TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 253 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

IX

TARTU 1970

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
TRANSACTIONS OF THE TARTU STATE UNIVERSITY
ALUSTATUD 1893 a. VIHIK 253 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

IX

TARTU 1970

О РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ В ТАРТУСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ В 1964—1967 ГОДЫ

Е. Габович, Ю. Каазик, Г. Кангро, Ю. Лумисте, Э. Тамме, Я. Хион

Под редакцией Г. Кангро и Ю. Лумисте

В развитии математики в Тартуском университете первое десятилетие второй половины XX века отличается возникновением ряда новых плодотворных направлений, которые являются основными и в настоящее время. Эти направления следующие:

I Общая алгебра
II Дифференциальная геометрия
III Вычислительная математика
IV Теория суммируемости
V История и основания математики.

Развитие направления общей алгебры в Тартуском университете связано с деятельностью Я. Хиона, который в 1955 г. в Московском университете защитил кандидатскую диссертацию по упорядоченным алгебраическим системам под руководством проф. Г. Куроша. В том же году Я. Хион начал работать в Тартуском университете. В настоящее время он с большим энтузиазмом руководит группой молодых алгебраистов. Многие результаты Я. Хиона по теории упорядоченных алгебраических систем вошли в монографию венгерского ученого Л. Фукса «Частично упорядоченные алгебраические системы», вышедшую в 1963 г. Более поздние работы Я. Хиона посвящены теории универсальных алгебр.

С плодотворной деятельностью Ю. Лумисте в Тартуском университете связано возникновение направления дифференциальной геометрии. В 1954 г. Ю. Лумисте усовершенствовался в Московском университете, а в 1957 г. окончил там же одногодичную аспирантуру под руководством проф. А. Васильева при кафедре дифференциальной геометрии. В 1962 г. Ю. Лумисте стал заведующим кафедрой алгебры и геометрии. Им была создана небольшая, но быстро развивающаяся исследовательская группа по дифференциальной геометрии. Следует отметить, что направление дифференциальной геометрии возникло в Тартуском университете уже в первой половине XIX в. (как первое и в том числе весьма плодотворное научное направление по математике в Тарту), но в первой половине XX в. тартуские математики дифференциальной геометрией не занимались. В последнее время Тарту опять стал одним из центров дифференциальной геометрии.

Кандидатские диссертации учеников Г. Кангро — Л. Выханду (1955 г.), Ю. Каазика (1957 г.) и Э. Тамме (1958 г.), посвященные методам вычислений, послужили основой для направления вычислительной математики в Тартуском университете. Решающими событиями для развития направления вычислительной математики стало создание при университете вычислительного центра (1959 г.) и кафедры вычислительной математики (1962 г.). Наряду с исследованиями по методам вычислений важное место в Тартуском университете занимают исследования по математической экономике, начатые Ю. Каазиком.

С 1952 г. начались систематические исследования Г. Кангро по направлению теории суммируемости, хотя первая работа его по теории суммируемости вышла уже в 1942 г. В этом направлении работает группа исследователей, которые занимаются почти всеми более важными вопросами теории суммируемости.

К 50-ым годам относятся исследования М. Тамм, Г. Ряго и первые исследования Ю. Лумисте по истории математики в Тартуском университете, а также работы Ю. Лумисте по основаниям геометрии. Основу последним положили уже в первой половине XX в. Ю. Нут, Я. Сарв и А. Хумал своими исследованиями по основаниям геометрии.

I Общая алгебра

Исследования по общей алгебре велись по следующим вопросам:

1) упорядоченные алгебраические системы;
2) универсальные алгебры.

1. Е. Габович продолжал свои исследования по теории упорядоченных полугрупп. В работе [1], представляющей собой изложение обзорного доклада по теории упорядоченных полугрупп, Е. Габович доказывает, что классы вполне доупорядочиваемых и доупорядочиваемых полугрупп и даже нильпотентных полугрупп различны. В работе [2] показано, что наложение на упорядоченную периодическую полугруппу условий, носящих в некоторой степени групповой характер, приводит к различным классам упорядоченных идемпотентных полугрупп. Полностью описан класс вполне доупорядочиваемых нильполугрупп. Он оказался близким классу полугрупп с нулевым умножением, которой содержится в нем в качестве подкласса.

В работе [4] изучаются упорядоченные периодические полугруппы и доказывается, что в случае, когда подполугруппа идемпотентов такой полугруппы коммутативна или очень мало отличается от таковой, рассматриваемая полугруппа разлагается в связку своих одноидемпотентных нилькомпонент. Строение этой связки полностью описано в работе [3] для того частного случая, когда все нилькомпоненты моногенны.

Названные выше результаты, а также ряд полученных ранее или же еще не опубликованных результатов объединены в диссертации Е. Габовича [4]. Из неопубликованных нигде, кроме [4], результатов назовем отрицательное решение проблемы о том, будет ли любая упорядоченная полугруппа являться o-эпиморфным образом упорядоченной свободной полугруппы, а также описание полугруппы сохраняющих порядок эндоморфизмов ординальной суммы упорядоченных нильполугрупп.

2. Я. Хион [1—6] проводил систематическое изучение одного важного и достаточно общего класса универсальных алгебр, называемых им Ω-кольцоидами, а также важного подкласса этого класса, состоящего из т. н. Ω-колец. Ω-кольцоиды — это универсальные алгебры, в системе операций которых выделена одна ассоциативная операция, дистрибутивная слева относительно всех операций. Если Ω-кольцоид порождается дистрибутивными справа элементами, то он называется Ω-квазикольцом, а если все его элементы дистрибутивны, то он называется Ω-кольцом. Понятия Ω-кольцоида и Ω-кольца, оказывается, лучше всех других известных систем применимы для изучения аналогии между теорией полугрупп и теорией колец.

Я. Хионом доказано, что любой Ω-кольцоид изоморфен Ω-подкольцоиду т. н. симметрического Ω-кольцоида (состоящего из всех преобразований некоторой универсальной алгебры). Обобщая известные результаты академика А. И. Мальцева, относящиеся к симметрическим полугруппам, Я. Хион находит абстрактную характеристику симметрических Ω-кольцоидов и доказывает, что симметрические Ω-кольцоиды двух универсальных алгебр равны только лишь, если равны сами алгебры, любой автоморфизм симметрического Ω-кольцоида является внутренним, а группы автоморфизмов универсальной алгебры и ее симметрического Ω-кольцоида изоморфны.

В названных работах рассматривается также вопрос о существовании свободного унитарного расширения и его свойствах. Оказывается, что такое единственное с точностью до изоморфизма расширение существует в любом примитивном классе, не абсолютно вырожденном. Далее, для многообразия всех универсальных алгебр два таких расширения изоморфны лишь при изоморфизме самих алгебр.

Доказано, что для любой полугруппы и любой системы операций существует единственный свободный полугрупповой Ω-

кольцоид в любом многообразии, не вырожденным абсолютно, причем два таких Ω-кольцоида изоморфны лишь при изоморфизме исходных полугрупп. Кроме того, изучаются представления Ω-квазиколец квазиэндоморфизмами, т. е. конечными суммами эндоморфизмов универсальных алгебр, а также Ω-кольца и Ω-кольцоиды, близкие к кольцоидам с делением. Дается характеризация инверсных Ω-колец и Ω-кольцоидов.

Рассмотрению с единой точки зрения понятия Ω-кольцоида, изучению которого посвящен названный выше цикл работ, m-арных полугрупп и группоидов, интерес к которым возрос в последнее время, посвящена работа Я. Хиона [7]. Здесь вводится понятие Ω-системы, являющееся частным случаем многоосновной универсальной алгебры, и показано, что на этот широкий случай переносится целый ряд названных выше результатов, относящихся к Ω-кольцоидам.

М. Кильп [1] рассматривал т. н. квазиинъективные модули, т. е. модули, каждый гомоморфизм любого подмодуля которого можно продолжить до эндоморфизма всего модуля. Им выясняются условия, при которых абелевы группы являются квазиинъективными модулями.

II Дифференциальная геометрия

Тематика исследований охватывала следующие вопросы:

1) теория многомерных поверхностей в евклидовых пространствах;

2) теория связностей в расслоенных пространствах (вместе с приложениями к геометрии семейств плоскостей);

3) общие вопросы геометрии высшего порядка дифференцируемых многообразий.

1. Теории многомерных поверхностей в евклидовых пространствах посвящены исследования Р. Муллари [1, 2, 14], в которых умело используются преимущества метода подвижного репера и по-новому излагаются основы этой теории: формулы Бартельса—Френе и индикатрисы кривизны высших порядков. В [1] выделены и изучены некоторые интересные классы многомерных поверхностей: поверхности с паратактическими или абсолютно главными направлениями (в частности, поверхности с сопряженными системами таких направлений) и максимально симметричные поверхности.[1] В [8, 14] Р. Муллари исследовал огибающие нормальных плоскостей поверхности и доказал в частности, что огибающая существует тогда и только тогда, когда плоскость первой индикатрисы не содержит соответствую-

[1] Основные из этих результатов Р. Муллари весьма подробно освещены в выпуске «Геометрия. 1963» серии «Итоги науки» (Инст. научн. инф. АН СССР, Москва, 1965, стр. 20—21).

щую точку поверхности. Дано также полное описание положения и строения огибающей.

Более специальный характер имеют исследования Л. Туулметс о линейчатых гиперповерхностях V_3 в четырехмерном евклидовом пространстве. К классам таких V_3, рассмотренных в ее более ранних публикациях, прибавились: класс нормальных V_3 (т. е. допускающих двухмерную поверхность, ортогонально пересекающую все образующие) [2, 3, 5] и класс параболических V_3 (т. е. таких, у которых на каждой образующей совпадают квазифокусы) [2, 4, 5]. Получен ряд теорем, характеризующих геометрическое строение таких V_3. Ранее опубликованные результаты о минимальных гиперповерхностях V_3 ранга 2 дополняются исследованием изгибания таких V_3 в их классе [1].

К теории поверхностей в евклидовых пространствах тесно примыкает работа Ю. Лумисте [20] по теории семейств плоскостей в этих пространствах, охватывающей геометрию поверхностей с плоскими образующими. Ранее известные результаты (обзор последних содержится в совместной статье Ю. Лумисте [6] и Р. Гейдельмана) дополняются введением и изучением т. н. стрикционной индикатрисы. Решена также следующая задача о специальной поднормализации поверхности V_m: описать класс V_m, в каждой точке которых можно выбрать нормальную прямую так, чтобы получаемая $(m+1)$-мерная линейчатая поверхность имела ранг m. Этим обобщается результат А. В. Чакмазяна о т. н. двойственно нормализуемых поверхностях V_2 в четырехмерном пространстве.

Аффинную геометрию линейчатых поверхностей V_m рассматривал Ю. Лумисте в заметке [8]. В ней обобщена часть результатов, ранее полученных автором для многомерных линейчатых поверхностей в евклидовом пространстве.

2. Стремясь обогатить дифференциальную геометрию семейств плоскостей введением нового понятия внутренней или индуцированной связности, Ю. Лумисте пришел к необходимости развивать глубже общую теорию связностей в расслоенных пространствах с однородными слоями. Основы этой теории излагаются им в [5] и в первой части статьи [21], в которых дается синтез концепции Ш. Эресмана и Г. Ф. Лаптева. Связность вводится как отображение пространства путей в базе в пространство диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющие некоторым аксиомам. Линейные связности в расслоенном пространстве с однородными слоями (в однородном расслоении) и характеризующие их объекты детально изучены в [19] (результаты анонсированы в [12, 16]). Исходится из теоремы Г. Ф. Лаптева о возможности определить связность в главном расслоении формально с помощью 1-формы с полубазовой формой кривизны (для самой этой теоремы дается в [19] новое доказательство, из которого впервые становится ясным ее глобальный характер).

Теорема Лаптева и установленная в [21] тесная связь между связностями в ассоциированных главных и однородных расслоениях позволили Ю. Лумисте в [19] вывести т. н. «условия горизонтальности» — необходимые и достаточные условия, чтобы распределение, заданное на однородном расслоении, было горизонтальным распределением некоторой связности. С их помощью в [19] построены объекты кручения и кривизны высших порядков, которые определяют действие инфинитезимальной группы голономии на слое. Более детальное изучение этих объектов в одном частном случае — в случае однородных расслоений с резуктивными типовыми слоями — Ю. Лумисте проводит в [5, 18], где обобщаются результаты С. Кобаяси о связностях Картина (развитые одновременно также А. Гёцем).

Общим понятием, позволяющим перейти от общей теории связностей к ее приложениям в геометрии семейств плоскостей, является понятие погруженного однородного расслоения, введенное Ю. Лумисте в [21] (см. также [22]). Существенную роль при его определении играет более углубленная трактовка понятия инцидентности точек двух однородных пространств с общей группой Ли движений, ранее рассмотренного Ш. Чжэном. Погруженное расслоение — это многообразие пар $(x, X) \in G/H \times G/K$, где $x \in B \subset G/H$ и $X \in G/K$ инцидентны между собой (с фиксированным порядком инцидентности). Для него в [21] вводится общее понятие фокуса как критической точки его канонического отображения в G/K. Доказывается, что в случае редуктивного G/H в погруженном однородном расслоении индуцируется некоторая (внутренняя) связность. Для одного более общего случая дается общая схема оснащения.

Основные результаты о применении теории связностей в геометрии семейств плоскостей Ю. Лумисте анонсировал в [9]. В [13, 14, 17] он строил связку инвариантных оснащений для конгруенции плоскостей некоторого класса в аффинном пространстве A_n (ее весьма частный случай при $n=3$ указан в 1955 г. Р. Щербаковым). Систематическое изучение широких классов оснащений семейств плоскостей в проективном или аффинном пространстве, включающих оснащения Бортолотти, Гальвани и Нордена, дано им в [15]. Понятие внутренней связности Ю. Лумисте [20] широко использовал в теории семейств плоскостей в евклидовом пространстве. Исследованием семейств, у которых объект кручения внутренней связности обращается в нуль в некоторых точках плоскости, он показал наличие связей между свойствами этой связности и фокальными свойствами семейства. С этой точки зрения подробно исследованы конгруенции 2-мерных плоскостей в 4-мерном евклидовом пространстве.

3. Основаниям дифференциальной геометрии высшего порядка дифференцируемых многообразий V посвящены работы М. Рахула [1, 2] (см. также тезисы [3, 6]). Исследуются во-

просы, связанные дифференциальными продолжениями группы G диффеоморфизмов многообразия V и продолжениями самого многообразия V. Исходя из общих теоретико-множественных понятий строятся рекуррентно две последовательности: продолженных многообразий $V_{(i)}$ (где $V_{(i)}$ является многообразием касательных векторов к $V_{(i-1)}$) и продолженных групп $G_{(i)}$ (где $G_{(i)}$ состоит из дифференциалов $d^i a$ отображений $d^{i-1}a : V_{(i-1)} \to V_{(i-1)}$ и $d^0 a \equiv a \in G$). Показывается глубокая связь групп $G_{(i)}$ с группами G^i (где G^i — группа внутренних автоморфизмов группы G^{i-1} и $G^0 \equiv G$). Изучаются продолжения $d^i a_t$ однопараметрических подгрупп $a_t \subset G$ и определяемые ими векторные поля на $V_{(i)}$ (называемые деривациями $(i+1)$-го порядка на V). С помощью деривации 2-го порядка интерпретируются понятиия линейной связности на V и ее тензора кривизны. В тезисах [5] М. Рахула применил понятия продолженного многообразия $V_{(1)}$ и деривации 2-го порядка при анализе проблемы Пфаффа на V, т. е. в теории линейных распределений на V.

III Вычислительная математика

Исследования по вычислительной математике проводились в трех основных направлениях:

1) методы вычислений;

2) математическое планирование (программирование);

3) математические методы управления производством.

Исследования проводились также по автоматизации программирования, методам использования ЭВМ, статистическим методам и т. д. Из этих направлений лишь направление методов вычислений является более менее традиционным, работы по всем другим направлениям начались лишь в последние годы.

1. В области методов вычислений основное внимание уделялось исследованию приближенных методов решения дифференциальных уравнений. Г. Вайникко в [2, 3, 4, 7, 8] исследует сходимость и устойчивость методов типа Галеркина при решении линейных операторных и дифференциальных уравнений, а в [1, 4, 6, 10] сходимость этих методов в проблеме о собственных значениях. В работе [15] он выводит оценки сходимости более широкого класса приближенных методов в проблеме о собственных значениях; им получены, в частности, оценки для методов, укладывающихся в схему общей теории приближенных методов Л. В. Канторовича. В работе [14] Г. Вайникко развивает общую теорию приближенных методов для нелинейных уравнений, а в работе [16] приводит приложения к вопросу об устойчивости метода Галеркина—Петрова для нелинейных уравнений. В работах [5, 9] он исследует сходимость и устойчивость метода

коллокации при решении обыкновенных дифференциальных уравнений.

Р. Юргенсон [1—4], Э. Тамме [4] и И. Саарнийт [1] дают оценки погрешности для некоторых вариантов метода конечных разностей при решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Э. Тамме [8] дает условия сходимости метода итерации при решении разностного аналога квазилинейного интегро-дифференциального уравнения эллиптического типа. Э. Тамме [13] и И. Сырмус исследуют метод конечных разностей решения уравнения переноса излучения для анизотропного рассеяния. По численным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений написал учебное пособие Э. Тамме [10].

2. Большая часть работ вычислительного центра ТГУ связано с использованием математических методов и ЭВМ в экономике. Одним из таких направлений является исследование методов решения задач математического планирования. В этой связи составлено целый ряд программ для разных вариантов соответствующих алгоритмов. О результатах сравнения таких алгоритмов опубликованы работы М. Вийтсо [1], А. Лоссмана [1, 2] и Т. Аккеля [4]. Ведутся также исследования по составлению новых алгоритмов решения разных специальных задач математического планирования. Сюда относятся совместные работы Ю. Каазика [13, 15] и Э. Тамме по составлению конечного алгоритма для решения одного класса задач целочисленного планирования, являющихся нелинейным обобщением задачи о загрузке. А.-А. Ягель [2, 3, 5, 6] исследует задачи параметрического линейного программирования, в которых один столбец линейно зависит от нескольких параметров или два столбца от одного параметра. Л. Кивистик [2] выработал метод решения одной специальной задачи математического планирования, связанной с полиномами. О методах математического планирования несколько методических статей и учебных пособий написали Ю. Каазик [1, 2, 3, 14, 16], И. Кулль [4, 5, 9] и А.-А. Ягель [1, 4].

3. Целый ряд работ посвящен математическим методам планирования и управления производством. Под руководством Ю. Каазика [3, 7—9, 12] и Р. Муллари [3—7, 9—13, 15—16] исследуются разные аспекты математической постановки соответствующих проблем и возможностей конкретного использования ЭВМ для их решения. Развиваемый ими подход характеризуется отысканием возможностей управления случайностями в процессе производства и разбивкой конкретного применения вырабатываемых методов на взаимосвязанные этапы. Из таких этапов, например, методы составления производственных заданий для механического цеха выработаны С. Эрман [1, 2] и М. Круллем [1, 2]. Над приспособлением этих методов к другим заводам работали И. Саарнийт [2] и др. Математические методы рационального составления карт раскроя для швейных фабрик разработаны Л. Приском [1]. Специальный алгоритм планирования работы литейного цеха выработали В. Тинн [1] и др. При помощи имитирования на ЭВМ исследовались возможности сравнения разных методик текущего календарного планирования и определялись необходимые количественные соотношения. Основные результаты в этой области получили Р. Муллари [10] и У. Праги [1]. Можно также отметить работу А. Оя [1].

Из других применений математических методов в экономике можно, в первую очередь, отметить работы Т. Аккеля [1—3] по исследованию математических моделей сельского хозяйства. Ю. Тапфер [2, 3] выработал методы решения разных задач, связанных с балансовыми моделями. Путем имитирования на ЭВМ В. Тинн [2] разработал метод определения наиболее выгодного комплекса машины для сланцевых шахт. Э. Тийт [2] рассмотрела задачу проектирования сельской электрической сети, а И. Кулль [1] — использование математических методов при планировании строительных районов.

Исследовались также возможности применения математических методов и ЭВМ в некоторых других науках, кроме экономики. Из многочисленных таких работ следует отметить результаты Ю. Кихо [1, 2] и А. Ихер [1] в области органической химии, а также результаты Р.-А. Ноорма [1, 2] в физике атмосферы.

4. Начались исследования по разным методам математической статистики. Р. Тамместе [1, 2] применяет методы теории информации при обобщении корреляционных методов для исследования взаимосвязанности случайных векторов.

В вычислительном центре ТГУ проводились также работы по методам программирования и рационального использования ЭВМ. К этой области относятся работы А. Корьюса [1, 2] по составлению транслятора с языка АЛГОЛ-60, работы В. Аллсалу [1] и А. Ягера [1] по системам автоматизации программирования, работа Э. Ласна [1] по новым системам тест-программ и т. д. Написано также ряд методических работ и учебных пособий по программированию (И. Кулль [7], М. Крулль [3], Ю. Каазик [4, 5, 17]).

И. Кулль [6, 8, 10, 11] положил начало исследованиям по логико-математическому моделированию процесса обучения. В этом направлении изучается логическая структура предмета преподавания и рассматриваются проблемы управления и организации процесса обучения. А. Таутс [2—4] выработал методы решения логических уравнений исчисления предикатов первого и второго порядка и исследует возможности определения значений истинности бесконечными формулами [5].

IV Теория суммируемости

Изучались, главным образом, следующие вопросы:[2]

1) множители суммируемости и их применения;

2) общая теория методов суммирования;

3) тауберовы и мерсеровы теоремы.

1. Подробное изложение основ теории множителей суммируемости имеется в книге С. Барона [6]. В работе [3] им найдены достаточные условия для функции $W(n)$ (множителя Вейля), при выполнении которых из сходимости ряда $\Sigma c^2_n W(n)$ вытекает абсолютная суммируемость почти всюду (методом Чезаро или методом взвешенных средних Рисса) ортогонального ряда $\Sigma c_n \varphi_n(x)$. Полученные результаты применяются для нахождения множителей абсолютной суммируемости ортогональных рядов. С. Барон также показывает, что в случае абсолютной суммируемости справедлива теорема И. И. Волкова о несравнимости методов Чезаро порядков α и β при $\operatorname{Re}\alpha = \operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Im}\alpha \neq \operatorname{Im}\beta$.

Эффективные точные (т. е. необходимые и достаточные) условия для некоторых классов множителей суммируемости и абсолютной суммируемости в случае метода Чезаро комплексного порядка найдены М. Абелем [1].

Г. Кангро и Ю. Ламп [1] ввели класс K^{α} нормальных матричных методов, в обратных матрицах которых имеется не больше α отличных от нуля диагоналей. Устанавливаются эффективные точные условия для того, чтобы произведение двух последовательностей соответственно из классов K^{α} и K^{β} было суммируемым произвольным треугольным методом. Из полученных условий выводятся точные условия для обобщенных множителей суммируемости (в терминах обычных множителей суммируемости).

Применениями множителей суммируемости занимались М. Тыннов и С. Барон. Весьма общие результаты получил М. Тыннов [1—3] при изучении следующих двух проблем:

а) Какому классу принадлежит ряд Фурье, если коэффициенты ряда являются множителями суммируемости некоторого класса?

б) Какому классу принадлежит преобразование ряда Фурье из данного класса, получаемое умножением коэффициентов Фурье на соответствующие множители суммируемости некоторого класса?

При исследованиях М. Тыннова решающую роль играют т. н. дополнительные пространства, общее определение и общая теория которых также разработаны им [2].

---

[2] Некоторые результаты, относящиеся к первым двум вопросам, более подробно излагаются в статье Г. Кангро [4].

Известно, что в то время, как сходимость и суммируемость ряда Фурье функции f — локальные свойства f, абсолютная сходимость этого ряда уже не является локальным свойством функции f. При помощи понятия о множителях абсолютной суммируемости С. Барон [4] (для широкого класса нормальных матричных методов суммирования) установил достаточные условия для того, чтобы абсолютная суммируемость ряда Фурье функции f являлась или не являлась локальным свойством функции f.

2. Общей теорией методов суммирования занимались Э. Юримяэ и Э. Реймерс.

С 1949 г. были известны точные условия совершенности матричных методов только для корегулярных реверсивных методов. Э. Юримяэ [4] нашел точные условия совершенности, справедливые и для конулевых реверсивных методов. Обобщая понятие корегулярного метода, Э. Юримяэ называет консервативный (т. е. сохраняющий сходимость) метод O-совершенным, если все ограниченные последовательности в поле суммируемости этого метода являются точками прикосновения множества сходящихся последовательностей, и устанавливает разные точные условия для O-совершенности конулевого метода. Особенно важным является понятие O-совершенности в случае абсолютной суммируемости, так как на абсолютно O-совершенные методы, как показал Э. Юримяэ [1], можно переносить многие общие теоремы из теории обычной суммируемости. Он [2] также вводит понятия об абсолютно корегулярных и конулевых методах суммирования. Изучая свойства обобщенных матричных методов суммирования, элементами матриц которых служат непрерывные линейные операторы из банахова пространства в такое же пространство, Э. Юримяэ [5] показывает, что многие известные свойства обычных корегулярных матричных методов суммирования без дополнительных ограничений на корегулярные обобщенные матричные методы не переносятся.

Уже в 1962 г. Э. Реймерс, пытаясь найти общий вид непрерывного линейного функционала на пространстве ограниченных последовательностей при помощи методов суммирования последовательностей, пришел к новым методам суммирования, названным им в начале полиматричными, а потом континуальными методами суммирования. Впоследствии Э. Реймерс [2] показал, что теорию интеграла Лебега в случае ограниченных измеримых функций можно свести к теории континуальных методов суммирования последовательностей. При этом интеграл Лебега от ограниченной измеримой на отрезке $[0, 1]$ функции $x(t)$ можно истолковать как сумму некоторой соответствующей функции $x(t)$ последовательности $\{\xi_n\}$ известным континуальным методом, не зависящем от $x(t)$.

Общие свойства поля суммируемости матричного метода тесно связаны с теорией локально выпуклых пространств. Х. Эплер [1] показал, что каждое локально выпуклое пространство E является проективным пределом некоторого семейства (E_α) полунормированных пространств, причем сильное сопряженное E' пространства E совпадает с индуктивным пределом семейства сильных сопряженных (E'_α), а второе сильное сопряженное E'' пространства E — с проективным пределом семейства вторых сильных сопряженных (E_α'').

3. Т. Сырмус [3], продолжая свои исследования по мерсеровым теоремам, выводит мерсеровы теоремы для непрерывного аналога метода Хаусдорфа, а также для некоторых специальных методов, связанных с непрерывными аналогами методов Гёльдера и Чезаро. Полученные мерсеровы теоремы применяются при асимптотическом решении некоторых интегральных уравнений типа Вольтерра.

Имея в виду определенные применения, Т. Сырмус [2] ставит следующую тауберову задачу: найти условия, при которых из A-суммируемости B-преобразования последовательности x следует A-суммируемость последовательности x. Эта задача решается ею (при помощи мерсеровых теорем) в случае, когда A — полунепрерывный метод Якимовского (т. е. полунепрерывный аналог метода Хаусдорфа), а B — известные частные методы Хаусдорфа. При этом на последовательность x налагаются некоторые тауберовы условия.

С целью просуммировать известные расходящиеся интегралы, встречающиеся в квантовой теории поля, П. Нуума [1] вводит некоторый метод суммирования последовательностей и переносит этот метод на случай суммирования расходящихся интегралов.

V История и основания математики

В этом направлении рассматривались:

1) история математики в Эстонии;

2) основания геометрии (пространства порядка).

1. Общий обзор истории математики в Эстонии впервые дается в серии статей Ю. Лумисте [1]. Материалы, относящиеся к XVII столетию, приводятся им также в [10]. Краткий обзор развития математики в Советской Эстонии (совместно с Э. Тамме) дается в [11]. Более подробно последняя тема излагается в коллективной работе (см. Ю. Лумисте [3] и др.). Историю математики в Тартуском университете в XIX веке Ю. Лумисте излагает в [24] (частично совместно с И. Депманом). Э. Тамме в резюме доклада [6] кратко характеризует первую научную работу выдающегося выпускника Тартуского университета в конце XIX века П. Боля.

2. Исследования эстонскиих математиков старшего поколения (Ю. Нут, Я. Сарв, А. Хумал) по аксиоматике понятия «между» продолжал Ю. Лумисте. Рассматривая соответствующие «пространства порядка», которые были введены еще Б. Расселем в 1903 г. и затем исследовались многими авторами (О. Веблен, Э. Гентигтон и др.), он ввел в [7] понятие размерности n такого пространства и показал, что при $n > 2$ каждое пространство порядка (или модель промежуточности, как его называет Ю. Лумисте) изоморфно выпуклой области в n-мерном векторном пространстве над линейно упорядоченным телом. (Развернутые изложения некоторых деталей доказательства приведены им в [4].) В [7] Ю. Лумисте вводит также понятие репера в пространстве порядка и определяет группу движений как группу автоморфизмов пространства, просто-транзитивную на множестве реперов. Если в пространстве порядка удовлетворяется еще аксиома непрерывности, то этот путь приводит естественным образом к простой и полной аксиоматике классической абсолютной геометрии. Построение геометрии на основе этой аксиоматики Ю. Лумисте дает в [4] (результат анонсирован им в [2]).

БИОБИБЛИОГРАФИЯ

Ниже приведены научные статьи, учебники и учебные пособия по высшей математике, опубликованные учеными ТГУ в 1964—1967 гг., а также диссертации по математике, защищенные в этот период. Работы, напечатанные на ротапринте отмечены звёздочкой. Список научных работ эстонских математиков за 1944—1963 гг. приведен в статье Ю. Лумисте [3] и др.

Абель Мати Адольфович, род. 17 дек. 1942 в Кохтла-Ярвеском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1966), в 1966—1967 работал в Тартуском ун-те, в 1967—1968 в Таллинском политехн. ин-те, с 1968 аспирант Тартуск. ун-та.

1. Множители суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 92—105.
2. Множители φ-сходимости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 106—121 (совм. с Х. Тюрнпу).

Аккель Тыну Ханс-Фридрихович, род. 1 марта 1936 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1959), аспирантуру там же (1965), в 1965—1968 работал в Эст. отд. ЦЭМИ АН СССР, с 1968 работает в НИИ земледелия и мелиорации Мин. сельск. хоз. Эст. ССР.

1. Lineaarse planeerimise rakendamine loomakasvatuses. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **6**, 27—37.
2.* Математические модели производства и использования кормов. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1966, 8, 3—53.
3. Расчет оптимальной структуры посевных площадей под кормовые культуры для сельскохозяйственного предприятия. Математические модели оптимального планирования, Новосибирск, 1966, 164—170 (совм. с Л. Рахула).
4.* О приближенном решении специальных задач линейного программирования. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967, **10**, 33—37.

Аллсалу Вильяр Альбертович, род. 24 янв. 1937 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1960), с 1961 работает в Тартуском ун-те.

1.* Система автоматизации программирования для ЭВМ «Урал-4». Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1966, **7**, 26—61.

Арива Карл Оскарович, род. 10 янв. 1924 в Вильяндиском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1963), с 1963 работает в Тартуском ун-те.

1.* Analüütiline geomeetria, I. Tartu, 1967, 92 lk.

2. Lobatševski geomeetria. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **12**, 73—90; 1967, **13**, 71—87.

Барон Симсон Абрамович, род. 20 апр. 1929 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1956), аспирантуру там же (1959), канд. физ.-матем. наук (1959), доцент (1963), с 1960 работает в Тартуском ун-те.

1. К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г. Кангро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 3—11 (совм. с Э. Юримяэ, Э. Реймерсом и Т. Сырмус).
2. См. Ю. Лумисте [3].
3. О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 165—181.
4. О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 106—120.
5. Elementaarfunktsioonidest. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **8**, 12—17.

6.* Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966, 200 стр.

7.* См. Э. Реймерс [3].

Вайникко Геннадий Михайлович, род. 31 мая 1938 в г. Гондопога Карельской АССР, окончил Тартуский ун-т (1961), аспирантуру там же (1964), канд. физ.-матем. наук (1964), доцент (1967), в 1963—1965 работал в Тартуском ун-те, в 1965—1967 в Воронежском ун-те, с 1967 работает в Тартуском ун-те.

1. Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **4**, № 3, 405—425.
2. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова—Галеркина I. Асимптотические оценки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 188—201.
3. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова—Галеркина II. Оценки n-ого приближения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 202—215.
4. О точности методов типа Галеркина. Диссертация, Тарту, 1964, 202 стр. — Автореферат дисс., Тарту, 1964.
5. О сходимости и устойчивости метода коллокации. Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 2, 244—254.
6. Оценки погрешности метода Бубнова—Галеркина в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, **5**, № 4, 587—608.
7. Необходимые и достаточные условия устойчивости метода Галеркина—Петрова. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 141—147.
8. К вопросу о сходимости метода Галеркина. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 148—153.
9. О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 1, 35—42.
10. О быстроте сходимости некоторых приближенных методов типа Галеркина в проблеме собственных значений. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 2, 37—45.

11—12. См. Т. Сырмус [5, 6].

13. Возмущенные проекционные методы и общая теория приближенных методов. Международный конгресс математиков. Тезисы кратких научн. сообщ. Москва, 1966, **14**, 27.
14. Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, **7**, № 4, 723—751.
15. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, **7**, № 5, 977—987.

16. Об устойчивости метода Галеркина—Петрова для нелинейных уравнений. В сб. «Пробл. матем. анализа сложн. систем». Воронежск. ун-т, 1967, **1**, 12—15.
17. Решение экстремальных задач с помощью облучающихся программ. В сб. «Пробл. матем. анализа сложн. систем». Воронежск. ун-т, 1967, **1**, 16—24 (совм. с Ю. Петуниным).

Вийтсо Майе Хербертовна, род. 4 мая 1939 г. в Эльваском р-не Эст. ССР, окончила Тартуский ун-т (1963), в 1963—1965 работала в Тартуском ун-те, с 1965 работает в Эст. отд. ЦЭМИ АН СССР.

1.* Программы симплексного метода для ЭВМ «Урал-4». Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967, **10**, 38—67.

Габович Евгений Яковлевич, род. 30 авг. 1938 г., окончил Тартуский ун-т (1962), канд. физ.-матем. наук (1968), в 1962—1963 работал там же, в 1964 — аспирант Московского ун-та, с 1965 работает в Эст. отд. ЦЭМИ АН СССР.

1. Упорядоченные полугруппы. Межвуз. симпозиум по общей алгебре. Тарту, 1966, 13—31.
2. Абстрактные характеристики некоторых классов упорядоченных полугрупп. VIII Всесоюзн. колл. по общей алгебре. Рига, 1967, 15.
3. Слабоголоидные полугруппы. VIII Всесоюзн. колл. по общей алгебре. Рига, 1967, 15.
4. Упорядоченные полугруппы. Диссертация, Тарту, 1967, 100 стр.
   — Автореферат дисс. Тарту, 1967.

Ихер Айн Рихардович, род. 7 сент. 1939 в Выруском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1964), в 1965—1968 работал в Тартуском ун-те, с 1968 работает в НИИ земледелия и мелиорации Мин. сельск. хоз. Эст. ССР.

1.* Обработка экспериментальных данных методом корреляционных уравнений с использованием ЭВМ. Реакционная способность органических соединений, 1965, **2**, 108—118 (совм. с Ю. Кихо).

Каазик Юло Янович, род. 9 нояб. 1926 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1953), канд. физ.-матем. наук (1957), доцент (1959), с 1953 работает в Тартуском ун-те.

1.* О плановом руководстве социалистической экономикой и системе экономических рычагов. Тарту, 1964, 22 стр. (совм. с В. Пальм).
2. Lineaarsed planeerimisülesanded. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **2**, 31—46.
3. Majandusmatemaatika-alaseid töid TRÜ arvutuskeskuses. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **2**, 47—50 (kaasautorid R. Mullari ja E. Saareste).
4. Elektronarvutid ja programmeerimine. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **4**, 18—30.
5. Algoritmide blokk-skeemid. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **5**, 24—36.
6. Automaatne programmeerimine. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **6**, 14—24; 1965, **7**, 28—39 (kaasautor A. Korjus).
7. Kalendrilise planeerimise ülesannete matemaatiline lahendamine. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **7**, 40—47 (kaasautor R. Mullari).
8. Matemaatiliste meetodite rakendamisest tehase töö kalendrilisel planeerimisel. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **169**, 55—62 (kaasautor R. Mullari).
9.* О подходе к математическому решению задач текущего планирования. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1965, **6**, 1—10 (совм. с Р. Муллари).
10. Hulkliikmete astendamine. Matemaatika metood. art. kogumik, 1965, **3**, 36—49.
11. Genereerivad funktsioonid ja summade arvutamine. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **9**, 25—39.
12. К задаче календарного планирования работы цеха. Труды Ленингр. инж.-экон. ин-та, 1966, **58**, 142—154 (совм. с Р. Муллари).

13. Алгоритм решения специальных задач нелинейного целочисленного программирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 121—128 (совм. с Э. Тамме).
14. Tarbimise matemaatiline uurimine. Matemaatika ja kaasaeg, 1966, **10**, 30—37 (kaasautor Ü. Remmel).
15. Laadimisülesanded. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **12**, 64—72 (kaasautor E. Tamme).
16. Matemaatiline planeerimine. Tallinn, 1967, 320 lk.
17.* Arvutid ja programmeerimine II. Tartu, 1967, 155 lk.
18. Matemaatika õpetamisest Ameerika Ühendriikide ülikoolides. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **13**, 19—26.

Кангро Гуннар Фромхольдович, род. 21 нояб. 1913 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1935), магистр (1936), д-р физ.-матем. наук (1948), профессор (1951), в 1936—1941 работал в Таллинском политехн. ин-те, с 1944 работает в Тартуском ун-те, член-корр. АН Эст. ССР (1961), засл. деятель науки Эст. ССР (1965).

1. Об одном классе матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 80—90 (совм. с Ю. Лампом).
2. Проф. Херман Яаксон. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 3—5.
3. Matemaatiline analüüs I. Tallinn, 1965, 468 lk.
4. О некоторых исследованиях по теории суммируемости. Изв. АН ЭстССР, Физ., матем., 1967, **16**, № 3, 255—266.
5. Межвузовская летняя научная школа по теории суммируемости. Успехи матем. наук, 1967, **22**, № 1, 195—196.
6. Integraal maailma kohal. Rahvusvaheline matemaatikute kongress Moskvas 1966. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **12**, 3—15 (kaasautorid Ü. Lumiste, O. Prinits ja E. Tiit).
7. Jüri Nuudi elu ja teaduslik pärand. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **13**, 95—108 (kaasautorid Ü. Lumiste ja E. Tamme).

Кивистик Лембит Аугустович, род. 26 янв. 1930 в Вильяндиском р-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1955), аспирантуру при Ин-те кибернетики АН Эст. ССР (1960), канд. физ.-матем. наук (1961), доцент (1967), с 1960 работает в Тартуском ун-те.

1.* Variatsioonarvutus. Tartu, 1965, 147 lk.
2. Об одной задаче нелинейного планирования, связанной с многочленом. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 135—137.

Кильп Мати Александер-Бернхардович, род. 19 апр. 1942 в г. Йыхви, окончил Московский ун-т (1966), в 1966—1968 работал в Тартуском ун-те, с 1968 аспирант Московск. ун-та.

1. Квазиинъективные абелевы группы. VII Всесоюзн. колл. по общей алгебре. Кишинев, 1965, 51.

Кихо Юри Кристьянович, род. 2 авг. 1941 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1964), в 1965—1967 работал в Тартуском ун-те, с 1967 аспирант там же.

1.* См. А. Ихер [1].
2.* О некоторых первичных проблемах использования ЦЭВМ для применения метода акорреляционных уравнений в органической химии. Реакционная способность органических соединений, 1965, **2**, 88—107.

Корьюс Айн Хербертович, род. 8 мая 1935 в Тартуском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1959), аспирантуру там же (1964), в 1964—1965 работал в Тартуск. ун-те, в 1965—1966 в Вычисл. Центре Ныоской ср. школы Тартуск. р-на, с 1966 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1.* Описание входного языка системы автоматизации программирования. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1965, **5**, 3—118.
2. См. Ю. Каазик [6].

Крулль Мати Хуго-Александрович, род. 5 апр. 1937 в Пайдеском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1961), в 1961—1965 работал в Тартуском ун-те, в 1965—1968 в Вычисл. Центре Ныоской ср. школы Тартуск. р-на, с 1968 работает в НИИ земледелия и мелиорации Мин. сельск. хоз. Эст. ССР.

1.* Расчеты загруженности станочного парка завода. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1964, **4**. 3—67 (совм. с С. Эрман, М. Рахенди и Р. Муллари).
2.* Механическое составление производственных заданий. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1965, **6**, 11—31 (совм. с С. Эрман и Р. Муллари).
3. Elektronarvutid ja programmeerimine. Tallinn, 1966, 63 lk.

Кулль Ивар Георгиевич, род. 25 нояб. 1928 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1953), аспирантуру там же (1956), канд. физ.-матем. наук (1958), доцент (1963), с 1956 работает в Тартуском ун-те.

1. Ehitusrajoonide planeerimisest matemaatiliste meetodite abil. Ehitus ja Arhitektuur, 1964, 3, 3—8 (kaasautor O. Meremaa).
2. Анализ способов обучения с точки зрения семиотики. Тезисы докл. в летней школе по вторичным моделирующим системам. Тарту, 1964, 33—34.
3. Matemaatiline loogika. Tallinn, 1964, 222 lk.
4. Transport ja matemaatika. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **3**, 39—49.
5. Dünaamiline planeerimine. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **5**, 37—48.
6. Matemaatikaalaseid probleeme seoses õppeprotsessi optimiseerimisega. Täppisteaduste arengu ja metoodika põhiküsimusi Eesti NSV-s. Tartu, 1965, 44—48.
7.* Arvutid ja programmeerimine, Tartu, 1965, 254 lk.
8. Семиотика и обучение, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **181**, 11—21.
9. Lineaarsest planeerimisest. Matemaatika metood. art. kogumik, Tallinn, 1965, **3**, 11—35.
10. Semiootika ja õppeprotsess. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, 8, 34—42.
11. Модели в учебном процессе. Тарту, 1966, 15 стр.
12. Uut masintõlke ajaloos. Matemaatika ja kaasaeg, 1966, **11**, 21—26 (kaasautor R. Palm).
13. Algoritmid ja lahenduvad hulgad ning nende rakendusi. Matemaatika ja kaasaeg, 1967, **12**, 44—62 (kaasautor M. Tombak).
14. К проблеме тетралеммы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **198**, 60—63 (совм. с Л. Мялль).
15. О применении вычислительных машин в поиске юридической информации Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **199**, 289—292. (совм. с И. Я. Сильдмяэ, К. А. Ээремаа и Р. П. Нигол).
16. Модели в учебном процессе. В сб. «Программированное обучение». Минск, 1967, 51—58.
17. Проблема разрешимости в связи с некоторыми порождающими системами. Тезисы докладов межвузовской конференции по порождающим грамматикам, Тарту, 1967, 58 (совм. с М. Томбаком).

Ламп Юри Вальтерович, род 22 марта 1940 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1963), аспирантуру там же (1968), в 1963—1965 работал в Таллинском политехн. ин-те, с 1968 работает там же.

1. См. Г. Кангро [1].

Ласн Энн Иоханнесович, род. 7 апр. 1936 в Пярнуском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1960), аспирантуру там же (1966), в 1960—1963 работал в Тартуском ун-те, с 1966 работает там же.

1.* Тест-программы для ЭВМ «Урал-4». Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1966, **9**, 3—139.

Лоссман Аво Карлович, род. 12 авг. 1942 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1965), в 1965—1967 работал в Эст. отд. ЦЭМИ АН СССР, с 1967 работает в Конструкторском бюро Мин. легкой пром. Эст. ССР.

1.* О применении метода исправления обратной матрицы при алгоритме Гомори. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967, **10**, 28—32.
2.* Программа двойственного симплексного метода с двухсторонними ограничениями для ЭВМ «Урал-4». Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967, **10**, 68—84.

Лумисте Юло Гориевич, род. 30 июня 1929 в Вяндраском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1952), канд. физ.-матем. наук (1958), доцент (1960), д-р физ.-матем. наук (1968), с 1952 работает в Тартуском ун-те.

