}{x^{a-1} dx} = S_{m+1},$$

$$\frac{d\left(\frac{C_0x^a+C_1x^{a+1}+\ldots+C_mx^{a+m}}{(1-x)^{m+1}}\right)}{x^{a-1}\,dx}=\frac{C'_0+C'_1x+\ldots+C'_{m+1}x^{m+1}}{(1-x)^{m+2}},$$

so folgt nach einer leichten Rechnung für alle μ von 0 bis $\mu=m+1$ die Recursionsformel

$$C'_\mu=(a+\mu)\,C_\mu+(m+2-a-\mu)\,C_{\mu-1},$$

wo $C_{m+1}=0$ zu setzen ist.

Für $m=1$ ist $C_0=a$, $C_1=1-a$; wenn nun a und $1-a$ beide positiv sind oder auch eine dieser Grössen $=0$ ist, so zeigt vorstehende Formel, dass alsdann die C für jedes beliebige m immer positiv sind.

Setzt man $C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_mx^m=\Psi(x,a)$ und bildet hiernach $\Psi(x,a+n)=C_0^{(n)}+C_1^{(n)}x+\ldots+C_m^{(n)}x^m$, so ergiebt sich die Summe der endlichen Reihe

$$S'_m=a^m+(a+1)^mx+(a+2)^mx^2+\ldots+(a+n-1)^mx^{n-1},$$

nämlich

$$S'_m=\frac{\Psi(x,a)-x^n\Psi(x,a+n)}{(1-x)^{m+1}}=\frac{N}{(1-x)^{m+1}}.$$

Diese Formel gilt für jedes x, da die bei der unendlichen Reihe nothwendige Bedingung $x^2<1$ hier wegfällt. Für $x=1$ und $x=-1$ findet sich S'_m aus bekannten Summationsformeln; aus der vorstehenden Formel würde sich der Werth von S'_m für $x=1$ nur durch wiederholte Differentiationen des Zählers N ergeben. Für $x=-1$ giebt dagegen die Formel nicht unbequeme Entwickelungen. Es sind z. B. $m=4$ und $A_4=$

$$a^4-\{(a+1)^4-5a^4\}+(a+2)^4-5(a+1)^4+10a^4-$$
$$\{(2-a)^4-5(1-a)^4\}+(1-a)^4,$$

oder

$$A_4=16a^4-6(a+1)^4+(a+2)^4-(2-a)^4+6(1-a)^4=$$
$$16(a^4-2a^3+a).$$

Wird hiernach gesetzt $B_4=16\big((a+n)^4-2(a+n)^3+a+n\big)$, so wird $S_4'=\frac{16(A_4-(-1)^nB_4)}{32}$ oder $a^4-(a+1)^4+(a+2)^4\ldots+(-1)^{n-1}(a+n-1)^4=$

$$\tfrac{1}{2}\{a^4-2a^3+a-(-1)^4\big((a+n)^4-2(a+n)^3+a+n\big)\}.$$

Eben so findet sich $A_5=22a^5-7(a+1)^5+(a+2)^5-22(1-a)^5+7(2-a)^5-(3-a)^5$, das ist $A_5=16(2a^5-5a^4+5a^2-1)$ und hieraus

$$a^5-(a+1)^5+(a+2)^5-\ldots+(-1)^{n-1}(a+n-1)^5=$$
$$\tfrac{1}{4}\{2a^5-5a^4+5a^2-1-(-1)^n\big(2(a+n)^5-5(a+n)^4+5(a+n)^2-1\big)\}.$$

Zur leichten Berechnung der Summe der unendlichen Reihe

$$S_m=1+2^mx+3^mx^2+4^mx^3+5^mx^4+\ldots,$$

wobei $x^2<1$ sein muss, dient für die ersten Werthe von m folgende Tafel:

$$(1-x)\,S_0=1,\ (1-x)^2S_1=1,\ (1-x)^3S_2=1+x,$$
$$(1-x)^4S_3=1+x^2+4x,$$
$$(1-x)^5S_4=1+x^3+11(x+x^2),\ (1-x)^6S_5=$$
$$1+x^4+26(x+x^3)+66x^2,$$
$$(1-x)^7S_6=1+x^5+57(x+x^4)+302(x^2+x^3).$$

$$(1-x)^8\, S_7 = 1+x^6+120(x+x^5)+1191(x^2+x^4)+2416x^3.$$

$$(1-x)^9\, S_8 = 1+x^7+247(x+x^6)+4293(x^2+x^5)+ 15619(x^3+x^4).$$

$$(1-x)^{10} S_9 = 1+x^8+502(x+x^7)+14608(x^2+x^6)+ 88234(x^3+x^5)+156190x^4.$$

$$(1-x)^{11} S_{10} = 1+x^9+1013(x+x^8)+47840(x^2+x^7)+ 455192(x^3+x^6)+1310354(x^4+x^5).$$

(Tiré du Bulletin, T. XXV pag. 225—229.)

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des Sciences.
Octobre 1878. C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences.
(Vass.-Ostr., 9e ligne, № 12.)

MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉPIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME III.

$\frac{15}{27}$ Juin 1865.

Quelques remarques analytiques à l'occasion d'un ouvrage de Mr. le Prince S. S. Ouroussof, par Ferd. Minding.

Dans un ouvrage sur les équations différentielles, publié à Moscou en 1863, Mr. le Prince Ouroussof vient de prendre en considération quelques-uns de mes travaux et de les soumettre à un jugement détaillé. C'est sans doute à cette circonstance que je dois l'exemplaire du dit ouvrage, que Mr. l'auteur a bien voulu faire parvenir entre mes mains. Je saisis avec empressement l'occasion de m'expliquer sur différents points mis en question, espérant qu'une libre discussion de ces objets ne sera pas sans quelque utilité. Il s'agit surtout de mon mémoire sur l'intégration des équations différentielles, publié par l'Académie en 1862 parmi les mémoires des savans étrangers. C'est à l'occasion d'une équation très connue, dont je me suis servi dans le dit mémoire, comme point de départ, que Mr. l'auteur ajoute les remarques suivantes (p. 117).

1) La substitution appliquée dans le mémoire cité ne permet de résoudre le problème, que lorsque (dans l'équation $Mdx + Ndy = 0$) M et N sont