1. Lehekülgi matemaatika ajaloost Eestis. Matemaatika ja kaasaeg, 1963, **1**, 47—61; 1964, **2**, 64—76; 1964, **4**, 70—81.
2. Тернарное отношение «между» и группа движений. V Всесоюзн. колл. по общей алгебре. Резюме сообщений и докладов. Новосибирск, 1963, 36.
3. Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 12—52 (совм. с Э. Тамме и др.).
4.* Geomeetria alused. I. Tartu, 1964, 160 lk.
5. К основаниям глобальной теории связностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 69—108.
6. Геометрия семейств m-мерных плоскостей в n-мерных пространствах. Тр. Четвертого всесоюзн. матем. съезда, **2**, Ленинград, 1964, 201—206 (совм. с. Р. М. Гейдельманом).
7. О моделях промежуточности. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1964, № 3, 200—209.
8. К афинно-дифференциальной геометрии многомерных линейчатых поверхностей. Докл. Третьей сибирской конф. по матем. и мех. Томск, 1964, 195—196.
9. Связности в семействах плоскостей. Тезисы докл. Второй всесоюзн. геом. конф. Харьков, 1964, 152—153.
10. Преподавание математики и математические руководства в Эстонии в XVII веке. Материалы V конф. по истории науки в Прибалтике. Тарту, 1964, 10—12.
11. Развитие математики в Советской Эстонии. Материалы V конф. по истории науки в Прибалтике. Тарту, 1964, 12—14 (совм. с Э. Тамме).
12. Связности в однородных расслоениях. Успехи матем. наук, 1965, **20**, № 5, 263—265.
13. Средняя поверхность конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 5, 86—98.
14. Инвариантные оснащения конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 6, 93—102
15. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 6—41.
16. Связности в расслоениях с однородными слоями. Материалы Второй Прибалт. геом. конф. по вопр. диффер. геом., Тарту, 1965, 112—115.
17. Аффинная геометрия конгруэнций m-плоскостей. Материалы Второй Прибалт. геом. конф. по вопр. диффер. геом., Тарту, 1965, 116—120.
18. Связность в расслоенном пространстве с однородными редуктивными слоями. Тр. I Республ. конф. матем. Белорусской ССР, Минск, 1965, 247—258.
19. Связности в однородных расслоениях. Матем., сб., 1966, **69**, № 3, 419—454.
20. К теории многообразий плоскостей в евклидовом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 12—46.
21. Однородные расслоения со связностью и их погружения. Тр. геометрического семинара, I. Москва, 1966, 191—237.
22. Погруженные расслоения и индуцированные связности. Международный конгресс математиков. Тезисы кратких научн. сообщ. Москва, 1966, **9**, 34—35.
23. Вторая Прибалтийская геометрическая конференция по вопросам дифференциальной геометрии и летняя школа по дифференциальной геометрии. Успехи матем. наук, 1966, **21**, № 1, 215—220 (совм. с М. Рахула).
24. Математика в Дерптском университете. [В 30—50-е годы XIX в. (совм. с И. Депманом); в 60—80-ых годах XIX в.; в конце XIX — начале XX в.]. История отечественной математики, т. **2**. Киев, 1967, 138—145; 317—321; 517—524.
25. Расслояемые семейства 1-пар четырехмерного проективного пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 10—21.

26—27. См. Г. Кангро [6, 7].

Муллари Рюнно Райувич, род. 7 дек. 1931 в г. Таллине, ум. 2 дек. 1968 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1960), канд. физ.-матем. наук (1964), в 1960—1968 работал в Тартуском ун-те.

1. Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Диссертация, Тарту, 1963, 158 стр.
   — Автореферат дисс., Тарту, 1963.
2. Индикатрисы кривизны. Тезисы докл. Второй всесоюзн. геом. конф. Харьков, 1964, 182—183.
3. См. М. Крулль [1].

4—7. См. Ю. Каазик [3, 7, 8, 9].

8. Огибающая конгруэнции нормальных к $V_m \subset R_n$ плоскостей. Материалы Второй Прибалт. геом. конф. по вопр. диффер. геом. Тарту, 1965, 126—129.
9. См. М. Крулль [2].

10.* О календарном планировании работы литейного цеха. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1965, **6**, 32—50 (совм. с А. Крулль и В. Тинном).

11. Об одном методе обращения балансовых матриц. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 159—164 (совм. с Ю. Тапфером).
12. См. Ю. Каазик [10].
13. Расчеты на ЭВМ. Методы составления и анализа вариантов планового межотраслевого баланса республики. Таллин, 1966, 137—142 (совм. с Ю. Тапфером).
14. Индикатрисы кривизны высших порядков и огибание нормальных плоскостей для V_m в R_n. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 47—64.

15.* Производство — управление — ЭВМ. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967, **11**, 3—20. (совм. с И. Саарнийт).

16.* Имитирование работы цеха на ЭВМ. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967. **11**, 21—67 (совм. с. У. Праги).

Ноорма Рейн-Алар Юханович, род. 7 авг. 1938 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1962), с 1962 работает в Тартуском ун-те.

1. О спектральном распределении радиационных притоков тепла в свободной атмосфере. Физика атмосферы и океана, 1966, **2**, 121—136 (совм. с К. Кондратьевым и Х. Нийлиск).
2. О спектральном распределении интенсивности и потоков теплового излучения в свободной атмосфере. Исследования радиационного режима атмосферы (ИФА АН ЭССР), 1967, 74—109. (совм. с Х. Нийлиск).

Нуума Пээтер Оскарович, род. 1 февр. 1925 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1950), аспирантуру при Ин-те физики и астрон. АН Эст. ССР (1963), в 1956—1960 и 1963—1966 работал в Тартуском ун-те.

1. Об одном методе суммирования интегралов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 134—140.

Оя Арнольд Аугустович, род. 16 марта 1932 в г. Гатчина Ленинградской обл., окончил Тартуский ун-т (1956), в 1957—1967 работал в Тартуском ун-те, с 1967 аспирант Ин-та психологии АН Укр. ССР (Киев).

1. Imiteerimine uurimismeetodina. Matemaatika ja kaasaeg, 1966, **11**, 17—20.

Праги Удо Рихардович, род. 17 нояб. 1941 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1963), с 1965 работает в Тартуском ун-те.

1.* См. Р. Муллари [16].

Приск Лео Рейнович, род. 24 декаб. 1941 в Пярнуском р-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1965), в 1966—1967 работал в Тартуском ун-те, с 1967 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1.* О применении ЭВМ для составления планов настила и рационального раскроя тканей на швейных фабриках. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967, **10**, 12—27.

Рахула Майдо Оскарович, род. 20 мая 1936 в Пайдеском р-не ЭстССР, окончил Томский ун-т (1959), аспирантуру при Тартуском ун-те (1962), канд. физ.-матем. наук (1965), с 1962 работает в Тартуском ун-те.

1. К дифференциальной геометрии высшего порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 122—131.

2. К дифференциальной геометрии высшего порядка. Диссертация, Тарту 1964, 116 стр.
— Автореферат дисс., Тарту, 1964.
3. Определение продолженной группы преобразований. Тезисы докл. Второй всесоюзн. геом. конф. Харьков, 1964, 227—228.
4. Nurga trisektsioon hüperbooli abil. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **6**, 52—53.
5. К проблеме Пфаффа. Материалы Второй Прибалт. геом. конф. по вопр. диффер. геом. Тарту, 1965, 147—149.
6. Теоретико-множественные основы дифференциальной геометрии высшего порядка. Международный конгресс математиков. Тезисы кратких научн. сообщ. Москва, 1966, **9**, 41—42.

Реймерс Эльмар Густавович, род. 11 марта 1929 в г. Гатчине, окончил Тартуский ун-т (1954), аспирантуру там же (1957), канд. физ.-матем. наук (1958), доцент (1963), с 1957 работает в Тартуском ун-те.
1. См. С. Барон [1].
2. Континуальные методы суммирования и применения в теории функций. Международный конгресс математиков. Тезисы кратких научн. сообщ. Москва, 1966, **4**, 76—77.
3.* Matemaatilise analüüsi praktikum I. Tartu, 1967, 252 lk. (kaasautorid S. Baron, E. Jürimäe, T. Sõrmus ja M. Tõnnov).
4. Континуальные методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 50—89.

Рийвес Карин Владимировна, род. 23 авг. 1942 в г. Тарту, окончила Тартуский ун-т (1965), с 1966 аспирант Тартуск. ун-та.
1. Задача Дубнова в теории многомерных поверхностей. Материалы Второй Прибалт. геом. конф. по вопр. диффер. геом., Тарту, 1965, 150—151.

Саарнийт Иван-Игор Рихардович, род. 11 авг. 1940 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1963), в 1967—1968 работал в Эст. отд. ЦЭМИ АН СССР, с 1968 аспирант Тартуского ун-та.
1. Об апостериорной оценке погрешности приближенных решений дифференциальных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 216—230 (совм. с Э. Тамме).
2.* См. Р. Муллари [15].

Сырмус Тамара Иоханнесовна, род. 29 нояб. 1926 в г. Тарту, окончила Тартуский ун-т (1954), аспирантуру там же (1961), канд. физ.-матем. наук (1963), доцент (1968), с 1954—1959 работала в Тартуском ун-те, с 1961 работает там же
1. См. С. Барон [1].
2. Теоремы тауберова типа, связанные с методами Якимовского. Уч. зап. Тартуск. ун-та, **1965**, **177**, 67—79.
3. Об одной ассимптотической задаче. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 125—133.
4.* См. Э. Реймерс [3].
5.* Harilikud diferentsiaalvõrrandid, I. Tartu, 1967, 212 lk. (kaasautor G. Vainikko).
6.* Harilikud diferentsiaalvõrrandid. II. Tartu, 1967, 126 lk. (kaasautor G. Vainikko).

Тамме Энн Эдуардович, род. 1 июня 1930 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1955), аспирантуру там же (1958), канд. физ.-матем. наук (1958), доцент (1962), с 1958 работает в Тартуском ун-те.
1. Математика в Тартуском университете в 1920—1940 годах. Материалы V конф. по истории науки в Прибалтике. Тарту, 1964, 26—28.
2.—3. См. Ю. Лумисте [3, 11].
4. См. И. Саарнийт [1].
5. Pierre Fermat ja XVII sajandi matemaatika. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **5**, 74—87.
6.* О первой научной работе П. Боля. Юбилейные чтения, посв. памяти П. Г. Боля. Тезисы докл., Рига, 1965, 1—2.
7. Logaritmide sünd. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, 7, 88—102.

8. О решений интегро-дифференциальных уравнений эллиптического типа методом конечных разностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 154—158.
9. Bernhard Riemanni elust ja loomingust. Matemaatika ja kaasaeg, 1966, **11**, 57—64.
10.* Arvutusmeetodid V. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu, 1967, 176 lk.
11—12. См. Ю. Каазик [13, 15].
13. О решение уравнения переноса излучения для анизотропного рассеяния. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1967, **16**, № 4, 412—418 (совм. с И. Сырмус).
14. См. Г. Кангро [7].

Тамместе Рейн Аугустович, род. 29 янв. 1939 в Хийумааском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1960), аспирантуру там же (1965), в 1960—1962 работал в Тартуском ун-те, с 1965 работает там же.
1. О понятии информации. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1965, **165**, 37—54.
2. Вычисление энтропии распределения при помощи моментов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 104—120.

Тапфер Юрий Иоханнесович, род. 7 июля 1938 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1961), аспирантуру там же (1968), в 1961—1965 работал в Тартуском ун-те, с 1968 работает там же.
1. Eestikeelse teksti morfoloogiline analüüs automaatse tõlkimise seisukohalt. Keel ja Kirjandus, 1964, 158—163.
2.—3. См. Р. Муллари [11, 13].

Таутс Антс Иоханнесович, род. 22 июля 1936 в г. Тырва, окончил Тартуский ун-т (1960), аспирантуру при Ин-те физики и астрон. АН ЭстССР (1964), канд. физ.-матем. наук (1965), 1964—1966 работал там же, с 1966 работает в Тартуском ун-те.
1. Matemaatilise loogika rakendusi. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, 3, 13—19.
2. Решение логических уравнений в исчислении одноместных предикатов первого порядка. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1964, **24**, 3—16.
3. Решение логических уравнений в исчислении предикатов первого порядка методом итерации. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1964, **24**, 17—23.
4. Решение логических уравнений. Диссертация, Тарту, 1964, 126 стр. — Автореферат дисс., Тарту, 1964.
5. Определение значения истинности формулами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 3—9.

Тийт Эне Арнольдовна, род. 22 апр. 1934 в г. Тарту, окончила Тартуский ун-т (1957), аспирантуру там же (1962), канд. физ.-матем. наук (1966), с 1964 работает в Тартускому ун-те
1. Факторный анализ красных карликов. Публикации Тартуской Астрономической Обсерватории, 1964, **34**, 2, 156—168 (совм. с Я. Эйнасто).
2. Ühest elektrivõrkude projekteerimisel tekkinud ülesandest. Matemaatika ja kaasaeg, 1966, **10**, 38—46 (kaasautor E. Pillikse).
3. Mis on tõenäosus? Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **9**, 79—90; 1966, **10**, 70—88; 1966, **11**, 86—95.
4. См. Г. Кангро [6].

Тинн Вельё Антсович, род. 10 янв. 1939 в Вильяндиском р-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1962), с 1962 работает в Тартуском ун-те.
1. См. Р. Муллари [10].
2.* О применении моделирования для определения наиболее выгодного комплекса машин. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1965, **6**, 51—71.

Туулметс Лейда Аугустовна, род. 31 окт. 1933 в Йыгеваском р-не ЭстССР, окончила Тартуский ун-т (1959), аспирантуру там же (1963), канд. физ.-матем. наук (1966), с 1963 работает в Тартуском ун-те.
1. Изгибание минимальной конгруэнции V_3 в R_4. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н. 1964, **13**, № 3, 210—216.

2. Некоторые классы линейчатых гиперповерхностей в четырехмерном эвклидовом пространстве R_4. Тезисы докл. Второй всесоюзн. геом. конф. Харьков, 1964, 287—288.
3. Нормальные квазиконгруэнции V_3 в R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 109—121.
4. О некоторых классах линейчатых гиперповерхностей в евклидовом R_4. Материалы Второй Прибалт. геом. конф. по вопр. диффер. геом., Тарту, 1965, 167—169.
5. Некоторые классы линейчатых гиперповерхностей V_3 в евклидовом пространстве R_4. Диссертация, Тарту, 1966, 182 стр.
   — Автореферат дисс., Таллин, 1966.
6. Вторая средняя огибающая изотропной конгруэнции V_3 в R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 37—43.

Тыннов Маргус Михкелевич, род. 25 апр. 1936 в Тартуском у-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1960), аспирантуру там же (1964), канд. физ.-матем. наук (1967), с 1960 работает в Тартуском ун-те.

1. О связи между множителями суммируемости, коэффициентами Фурье и мультипликаторами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 154—164.
2. T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 65—81.
3. Множители суммируемости, коэффициенты и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—97.
4. Множители суммируемости в теории рядов Фурье. Диссертация, Тарту, 1967, 84 стр.
   — Автореферат дисс., Тарту, 1967.

Тюрнпу Хейно Альбертович, род. 5 июня 1936 в Хийумааском р-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1964), аспирантуру там же (1969), с 1965 работает в Тартуск. ун-те.

1. См. М. Абель [2].
2. Множители суммируемости для методов Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 90—263.

Хион Яак Викторович, род. 24 июля 1929 в г. Тарту, окончил Московский ун-т (1952), аспирантуру там же (1955), канд. физ.-матем. наук (1955), доцент (1967), в 1955—1968 работал в Тартуском ун-те, с 1968 работает в Эст. отд. ЦЭМИ АН СССР.

1. Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. Успехи матем. наук, 1964, **19**, № 5, 200—201.
2. Некоторые обобщения колец. VII Всесоюзн. колл. по общей алгебре. Кишинев, 1965, 106.
3. Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. VII Всесоюзн. колл. по общей алгебре. Кишинев, 1965, 106—107.
4. Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. Тр. Моск. матем. о-ва, 1965, **14**, 3—47.
5. Ω-системы. Межвуз. симпозиум по общей алгебре. Тарту, 1966, 123—129.
6. Ω-ringoids, Ω-rings and their representations. Colloq. Math., 1966, **14**, 367—369.
7. Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 3—11.
8. m-арные Ω-кольцоиды. Сиб. матем. ж. 1967, **8**, № 1, 174—194.

Эплер Харальд Пээтерович, род. 9 нояб. 1928 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1951), аспирантуру там же (1962), в 1951—1952 работал в Тартуском ун-те, в 1952—1957 в Эст. с.-х. академии, с 1962 работает в Тартуском ун-те.

1. О связи выпуклых пространств с полунормированными пространствами Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 53—68.

Эрман (Лухт) Сяде Карловна, род. 8 авг. 1938 г. в Пярну, окончила Тартуский ун-т (1961), с 1961 работает в Тартуском ун-те.

1—2. См. М. Крулль [1, 2].

Ээремаа Кульдев Аугустович, род. 28 нояб. 1943 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1967), с 1968 работает в Тартуском ун-те.

1. См. И. Кулль [15].

Юргенсон Рейн Рейнхольдович, род. 28 июня 1936 в г. Пярну, окончил Тартуский ун-т (1960), аспирантуру при Ин-те физ. и астрон. АН Эст. ССР (1963), канд. физ.-матем. наук (1964), 1963—1966 работал там же, в 1966—1969 работал в Тартуском ун-те, с 1969 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1. Об оценке погрешности приближенных методов при решении дифференциальных уравнений. Диссертация, Тарту, 1964, 149 стр.
   — Автореферат дисс., Тарту, 1964.
2. О точности метода конечных разностей. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1964, **24**, 25—35.
3. Об оценке погрешности метода конечных разностей при решении краевых задач. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1964, **24**, 36—47.
4. Об оценке погрешности некоторых конечно-разностных методов при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1965, **14**, № 2, 180—195.

Юримяэ Эндель Иоханнесович, род. 22 февр. 1931 в Харьюском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1955), аспирантуру там же (1959), канд. физ.-матем. наук (1959), доцент (1965), декан матем. фак-та (1967), с 1959 работает в Тартуском ун-те.

1. Некоторые вопросы включения и совместности методов абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 132—143.
2. Заметки о конулевых методах суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 144—153.
3. См. С. Барон [1].
4. Топологические свойства конулевых методов сумирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 43—61.
5. Заметки о корегулярных обобщенных матричных методах суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 62—66.
6.* Kompleksmuutuja funktsioonide teooria (Elementaarfunktsioonid) I. Tartu, 1966, 131 lk.
7.* Kompleksmuutuja funktsioonide teooria (Analüütilised funktsioonid) II. Tartu, 1966, 140 lk.
8.* См. Э. Реймерс [3].
9. Об обобщении теории Мазура—Орлича. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 44—49.

Ягель Арво-Аннес Иоханнесович, род. 18 июня 1933 г. в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1961) аспирантуру при Ин-те физики и астрон. АН Эст. ССР (1964), с 1967 работает в Конструктурском бюро Мин. легкой пром. Эст. ССР.

1. Operatsioonianalüüs. Matemaatika ja kaasaeg, 1964, **4**, 31—39.
2. Некоторые вопросы параметрического линейного программирования. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1964, **24**, 48—66.
3. Основные свойства функции максимума на одном классе задач параметрического линейного прграммирования. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1964, **13**, № 4, 382—402.
4. Elektronarvutite massilisest rakendamisest majanduslikkude protsesside juhtimisel. Matemaatika ja kaasaeg, 1965, **9**, 51—57.
5. Характеристика области параметров допустимости при одном классе задач параметрического линейного программирования. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1966, **15**, № 2, 223—232.
6.* Нахождение критических путей методом динамического программирования. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1967, **10**, 3—11.

Ягер Андрес Александрович, род. 29 авг. 1936 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1963), с 1963 работает в Тартуском ун-те.

1.* Универсальная печатающая программа. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1966, **7**, 62—74.

ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК, ВЫПОЛНЕННЫХ В ТАРТУ ЗА ПЕРИОД 1950—1968 гг.

Ю. Лепик и Э. Йыги

Кафедра теоретической механики

Нижеследующий обзор ставит своей целью ознакомить читателя с работами Тартуских механиков по теории пластин и оболочек.

Систематическое изучение проблем теории пластин и оболочек в послевоенный период началось в Тарту в 1950 году. Хотя центром этих исследований является кафедра теоретической механики Тартуского государственного университета, в этой работе участвовали и некоторые преподаватели и научные сотрудники из других учреждений (Эстонская сельскохозяйственная академия, Институт физики и астрономии АН Эст. ССР).

Ниже дается обзор проведенных работ за 1950—1968 гг., а также коротко описываются и основные направления исследования. Следует отметить, что в этих работах доминируют исследования по теории упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек; чисто упругие деформации рассматриваются лишь в небольшом количестве статей. Некоторые данные о работах, рассмотренных ниже, можно найти и в обзорных статьях Ю. Лепика [26, 32].

1. Упруго-пластические стержни и арки

Работы по теории упруго-пластических стержней посвящены главным образом исследованию работы сжатых стержней в послекритической стадии. При этом предполагается, что потеря устойчивости произошла или согласно концепции Кармана или концепции Шенли; прогибы стержней могут быть соизмеримыми с их толщиной. Упрочнение материала считается линейным. В работе Ю. Лепика [20] методом малого параметра доказано, что критическая нагрузка по Карману является и максимальной нагрузкой, удерживаемой стержнем.

Развивая результаты Пфлюгера (A. Pflüger, Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingenieur-Archiv, 1952 **20**, №5, 84—99) Ю. Лепиком [8] был предложен метод расчета сжатых стержней, потерявших устойчивость в условиях продолжающегося нагружения. В этой работе ограничивались лишь случаем стержня со свободно опертыми концами, а обобщение на другие условия закрепления дано в работе Э. Йыги [1]. Некоторые вопросы, связанные с этим методом расчета, были затронуты и в дискуссионной статье, опубликованной Ю. Лепиком [28].

Проведенные расчеты показывают, что в послекритической стадии уже при небольших прогибах в стержне возникают зоны вторичных пластических деформаций. Влияние этих зон на диаграмму нагрузка-прогиб изучалось в работе Ю. Лепика [16]; выяснилось, что максимальная нагрузка практически не отличается от той нагрузки, при которой в стержне начинается возникновение вторичных пластических деформаций. Влияние начальной кривизны и эксцентричного нагружения на прогибы сжатого стержня было исследовано в работе [12] Ю. Лепика.

Две работы посвящены сложному изгибу стержней: в работе Ю. Лепика [15] рассмотрен изгиб упруго-пластического стержня в случае предварительного растяжения; та же задача для предварительного сжатия решена К. Велскером [1].

В работах Э. Йыги [2—4, 8—10] рассматриваются задачи об устойчивости упругих и упруго-пластических пологих арок в геометрически нелинейной постановке. Ограничиваются случаем линейного упрочнения материала. Как показывают вычисления, проведенные на ЭЦВМ «Урал-4», арка не теряет несущей способности, а имеет место явление прощелкивания. Деформации при этом имеют порядок упругих. Пластические зоны зависят от геометрии арки и механических свойств материала.

2. Устойчивость пластин и оболочек

В первых исследованиях этого цикла изучалось влияние сжимаемости материала на устойчивость упруго-пластических пластин. Сюда относятся работы Ю. Лепика [1—4]. В сороковых годах А. А. Ильюшиным для решения задач упруго-пластической устойчивости был выработан приближенный метод, при котором изменениями усилий в срединной поверхности конструкции пренебрегается. Ю. Лепиком [9, 10] составлено вариационное уравнение, позволяющее решать задачи устойчивости без этого ограничения; проведенные вычисления показали, что точность приближенной постановки А. А. Ильюшина вполне достаточна для практических целей.

В работе Ю. Лепика [17] выработан простой прием, позволяющий определить наклон касательной к диаграмме нагрузка-прогиб в точке бифуркации для упруго-пластических пластин. Для оболочек этот метод был применен в работе П. Мюрсеппа [5].

Устойчивость пластин различной формы исследовалась Л. Роотсом: в работах [2, 4, 5] даны формулы для определения критических нагрузок упругих пластин треугольного и трапециевидного очертания; случай упруго-пластических пластин в форме защемленного равнобедренного треугольника рассмотрен в работе [3]. Упруго-пластической устойчивости посвящена и работа [1], где исследуется пластина в форме сектора кольца. В совместной работе Л. Роотса [7] и Т. Таутс [1] даны границы, между которыми находится точное значение критической нагрузки защемленной пластины.

В работе Ю. Лепика [7] рассмотрена задача о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольной пластины; допускается, что потеря устойчивости произошла в условиях продолжающегося нагружения. В работе [5] того же автора определена энергетическим методом критическая нагрузка неравномерно сжатой прямоугольной пластины за пределом упругости.

Ряд задач об устойчивости круговых цилиндрических и усеченных конических оболочек решен в работах П. Мюрсеппа [1—9], а также в совместной работе А. Круусмаа [3] и П. Мюрсеппа [8] Оболочки нагружены равномерным внешним давлением; рассматриваются оболочки различной длины и при различных краевых условиях. В большинстве этих работ ограничиваются случаем упругих деформаций; оболочки, потерявшие устойчивость за пределом упругости, исследуются в статьях П. Мюрсеппа [4, 5].

3. Большие прогибы упруго-пластических пластин

Как известно, при расчете упругих пластин с большими прогибами, исходят из уравнений, которые были составлены в начале нашего столетия Т. Карманом. В работах Ю. Лепика [6, 11] уравнения Кармана были обобщены на случай упруго-пластических деформаций; выработан и метод их интегрирования. В дальнейших работах того же автора сделана попытка еще расширить сферу действия найденных соотношений: в диссертации [13] выведены обобщенные уравнения Кармана для пластин с начальным прогибом, а в работе [14] дается метод, который позволяет учесть остаточные напряжения и остаточный прогиб пластины после полного или частичного снятия нагрузки. Наиболее общий вид обобщенных уравнений Кармана дан в работе [29], где учитываются также неоднородность материала и влияние термических напряжений; в той же работе выяснены условия, при которых неоднородная пластина может вообще потерять устойчивость.

Обобщенные уравнения Кармана были интегрированы в случае ряда конкретных задач. Для определения больших осесимметрических прогибов круглых пластин был применен вариационный метод. В совместной работе Э. Ааренда [1], Ю. Лепика [21] и Л. Лухта [1] дается решение для пластины со свободно опертым краем, в работе Ю. Лепика [11] для жестко заделанных пластин. В работах К. Соонетса эти уравнения интегрируются методом конечных разностей; в его работе [1] выведены основные уравнения гибких упруго-пластических панелей, результаты для цилиндрического изгиба прямоугольных пластин представлены в [2] (в ней учитывается влияние температурных напряжений).

В круг рассматриваемых в данном разделе задач входит и проблема исследования послекритической стадии пластин и оболочек, потерявших устойчивость за пределом упругости; в вычислительном смысле решение этой задачи является весьма трудным, так как наряду с зоной нагрузки в конструкции возникают и зоны разгрузки и вторичных пластических деформаций. Одна возможная схема решения этой задачи дана в совместной работе Ю. Лепика [36] и Э. Саккова [1]. На базе этого метода Э. Сакковым [2] решена задача о цилиндрической форме потери устойчивости прямоугольных пластин. Несколько иной метод был применен Э. Сакковым [3] для исследования послекритической стадии сжатых цилиндрических оболочек.

4. Жестко-пластические пластины и оболочки

В последнее время в теории пластин и оболочек большое значение получила модель жестко-пластического тела, так как переход к кусочно-линейным условиям текучести и применение ассоциированного закона течения значительно упрощает математическую сторону задачи. Вследствие этого оказалось возможным получить точные и замкнутые решения для ряда задач о несущей способности осесимметрических конструкций. К этому циклу работ принадлежат и исследования Х. Валлнера [1—5, 7], в которых были найдены точные решения для несущей способности кольцевых пластин для самых разных условий опирания и нагружения (в том числе и для пластин, перевешивающихся через опоры).

В диссертации того же автора [7] дается еще решение задачи о несущей способности кольцевых пластин при условии пластичности Мизеса. Предельное равновесие анизотропных кольцевых пластин рассматривалось в работе Х. Валлнера [5].

В статьях Э. Вирма [1—3] была сделана попытка уточнить методами линейного программирования нижнюю границу для несущей способности прямоугольных пластин.

Несущая способность цилиндрической оболочки, подвергнутой равномерному внутреннему давлению, исследуется в работе Л. Кулля [2]; в ней считается, что оболочка защемлена по одному и свободно оперта по другому концу.

Несущая способность неоднородных круглых пластин и цилиндрических оболочек рассматривалась в работах Ю. Лепика [22, 25]; в статье [25] дается решение также для круглой пластины со ступенчатым изменением толщины. На основании найденных в работе [22] соотношений, в работе [24] получена формула для определения несущей способности круглой пластины, подвергнутой нейтронному облучению.

Новый метод расчета жестко-пластических конструкций с большими прогибами был предложен Ю. Лепиком [18]. Этот метод был применен для расчета круглых пластин в работах Ю. Лепика [18, 19] и для кольцевых пластин в работе А. Круусмаа [1]; в последней статье учитывается и влияние анизотропии и неоднородности материала.

Ряд работ о больших прогибах жестко-пластических пластин и оболочек относятся к идеализированному двуслойному сечению (сечение типа «сэндвича»). В статье Ю. Лепика [31] рассмотрены три задачи о больших прогибах круглых пластин. Расчет гибких цилиндрических оболочек под действием равномерного давления и осевого растяжения дан в работах Ю. Лепика [30, 34] и в работе Л. Кулля [1]. В другой статье последнего автора [3] исследуется цилиндрическая оболочка, нагруженная осевым растяжением и радиальной погонной нагрузкой, приложенной по окружности. Случай цилиндрической оболочки, кромки которой свободно оперты и не могут перемещаться в осевом направлении, рассмотрен Ю. Лепиком [33].

5. Другие направления

а) Термоупругость и термопластичность. В работе Я. Кыо [1] на базе гипотез Кирхгоффа рассматривается задача термоупругости для многослойной пластинки с несимметричной структурой по толщине. В работах [2—5] на основе уравнений термоупругости и термопластичности изучаются собственные напряжения в гальванически наращенных пластинках, длинных цилиндрах, сферах и тонких покрытиях. В статье [6] Я. Кыо предложено экспериментальный метод для определения собственных напряжений в гальванических покрытиях, основанный на измерении деформации тонкостенного трубчатого катода в процессе наращивания покрытия. Им же с помощью этого метода исследованы собственные напряжения в железных покрытиях [11]. Дальнейшее развитие различных экспериментальных методов дается в работах [8—10].

И. Вайникко [1] рассматривает изгиб круглой однородной пластины в области упруго-пластических деформаций, когда материал пластины линейно-упрочняющий под равномерно распределенной нагрузкой и градиентом температуры.

Устойчивость упругих биметаллических полос при равномерном нагреве изучается в работах Э. Йыги [5, 6]. В работе [7] изучается устойчивость пологой круговой арки с двутавровым поперечным сечением, равномерно нагретой и подверженной действию равномерно распределенной радиальной нагрузки. Проведенные вычисления показывают, что шарнирно опертая упруго-пластическая арка теряет несущую способность при возникновении первых пластических деформаций.

Упруго-пластическая устойчивость круглых неравномерно нагретых пластин исследуется в работе Ю. Лепика [37]; задача устойчивости решается, исходя из условия текучести Треска и из ассоциированного закона течения.

Термические напряжения рассматривались также в работах Ю. Лепика [29] и К. Соонетса [2], о которых говорилось уже выше.

б) Учет влияния сжимаемости материала. Точный учет сжимаемости материала ведет к довольно сложным вычислениям, вследствие чего был разработан ряд приемов, где сжимаемость учитывается приблизительно. С целью оценки применимости и точности этих приемов в совместной работе Ю. Лепика [27] и Л. Лухта [2] была решена одна задача (малые прогибы круглых пластин), где сжимаемость материала учитывается точно.

в) Учет вязкости. Исходя из линеаризованной Прагером теории вязкопластичности, Х. Валлнером [6] проведено исследование кольцевой пластины, изготовленной из жестко-вязко-пластического материала; внешняя кромка пластины жестко закреплена, но внутренняя может свободно перемещаться вертикально.

И. Вайникко [2, 3] рассматривает статический и динамический изгиб пластин и оболочек с учетом релаксации напряжений при пластическом течении. Соотношения между напряжениями и деформациями найдены для вязко-упруго-пластической модели.

д) Динамическое нагружение. Задача об изгибе кольцевой пластины, внешний край которой движется с заданным ускорением решена Ю. Лепиком [23], где дается решение как для упругой, так и для жестко-пластической пластины. Найденные результаты обобщены на случай конечных прогибов в статье А. Круусмаа [2].

Задача об импульсном нагружении кольцевой пластины, материал которого чувствителен к скоростям деформирования, решена Ю. Лепиком [35].

е) Железобетонные оболочки. Объектом исследования в работах М. Лейбура [1—6, 8] являются пологие железобетонные оболочки вида гиперболического параболоида. Излагаются результаты экспериментального исследования моделей оболочек из цементного раствора. Разработан практический метод расчета исследуемого типа оболочек. В расчетах учитывается специфика железобетона — его работа с трещинами в растянутых зонах. В основу метода расчета положено предельное состояние при разрушении оболочки. В работе [7] изучается влияние краевых условий на напряженное и деформированное состояние оболочки исходя из системы дифференциальных уравнений типа В. В. Власова для пологих оболочек.

БИБЛИОГРАФИЯ

В настоящий указатель вошли научные статьи по теории пластин и оболочек, выполненные в Тарту за период 1950—1968 гг., а также диссертации по механике, защищенные за этот период.

Работы, напечатанные на ротапринте, отмечены звездочкой. Двумя звездочками отмечены работы, имеющие резюме на русском языке.

Ааренд Эйно Аугустович, род. 16 янв. 1932 в Вильяндиском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1956), аспирантуру там же (1965), с 1960 работает в Эст. с.-х. академии.

1. Большие прогибы гибкой круглой упруго-пластической пластинки, свободно опертой по контуру. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 377—384 (соавт. Ю. Лепик и Л. Лухт).

Вайникко Ийви Савельевна, род. 23 нояб. 1939 в Вильяндиском р-не Эст. ССР, окончила Тартуский ун-т (1964), с 1965 аспирант Воронежского гос. пед. ин-та.

1. Об изгибе упруго-пластических круглых пластин с учетом температурных напряжений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 174—182.
2. О деформировании пластически-упруго-вязких пластин и оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 226—235.
3. Динамический изгиб пластически-упруго-вязких кольцевых пластин и цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 236—243.

Валлнер Хиллар Алкесандрович, род. 8 окт. 1930 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1954), аспирантуру там же (1964), канд. физ.-матем. наук (1966), в 1954—1962 и с 1964 работает в Эст. с.-х. академии.

1.** Rõngasplaatide kandevõimest (О несущей способности кольцевых пластин). Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1960, **17**, 162—175.
2. Определение несущей способности кольцевых жестко-пластических пластин при малых прогибах. Тр. конф. по теории пластин и оболочек (Казань, 1960), Казань, 1961, 53—59.
3. О несущей способности перевешивающихся через опоры кольцевых пластинок. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 94—107.
4. Дополнение к статье «О несущей способности перевешивающихся через опоры кольцевых пластинок», Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 171—181.
5. О несущей способности анизотропных кольцевых пластин. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 136—150.
6. Пластическое течение жестко закрепленных кольцевых пластин из вязкопластического материала. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1965, **42**, 42—72.

7. О несущей способности и вязко-пластическом течении кольцевых пластин. Диссертация, Тарту, 1965, 192 стр.
— Автореферат дисс. Тарту, 1965.

Велскер Калле Рудольфович, род. 26 окт. 1935 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1959), аспирантуру там же (1966), с 1959 работает в Тартуском ун-те.

1. Изгиб упруго-пластического стержня в случае предварительного сжатия. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 385—394.

Вирма Эльви Александровна, род. 27 нояб. 1931 в г. Тарту, окончила Тартуский ун-т (1957), аспирантуру там же (1967), с 1960 работает в Эст. с.-х. академии.

1. О несущей способности прямоугольных пластинок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 138—145.
2. О линейном программировании и теории предельного равновесия. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1969, **53**, 35—50.
3. О несущей способности прямоугольных пластин II. Настоящий сборник, стр. 353—357.

Йыги Эрих Альфредович, род. 1 авг. 1928 в Кохтла-Ярвеском р-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1956), аспирантуру там же (1963), канд. физ.-матем. наук (1967), с 1956 работает в Тартуском ун-те.

1. О потере устойчивости упруго-пластических стержней с различным способом закрепления концов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 159--168.
2. К расчету упруго-пластических пологих арок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 460—468.
3. О прощелкивании пологих арок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 469—481.
4. Симметричная деформация упруго-пластической пологой круговой арки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 231—238.
5. К расчету прямолинейной биметаллической полосы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 129—132.
6. Об устойчивости пологой биметаллической синусоидальной полосы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 133—142.
7.* Об устойчивости упруго-пластической пологой круговой арки двутаврового поперечного сечения с учетом термических напряжений. Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек II». Краткие сообщения. Тартуск. ун-т, 1966, 18—31.
8. Некоторые задачи об устойчивости упругих и упруго-пластических пологих арок. Диссертация, Тарту, 1967, 129 стр.
— Автореферат дисс., Тарту, 1967.
9. Об устойчивости упруго-пластических пологих арок. Механ. полимеров, 1968, № 5, 887—896.
10. Об исследовании упруго-пластической пологой круговой арки. Настоящий сборник, стр. 358—363.

Круусмаа Айме Эдуардовна, род. 27 янв. 1938 в г. Валге, окончила Тартуский ун-т (1961), с 1961 работает в Ин-те физики и астрон. АН ЭстССР.

1. Некоторые вопросы о несущей способности кольцевых пластинок из жестко-пластического материала. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1962, **19**, 35—53.
2. Изгиб кольцевой пластинки при заданном ускорении ее внешнего края. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1963, **20**, 39—46.
3. К устойчивости короткой цилиндрической оболочки. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1963, **22**, 66—73 (соавт. П. Мюрсепп).

Кулль Лембит Мартович, род. 22 июля 1921 в Пярнуском р-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1951), с 1952 работает в Эст. с.-х. академии.

1.* Расчет гибких жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии внутреннего давления и осевого растяжения. Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек» II. Краткие сообщения. Тартуск. ун-т, 1966, 59—72.

2. Несущая способность цилиндрической оболочки под равномерным давлением. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1967, **52**, 36—50.
3. Расчет гибких жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и радиальной погонной нагрузки, приложений по окружности. Прикл. механика, 1969, **5**, № 11, 28—33.

Кыо Якуб Петрович, род. 18 апр. 1931 в г. Тарту, окончил Эст. с.-х. акад. (1955), аспирантуру при Ленинградском с.-х. ин-те (1960), канд. техн. наук (1965), с 1955 работает в Эст. с.-х. академии.

1. Термоупругие напряжения в многослойных пластинках при переменном по толщине нагреве. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **11**, 135—150.
2. Расчет собственных напряжений в гальванических покрытиях по деформации катодной пластинки. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **13**, 63—74.
3. Расчет собственных напряжений в круглых цилиндрах с гальваническим покрытием. Зап. Ленингр. с.-х. ин-та, 1961, **82**, 179—190.
4 Расчет собственных напряжений в гальванически наращенных сферах. Зап. Ленингр. с.-х. ин-та, 1962, **89**, 114—127.
5. Собственные напряжения в тонких гальванических покрытиях. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 176—185.
6. Определение собственных напряжений в гальванических покрытиях по деформации тонкостепенного трубчатого катода. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 186—195.
7. Определение собственных напряжений в деталях машин, восстановленных гальваническими покрытиями. Диссертация, Ленинград—Пушкин, 1965, 229 стр.
   — Автореферат дисс., Ленинград—Пушкин, 1965.
8. О расчете электрокристаллизационных напряжений в гальванических покрытиях по деформации ленточного катода. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад. 1969, **53**, 145—150.
9. Об определении остаточных напряжений в электролитических покрытиях по прогибу плоского катода. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1969, **53**, 151—155.
10. О силовом методе определения остаточных напряжений в покрытиях. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1969, **53**, 156—159.
11. Исследование собственных напряжений в железных гальванических покрытиях методом деформации тонкостепенного трубчатого катода. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1969, **61**, 57—74.

Лепик Юло Рудольфович, род. 11 июля 1921 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1948), канд. физ.-матем. наук (1952), доцент (1956), доктор физ.-матем. наук (1959), профессор (1961), с 1946 работает в Тартуском ун-те.

1. Два замечания к теории устойчивости пластинок за пределом упругости с учетом сжимаемости материала. Прикл. матем. и механ., 1950, **14**, 553—557.
2. Дополнительные замечания о цилиндрической форме потери устойчивости пластинок за пределом упругости. Прикл. матем. и механ., 1951, **15**, 107—110.
3. Потеря устойчивости пластинок на площадке текучести материала. Прикл. матем. и механ., 1951, 15, 629—634.
4. Устойчивость упруго-пластических пластинок с учетом сжимаемости материала. Кандидатская диссертация, 1952, 87 стр.
   — Автореферат дисс., Тарту, 1952.
5. Устойчивость прямоугольной упруго-пластической пластинки, неравномерно сжатой в одном направлении. Инж. сб., 1954, **18**, 161—164.
6. Равновесие гибких упруго-пластических пластинок при больших прогибах. Инж. сб., 1956, **24**, 37—51.
7. Еще раз к вопросу о цилиндрической форме потери устойчивости упруго-пластических пластинок. Прикл. матем. и механ., 1956, **20**, 140—143.
8. О равновесии сжатых упруго-пластических стержней. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, 101—108.

9. Одна возможность решения задачи об устойчивости упруго-пластических пластинок в точной постановке. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, 8, 13—19.
10. Об устойчивости упруго-пластической прямоугольной пластинки, сжатой в одном направлении. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, 722—724.
11. О равновесии гибких пластинок за пределом упругости. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, 833—842.
12. О влиянии начальной кривизны и эксцентричного нагружения на прогибы сжатого стержня за пределом упругости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 142—157.
13. Некоторые вопросы равновесия упруго-пластических пластинок и стержней. Докторская диссертация, 1958, 274 стр.
— Автореферат дисс., Москва, 1958.
14. Определение остаточного прогиба и остаточных усилий при разгружении гибких упруго-пластических пластинок. Изв. АН СССР. Механика и машиностр., 1959, **3**, 154—157.
15. Изгиб упруго-пластического стержня в случае предварительного натяжения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 157—167.
16. Изучение послекритической стадии сжатого упруго-пластического стержня с учетом вторичных пластических деформаций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 168—180.
17. К исследованию послекритической стадии пластинок, потерявших устойчивость за пределом упругости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 181—192.
18. Пластическое течение гибких круглых пластинок из жестко-пластического материала. Изв. АН СССР, Механика и машиностр., 1960, 2, 78—87.
19. Большие прогибы круглых жестко-пластических пластинок, защемленных по контуру. Тр. конф. по теории пластин и оболочек (Казань, 1960), Казань, 1961, 215—219.
20. К исследованию послекритической стадии прямого упруго-пластического стержня. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 342—350.
21. См. Э. Ааренд [1].
22. Несущая способность круглых жестко-пластических пластинок в случае неоднородного материала. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1961, **16**, 3—14.
23. Одна динамическая задача теории пластинок. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР 1962, **19**, 25—34.
24. О несущей способности круглых пластинок, подвергнутых нейтронному облучению. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 482—486.
25. К несущей способности неоднородных пластин и оболочек. Изв. АН СССР. Механика и машиностр., 1963, **4**, 167—171.
26. Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек. Инженерный ж., 1964, **4**, 601—616.
27. О влиянии сжимаемости на изгиб упруго-пластических пластинок. Тр. IV Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин (Ереван, 1962). Ереван, 1964, 634—640 (соавт. Л. Лухт).
28. Discussion of the paper «Analysis of an Inelastic Column» by J. V. Huddleston. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1965, **91**, 2, 76—77.
29. Температурные напряжения в гибких неоднородных пластинах за пределом упругости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 168—179.
30. Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under axial tension and external pressure. Nuclear Engineering and Design, 1966, **4**, 29—38.
31. К осесимметричному изгибу гибких круглых жестко-пластических пластин. Инж. ж., Мех. твердого тела, 1966, **4**, 104—110.
32.* Некоторые вопросы теории гибких упруго-пластических пластин и оболочек. Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек» I, Тартуск. ун-т, 1966, 72—105.

33. Большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления. Тр. VI Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластинок, Баку, 1966. М. «Наука», 1966, 534—541.
34. Большие прогибы жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и внешнего давления. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 146—159.
35. Динамика круглых и кольцевых пластин из жестко-пластического материала, чувствительного к скорости деформирования. Труды симпозиума динамики конструкции в Ланцуте (Польская НР), 1968, т. 2, 55—62.
36. Исследование послекритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости. Механ. полимеров. 1968, № 5, 881—886 (соавт. Э. Сакков).
37. К устойчивости круглых неравномерно нагретых пластин за пределом упругости. Прикл. механика, 1969, **5**, № 7, 44—49.

Лухт Лембит Яакович, род. 30 авг. 1933 в Тырваском р-не ЭстССР, окончил Тартуский ун-т (1957), в 1959—1966 работал в Тартуском ун-те.

1. См. Э. Ааренд [1].
2. См. Ю. Лепик [27].

Мюрсепп Петр Виллемович, род. 21 марта 1918 в Тарту, окончил Тартуский ун-т (1951), канд. физ.-матем. наук (1962), ст. научный сотрудник (1963), в 1951—1954 работал в Тартуском ун-те, в 1951—1952 в Эст. с.-х. академии. с 1952 работает в Ин-те физ. и астрон. АН ЭстССР.

1. Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием равномерно распределенного внешнего давления. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. н., 1957, **6**, 351—361.
2. Об устойчивости кругового усеченного конуса под действием равномерно распределенного внешнего давления. Изв. АН ЭстССР, Сер. техн. и физ.-матем. н., 1958, **7**, 83—90.
3. К определению критической нагрузки конической оболочки вращения. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1961, **10**, 28—32.
4. К определению критической нагрузки конической оболочки вращения за пределом упругости. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1961, **16**, 15—26.
5. Об одном способе исследования послекритической стадии оболочек, потерявших устойчивость за пределом упругости. Тр. конф. по теории пластин и оболочек. (Казань, 1960), Казань, 1961, 246—249.
6. Об определении критического гидростатического давления круговых цилиндрической и конической оболочек, один из краев которых свободно оперт, другой жестко заделан. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1961, **13**, 3—11.
7. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек. Диссертация, Тарту, 1962, 109 стр.
— Автореферат дисс., Тарту, 1962.
8. См. А. Круусмаа [3].
9. Об определении критической нагрузки конической и цилиндрической оболочек. — Тр. IV Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин (Ереван, 1962), Ереван, 1964, 733—737.

Роотс Лембит Михкелевич, род. 2 мая 1931 в г. Вильянди, окончил Тартуский ун-т (1954), аспирантуру там же (1960), канд. физ.-матем наук (1963), с 1954 работает в Тартуском ун-те.

1. Об устойчивости пластинки в форме сектора кольца при напряжениях, больших предела пропорциональности. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1961, **13**, 12—19.
2. Об устойчивости пластинок различной формы, в частности треугольных и трапециевидных. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 351—365.
3. Об устойчивости защемленного равнобедренного треугольника при упругопластических деформациях. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 366—371.

4. Определение критических нагрузок равномерно сжатых треугольных пластинок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 372—376.
5. Нахождение критической нагрузки равномерно сжатых пластинок трапециевидного и треугольного очертания. Тр. конф. по теории пластин и оболочек, (Казань, 1960), Казань, 1961, 306—311.
6. Об устойчивости пластинок различной формы. Диссертация, Тарту, 1961, 126 стр.
   — Автореферат дисс., Тарту, 1962.
7. Об устойчивости защемленных пластинок произвольной формы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 487—492, (соавт. Т. Таутс).

Сакков Эльмар Эльмарович, род. 9 июня 1941 в г. Мыйсакюла, окончил Тартуский ун-т (1964), аспирантуру там же (1968), с 1968 работает в Тартуском ун-те.

1. См. Ю. Лепик [36].
2. Исследование послекритической стадии упруго-пластических пластин при цилиндрической форме потери устойчивости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 160—173.
3. Исследование послекритической стадии сжатых цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 217—225.

Соонетс Калью Павлович, род. 9 июля 1935 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1957), в 1958—68 работал в Тартуском ун-те, с 1968 аспирант Тартуского ун-та.

1. О равновесии гибких упруго-пластических прямоугольных в плане панелей при больших прогибах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 180—189.
2*. Упруго-пластический цилиндрический изгиб прямоугольных пластинок с учетом температурных напряжений. Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек» II, Краткие сообщения. Тартуск. ун-т, 1966, 96—109.

Таутс Тийу Иоханнесовна, род. 15 февр. 1938 в г. Тырва, окончила Тартуский ун-т (1961), с 1965 работает в Ин-те кибернетики АН ЭстССР.

1. См. Л. Роотс [7].

О МОДЕЛЯХ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Г. Шапиро

Московский государственный университет

Введение

Динамическое поведение металлов за пределами упругости обнаруживает существенное изменение их статических свойств. Многочисленные эксперименты с динамическим нагружением металлов показали, как правило, повышение предела текучести и сопротивления деформированию с увеличением скорости деформации; для некоторых материалов, как, например, мягких сталей, выявлен эффект запаздывания текучести. Наблюдения над распространением импульсов догрузки показали, что их фронт движется со скоростью упругих волн.

Опубликованных данных по экспериментам с динамической разгрузкой очень мало. В работах Тейлора [18], Линдхольма [13] и В. В. Викторова и Г. С. Шапиро [2] обнаружено, что предел текучести при разгрузке превышает начальный динамический предел текучести. Оказалось, также, что разгрузка может сопровождаться вязкими эффектами и что повышенное упрочнение, приобретенное образцом при динамических испытаниях, не сохраняется при повторных статических испытаниях, проведенных с интервалом в несколько часов. Однако такое упрочнение сохраняется при повторном динамическом нагружении, проведенном спустя несколько миллисекунд. Наблюдения над динамической нагрузкой в настоящее время продолжаются в Институте проблем механики АН СССР.

Несмотря на большой объем теоретических и экспериментальных работ по динамической пластичности, мы еще не располагаем моделями, отражающими все указанные особенности динамического поведения металлов. Успехи и практическая ценность работ в данной области связаны с тем, что, к счастью, во многих случаях влиянием некоторых из названных факторов можно пренебречь и допустимо использовать упрощенные модели. Например, существенные упрощения возникают в тех случаях, когда целью исследования служит определение заметных (порядка 1% и выше) остаточных деформаций. В этих случаях влиянием упругих деформаций часто допустимо пренебречь, и можно использовать жестко-пластические или жестко-вязко-пластические модели, изучению которых и посвящена данная летняя школа.

Существующие модели можно разделить на два класса: пластические модели (не учитывающие в явной форме влияние скорости деформаций — модели Х. А. Рахматулина — Кармана — Тейлора) и вязко-пластические модели (в той или иной форме учитывающие это влияние — модели В. В. Соколовского, Молверна, Дорна, Кристеску и др.). Данный обзор[1] в основном посвящен результатам, полученным по одномерным задачам за последнее время.

1. Пластические модели

Пластические модели предполагают существование некоторой единой динамической зависимости $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ при пластическом деформировании, вообще говоря нелинейной (или кусочно-линейной) при нагружении и линейной при разгрузке (упругая разгрузка). В настоящее время можно считать установленным, что использование пластических моделей оправдано для некоторых металлов, не обладающих резко выраженным пределом текучести. При этом закаленные твердые стали вообще не обнаруживают вязких эффектов, а многие отожженные металлы обладают определенной динамической зависимостью $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, отличной от зависимости, полученной при статических условиях.

Наиболее убедительный материал в данной области приведен в недавно опубликованной монографии Белла [10], в которой подытожен его почти двадцатилетний опыт экспериментирования. Анализируя 1200 экспериментов (как с поликристаллами, так и с монокристаллами), проведенных для кристаллических тел, Белл установил существование единой общей функции $\sigma=\sigma(\varepsilon)$, пригодной для описания процессов одноосного растяжения или сжатия всех рассмотренных тел. Эта зависимость имеет следующий вид:

$$\sigma=\left(\frac{2}{3}\right)^{r/2}\mu(0)B_0(1-T/T_m)(\varepsilon-\varepsilon_b)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где σ и ε — соответственно напряжение и деформация, отнесенные к недеформированному состоянию материала; B_0 — безразмерная постоянная, причем $B_0=0{,}0280$; $\mu(0)$ — предельное

[1] Текст обзора доложен в летней школе по проблеме «Модель жестко-пластического тела в теории пластин и оболочек» (Кяэрику, 2—8 июня 1969 года).

значение модуля сдвига, отвечающее начальной деформации; T — температура испытания; T_m — температура плавления; r — постоянная материала, некоторое целое число ($r = 1, 2, 3, 4 \ldots$); ε_b — начальная деформация.

Согласно теории распространения пластических волн, деформация ε и скорость $u^{\cdot}$ частицы связаны зависимостью

$$u^{\cdot} = \int_0^{\varepsilon} c_p \, d\varepsilon, \tag{1.2}$$

где $c_p(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varrho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)^{1/2}$ — скорость распространения волны. В нашем случае из (1.1), (1.2) получаем

$$u^{\cdot} = \frac{8\sigma^3}{9\varrho \left(\frac{2}{3} \right)^r \mu^2(0) B_0^2 (1 - T/T_m)^2}. \tag{1.3}$$

Эксперименты Белла обнаружили, что при ударе фронт одноосной деформации имеет неустойчивый высокий пик, который исчезает на расстоянии, равном диаметру образца. На бо́льших расстояниях образуется устойчивый фронт одноосной деформации, который в соответствии с теорией распространения пластических волн движется с постоянной скоростью, причем скорость частиц материала на фронте также постоянна. Формулы (1.1)—(1.3) в этих экспериментах нашли полное подтверждение.

2. Вязко-пластические модели

Опираясь на представления теории дислокаций, Симмонс, Хаузер и Дорн [17] записали закон деформирования с учетом вязких эффектов в виде

$$\varepsilon^{\cdot\cdot} = f(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^{\cdot})\sigma^{\cdot} + g(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^{\cdot})\varepsilon^{\cdot} + h(\sigma, \varepsilon, \varepsilon^{\cdot}) \tag{2.1}$$

В столь общем виде, учитывающем влияние не только эффектов скоростей деформаций, но и ускорений, закон деформирования, по-видимому, никем не изучался. Частные случаи закона (2.1) исследовались В. В. Соколовским, Молверном и Кристеску. Хронологически впервые вязкие эффекты рассматривались В. В. Соколовским [9], предложившим закон деформирования вида

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\cdot} &= \sigma^{\cdot}/E + kF(\sigma - \sigma_s) \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant \sigma_s, \\ \varepsilon^{\cdot} &= \sigma^{\cdot}/E \quad \text{при} \quad \sigma \leqslant \sigma_s, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где k — постоянная материала. Более общий закон был позднее предложен Молверном [14] в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\cdot} &= \sigma^{\cdot}/E + \Phi[\sigma - f(\varepsilon)] \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant f(\varepsilon), \\ \varepsilon^{\cdot} &= \sigma^{\cdot}/E \quad \text{при} \quad \sigma \leqslant f(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.3}$$

В формуле (2.2) величина σ_s — статический предел текучести; в (2.3) величина $\sigma = f(\varepsilon)$ — статическая диаграмма деформирования.

В соответствии с данными экспериментов законы (2.2) и (2.3) предсказывают, что передний фронт волны догружения распространяется со скоростью упругих волн. Однако эти законы не учитывают эффекта повышения предела текучести с увеличением скорости деформаций. В пределе они дают те же результаты, что и пластический закон деформирования $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ лишь в том случае, когда последний не зависит от скорости деформации (как это имеет место для закаленных сталей). В дальнейшем Кристеску [11, 12] рассмотрел обобщение зависимостей (2.2), (2.3) в виде

$$\varepsilon^{\cdot} = f(\sigma, \varepsilon)\sigma^{\cdot} + h(\sigma, \varepsilon). \tag{2.4}$$

Однако способ определения функций $f(\sigma, \varepsilon)$ и $h(\sigma, \varepsilon)$ им не указан.

На наш взгляд, один из способов определения функций f и h (во всяком случае при квазистатических испытаниях с умеренно высокими скоростями деформаций порядка $10^1 \div 10^2\ ^1/_{\text{сек}}$) может состоять в следующем. Будем считать, что функция $f(\sigma, \varepsilon)$ определяется, исходя из мгновенной кривой деформирования материала $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, фигурирующей в теории распространения пластических волн Х. А. Рахматулина—Кармана—Тейлора. Функцию $h(\sigma, \varepsilon)$ определяем на основании эксперимента с динамической ползучестью или разгрузкой; скорости деформации $\varepsilon^{\cdot}$ найдем из какого-либо эксперимента с заданной программой нагружения. Тогда мгновенная функция $f(\sigma, \varepsilon)$ определится из формулы (2.4). Следует заметить, что аналогичная методика применяется при испытаниях на кратковременную ползучесть [5].

Таким образом, закон (2.4) мы предлагаем записывать в виде

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\cdot} = f(\sigma, \varepsilon)\sigma^{\cdot} + h(\sigma, \varepsilon) && \text{при} \quad \sigma \geqslant \sigma'_s,\ \sigma^{\cdot} > 0,\\
&\varepsilon^{\cdot} = \frac{\sigma^{\cdot}}{E} + h(\sigma, \varepsilon) && \text{при} \quad \sigma \geqslant \sigma'_s,\ \sigma^{\cdot} < 0,\\
&\varepsilon^{\cdot} = \frac{\sigma^{\cdot}}{E} && \text{при} \quad \sigma \leqslant \sigma'_s.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

В этом случае учитывается повышение предела текучести σ'_s с ростом $\varepsilon^{\cdot}$. Кроме того, в предельных случаях мы получаем обе основные теории: при $h(\sigma, \varepsilon) = 0$ — теорию Рахматулина—Кармана—Тейлора, а при $f(\sigma, \varepsilon) = 1/E$ и $\sigma'_s = \sigma_s$ — теорию Соколовского—Молверна. Разумеется, закон (2.5) требует тщательной экспериментальной проверки, в первую очередь при помощи квазистатических испытаний.

В пользу такого квазистатического метода говорят также результаты недавней работы Риппергера и Ватсона [16], рассмотревших задачу о распространении волн в стержне при внезапном приложении постоянного давления. Решение было получено как на основе теории Х. А. Рахматулина—Кармана—Тейлора, так и с помощью теории Молверна, при различных формах функции Φ, входящей в (2.3). Оказалось, что один и тот же профиль волны деформаций можно получить при различных формах определяющих уравнений и небольших изменениях приложенного давления. Отсюда следует, что в данной задаче измерения формы волнового фронта и скоростей распространения деформаций не могут использоваться для определения формы определяющих уравнений. Для всех рассмотренных видов определяющих уравнений скорость распространения деформаций данной величины оказалась постоянной. Таким образом, постоянство этой скорости распространения не является критерием для решения вопроса о чувствительности материала к вязким эффектам. На этом примере мы убеждаемся в том, что волновые эксперименты без разгрузки вряд ли могут быть полезны для определения механических свойств материалов.

3. Жестко-пластические модели

Как показали Уитмер, Балмар, Лич и Пайен [20], использование современных ЭВМ дает возможность исследовать широкий класс задач о динамическом поведении балок, мембран, пластинок и оболочек при различных законах деформирования как при малых, так и при больших деформациях. Однако, аналитические решения доступны лишь в простейших случаях. При этом учет упругих деформаций возможен только для начальных стадий изгиба и только для балок, когда пластические зоны локализуются в отдельных сечениях — пластических шарнирах. Анализ развитых пластических деформаций, при которых пластические области занимают конечные участки по длине балок, до сих пор не проведен, так как требует решения параболического уравнения четвертого порядка с подвижной границей. Это делает невозможным предельный переход от упруго-пластических к жестко-пластическим решениям, в которых упругие деформации не учитываются.

Применение жестко-пластического анализа позволило рассмотреть не только деформации балки, но и осесимметричные деформации пластинок и цилиндрических оболочек. Не останавливаясь на многих результатах в этой области, уже разобранных в ряде обзоров (см., например, [8]), перечислим некоторые последние работы 1968—1969 гг. Способ учета эффекта запаздывания текучести в жестко-пластическом анализе предложен в работах Ю. Н. Работнова [6] и Ю. Н. Работнова, Ю. В. Суворовой [7]. Влияние действия локальной нагрузки на свободноопертые пластинки путем введения «многолистных» поверхностей текучести исследовано П. А. Кузиным, З. Н. Кузиной и Г. С. Шапиро [3]. Динамический изгиб вязко-пластических пластинок при малых деформациях исследован Ю. Р. Лепиком [20], с учетом конечных деформаций рассмотрен Вержбицким [19], а с учетом упрочнения — И. Вайникко [1]. Импульсивное нагружение цилиндрических вязко-пластических оболочек без учета упрочнения исследовано Пабянеком [15], а с учетом упрочнения — И. Вайникко [1].

Литература

1. Вайникко И., Динамический изгиб пластически-упруго-вязких кольцевых пластин и цилиндрических оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, 220, 236—243.
2. Викторов В. В., Шапиро Г. С., Об определении динамических диаграмм растяжения металлов при умеренно-высоких скоростях деформаций. Инженерный ж. Механ. тверд. тела, 1968, № 2, 184—187.
3. Кузин П. А., Кузина З. Н., Шапиро Г. С., О действии локальной динамической нагрузки на свободно опертую жестко-пластическую пластинку. Инженерный ж. Механ. тверд. тела, 1969, № 2, 73—81.
4. Лепик Ю. Р., Динамика круглых и кольцевых пластин из жестко-пластического материала, чувствительного к скорости деформирования. Прикл. механика, 1969, 5, № 1, 60—66.
5. Работнов Ю. Н., Ползучесть элементов конструкции. Москва, 1966.
6. Работнов Ю. Н., Модель упруго-пластической среды с запаздыванием текучести. Прикл. матем. и теор. физ., 1968, № 3, 45—54.
7. Работнов Ю. Н., Суворова Ю. В., Динамика жестко-пластической балки с запаздыванием текучести. Инженерный ж. Механ. тверд. тела, 1968, № 6, 78—86.
8. Рейтман М. И., Шапиро Г. С., Динамическая теория пластичности. В сб. «Упругость и пластичность. 1966. (Итоги науки. ВИНИТИ, АН СССР)». М., 1968, 7—111.
9. Соколовский В. В., Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях. Прикл. матем. и механ., 1948, 12, № 3, 261—280.
10. Bell, J. F., The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids. New-York, 1968.
11. Cristescu, N., Some Problems in the Mechanics of Extensible Strings. Symp. IUTAM Stress Waves in Unelastic Solids. Providence, 1963.
12. Cristescu, N., Dynamic plasticity. Amsterdam, 1967.
13. Lindholm, U. S., Jeakley, L. M., Dynamic Deformation of Single and Polycrystalline Aluminium. J. Mech. and Phys. Solids, 1964, 13, 317—335.
14. Malvern, L. E., Plastic Wave Propagation in a Bar of Material Exhibiting a Strain Rate Effect. Quart. Appl. Math., 1951, 8, 405—411.
15. Pabjanek, A., Dynamic Loading of Rigid-viscoplastic Cilindrical Shell. Arch. mech. stosowanej, 1969, 31, № 2, 199—211.
16. Ripperger, E. A., Watson, H., The Relationship between the Constitutive Equation and One-Dimensional Wave Propagation. Mechanical Behaviour of Materials under Dynamic Loads. Ed. Lindholm, Springer, 1968.

17. S i m m o n s, T. A., H a u s e r, F. E., D o r n, T. E., Mathematical Theories of Plastic Deformation under Impulsive Loading. Engineering, 1962, **5**, 177—230.
18. T a y l o r, D. B., The Dynamic Straining of Metals Having Definite Yield Points. J. Mech. and Phys. Solids, 1954, 3, 1—15.
19. W i e r z b i c k i, T., Large Deflections of a Strain Rate Sensitive Plate Loaded Impulsively. Arch. mech. stosowanej, 1969, **31**, № 1, 67—80.
20. W i t m e r, E. A., B a l m e r, T. W., L e e c h, T. W., P i a n, T. H. H., Large Dynamic Deformations of Beams, Rings and Shells. AIAA Journal, 1963, **1**, 1848—1857.

PLASTSETE KEHADE DÜNAAMIKA MUDELITEST

G. Shapiro

R e s ü m e e

Käesolevas töös on antud ülevaade plastsete kehade mudelitest dünaamilise koormamise korral. On analüüsitud Rahmatulini, Taylor-Kármáni, Sokolovski ja Cristescu poolt soovitatud mudeleid. Vaadeldakse Cristescu mudeli modifikatsiooni. On antud ülevaade jäik-viskoossete-plastsete plaatide ja koorikute käitumisest dünaamilisel koormamisel.

ON THE MODELS FOR DYNAMIC BEHAVIOUR OF PLASTIC SOLIDS

G. Shapiro

S u m m a r y

In this paper a review of the models for dynamic behaviour of plastic solids is given. The models proposed by Racmatulin-Taylor-Kármán, Sokolovskiy and Cristescu are discussed. The modification of the model by Cristescu is suggested and some problems for dynamic behaviour rigid-visco-plastic plates and shells are reviewed.

НЕФИКСИРОВАННЫЕ ФОРМУЛЫ

А. Таутс

Кафедра математического анализа

Нефиксированной формулой мы будем называть множество, в котором:

1) Определены такие-же отношения, как и в фиксированной формуле, удовлетворяющие таким же условиям, только не требуется, чтобы каждый элемент был бы результатом какой-нибудь операции. Элементы, не являющиеся результатом никакой операции, называем вхождениями переменных.

2) Множество вхождений переменных разбито некоторым образом на непересекающиеся классы, которые называем переменными. Элементы данного класса будем называть вхождениями данного переменного.

В настоящей статье все термины имеют значение, присвоенные им в [2].

В дальнейшем, если это не вызывает путаницы, мы будем применять термин «формула» как к фиксированным, так и к нефиксированным формулам. Ведь фиксированная формула — это частный случай нефиксированной формулы, а именно такой, когда нет вхождений переменных.

Пусть у нас имеется некоторое множество формул. Отождествлением переменных назовем следующую операцию. Возьмем некоторое множество, мощность которого не меньше мощности множества переменных (но не обязательно множества вхождений переменных) любой из данных формул. Это множество назовем списком переменных. Для каждой из данных формул определим взаимно однозначное соответствие между множеством ее переменных и некоторым подмножеством списка переменных. Переменные в разных формулах, соответствующие тому же элементу списка переменных, считаем тождественными.

Две формулы считаем изоморфными в отношении данного отождествления, если между ними можно определить взаимно однозначное соответствие, которое сохраняет отношения в формуле и сопоставляет вхождению каждого переменного вхождение тождественной переменной.

Понятие подформулы определяется так же, как и для фиксированной формулы.

Пусть $\mathfrak{A}$ — какая-нибудь формула и $\{X_\alpha\}$ — множество ее переменных. Пусть для каждого α множество $\{X^\beta{}_\alpha\}$ является множеством вхождений переменного X_α. Пусть для каждого α имеется множество формул $\{\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha\}$ и пусть имеется отождествление переменных всех формул $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$ такое, что для каждого α все формулы $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$ изоморфны. Подстановкой вместо переменных назовем создание такой формулы

$$\int\limits_{\{X^\beta{}_\alpha\}}^{\{\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha\}} \mathfrak{A} \tag{1}$$

которая получается аналогично результату подстановки в случае фиксированных формул [2], переменные в которой получены таким путем, что вхождения тождественных переменных во всех $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$ объединяются в один класс. В случае, если все формулы $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$ были фиксированные, то и (1) будет фиксированной формулой. В этом случае для каждого α все $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$ изоморфны и при каждой конкретной логике имеют одно и то же значение истинности. А значение истинности формулы (1) зависит в этом случае только от значений истинности формул $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$, а не от самих этих формул. Значит, если каждому переменному X_α поставить в соответствие какое-нибудь значение истинности, то тем самым значение истинности формулы (1) будет однозначно определено для всех семейств формул $\{\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha\}$, имеющих данные значения истинности. Следовательно, формулу можно рассматривать как функцию, сопоставляющую каждому семейству значений истинности переменных какое-нибудь значение истинности. Назовем эту функцию истинностной функцией.

Переменное называем эффективным по отношению к данной логике, если значение истинности данной функции существенно зависит от значения истинности данного переменного. Неэффективные переменные называем фиктивными. Переменная, фиктивная по отношению к некоторой логике, будет фиктивной и по отношению к любой более слабой логике. Формулы называем равнозначными по отношению к данному отождествлению и к данной логике, если они содержат тождественные эффективные переменные и выражают ту же самую функцию истинности от этих эффективных переменных. Если формулы равнозначны относительно некоторой логике, то они равнозначны и относительно всякой более слабой логике.

Рассмотрим результат подстановки в некоторой логике. Если хотя бы некоторые из формул $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$ нефиксированы, то (1) определяет истинностную функцию. Эту функцию мы можем получить из функции, определенной формулой $\mathfrak{A}$, совершая в ней подстановку вместо X_α функций, выраженных через $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$. Такая подстановка осуществима, так как для любого α все формулы $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$ равнозначны. Ясно, что функции $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$, подставленные вместо фиктивных переменных, при определении функции (1) не играют никакой роли.

Формулу называем тавтологичной в данной логике, если она равнозначна формуле $\bigwedge_\varnothing$ (пустая конъюнкция). В тавтологичной формуле все переменные фиктивны. В слабейшей логике все формулы тавтологичны и равнозначны. В сильнейшей логике тавтологичной будет только фромула $\bigwedge_\varnothing$.

Если формула $\mathfrak{A}$ тавтологична, то такова же и (1), так как в $\mathfrak{A}$ все переменные фиктивны.

В дальнейшем вместо (1) будем для краткости писать

$$\int\limits_{\{X_\alpha\}}^{\{\mathfrak{B}_\alpha\}} \mathfrak{A} \qquad (2)$$

где $\mathfrak{B}_\alpha$ — любая формула, изоморфная $\mathfrak{B}^\beta{}_\alpha$.

Исследуем вопрос: в каком случае формулы равнозначны в сильнейшей логике? Предположим, что некоторые формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ равнозначны в сильнейшей логике при некотором отождествлении. Определим понятие сходства формул. Формулы называются сходными, если их главное высказывание является результатом одной и той же операции и мощности множества аргументов этих операций равны. Ясно, что можно получить множество сколь угодно большой мощности, состоящее из несходных между собой формул. Теперь сделаем подстановку вместо переменных в формулах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, подставив вместо нетождественных переменных фиксированные формулы, которые несходные друг с другом и с любой подформулой в $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ равнозначны в сильнейшей логике, то в результате мы должны получить изоморфные формулы, которые обозначим $\int\mathfrak{A}$ и $\int\mathfrak{B}$. Между $\int\mathfrak{A}$ и $\int\mathfrak{B}$ определим взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношения. Ввиду нашего выбора подставляемых формул, главному высказыванию подставляемой формулы должно соответствовать главное высказывание формулы, подставляемой вместо тождественного переменного. Но в этом случае аналогичное соответствие можно определить и между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и, следовательно, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны. Итак, доказано, что в сильнейшей логике равнозначны только изоморфные формулы.

Рассмотрим 3-значную логику, приведенную в [2]. Для краткости применяем обозначения: *НО* (необходимо), *С* (случайно), *НВ* (невозможно). Поставим вопрос: можно ли любую истинностную функцию, задаваемую табличным способом, задать формулой? Ответ на вопрос дает следующее рассуждение. Рассмотрим произвольную формулу $\mathfrak{A}$. Если мощность множества переменных в формуле $\mathfrak{A}$ есть α, то мощность множества семейств значений истинности будет 3^{α}. Берем для $\mathfrak{A}$ какое-нибудь семейство значений истинности, при котором значением формулы $\mathfrak{A}$ будет *НО* или *НВ*. Значит, если вместо вхождений переменных подставить фиксированные формулы с соответствующим значением истинности, то для какого-нибудь порядкового числа β получим β-*ОН*, или, соответственно, β-*НВ* фиксированную формулу. Теперь изменим значение истинности некоторых переменных, имевших значение *С*. Соответственно подставим и в вышеупомянутую фиксированную формулу новые подформулы, т. е. вхождения некоторых переменных, вместо которых раньше были подставлены формулы со значением *С*, будут теперь заменены формулами, имеющими значение *НО* или *НВ*. Индукцией по γ можно показать, что для каждого порядкового числа γ те подформулы данной формулы, которые раньше были γ-*НО* или γ-*НВ*, сохраняют при этом значение истинности. Значит, и вся фиксированная формула сохраняет значение истинности.

Итак, доказана

Теорема. *Если некоторая формула $\mathfrak{A}$ при некотором семействе значений истинности переменных будет иметь значение НО или НВ, то она сохранит это значение истинности, если некоторым переменным, имеющим значение С, придать новые значения истинности.*

Эта теорема дает отрицательный ответ на наш вопрос.

Следствие 1. *Если формула $\mathfrak{A}$ при некотором семействе значений истинности имеет значение НО, а при некотором другом семействе имеет значение НВ, то должно существовать переменное, которое в одном из этих семейств имеет значение НО, а в другом НВ.*

Действительно, иначе любое переменное, имеющее в этих семействах разные значения истинности, должно в одном из них иметь значение *С*. Но в этом случае мы могли бы, сохраняя значение истинности тех переменных, значение которых совпадают в обоих семействах, и беря для остальных значение из того семейства, в котором это переменное не имеет значения *С*, построить третье семейство. По теореме значение истинности формулы $\mathfrak{A}$ при третьем семействе значений истинности должно совпадать с ее значением истинности при обоих первоначальных семейств.

Следствие 2. *Если формула $\mathfrak{A}$ при некотором семействе значений истинности переменных имеет значение С, то она сохранит это значение, если некоторым переменным, которые не имели в этом семействе значение С, придать значение С.*

Действительно, если в результате такого изменения формула приобрела бы значение *НО* или *НВ*, то по теореме при обратном изменении она сохранила бы это значение истинности.

Если линейно упорядочить значения истинности так, что минимальным будет HB, а максимальным HO, то дизъюнкцию можно рассматривать как операцию выбора максимального элемента, конъюнкцию как операцию выбора минимального элемента, а отрицание как операцию, превращающую значение истинности в дуальное.

Поставим задачу нахождения для любой формулы $\mathfrak{A}$ формулы $\mathfrak{B}$, равнозначной формуле $\mathfrak{A}$ и имеющей какую-нибудь стандартную форму.

Для каждого семейства значений истинности для переменных формулы $\mathfrak{A}$ составим конъюнкцию, состоящую из одного фиксированного конъюнктивного члена, из переменных и их отрицаний, по следующему правилу.

Если формула $\mathfrak{A}$ при данном семействе значений истинности имеет значение HO, то фиксированным членом будет $\wedge_{\varnothing}$ (пустая конъюнкция имеет значение HO). Переменные, имеющие в данном семействе значение HO, входят в конъюнкцию без отрицания, переменные, имеющие значение HB, входят в конъюнкцию с отрицанием, а переменные, имеющие значение C, вообще не входят в конъюнкцию. Эта конъюнкция при данном семействе значений истинности имеет значение HO. Любое семейство значений истинности, превращающее формулу $\mathfrak{A}$ в HB, превращает и данную конъюнкцию в HB, так как по следствию 1 хотя бы один конъюнктивный член имеет значение HB. Ни одно семейство значений истинности, превращающее формулу $\mathfrak{A}$ в C, не может превратить данную конъюнкцию в HO, так как, учитывая нашу теорему, любое семейство значений истинности, превращающее данную конъюнкцию в HO, превращает и формулу $\mathfrak{A}$ в HO. Значит, для любого семейства значений истинности значение данной конъюнкции не будет превышать значения формулы $\mathfrak{A}$.

Для тех семейств значений истинности, которые превращают формулу $\mathfrak{A}$ в HB, соответствующую конъюнкцию составим аналогично, только фиксированным конъюнктивным членом будет здесь $\vee_{\varnothing}$ (пустая дизъюнкция имеет значение HB). Эта конъюнкция имеет значение HB независимо от значений истинности переменных.

Для тех семейств значений истинности, которые превращают формулу $\mathfrak{A}$ в С, соответствующую конъюнкцию составим следующим образом. Фиксированным членом будет бесконечная последовательность отрицаний (такая формула имеет значение C). Для переменных, имеющих значение HO или HB, выполняются те же правила вхождения в конъюнкцию, что и в обоих предыдущих случаях, а переменные, имеющие значение C, входят в конъюнкцию как без отрицания, так и с отрицанием. При данном семействе значений истинности эта конъюнкция имеет значение C, так как фиксированный конъюктивный член имеет значение C, а остальные конъюнктивные члены имеют значение HO или C. Если брать некоторое другое семейство значений истинности, не превращающее формулу $\mathfrak{A}$ в C, то это семейство должно отличаться от данного или тем, что хотя бы одна переменная, имеющая в данной системе значение C, в этом другом будет иметь значение HO или HB, или тем, что некоторая переменная, имеющая в данном семействе значение HO или HB, имеет в этом другом дуальное значение. Действительно, по следствию 2 присваивание значение C переменным, имеющим в данном семействе значение HO или HB, не может изменить значения истинности формулы $\mathfrak{A}$. Но, следовательно, при этом другом семействе значений истинности наша конъюнкция имеет значение HB.

Пусть теперь формула $\mathfrak{B}$ будет дизъюнкцией описанных конъюнкций. При каждом семействе значений истинности тот дизъюнктивный член, который соответствует этому семейству, имеет то же значение, что и формула $\mathfrak{A}$, а значения остальных дизъюнктивных членов не превышают значения формулы $\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{B}$ равнозначно формуле $\mathfrak{A}$. Формулу $\mathfrak{B}$ будем называть полной дизъюнктивной нормальной формой формулы $\mathfrak{A}$.

Полную конъюнктивную нормальную формулу можно получить, приведя отрицание формулы к полной дизъюнктивной нормальной форме и применив затем правила Де Моргана, имеющие место и в данной логике.

Рассмотрим теперь другую логику, описанную в конце статьи [2].

В нефиксированной формуле $\mathfrak{A}$ можно провести такое же присваивание знаков, как и в фиксированной формуле, имея в виду, что вхождениям переменных знаки не присваиваются. Ясно, что эти знаки сохраняются и после подстановки фиксированных формул вместо переменных. Значит, если мы все подформулы, главные высказывания которых имеют знак «+», заменим на $\wedge_{\oslash}$, а подформулы, главные высказывания которых имеют знак «—», заменим на $\vee_{\oslash}$, то полученная формула $\mathfrak{B}$ будет равнозначна формуле $\mathfrak{A}$. Полученную таким образом формулу $\mathfrak{B}$ мы называем нормальной формой формулы $\mathfrak{A}$.

Поставим вопрос: могут ли равнозначные формулы иметь нормальные формы разного вида. Предположим, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ равнозначные формулы, приведенные к нормальной форме. Это значит, что если в них провести присваивание знаков, то знак «+» будут иметь только главные высказывания подформул вида $\wedge_{\oslash}$, а знак «—» — только главные высказывания подформул вида $\vee_{\oslash}$. Произведём теперь подстановку фиксированных формул вместо переменных так, чтобы фиксированные формулы, которые использовала подстановка, не содержали бы знаков в своем максимальном правильном означении и чтобы вместо нетождественных переменных была произведена подстановка фиксированных формул, несходных между собой и с подформулами формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Здесь понятие сходства понимается в том же смысле, что и в предыдущем. Если после подстановки $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют одно и то же значение истинности, то опять, аналогично предыдущему, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ окажутся изоморфными. Таким образом ответ на поставленный вопрос можно выразить теоремой:

Нормальные формы равнозначных формул изоморфны.

Попытаемся теперь выяснить связь между логиками в нашей интерпретации и многозначными логиками традиционного характера. Рассмотрим традиционную логику, в которой значениями истинности являются все элементы множества M, а истинностные функции определены на M и принимают значения в M. Существует ли такая логика в нашем смысле, значениям истинности которой соответствовали бы все элементы из M, чтобы каждую истинностную функцию было бы можно выразить некоторой формулой?

Возьмем любую формулу $\mathfrak{A}_0(X)$, содержащую только одно переменное X. Если $\mathfrak{A}_0(X)$ имеет вид X, то она преобразует каждую фиксированную формулу в эту же формулу. Пусть $\mathfrak{A}_0(X)$ не имеет вид X, т. е. её главное высказывание есть результат некоторой операции. Определим последовательность формул:

$$\mathfrak{A}_1(X)=\mathfrak{A}_0(\mathfrak{A}_0(X))=\int\limits_X^{\mathfrak{A}_0(X)}\mathfrak{A}_0(X),\ \ldots,\ \mathfrak{A}_{n+1}(X)=\int\limits_X^{\mathfrak{A}_0(X)}\mathfrak{A}_n(X),\ \ldots$$

Пусть $\mathfrak{A}'_n$ есть множество, полученное из $\mathfrak{A}_n(X)$ в результате удаления вхождений переменного X. Пусть в множестве

$$\mathfrak{A}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathfrak{A}'_n$$

выполняется любое отношение, которое, начиная с некоторого n, имеет место в формулах $\mathfrak{A}_n(X)$. Поэтому $\mathfrak{A}$ будет фиксированной формулой, а формула

$$\int\limits_X^{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}_0(X)$$

будет ей изоморфна. Итак, имеет место следующая

Теорема. *В каждой логике любая формула $\mathfrak{A}_0(X)$, содержащая только одно переменное, задает истинностную функцию, отображающую по крайней мере одно значение истинности в то же значение истинности.*

Доказанная теорема даёт отрицательный ответ на наш вопрос. Ведь никакую функцию, не отображающую ни одного элемента множества M в тот же самый элемент, нельзя выразить формулой.

Поэтому постараемся найти иной способ интерпретировать традиционную логику как логику в нашем смысле. Воспользуемся способом, в частном случае приведенным в [1]. *Именно, сконструируем логику, из множества значений истинности которой можно выделить подмножество N, элементы которого соответствуют элементам множества M. После этого сконструируем формулы, имеющие значения в N, если аргументы принадлежат к N, и соответствующие истинностным функциям над M.* Другими словами, постараемся добиться цели, отказываясь от требования, чтобы все значения истинности нашей логики соответствовали элементам множества M, получить логику, часть которой интерпретирует данную традиционную логику. Например, классическую 2-значную логику можно интерпретировать нашей 3-значной логикой, считая «истиной» значение HO, а «ложью» — HB и ставя в соответствие логическим операциям — отрицанию, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции формулы, содержащие только соответствующую операцию и переменные. Постараемся сходную интерпретацию построить для каждой логики, заданной в традиционном виде. Конечно, в деталях мы сходства с примером, указанным выше, не требуем.

Пусть задано некоторое множество M и некоторые функции с множествами аргументов любой мощности, с областью определения M и принимающие значения в M. Выберем множество неизоморфных фиксированных формул, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством M. Для конкретности выбираем эти формулы, которые будем называть исходными, например, так, что их главные высказывания являются результатами строгой дизъюнкции, причем иных строгих дизъюнкций в этих формулах нет.

Далее, каждой из указанных функций над M с некоторым множеством аргументов поставим в соответствие формулу с таким же множеством переменных, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) Если функция несимметрична относительно некоторых аргументов, то и формула несимметрична относительно соответствующих переменных, т. е. при перестановке этих переменных получаем неизоморфную формулу.

2) Формула не содержит строгой дизъюнкции.

3) Формулы, соответствующие различным функциям, несходны между собой.

4) Ни одна из формул несходна ни со своими подформулами, ни с подформулами других формул.

Полученные таким образом формулы называем главными.

Определим свойство достигаемости для фиксированных формул следующим образом:

1) Каждая исходная формула достигаемая.

2) Если формулу можно получить из некоторой главной фор-

мулы путем подстановки достигаемых формул вместо переменных, то формула достигаема.

Из несходности главных формул как между собой, так и с их подформулами, следует, что каждую достигаемую формулу можно рекурсивно достигнуть только единственным путем.

Каждой достигаемой формуле поставим в соответствие элемент из множества M следующим образом:

1) Для исходных формул уже определены соответствующие элементы.

2) Если формула (2) получена из главной формулы $\mathfrak{A}$ путем подстановки достигаемых формул $\mathfrak{B}_\alpha$, то формуле (2) поставим в соответствие значение функции f, соответствующей формуле $\mathfrak{A}$, при значениях аргументов, соответствующих формулам $\mathfrak{B}_\alpha$. Из-за единственности пути достижения никакой формуле не будет поставлено в соответствие более одного элемента.

Теперь определим логику. Две фиксированные формулы относим к одному и тому же классу, если их можно превратить в изоморфные путем подстановки, где заменяются только достигаемые формулы и притом каждая из них на достигаемую формулу, соответствующую тому же элементу множества M. Тогда множеством N будет множество классов, состоящих из достигаемых формул.

Построим, например, интерпретацию для интуиционистской логики. Как известно (см. [3]), интуиционистскую логику можно интерпретировать как бесконечнозначную логику, беря в качестве значений истинности открытые подмножества некоторого множества X_0 действительных чисел, если отрицанием считать внутренность дополнения, дизъюнкцией сумму, конъюнкцией пересечение, а импликацией — внутреннюю часть суммы второго члена и дополнения первого члена. Превратим множество X_0 во вполне упорядоченное множество. Каждому числу из множества X_0 можно поставить в соответствие фиксированную формулу, высота которой соответствует индексу числа в данном упорядочении и где каждое высказывание является отрицанием следующего, за исключением последнего высказывания, которое, если оно существует, является пустой конъюнкцией. Каждому открытому подмножеству множества X_0 поставим в соответствие строгую дизъюнкцию подформул, соответствующих элементам этого подмножества. Эти строгие дизъюнкции и считаем исходными формулами. Они неизоморфны и содержат строгую дизъюнкцию только в качестве главной операции, но не в подформулах.

Операциям отрицания, дизъюнкциии, конъюнкции и импликации поставим в соответствие формулы, содержащие соответствующие операции и переменные. Достигаемыми будут теперь формулы, которые можно получить из исходных, применяя отрицание, дизъюнкцию, конъюнкцию и импликацию так, чтобы каждая исходная формула имела конечный ранг и подформулы, не содержащие исходных формул, имели конечную высоту. Каждой достигаемой формуле поставим в соответствие открытое подмножество множества X_0, учитывая главную операцию этой формулы и подмножества множества X_0, поставленные в соответствие подформулам этой формулы. После этого определим логику так, как это указано в общем случае.

Литература

1. Таутс А., Определение значений истинности формулами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 3—9.
2. Таутс А., Логика как классификация формул Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 3—11.
3. Sikorski, R., Der Heytingsche Prädikatenkalkül und metrische Räume. Constructiviti in Mathemathics, Amsterdam, 1959, 250—253.

Поступило
18 XII 1967

FIKSEERIMATA VALEMID

A. Tauts

Resümee

Käesolevas artiklis üldistatakse artiklis [2] toodud valemi mõistet selliselt, et valem võib sisaldada ka muutujaid. Iga selline valem esitab tõeväärtusfunktsiooni. Valemeid, mis esitavad sama tõeväärtusfunktsiooni, nimetame samaväärseiks. Artiklis [2] toodud loogikate jaoks leitakse valemite normaalkujud, s. o. valemid, mis on antud valemitega samaväärsed, kuid mingi standardse kujuga. Artikli lõpus tõestatakse, et iga traditsioonilisel kujul esitatud loogika jaoks leidub mingi loogika käesoleva artikli mõttes, mille mingi osa interpreteerib esimest loogikat.

UNFIXIERTE AUSDRÜCKE

A. Tauts

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel ist der Begriff eines Ausdrucks, der in dem Artikel [2] gebracht ist, so verallgemeinert, daß ein Ausdruck auch Variablen enthalten kann. Ein jeder solcher Ausdruck beschreibt eine Wahrheitsfunktion. Die Ausdrücke, die dieselbe Wahrheitsfunktion beschreiben, nennt man gleichwertig. Für die in dem Artikel [2] gebrachten Logiken gibt man die normalen Formen, d. h. die Ausdrücke, die mit den vorhergehenden Ausdrücken gleichwertig sind, aber eine standartgemäße Form haben. Zum Schluss beweist man, dass es für jede in der traditionellen Form gebrachte Logik eine Logik in dem Sinn dieses Artikles gibt, deren ein Teil die erste Logik interpretiert.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЭРБРАНА ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Таутс

Кафедра математического анализа

В настоящей статье рассматриваются конечные формулы исчисления предикатов второго порядка. Поставим задачу выяснить, какие из них тождественно истинные.

Прежде всего отметим, что тождественная истинность какой-нибудь формулы зависит от интерпретации. Интерпретация состоит из множества, называемого областью индивидов, и для каждого n из системы n-местных функции истинности над областью индивидов, называемых n-местными предикатами. Если среди предикатов находятся всевозможные истинностные функции, то интерпретация называется главной. Интерпретацию называем нормальной, если ее система предикатов замкнута в отношении составления формул. Это значит, что если взять любую формулу исчисления предикатов второго порядка и дать всем свободным предикатам и, может быть, некоторым свободным индивидам значения из данной интерпретации, а значение кванторов исчислить так, как это диктуется нашей интерпретацией, то возникающая функция, аргументами которой будут нефиксированные свободные индивиды данной формулы, будет всегда эквивалентна некоторому предикату данной интерпретации. Каждая главная интерпретация нормальна. Кроме того, нормальна интерпретация, содержащая только тождественно истинные и тождественно ложные предикаты. С другой стороны, каждая нормальная интерпретация содержит все тождественно истинные и тождественно ложные предикаты.

По теореме Гёделя о неполноте вопрос тождественно-истинности формулы во всех главных интерпретациях неразрешим. Поэтому постараемся решить вопрос о тождественно-истинности во всех нормальных интерпретациях, в том числе и в интерпретации с пустой областью индивидов. Истинность понимается здесь в смысле классической 2-значной логики. Учитывая результат Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов, мы ставим себе цель найти процесс, который в случае тождественно-истинности дал бы положительный ответ после конечного, хотя и сколь угодно большого числа шагов, а в противоположном случае мог бы работать бесконечно. Этот процесс будем называть итерацией.

Рассматривать формулы будем здесь в виде, содержащем только отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, причем отрицание применено только к атомарным формулам.

Определим теперь итерационные шаги.

Пусть у нас имеется формула $\mathfrak{A}$, не содержащая свободно индивида a или предиката F. Построим формулу $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B}(a) \wedge \overline{\exists x \mathfrak{B}(x)})$, соответственно, $\mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B}(F) \wedge \overline{\exists P \mathfrak{B}(P)})$. Здесь $\mathfrak{B}$ — любая формула. Эта формула слабее формулы $\mathfrak{A}$, но если она тождественно истинна, то и $\mathfrak{A}$ тождественно истинна, так как при любых значениях переменных формулы $\mathfrak{A}$ можно $\mathfrak{B}(a) \wedge \overline{\exists x \mathfrak{B}(x)}$ или, соответственно, $\mathfrak{B}(F) \wedge \overline{\exists P \mathfrak{B}(P)}$ превратить в ложь, выбирая подходящим образом значение для a, или соответственно, для F. Итак, с точки зрения тождественной истинности $\mathfrak{A}$ равнозначна с полученной формулой. Прибавленный дизъюнктивный член будем называть характерной формулой переменного a и, соответственно, F. Прибавление характерной формулы является одним из итерационных шагов.

Предполагаем далее, что $\mathfrak{A}$ содержит в качестве дизъюнктивного члена одну из формул $\mathfrak{B}(a) \wedge \overline{\exists x \mathfrak{B}(x)}$ и $\mathfrak{B}(F) \wedge \overline{\exists P \mathfrak{B}(P)}$ или некоторую еще более слабую формулу. Формулу $\mathfrak{A}$ будем предполагать здесь и в дальнейшем имеющей вышеуказанный вид, так что знак отрицания действительно находится внутри формулы $\mathfrak{B}(x)$ или, соответственно, $\mathfrak{B}(P)$, над атомарными формулами. Предполагаем, что $\mathfrak{A}$ содержит подформулу вида $\forall x \mathfrak{B}(x)$ или, соответственно, $\forall P \mathfrak{B}(P)$. Заменим эту формулу на $\mathfrak{B}(a)$ или, соответственно, на $\mathfrak{B}(F)$. Получим более слабую формулу. При этом в случае квантора $\forall x$, если $\mathfrak{A}$ до этой замены не содержала свободных индивидов, надо проверить, что $\mathfrak{A}$ была тождественно истинна в интерпретации с пустой областью индивидов, так как после появления в формуле свободного индивида эта интерпретация уже недопустима и новая формула может не быть слабее.

Если полученная формула тождественно истинна, то и $\mathfrak{A}$ тождественна истинна. Ведь при тех значениях переменных, при которых $\mathfrak{B}(a)$ или, соответственно, $\mathfrak{B}(F)$, истинна, а $\forall x \mathfrak{B}(x)$ или, соответственно, $\forall P \mathfrak{B}(P)$ ложна, дизъюнктивный член $\mathfrak{B}(a) \wedge \overline{\exists x \mathfrak{B}(x)}$ или, соответственно, $\mathfrak{B}(F) \wedge \overline{\exists P \mathfrak{B}(P)}$, является истинным. Описанный итерационный шаг будем называть устранением квантора общности.

Наконец, пусть формула $\mathfrak{A}$ содержит подформулу вида $\exists x \mathfrak{B}(x)$ или, соответственно, $\exists P \mathfrak{B}(P)$. Заменим ее подформулой

$\exists x\mathfrak{B}(x) \lor \mathfrak{B}(a)$ или, соответственно, $\exists P\mathfrak{B}(P) \lor \mathfrak{B}(\mathfrak{C})$, где a — любой свободный индивид и, соответственно, $\mathfrak{C}$ — любая формула, постановка которой вместо P допустима. Полученная формула равнозначна формуле $\mathfrak{A}$. Этот итерационный шаг будем называть варьированием квантора существования.

Условимся обозначать истину символом $\land_{\otimes}$, а ложь символом $\lor_{\otimes}$.

Рассмотрим формулу $\mathfrak{A}$. Пропозиционной формой формулы $\mathfrak{A}$ будем называть формулу исчисления высказываний, полученную из $\mathfrak{A}$ путем замены всех кванторов в $\mathfrak{A}$ вместе с их областями действия на $\lor_{\otimes}$, а атомарных формул, находящихся вне области действия кванторов, на переменные высказывания, причем одну и ту же переменную применяем только в случае атомарных формул, содержащих одинаковый предикат и одинаковые индивиды на соответствующих местах. Пропозициональную форму формулы $\mathfrak{A}$ будем обозначить $[\mathfrak{A}]^*$. Ясно, что если $[\mathfrak{A}]^*$ тождественно истинна, то и $\mathfrak{A}$ тождественно истинна.

Отметим еще, что через $\{\mathfrak{A}\}^*$ мы будем обозначать формулу, полученную из $\mathfrak{A}$ путем замены подформул вида $\forall x\mathfrak{B}$ на $\land_{\otimes}$, а подформул вида $\exists x\mathfrak{B}$ на $\lor_{\otimes}$. Формула $\{\mathfrak{A}\}^*$ не содержит связанных индивидов и в интерпретации с пустой областью индивидов является равнозначной с $\mathfrak{A}$.

Чтобы отождествить формулы, которые можно превратить друг в друга при помощи переименований связанных переменных и преобразований, дозволенных в исчислении высказываний, введем понятия конгруэнтности и контрарности формул.

1) Каждая атомарная формула конгруэнтна самой себе. Атомарная формула и ее отрицание контрарны другу.

2) Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы исчисления высказываний, содержащие только переменные $X_1, \ldots, X_n$ (не обязательно все из них). Пусть $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n$ — формулы исчисления предикатов второго порядка. Пусть

$$\int_{X_1, \ldots, X_n}^{\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n} \mathfrak{A}, \qquad \int_{X_1, \ldots, X_n}^{\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_n} \mathfrak{B} \tag{1}$$

— формулы, которые получены, соответственно, из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ так, что каждое вхождение X_i без отрицания заменяется какой-нибудь формулой, конгруэнтной $\mathfrak{C}_i$, а каждое вхождение $\overline{X_i}$ формулой, контрарной $\mathfrak{C}_i$. Если $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ тавтологична, то формулы (1) конгруэнтны. Если $\overline{\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}}$ тавтологична, то формулы (1) контрарны.

3) Если $\mathfrak{A}(a)$ и $\mathfrak{B}(a)$ конгруентны, то $\forall x\mathfrak{A}(x)$ и $\forall y\mathfrak{B}(y)$ конгруэнтны, а также $\exists x\mathfrak{A}(x)$ и $\exists y\mathfrak{B}(y)$ конгруэнтны. Если $\mathfrak{A}(a)$ и $\mathfrak{B}(a)$ контрарны, то $\forall x\mathfrak{A}(x)$ и $\exists y\mathfrak{B}(y)$ контрарны. В случае кванторов, применяемых к предикатам, конгруэнтность и контрарность определяются аналогично.

Дадим теперь алгорифм итерации. Для исчисления предикатов первого порядка подобный алгорифм описан, например, в [6, 3].

Пусть $\mathfrak{A}$ — формула исчисления предикатов второго порядка, тождественную истинность которой мы исследуем. Построим последовательность индивидов, на первых местах которой стоят все свободные индивиды формулы $\mathfrak{A}$, а затем индивиды $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$. Аналогично, для каждого $n = 0, 1, \ldots$ построим последовательность, в начале которой стоят все n-местные предикаты формулы $\mathfrak{A}$, а затем предикаты $F_1^n, F_2^n, \ldots, \ldots, F_i^n \ldots$. Все члены всех этих последовательностей называем параметрами.

Так как совокупность всех параметров можно эффективно пронумеровать, то можно эффективно пронумеровать и всевозможные формулы вида $\forall x\mathfrak{B}$, а также и вида $\forall P\mathfrak{B}$, содержащие в роли свободных переменных наши параметры. При этом конгруэнтным формулам присваивается один и тот же номер. Следовательно, можно построить эффективно вычислимую функцию, ставящую каждой формуле вида $\forall x\mathfrak{B}$ в соответствие некоторые a_i, а каждой формуле вида $\forall P\mathfrak{B}$ с n-местным предикатом P в соответствие некоторые F_i^n. Здесь неконгруэнтным формулам пусть соответствуют разные параметры.

Итерация состоит из предварительной и основной итрации. В ходе предварительной итерации проверяется тождественная истинность формулы в интерпретации с пустой областью индивидов. В ходе предварительной итерации объектом исследования являются только кванторы, примененные к предикатам. Если формула содержит свободные индивиды, то предварительная итерация опускается.

Сперва нумеруются все внешние кванторы существования, т. е. кванторы, не находящиеся в области действия другого квантора. Одновременно с присвоением номера квантору $\exists P$ в подформуле $\exists P\mathfrak{B}(P)$ прибавляем характерную формулу $\mathfrak{B}(F_i^n) \wedge \exists P\overline{\mathfrak{B}(P)}$, где F_i^n — параметр, соответствующий формуле $\forall P\overline{\mathfrak{B}(P)}$. Подформула $\exists P\mathfrak{B}(P)$ в формуле $\mathfrak{A}$ и в характерной формуле считаются соответствующими и весь дальнейший ход интерации в подформуле формулы $\mathfrak{A}$ дублируется в характерной формуле.

Отметим, что при этом одна и та же характерная формула вторично не прибавляется, но ход итерации во всех вхождениях подформулы $\exists P\mathfrak{B}(P)$ в формуле $\mathfrak{A}$ дублируется и в характерной формуле.

Далее устраняем внешние кванторы общности следующим образом. Если формула $\mathfrak{A}$ содержит подформулу вида $\forall P\mathfrak{C}(P)$, то прибавляем характерную формулу $\mathfrak{C}(F_j^n) \wedge \exists P\overline{\mathfrak{C}(P)}$, если только эта характерная формула не была уже прибавлена.

Здесь F_j^n — параметр, соответствующий формуле $\forall P \mathfrak{C} P$. Затем устраняем в $\mathfrak{A}$ квантор $\forall P$ и получаем $\mathfrak{C}(F_j^n)$. Весь дальнейший ход итерацию в этой подформуле дублируем в характерной формуле. После каждого устранения продолжаем нумерацию, нумеруя кванторы существования, оказывающиеся теперь внешними.

После устранения кванторов общности варьируем внешние кванторы существования с тождественно истинным и тождественно ложным предикатом, обозначаемыми, соответственно, через $\bigwedge_{\emptyset}$ и $\bigvee_{\emptyset}$. За каждым варьированием следует устранение кванторов общности и продолжение нумерации кванторов существования.

Описанный процесс предварительной итерации всегда конечен. Если в результате получаем формулу $\mathfrak{A}'$ такую, что $[\{\mathfrak{A}'\}^*]^*$ тавтология, то перейдем к основной итерации. В противоположном случае прекратим итерацию с отрицательным ответом.

В ходе основной итерации манипуляции производятся над кванторами, примененными как к индивидам, так и к предикатам. В основном итерационные шаги здесь такие же, как и в случае предварительной итерации, только квантор $\exists$, примененный к индивидам, варьируется индивидными параметрами, а квантор $\exists$, примененный к предикатам — формулами, содержащими соответствующие пустые индивидные места; такие формулы можно эффективно пронумеровать.

Для основной итерации возьмем какую-нибудь функцию большого размаха (см. [2], стр. 43), т. е. функцию, область определения которой есть множество натуральных чисел, значения которой тоже натуральны и которая принимает каждое значение бесконечное число раз. Значения этой функции дают номера кванторов, которые следует варьировать на очередном шаге. Каждый раз применяем для варьирования первый такой индивид или, соответственно, первую формулу, при помощи которых этот квантор еще не варьировался и, в случае индивида, который уже содержался в $\mathfrak{A}$ до начала итерации или введен прибавлением характерной формулы, а в случае формулы, содержащей только параметры с аналогичными свойствами. В случае невозможности продолжать итерацию из-за отсутствия таких параметров прекратим итерацию с отрицательным результатом. В таком случае говорим о естественном окончании.

После каждого варьирования устраняем внешние кванторы общности и продолжаем нумерацию внешних кванторов существования.

Если в ходе итерации достигается формула $\mathfrak{A}''$ такая, что $[\mathfrak{A}'']^*$ тавтологична, то итерация прекращается с положительным результатом.

Здесь в $\mathfrak{A}'$, также как и в $\mathfrak{A}''$, входят и характерные формулы.

Ясно, что если в ходе предварительной итерации достигается формула $\mathfrak{A}'$, такая, что $[\{\mathfrak{A}'\}^*]^*$ — тавтология, то $\mathfrak{A}'$ тождественно истинна в интерпретации с пустой областью. А в этом случае и $\mathfrak{A}$ тождественно истинна в этой области. Это вытекает из характера итерационных шагов. Далее, если в ходе основной итерации после конечного числа шагов достигается формула $\mathfrak{A}''$ такая, что $[\mathfrak{A}'']^*$ тавтологична, то $\mathfrak{A}''$, а также (учитывая характер интерационных шагов) и $\mathfrak{A}$ тождественно истинна в любой нормальной интерпретации.

Докажем и обратное: *если в ходе итерации не получается положительного ответа, то существует нормальная интерпретация, в которой формулу $\mathfrak{A}$ можно превратить в ложь.*

Будем различать два случая:

1. В ходе предварительной итерации не возникает формулы $\mathfrak{A}'$ такой, что $[\{\mathfrak{A}'\}^*]^*$ — тавтология. Это и подавно имеет место, если от $\mathfrak{A}'$ отбросить характерные формулы. Следовательно, для свободных высказываний найдутся значения истинности, превращающие формулу в ложь. Сохраняя эти значения, применим индукцию по подформулам формулы $\mathfrak{A}$, чтобы доказать, что если результат итерации ложный, то и сама подформула ложна. Действительно, мы можем постепенно заменить обратно $\mathfrak{B}(\wedge_{\varnothing}) \vee \mathfrak{B}(\vee_{\varnothing})$ на $\exists P\mathfrak{B}(P)$, так как эти формулы равнозначны в интерпретации с пустой областью индивидов. Также, поскольку область индивидов пустая, можем обратно ввести подформулы $\forall x\mathfrak{C}$ вместо $\wedge_{\varnothing}$ и $\exists x\mathfrak{C}$ вместо $\vee_{\varnothing}$. Далее, можем $\mathfrak{B}(F)$ заменить на $\forall P\mathfrak{B}(P)$, так как формула станет от этого сильнее. Следовательно, и $\mathfrak{A}$ ложно в интерпретации с пустой областью при указанных значениях истинности для высказываний.

2. Результат предварительной итерации $\mathfrak{A}'$ таков, что $[\{\mathfrak{A}'\}^*]^*$ тавтология, но в ходе основной итерации не возникает такой формулы $\mathfrak{A}''$, что $[\mathfrak{A}'']^*$ — тавтологична. Следовательно, и $[\mathfrak{A}']^*$ не тавтологичная. Следовательно, $\mathfrak{A}'$ содержит квантор общности, примененный к индивиду и не находящийся в области действия других кванторов. В противном случае $[\{\mathfrak{A}'\}^*]^*$ и $[\mathfrak{A}']^*$ совпадали бы. После устранения этого квантора в формуле появится свободный индивид. Отметим, что если предварительная итерация была опущена, то свободные индивиды должны быть в формуле с самого начала. Так как кванторы существования, примененные к индивидам, можно теперь варьировать, а кванторы существования, примененные к предикатам, можно варьировать например с предикатом $\wedge_{\varnothing}$, то любой квантор существования будет варьирован. После каждого итерационного шага, состоящего из одного варьирования и очередной нумерации кванторов существования и устранения кванторов общности, получаем формулу $\mathfrak{A}''_i$, состоящую из подформул вида $\exists P\mathfrak{B}$ и $\exists x\mathfrak{B}$ и атомарных формул, соединенных логическими операциями. При

этом, по предположению, для $[\mathfrak{A}''_i]^*$ найдется семейство значений истинности, превращающее ее в ложь.

Докажем, что для множества всех атомарных формул, возникающих в ходе итерации, найдется единое семейство значений истинности, превращающее в ложь $[\mathfrak{A}''_i]^*$ после каждого итерационного шага.

Доказательство проведем аналогично теореме Мальцева [1], стр. 257.

Пусть $\mathfrak{A}''_i$ есть результат итерации после i-того итерационного шага в основной итерации, а $\mathfrak{A}''_0 = \mathfrak{A}'$. Если $i < j$, то $\mathfrak{A}''_j$ содержит все атомарные подформулы формулы $\mathfrak{A}''_i$ и, кроме того, $[\mathfrak{A}''_j]^*$ слабее $[\mathfrak{A}''_i]^*$. Следовательно, семейство значений истинности, превращающее $[\mathfrak{A}''_j]^*$ в ложь, превращает в ложь и $[\mathfrak{A}''_i]^*$. Значит, если итерация оканчивается естественно, то семейство значений истинности, превращающее в ложь последнюю формулу $[\mathfrak{A}''_n]^*$, превращает в ложь и все предыдущие $[\mathfrak{A}''_i]^*$.

Остается рассмотреть случай, когда итерация продолжается бесконечно. Пусть $\{\alpha\}_0, \ldots, \{\alpha\}_i, \ldots$ — семейства значений истинности, превращающие в ложь $[\mathfrak{A}''_0]^*, \ldots, [\mathfrak{A}''_i]^*, \ldots$ соответственно. Так как $[\mathfrak{A}''_0]^*$ содержит конечное число n_0 разных высказываний, то семейств значений истинности для них вообще 2^{n_0}. Хотя бы одно из них повторяется в $\{\alpha\}_0, \ldots, \{\alpha\}_i, \ldots$ бесконечное число раз. Эти значения истинности и фиксируем для высказываний формулы $[\mathfrak{A}''_0]^*$. Далее, если для высказываний в формуле $[\mathfrak{A}''_i]^*$ значения истинности фиксированы, то для новых высказываний, возникающих впервые в формуле $[\mathfrak{A}''_{i+1}]^*$, фиксируем опять значения истинности так, чтобы получилось семейство, повторяющееся в $\{\alpha\}_{i+1}, \ldots, \{\alpha\}_{i+k}, \ldots$ бесконечное число раз. Это даст нам семейство, превращающее в ложь все формулы. Обозначим его через $\{\alpha\}$.

Определим понятие совершенной итерации для подформул, фигурирующих в итерации. Пусть $\mathfrak{B}$ — подформула, содержащаяся в $\mathfrak{A}$ или возникающая в ходе итерации. Если каждую формулу вида $\forall P\mathfrak{C}(P)$ (или $\forall x\mathfrak{C}(x)$) рассматривать как формулу $\mathfrak{C}(F)$ (соответственно, $\mathfrak{C}(a)$), где F (соответственно, a) есть параметр, соответствующий формуле $\forall P\mathfrak{C}(P)$ (соответственно, $\forall x\mathfrak{C}(x)$), каждую формулу вида $\exists P\mathfrak{C}(P)$ (или $\exists x\mathfrak{C}(x)$) рассматривать как результат дизъюнкции всех формул $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, (соответственно $\mathfrak{C}(a)$), которые возникают в ходе итерации в результате варьирования данного квантора, а каждую атомарную формулу рассматривать как вхождение переменного, то получим формулу в смысле, описанном в [5]. Эту формулу будем называть результатом совершенной итерации формулы $\mathfrak{B}$ и обозначать через $\mathfrak{T}\mathfrak{B}$. Если вместо всех переменных, являющихся в $\{\alpha\}$ истинными, подставим $\bigwedge_{\emptyset}$, а вместо переменных, являющихся в $\{\alpha\}$ ложными, — $\bigvee_{\emptyset}$, то получим фиксированную формулу (см. [4]), называемую фиксированным результатом совершенной итерации формулы $\mathfrak{B}$ и обозначаемую $|\mathfrak{Z}\mathfrak{B}|$. Аналогично определяются $\mathfrak{Z}_n\mathfrak{B}$ и $|\mathfrak{Z}_n\mathfrak{B}|$, отличие состоит только в том, что для каждого квантора существования учитываются только те варьирования, которые сделаны в течение первых n итерационных шагов хотя бы в одном вхождении формулы $\mathfrak{B}$. Формула $\mathfrak{Z}_n\mathfrak{B}$ конечна при каждым n и $|\mathfrak{Z}_n\mathfrak{B}|$ будет ее значением истинности в классической 2-значной логике при семействе значений истинности $\{\alpha\}$.

Индукцией по порядку необходимости (см. [4]) доказывается, что если $|\mathfrak{Z}\mathfrak{B}|$ имеет значение HO в 3-значной логике (см. [5]), то существует n такое, что $|\mathfrak{Z}_n\mathfrak{B}|$ истинно. Для формул вида $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D}$ справедливость утверждения вытекает из его справедливости, для $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$, для формул вида $\forall P\mathfrak{C}(P)$ и $\forall x\mathfrak{C}(x)$ — из его справедливости для соответствующей $\mathfrak{C}(F)$ (соответственно $\mathfrak{C}(a)$), а для формул вида $\exists P\mathfrak{C}(P)$ и $\exists x\mathfrak{C}(x)$ — из его справедливости для той $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ (соответственно $\mathfrak{C}(a)$), при которой $|\mathfrak{Z}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})|$ (соответственно $|\mathfrak{Z}\mathfrak{C}(a)|$) имеет меньший порядок необходимости.

Так как $|\mathfrak{Z}_n\mathfrak{A}|$ ложно для каждого n, то значением $|\mathfrak{Z}\mathfrak{A}|$ в 3-значной логике не будет HO.

Перейдем к конструированию нормальной интерпретации. Будем различать два случая:

а) Формула $\mathfrak{A}$ не содержит ни одного квантора существования, примененного к предикату. В этом случае возьмем главную интерпретацию для области индивидов, соответствующих в точности индивидным параметрам, введенным в ходе итерации. Атомарным формулам дадим значения из $\{\alpha\}$. Если этим значения введенных предикатов еще не вполне определены, то дополним их произвольным образом.

Для подформул формулы $\mathfrak{A}$ докажем, что если значение $|\mathfrak{Z}\mathfrak{B}|$ в 3-значной логике не является HO, то $\mathfrak{B}$ содержательно ложно в данной интерпретации. Для атомарных формул это ясно, так как в этом случае $\mathfrak{Z}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}$ и значение $\mathfrak{Z}$ берется из $\{\alpha\}$. Для формул вида $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D}$ справедливость утверждения следует из его справедливости для $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$. Так как $\mathfrak{Z}(\forall P\mathfrak{C}(P)) = \mathfrak{Z}\mathfrak{C}(F)$ и $\mathfrak{Z}(\forall x\mathfrak{C}(x)) = \mathfrak{Z}\mathfrak{C}(a)$ для соответствующих F и a, то утверждение справедливо и для $\forall P\mathfrak{C}(P)$ (или $\forall x\mathfrak{C}(x)$), если оно справедливо для $\mathfrak{C}(F)$ (соответственно, $\mathfrak{C}(a)$). Также справедливость для $\exists x\mathfrak{C}(x)$ вытекает из справедливости для всех $\mathfrak{C}(a)$, так как $\mathfrak{Z}\,\exists x\mathfrak{C}(x) = \bigvee_a \mathfrak{Z}\mathfrak{C}(a)$, где a пробегает обозначения всех индивидов данной области. Подформул вида $\exists P\mathfrak{C}(P)$ формула $\mathfrak{A}$ по предположению не содержит.

б) Формула $\mathfrak{A}$ содержит хотя бы один квантор существования, примененный к предикату. Этот квантор будет в ходе итерации варьирован любой формулой, содержащей введенные параметры, так что в ходе интерации возникнут все формулы, которые можно составить из параметров, участвующих в итерации.

Докажем, что если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ контрарны, то точно одна из $|\zeta\mathfrak{B}|$ и $|\zeta\mathfrak{B}_1|$ имеет значение *НО*.

Для атомарных формул утверждение тривиально. Для формулы $\mathfrak{B}$ вида $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ или $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D}$ справедливость утверждения вытекает из его справедливости для $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$. А для формул вида $\forall x\mathfrak{C}(x)$, $\exists x\mathfrak{C}(x)$, $\forall P\mathfrak{C}(P)$, $\exists P\mathfrak{C}(P)$ невозможность того, чтобы $|\zeta\mathfrak{B}|$ и $|\zeta\mathfrak{B}_1|$ обе имели значение *НО*, вытекает из того, что иначе для характерной формулы выражение $|\zeta(\mathfrak{C}(a) \wedge \exists x\overline{\mathfrak{C}(x)})|$, $|\zeta(\overline{\mathfrak{C}(a)} \wedge \exists x\mathfrak{C}(x))|$, $|\zeta(\mathfrak{C}(F) \wedge \exists P\overline{\mathfrak{C}(P)})|$ и $|\zeta(\overline{\mathfrak{C}(F)} \wedge \exists P\mathfrak{C}(P))|$, соответственно, имело бы значение *НО* и итерация дала бы положительный ответ. Но одна из формул $|\zeta\mathfrak{B}|$ и $|\zeta\mathfrak{B}_1|$ имеет значение *НО*, что вытекает из справедливости утверждения для $\mathfrak{C}(a)$ и $\mathfrak{C}(F)$.

Область индивидов построим как и в случае а), но предикаты выбираем только в соответствии с введенными предикатными параметрами. Семейство $\{a\}$ определяет точно значение предикатов. Докажем, что для каждой формулы $\mathfrak{B}$ формула $\mathfrak{B}$ в данной интерпретации истинна точно в том случае, если $|\zeta\mathfrak{B}|$ имеет значение *НО*. Для атомарных формул утверждение тривиальное. Для формул вида $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D}$ справедливость утверждения вытекает из его справедливости для $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$. Для соответствующего a или F имеет место $\zeta(\forall x\mathfrak{C}(x)) = \zeta\mathfrak{C}(a)$, соответственно $\zeta(\forall P\mathfrak{C}(P)) = \zeta\mathfrak{C}(F)$. Пусть для $\mathfrak{C}(b)$ и $\overline{\mathfrak{C}(b)}$ (соответственно $\mathfrak{C}(G)$ и $\overline{\mathfrak{C}(G)}$) утверждение имеет место при всех b (соответственно, G). Если $\zeta\mathfrak{C}(a)$ (соответственно $\zeta\mathfrak{C}(F)$) не имеет значения *НО*, то $\mathfrak{C}(a)$, (соответственно $\mathfrak{C}(F)$) ложно, а, значит, и $\forall x\mathfrak{C}(x)$ (соответственно $\forall P\mathfrak{C}(P)$) тоже ложно. Если $\zeta\mathfrak{C}(a) = \zeta(\forall x\mathfrak{C}(x))$ (соответственно, $\zeta\mathfrak{C}(F) = \zeta(\forall P\mathfrak{C}(P))$ имеет значение *НО*, то из-за контрарности $\zeta(\exists x\overline{\mathfrak{C}(x)})$ (соответственно, $\zeta(\exists P\overline{\mathfrak{C}(P)})$) не имеет значения *НО*. Но в этом случае никакое $\zeta\overline{\mathfrak{C}(b)}$ (соответственно, $\zeta\overline{\mathfrak{C}(G)}$) не имеет значения *НО* и, значит, $\overline{\mathfrak{C}(b)}$ (соответственно $\overline{\mathfrak{C}(G)}$) ложны. Для формул вида $\exists x\mathfrak{C}(x)$ и $\exists P\mathfrak{C}(P)$ справедливость утверждения вытекает из его справедливости для контрарных формул.

Так как $|\zeta\mathfrak{A}|$ не имеет значения *НО*, то $\mathfrak{A}$ ложна в данной интерпретации.

Является ли интерпретация нормальной? Возьмем любую формулу $\mathfrak{B}$ с пустыми местами для индивидов. $|\zeta(\exists P\forall x_1 \ldots \forall x_n(Px_1 \ldots x_n \sim \mathfrak{B}))|$ имеет значение *НО*, потому что $\exists P$ варьируется и с формулой $\mathfrak{B}$, а $|\zeta\forall x_1 \ldots \forall x_n(\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B})|$ имеет значение *НО*, потому что $\forall x_1 \ldots \forall x_n(\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B})$ истинна в интерпретации. Следовательно $\exists P\forall x_1 \ldots \forall x_n(Px_1 \ldots x_n \sim \mathfrak{B})$ истинна в интерпретации. Так как $\mathfrak{B}$ — произвольная формула с пустыми местами для n индивидов, то это значит, что интерпретация нормальная.

Литература

1. Новиков П. С., Основы математической логики. Москва, 1959.
2. Успенский В. А., Лекции по вычислимым функциям. Москва, 1960.
3. Таутс А., Решение логических уравнений методом итерации в исчислении предикатов первого порядка. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1964, **24**, 17—24.
4. Таутс А., Логика как классификация формул. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 3—11.
5. Таутс А., Нефиксированные формулы. Настоящий сборник, стр. 45—54.
6. Gilmore, P. C., A programm for the production from axioms, of proofs for theorems derivable within the first orden predicate calculus. Informat. processing, Paris-München-London, 1960, 265—273.

Поступило
25 XII 1967

HERBRANDI TEOREEMI ANALOOG TEIST JÄRKU PREDIKAATARVUTUSE JAOKS

A. Tauts

Resümee

Defineeritakse iteratsiooniprotsess, mis seisneb suvalisele teist järku predikaatarvutuse valemile $\mathfrak{A}$ järgmiste operatsioonide rakendamises:

1) Disjunktiivse liikme $\mathfrak{B}(a) \wedge \overline{\exists x \mathfrak{B}(x)}$ või $\mathfrak{B}(F) \wedge \overline{\exists P \mathfrak{B}(P)}$ lisamine, kus a, vastavalt F, ei sisaldu valemis $\mathfrak{A}$.

2) Osavalemi $\forall x \mathfrak{B}(x)$ asendamine valemiga $\mathfrak{B}(a)$, vastavalt $\forall P \mathfrak{B}(P)$ asendamine valemiga $\mathfrak{B}(F)$. See toimub alles pärast eespool nimetatud disjunktiivse liikme lisamist.

3) Osavalemile $\exists x \mathfrak{B}(x)$ disjunktiivse liikme $\mathfrak{B}(a)$, (vastavalt osavalemile $\exists P \mathfrak{B}(P)$ disjunktiivse liikme $\mathfrak{B}(\mathfrak{C})$) lisamine. Siin a peab (vastavalt $\mathfrak{C}$ vabad muutujad peavad) olema valemis varem olemas.

Näidatakse, et selline protsess viib valemi $\mathfrak{A}$ kujule, kus tema tautoloogilisus on kontrollitav lausearvutuslike meetoditega parajasti siis, kui $\mathfrak{A}$ on samaselt tõene normaalinterpretatsioonides. Normaalinterpretatsiooni all mõeldakse siin interpretatsiooni, milles iga teist järku predikaatarvutuse valem, vaadelduna tõeväärtusfunktsioonina mõnede tema indiviidide suhtes, langeb ühte mõne interpretatsioonis esineva predikaadiga.

EINE ANALOGIE FÜR DAS HERBRANDSCHE THEOREM IN DEM PRÄDIKATKALKÜL DER ZWEITEN STUFE

A. Tauts

Zusammenfassung

Man definiert einen Iterationsprozess, der in dem Anwenden folgender Operationen zu einem beliebige Ausdrück $\mathfrak{A}$ des Prädikatkalküls der zweiten Stufe besteht.

1) Das Hinzuselsen eines logischen Summands $\mathfrak{B}(a) \wedge \overline{\exists x \mathfrak{B}(x)}$ oder $\mathfrak{B}(F) \wedge \overline{\exists P \mathfrak{B}(P)}$, wobei der Ausdruck $\mathfrak{A}$ den Variablen a, entsprechend F, nicht enthält.

2) Das Ersetzen eines Teilausdrucks $\forall x \mathfrak{B}(x)$ mit dem Ausdruck $\mathfrak{B}(a)$, entsprechend eines Teilausdrucks $\forall P \mathfrak{B}(P)$ mit dem Ausdruck $\mathfrak{B}(P)$. Das kann erst nach dem Hinzusetzen des bevorgenannten logischen Summands stattfinden.

3) Das Hinzusetzen eines logischen Summands $\mathfrak{B}(a)$, einem Teilausdruck $\exists x \mathfrak{B}(x)$, bzw. eines logischen Summands $\mathfrak{B}(\mathfrak{C})$ einem Teilausdruck $\exists P \mathfrak{B}(P)$. Hier soll a, bzw. die freie Veriablen des Ausdrucks $\mathfrak{C}$ sollen, in dem Ausdruck vorhanden sein.

Man beweist, daß ein solcher Prozess in diesem Fall und nur in diesem Fall einem Ausdruck $\mathfrak{A}$ die Form, deren logische Identität mit einer Tautologie schon mit den Mitteln des Propositionalkalküls beweisbar ist, gibt, wenn $\mathfrak{A}$ in allen Normalinterpretationen identisch wahr ist. Normal nennt man eine Interpretation, in der jeder Ausdruck des Predikatkalküls der zweiten Stufe als eine Wahrheitsfunktion mit einem Prädikat der Interpretation gleichwertig ist.

О ПЛОСКИХ ПОЛИГОНАХ

М. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

Пусть S — моноид. Множество A называется *правым S-полигоном*, если для каждого элемента a из A и каждого элемента s из S определено их произведение as, принадлежащее множеству A, причем $a1 = a$ и $(as_1)s_2 = a(s_1s_2)$ для любого элемента a из A и любых элементов s_1, s_2 из S. Аналогично определяются левые S-полигоны (см. [4]). Имеются некоторые свойства моноидов, которые определяются свойствами левых (правых) полигонов над соответствующим моноидом. Некоторые из таких свойств рассматриваются в работе [4], где дается описание таких моноидов, над которыми все левые полигоны инъективны, а также моноидов, над которыми все левые полигоны проективны.

В данной заметке определяется тензорное произведение полигонов, которое используется для введения понятия плоского левого полигона. Известно, что все левые (правые) модули над некоторым кольцом являются плоскими тогда и только тогда, когда это кольцо регулярное (см. [3], теорема 1). Оказывается, что в случае моноидов и полигонов над ними соответствующий факт не имеет места. Хотя из того, что все левые S-полигоны плоские, следует регулярность моноида S (теорема 1), из леммы 3 вытекает, что обратное утверждение неверно. Как показывает теорема 2, этот факт все же имеет место в классе моноидов с левым сокращением. Теорема 3 утверждает, что если все правые полигоны моноида инъективные, то все левые полигоны этого моноида плоские. Наконец, показывается, что существуют моноиды, над которыми все левые полигоны являются плоскими, но то же неверно для правых полигонов.

Пусть S — моноид, A — правый S-полигон и M — левый S-полигон. Зададим в прямом произведении $A \times M$ множеств A и M отношение Θ, полагая $(a_1, m_1)\Theta(a_2, m_2)$, где $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$, тогда и только тогда, когда найдется такая конечная цепочка пар из $A \times M$, что первая пара цепочки совпадает с (a_1, m_1), последняя пара совпадает с (a_2, m_2) и от каждой предыдущей пары к каждой последующей паре цепочки можно перейти при помощи переброски элемента из S, т. е. переходя от пары (as, m), где $s \in S$, к паре (a, sm) или наоборот. Определенное таким образом отношение Θ будет отношением эквивалентности. Фактормножество $A \times M/\Theta$ назовем *тензорным произведением полигонов A и M* и обозначим через $A (\times)_S M$ или $A(\times)M$. Класс эквивалентности, в который входит пара (a, m) будет обозначаться через $a(\times)m$.

Справедлива

Лемма 1. *Пусть S — моноид и M — произвольный левый S-полигон. Тогда тензорное произведение $S(\times)M$ моноида S, рассматриваемого как правый S-полигон, на левый S-полигон M эквивалентно множеству M, т. е. $S(\times)_S M \cong M$.*

Доказательство аналогично доказательству соответствующего результата в случае тензорного произведения модулей над кольцом (см., например, [1], теорема 12.14). Отметим здесь только, что эта эквивалентность реализуется отображением φ: $S(\times)_S M \to M$, которое определяется равенством $\varphi(s(\times)m) = sm$, где $s \in S$, $m \in M$.

Известно, что в категории левых S-полигонов прямые суммы совпадают с непересекающимися объединениями. Поэтому имеет место

Лемма 2. *Тензорное произведение S-полигонов перестановочно со взятием прямых сумм.*

Пусть A_1 и A_2 — правые S-полигоны, M_1 и M_2 — левые S-полигоны, $\varphi : A_1 \to A_2$ и $\psi : M_1 \to M_2$ — S-гомоморфизмы. Гомоморфизмы φ и ψ индицируют следующее отображение $\varphi(\times)\psi$ тензорного произведения $A_1(\times)M_1$ в тензорное произведение $A_2(\times)M_2$: $(\varphi(\times)\psi)(a_1(\times)m_1) = \varphi(a_1)(\times)\psi(m_1)$ для всех $a_1 \in A^1$, $m_1 \in M_1$.

Левый S-полигон M мы будем называть *плоским*, если из того, что A подполигон правого S-полигона B, а элементы $a_1(\times)m_1$ и $a_2(\times)m_2$, где a_1, $a_2 \in A$, m_1, $m_2 \in M$, различны в тензорном произведении $A(\times)M$, всегда следует, что элементы $a_1(\times)m_1$ и $a_2(\times)m_2$ являются различными и в тензорном произведении $B(\times)M$.

Теорема 1. *Если все левые S-полигоны плоские, то S регулярный.*

Доказательство. Пусть все левые S-полигоны плоские. Для доказательства теоремы достаточно показать, что произвольный элемент s из S принадлежит множеству sSs. Если $sS = S$ или $Ss = S$, то это, конечно, так. Поэтому мы будем предполагать, что включения $sS \subset S$ и $Ss \subset S$ строгие. Далее, обозначим через S' левый S-полигон, получаемый из S склеиванием элементов из Ss. Элементы S' мы будем обозначать следующим образом: если $s \in S$, то соответствующий ему элемент из S' обозначим через s', если $s \notin Ss$, и через $0'$, если $s \in Ss$. Рассмотрим теперь элементы $s \otimes 1'$ и $s \otimes 0'$ в тензорном произведении $sS \otimes S'$. Эти элементы должны быть равны в $sS \otimes S'$, так как S' — плоский левый S-полигон по условию, а в $S \otimes S'$ имеем $s \otimes 1' = 1 \otimes s1' = 1 \otimes 0'$. Следовательно, найдется конечная цепочка перебросок, которая переводит пару $(s, 1')$ в пару $(s, 0')$. При этом все промежуточные пары принадлежат $sS \times S'$, т. е. имеют вид (su, v') для каких-то $u, v \in S$. Условимся в нашей цепочке последней считать первую пару, которая имеет вторую компоненту $0'$.

Докажем, что для всех пар (su, v') нашей последовательности до предпоследней включительно верно равенство $suv = s$. Ясно, что это равенство имеет место для первой пары. Пусть оно верно для пары (su, v'), которая строго предшествует предпоследней. Покажем, что тогда такое же равенство имеет место для следующей пары. Для перехода от пары (su, v') к следующей имеются две возможности: а) $su = skt$ для каких-то $k, t \in S$ и последующей будет пара $(sk, tv') = (sk, (tv)')$, причем $sktv = suv = s$, так что в этом случае нужное равенство действительно имеет место; б) $kw' = v'$ для каких-то $k, w \in S$ и последующей будет пара (suk, w'). Так как $v' \neq 0'$, то и $w' \neq 0'$. Следовательно, $kw = v$ и $sukw = suv = s$, так что и в этом случае требуемое равенство выполняется. Пусть теперь (su, v') — предпоследняя пара. Мы знаем, что $suv = s$. Последняя переброска будет переброской слева направо. Значит $su = sxy$ для каких-то $x, y \in S$ и последней будет пара (sx, yv'). По нашей договоренности $(yv)' = yv' = 0'$, т. е. $yv = zs$ для какого-то $z \in S$. Тогда

$$s = suv = sxyv = sxzs \in sSs.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть S — моноид с левым сокращением. Все левые S-полигоны будут плоскими тогда и только тогда, когда S — группа.*

Доказательство. В работе [4] доказано, что моноид S будет группой тогда и только тогда, когда любой левый (правый) S-полигон будет непересекающимся объединением циклических левых (правых) S-полигонов. Из этого результата, леммы 2 и того, что циклический левый (правый) полигон над группой не имеет собственных подполигонов, следует, что если моноид S является группой, то все левые S-полигоны будут плоскими.

Обратно, если все левые S-полигоны плоские, то из теоремы 1 следует, что S регулярен, откуда, ввиду левой сократимости, вытекает, что S — группа. Теорема доказана.

Над любым моноидом S существует одноэлементный левый S-полигон, который мы будем называть нулевым S-полигоном и обозначать через 0 (как и единственный его элемент).

Лемма 3. *Если все левые S-полигоны плоские, то любые два правых идеала моноида S имеют непустое пересечение.*

Доказательство: Пусть a и b — такие элементы из S, что $aS \cap bS = \varnothing$. Тогда $aS \cup bS = I \neq S$. Рассмотрим в тензорном произведении $I(\times)0$ элементы $a(\times)0$ и $b(\times)0$. Эти элементы являются различными в тензорном произведении $I(\times)0$, так как при помощи любых перебросок элементов из S мы из пары $(a, 0)$ всегда получим пару, первая компонента которой принадлежит aS. Из плоскости нулевого полигона следует теперь, что $a(\times)0 \neq b(\times)0$ и в тензорном произведении $S(\times)0$, который состоит из единственного элемента $1(\times)0$. Противоречие. Лемма доказана.

Теперь можем привести примеры таких (вполне) регулярных моноидов, над которыми не все левые полигоны — плоские.

Пример. Пусть $S = 1 \cup S'$, где S' — неодноэлементная полугруппа с левым умножением. Тогда S является (вполне) регулярной полугруппой. С другой стороны, каждый отдельно взятый элемент из S' представляет из себя главный правый идеал моноида S. Из леммы 3 следует, что нулевой левый S-полигон не может быть плоским.

Теорема 3. *Если все правые полигоны моноида S инъективны, то все левые S-полигоны плоские.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены, B — произвольный правый S-полигон, A — его произвольный подполигон и M — произвольный левый S-полигон. Пусть, далее, для некоторых $a_1, a_2 \in A$ и $m_1, m_2 \in M$ имеет место равенство $a_1(\times)m_2 = a_2(\times)m_2$ в тензорном произведении $B(\times)M$. Так как A — подполигон полигона B, то из инъективности A вытекает, что A — ретракт B, т. е. что существует такой S-гомоморфизм $\varphi: B \to A$, что $\varphi(a) = a$ для всех $a \in A$. Тогда $\varphi(\times)1_M$ будет отображением тензорного произведения $B(\times)M$ в $A(\times)M$. При этом в $A(\times)M$ имеем

$$a_1(\times)m_1 = \varphi(a_1)(\times)m_1 = (\varphi(\times)1_M)(a_1(\times)m_1) =$$
$$= (\varphi(\times)1_M)(a_2(\times)m_2) = \varphi(a_2)(\times)m_2 = a_2(\times)m_2.$$

Так как a_1, a_2, m_1 и m_2 были выбраны произвольно, то из этого и следует, что M плоский. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть S — коммутативный моноид с нулем, все идеалы которого главные. Тогда все полигоны над S являются плоскими в том и только в том случае, когда S регулярен.*

Доказательство. Если все левые S-полигоны плоские, то регулярность S вытекает из теоремы 1. Если же S регулярен, то из теоремы 2 работы [4] следует, что все S-полигоны инъективны. Из теоремы 3 вытекает теперь, что все левые S-полигоны плоские.

Для дальнейшего нам понадобится следующее

Предложение. *Если моноид S имеет вид $S=1\cup S'$, где $1\notin S'$, а S' — полугруппа с правой обратимостью, то произвольный правый S-полигон разлагается в попарно непересекающееся объединение неразложимых подполигонов A_γ, $\gamma\in I$, где I — некоторое множество индексов, причем A_γ описываются следующим условием: для любых элементов a_1 и a_2 из A_γ множество a_1S' оказывается подполигоном полигона A_γ и $a_1S'=a_2S'$.*

Доказательство. Пусть $S=1\cup S'$, где $1\notin S'$, S' — полугруппа с правой обратимостью и A — произвольный правый S-полигон. Для любого элемента $a\in A$ множество aS' является подполигоном полигона A. Определим на полигоне A отношение $\equiv$, полагая, по определению $a_1\equiv a_2 \rightleftarrows a_1S'=a_2S'$. Обозначим через A_γ, $\gamma\in I$, где I — некоторое множество индексов, классы этой эквивалентности. Из соотношения $(as)S'=aS'$, верного для любых $a\in A$ и $s\in S$, следует, что все A_γ, $\gamma\in I$, являются подполигонами полигона A. Их неразложимость прямо следует из определения отношения $\equiv$.

Теорема 4. *Если моноид S имеет вид $S=1\cup S'$, где $1\notin S'$, а S' — полугруппа с правой обратимостью, содержащая идемпотенты, то все левые S-полигоны плоские.*

Доказательство. Пусть B — произвольный правый S-полигон, A — его произвольный подполигон и M — произвольный левый S-полигон. Ввиду леммы 2 и теоремы 4, мы можем предполагать, что B — неразложимый S-полигон. Обозначим через e_γ, $\gamma\in I$, все те элементы из B, которые обладают следующим свойством: если $e_\gamma=e_\gamma s$, $s\in S$, то $s=1$. Из теоремы 4 следует, что $e_1S'=bS'$ для произвольного элемента b из B. Из этого вытекает, что подполигон A содержит e_1S' и что $B\setminus A$ содержит лишь элементы e_γ, $\gamma\in I$ (не обязательно все). Пусть теперь $a_1, a_2\in A$ и $m_1, m_2\in M$ такие элементы, что $a_1(\times)m_1=a_2(\times)m_2$ в тензорном произведении $B(\times)M$ и пусть в то же время $a_1(\times)m_1\neq a_2(\times)m_2$ в $A(\times)M$. Зафиксируем последовательность перебросок элементов из S, при помощи которой можно перейти от пары (a_1, m_2) к паре (a_2, m_2). Заметим, что, так как $a_1(\times)m_1\neq a_2(\times)m_2)$ в $A(\times)M$, то в нашей последовательности должна найтись переброска, которая выводит нас за пределы $A\times M$. Переброска, следующая за этой, должна нас вернуть в $A\times M$, так как в случае элемента из $(B\setminus A)\times M$ переброска слева направо невозможна, а любая переброска справа налево вернет первую компоненту в $e_iS'\subset A$. Допустим теперь, что первая переброска выводит нас за пределы $A\times M$ и уже вторая приводит нас к паре (a_2, m_2). В таком случае $a_1=e_{\gamma_0}x$ и $a_2=e_{\gamma_0}y$, где $e_{\gamma_0}\in B\setminus A$, $x, y\in S'$ и $(e_{\gamma_0}, xm_1)=(e_{\gamma_0}, ym_2)$, т. е. $xm_1=ym_2$. По предположению теоремы, в S' есть идемпотент e, который (см. [2], стр. 313) является левой единицей полугруппы S'. Следовательно, $ex=x$, $ey=y$ и $(a_1, m_1)=((e_{\gamma_0}e)x, m_1)$, причем переброской x из последней пары мы получим $(e_{\gamma_0}e,\ xm_1) = (e_{\gamma_0}e,\ ym_2)$. Теперь, перебрасывая y, получим $((e_{\gamma_0}e)y, m_2) = (e_{\gamma_0}y,\ m_2) = (a_2, m_2)$. Так как $e_{\gamma_0}e \in A$, то это означает, что мы можем от пары (a_1, m_1) перейти к паре $(a_2,\ m_2)$, оставаясь в $A \times M$. Значит, в этом случае мы пришли к противоречию с тем, что $a_1 (\times) m_1 \neq a_2 (\times) m_2$ в $A (\times) M$. К этому же противоречию мы можем прийти и в общем случае. Значит, на самом деле $a_1 (\times) m_1 = a_2 (\times) m_2$ и в $A (\times) M$. Так как a_1, a_2, m_1 и m_2 были выбраны произвольно, то отсюда следует, что левый S-полигон M плоский. Теорема доказана.

Следствие. *Существует моноиды, над которыми все левые полигоны являются плоскими, но то же неверно для правых полигонов.*

Доказательство. Так как полугруппа с правым умножением — полугруппа с правой обратимостью, то из предложения следует, что все левые S-полигоны являются плоскими, если S — моноид вида $S = 1 \cup S'$, где $1 \in S'$, а S' — неодноэлементная полугруппа с правым умножением. В то же время правосторонний вариант леммы 3 показывает, что не все правые S-полигоны плоские (см. пример после леммы 3).

В заключение автор искренне благодарит профессора Л. А. Скорнякова за руководство этой работой.

Литература

1. Кэртис Ч., Райнер И., Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Москва, 1969.
2. Ляпин Е. С., Полугруппы. Москва, 1960.
3. Скорняков Л. А., Гомологическая классификация колец, Матем. весн., 1967, **4**, 415—434.
4. Скорняков Л. А., О гомологической классификации моноидов, Сиб. матем. ж., 1969, **9**, 1139—1143.

Поступило
25 XII 1969

LAMEDATEST POLÜGOONIDEST

M. Kilp

Resümee

Olgu S monoid (ühikuga poolrühm). Hulka M nimetatakse vasakpoolseks polügooniks üle monoidi S, kui igale elemendile $m \in M$ ja igale elemendile $s \in S$ on vastavusse seatud element $sm \in M$, nii et $(s_1 s_2) m = s_1 (s_2 m)$ ja $1m = m$ iga $s_1, s_2 \in S$ ja $m \in M$ korral. Analoogiliselt defineeritakse parempoolsed polügoonid üle monoidi S.

Artiklis defineeritakse polügoonide tensorkorrutis, millest lähtudes tuuakse loomulikul viisil sisse lameda polügooni mõiste.

Teoreem 1. *Kui kõik vasakpoolsed polügoonid üle monoidi S on lamedad, siis S on regulaarne poolrühm.*

Vastupidine väide ei ole õige, nagu nähtub näitest peale lemmat 3.

Teoreem 2. *Olgu S vasakpoolse taandamisega monoid. Kõik vasakpoolsed polügoonid üle monoidi S on lamedad parajasti siis, kui S on rühm.*

Teoreem 3. *Kui kõik parempoolsed polügoonid üle monoidi S on injektiivsed, siis kõik vasakpoolsed polügoonid üle monoidi S on lamedad.*

Järeldusena teoreemist 4 selgub, et on olemas monoide, üle mille kõik vasakpoolsed polügoonid on lamedad, aga kõik parempoolsed mitte.

ON FLAT POLYGONS

M. Kilp

Summary

Let S be a monoid. A set M is said to be a left S-polygon if for elements of M is defined a left multiplication by elements of S such that $(s_1s_2)m = s_1(s_2m)$ and $1m = m$ for all, $s_1, s_2 \in S$ and $m \in M$. A right S-polygons are defined analogously.

Let B be a right S-polygon and M a left S-polygon. On Cartesian product $B \times M$ we consider the smallest equivalence relation generated by $(bs, m) \equiv (b, sm)$ for all $s \in S$, $b \in B$ and $m \in M$. The set of classes of this equivalence we define to be a *tensor product of polygons B and M.*

A left S-polygon M is *flat* if for any right S-polygon B and any its subpolygon A any two distinct elements $a_1 \otimes m_1$ and $a_2 \otimes m_2$ in tensor product $A \otimes M$ are distinct in $B \otimes M$ too.

Theorem 1. *If all left S-polygons are flat, then S is regular.*

The converse of theorem 1 is not true, as shows the example after lemma 3

Theorem 2. *Let S be a left cancellation monoid. Then all left S-polygons are flat if and only if S is a group.*

Theorem 3. *If all right S-polygons are injective, then all left S-polygons are flat.*

There exists a monoid over which all left polygons are flat but the same assertion is not true for right polygons.

КОНГРУЭНЦИЯ ИЗОТРОПНЫХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ $^1R_4$ И ЕЕ КАНОНИЧЕСКИЕ РЕПЕРЫ

Р. Колде

Кафедра алгебры и геометрии

В настоящей статье рассматриваются конгруэнции (т. е. трехпараметрические семейства) изотропных прямых в вещественном псевдоевклидовом пространстве $^1R_4$ индекса 1 (т. е. в пространстве Лоренца—Минковского). Исследование проводится методом подвижного репера и дифференциальных продолжений Картана—Лаптева [4, 1]. Изучая стрикционные свойства конгруэнции в первой дифференциальной окрестности прямой, выясняется, что они во многом совпадают со стрикционными свойствами конгруэнции прямых в трехмерном пространстве R_3 (см. [5]). Инвариантные объекты строятся для конгруэнции эллиптического и гиперболического типа методом оснащения на средней гиперповерхности, разработанным Ю. Г. Лумисте для конгруэнции m-плоскостей аффинного пространства A_{m+n} в статьях [2, 3]. При помощи полученных симметричных тензоров — метрических тензоров средней гиперповерхности и гиперсферического изображения конгруэнции — производится канонизация репера во второй дифференциальной окрестности прямой. Тем самым показывается, что в этих случаях дифференциальная окрестность третьего порядка является основной [1]. В этой окрестности даются формулы инфинитезимального перемещения канонических реперов и условия их полной интегрируемости. Геометрический смысл канонизации выясняется при помощи полученных стрикционных свойств конгруэнции.

Автор выражает искренную благодарность Ю. Г. Лумисте, под руководством которого эта работа выполнялась.

§ 1. Компоненты фундаментального объекта конгруэнции

Пусть конгруэнция изотропных прямых в $^1R_4$ отнесена к подвижному аффиному реперу $\{M, \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, вектор $\boldsymbol{e}_0$ которого является направляющим вектором прямой конгруэнции. Тогда

$$\|g_{ab}\| = \|(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)\| = \begin{pmatrix} 0 & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где

$$g = \det |g_{ab}| < 0 \tag{1.2}$$

$$(a, b, c, \ldots = 0, 1, 2, 3).$$

Формулы инфинитезимального перемещения репера и структурные уравнения имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} &= \omega^a \boldsymbol{e}_a, \\ d\boldsymbol{e}_a &= \omega^b{}_a \boldsymbol{e}_b \end{aligned} \tag{1.3}$$

и

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^b \wedge \omega^a{}_b, \\ d\omega^c{}_a &= \omega^b{}_a \wedge \omega^c{}_b, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где в данном случае формы перемещения $\omega^b{}_a$ связаны соотношениями:

$$g_{0\alpha}\omega^\alpha{}_0 = 0, \tag{1.5}$$

$$\nabla g_{0\alpha} = g_{\alpha\beta}\omega^\beta{}_0, \tag{1.6}$$

$$\nabla g_{\alpha\beta} = 2g_{0(\alpha}\omega^0{}_{\beta)}, \tag{1.7}$$

$$(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \varrho, \ldots = 1, 2, 3).$$

Здесь и в дальнейшем ∇ обозначает оператор дифференцирования [2], который из величины, занумерованной индексами 0 и α, β ..., вычисляется по следующему правилу: обыкновенному дифференциалу данной величины прибавляются свертки этой величины соответственно матрицами 1-форм $\|\omega^0{}_0\|$ и $\|\omega^\beta{}_\alpha\|$ с подходящими знаками. Например,

$$\nabla g_{0\alpha} \equiv dg_{0\alpha} - g_{0\alpha}\omega^0{}_0 - g_{0\sigma}\omega^\sigma{}_\alpha, \tag{1.8}$$

$$\nabla g_{\alpha\beta} \equiv dg_{\alpha\beta} - g_{\sigma\beta}\omega^\sigma{}_\alpha - g_{\alpha\sigma}\omega^\sigma{}_\beta, \tag{1.9}$$

где знак тождества употребляется в значении «обозначается». В этом значении мы употребляем этот знак и в дальнейшем в формулах, которыми определяются новые объекты или вводятся обозначения. Поскольку система уравнений

$$\omega^\alpha = 0,$$

$$\omega^\alpha{}_0 = 0$$

определяет подгруппу стационарности прямой конгруэнции, то формы ω^α и $\omega^\alpha{}_0$ являются главными. Если предполагать формы ω^α независимыми и выбрать их в качестве базисных форм, то конгруэнция определяется уравнениями

$$\omega^\alpha{}_0 = \Lambda^\alpha{}_{0\beta}\omega^\beta, \tag{1.10}$$

где в силу (1.5) имеет место соотношение

$$g_{0\alpha}\Lambda^\alpha{}_{0\beta} = 0. \tag{1.11}$$

Следовательно, формулы (1.6) принимают теперь вид:

$$\nabla g_{0\alpha} = \Lambda_{0\alpha\beta}\omega^{\beta}, \tag{1.6'}$$

где

$$\Lambda_{0\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{0\beta}. \tag{1.12}$$

Величины $g_{\alpha\beta}$ и $\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta}$ являются *компонентами первого порядка фундаментального объекта конгруэнции* [1].

Если продолжить систему (1.10), т. е. дифференцировать ее внешним образом и затем применить лемму Картана [4], то получается:

$$\nabla\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta} = -\Lambda^{\alpha}{}_{0\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{0\beta}\omega^{0} + \Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma}\omega^{\gamma}, \tag{1.13}$$

где

$$\Lambda^{\alpha}{}_{0[\beta\gamma]} = 0$$

и

$$\nabla\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta} \equiv d\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta} - \Lambda^{\alpha}{}_{0\beta}\omega^{0}{}_{0} - \Lambda^{\alpha}{}_{0\sigma}\omega^{\sigma}{}_{\beta} + \Lambda^{\sigma}{}_{0\beta}\omega^{\alpha}{}_{\sigma}. \tag{1.14}$$

В силу (1.11)

$$g_{0\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} = -g_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{0\beta}\Lambda^{\sigma}{}_{0\gamma}. \tag{1.15}$$

Продолжение системы (1.13) дает

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} = 2\Lambda^{\alpha}{}_{0(\beta}\Lambda^{\sigma}{}_{|0|\gamma)}\omega^{0}{}_{\sigma} - 2\Lambda^{\alpha}{}_{0\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{0(\beta}\omega^{0}{}_{\gamma)} - \\ -(2\Lambda^{\alpha}{}_{0\sigma(\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{|0|\beta)} + \Lambda^{\alpha}{}_{0\sigma}\Lambda^{\sigma}{}_{0\beta\gamma})\,\omega^{0} + \Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma\delta}\omega^{\delta},\end{gathered} \tag{1.16}$$

где

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} \equiv d\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} - \Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma}\omega^{0}{}_{0} - \Lambda^{\alpha}{}_{0\sigma\gamma}\omega^{\sigma}{}_{\beta} - \\ - \Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\sigma}\omega^{\sigma}{}_{\gamma} + \Lambda^{\sigma}{}_{0\beta\gamma}\omega^{\alpha}{}_{\sigma}\end{gathered} \tag{1.17}$$

и компоненты третьего порядка фундаментального объекта удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda^{\alpha}{}_{0[\beta\gamma\delta]} = 0$$

и

$$g_{0\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta\gamma\delta} = -2g_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{0(\beta\gamma}\Lambda^{\sigma}{}_{|0|\delta)}.$$

Объект $\overset{0\,\alpha_1\ldots\alpha_k}{T}_{00\,\beta_1\ldots\beta_l}$ называется *инвариантным линейным объектом* [1] конгруэнции, если при перемещении репера его компоненты удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\nabla\overset{0\,\alpha_1\ldots\alpha_k}{T}_{00\,\beta_1\ldots\beta_l} = \overset{0\,\alpha_1\ldots\alpha_k}{T}_{00\,\beta_1\ldots\beta_l}\,\vartheta\,(\operatorname{mod}\omega^{\alpha}),$$

где ϑ — произвольная вторичная форма Пфаффа. Такой объект называется *тензором* конгруэнции, если $\vartheta = 0$, и *относительным тензором* конгруэнции — в противном случае.

Так как в формулах (1.13) в правой части имеется вторичная 1-форма ω^0 с квадратичным коэффициентом от $\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta}$, то объект $\Lambda^{\alpha}{}_{0\beta}$ не является тензором относительно перемещений вдоль прямой, но в фиксированной точке прямой относительно допустимых, т. е. сохраняющих вид метрического тензора (1.1), преобразований он ведет себя как тензор.

§ 2. Стрикционные свойства

2.1. Будем изучать строение конгруэнции в первой дифференциальной окрестности прямой. Используем при этом понятие двумерной линейчатой поверхности, проходящей через данную прямую. Если мы обозначим дифференцирование в направлении линейчатой поверхности символом δ, то ее касательная плоскость определяется перемещениями

$$\delta \boldsymbol{M} = \omega^0 \boldsymbol{e}_0 + \omega \boldsymbol{l}, \tag{2.1}$$

где

$$\omega^0(\delta) = \omega^0, \quad \omega^\alpha(\delta) = l^\alpha \omega, \quad \boldsymbol{l} = l^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{2.2}$$

Рассматриваем линейчатую поверхность, которая проходит через две соседних прямых $\{M, \boldsymbol{e}_0\}$ и $\{M + \Delta M, \boldsymbol{e}_0 + \Delta \boldsymbol{e}_0\}$ конгруэнции. Пусть $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + \varrho^0 \boldsymbol{e}_0$ и $\boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{M} + \Delta \boldsymbol{M}) + (\varrho^0 + \Delta\varrho^0)(\boldsymbol{e}_0 + \Delta \boldsymbol{e}_0)$ — конечные точки общего перпендикуляра PP' на этих прямых. Тогда вектор этого перпендикуляра равен

$$\overrightarrow{PP'} = \Delta \boldsymbol{M} + \varrho^0 \Delta \boldsymbol{e}_0 + \Delta\varrho^0(\boldsymbol{e}_0 + \Delta \boldsymbol{e}_0). \tag{2.3}$$

Вычисляя скалярные произведения $(\overrightarrow{PP'}, \boldsymbol{e}_0)$, $(\overrightarrow{PP'}, \Delta \boldsymbol{e}^0)$, при приближении прямой $\{M + \Delta M, \boldsymbol{e}_0 + \Delta \boldsymbol{e}_0\}$ к прямой $\{M, \boldsymbol{e}_0\}$ по данной линейчатой поверхности, мы получим систему уравнений для определения абсциссы ϱ^0:

$$\begin{gathered}(\delta \boldsymbol{M}, \boldsymbol{e}_0) = 0 \\ (\delta \boldsymbol{M}, \delta \boldsymbol{e}_0) + \varrho^0 (\delta \boldsymbol{e}_0)^2 = 0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь мы имели в виду, что $(\boldsymbol{e}_0)^2 = 0$ и $(\boldsymbol{e}_0, \delta \boldsymbol{e}_0) = 0$. В силу (1.3), (2.1) и (2.2) система (2.4) имеет вид

$$g_{0\alpha}\omega^\alpha(\delta) = 0, \tag{2.5}$$

$$\varrho^0 = -\frac{\Lambda_{0\alpha\beta}\omega^\alpha(\delta)\,\omega^\beta(\delta)}{\Lambda_{00\mu\nu}\omega^\mu(\delta)\,\omega^\nu(\delta)}, \tag{2.6}$$

где

$$\Lambda_{00\mu\nu} \equiv g_{\rho\sigma}\Lambda^\rho{}_{0\mu}\Lambda^\sigma{}_{0\nu}. \tag{2.7}$$

Точка P с абсциссой ϱ^0, вычисляемой по формулам (2.5) и (2.6) называется *точкой сжатия* данной линейчатой поверхности на прямой $\{M, \boldsymbol{e}_0\}$. Все точки сжатия данной линейчатой поверхности образуют *стрикционную линию* (ср. [5]).

Поскольку каждый вектор $\boldsymbol{l} = l^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$ определяет линейчатую поверхность конгруэнции, для которой $\omega^\alpha(\delta) = l^\alpha \delta t$, то формула (2.6), если условие (2.5) выполнено, определяет точку сжатия этой поверхности; в противном случае (т. е. если $g_{0\alpha}l^\alpha \neq 0$) точка сжатия не определена. Таким образом условие (2.5) разделяет все линейчатые поверхности конгруэнции на два класса:

1) *линейчатые поверхности первого рода,* удовлетворяющие условию (2.5), имеют изотропную касательную плоскость, так как $(\lambda \boldsymbol{e}_0 + \mu \boldsymbol{l}, \boldsymbol{e}_0) = 0$ в силу (2.2) и (2.5);

2) *линейчатые поверхности второго рода,* касательные векторы которых, неколлинеарные с e_0, удовлетворяют условию $(e_0, l) \neq 0$, т. е. касательные плоскости которых псевдоевклидовы.

Точки сжатия линейчатых поверхностей первого рода, проходящих через данную прямую, заполняют отрезок на этой прямой, конечные точки которого называются *граничными точками* [5].

2.2. Если линейчатая поверхность развертывающаяся, то она состоит из касательных к кривой — ребра возраста ее. В точке касания, следовательно, все перемещения на поверхности коллинеарны к направляющему вектору e_0 прямой. Точка $F = M + f^0 e_0$ на прямой конгруэнции, которая является точкой ребра возврата для некоторой развертывающейся поверхности конгруэнции называется *фокусом* конгруэнции (ср. [5]). В силу (2.1)

$$\delta F = (\delta f^0 + f^0 \omega^0{}_0(\delta) + \omega^0) e_0 + \omega(\delta^\beta{}_\alpha + f^0 \Lambda^\beta{}_{0\alpha}) l^\alpha e_\beta, \tag{2.8}$$

т. е. касательный вектор l развертывающейся поверхности в фокусе должен быть собственным вектором задачи собственных значений

$$(\delta^\alpha{}_\beta + f^0 \Lambda^\alpha{}_{0\beta}) l^\beta = 0. \tag{2.9}$$

Предполагая, что $f^0 \neq 0$ и обозначая $\lambda_0 \equiv \frac{1}{f^0}$, получим систему

$$(\Lambda^\alpha{}_{0\beta} + \lambda_0 \delta^\alpha{}_\beta) l^\beta = 0, \tag{2.9$'$}$$

которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$(\lambda_0)^3 + (\lambda_0)^2 \Lambda^\alpha{}_{0\alpha} + \lambda_0 \cdot 3\delta^\alpha{}_\alpha{}^\beta{}_\mu{}^\gamma{}_\nu \Lambda^\mu{}_{0\beta} \Lambda^\nu{}_{0\gamma} + \delta^\alpha{}_\lambda{}^\beta{}_\mu{}^\gamma{}_\nu \Lambda^\lambda{}_{0\alpha} \Lambda^\mu{}_{0\beta} \Lambda^\nu{}_{0\gamma} = 0, \tag{2.10}$$

где

$$\delta^\alpha{}_\lambda{}^\beta{}_\mu{}^\gamma{}_\nu = \delta^\alpha{}_{[\lambda} \delta^\beta{}_\mu \delta^\gamma{}_{\nu]}.$$

Полученное уравнение (2.10) определяет собственные значения рассматриваемой задачи. В силу (1.11)

$$\det |\Lambda^\alpha{}_{0\beta}| \equiv \delta^\alpha{}_\lambda{}^\beta{}_\mu{}^\gamma{}_\nu \Lambda^\lambda{}_{0\alpha} \Lambda^\mu{}_{0\beta} \Lambda^\nu{}_{0\gamma} = 0. \tag{2.11}$$

и поэтому уравнение (2.10) имеет решение $\lambda_0 = 0$. Следовательно, *один фокус F — бесконечно удалённый* ($f^0 = \infty$); *соответствующая развертывающаяся поверхность является цилиндром.* Соответствующий собственный вектор характеризуется системой уравнений

$$\Lambda^\alpha{}_{0\beta} l^\beta = 0. \tag{2.12}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только общий случай, когда остальные два фокуса конечные, т. е. когда коэффициент при λ_0 в (2.10) не равняется нулю:

$$\Lambda_{00} \equiv 3\delta^\alpha{}_\alpha{}^\beta{}_\mu{}^\gamma{}_\nu \Lambda^\mu{}_{0\beta} \Lambda^\nu{}_{0\gamma} \neq 0. \tag{A}$$

Покажем, что при этом предположении *цилиндры являются линейчатыми поверхностями второго рода.*

Действительно, в силу (1.2) не все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора не равны нулю. Применяя допустимые преобразования репера или просто перенумеруя при надобности базисные векторы, мы можем получить репер, в котором $g_{0i} = 0$ $(i, j, \ldots = 1, 2)$ и $g_{03} \neq 0$. Тогда уравнение (1.11) имеет вид $\Lambda^3{}_{0\beta} = 0$ и из (2.12) получим для касательного вектора цилиндра выражение

$$l^\alpha{}_3 = \varkappa\delta^\alpha{}_3{}^\beta{}_k{}^\gamma{}_l\Lambda^k{}_{0\beta}\Lambda^l{}_{0\gamma}, \tag{2.13}$$

где $\varkappa \neq 0$ — произвольный коэффициент. С другой стороны условие (Λ) принимает в таком репере вид:

$$\Lambda_{00} \equiv 3\delta^3{}_3{}^k{}_i{}^l{}_j\Lambda^i{}_{0k}\Lambda^j{}_{0l} = \frac{\varkappa}{3} l^3{}_3 \neq 0.$$

Следовательно,

$$g_{0\alpha}l^\alpha{}_3 = g_{03}l^3{}_3 \neq 0$$

и наше утверждение доказано.

Так как системе (2.12) соответствует в силу (1.10) и (2.2) вполне интегрируемая система Пфаффа

$$\omega^\alpha{}_0 = 0,$$

то *конгруэнция изотропных прямых расслаивается на двухпараметрическое семейство двухмерных цилиндров.*

2.3. При предположении (A) уравнение (2.10) имеет два отличных от нуля решения — обратных значений абсциссы конечных фокусов. В зависимости от знака дискриминанта

$$\Delta \equiv (\Lambda^\alpha{}_{0\alpha})^2 - 4\Lambda_{00} \tag{2.14}$$

соответствующего квадратного уравнения, на прямых конгруэнции имеется либо два различных и действительных фокуса $(\Delta > 0)$, либо два действительных и совпадающихся фокуса $(\Delta = 0)$, либо мнимые комплексно-сопряженные фокусы $(\Delta < 0)$. Соответственно этому конгруэнция изотропных прямых в ${}^1R_4$ называется *гиперболической*, если $\Delta > 0$, *параболической*, если $\Delta = 0$ и *эллиптической*, если $\Delta < 0$ (ср. [5]).

Конгруэнция изотропных прямых в ${}^1R_4$ называется *нормальной конгруэнцией*, если существует однопараметрическое семейство гиперповерхностей, ортогональных к прямым конгруэнции (ср. [5]). Так как условием ортогональности векторов $\boldsymbol{e}_0$ и $\boldsymbol{l}$ является $g_{0\alpha}l^\alpha = 0$, то конгруэнция изотропных прямых является нормальной, если уравнение Пфаффа (2.5), т. е.

$$g_{0\alpha}\omega^\alpha = 0$$

вполне интегрируемо. Следовательно, условием нормальности конгруэнции будет:

$$\Lambda_{0\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta = 0 \,(\operatorname{mod} g_{0\alpha}\omega^\alpha);$$

в реперах, использованных выше, оно имеет более простой вид:

$$\Lambda_{0[ij]} = 0. \tag{2.15}$$

Хотя это определение нормальной конгруэнции совпадает с определением нормальной конгруэнции в R_3 (ср. [5]), соответствующая геометрическая картина будет совсем иной. Именно, прямые конгруэнции в силу изотропности являются касательными к этим ортогональным гиперповерхностям. Но так как семейство этих гиперповерхностей только однопараметрическое, то эти гиперповерхности являются линейчатыми гиперповерхностями. Следовательно, нормальная конгруэнция изотропных прямых в ${}^1R_4$ расслаивается на однопараметрическое семейство трехмерных линейчатых поверхностей. В силу определения линейчатых поверхностей первого рода, в случае нормальной конгруэнции они являются двумерными подповерхностями этих линейчатых гиперповерхностей.

§ 3. Средняя гиперповерхность

3.1. При выполнении условия (А) на каждой прямой конгруэнции определяется центр — центр отрезка между двумя конечными фокусами:

$$\boldsymbol{C} \equiv \frac{1}{2} (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{M} + c^0 \boldsymbol{e}_0, \tag{3.1}$$

где

$$c^0 \equiv \frac{1}{2} (f^0{}_1 + f^0{}_2).$$

Покажем, что эта точка является *инвариантной точкой конгруэнции*, т. е.

$$d\boldsymbol{C} = 0 (\operatorname{mod} \omega^\alpha). \tag{3.2}$$

Дифференцирование (3.1) дает

$$d\boldsymbol{C} = (dc^0 + c^0\omega^0{}_0 + \omega^0)\boldsymbol{e}_0 + \omega^\alpha(\delta^\beta{}_\alpha + c^0\Lambda^\beta{}_{0\alpha})\boldsymbol{e}_\beta; \tag{3.3}$$

поэтому абцисса c^0 инвариантной точки в силу (3.2) должна удовлетворить дифференциальному уравнению

$$\nabla c^0 = -\omega^0 (\operatorname{mod} \omega^\alpha). \tag{3.4}$$

Из уравнения (2.10) и формулы (3.1) следует, что

$$c^0 = -\frac{1}{2} \frac{\Lambda^\alpha{}_{0\alpha}}{\Lambda_{00}}. \tag{3.5}$$

Поскольку из формулы (1.13) вытекают дифференциальные уравнения

$$\nabla \Lambda^\alpha{}_{0\alpha} = -\Lambda^\alpha{}_{0\beta}\Lambda^\beta{}_{0\alpha}\omega^0 (\operatorname{mad} \omega^\alpha) \tag{3.6}$$

и

$$\nabla \Lambda_{00} = -\Lambda_{00}\Lambda^\alpha{}_{0\alpha}\omega^0 (\operatorname{mod} \omega^\alpha), \tag{3.7}$$

то внешнее дифференцирование формулы (3.5) дает

$$\nabla c^0 = -\omega^0 + \eta^0{}_\alpha \omega^\alpha, \tag{3.8}$$

где $\eta^0{}_\alpha$ является объектом второго порядка. Тем самым и доказано, что центр является инвариантной точкой. Центры всех прямых конгруэнции образуют *среднюю гиперповерхность* конгруэнции [2], касательные векторы которой выражаются через (3.3), где нужно учесть (3.8).

3.2. Вводим ряд новых обозначений:

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta} \equiv \delta^{\alpha}{}_{\beta} + c^0 \Lambda^{\alpha}{}_{0\beta}, \tag{3.9}$$

$$\zeta^{\beta}{}_{\alpha}\eta^{\nu}{}_{\beta} \equiv \delta^{\nu}{}_{\alpha}, \tag{3.10}$$

$$N^0{}_{\alpha} \equiv \zeta^{\beta}{}_{\alpha}\eta^0{}_{\beta}. \tag{3.11}$$

Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что

$$\det|\eta^{\alpha}{}_{\beta}| = -\frac{\Delta}{4\Lambda_{00}} \neq 0; \tag{B}$$

этим исключаются конгруэнции параболического типа. Из формул (3.9) и (3.10) вытекают равенства

$$\eta^{\alpha}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{0\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{0\rho}\eta^{\rho}{}_{\beta}, \quad \zeta^{\alpha}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{0\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{0\rho}\zeta^{\rho}{}_{\beta}. \tag{3.12}$$

Дифференциальными уравнениями для объектов $\eta^{\alpha}{}_{\beta}$, $\zeta^{\alpha}{}_{\beta}$ и $N^0{}_{\alpha}$ будут:

$$\nabla\eta^{\alpha}{}_{\beta} = -\eta^{\alpha}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{0\beta}\omega^0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^{\alpha}), \tag{3.13}$$

$$\nabla\zeta^{\alpha}{}_{\beta} = \zeta^{\alpha}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{0\beta}\omega^0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^{\alpha}), \tag{3.14}$$

$$\nabla N^0{}_{\alpha} = -\omega^0{}_{\alpha} \quad (\mathrm{mod}\,\omega^{\alpha}). \tag{3.15}$$

Из уравнений (3.13)—(3.15) следует, что ни один из этих объектов не является тензором, но с их помощью можно в дальнейшем строить ряд тензоров. Поскольку выражение (3.3) касательного вектора средней гиперповерхности можно теперь писать в виде

$$d\boldsymbol{C} = \vartheta^{\alpha}\boldsymbol{E}_{\alpha}, \tag{3.16}$$

где

$$\vartheta^{\alpha} \equiv \eta^{\alpha}{}_{\beta}\omega^{\beta} \tag{3.17}$$

и

$$\boldsymbol{E}_{\alpha} \equiv N^0{}_{\alpha}\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{e}_{\alpha}, \tag{3.18}$$

то в силу (3.15) можем сказать, что $N^0{}_{\alpha}$ является *объектом инвариантного оснащения* конгруэнции [3]. Оснащающая гиперплоскость является касательной к средней гиперповерхности конгруэнции. Новые базисные 1-формы конгруэнции ϑ^{α} являются базисными формами на средней гиперповерхности. Поскольку на средней гиперповерхности имеются равенства

$$\eta^{\alpha}{}_{\beta}|_{c=0} = \zeta^{\alpha}{}_{\beta}|_{c=0} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}, \tag{3.19}$$

то

$$\vartheta^{\alpha}|_{c=0} = \omega^{\alpha}|_{c=0} \tag{3.20}$$

и

$$N^0{}_{\alpha}|_{c=0} = \eta^0{}_{\alpha}|_{c=0}. \tag{3.21}$$

§ 4. Инвариантные объекты

4.1. Исходя из формулы преобразования репера (3.18), мы получим формулы для новых форм инфинитезимального перемещения репера:

$$
\begin{aligned}
\vartheta^0 &= \omega^0 - N^0{}_\alpha \omega^\alpha,\\
\vartheta^0{}_0 &= \omega^0{}_0 - N^0{}_\alpha \omega^\alpha{}_0,\\
\vartheta^\beta{}_\alpha &= \omega^\beta{}_\alpha + N^0{}_\alpha \omega^0{}_\beta;
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

$$\vartheta^\alpha{}_0 = \omega^\alpha{}_0; \tag{4.2}$$

$$\vartheta^0{}_\alpha = \nabla N^0{}_\alpha + \omega^0{}_\alpha - N^0{}_\alpha N^0{}_\beta \omega^\beta{}_0. \tag{4.3}$$

В силу (3.15) определяются величины $N^0{}_{\alpha\beta}$:

$$\nabla N^0{}_\alpha = -\omega^0{}_\alpha + N^0{}_{\alpha\beta}\vartheta^\beta. \tag{4.4}$$

Теперь формулу (4.3) можно писать в виде

$$\vartheta^0{}_\alpha = \mathfrak{N}^0{}_{\alpha\beta}\vartheta^\beta, \tag{4.3'}$$

где

$$\mathfrak{N}^0{}_{\alpha\beta} \equiv N^0{}_{\alpha\beta} - N^0{}_\alpha N^0{}_\rho L^\rho{}_{0\beta} \tag{4.5}$$

и

$$L^\alpha{}_{0\beta} \equiv \zeta^\rho{}_\beta \Lambda^\alpha{}_{0\rho}. \tag{4.6}$$

Формулы инфинитезимального перемещения репера (1.3) примут вид:

$$d\boldsymbol{C} = \vartheta^\alpha \boldsymbol{E}_\alpha \quad (d\boldsymbol{M} = \vartheta^0 \boldsymbol{e}_0 + \vartheta^\alpha \zeta^\beta{}_\alpha \boldsymbol{E}_\beta); \tag{4.7}$$

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{e}_0 &= \vartheta^0{}_0 \boldsymbol{e}_0 + L^\alpha{}_{0\beta}\vartheta^\beta \boldsymbol{E}_\alpha,\\
d\boldsymbol{E}_\alpha &= \mathfrak{N}^0{}_{\alpha\beta}\vartheta^\beta \boldsymbol{e}_0 + \vartheta^\beta{}_\alpha \boldsymbol{E}_\beta,
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

а соответствующие структурные уравнения — вид:

$$
\begin{aligned}
d\vartheta^\alpha &= \vartheta^\sigma \wedge \vartheta^\alpha{}_\sigma,\\
d\vartheta^\alpha{}_\beta &= \vartheta^\sigma{}_\beta \wedge \vartheta^\alpha{}_\sigma + \Omega^\alpha{}_\beta;
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

и

$$
\begin{aligned}
d\vartheta^0 &= \vartheta^0 \wedge \vartheta^0{}_0 + \Omega^0,\\
d\vartheta^0{}_0 &= \Omega^0{}_0,
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

где

$$\Omega^\alpha{}_\beta = \frac{1}{2} R^\alpha{}_{\beta\rho\sigma}\vartheta^\rho \wedge \vartheta^\sigma \tag{4.11}$$

$$R^\alpha{}_{\beta\rho\sigma} \equiv 2\mathfrak{N}^0{}_{\beta[\rho} L^\alpha{}_{|0|\sigma]}; \tag{4.12}$$

и

$$\Omega^0 = -\mathfrak{N}^0{}_{\sigma[\alpha}\zeta^\sigma{}_{\beta]}\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta, \tag{4.13}$$

$$\Omega^0{}_0 = L^\sigma{}_{0[\alpha} N^0{}_{\beta]\sigma}\vartheta^\alpha \wedge \vartheta^\beta. \tag{4.14}$$

Объект $L^\alpha{}_{0\beta}$, определяемый формулой (4.6), является тензором первого порядка, т. е.

$$\nabla L^\alpha{}_{0\beta} = M^\alpha{}_{0\beta\gamma}\vartheta^\gamma, \tag{4.15}$$

и так как уравнения конгруэнции (1.10) можно писать в виде

$$\vartheta^\alpha{}_0 = L^\alpha{}_{0\beta}\vartheta^\beta, \tag{4.16}$$

мы будем тензор $L^{\alpha}{}_{0\beta}$ называть *основным тензором первого порядка.* Тензорами второго порядка являются объекты $\mathfrak{R}^0{}_{\alpha\beta}$ (4.5) и $R^{\alpha}{}_{\beta\rho\alpha}$ (4.12); последний из них является *тензором кривизны средней гиперповерхности конгруэнции.* Коэффициенты в формулах (4.13) и (4.14) не являются тензорами.

4.2. С основным тензором $L^{\alpha}{}_{0\beta}$ связан ряд величин:

$$l_0 \equiv L^{\alpha}{}_{0\alpha}, \tag{4.17}$$

$$l_{00} \equiv \frac{1}{2} L^{\alpha}{}_{0\beta} L^{\beta}{}_{0\alpha}, \tag{4.18}$$

$$l_{000} \equiv \frac{1}{3} L^{\alpha}{}_{0\beta} L^{\beta}{}_{0\gamma} L^{\gamma}{}_{0\alpha},$$

и т. д. Вычисление этих величин дает

$$l_0 = l_{000} = 0, \tag{4.19}$$

$$l_{00} = -3\delta^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{\rho}{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\nu} L^{\mu}{}_{0\rho} L^{\nu}{}_{0\sigma}, \tag{4.20}$$

т. е.

$$l_{00}\big|_{c=0} = -\Lambda_{00}\big|_{c=0} \neq 0. \tag{4.21}$$

Поскольку

$$\nabla l_{00} \equiv dl_{00} - 2l_{00}\omega^0{}_0 = 2L^{\alpha}{}_{0\beta} M^{\beta}{}_{0\alpha\delta} \vartheta^{\delta}, \tag{4.22}$$

то l_{00} является *относительным инвариантом конгруэнции.*

Продолжая уравнение (4.15), получим

$$\nabla M^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} = 2L^{\alpha}{}_{0(\beta} L^{0}{}_{|0|\gamma)} \omega^0{}_{\sigma} - L^{\alpha}{}_{0\sigma} L^{\sigma}{}_{0\gamma} \omega^0{}_{\beta} \pmod{\vartheta^{\alpha}}.$$

Отсюда следует, что объект второго порядка $M^{\alpha}{}_{0\beta\gamma}$ не является тензором, но объект

$$L^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} \equiv M^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} - L^{\alpha}{}_{0\sigma} L^{\sigma}{}_{0\gamma} N^0{}_{\beta} + 2L^{\alpha}{}_{0(\beta} L^{\sigma}{}_{|0|\gamma)} N^0{}_{\sigma} \tag{4.23}$$

уже тензор. В оснащенном на средней гиперповерхности репере соблюдается равенство

$$L^{\alpha}{}_{0\beta\gamma} = M^{\alpha}{}_{0\beta\gamma}.$$

Тензор $L^{\alpha}{}_{0\beta\gamma}$ называем *основным тензором второго порядка конгруэнции.*

4.3. Из формулы (3.16) вычисляем *метрическую форму средней гиперповерхности*:

$$(dC)^2 = G_{\alpha\beta} \vartheta^{\alpha} \vartheta^{\beta}, \tag{4.24}$$

где в силу выражений (3.18) для $\boldsymbol{E}_{\alpha}$ будет

$$G_{\alpha\beta} \equiv (\boldsymbol{E}_{\alpha}, \boldsymbol{E}_{\beta}) = g_{\alpha\beta} + 2g_{0(\alpha} N^0{}_{\beta)}. \tag{4.25}$$

Из формул (1.6), (1.7) и (3.15) вытекает, что

$$\nabla G_{\alpha\beta} = 0 \pmod{\vartheta^{\alpha}},$$

вследствие чего $G_{\alpha\beta}$ является тензором второго порядка. Поскольку гиперповерхность в пространстве ${}^1R_4$ может быть евклидовой, псевдоевклидовой или изотропной, то в общем случае нельзя ничего сказать о сигнатуре тензора $G_{\alpha\beta}$. Если повторить вычисления п. 2.1, исходя из точки C вместо M, то система уравнений (2.5) и (2.6) для нахождения абциссы точки сжатия имеет вид

$$g_{0\alpha}\vartheta^{\alpha} = 0 \tag{4.26}$$

$$\varrho^{0} = -\frac{\mu^{0}{}_{\alpha\beta}\vartheta^{\alpha}\vartheta^{\beta}}{\gamma_{\mu\nu}\vartheta^{\mu}\vartheta^{\nu}}, \tag{4.27}$$

где

$$\mu^{0}{}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{l_{00}} G_{\alpha\sigma}L^{\sigma}{}_{0\beta} = \frac{1}{l_{00}} (g_{\alpha\sigma} + g_{0\alpha}N^{0}{}_{\sigma}) L^{\sigma}{}_{0\beta} \tag{4.28}$$

и

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{l_{00}} G_{\rho\sigma}L^{\rho}{}_{0\alpha}L^{\sigma}{}_{0\beta} = \frac{1}{l_{00}} g_{\rho\sigma}L^{\rho}{}_{0\alpha}L^{\sigma}{}_{0\beta}. \tag{4.29}$$

В последних равенствах мы учитывали то, что преобразование репера (3.18) сохраняет значения скалярных произведений $g_{0\alpha}$ и, следовательно, условие (1.11) имеет вид

$$g_{0\alpha}L^{\alpha}{}_{0\beta} = 0. \tag{4.30}$$

Поскольку в обозначениях (4.27) и (4.29)

$$(de_0)^2 = l_{00}\gamma_{\alpha\beta}\vartheta^{\alpha}\vartheta^{\beta},$$

то тензор первого порядка $\gamma_{\alpha\beta}$ называется *метрическим тензором гиперсферического изображения конгруэнции*. В силу формулы (4.30) имеем

$$\det|L^{\alpha}{}_{0\beta}| = 0. \tag{4.31}$$

Так как на формулы (4.28) и (4.29) определения тензоров $\mu^{0}{}_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как на произведении соответствующих матриц $\|G_{\alpha\beta}\|$ и $\|L^{\alpha}{}_{0\beta}\|$, то в силу (4.31)

$$\det|\mu^{0}{}_{\alpha\beta}| = 0, \quad \det|\gamma_{\alpha\beta}| = 0. \tag{4.32}$$

§ 5. Полуканонические реперы

5.1. Будем теперь использовать полученные выше инвариантные объекты с целью канонизации репера. В этом и в следующем параграфах покажем, что симметричные тензоры $G_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\mu^{0}{}_{(\alpha\beta)}$ позволяют произвести полную канонизацию репера в случае гиперболической и эллиптической конгруэнций.

Рассмотрим задачу собственных значений

$$(\gamma_{\alpha\beta} - \lambda G_{\alpha\beta})\, l^{\beta} = 0. \tag{5.1}$$

В силу (4.32) эта задача имеет собственное значение $\lambda = 0$; соответствующий им собственный вектор удовлетворяет уравнению

$$\gamma_{\alpha\beta}l^{\beta} = 0,$$

или в силу (4.29) уравнению

$$g_{\rho\sigma}L^{\rho}{}_{0\alpha}L^{\sigma}{}_{0\beta}l^{\beta} = 0. \tag{5.2}$$

Если теперь повторить рассуждения п. 2.2, исходя из центра C прямой, то система (2.12) получит вид

$$L^{\alpha}{}_{0\beta}l^{\beta} = 0. \tag{5.3}$$

Предполагая еще, что среди компонент $g_{0\alpha}$ отличным от нуля является $g_{0\alpha_3}$, где α_3 фиксированное значение индекса α, то в силу (4.30) решение системы (5.3) можем писать в виде

$$l^\beta{}_{\alpha_3} = \delta^\beta{}_{\alpha_3}\rho_\mu{}^\sigma{}_\nu L^\mu{}_{0\rho}L^\nu{}_{0\sigma}. \tag{5.4}$$

Решение (5.4) системы (5.3) является решением и системы (5.2). Следовательно, собственным вектором задачи (5.1) будет *касательный вектор линии пересечения цилиндра со средней гиперповерхностью*

$$l_{\alpha_3} = l^\beta{}_{\alpha_3}\boldsymbol{E}^\beta. \tag{5.5}$$

Поскольку в силу (4.15) имеем $\nabla l^\beta{}_{\alpha_3} = 0 \pmod{\vartheta^\alpha}$, то вектор $\boldsymbol{l}_{\alpha_3}$ является инвариантным вектором конгруэнции.

5.2. Так как в силу п.2.2. касательная плоскость цилиндра является псевдоевклидовой, то на ней имеется инвариантное направление — неколлинеарное с $\boldsymbol{e}_0$ изотропное направление. Выбираем теперь новый подвижный репер $\{M, \boldsymbol{e}_0, {}'\boldsymbol{e}_1, {}'\boldsymbol{e}_2, {}'\boldsymbol{e}_3\}$ так, чтобы ${}'\boldsymbol{e}_3$ принадлежал второму изотропному направлению в касательной плоскости цилиндра и $(\boldsymbol{e}_0, {}'\boldsymbol{e}_3) = 1$, а векторы ${}'\boldsymbol{e}_i (i, j, k, \ldots = 1, 2)$ определяли бы плоскость, ортогональную к плоскости $\{\boldsymbol{e}_0, {}'\boldsymbol{e}_3\}$. Тогда матрица A преобразования репера

$$'\boldsymbol{e}_a = A^b{}_a\boldsymbol{E}_l,$$

где $\boldsymbol{E}_0 \equiv \boldsymbol{e}_0 \equiv {}'\boldsymbol{e}_0$, имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -kG_{\alpha\beta}l^\alpha{}_{\alpha_3}A^\beta{}_1 & A^1{}_1 & A^2{}_1 & A^3{}_1 \\ -kG_{\alpha\beta}l^\alpha{}_{\alpha_3}A^\beta{}_2 & A^1{}_2 & A^2{}_2 & A^3{}_2 \\ -k^2G_{\alpha\beta}l^\alpha{}_{\alpha_3}l^\beta{}_{\alpha_3} & kl^1{}_{\alpha_3} & kl^2{}_{\alpha_3} & kl^3{}_{\alpha_3} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

где через K мы обозначили инвариант

$$k \equiv \frac{1}{g_{0\beta}l^\beta{}_{\alpha_3}};$$

здесь компоненты $A^\alpha{}_i$ должны удовлетворять уравнению

$$g_{0\alpha}A^\alpha{}_i = 0. \tag{5.7}$$

Последнее уравнение показывает, что в полученном репере векторы на плоскости $\{'\boldsymbol{e}_i\}$ определяют линейчатые поверхности первого рода и все остальные векторы l^α — линейчатые поверхности второго рода.

В дальнейшем мы используем только такие реперы, называя их *полуканоническими*, и будем опускать штрихи в обозначениях векторов и других объектов. Допустимыми будем считать преобразования, сохраняющие следующий вид матрицы метрического тензора в пространстве ${}^1R_4$:

$$\|g_{ab}\| = \|(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & 0 \\ 0 & g_{12} & g_{22} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Тогда формы Пфаффа $\omega^b{}_a$ в формулах (1.3) и (1.4) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\omega^3{}_0 = \omega^0{}_3 = 0, \qquad \omega^3{}_3 = -\omega^0{}_0, \\ &\omega^3{}_i = -g_{ij}\omega^j{}_0, \qquad \omega^0{}_i = -g_{ij}\omega^j{}_3 \end{aligned} \tag{5.9}$$

и

$$\triangle g_{ij} = 0. \tag{5.10}$$

Здесь дифференциальный оператор $\triangle$ аналогичен оператору ∇ с той только разницей, что свертки с формами $\omega^\beta{}_\alpha$ принимаются раздельно по формам $\omega^j{}_i$ и $\omega^3{}_3$. Например:

$$\begin{aligned} &\triangle g_{ij} \equiv dg_{ij} - g_{kj}\omega^k{}_i - g_{ik}\omega^k{}_j, \\ &\triangle T^i{}_{3j} \equiv dT^i{}_{3j} - T^i{}_{3j}\omega^3{}_3 - T^i{}_{3k}\omega^k{}_j + T^k{}_{3j}\omega^i{}_k. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Если применение оператора $\triangle$ к геометрическому объекту дает в результате нуль по модулю ϑ^α, то объект является *тензором* (точнее тензором, относительно допустимых преобразований полуканонического репера), который индексами 0 и 3 относится к плоскости $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_3\}$ и индексами $i, j, k, \ldots$ — к плоскости $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Например, в силу (5.10) метрический тензор собственно евклидовой плоскости $\{\boldsymbol{e}_i\}$ является тензором в указанном смысле.

Поскольку в полуканоническом репере в силу (5.3), (5.8) и того, что $\boldsymbol{l}_{\alpha_3} = \boldsymbol{e}_3$, имеют место соотношения

$$L^3{}_{0\beta} = L^\beta{}_{03} = 0, \tag{5.12}$$

то уравнения конгруэнции принимают вид

$$\omega^k{}_0 = L^k{}_{0j}\vartheta^j, \tag{5.13}$$

где в силу (4.17) и (4.19)

$$L^2{}_{02} = -L^1{}_{01}, \tag{5.14}$$

а в силу (5.9)

$$\omega^3{}_i = -g_{ik}L^k{}_{0j}\vartheta^j. \tag{5.15}$$

Теперь

$$\nabla L^k{}_{0j} \equiv \triangle L^k{}_{0j} = M^k{}_{0j\alpha}\vartheta^\alpha, \tag{5.16}$$

и, следовательно, $L^k{}_{0j}$ является тензором относительно допустимых преобразований полуканонического репера. Из формулы

$$\nabla L^k{}_{03} = M^k{}_{03\alpha}\vartheta^\alpha$$

в силу (5.12) найдем выражения для вторичных форм $\omega^k{}_3$:

$$\omega^k{}_3 = L^k{}_{3\alpha}\vartheta^\alpha, \tag{5.17}$$

где

$$L^k{}_{3\alpha} \equiv -\tilde{L}^{0k}{}_j M^j{}_{03\alpha} \tag{5.18}$$

и

$$\tilde{L}^{0k}{}_j L^i{}_{0k} \equiv \delta^i{}_j;$$

здесь мы учитывали, что предположение (A) имеет теперь вид

$$\det |L^k{}_{0i}| \neq 0. \tag{A$'$}$$

Поскольку

$$\triangle L^k{}_{3i} = 0 \pmod{\vartheta^\alpha}$$

и

$$\triangle L^k{}_{33} = 0 \pmod{\vartheta^\alpha},$$
где
$$\triangle L^k{}_{3i} \equiv dL^k{}_{3i} - L^k{}_{3i}\omega^3{}_3 - L^k{}_{3l}\omega^l{}_i + L^l{}_{3i}\omega^k{}_l$$
и
$$\triangle L^k{}_{33} \equiv dL^k{}_{33} - 2L^k{}_{33}\omega^3{}_3 + L^l{}_{33}\omega^k{}_l,$$
то тензор второго порядка $L^k{}_{3\alpha}$ содержит относительный аффинор $L^k{}_{3i}$ и вектор $L^k{}_{33}$ на плоскости $\{e_k\}$.

5.3. Так как из формул $L^3{}_{0\beta} \equiv \zeta^\rho{}_\beta \Lambda^3{}_{0\rho} = 0$ и $L^\alpha{}_{03} \equiv \Lambda^\rho{}_{03}\zeta^\alpha{}_\rho = 0$ вытекает $\Lambda^3{}_{0\beta} = \Lambda^\alpha{}_{03} = 0$, то в силу (3.9) и (3.10) $\eta^\alpha{}_3 = \zeta^\alpha{}_3 = \delta^\alpha{}_3$ и $\eta^3{}_\beta = \zeta^3{}_\beta = \delta^3{}_\beta$. Следовательно, в полуканоническом репере $\vartheta^3 = \omega^3$.

Обозначая дифференцирование по направлении e_3 через δ, т. е.
$$\omega^0(\delta) = \omega^k(\delta) = 0, \qquad \omega^3(\delta) = \omega,$$
мы можем часть из формул (1.3) выписать в виде:
$$\delta \boldsymbol{M} = \omega \boldsymbol{e}_3,$$
$$\delta \boldsymbol{e}_3 = L^k{}_{33}\omega \boldsymbol{e}_k - \omega^0{}_0(\delta)\boldsymbol{e}_3.$$
Следовательно, вектор $L^k{}_{33}\boldsymbol{e}_k$ естественно назвать *вектором нормальной кривизны изотропной направляющей линии цилиндра конгруэнции*. Равенство $L^k{}_{33} = 0$ является признаком того, что цилиндры конгруэнции вырождаются в псевдоевклидовы плоскости.

§ 6. Канонические реперы

6.1. Поскольку допустимые преобразования полуканонического репера содержат: 1) собственные вращения псевдоевклидовой плоскости $\{e_0, e_3\}$, определяемые формулами
$$'\boldsymbol{e}_0 = A\boldsymbol{e}_0, \qquad '\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{A}\boldsymbol{e}_0, \tag{6.1}$$
где $A \neq 0$ — произвольное число, и 2) линейные преобразования евклидовой плоскости $\{e_i\}$, то задача полной канонизации репера состоит из двух отдельных канонизаций. Канонизируем сначала репер на плоскости $\{e_0, e_3\}$. При преобразовании (6.1) инвариант l_{00} преобразуется по формуле
$$'l_{00} = A^2 l_{00}.$$
Если здесь выбирать $A = \frac{1}{\sqrt{|l_{00}|}}$, то получим репер, в котором
$$l_{00} = \pm 1.$$

В силу (4.19), (4.21) и (5.12) уравнение (2.10), вычисляемое относительно средней гиперповерхности, имеет в полуканоническом репере вид
$$(\lambda_0)^2 - l_{00} = 0. \tag{6.2}$$

Следовательно, в полученном полуканоническом репере (см. (2.14))

$$\Delta = l_{00} = \pm 1, \tag{6.3}$$

где в случае *гиперболической конгруэнции* $l_{00} = 1$ и абсциссами фокусов являются $f^0{}_1 = -f^0{}_2 = 1$, а в случае *эллиптической конгруэнции* $l_{00} = -1$ и $f^0{}_1 = -f^0{}_2 = i$.

Если на каждой прямой конгруэнции пользоваться такими реперами, то из (4.22) находим:

$$\omega^0{}_0 = L^0{}_{0\alpha}\vartheta^\alpha, \tag{6.4}$$

где

$$L^0{}_{0\alpha} \equiv -\frac{1}{l_{00}} L^k{}_{0l} M^l{}_{0k\alpha} \tag{6.5}$$

является объектом второго порядка.

6.2. С целью канонизировать репер на плоскости $\{\boldsymbol{e}_i\}$ рассмотрим задачу собственных значений

$$(\gamma_{ij} - \lambda g_{ij})\, l^i = 0, \tag{6.6}$$

где

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{l_{00}} g_{kl} L^k{}_{0i} L^l{}_{0j} \tag{6.7}$$

и g_{ij} — симметричные тензоры на этой плоскости. Так как g_{ij} положительно определенный, то существует ортонормированный репер $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, в котором

$$\|\gamma_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Поскольку в любом ортонормированном репере выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{l_{00}} [(L^1{}_{01})^2 + (L^2{}_{01})^2], \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{l_{00}} [(L^1{}_{02})^2 + (L^1{}_{01})^2], \\ \gamma_{12} &= -\frac{2}{l_{00}} L^1{}_{01} L_{0[21]}; \end{aligned} \tag{6.9}$$

где

$$L_{0[21]} \equiv \frac{1}{2}(L_{021} - L_{012}) = \frac{1}{2}(L^2{}_{01} - L^1{}_{02}), \tag{6.10}$$

то в каноническом репере либо $L_{0[21]}$, либо $L^1{}_{01} = 0$.

1) Пусть $L_{0[21]} = 0$, тогда конгруэнция является *нормальной*. В силу формул (6.9), (4.21) и (A′) имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и *репер не канонизируется*.

2) Пусть $L^1{}_{01} = 0$, тогда $l_{00} = L^2{}_{01} L^1{}_{02}$ и, следовательно,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{L^2{}_{01}}{L^1{}_{02}}. \tag{6.11}$$

Если при этом λ_1 и λ_2 положительны, то $l_{00} > 0$ и *конгруэнция является гиперболической*; если λ_1 и λ_2 отрицательны, то $l_{00} < 0$ и *конгруэнция является эллиптической*. Частным случаем гиперболической конгруэнции, если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, будет *нормальная конгруэнция*. Поскольку этот репер для нормальной конгруэнции полностью определен условием $L^1{}_{01} = L^2{}_{02} = 0$, то мы будем его называть первым *каноническим репером нормальной конгруэнции*. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, то конгруэнция — частный случай эллиптической конгруэнции — называется *изотропной*. В этом случае матрица $\|L^i{}_{0j}\|$ кососимметричная и не зависит от выбора ортонормированного репера. Следовательно, *в случае изотропной конгруэнции рассматриваемый канонический репер не определен.*

В силу $L^1{}_{01} = 0$ из (5.16) получим, что в каноническом репере

$$\omega^2{}_1 = L^2{}_{1\alpha}\vartheta^\alpha, \tag{6.12}$$

где

$$L^2{}_{1\alpha} \equiv -\frac{1}{(L^1{}_{02} + L^2{}_{01})} M^1{}_{01\alpha}. \tag{6.13}$$

6.3. Система уравнений (4.26) и (4.27) для вычисления абсцисс точек сжатия относительно средней точки в полуканоническом репере имеет вид

$$\begin{aligned} &\vartheta^3 = 0 \\ &\varrho^0 = -\frac{\mu^0{}_{ij}\vartheta^i\vartheta^j}{\gamma_{kl}\vartheta^k\vartheta^l}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

где $\mu^0{}_{ij}$ — тензор второго порядка.

Следовательно, абциссы граничных точек являются собственными значениями задачи

$$(\mu^0{}_{(ij)} - \varrho^0\gamma_{ij})\xi^j = 0, \tag{6.15}$$

где $\mu^0{}_{(ij)}$ — симметрическая часть тензора $\mu^0{}_{ij}$. Поскольку в случаях изотропной и нормальной конгруэнций $\gamma_{ij} = \lambda g_{ij}$, то собственные векторы задачи (6.15) должны быть ортогональными.

В случае изотропной конгруэнции, в силу кососимметричности матрицы $\|L^i{}_{0j}\|$, собственные значения равны $\varrho^0{}_1 = \varrho^0{}_2 = 0$. Следовательно, *в случае изотропной конгруэнции все точки сжатия расположены в центре прямой, и при помощи тензоров g_{ij}, γ_{ij} и $\mu^0{}_{ij}$ репер не канонизируется* (ср. [5]).

Если конгруэнция нормальная, то $\mu^0{}_{ij} = \mu^0{}_{(ij)}$ и в ортогональном репере на плоскости $\{e_i\}$ имеем:

$$\mu^0{}_{12} = \frac{1}{l_{00}} L^1{}_{02}.$$

Следовательно, в каноническом репере задачи (6.15) имеем $L^1{}_{02} = L^2{}_{01} = 0$ и в силу того, что $l_{00} = (L^1{}_{01})^2 = 1$,

$$\varrho^0{}_1 = -\varrho^0{}_2 = 1,$$

т. е. *граничные точки совпадают с фокусами и векторы* $\boldsymbol{e}_i$ *этого канонического репера нормальной конгруэнции являются касательными векторами развертывающихся поверхностей.*

Примечание: Поскольку касательная плоскость развертывающейся поверхности постоянна на образующей, то полученную канонизацию для нормальной конгруэнции можно было бы получить, исходя уже из задачи (2.9), с той только разницей, что векторы $\boldsymbol{e}_\alpha$ остались бы свободными на двумерных касательных плоскостях $\{\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_\alpha\}$ к развертывающимся поверхностям.

В силу $L^1{}_{02} = L^2{}_{01} = 0$ из формулы (5.16) следует, что в этом каноническом для нормальной конгруэнции репере также имеет место формула (6.12), но здесь

$$L^2{}_{1\alpha} \equiv \frac{1}{2L^1{}_{01}} M^1{}_{02\alpha}. \tag{6.16}$$

Полученный канонический репер называем *вторым каноническим репером нормальной конгруэнции.*

6.4. В каноническом репере, полученном для конгруэнции гиперболического и эллиптического типа в п. 6.2, формула (6.14) имеет вид

$$\varrho^0 = -\frac{(L^2{}_{01} + L^1{}_{02})\vartheta^1\vartheta^2}{(L^2{}_{01})^2(\vartheta^1)^2 + (L^1{}_{02})^2(\vartheta^2)^2}. \tag{6.17}$$

Отсюда следует:

Предложение 1. *К каждой прямой конгруэнции изотропных прямых в пространстве* $^1R_4$ *можно присоединить канонический репер — изотропный тетрад* $\{C, \boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, *где*

$$\|g_{ab}\| = \|(\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b)\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.18}$$

так, чтобы вектор $\boldsymbol{e}_3$ *был касательным к изотропной направляющей линии цилиндра конгруэнции и векторы* $\boldsymbol{e}_1$ *и* $\boldsymbol{e}_2$ *были направлены по касательным плоскостям линейчатых поверхностей, имеющих точки сжатия в центре прямой.*

Чтобы вычислить абциссы граничных точек используем круговую вектор-функцию

$$\boldsymbol{t}(\varphi) = \cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2.$$

Обозначим значения базисных форм ϑ^k для направления $\boldsymbol{t}(\varphi)$ следующим образом: $\vartheta^1 = \vartheta\cos\varphi$, $\vartheta^2 = \vartheta\sin\varphi$. Тогда

$$\varrho^0{}_\varphi = -\frac{(L^2{}_{01} + L^1{}_{02})\cos\varphi\sin\varphi}{(L^2{}_{01})^2\cos^2\varphi + (L^1{}_{02})^2\sin^2\varphi}. \tag{6.19}$$

Экстремальными значениями $\varrho^0{}_\varphi$ будут

$$\varrho^0{}_{ex} = \pm\frac{1}{2}(L^2{}_{01} + L^1{}_{02}), \tag{6.20}$$

и они соответствуют значениям углов

$$\varphi = \pm\operatorname{arctan}\left(\frac{L^2{}_{01}}{L^1{}_{02}}\right). \tag{6.21}$$

Получается следующее

Предложение 2. *Уравнения конгруэнции изотропных прямых в ${}^1R_4$ относительно канонического репера, рассматриваемого в предложении 1, имеют вид*

$$\begin{aligned} \omega^1{}_0 &= L^1{}_{02}\vartheta^2 \\ \omega^2{}_0 &= L^2{}_{01}\vartheta^1, \end{aligned} \tag{6.22}$$

где для гиперболической конгруэнции $L^2{}_{01}L^1{}_{02} = 1$ и для эллиптической $L^2{}_{01}L^1{}_{02} = -1$; сумма коэффициентов $L^1{}_{02} + L^2{}_{01}$, является расстоянием между граничными точками и

$$\alpha = 2\varphi = 2\operatorname{arctan}\left(\frac{L^2{}_{01}}{L^1{}_{02}}\right) \tag{6.23}$$

является углом между главными поверхностями в центре прямой.

Здесь, следуя [5], *главными поверхностями* считаются линейчатые поверхности, точки сжатия которых находятся в граничных точках.

Поскольку абциссы конечных фокусов на прямой гиперболической конгруэнции относительно центры C равны

$$f^0 = \pm\sqrt{L^1{}_{02}L^2{}_{01}} = \pm 1,$$

то *эти фокусы находятся между граничными точками.* Условие совпадения граничных точек с конечными фокусами получается в виде

$$\frac{1}{2}(L^1{}_{02} + L^2{}_{01}) = \sqrt{L^2{}_{01}L^1{}_{02}}.$$

Следовательно, *граничные точки совпадают с конечными фокусами только в случае нормальной конгруэнции* (ср. [5]).

Из формулы (6.23) следует, что *главные поверхности конгруэнции ортогональны только в случае нормальной конгруэнции.* Этот результат указывает на возможность второй канонизации репера нормальной конгруэнции, рассмотренной нами в п. 6.3.

§ 7. Определение конгруэнции в канонических реперах

7.1. Поскольку тензоры второго порядка $G_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ и $\mu^0{}_{(\alpha\beta)}$ позволяют произвести полную канонизацию репера, то *дифференциальная окрестность третьего порядка является основной* (см. [1]) *для конгруэнции изотропных прямых гиперболического и эллиптического (неизотропного) типа в пространстве* ${}^1R_4$. Это значит, что во второй дифференциальной окрестности в каноническом репере все вторичные формы Пфаффа ω^0 и $\omega^b{}_a$ выражаются через базисные формы ϑ^α и коэффициенты этих выражений удовлетворяют в третьей дифференциальной окрестности прямой некоторым дифференциальным соотношениям. Находим эти соотношения. Так как в каноническом репере метрический тензор пространства ${}^1R_4$ имеет вид (6.18), то 1-формы $\omega^b{}_a$ связаны соотношениями:

$$\begin{gathered}\omega^3{}_0=\omega^0{}_3=\omega^1{}_1=\omega^2{}_2=0,\qquad \omega^3{}_3=-\omega^0{}_0,\\ \omega^3{}_i=-\omega^i{}_0,\qquad \omega^0{}_i=-\omega^i{}_3,\qquad \omega^1{}_2=-\omega^2{}_1.\end{gathered}\tag{7.1}$$

На основании формул (4.16), (5.17), (6.4) и (6.12) мы можем писать

$$\omega^\alpha{}_\beta=L^\alpha{}_{\beta\gamma}\vartheta^\gamma,\tag{7.2}$$

где в силу (5.18), (6.5), (6.13) или (в случае второй канонизации нормальной конгруэнции) (6.16) и (4.23) компоненты $L^\alpha{}_{\beta\gamma}$ являются рациональными выражениями от независимых компонент двух основных тензоров $L^\alpha{}_{0\beta}$, $L^\alpha{}_{0\beta\gamma}$ и оснащающего объекта $N^0{}_\alpha$. Поскольку начало канонического репера конгруэнции находится в центре прямой, то из (3.9) и (3.11) вытекает формула

$$\omega^0=N^0{}_\alpha\vartheta^\alpha.\tag{7.3}$$

Следовательно, канонический репер конгруэнции определяется только тогда, когда система дифференциальных уравнений (7.2) и (7.3) вполне интегрируема, т. е. когда удовлетворяются условия интегрируемости:

$$\nabla L^\beta{}_{\alpha\sigma}\wedge\vartheta^\sigma=(L^0{}_{\alpha\rho}L^\beta{}_{0\sigma}+L^\beta{}_{\alpha\gamma}L^\gamma{}_{0\rho}N^0{}_\sigma-L^\gamma{}_{\alpha\rho}L^\beta{}_{\gamma\sigma})\vartheta^\rho\wedge\vartheta^\sigma\tag{7.4}$$

$$\nabla N^0{}_\alpha\wedge\vartheta^\alpha=(N^0{}_\alpha L^\alpha{}_{0\rho}N^0{}_\sigma-L^0{}_{\sigma\rho})\vartheta^\sigma\wedge\vartheta^\rho.\tag{7.5}$$

Относительно канонического репера все 1-формы ω^a и $\omega^b{}_c$ являются главными. Поэтому *все компоненты* $L^\alpha{}_{\beta\gamma}$ *и* $N^0{}_\alpha$ *являются инвариантами*, а система уравнений (7.4) и. (7.5) является системой дифференциальных уравнений и конечных соотношений, которым инварианты должны удовлетворить.

7.2. Выпишем теперь более подробно независимые из уравнений (7.2) в каноническом репере для г и п е р б о л и ч е с к о й и э л л и п т и ч е с к о й (неизотропной) к о н г р у э н ц и и, используя при этом формулы (6.22), (5.17), (6.4) и (6.12):

$$\omega^1{}_0=L^1{}_{02}\vartheta^2,\qquad \omega^2{}_0=L^2{}_{01}\vartheta^1,\tag{7.6}$$

$$\omega^k{}_3=L^k{}_{3\alpha}\vartheta^\alpha,\qquad \omega^0{}_0=L^0{}_{0\alpha}\vartheta^\alpha,\tag{7.7}$$

$$\omega^2{}_1=L^2{}_{1\alpha}\vartheta^\alpha.\tag{7.8}$$

Так как в силу (7.1) имеем $L^\alpha{}_{0\beta}=-L^3{}_{\alpha\beta}$, то из дифференциальных соотношений (7.4), которые получаются после внешнего дифференцирования формул (7.6), получим:

$$
\begin{aligned}
\partial_1 L^1{}_{02} &= L^0{}_{01}L^1{}_{02}-L^2{}_{12}(L^1{}_{02}+L^2{}_{01})+L^1{}_{02}L^2{}_{01}N^0{}_2,\\
\partial_3 L^1{}_{02} &= L^1{}_{02}(L^0{}_{03}-L^2{}_{32}),\\
L^1{}_{02}L^2{}_{01}N^0{}_3 &= L^2{}_{13}(L^2{}_{01}+L^1{}_{02})-L^1{}_{02}L^2{}_{31},\\
\partial_2 L^2{}_{01} &= L^0{}_{02}L^2{}_{01}+L^2{}_{11}(L^1{}_{02}+L^2{}_{01})+L^1{}_{02}L^2{}_{01}N^0{}_1,\\
\partial_3 L^2{}_{01} &= L^2{}_{01}(L^0{}_{03}-L^1{}_{31}),\\
L^2{}_{01}L^1{}_{02}N^0{}_3 &= -L^2{}_{13}(L^2{}_{01}+L^1{}_{02})-L^2{}_{01}L^1{}_{32},
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

где ∂_α обозначает пфаффовую производную от соответствующей функции, например: $df=\partial_\rho f\vartheta^\rho$. В силу (6.3) из уравнений (7.9) вытекают следующие конечные соотношения:

$$
\begin{aligned}
N^0{}_3 &= -\frac{1}{2l_{00}}(L^1{}_{02}L^2{}_{31}+L^2{}_{01}L^1{}_{32}),\\
2L^2{}_{13}(L^2{}_{01}+L^1{}_{02}) &= L^1{}_{02}L^2{}_{31}-L^2{}_{01}L^1{}_{32},\\
L^0{}_{03} &= \frac{1}{2}L^k{}_{3k}.
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Следовательно, среди пятнадцати инвариант второго порядка $N^0{}_\alpha$, $L^k{}_{3\alpha}$, $L^0{}_{0\alpha}$, $L^2{}_{1\alpha}$ имеются три зависимые. Поскольку остальные уравнения (7.4) и (7.5) не налагают на инварианты новых конечных соотношений, то *конгруэнция эллиптического и гиперболического типа в рассматриваемом каноническом репере* (см. предложение 1 в п. 6.4) *определяется одним инвариантом первого порядка $L^1{}_{02}$ и двенадцатью инвариантами второго порядка, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений* (7.4) и (7.5).

7.3. В случае нормальной конгруэнции в первом каноническом репере (предложение 1 в п. 6.4) инварианты первого порядка вполне определены, так как

$$L^1{}_{02}=L^2{}_{01}=1.$$

Следовательно, все уравнения (7.9) дают конечные соотношения:

$$
\begin{aligned}
N^0{}_1 &= -2L^2{}_{11}-L^0{}_{02},\\
N^0{}_2 &= 2L^2{}_{12}-L^0{}_{01},\\
N^0{}_3 &= -\frac{1}{2}(L^2{}_{31}+L^1{}_{32}),\\
L^3{}_{12} &= \frac{1}{4}(L^2{}_{31}-L^1{}_{32}),\\
L^0{}_{03} &= L^1{}_{31}=L^2{}_{32}.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

В случае второго канонического репера (п. 6.3) для нормальной конгруэнции уравнения (7.6) в системе (7.6)—(7.8) следует заменить уравнениями

$$\omega^1{}_0 = \vartheta^1, \qquad \omega^2{}_0 = -\vartheta^2 \tag{7.12}$$

и конечные соотношения (7.11) заменяются другими:

$$\begin{gathered} N^0{}_1 = 2L^2{}_{12} - L^0{}_{01}, \\ N^0{}_2 = 2L^2{}_{11} + L^0{}_{02}, \\ N^0{}_3 = -\frac{1}{2} L^k{}_{3k}, \\ L^0{}_{03} = \frac{1}{2}(L^2{}_{32} - L^1{}_{31}), \\ L^2{}_{31} = -L^1{}_{32} = 2L^2{}_{13}. \end{gathered} \tag{7.13}$$

Следовательно, в обоих канонических реперах число конечных соотношений (7.11) или соответственно (7.13) то же самое, и поскольку продолжение остальных уравнений (7.7) и (7.8) не дает новых конечных соотношений, то *нормальная конгруэнция в этих канонических реперах определяется девятью инвариантами второго порядка.* Конечно эти девять инвариантов и соответствующие условия интегрируемости в различных канонических реперах различны.

7.4. В случае изотропной конгруэнции система Пфаффа, определяющая конгруэнцию в репере (6.18), состоит из (7.3) и следующих уравнений:

$$\omega^1{}_0 = \vartheta^2, \qquad \omega^2{}_0 = -\vartheta^1, \tag{7.14}$$

$$\omega^\alpha{}_3 = L^\alpha{}_{3\beta}\vartheta^\beta. \tag{7.15}$$

Продолжение системы (7.14) дает следующие конечные соотношения:

$$\begin{aligned} N^0{}_1 &= -L^0{}_{02}, & N^0{}_3 &= L^2{}_{31} = -L^1{}_{32}, \\ N^0{}_2 &= L^0{}_{01}, & L^0{}_{03} &= L^1{}_{31} = L^2{}_{32}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Условия интегрируемости уравнений (7.15) и (7,3) имеют соответственно вид:

$$\nabla L^\alpha{}_{3\beta} \wedge \vartheta^\beta = (L^\alpha{}_{3\beta} L^\beta{}_{0\rho} N^0{}_\sigma + L^\alpha{}_{3\rho} L^0{}_{0\sigma})\, \vartheta^\rho \wedge \vartheta^\sigma \tag{7.17}$$

и (7.5). Поскольку в этом случае 1-форма $\omega^2{}_1$ является параметрическим, то в условиях интегрируемости (7.17) и (7.5) 1-формы $\nabla L^\alpha{}_{3\beta}$ и $\nabla N^0{}_\alpha$ зависят от этой формы.

Следовательно, *изотропная конгруэнция изотропных прямых в пространстве ${}^1R_4$ определяется в репере* (6.18) *шестью независимыми инвариантами второго порядка при однопараметрической свободе выбора такого репера.*

Литература

1. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, **2**, 275—382.
2. Лумисте Ю. Г., Средняя поверхность конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 5, 86—98.
3. Лумисте Ю. Г., Инвариантные оснащения конгруэнции плоскостей аффинного пространства. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 6, 93—102.
4. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
5. Фиников С. П., Теория конгруэнций. Москва—Ленинград, 1950.

Поступило
20 VI 1969

ISOTROOPSETE SIRGETE KONGRUENTS RUUMIS $^1R_4$ JA TEMA KANOONILISED REEPERID

R. Kolde

Resümee

Pseudoeukleidilises ruumis $^1R_4$ uuritakse isotroopsete sirgete kongruentse (kolmeparameetrilisi parvi). Lähtudes kongruentsi fokaalomadustest defineeritakse elliptiline, hüperboolne ja paraboolne isotroopsete sirgete kongruents, samuti ka hüperboolse kongruentsi erijuht — normaalkongruents. Kasutades keskhüperpinna mõistet moodustatakse sirge teist järku diferentsiaalümbruses rida kongruentsiga seotud tensoreid. Saadud sümmeetriliste tensorite — keskhüperpinna ja kongruentsi hüpersfääriliste kujutuse meetriliste tensorite $G_{\alpha\beta}$ ja $\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ abil seotakse elliptilisel ja hüperboolsel juhul kongruentsi sirgega kanoonilised reeperid — isotroopsed tetraadid. Selgub, et normaalkongruentsi sirgega on võimalik siduda kaks erinevat kanoonilist reeperit.

Elliptilise kongruentsi ühel alajuhul, mida nimetatakse isotroopseks kongruentsiks, on selline isotroopne tetraad määratud üheparameetrilise suvaga. Saadud kanooniliste reeperite jaoks antakse geomeetriline tõlgendus ning esitatakse üldisel kujul need diferentsiaalvõrrandid, mida peavad rahuldama kongruentsi määravad invariandid.

CONGRUENCES OF NULL STRAIGHT LINES IN SPACE $^1R_4$ AND THEIR CANONICAL FRAMES

R. Kolde

Summary

The congruences of null straight lines (i. e. sets of three parameters) are considered in the pseudoeuclidean space $^1R_4$. Elliptic, hyperbolic and parabolic congruences of null straight lines are defined proceeding from the focal

properties of congruences. Normal (i. e. hypersurface-orthogonal) congruences, which represent a special case of hyperbolic congruences are also studied. By using the concept of a central hypersurface a set of tensors is constructed, which is connected with rays in the second order differential neighbourhoods. The constructed symmetric tensors — the metric tensors of the central hypersurface $G_{\alpha\beta}$ and those of the hyperspherical mappings $\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ — serve to canonize the frames in the case of the congruences of hyperbolic and elliptic types. These canonical frames are null tetrads. In the case of normal congruences it appears that there are two different canonical frames. In the special case of elliptic congruences, named isotropic, similar canonical frames are determinable up to a parameter. The geometrical meaning of these canonical frames is found. The differential equation for invariants determining the congruences are given.

ПОДГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_5 И ИХ ОРБИТЫ. I

К. Рийвес

Кафедра алгебры и геометрии

В настоящей работе дается систематическое перечисление подгрупп Ли группы движений $O(5) * T_5$ вещественного евклидова пространства R_5. Классификация подгрупп Ли группы вращений пространства R_5 дана К. Телеманом [9] и В. Г. Коппом [2].

Для классификации интранзитивных подгрупп в настоящей работе применяется метод подвижного орторепера Картана. Подгруппы Ли движений выделяются в ходе изучения их орбит — кривых и поверхностей V_k $(k=2,3,4)$ в R_5. Известно ([1], стр. 247), что для орбиты дифференциальные инварианты различных порядков будут вещественными постоянными, являющимися коэффициентами в выражениях форм инфинитезимального перемещения канонического ортонормированного репера орбиты, линейно зависящих от базисных форм орбиты ([5], стр. 250—255). Для нахождения транзитивных подгрупп Ли в группе движений $O(5) * T_5$ применяются комбинированные методы [3]. Так как исследование интранзитивных подгрупп ведется по размерностям их орбит, то всегда рассматриваются только группы, для которых орбиты данной размерности будут орбитами максимальной размерности. Подгруппы, имеющие также орбиты более высокой размерности, исследуются позже, вместе с этими орбитами.

Известно, что m-мерные плоскости R_m в R_n $(m < n)$ или векторные пространства, составленные из их векторов $V_m = V(R_m)$, являющиеся инвариантными относительно действий некоторой подгруппы Ли, оказываются либо орбитами максимальной размерности, либо вырожденными орбитами соответствующей подгруппы. Поэтому можно окончательную классификацию подгрупп Ли движений провести с помощью инвариантных флагов [3] подгрупп. Для этого в работе указан для каждой выделяемой подгруппы соответствующий ей инвариантный флаг.

Настоящая первая часть статьи содержит два параграфа. В них рассматриваются подгруппы, максимальными орбитами которых являются, соответственно кривые с постоянными кривизнами в R_5 и двумерные поверхности V_2 в R_5. В первом случае используется известная канонизация репера. В случае поверхности V_2 канонизация проводится с помощью индикатрисы нормальной кривизны. Если подвижный орторепер канонизирован, то подгруппы выделяются вполне интегрируемыми пфаффовыми системами, где коэффициенты у базисных форм являются постоянными.

§ 1. Однопараметрические подгруппы

Орбитами однопараметрических подгрупп группы движений $O(5) * T_5$ по результату Э. Картана ([1], стр. 247) являются кривые с постоянными кривизнами в R_5. Особый интерес представляют кривые, которые не принадлежат гиперплоскости R_4. Они исследованы в работе [8], в которой содержится следующий результат. *Если каждая кривизна кривой Γ в R_5 является постоянной и отличной от нуля, то Γ допускает подгруппу движений, которая оставляет инвариантной прямую — ось кривой Γ — и два взаимно вполне ортогональных двумерных направления, сумма которых ортогонально дополняет направление оси.* Эти двумерные направления называются направляющими листами кривой Γ. Ортогональная проекция кривой на некоторую гиперплоскость R_4, ортогональную к оси, является кривой с постоянными кривизнами в этой гиперплоскости R_4. Следовательно, соответствующая 1-параметрическая подгруппа Ли является винтовой подгруппой в подгруппе стационарности флага[1] $\{1, 3\}$. Приведем краткое доказательство этого результата.

Ортонормированный репер $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5\}$, присоединенный к точке M кривой Γ, можно канонизировать, так чтобы вектор $\boldsymbol{e}_1$ был направлен вдоль касательной, а вектор $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = 2, 3, 4, 5)$ вдоль α-ой нормали. Тогда в формулах инфинитезимального перемещения репера

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} &= \omega^i \boldsymbol{e}_i, \qquad (i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4, 5), \\ d\boldsymbol{e}_i &= \omega^j{}_i \boldsymbol{e}_j, \qquad \omega^j{}_i + \omega^i{}_j = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

справедливы соотношения

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^5{}_1 = \omega^4{}_2 = \omega^5{}_2 = \omega^5{}_3 = 0,$$

$$\omega^2{}_1 = k_1\omega^1, \quad \omega^3{}_2 = k_2\omega^1, \quad \omega^4{}_3 = k_3\omega^1, \quad \omega^5{}_4 = k_4\omega^1,$$

где $k_1k_2k_3k_4 \neq 0$. Неподвижная прямая для рассматриваемой кривой определяется точкой

[1] О понятии флага в этом смысле и о понятии винтовой подгруппы см. [3].

$$P = M + \frac{k_1(k_3^2 + k_4^2)}{k_1^2(k_3^2 + k_4^2) + k_2^2 k_4^2} e_2 + \frac{k_1 k_2 k_3}{k_1^2(k_3^2 + k_4^2) + k_2^2 k_4^2} e_4 \quad (1.2)$$

и вектором $x = e_1 + \frac{k_1}{k_2} e_3 + \frac{k_1 k_3}{k_2 k_4} e_5$, так как

$$dP = \frac{k_2^2 k_4^2}{k_1^2(k_3^2 + k_4^2) + k_2^2 k_4^2} \omega^1 x$$

и $dx = 0$. Кроме того, имеется неподвижное двумерное направление, определяемое векторами

$$\begin{aligned} y &= e_2 + \frac{\mu + k_1^2 + k_3^2}{k_2 k_3} e_4, \\ z &= -k_1 e_1 - \frac{\mu + k_1^2}{k_2} e_3 + \frac{k_4(\mu + k_1^2 + k_2^2)}{k_2 k_3} e_5, \end{aligned} \quad (1.3)$$

ортогональное к x. Действительно $dy = \omega^1 z$, $dz = \mu\omega^1 y$, где μ является корнем уравнения

$$\mu^2 + (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)\mu + k_1^2(k_3^2 + k_4^2) + k_2^2 k_4^2 = 0,$$

имеющего два вещественных решения. Следовательно, соответствующая однопараметрическая подгруппа Ли является винтовой подгруппой флага $\{1, 3\}$.

Остальными орбитами 1-параметрических подгрупп Ли являются винтовая линия гиперплоскости R_4, винтовая линия подпространства R_3, окружность и прямая [3]. Первые две — орбиты винтовых подгрупп флагов $\{0, 2, 3\}$ и $\{1, 2, 3\}$. Окружность является орбитой подгруппы стационарности флага $\{0, 1, 2, 3\}$ и прямая — орбитой подгруппы стационарности флага $\{1, 2, 3, 4\}$.

§ 2. Подгруппы Ли, максимальные орбиты которых двумерны

1. Канонизация репера. Известно [1], что дифференциальные инварианты двумерной орбиты V_2 некоторой подгруппы Ли являются постоянными относительно канонизированного репера в произвольной точке M рассматриваемой поверхности V_2. Канонизацию репера можно провести с помощью индикатрисы нормальной кривизны поверхности $V_2 \subset R_5$, являющейся, как известно ([7], стр. 119; [4]) эллипсом (в частности окружностью) или его вырожденной формой — отрезком или точкой. В случае эллипса можно канонизировать ортонормированный репер $\{M, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, присоединенный к точке M поверхности $V_2 \subset R_5$, следующим образом (ср. [3], стр. 17). Векторы e_1 и e_2 можно направить в касательной плоскости поверхности так, чтобы им соответствовали концы M_1 и M_2 бо́льшей оси индикатрисы. Векторы e_3 и e_4 можно направить по главным направлениям индикатрисы так, чтобы $M_1 M_2 = -2a e_3$, $a > 0$.

Если, кроме того, требовать, чтобы при положительном повороте направления вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{e}_2 \sin\varphi$ в касательной плоскости направление вектора $OX = \boldsymbol{e}_3 a \cos 2\varphi + \boldsymbol{e}_4 b \sin 2\varphi$, где O — центр индикатрисы, а X — точка индикатрисы, соответствующая направлению вектора $\boldsymbol{x}$, также вращалось в положительном направлении, то $a > b > 0$. Индикатриса определяется в таком случае относительно репера $\{M, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_5\}$ уравнениями

$$\begin{aligned} x^3 &= \alpha + a\cos 2\varphi, \\ x^4 &= \beta + b\sin 2\varphi, \\ x^5 &= \gamma. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Если индикатриса нормальной кривизны является окружностью, т. е. $a = b > 0$, то векторы $\boldsymbol{e}_3 \perp \boldsymbol{e}_4$ остаются нефиксированными, а уравнение индикатрисы принимает вид

$$\begin{aligned} x^3 &= \alpha + a\cos 2\varphi, \\ x^4 &= \beta + a\sin 2\varphi, \\ x^5 &= \gamma. \end{aligned} \tag{2.1$'$}$$

В случае вырожденных форм индикатрисы нормальной кривизны ортонормированный репер можно канонизировать следующим образом. Если индикатриса вырождается в отрезок M_1M_2 длины $2a$, то векторы $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ можно выбрать так, как выше, а векторы репера в нормальном пространстве поверхности V_2 выбрать так, чтобы $M_1M_2 = -2a\boldsymbol{e}_3$ и $OM = -(\alpha\boldsymbol{e}_3 + \beta\boldsymbol{e}_4)$. Уравнение индикатрисы принимает вид

$$\begin{aligned} x^3 &= \alpha + a\cos 2\varphi, \\ x^4 &= \beta, \\ x^5 &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Если индикатриса вырождается в точку O, то можно векторы репера нормального пространства к V_2 выбрать так, чтобы $OM = -\alpha\boldsymbol{e}_3$ и, следовательно, уравнение индикатрисы имеет вид

$$x^3 = \alpha, \quad x^4 = 0, \quad x^5 = 0. \tag{2.3}$$

Подвижный ортонормированный репер является вполне канонизированным, если уравнения индикатрисы нормальной кривизны имеют вид (2.1) или (2.2), т. е. в случае эллипса и отрезка. В случаях окружности и точки репер полностью не канонизируется. В первом случае можно произвольно выбрать ортогональные единичные векторы $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ на плоскости, определенной ими, во втором случае произвольными остаются ортогональные единичные векторы $\boldsymbol{e}_4$ и $\boldsymbol{e}_5$.

Уравнения (2.1$'$), (2.2) и (2.3) являются частными случаями уравнения (2.1). Поэтому дальнейшее имеет место во всех рассмотренных случаях.

В силу проведенной канонизации в формулах инфинитезимального перемещения репера (1.1) справедливы соотношения

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0$$

и

$$\omega^3{}_1 = (\alpha + a)\omega^1, \quad \omega^4{}_1 = \beta\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega^5{}_1 = \gamma\omega^1,$$
$$\omega^3{}_2 = (\alpha - a)\omega^2, \quad \omega^4{}_2 = b\omega^1 + \beta\omega^2, \quad \omega^5{}_2 = \gamma\omega^2. \tag{2.4}$$

Пусть рассматриваемая поверхность V_2 является орбитой некоторой подгруппы Ли движений в R_5. Тогда, в силу упомянутого результата Э. Картана, α, β, γ, a и b являются постоянными и дифференциальное продолжение системы (2.4) с помощью условий интегрируемости системы (1.1)

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^k \wedge \omega^i{}_k, \\ d\omega^j{}_i &= \omega^k{}_i \wedge \omega^j{}_k, \end{aligned} \tag{2.5}$$

приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \beta\omega^4{}_3 + \gamma\omega^5{}_3 &= A_1\omega^1 + A_2\omega^2, \\ -2a\omega^2{}_1 + b\omega^4{}_3 &= A_2\omega^1 + A_1\omega^2, \\ -2b\omega^2{}_1 + (\alpha + a)\omega^4{}_3 - \gamma\omega^5{}_4 &= A_3\omega^1, \\ 2b\omega^2{}_1 + (\alpha - a)\omega^4{}_3 - \gamma\omega^5{}_4 &= A_4\omega^2, \\ (\alpha + a)\omega^5{}_3 + \beta\omega^5{}_4 &= A_5\omega^1 + A_6\omega^2, \\ b\omega^5{}_4 &= A_6\omega^1 + A_7\omega^2, \\ (\alpha - a)\omega^5{}_3 + \beta\omega^5{}_4 &= A_7\omega^1 + A_8\omega^2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 в случае орбиты подгруппы Ли движений в R_5 также являются постоянными.

Эта система рассматривается как система линейных уравнений для определения форм $\omega^2{}_1$, $\omega^4{}_3$, $\omega^5{}_3$ и $\omega^5{}_4$. Совместность этой системы налагает на инварианты α, β, γ, a и b ряд условий. Кроме того, должны быть удовлетворены вытекающие из (2.5) уравнения

$$\begin{aligned} d\omega^2{}_1 &= -K\omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^4{}_3 &= -2ab\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^5{}_3 \wedge \omega^5{}_4, \\ d\omega^5{}_3 &= \omega^4{}_3 \wedge \omega^5{}_4, \\ d\omega^5{}_4 &= -\omega^4{}_3 \wedge \omega^5{}_3, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$K = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - a^2 - b^2 \tag{2.8}$$

— гауссова кривизна поверхности.

Предложение 1. *Если подгруппа Ли является 2-параметрической, то гауссова кривизна K ее орбиты будет неположительной* ($K \leqslant 0$).

Действительно, базисными формами 2-параметрической подгруппы являются ω^1 и ω^2. Поэтому $\omega^2{}_1 = P\omega^1 + Q\omega^2$, где P и Q — некоторые действительные постоянные. Тогда в силу (2.5) имеем $d\omega^1 = P\omega^1 \wedge \omega^2$, $d\omega^2 = Q\omega^1 \wedge \omega^2$ и $d\omega^2{}_1 = Pd\omega^1 + Qd\omega^2 = (P^2 + Q^2)\omega^1 \wedge \omega^2$. Теперь с учетом (2.7) имеет место $-K = P^2 + Q^2 \geqslant 0$.

2. Орбиты, индикатрисы которых являются точками. Так как в этом случае уравнение индикатрисы можно привести к виду (2.3), то система (2.6) принимает особенно простой вид: $a\omega^4{}_3 = a\omega^5{}_3 = 0$. Имеется две возможности — либо $a = 0$, либо $a \neq 0$, $\omega^4{}_3 = \omega^5{}_3 = 0$.

В первом случае $\omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^5{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 = \omega^5{}_2 = 0$ и *орбита представляет собой плоскость,* натянутую на M, $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$. Подгруппой Ли группы движений в R_5, для которой двумерные плоскости являются орбитами максимальной размерности, будет *трехпараметрическая подгруппа стационарности флага* $\{2, 3, 4\}$. Эта подгруппа имеет подгруппу Ли движений, транзитивную на ее орбитах — двумерных плоскостях — эта *двухпараметрическая подргуппа стационарности флага* $[1; 2, 3, 4\}$.

Во втором случае $d\left(\boldsymbol{M} + \frac{1}{a}\boldsymbol{e}_3\right) = 0$, орбитой является *двумерная сфера* с центром в точке $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M} + \frac{1}{a}\boldsymbol{e}_3$. Подгруппой Ли движений в R_5, для которой сферы в параллельных плоскостях R_3 являются орбитами максимальной размерности, будет *трехпараметрическая подгруппа стационарности флага* $\{0, 1, 2\}$.

3. Орбиты, индикатрисы которых являются отрезками. Если индикатриса является отрезком, то после канонизации репера уравнение индикатрисы принимает вид (2.2), где $a > 0$. Подстановка инвариантов $b = 0$, $\gamma = 0$ в систему (2.6) дает в силу независимости форм ω^1, ω^2 конечные соотношения

$$\begin{aligned} &(\alpha - a) A_3 = 0, \quad &&(\alpha + a) A_4 = 0, \\ &\beta A_3 = 2aA_1, &&\beta A_4 = -2aA_2, \quad A_6 = A_7 = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

и следующие уравнения

$$\begin{aligned} \omega^2{}_1 &= -\frac{A_2}{2a}\omega^1 - \frac{A_1}{2a}\omega^2, \\ \omega^4{}_3 &= \frac{A_3}{2a}\omega^1 - \frac{A_4}{2a}\omega^2, \\ \omega^5{}_3 &= \frac{A_5}{2a}\omega^1 - \frac{A_8}{2a}\omega^2, \\ \beta\omega^5{}_4 &= -\frac{\alpha - a}{2a}A_5\omega^1 + \frac{\alpha + a}{2a}A_8\omega^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

I. Пусть $\alpha^2 - a^2 = 0$. Если $\alpha = a$, то оказывается, что $\beta = 0$, так как предположение $\beta \neq 0$ приводит к противоречию; тогда имеет место $\omega^2{}_1 = -\frac{\beta}{4a^2}A_3\omega^2$, отсюда после дифференцирования внешним образом с помощью (2.7) получается равенство $A_3{}^2 = -16a^4$, которое невозможно при $a \neq 0$. Следовательно, при $\alpha = a$, $\beta = 0$ из (2.9) и (2.10) вытекает:

$$A_1 = A_2 = A_4 = A_8 = 0, \quad \omega^2{}_1 = 0, \quad \omega^4{}_3 = {}'A_3\omega^1, \quad \omega^5{}_3 = {}'A_5\omega^1,$$

где

$$'A_3 = \frac{A_3}{2a}; \quad 'A_5 = \frac{A_5}{2a}.$$

Дифференциальное продолжение последних трех уравнений, с учетом (2.7), приводит к соотношениям $'A_3\omega^1 \wedge \omega^5{}_4 = 0$, $'A_5\omega^1 \wedge \omega^5{}_4 = 0$. Здесь $\omega^5{}_4$ не может быть независимой формой, так как в этом случае двумерные орбиты не будут для соответствующей подгруппы Ли движений орбитами максимальной размерности. Например, точка $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + {'A_5}\boldsymbol{e}_4 - {'A_3}\boldsymbol{e}_5$ описывает тогда трехмерную орбиту, так как $d\boldsymbol{P} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2 + \omega^5{}_4({'A_3}\boldsymbol{e}_4 + {'A_5}\boldsymbol{e}_5)$. Следовательно, *соответствующая 2-параметрическая подгруппа Ли движений в группе движений R_5 выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой*

$$\begin{aligned}\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0, \qquad \omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 - 2a\omega^1 = \omega^4{}_1 = \omega^5{}_1 = \\ = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 = \omega^5{}_2 = \omega^4{}_3 - {'A_3}\omega^1 = \\ = \omega^5{}_3 - {'A_5}\omega^1 = \omega^5{}_4 - A\omega^1 = 0.\end{aligned}$$

Остается геометрически характеризовать соответствующие орбиты. Если $'A_3 = {'A_5} = A = 0$, то

$$d\left(\boldsymbol{M} + \frac{1}{2a}\boldsymbol{e}_3\right) = \omega^2\boldsymbol{e}_2, \ d\boldsymbol{e}_2 = 0, \ d\boldsymbol{e}_4 = 0, \ d\boldsymbol{e}_5 = 0;$$

значит, подгруппа Ли является *подгруппой стационарности флага* $\{1, 2, 3\}$, и ее орбиты максимальной размерности — *цилиндры вращения в параллельных плоскостях* R_3.

Когда $'A_3{}^2 + {'A_5}{}^2 \neq 0$, $A = 0$, то движение ортонормированного репера под действием соответствующей 2-параметрической подгруппы Ли определяется следующими формулами

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{M} &= ds\,\boldsymbol{e}_1 + dt\,\boldsymbol{e}_2,\\ d\boldsymbol{e}_1 &= 2a\,ds\,\boldsymbol{e}_3,\\ d\boldsymbol{e}_2 &= 0,\\ d\boldsymbol{e}_3 &= -2a\,ds\,\boldsymbol{e}_1 + {'A_3}\,ds\,\boldsymbol{e}_4 + {'A_5}\,ds\,\boldsymbol{e}_5,\\ d\boldsymbol{e}_4 &= -{'A_3}\,ds\,\boldsymbol{e}_3,\\ d\boldsymbol{e}_5 &= -{'A_5}\,ds\,\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

(здесь мы учитывали, что $d\omega^1 = d\omega^2 = 0$, и поэтому $\omega^1 = ds$, $\omega^2 = dt$). Отсюда следует, что при $s = \text{const}$ точка M опишет прямую с направляющим вектором $\boldsymbol{e}_2$, а при $t = \text{const}$ — винтовую линию в параллельных плоскостях, которые определяются векторами $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, {'A_3}\boldsymbol{e}_4 + {'A_5}\boldsymbol{e}_5\}$, ортогональными к $\boldsymbol{e}_2$. Подгруппа является *винтовой подгруппой с инвариантным флагом* $\{2, 3\}$, так как

$$d\left(\boldsymbol{M} + \frac{2a}{'A_2{}^3 + {'A_2}{}^5 + 4a^2}\boldsymbol{e}_3\right) =$$

$$= \frac{1}{'A_3{}^2 + {'A_5}{}^2 + 4a^2}ds[({'A_3}{}^2 + {'A_5}{}^2)\boldsymbol{e}_1 + 2a{'A_3}\boldsymbol{e}_4 + 2a{'A_5}\boldsymbol{e}_5] + dt\,\boldsymbol{e}_2,$$

$$d\boldsymbol{e}_2 = 0, \quad d[({'A_3}{}^2 + {'A_5}{}^2)\boldsymbol{e}_1 + 2a{'A_3}\boldsymbol{e}_4 + 2a{'A_5}\boldsymbol{e}_5] = 0,$$

$$d({'A_5}\boldsymbol{e}_4 - {'A_3}\boldsymbol{e}_5) = 0.$$

Орбитами являются *двумерные прямые цилиндры, построенные на винтовых линиях в параллельных плоскостях* R_3.

Если $'A_3 \neq 0$, $'A_5 \neq 0$, $A \neq 0$, то движение ортонормированного репера под действием соответствующей 2-параметрической подгруппы Ли определяется формулами

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{M} &= ds\,\boldsymbol{e}_1 + dt\,\boldsymbol{e}_2, \\ d\boldsymbol{e}_1 &= 2a\,ds\,\boldsymbol{e}_3, \\ d\boldsymbol{e}_2 &= 0, \\ d\boldsymbol{e}_3 &= -2a\,ds\,\boldsymbol{e}_1 + {'A_3}\,ds\,\boldsymbol{e}_4 + {'A_5}\,ds\,\boldsymbol{e}_5, \\ d\boldsymbol{e}_4 &= -{'A_3}\,ds\,\boldsymbol{e}_3 + A\,ds\,\boldsymbol{e}_5, \\ d\boldsymbol{e}_5 &= -{'A_5}\,ds\,\boldsymbol{e}_3 - A\,ds\,\boldsymbol{e}_4, \end{aligned}$$

где $ds = \omega^1$, $dt = \omega^2$. Отсюда следует, что при $s = \mathrm{const}$ точка M опишет прямую с направляющим вектором $\boldsymbol{e}_2$, а при $t = \mathrm{const}$ винтовую линию в гиперплоскости, определяемой этой точкой M и векторами $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, {'A_3}\boldsymbol{e}_4 + {'A_5}\boldsymbol{e}_5, {'A_5}\boldsymbol{e}_4 - {'A_3}\boldsymbol{e}_5\}$. Подгруппа является *винтовой подгруппой флага* $\{1, 3\}$, так как кроме неподвижной прямой, проходящей через точку

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + \frac{1}{2a}\boldsymbol{e}_3 - \frac{'A_5}{2aA}\boldsymbol{e}_4 + \frac{'A_3}{2aA}\boldsymbol{e}_5,$$

в направлении вектора $\boldsymbol{e}_2$, существуют два неподвижные вполне ортогональные двумерные направления, определяемые векторами

$$\boldsymbol{x} = \frac{A^2 + \mu}{A'A_3}\boldsymbol{e}_3 - \frac{'A_5}{'A_3}\boldsymbol{e}_4 + \boldsymbol{e}_5,$$

$$\boldsymbol{y} = -\frac{2a(A^2 + \mu)}{A'A_3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\mu}{A}\boldsymbol{e}_4 + \frac{\mu'A_5}{A'A_3}\boldsymbol{e}_5,$$

ортогональными к $\boldsymbol{e}_2$, где μ является одним из двух вещественных решений уравнения $\mu^2 + ({'A_3}^2 + {'A_5}^2 + A^2 + 4a^2)\mu + 4a^2A^2 = 0$. Следовательно, орбитами являются *двумерные прямые цилиндры, построенные на винтовых линиях в параллельных гиперплоскостях* R_4.

Случай $\alpha = -a$ отличается от рассмотренного только взаимной заменой индексов 1 и 2.

II. Пусть $\alpha^2 - a^2 \neq 0$. Из (2.9) следует, что $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, т. е. $\omega^2{}_1 = \omega^4{}_3 = 0$. В силу условий интегрируемости (2.7) имеет место

$$\beta = \pm\sqrt{a^2 - \alpha^2}, \qquad BC = 0,$$

где

$$B = \pm\frac{A_5}{2a\sqrt{a^2 - \alpha^2}} \quad \text{и} \quad C = \pm\frac{A_8}{2a\sqrt{a^2 - \alpha^2}}.$$

Здесь можно взять $\beta = \sqrt{a^2 - \alpha^2}$, так как случай $\beta = -\sqrt{a^2 - \alpha^2}$ отличается от первого только заменой направления вектора $\boldsymbol{e}_4$ на противоположное. Также можно считать, что $C = 0$, так как случай $B = 0$ отличается от первого только заменой индексов 1 и 2. *Соответствующая 2-параметрическая подгруппа Ли движений в группе движений R_5 выделяется вполне интегрируемой* пфаффовой системой

$$\omega^3=\omega^4=\omega^5=0,\quad \omega^2{}_1=\omega^3{}_1-(\alpha+a)\omega^1=\omega^4{}_1-\sqrt{a^2-\alpha^2}\omega^1=$$
$$=\omega^5{}_1=\omega^3{}_2-(\alpha-a)\omega^2=\omega^4{}_2-\sqrt{a^2-\alpha^2}\omega^2=\omega^5{}_2=\omega^4{}_3=$$
$$=\omega_3{}^5-\sqrt{a^2-\alpha^2}B\omega^1=\omega_4{}^5-(a-\alpha)B\omega^1=0.$$

Пусть $B\neq 0$. Движение ортонормированного репера под действием соответствующей 2-параметрической подгруппы Ли определяется следующими формулами

$$dM=ds\,e_1+dt\,e_2,$$
$$de_1=(\alpha+a)ds\,e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}\,ds\,e_4,$$
$$de_2=(\alpha-a)dt\,e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}\,dt\,e_4,$$
$$de_3=-(\alpha+a)ds\,e_1-(\alpha-a)dt\,e_2+\sqrt{a^2-\alpha^2}B\,ds\,e_5,$$
$$de_4=-\sqrt{a^2-\alpha^2}\,ds\,e_1-\sqrt{a^2-\alpha^2}\,dt\,e_2-(a-\alpha)B\,ds\,e_5,$$
$$de_5=-\sqrt{a^2-\alpha^2}B\,ds\,e_3+(a-\alpha)B\,ds\,e_4,$$

где $ds=\omega^1$, $dt=\omega^2$. Отсюда следует, что точка M опишет при $s=\mathrm{const}$ окружность на параллельных плоскостях R_2, общее направление которых определяется векторами $\{e_2,\ (\alpha-a)e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}e_4\}$, а при $t=\mathrm{const}$ — винтовую линию в параллельных плоскостях R_3 с направляющими векторами $\{e_1,\ (\alpha+a)e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}e_4,\ e_5\}$. Подгруппа является *винтовой подгруппой флага* $\{1,3\}$, так как инвариантной относительно действий подгруппы остается прямая, проходящая через точку $P=2a\sqrt{a^2-\alpha^2}\,[B^2(a-\alpha)+(a+\alpha)]M+(a-\alpha)\sqrt{a^2-\alpha^2}Be_3+(a+\alpha)\,[B^2(a-\alpha)+2a]e_4$. Действительно, $dP=-2aB\sqrt{a^2-\alpha^2}\,ds\,x$, где $x=(a-\alpha)Be_1-\sqrt{a^2-\alpha^2}\,e_5$, $dx=0$. Векторы e_2 и $y=(\alpha-a)e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}\,e_4$ определяют инвариантное двумерное направление, ортогональное к x, так как $de_2=dt\,y$, $dy=2a(\alpha-a)dt\,e_2$. *Подгруппа изоморфна прямому произведению однопараметрической подгруппы винтовых движений в R_3 и однопараметрической подгруппы поворотов на R_2, вполне ортогональной к $R_3\subset R_5$.* Соответственно построена и орбита V_2. Она является *поверхностью переноса винтовой линии в R_3 вдоль окружности в плоскости R_2, вполне ортогональной к R_3.* Действительно,

$$de_1=ds[(\alpha+a)e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}e_4]=ds\,f_1,$$
$$df_1=2a\,ds[-(\alpha+a)e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}Be_5]=2a\,ds\,f_2,$$
$$df_2=[(a-\alpha)B^2-(\alpha+a)]ds[(\alpha+a)e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}e_4]=$$
$$=[(a-\alpha)B^2-(\alpha+a)]ds\,f_1$$

и

$$de_2=dt[(\alpha-a)e_3+\sqrt{a^2-\alpha^2}e_4]=dt\,g_1,$$
$$dg_1=2a(\alpha-a)dt\,e_2.$$

Если $B=0$, то уравнения инфинитезимального перемещения репера под действием соответствующей 2-параметрической подгруппы имеют вид

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{M} &= ds\,\boldsymbol{e}_1 + dt\,\boldsymbol{e}_2,\\
d\boldsymbol{e}_1 &= (\alpha + a)\,ds\,\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{a^2-\alpha^2}\,ds\,\boldsymbol{e}_4,\\
d\boldsymbol{e}_2 &= (\alpha - a)\,dt\,\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{a^2-\alpha^2}\,dt\,\boldsymbol{e}_4,\\
d\boldsymbol{e}_3 &= -(\alpha + a)\,ds\,\boldsymbol{e}_1 - (\alpha - a)\,dt\,\boldsymbol{e}_2,\\
d\boldsymbol{e}_4 &= -\sqrt{a^2-\alpha^2}\,ds\,\boldsymbol{e}_1 - \sqrt{a^2-\alpha^2}\,dt\,\boldsymbol{e}_2,\\
d\boldsymbol{e}_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что рассматриваемая подгруппа является *подгруппой стационарности флага* $\{0, 2, 3\}$. Действительно

$$d\left(\boldsymbol{M} + \frac{1}{\sqrt{a^2-\alpha^2}}\boldsymbol{e}_4\right) = 0,\quad d\boldsymbol{e}_2 = dt[(\alpha - a)\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{a^2-\alpha^2}\,\boldsymbol{e}_4],$$

$$d[(\alpha - a)\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{a^2-\alpha^2}\,\boldsymbol{e}_4] = 2a(\alpha - a)\,dt\,\boldsymbol{e}_2.$$

Инвариантная трехмерная плоскость проходит через точку $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M} + \frac{1}{\sqrt{a^2-\alpha^2}}\boldsymbol{e}_4$ и определяется векторами $\{\boldsymbol{e}_2,\ (\alpha - a)\boldsymbol{e}_3 + \sqrt{a^2-\alpha^2}\,\boldsymbol{e}_4,\ \boldsymbol{e}_5\}$. Следовательно, *орбита V_2 является поверхностью Клиффорда в гиперплоскости R_4* (см. [3]).

4. Орбиты, индикатрисы которых являются либо окружностями, либо эллипсами. Если индикатриса нормальной кривизны орбиты V_2 подгруппы Ли движений R_5 в произвольной точке орбиты невырождена, то репер можно выбрать так, чтобы уравнение индикатрисы имело вид (2.1) или (2.1′), где $a \geqslant b > 0$. В таком случае система (2.6) дает уравнения

$$\begin{aligned}
&2b\omega^2{}_1 - a\omega^4{}_3 = -A_3\omega^1 + A_4\omega^2,\\
&(a^2-b^2)\omega^4{}_3 = (aA_3 - bA_2)\omega^1 - (aA_4 + bA_1)\omega^2,\\
&\alpha\omega^4{}_3 = (A_3 + \gamma A_6)\omega^1 + (A_4 + \gamma A_7)\omega^2,\\
&\beta\omega^4{}_3 = \left[A_1 - \frac{\gamma}{2a}(A_5 - bA_7)\right]\omega^1 + \left[A_2 - \frac{\gamma}{2a}(bA_6 - A_8)\right]\omega^2,\\
&\omega^5{}_3 = \frac{1}{2a}(A_5 - bA_7)\omega^1 + \frac{1}{2a}(bA_6 - A_8)\omega^2,\\
&\omega^5{}_4 = A_6\omega^1 + A_7\omega^2
\end{aligned} \tag{2.11}$$

и конечные соотношения

$$\begin{aligned}
(\alpha - a)A_5 &= -2a\beta A_6 + (\alpha + a)bA_7,\\
(\alpha + a)A_8 &= (\alpha - a)bA_6 + 2a\beta A_7.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь мы для простоты вместо $\frac{A_3}{2}$, $\frac{A_4}{2}$, $\frac{A_6}{b}$, $\frac{A_7}{b}$ писали, соответственно, A_3, A_4, A_6, A_7.

1. Пусть $\alpha=\beta=0$. Оказывается, что в таком случае индикатриса нормальной кривизны орбиты не может быть эллипсом. Действительно, если имеет место $a^2-b^2\neq 0$, то в силу (2.11) и (2.12)

$$A_1=-\frac{b\gamma}{a}A_7,\quad A_2=\frac{b\gamma}{a}A_6,\quad A_3=-\gamma A_6,\quad A_4=-\gamma A_7,$$
$$A_5=-bA_7,\quad A_8=-bA_6,$$
$$\omega^2{}_1=-\frac{b\gamma}{a^2-b^2}A_6\omega^1+\frac{b\gamma}{a^2-b^2}A_7\omega^2,$$
$$\omega^4{}_3=-\frac{\gamma(a^2+b^2)}{a(a^2-b^2)}A_6\omega^1+\frac{\gamma(a^2+b^2)}{a(a^2-b^2)}A_7\omega^2,$$
$$\omega^5{}_3=-\frac{b}{a}A_7\omega^1+\frac{b}{a}A_6\omega^2,$$
$$\omega^5{}_4=A_6\omega^1+A_7\omega^2.$$

Дифференциальное продолжение последних уравнений с учетом (2.7) дает

$$b^2\gamma^2(A_6{}^2+A_7{}^2)=(a^2+b^2-\gamma^2)(a^2-b^2)^2,$$
$$[\gamma^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2](A_6{}^2+A_7{}^2)=-2a^2(a^2-b^2)^2,$$
$$\gamma A_6A_7=0,\qquad \gamma(A_6{}^2-A_7{}^2)=0.$$

Здесь $\gamma\neq 0$, потому что при $\gamma=0$ имело бы место $(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$, что противоречит предположениям. Следовательно, в силу двух последних уравнений, $A_6=A_7=0$, но тогда $-2a^2(a^2-b^2)^2=0$, т. е. противоречие.

Значит, в рассматриваемом случае $a=b$, т. е. индикатриса нормальной кривизны орбиты является окружностью. При сделанных предположениях из (2.11) и (2.12) следует $2a\omega_1{}^2-a\omega_3{}^4=-A_3\omega^1+A_4\omega^2$, $A_1=-A_4$, $A_2=A_3$, $A_3=-\gamma A_6$, $A_4=-\gamma A_7$, $A_5=-aA_7$, $A_8=-aA_6$, $\gamma A_6=0$, $\gamma A_7=0$. Здесь предположение $\gamma=0$ приводит к противоречию. Действительно, если $\gamma=0$, то $A_3=A_4=0$, $\omega^4{}_3=2\omega^2{}_1$, $\omega^5{}_3=-A_7\omega^1+A_6\omega^2$, $\omega^5{}_4=A_6\omega^1+A_7\omega^2$. Внешнее дифференцирование полученных выражений с учетом (2.7) приводит к системе

$$(A_6{}^2+A_7{}^2-6a^2)\,\omega^1\wedge\omega^2=0,$$
$$(A_6\omega^1+A_7\omega^2)\wedge\omega^2{}_1=0,$$
$$(A_7\omega^1-A_6\omega^2)\wedge\omega^2{}_1=0.$$

При независимых формах ω^1, ω^2, $\omega^2{}_1$ отсюда следует $A_6=A_7=0$, $a=0$, т. е. противоречие. Если же $\omega^2{}_1=P\omega^1+Q\omega^2$, где P и Q — некоторые постоянные, то в силу независимости форм ω^1, ω^2 и условий (2.7) должны иметь место равенства

$$P^2+Q^2=2a^2,\quad A_6{}^2+A_7{}^2=6a^2,\quad P=-\frac{A_7}{A_6}Q,\quad Q(A_6{}^2+A_7{}^2)=0.$$

Эта система удовлетворяется только при нулевых значениях всех встречающихся величин, в том числе и $a=0$, что опять противоречит предположению.

Следовательно, $\gamma \neq 0$, $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0$, $\omega^4{}_3 = 2\omega^2{}_1$, $\omega^5{}_3 = 0$, $\omega^5{}_4 = 0$. После внешнего дифференцирования последних трех уравнений системы получается $(3a^2 - \gamma^2)\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$. В силу независимости форм ω^1, ω^2, имеем $\gamma^2 = 3a^2$. *Соответствующая 3-параметрическая подгруппа Ли движений в группе движений R_5 выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой*

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0,$$

$$\omega^3{}_1 - a\omega^1 = \omega^3{}_2 - a\omega^2 = \omega^4{}_1 - a\omega^2 = \omega^4{}_2 - a\omega^1 =$$
$$= \omega^5{}_1 \mp \sqrt{3}\, a\omega^1 = \omega^5{}_2 \mp \sqrt{3}\, a\omega^2 = \omega^4{}_3 - 2\omega^2{}_1 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0.$$

Рассматриваемыми двумерными орбитами этой подгруппы являются «*максимально симметричные поверхности*» ([4], стр. 90), являющиеся *регулярными изометричными погружениями в R_5 эллиптической плоскости S_2* (см. [6]). Действительно, движение ортонормированного репера под действием соответствующей подгруппы Ли определяется следующими формулами

$$d\boldsymbol{M} = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2,$$
$$d\boldsymbol{e}_1 = \omega^2{}_1\boldsymbol{e}_2 + a\omega^1\boldsymbol{e}_3 + a\omega^2\boldsymbol{e}_4 \pm \sqrt{3}\, a\omega^1\boldsymbol{e}_5,$$
$$d\boldsymbol{e}_2 = -\omega^2{}_1\boldsymbol{e}_1 - a\omega^2\boldsymbol{e}_3 + a\omega^1\boldsymbol{e}_4 \pm \sqrt{3}\, a\omega^2\boldsymbol{e}_5,$$
$$d\boldsymbol{e}_3 = -a\omega^1\boldsymbol{e}_1 + a\omega^2\boldsymbol{e}_2 + 2\omega^2{}_1\boldsymbol{e}_4,$$
$$d\boldsymbol{e}_4 = -a\omega^2\boldsymbol{e}_1 - a\omega^1\boldsymbol{e}_2 - 2\omega^2{}_1\boldsymbol{e}_3,$$
$$d\boldsymbol{e}_5 = \mp\sqrt{3}\, a(\omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2).$$

Подгруппа является *винтовой подгруппой флага* $\{0\}$, так как имеет место $d\left(\boldsymbol{M} \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}\, a}\boldsymbol{e}_5\right) = 0$. Следует заметить, что указанные двумерные орбиты *не являются орбитами максимальной размерности* рассматриваемой подгруппы. Действительно, движение точки $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + p\boldsymbol{e}_3 - q\boldsymbol{e}_4$ под действием найденной 3-параметрической подгруппы определяется формулой

$$d\boldsymbol{P} = [(1 - pa)\omega^1 + qa\omega^2]\boldsymbol{e}_1 + [qa\omega^1 + (1 + pa)\omega^2]\boldsymbol{e}_2 +$$
$$+ 2\omega^2{}_1(q\boldsymbol{e}_3 + p\boldsymbol{e}_4).$$

Если здесь p и q удовлетворяют соотношению $a^2(p^2 + q^2) = 1$, P опишет под действием подгруппы двумерную орбиту, в противном случае: $a^2(p^2 + q^2) \neq 1$ — трехмерную.

II. Переходя к случаю, когда $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, рассмотрим отдельно все три возможные случая: 1. $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$; 2. $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$; 3. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Ниже показывается, что при сделанных предположениях существуют только 2-параметрические винтовые подгруппы группы стационарности флага $\{1, 3\}$.

1. Пусть индикатрисой нормальной кривизны будет эллипс или окружность, т. е. пусть, $a \geqslant b > 0$ и пусть, кроме того, $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. Тогда из (2.11) и (2.12) следует

$$\omega^2{}_1 = \frac{(a-\alpha)A_3 + a\gamma A_6}{2ba}\omega^1 + \frac{(a+\alpha)A_4 + a\gamma A_7}{2ba}\omega^2,$$

$$\omega^4{}_3 = \frac{A_3 + \gamma A_6}{a}\omega^1 + \frac{A_4 + \gamma A_7}{a}\omega^2, \qquad (2.13)$$

$$\omega^5{}_3 = \frac{A_5 - bA_7}{2a}\omega^1 + \frac{bA_6 - A_8}{2a}\omega^2,$$

$$\omega^5{}_4 = A_6\omega^1 + A_7\omega^2$$

и постоянные A_i $(i=1, \ldots, 8)$ удовлетворяют системе

$$A_1 = \frac{\gamma}{2a}(A_5 - bA_7), \qquad A_2 = \frac{\gamma}{2a}(bA_6 - A_8),$$

$$(a^2 - b^2 - a\alpha)A_3 = -\frac{\gamma}{2a}[2a(a^2-b^2) + b^2\alpha]A_6 + \frac{b\alpha\gamma}{2a}A_8,$$

$$(a^2 - b^2 + a\alpha)A_4 = -\frac{b\alpha\gamma}{2a}A_5 - \frac{\gamma}{2a}[2a(a^2-b^2) - b^2\alpha]A_7, \qquad (2.14)$$

$$(\alpha - a)A_5 = (\alpha + a)bA_7, \qquad (\alpha + a)A_8 = (\alpha - a)bA_6.$$

Оказывается, что в системах (2.13) и (2.14) не может иметь места $\alpha = a$. Действительно, если $\alpha = a$, то из (2.14) следует

$$A_7 = A_8 = 0, \quad A_1 = \frac{\gamma}{2a}A_5, \quad A_2 = \frac{\gamma}{2a}bA_6, \quad A_3 = \frac{\gamma(2a^2-b^2)}{2b^2}A_6,$$

$$A_4 = \frac{b\gamma}{2(2a^2-b^2)}A_5.$$

Поэтому (2.13) принимает вид

$$\omega^2{}_1 = \frac{\gamma}{2b}A_6\omega^1 - \frac{\gamma}{2(2a^2-b^2)}A_5\omega^2,$$

$$\omega^4{}_3 = \frac{\gamma(2a^2+b^2)}{2ab^2}A_6\omega^1 - \frac{b\gamma}{2a(2a^2-b^2)}A_5\omega^2,$$

$$\omega^5{}_3 = \frac{1}{2a}A_5\omega^1 + \frac{b}{2a}A_6\omega^2,$$

$$\omega^5{}_4 = A_6\omega^1.$$

Дифференциальное продолжение последних уравнений с учетом (2.7) дает систему

$$\gamma^2[b^2A_5{}^2 + (2a^2-b^2)A_6{}^2] = 4b^2(2a^2-b^2)(b^2-\gamma^2),$$
$$b^4\gamma^2A_5{}^2 + (2a^2-b^2)^2[\gamma^2(2a^2+b^2) - 2b^4]A_6{}^2 = -8a^2b^2(2a^2-b^2)^2,$$
$$\gamma(a^2-2b^2)A_5A_6 = 0,$$
$$\gamma[b^2A_5{}^2 + (4a^2+b^2)(2a^2-b^2)A_6{}^2] = 0.$$

Если $\gamma = 0$, то из первого уравнения следует $4b^4(2a^2-b^2) = 0$, что противоречит предположению $a \geqslant b > 0$. Следовательно, $\gamma \neq 0$, но тогда из последних двух уравнений системы $A_5 = A_6 = 0$, в силу чего получается противоречие $-8a^2b^4(2a^2 - b^2)^2 = 0$.

Случай $\alpha = -a$ отличается от рассмотренного только тем, что вместо A_5, A_6 получается аналогичная система относительно A_7, A_8.

Пусть $|\alpha| \neq a$; оказывается, что тогда $a^2 - b^2 - a\alpha = 0$ невозможно. Действительно, если $a\alpha = a^2 - b^2$, то $\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a}$ и подстановка в систему (2.14) дает

$$A_1 = -\frac{a\gamma}{b} A_7,\ A_2 = 0,\ A_4 = 0,\ A_5 = \frac{b^2 - 2a^2}{b} A_7,\ \gamma A_6 = 0,\ A_8 = \frac{b^3}{b^2 - 2a^2} A_6.$$

Тогда (2.13) имеет вид

$$\omega^2{}_1 = \frac{b}{2(a^2 - b^2)} A_3\omega^1 + \frac{a^2\gamma}{2b(a^2 - b^2)} A_7\omega^2,$$
$$\omega^4{}_3 = \frac{a}{a^2 - b^2} A_3\omega^1 + \frac{a\gamma}{a^2 - b^2} A_7\omega^2,$$
$$\omega^5{}_3 = -\frac{a}{b} A_7\omega^1 - \frac{ab}{b^2 - 2a^2} A_6\omega^2,$$
$$\omega^5{}_4 = A_6\omega^1 + A_7\omega^2.$$

Внешнее дифференцирование полученных выражений с помощью (2.7) дает систему для определения A_3, A_6, A_7:

$$b^4A_3{}^2 + a^4\gamma^2A_7{}^2 = 4\frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2)^2(3a^2b^2 - b^4 - a^2\gamma^2),$$
$$b^2(b^2 - 2a^2)A_3{}^2 + 2b^2(a^2 - b^2)^2A_6{}^2 + (b^2 - 2a^2)[a^2\gamma^2 - 2(a^2 - b^2)^2]A_7{}^2 = -4b^2(a^2 - b^2)^2(b^2 - 2a^2),$$
$$A_3A_7 = 0,\ b^2(b^2 - 4a^2)A_3A_6 + 3a^2\gamma(b^2 - 2a^2)A_7{}^2 = 0.$$

Если в этой системе $\gamma = A_3 = 0$, то последние два уравнения удовлетворяются тождественно, но в силу первого уравнения имеет место соотношение $3a^2 - b^2 = 0$, что противоречит предположению $a \geqslant b > 0$. В случае $\gamma = 0$, $A_3 \neq 0$, $A_7 = 0$ из последнего уравнения получается $A_6 = 0$. Тогда второе уравнение принимает вид $A_3{}^2 = -4(a^2 - b^2)^2$, что не может иметь места, если $A_3 \neq 0$. Аналогичное противоречие получается в случае $\gamma \neq 0$, так как тогда, учитывая, что из системы (2.14) следует $\gamma A_6 = 0$, имеет место $A_6 = 0$, и из последнего уравнения рассматриваемой системы получается $A_7 = 0$.

Случай $|\alpha| \neq a$, $a^2 - b^2 + a\alpha = 0$ отличается от рассмотренного тем, что в последней системе вместо A_3, A_6, A_7 будут соответственно A_4, A_7, A_6.

Пусть $|\alpha| \neq a$ и $(a^2-b^2)^2 - a^2\alpha^2 \neq 0$. Подстановка в систему (2.14) дает

$$A_1 = \frac{b\gamma}{\alpha - a} A_7, \quad A_2 = \frac{b\gamma}{\alpha + a} A_6, \quad A_3 = -\frac{a\gamma(a^2 - b^2 + a\alpha)}{(\alpha+a)(a^2 - b^2 - a\alpha)} A_6,$$

$$A_4 = \frac{a\gamma(a^2 - b^2 - a\alpha)}{(\alpha - a)(a^2 - b^2 + a\alpha)} A_7, \quad A_5 = \frac{\alpha + a}{\alpha - a} bA_7, \quad A_8 = \frac{\alpha - a}{\alpha + a} bA_6,$$

в силу чего (2.13) сводится к

$$\omega^2{}_1 = -\frac{ab\gamma}{(\alpha+a)(a^2 - b^2 - a\alpha)} A_6\omega^1 - \frac{ab\gamma}{(\alpha - a)(a^2 - b^2 + a\alpha)} A_7\omega^2,$$

$$\omega^4{}_3 = -\frac{\gamma(a^2 + b^2 + a\alpha)}{(\alpha+a)(a^2 - b^2 - a\alpha)} A_6\omega^1 - \frac{\gamma(a^2 + b^2 - a\alpha)}{(\alpha - a)(a^2 - b^2 + a\alpha)} A_7\omega^2,$$

$$\omega^5{}_3 = \frac{b}{\alpha - a} A_7\omega^1 + \frac{b}{\alpha + a} A_6\omega^2,$$

$$\omega^5{}_4 = A_6\omega^1 + A_7\omega^2.$$

Дифференциальное продолжение этой системы с учетом (2.7) приводит к системе квадратных уравнений относительно A_6 и A_7:

$$\begin{aligned}
&a^2b^2\gamma^2[(\alpha - a)^2(a^2 - b^2 + a\alpha)^2 A_6^2 + (\alpha + a)^2(a^2 - b^2 - a\alpha)^2 A_7^2] = \\
&\qquad = (\alpha^2 - a^2)^2(a^2 + b^2 - \alpha^2 - \gamma^2)[(a^2 - b^2)^2 - a^2\alpha^2]^2, \\
&(\alpha - a)^2(a^2 - b^2 + a\alpha)^2[a\gamma^2(a^2 + b^2 + a\alpha) - (\alpha + a)(a^2 - b^2 - \\
&\quad - a\alpha)]A_6^2 + (\alpha + a)^2(a^2 - b^2 - a\alpha)^2[a\gamma^2(a^2 + b^2 - a\alpha) + \\
&\quad + (\alpha - a)(a^2 - b^2 + a\alpha)^2]A_7^2 = \\
&\quad = -2a(\alpha^2 - a^2)^2[(a^2 - b^2)^2 - a^2\alpha^2], \qquad\qquad (2.15) \\
&\gamma[b^2(a^2 - b^2) + a^2(a^2 - \alpha^2) - b^4]A_6A_7 = 0, \\
&\gamma[(\alpha - a)^2(a^2 - b^2 + a\alpha)(2a^2 + b^2 + 2a\alpha)A_6^2 - \\
&\qquad - (\alpha + a)^2(a^2 - b^2 - a\alpha)(2a^2 + b^2 - 2a\alpha)A_7^2] = 0.
\end{aligned}$$

Здесь не может быть $A_6 = A_7 = 0$, потому что в этом случае получается противоречие $-2a(\alpha^2 - a^2)^2[(a^2 - b^2)^2 - a^2\alpha^2] = 0$. К противоречию приводит также предположение $\gamma \neq 0$. Действительно, если тогда $A_6 \neq 0$, $A_7 = 0$, то в силу соответственно четвертого и первого уравнения системы

$$\alpha = -\frac{2a^2+b^2}{2a}, \quad A_6^2 = -\frac{b^2(b^4 + 4a^2\gamma^2)(4a^2 - b^2)^2}{64a^6\gamma^2},$$

что не может иметь места. Аналогично если $\gamma \neq 0$, $A_6 = 0$, $A_7 \neq 0$, то

$$\alpha = \frac{2a^2 + b^2}{2a}, \quad A_7^2 = -\frac{b^2(b^2 + 4a^2\gamma^2)(4a^2 - b^2)^2}{64a^6\gamma^2}.$$

Если же $\gamma A_6 A_7 \neq 0$, то $\alpha^2 = \dfrac{(a^2 - b^2)(a^2 + 2b^2)}{a^2}$. Обозначая

$\varkappa = \frac{A_6}{A_7}$, можно из системы выразить

$$\varkappa^2 = \frac{(\alpha + a)^2 (a^2 - b^2 - a\alpha)(2a^2 + b^2 - 2a\alpha)}{(\alpha - a)^2 (a^2 - b^2 + a\alpha)(2a^2 + b^2 + 2a\alpha)}.$$

В силу последнего результата из первых двух уравнений системы следует

$$A_7^2 = \frac{(\alpha - a)^2 (2b^4 - a^2\gamma^2)[(a^2 - b^2)(4a^2 + 5b^2) + a\alpha(4a^2 - b^2)]}{2a^4 b^2 \gamma^2},$$

$$A_7^2 = \frac{a^2(\alpha - a)^2[(a^2 - b^2)(4a^2 + 5b^2) + a\alpha(4a^2 - b^2)]}{b^2[a^2\gamma^2 - 2(a^2 - b^2)^2]}$$

и, следовательно,

$$\frac{2b^4 - a^2\gamma^2}{2a^4\gamma^2} = \frac{a^2}{a^2\gamma^2 - 2(a^2 - b^2)^2},$$

откуда

$$a^4\gamma^4 + 4a^2b^2(a^2 - b^2)\gamma^2 + 4b^4(a^2 - b^2)^2 = 0,$$

$$\gamma^2 = -\frac{2b^2(a^2 - b^2)}{a^2}.$$

Полученный результат противоречит предположениям.

Осталось исследовать совместность системы (2.15) в случае $\gamma = 0$. Тогда

$$A_6^2 = \frac{1}{\alpha - a}[(\alpha + a)A_7^2 + 2ab^2]; \quad \alpha^2 = a^2 + b^2. \tag{2.16}$$

В этом случае существует *2-параметрическая подгруппа Ли в группе движений R_5, выделяемая вполне интегрируемой пфаффовой системой*

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega^2{}_1 &= \omega^3{}_1 - (\alpha + a)\omega^1 = \omega^4{}_1 - b\omega^2 = \\ &= \omega^5{}_1 = \omega^3{}_2 - (\alpha - a)\omega^2 = \omega^4{}_2 - b\omega^1 = \omega^5{}_2 = \omega^4{}_3 = \\ &= \omega^5{}_3 - \frac{b}{\alpha - a}A_7\omega^1 - \frac{b}{\alpha + a}A_6\omega^2 = \omega^5{}_4 - A_6\omega^1 - A_7\omega^2 = 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где инварианты a, b, α, A_6, A_7 удовлетворяют (2.16). Движение ортонормированного репера, присоединенного к произвольной точке M орбиты этой подгруппы, определяется формулами

$$d\boldsymbol{M} = ds\,\boldsymbol{e}_1 + dt\,\boldsymbol{e}_2,$$

$$d\boldsymbol{e}_1 = (\alpha + a)ds\,\boldsymbol{e}_3 + b\,dt\,\boldsymbol{e}_4,$$

$$d\boldsymbol{e}_2 = (\alpha - a)dt\,\boldsymbol{e}_3 + b\,ds\,\boldsymbol{e}_4,$$

$$d\boldsymbol{e}_3 = -(\alpha + a)ds\,\boldsymbol{e}_1 - (\alpha - a)dt\,\boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{b}{\alpha - a}A_7\,ds + \frac{b}{\alpha + a}A_6\,dt\right)\boldsymbol{e}_5,$$

$$d\boldsymbol{e}_4 = -b\,dt\,\boldsymbol{e}_1 - b\,ds\,\boldsymbol{e}_2 + (A_6\,ds + A_7\,dt)\boldsymbol{e}_5,$$

$$d\boldsymbol{e}_5 = -\left(\frac{b}{\alpha - a}A_7\,ds + \frac{b}{\alpha + a}A_6\,dt\right)\boldsymbol{e}_3 - (A_6\,ds + A_7\,dt)\boldsymbol{e}_4.$$

Существует инвариантное направление относительно действий подгруппы. Действительно, если $\boldsymbol{x} = A_7\boldsymbol{e}_1 + A_6\boldsymbol{e}_2 + b\boldsymbol{e}_5$, то $d\boldsymbol{x} = 0$. Из формул инфинитезимального перемещения репера следует, что точка M опишет при $t = \mathrm{const}$ винтовую линию в R_5 с кривизнами $k_1 = \alpha + a$, $k_2 = \dfrac{\alpha + a}{b} A_7$, $k_3 = -A_6$, $k_4 = -b$, а при $s = \mathrm{const}$ винтовую линию в R_5 с кривизнами $k_1' = \alpha - a$, $k_2' = \dfrac{\alpha - a}{b} A_6$, $k_3' = -A_7$, $k_4' = -b$. Инвариантное направление $\boldsymbol{x}$ определяет направление оси этих линий. Используя (1.2) и (2.16), легко показать, что оси винтовых линий у обоих семейств совпадают. В самом деле, если

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + \frac{A_6^2 + b^2}{(\alpha + a)(A_6^2 + A_7^2 + b^2)} \boldsymbol{e}_3 - \frac{A_6 A_7}{b(A_6^2 + A_7^2 + b^2)} \boldsymbol{e}_4,$$

то $d\boldsymbol{P} = \dfrac{A_7\, ds + A_6\, dt}{A_6^2 + A_7^2 + b^2} \boldsymbol{x}$.

Прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{x}$, проходящая через точку P, называется *осью орбиты*. Аналогично, используя (1.3) и (2.16), можно показать, что векторы

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_3 - \frac{b^2\mu + (\alpha + a)(A_7^2 + b^2)}{b(\alpha + a) A_6 A_7} \boldsymbol{e}_4,$$

$$\boldsymbol{z} = -(\alpha + a)\boldsymbol{e}_1 + \frac{b^2\mu + (\alpha + a)^2 (A_7^2 + b^2)}{(\alpha + a) A_6 A_7} \boldsymbol{e}_2 - \frac{b[\mu + (\alpha + a)^2]}{(\alpha + a) A_7} \boldsymbol{e}_5,$$

где μ является одним из двух вещественных решений уравнения

$$(\alpha - a)\mu^2 + 2(\alpha + a)(A_7^2 + b^2)\mu + (\alpha + a)^2 [2\alpha A_7^2 + (\alpha + a) b^2] = 0,$$

определяют инвариантное двумерное направление относительно действия рассматриваемой подгруппы. Значит, эта *2-параметрическая подгруппа является винтовой подгруппой группы стационарности флага* $\{1, 3\}$.

Ортогональная проекция рассматриваемой орбиты в гиперплоскость, ортогональную к $\boldsymbol{x}$, является поверхностью Клиффорда [3]. Действительно, она имеет неподвижную точку — точка пересечения оси поверхности с ортогональной к ней гиперплоскостью, и инвариантную плоскость R_2, определенную этой точкой и векторами $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. *Рассматриваемая орбита получается винтовым движением поверхности Клиффорда в направлении* $\boldsymbol{x}$ *с параметром* u, *линейно зависящим от* s *и* t:

$$du = \frac{|\boldsymbol{x}|}{\sqrt{A_6^2 + A_7^2 + b^2}} (A_7\, ds + A_6\, dt).$$

В частном случае $A_7=0$ линиями $t=\text{const}$, $s=\text{const}$ на орбите являются соответственно окружность с кривизной $k_1=\alpha+a$ на плоскости e_1e_3, и винтовая линия с кривизнами $k_1'=\alpha-a$, $k'_2=\frac{\alpha-a}{b}A_6$ в R_3, определенной векторами $\{e_2, e_3, e_5\}$. Ось такой орбиты проходит через точку $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{M}+\frac{1}{\alpha+a}\boldsymbol{e}_3$ в направлении вектора $\boldsymbol{x}_1=A_6\boldsymbol{e}_2+b\boldsymbol{e}_5$. Инвариантное двумерное направление определяется векторами $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{e}_1+\frac{b}{\alpha+a}\boldsymbol{e}_2-\frac{A_6}{\alpha+a}\boldsymbol{e}_5$. Теперь параметр u винтового движения поверхности Клиффорда зависит линейно только от t: $du=\frac{|\boldsymbol{x}|A_6}{\alpha+a}dt$.

2. Если индикатрисой нормальной кривизны орбиты будет эллипс или окружность $a\geqslant b>0$ и, кроме того, $\alpha=0$, $\beta\neq 0$, то в силу (2.13) и (2.14),

$$A_3=\gamma A_6,\quad A_4=-\gamma A_7,\quad A_5=2\beta A_6-bA_7,\quad A_8=-bA_6+2\beta A_7$$

и

$$\omega^2{}_1=\frac{aA_1+b\gamma A_7}{2b\beta}\omega^1+\frac{aA_2-b\gamma A_6}{2b\beta}\omega^2,$$

$$\omega^4{}_3=\frac{aA_1-\gamma(\beta A_6-bA_7)}{a\beta}\omega^1+\frac{aA_2-\gamma(bA_6-\beta A_7)}{a\beta}\omega^2,$$

$$\omega^5{}_3=\frac{\beta A_6-bA_7}{a}\omega^1+\frac{bA_6-\beta A_7}{a}\omega^2,$$

$$\omega^5{}_4=A_6\omega^1+A_7\omega^2.$$

Постоянные A_1 и A_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} a(a^2-b^2)A_1+ab\beta A_2&=\gamma[-b^2\beta A_6-b(a^2-b^2)A_7],\\ ab\beta A_1+a(a^2-b^2)A_2&=\gamma[b(a^2-b^2)A_6+b^2\beta A_7]. \end{aligned}\tag{2.18}$$

Если полученная система (2.18) является однородной, т. е. либо $\gamma=0$, либо $b\beta A_6+(a^2-b^2)A_7=(a^2-b^2)A_6+b\beta A_7=0$, то оказывается, что система может иметь только тривиальное решение $A_1=A_2=0$. Действительно, если (2.18) имеет нетривиальное решение, то $(a^2-b^2)^2-b^2\beta^2=0$ или $\beta^2=\frac{(a^2-b^2)^2}{b^2}\neq 0$, т. е. $a^2\neq b^2$, и, следовательно, $A_2=\mp A_1$. В случае $\gamma=0$ получается

$$\omega^2{}_1=\frac{a}{2b}{}'A_1(\omega^1\mp\omega^2),\quad \omega^4{}_3={}'A_1(\omega^1\mp\omega^2),$$

$$\omega^5{}_3=\frac{\beta A_6-bA_7}{a}\omega^1+\frac{bA_6-\beta A_7}{a}\omega^2,\quad \omega^5{}_4=A_6\omega^1+A_7\omega^2$$

где $'A_1 = \frac{A_1}{\beta}$. Дифференциальное продолжение этих уравнений дает соотношения $'A_1{}^2 = 2(3b^2 - a^2)$, $b^2A_6{}^2 - 2b\beta A_6A_7 + b^2A_7{}^2 = 2a^2(4b^2 - a^2)$, $A_6 \pm A_7 = 0$, $3a^2(A_6 \mp A_7) = 0$. Так как по предположениям должно иметь место $b^2 < a^2 < 3b^2$, то очевидно $4b^2 - a^2 \neq 0$ и, следовательно, $A_6{}^2 + A_7{}^2 \neq 0$, но тогда из третьего уравнения получается $A_7 = \mp A_6$, и четвертое уравнение принимает вид $6a^2A_6 = 0$, что противоречит предположению. Во втором случае однородной системы (2.18) имеет место $A_2 = \mp A_1$, $A_7 = \mp A_6$, что, как уже показано, приводит к противоречию.

Если же $A_1 = A_2 = 0$, то

$$\omega^2{}_1 = \frac{\gamma}{2\beta}A_7\omega^1 - \frac{\gamma}{2\beta}A_6\omega^2,$$

$$\omega^4{}_3 = -\frac{\gamma}{a\beta}(\beta A_6 - bA_7)\,\omega^1 - \frac{\gamma}{a\beta}(bA_6 - \beta A_7)\,\omega^2,$$

$$\omega^5{}_3 = \frac{\beta A_6 - bA_7}{a}\omega^1 + \frac{bA_6 - \beta A_7}{a}\omega^2, \quad \omega^5{}_4 = A_6\omega^1 + A_7\omega^2.$$

Внешнее дифференцирование полученных выражений с помощью (2.7) дает

$$\gamma^2(A_6{}^2 + A_7{}^2) = 4\beta^2(a^2 + b^2 - \beta^2 - \gamma^2),$$
$$(2\beta^2 - \gamma^2)(bA_6{}^2 - 2\beta A_6A_7 + bA_7{}^2) = 4a^2b\beta^2,$$
$$\gamma(bA_6{}^2 - 2\beta A_6A_7 + bA_7{}^2) = 0.$$

Из этой системы равенств при сделанных предположениях следует: $\gamma = 0$, $\beta^2 = a^2 + b^2$, $bA_6{}^2 - 2\beta A_6A_7 + bA_7{}^2 = 2a^2b$. Значит, $A_6 = \frac{\beta A_7 \pm a\sqrt{A_7{}^2 + 2b^2}}{b}$. Соответствующая 2-параметрическая подгруппа Ли движений в группе движений R_5 выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0,$$

$$\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 - a\omega^1 = \omega^4{}_1 \mp \sqrt{a^2 + b^2}\,\omega^1 - b\omega^2 =$$
$$= \omega^5{}_1 = \omega^3{}_2 + a\omega^2 = \omega^4{}_2 - b\omega^1 \mp \sqrt{a^2 + b^2}\,\omega^2 = \omega^5{}_2 = \omega^4{}_3 =$$
$$= \omega^5{}_3 - \frac{aA_7 + \sqrt{(a^2 + b^2)(A_7{}^2 + 2b^2)}}{b}\omega^1 \mp \sqrt{A_7{}^2 + 2b^2}\,\omega^2 =$$
$$= \omega^5{}_4 \mp \frac{\sqrt{a^2 + b^2}\,A_7 + a\sqrt{A_7{}^2 + 2b^2}}{b}\omega^1 - A_7\omega^2.$$

Эта подгруппа аналогична 2-параметрической подгруппе, которая выделялась пфаффовой системой (2.17). В рассматриваемом случае линии $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ на орбите будут винтовыми линиями пространства R_5. Таким же образом как раньше можно показать, что подгруппа будет винтовой подгруппой группы стационарности флага $\{1, 3\}$.

Пусть система (2.18) будет неоднородной. Если ввести обозначения $c' = (a^2 - b^2)^2 - b^2\beta^2$, $c'' = (a^2 - b^2)^2 + b^2\beta^2$, то получаются следующие выражения для A_1 и A_2:

$$A_1 = -\frac{b\gamma}{ac'}[2b\beta(a^2 - b^2)A_6 + c''A_7],$$

$$A_2 = \frac{b\gamma}{ac'}[c''A_6 + 2b\beta(a^2 - b^2)A_7].$$

Здесь $c' \neq 0$, так как если бы $c' = 0$, т. е. $a^2 - b^2 = \pm b\beta$, то система (2.18) приводится к $a(A_1 \pm A_2) = -b\gamma(\pm A_6 + A_7)$, $a(A_1 \pm A_2) = b\gamma(\pm A_6 + A_7)$. Отсюда $b\gamma(\pm A_6 + A_7) = 0$, что противоречит предположению неоднородности системы (2.18). Следовательно, формы имеют вид

$$\omega^2{}_1 = -\frac{b\gamma}{c'}\cdot[(a^2 - b^2)A_6 + b\gamma A_7]\omega^1 + \frac{b\gamma}{c'}[b\beta A_6 + (a^2 - b^2)A_7]\omega^2,$$

$$\omega^4{}_3 = -\frac{\gamma}{ac'}[(a^4 - b^4 - b^2\beta^2)A_6 + 2b^3\beta A_7]\omega^1 + \frac{\gamma}{ac'}[2b^3\beta A_6 + (a^4 - b^4 - b^2\beta^2)A_7]\omega^2,$$

$$\omega^5{}_3 = \frac{\beta A_6 - bA_7}{a}\omega^1 + \frac{bA_6 - \beta A_7}{a}\omega^2,$$

$$\omega^5{}_4 = A_6\omega^1 + A_7\omega^2.$$

Внешнее дифференцирование с учетом структурных уравнений (2.7) приведет к системе для определения A_6 и A_7. Если в этой системе обозначить $\varkappa = \frac{A_6}{A_7}$ (это допустимо, потому что $A_6{}^2 + A_7{}^2 \neq 0$), то система принимает вид:

$$b^2\gamma^2[c''\varkappa^2 + 4b\beta(a^2 - b^2)\varkappa + c'']A_7{}^2 = (c')^2(a^2 + b^2 - \beta^2 - \gamma^2),$$

$$\{b[\gamma^2((a^2 - b^2)(a^4 - b^4 - b^2\beta^2) + 2b^4\beta^2) - (c')^2]\varkappa^2 + 2\beta[b\gamma^2(2b^3(a^2 - b^2) + b(a^4 - b^4 - b^2\beta^2) + (c')^2]\varkappa + b[\gamma^2((a^2 - b^2)(a^4 - b^4 - b^2\beta^2) + 2b^4\beta^2) - (c')^2]\}A_7{}^2 = -2a^2b(c')^2,$$

$$-b\beta(a^2 - 4b^2)\varkappa^2 + 2[(a^2 - b^2)(a^2 + 2b^2) - 2b^2\beta^2]\varkappa - b\beta(a^2 - 4b^2) = 0,$$

$$\varkappa^2 - 1 = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\varkappa^2 = 1$, $A_6 = \pm A_7$. Поэтому

$$2b^2\beta^2 \pm b(a^2-4b^2)\beta-(a^2-b^2)(a^2+2b^2)=0$$

и отсюда

$$\beta=\frac{\mp(a^2-4b^2)\pm 3a^2}{4b}.$$

Если $\varkappa=1$, то

$$\beta_1=\frac{a^2+2b^2}{2b},\quad \beta_2=-\frac{a^2-b^2}{b},$$

а в случае $\varkappa=-1$ получается $\beta_3=-\beta_2$, $\beta_4=-\beta_1$. Дальнейший анализ можно провести только для $\varkappa=1$. Если

$$\beta=\beta_1=\frac{a^2+2b^2}{2b},$$

то из первого уравнения системы следует

$$A_7^2=-\frac{(a^4+4b^2\gamma^2)(a^2-4b^2)^2}{32b^2\gamma^2},$$

что невозможно в случае

$$c'=\frac{3}{4}a^2(a^2-4b^2)\neq 0.$$

Если

$$\beta=\beta_2=-\frac{a^2-b^2}{b},\ \text{ то }\ c'=(a^2-b^2)^2-b^2\frac{(a^2-b^2)^2}{b^2}=0.$$

Получилось противоречие.

Следовательно, *не существует* подгруппы движений, для которой система (2.18) являлась бы неоднородной.

3. Осталось рассмотреть самый общий случай, когда индикатриса нормальной кривизны является эллипсом или окружностью $a\geqslant b>0$ и $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$. Тогда формы $\omega^2{}_1$, $\omega^4{}_3$, $\omega^5{}_3$, $\omega^5{}_4$ определяются уравнениями (2.13) и постоянные A_i ($i=1,\ldots,8$) удовлетворяют системе

$$A_1=\frac{\beta}{\alpha}(A_3+\gamma A_6)+\frac{\gamma}{2a}(A_5-bA_7),$$

$$A_2=\frac{\beta}{\alpha}(A_4+\gamma A_7)+\frac{\gamma}{2a}(bA_6-A_8),$$

$$\left.\begin{aligned}2a[(a^2-b^2-a\alpha)A_3+b\beta A_4]&=-\gamma[(2a(a^2-b^2)+\alpha b^2)A_6+\\&\quad+2ab\beta A_7-\alpha bA_8],\\2a[b\beta A_3+(a^2-b^2+a\alpha)A_4]&=-\gamma[\alpha bA_5+2ab\beta A_6+\\&\quad+(2a(a^2-b^2)-\alpha b^2)A_7],\end{aligned}\right\}\quad(2.19')$$

$$\left.\begin{aligned}(\alpha-a)A_5&=-2a\beta A_6+(\alpha+a)bA_7,\\(\alpha+a)A_8&=(\alpha-a)bA_6+2a\beta A_7.\end{aligned}\right\}\quad(2.19'')$$

А. Обозначим $m'=a^2-b^2-a\alpha$, $m''=a^2-b^2+a\alpha$ и рассмотрим сначала случай, когда система (2.19′) является однородной, т. е. когда $m'A_3+b\beta A_4=b\beta A_3+m''A_4=0$. Тогда либо

$$A_5 = -\frac{1}{ab}\left[2ab\beta A_6 + (2a(a^2 - b^2) - ab^2)A_7\right],$$
$$A_8 = \frac{1}{ab}\left[(2a(a^2 - b^2) + ab^2)A_6 + 2ab\beta A_7\right], \qquad (2.20)$$
$$m''A_6 + b\beta A_7 = 0, \quad b\beta A_6 + m'A_7 = 0,$$

либо $\gamma = 0$.

В случае $m'm'' - b^2\beta^2 \neq 0$ имеет место соответственно либо $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0$, либо $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, A_5, A_6, A_7, A_8 удовлетворяют соотношениям (2.19″). Но все A_i $(i = 1, \ldots, 8)$ не могут быть равными нулю. Действительно, если $A_i = 0$, то $\omega^2{}_1 = \omega^4{}_3 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0$. Дифференциальное продолжение полученных уравнений с помощью (2.7) дает $-2ab\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$, что противоречит предположению.

Во втором случае, когда $\gamma = 0$, $m'm'' - b^2\beta^2 \neq 0$, имеют место

$$\omega^2{}_1 = \omega^4{}_3 = 0, \quad \omega^5{}_3 = \frac{A_5 - bA_7}{2a}\omega^1 - \frac{bA_6 - A_8}{2a}\omega^2,$$
$$\omega^5{}_4 = A_6\omega^1 + A_7\omega^2.$$

Следовательно, после внешнего дифференцирования последних уравнений с учетом (2.7) получается

$$a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0, \quad A_7(A_5 - bA_7) - A_6(bA_6 - A_8) = -4a^2b. \qquad (2.21)$$

Если $\alpha = a$, то из (2.19″) вытекает $A_6 = \frac{b}{\beta}A_7$, $A_8 = \beta A_7$, а из (2.21) следует, что $\beta = \pm b$, $A_5 = \frac{b}{A_7}(A_7 - 4a^2)$, $A_6 = \pm A_7$, $A_8 = \pm bA_7$. Соответственно *2-параметрическая подгруппа Ли движений в группе движений R_5 выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой*

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0,$$
$$\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 - 2a\omega^1 = \omega^4{}_1 \mp b\omega^1 - b\omega^2 = \omega^5{}_1 = \omega^3{}_2 =$$
$$= \omega^4{}_2 - b\omega^1 \mp b\omega^2 = \omega^5{}_2 = \omega^4{}_3 = \omega^5{}_3 + \frac{2ab}{A_7}\omega^1 =$$
$$= \omega^5{}_4 \mp A_7\omega^1 - A_7\omega^2 = 0.$$

Движение ортонормированного подвижного репера под действием этой выделяемой подгруппы определяется следующими формулами инфинитезимального перемещения

$$d\boldsymbol{M} = ds\,\boldsymbol{e}_1 + dt\,\boldsymbol{e}_2,$$
$$d\boldsymbol{e}_1 = 2a\,ds\,\boldsymbol{e}_3 \pm b(ds \pm dt)\boldsymbol{e}_4,$$
$$d\boldsymbol{e}_2 = b(ds \pm dt)\boldsymbol{e}_4,$$
$$d\boldsymbol{e}_3 = -2a\,ds\,\boldsymbol{e}_1 - \frac{2ab}{A_7}ds\,\boldsymbol{e}_5,$$
$$d\boldsymbol{e}_4 = \mp b(ds \pm dt)\boldsymbol{e}_1 - b(ds \pm dt)\boldsymbol{e}_2 \pm A_7(ds \pm dt)\boldsymbol{e}_5,$$
$$d\boldsymbol{e}_5 = \frac{2ab}{A_7}ds\,\boldsymbol{e}_3 \mp A_7(ds \pm dt)\boldsymbol{e}_4.$$

Точка M опишет при $t = \mathrm{const}$ винтовую линию в пространстве R_5 и при $s = \mathrm{const}$ винтовую линию в плоскости R_3, направление которой определяется векторами $\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_4, -b\boldsymbol{e}_1 + A_7\boldsymbol{e}_5\}$. Эти линии имеют один и тот же ось — ось орбиты. Подгруппа является *винтовой подгруппой флага* $\{1, 3\}$. В самом деле,

$$d\left(\boldsymbol{M} + \frac{A_7^2}{2a(A_7^2 + b^2)}\boldsymbol{e}_3 \pm \frac{b}{A_7^2 + 2b^2}\boldsymbol{e}_4\right) =$$

$$= -\frac{1}{A_7^2 + 2b^2}\left(\frac{b^2}{A_7^2 + b^2} ds \mp dt\right)\boldsymbol{x},$$

$$\boldsymbol{x} = -b^2\boldsymbol{e}_1 \pm (A_7^2 + b^2)\boldsymbol{e}_2 + bA_7\boldsymbol{e}_5, \quad d\boldsymbol{x} = 0.$$

$$d\boldsymbol{e}_3 = -2a\, ds\left(\boldsymbol{e}_1 + \frac{b}{A_7}\boldsymbol{e}_5\right), \quad d\left(\boldsymbol{e}_1 + \frac{b}{A_7}\boldsymbol{e}_5\right) = \frac{2a(A_7^2 + b^2)}{A_7^2} ds\, \boldsymbol{e}_3.$$

В случае $\alpha = -a$ вместо A_7 в формулах инфинитезимального перемещения репера будет A_6.

Если $\alpha^2 \neq a^2$, то в силу (2.19'')

$$A_5 = \frac{-2a\beta A_6 + (\alpha + a) bA_7}{\alpha - a}, \quad A_8 = \frac{(\alpha - a) bA_6 + 2a\beta A_7}{\alpha + a}$$

и, в силу (2.21)

$$a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0,$$

$$b(\alpha - a)A_6^2 + 2a\beta A_6A_7 - b(\alpha + a)A_7^2 - 2ab(\alpha^2 - a^2) = 0.$$

Следовательно,

$$A_6 = \frac{-a\beta \pm \sqrt{[a^4 - \alpha^2(a^2 - b^2)]A_7^2 + 2ab^2(\alpha - a)^2(\alpha + a)}}{b(\alpha - a)}, \tag{2.22}$$

где в случае действительной орбиты должно иметь место $[a^4 - \alpha^2(a^2 - b^2)]A_7^2 + 2ab^2(\alpha - a)^2(\alpha + a) \geqslant 0$. Соответствующая *2-параметрическая подгруппа Ли движений выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой*

$$\begin{gathered}
\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = 0, \\
\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 - (\alpha + a)\omega^1 = \omega^4{}_1 - \beta\omega^1 - b\omega^2 = \\
= \omega^5{}_1 = \omega^3{}_2 - (\alpha - a)\omega^2 = \omega^4{}_2 - b\omega^1 - \beta\omega^2 = \omega^5{}_2 = \omega^4{}_3 = \\
= \omega^5{}_3 + \frac{\beta A_6 - bA_7}{\alpha - a}\omega^1 - \frac{bA_6 - \beta A_7}{\alpha + a}\omega^2 = \\
= \omega^5{}_4 - A_6\omega^1 - A_7\omega^2 = 0,
\end{gathered} \tag{2.23}$$

где A_6 определяется соотношением (2.22) и инварианты a, b, α, β удовлетворяют условиям $a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0$, $(a^2 - b^2)^2 - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 \neq 0$, $a^2 - \alpha^2 \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Можно показать, что точка M опишет при $s = \mathrm{const}$, а также при $t = \mathrm{const}$, причем $ds = \omega^1$, $dt = \omega^2$, винтовые линии в пространстве R_5, имеющие один и тот же ось. Следовательно, выделяемая подгруппа аналогична подгруппе, выделяемой системой (2.17) и будет *винтовой подгруппой флага* $\{1, 3\}$. Так как в системах (2.17) и (2.23), которые определяют соответствующие 2-параметрические подгруппы, безразлично, равняется β нулю или нет, эти подгруппы входят в одно семейство.

Рассмотрим однородную систему (2.19′), когда $m'm'' - b^2\beta^2 = 0$, т. е. когда $\beta^2 = \frac{m'm''}{b^2}$. Оказывается, что и в этом случае (2.20) приводит к противоречию. В самом деле, если имеют место (2.20), то

$$A_1 = \frac{\beta}{a}A_3 - \frac{\gamma(a^2-b^2)}{ab}A_7,\quad A_2 = -\frac{m'}{ab}A_3 + \frac{\gamma m'(a^2-b^2)}{b^2a\beta}A_7,$$

$$A_4 = -\frac{m'}{b\beta}A_3,\quad A_5 = -\frac{2a^2-b^2}{b}A_7,\quad A_6 = -\frac{m'}{b\beta}A_7,$$

$$A_8 = \frac{m'(2a^2-b^2)}{b^2\beta}A_7$$

и, в силу (2.13)

$$\omega^2{}_1 = \frac{b(a-\alpha)A_3 - a\gamma m'A_7}{2b^2a\beta}\omega^1 + \frac{-(a+\alpha)m'A_3 + ab\beta\gamma A_7}{2b^2a\beta}\omega^2$$

$$\omega^4{}_3 = \frac{b\beta A_3 - \gamma m'A_7}{ba\beta}\omega^1 + \frac{-m'A_3 + b\beta\gamma A_7}{ba\beta}\omega^2,$$

$$\omega^5{}_3 = -\frac{a}{b}A_7\omega^1 - \frac{am'}{b^2\beta}A_7\omega^2,$$

$$\omega^5{}_4 = -\frac{m'}{b\beta}A_7\omega^1 + A_7\omega^2.$$

Дифференциальное продолжение последних уравнений с помощью (2.7) дает следующую систему относительно A_3 и A_7.

$$[(a^2+\alpha^2)(a^2-b^2) - 2a^2\alpha^2]A_3^2 - 2a^2b\beta\gamma A_3A_7 + a^2\gamma^2(a^2-b^2)A_7^2 = \\ = 2a^2b^2m''(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2),$$

$$(a^2-b^2-\alpha^2)A_3^2 - 2b\beta\gamma A_3A_7 + (a^2-b^2)(\gamma^2-2\alpha^2)A_7^2 = \\ = -2a^2b^2m'',$$

$$A_3A_7 = 0,\quad A_7[-b\beta A_3 + \gamma(a^2-b^2)A_7] = 0,$$

из которой следует, что

$$A_7 = 0,$$

$$[a^2(a^2-b^2) - \alpha^2(a^2+b^2)]A_3^2 = 2a^2b^2m''(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2),$$
$$(a^2-b^2-\alpha^2)A_3^2 = -2a^2b^2m''.$$

Здесь коэффициент при A_3^2 в последнем уравнении не может быть равным нулю, так как $\alpha^2 b^2 m'' \neq 0$. Следовательно,

$$A_3^2 = -\frac{2a^2b^2m''}{a^2 - b^2 - \alpha^2},$$

$$(a^2 - b^2)\alpha^4 + [2a^2(3b^2 - a^2) - b^2\gamma^2]\alpha^2 - \\ - (a^2 - b^2)[a^2(4b^2 - a^2) - b^2\gamma^2] = 0.$$

Пусть $\lambda = \frac{a^2}{b^2}$ и $\varkappa = \frac{\gamma^2}{b^2}$. В силу предположений $\lambda > 1$, $\varkappa \geqslant 0$. Теперь можно выразить α^2 из последнего квадратного уравнения и после подстановки значения α^2 в выражение β^2 получается

$$\alpha^2 = b^2 \frac{2\lambda(\lambda - 3) + \varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - 4(\lambda + 1)\varkappa + 16\lambda}}{2(\lambda - 1)},$$
$$\beta^2 = b^2 \frac{2(3\lambda - 1) - \lambda(\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - 4(\lambda + 1)\varkappa + 16\lambda})}{2(\lambda - 1)}, \tag{2.24}$$

где $0 \leqslant \varkappa \leqslant 4$. Неравенства $\beta^2 > 0$, $A_3^2 > 0$ выполняются, если $\alpha^2 < \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2}$, что с учетом выражения α^2 в (2.24) дает

$$0 < \frac{2\lambda(\lambda - 3) + f(\varkappa)}{2(\lambda - 1)} < \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda},$$

где

$$f(\varkappa) = \varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 - 4(\lambda + 1)\varkappa + 16\lambda}, \tag{2.25}$$

или

$$2\lambda(3 - \lambda) < f(\varkappa) < \frac{2(3\lambda - 1)}{\lambda}. \tag{2.26}$$

Оказывается, что в (2.25) следует выбрать верхний знак. В самом деле, при подстановке (2.24) в (2.8) получается равенство

$$K = \frac{b^2}{2}(\varkappa \mp \sqrt{\varkappa^2 - 4(\lambda + 1)\varkappa + 16\lambda}),$$

которое, в силу $\varkappa \geqslant 0$, согласуется с предложением 1, только в случае верхнего знака и если $0 \leqslant \varkappa \leqslant \frac{4\lambda}{\lambda + 1}$. Функция $f(x)$ является положительной на отрезке $\left[0, \frac{4\lambda}{\lambda + 1}\right]$ с минимальным значением $f\left(\frac{4\lambda}{\lambda + 1}\right) = \frac{8\lambda}{\lambda + 1}$, но это значение противоречит (2.26). Значит, *не существует* подгруппы, параметры индикатрисы нормальной кривизны орбиты которой удовлетворяли бы сделанным предположениям.

Пусть теперь в случае однородной системы (2.19') имеют место $\beta^2 = \frac{m'm''}{b^2}$, $\gamma = 0$. Тогда $\alpha^2 = a^2$ приводит к противоречию $\beta^2 = -2a^2 + b^2$. Следовательно, $\alpha^2 \neq a^2$ и решениями системы (2.19) будут $A_1 = \frac{\beta}{\alpha}A_3$, $A_2 = -\frac{m'}{b\alpha}A_3$, $A_4 = -\frac{m'}{b\beta}A_3$, $A_5 = -\frac{2a\beta}{\alpha - a}A_6 + \frac{\alpha + a}{\alpha - a}bA_7$, $A_8 = \frac{\alpha - a}{\alpha + a}bA_6 + \frac{2a\beta}{\alpha + a}A_7$. Уравнения системы (2.13) имеют вид

$$\begin{aligned}
\omega^2{}_1 &= \frac{a - \alpha}{2b\alpha}A_3\omega^1 - \frac{(a + \alpha)m'}{2b^2\alpha\beta}A_3\omega^2,\\
\omega^4{}_3 &= \frac{1}{\alpha}A_3\omega^1 - \frac{m'}{b\alpha\beta}A_3\omega^2,\\
\omega^5{}_3 &= \frac{-\beta A_6 + bA_7}{\alpha - a}\omega^1 + \frac{bA_6 - \beta A_7}{\alpha + a}\omega^2,\\
\omega^5{}_4 &= A_6\omega^1 + A_7\omega^2.
\end{aligned}$$

Дифференциальное продолжение полученной системы дает

$$A_3{}^2 = \frac{2\alpha^2 m''[3a^2b^2 - a^4 + \alpha^2(a^2 - b^2)]}{a^2(a^2 - b^2) - \alpha^2(a^2 + b^2)},$$

$$\begin{gathered}
\frac{b}{\alpha + a}A_6{}^2 + \frac{2a\beta}{\alpha^2 - a^2}A_6A_7 - \frac{b}{\alpha - a}A_7{}^2 = \\
= \frac{2a[-(a^2 - b^2)\alpha^4 + 2a^2(a^2 - 3b^2)\alpha^2 - a^2(a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4)]}{b[a^2(a^2 - b^2) - \alpha^2(a^2 + b^2)]},
\end{gathered} \tag{2.27}$$

$$\begin{gathered}
A_3[m'(4b^2 - a^2 - a\alpha)A_6 + b\beta(4b^2 - a^2 + a\alpha)A_7] = 0,\\
A_3[b\beta(-3a^3 + (a^2 + 4b^2)\alpha + 3a\alpha^2 - \alpha^3)A_6 +\\
+ m'(3a^3 + (a^2 + 4b^2)\alpha - 3a\alpha^2 - \alpha^3)A_7] = 0.
\end{gathered}$$

Оказывается, что $A_3 \neq 0$ приводит к противоречию. Действительно, если $A_3 \neq 0$, то A_6 и A_7 удовлетворяют однородной системе

$$\begin{gathered}
m'(4b^2 - a^2 - a\alpha)A_6 + b\beta(4b^2 - a^2 + a\alpha)A_7 = 0,\\
b\beta(-3a^3 + (a^2 + 4b^2)\alpha + 3a\alpha^2 - \alpha^3)A_6 +\\
+ m'(3a^3 + (a^2 + 4b^2)\alpha - 3a\alpha^2 - \alpha^3)A_7 = 0,
\end{gathered}$$

определителем которой является

$$\begin{gathered}
|A| = 6am'[-(a^2 - b^2)\alpha^4 + 2a^2(a^2 - 3b^2)\alpha^2 -\\
- a^2(a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4)].
\end{gathered}$$

Здесь $|A| = 0$, так как в противном случае $A_6 = A_7 = 0$ и из (2.27) следует $|A| = 0$, что противоречит предположению. Следовательно,

$$(a^2 - b^2)\alpha^4 - 2a^2(a^2 - 3b^2)\alpha^2 + a^2(a^4 - 5a^2b^2 + 4b^4) = 0,$$

поэтому

$$\alpha^2 = \frac{a(a^3 - 3ab^2 \pm 2b^3)}{a^2 - b^2},$$

и после подстановки в (2.24) выражение β^2 принимает вид

$$\beta^2 = \frac{b(\mp 2a^3 + 3a^2 b - b^3)}{a^2 - b^2}.$$

В случае верхнего знака

$$\alpha^2 = \frac{a(a-b)(a+2b)}{a+b}, \quad \beta^2 = -\frac{b(a-b)(2a+b)}{a+b},$$

последнее равенство противоречит предположениям. В случае нижнего знака

$$\alpha^2 = \frac{a(a+b)(a-2b)}{a-b}, \quad \beta^2 = \frac{b(a+b)(2a-b)}{a-b},$$

теперь гауссовая кривизна имеет значение $K = 2ab > 0$, что противоречит предложению 1.

Так как доказано несуществование подгруппы Ли движений, для которой $A_3 \neq 0$ в системе (2.27), то осталось решать систему в случае $A_3 = 0$. Тогда из первого уравнения (2.27) и выражения $\beta^2 = \frac{m'm''}{b^2}$ получается

$$\alpha^2 = \frac{a^2(a^2 - 3b^2)}{a^2 - b^2}, \quad \beta^2 = \frac{b^2(3a^2 - b^2)}{a^2 - b^2}, \quad \gamma = 0, \tag{2.28}$$

где $a^2 > 3b^2$, и из второго уравнения (2.27)

$$A_6 = \frac{1}{b(a-\alpha)}\left[-\alpha\beta A_7 \pm \sqrt{A_7^2 + \frac{4ab^2(a-\alpha)}{3(a^2-b^2)}}\right]. \tag{2.29}$$

Из выражения α^2 следует, что $a - \alpha < 0$. Поэтому

$$A_7^2 \geqslant \frac{4ab^2(a-\alpha)}{3(a^2-b^2)}. \tag{2.30}$$

Существует 2-*параметрическая подгруппа Ли группы движений пространства* R_5, выделяемая вполне интегрируемой пфаффовой системой (2.23), где дифференциальные инварианты орбиты определяются соотношениями (2.28), (2.29) и (2.30). Можно показать, что точка M опишет при $s = \text{const}$ и $t = \text{const}$ ($ds = \omega^1$, $dt = \omega^2$) винтовые линии пространства R_5 и тем самым выделяемая подгруппа аналогична подгруппе, выделяемой системой (2.17). Значит, она будет *винтовой подгруппой флага* $\{1, 3\}$ и входит в одно семейство с подгруппами, определенными системами (2.17) и (2.23) с учетом (2.22).

В. Пусть система (2.19') для определения A_3, A_4 будет неоднородной. Тогда

$$A_3 = -\frac{\gamma}{2a(m'm''-b^2\beta^2)}\{-\alpha b^2\beta A_5 +$$

$$+[m''(2a(a^2-b^2)-\alpha b^2)-2ab^2\beta^2]A_6 + ab\beta(2a^2+b^2)A_7 -$$

$$-abm''A_8\}, \qquad (2.31)$$

$$A_4 = -\frac{\gamma}{2a(m'm''-b^2\beta^2)}\{abm'A_5 - ab\beta(2a^2+b^2)A_6 +$$

$$+[m'(2a(a^2-b^2)-\alpha b^2)+2ab^2\beta^2]A_7 + \alpha b^2\beta A_8\},$$

где по предположению $\gamma \neq 0$ и оказывается, что $m'm''-b^2\beta^2 \neq \neq 0$. Здесь действительно не может иметь место $m'm''-b^2\beta^2 = = 0$. В случае $\alpha = a$ получается $m'm''-b^2\beta^2 = -b^2(2a^2-b^2+ +\beta^2) < 0$. Если $\alpha \neq a$, то с учетом (2.19'') система (2.19') приводится к виду

$$\sqrt{m'}A_3 \pm \sqrt{m''}A_4 = -\frac{a\gamma\sqrt{m''}}{(\alpha+a)\sqrt{m'}}(\sqrt{m''}A_6 \pm$$

$$\pm\sqrt{m'}A_7) = \frac{a\gamma\sqrt{m'}}{(\alpha-a)\sqrt{m''}}(\sqrt{m''}A_6 \pm \sqrt{m'}A_7).$$

Поэтому $(a-\alpha)m'' = (a+\alpha)m'$, или $-2ab^2 = 0$, что противоречит предположениям.

Если $\alpha = a$, то в силу (2.19'') и (2.31)

$$A_6 = \frac{b}{\beta}A_7, \quad A_8 = \beta A_7,$$

$$A_3 = \frac{\gamma}{2b\beta(2a^2-b^2+\beta^2)}[-b\beta^2 A_5 + (2a^2-b^2)^2 A_7],$$

$$A_4 = -\frac{\gamma}{2(2a^2-b^2+\beta^2)}[bA_5 + (4a^2-2b^2+\beta^2)A_7].$$

Тогда выражения (2.13) принимают вид

$$\omega^2{}_1 = \frac{\gamma}{2\beta}A_7\omega^1 - \frac{\gamma}{2b(2a^2-b^2+\beta^2)}[bA_5 + (2a^2-b^2)A_7]\omega^2,$$

$$\omega^4{}_3 = \frac{\gamma}{2ab\beta(2a^2-b^2+\beta^2)}[-b\beta^2A_5 + (4a^4-b^4+2b^2\beta^2)A_7]\omega^1 -$$

$$-\frac{\gamma}{2a(2a^2-b^2+\beta^2)}[bA_5-\beta^2A_7]\omega^2,$$

$$\omega^5{}_3 = \frac{1}{2a}(A_5-bA_7)\omega^1 + \frac{b^2-\beta^2}{2a\beta}A_7\omega^2,$$

$$\omega^5{}_4 = \frac{b}{\beta}A_7\omega^1 + A_7\omega^2.$$

Отсюда после внешнего дифференцирования получается система для определения A_5 и A_7.

$$
\begin{gathered}
b^2\beta^2A_5^2 + 2b\beta^2(2a^2-b^2)A_5A_7 + [b^2(2a^2-b^2+\beta^2)^2 - \\
-\beta^2(2a^2-b^2)^2]A_7^2 = \frac{4b^2\beta^2}{\gamma^2}(2a^2-b^2+\beta^2)^2(b^2-\beta^2-\gamma^2), \\
-b\beta^2(2a^2-b^2+\beta^2-\gamma^2)A_5A_7 + [b^4(2a^2-b^2+\beta^2)+\gamma^2(\beta^2(a^2+b^2) - \\
-a^2(2a^2-b^2))]A_7^2 = \qquad\qquad (2.32)\\
= 2b^2\beta^2(2a^2-b^2+\beta^2)(2a^2+b^2-\beta^2-\gamma^2), \\
A_7[b(a^2-2b^2+2\beta^2)A_5 - \{2(a^2+b^2)(2a^2-b^2) - \\
-(a^2-2b^2)\beta^2\}A_7] = 0, \\
b^2\beta^2A_5^2 - 2b\beta^2(a^2+b^2)A_5A_7 + [-b^2\beta^4 + (-8a^4+4a^2b^2+3b^4)\beta^2 + \\
+ b^2(8a^4-2a^2b^2-b^4)]A_7^2 = 0.
\end{gathered}
$$

Здесь $A_7 \neq 0$, потому что в случае $A_7 = 0$ получилось бы противоречие: $b^2 = \beta^2 + \gamma^2$, $2a^2 = 0$. Коэффициент при A_5 в третьем уравнении не может равняться нулю, так как если

$$\beta^2 = \frac{2b^2 - a^2}{2},$$

то и коэффициент у A_7 в том же уравнении должен равняться нулю:

$$2(a^2+b^2)(2a^2-b^2) + \frac{(a^2-2b^2)^2}{2} = 0,$$

что противоречит предположениям $a \geqslant b > 0$, $\beta \neq 0$. Итак,

$$A_5 = \frac{2(a^2+b^2)(2a^2-b^2)-(a^2-2b^2)\beta^2}{b(a^2-2b^2+2\beta^2)}A_7, \qquad A_7 \neq 0.$$

Подстановка последнего выражения в четвертое уравнение системы дает

$$
\begin{gathered}
f(\varkappa) \equiv 4\varkappa^4 + (27\lambda^2-4\lambda-16)\varkappa^3 + (54\lambda^3-93\lambda^2+22\lambda+14)\varkappa^2 - \\
-(88\lambda^3-105\lambda^2+12\lambda-16)\varkappa - (8\lambda^4 - \\
-34\lambda^3+39\lambda^2-4\lambda-4) = 0,
\end{gathered}
$$

где $\varkappa = \frac{\beta^2}{b^2}$, $\lambda = \frac{a^2}{b^2}$. Здесь по предложению 1 будет $0 < \varkappa < 1$ и по предположению $\lambda \geqslant 1$. Оказывается, что найденное уравнение не имеет вещественных решений в рассматриваемом промежутке. Так как на концах отрезка $[0, 1]$ функция $f(\varkappa)$ является отрицательной при $\lambda \geqslant 1$: $f(0) = -(\lambda-2)^2(2\lambda-1)(4\lambda+1) < 0$, $f(1) = -2(4\lambda^4+5\lambda-5) < 0$, то для доказательства надо показать, что на отрезке $[0, 1]$ существует единственная стационарная точка $\varkappa = \varkappa_0$ для функции $f(\varkappa)$ и функция имеет в ней минимум, т. е. $f'(\varkappa_0) = 0$, $f''(\varkappa_0) > 0$. Производные функции $f(\varkappa)$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
f'(\varkappa) = 16\varkappa^3 + 3(27\lambda^2-4\lambda-16)\varkappa^2 + 2(54\lambda^3-93\lambda^2 + \\
+22\lambda+14)\varkappa - (88\lambda^3-105\lambda^2+12\lambda+16), \\
f''(\varkappa) = 48\varkappa^2 + 6(27\lambda^2-4\lambda-16)\varkappa + 2(54\lambda^3-93\lambda^2+22\lambda+14), \\
f'''(\varkappa) = 96\varkappa + 6(27\lambda^2-4\lambda-16).
\end{gathered}
$$

Отсюда $f'(0) = -(88\lambda^3 - 105\lambda^2 + 12\lambda + 16) < 0$ и $f'(1) = 20(\lambda^3 + \lambda - 1) > 0$ при $\lambda \geqslant 1$. Поэтому существует по меньшей мере одна $\varkappa_i \in (0, 1)$ такая, что $f'(\varkappa_i) = 0$. Так как $f'''(\varkappa) > 0$, если $\varkappa \in [0, 1]$, $\lambda \geqslant 1$, то функция $f''(\varkappa)$ является на рассматриваемом отрезке $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ возрастающей. В силу этого достаточно рассматривать функцию $f''(\varkappa)$ в точке $\varkappa = 0$. Тогда $f''(0) = 2(54\lambda^3 - 93\lambda^2 + 22\lambda + 14)$. Существует $\lambda_0 > 1$ такая, что $f''(0)|_{\lambda \geqslant \lambda_0} \geqslant 0$ и в силу возрастания функции $f''(\varkappa)$ на отрезке $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, $f''(\varkappa_i) > 0$ для всякого $0 < \varkappa_i < 1$. Поэтому $\varkappa_i \equiv \varkappa_0$ является единственной точкой стационарности функции $f(\varkappa)$, $0 < \varkappa < 1$. Если же $1 \leqslant \lambda < \lambda_0$, то опять-таки в силу монотонного возрастания функции $f''(\varkappa)$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ и с учетом условия $f'(0) < 0$, существует единственная $\varkappa^*$ такая, что $f''(\varkappa^*) = 0$, $0 < \varkappa^* < \varkappa_0 < 1$. Значит в рассматриваемом случае $1 \leqslant \lambda < \lambda_0$ функция $f(\varkappa)$ имеет тоже единственную точку стационарности $\varkappa = \varkappa_i \equiv \varkappa_0$, $f'(\varkappa_0) = 0$, $f''(\varkappa_0) > 0$. Следовательно, $f(\varkappa)$ в обоих случаях не имеет решений в промежутке $0 < \varkappa < 1$.

Тем самым доказано, что *не существует* подгруппы, дифференциальные инварианты которой удовлетворяли бы сделанным предположениям.

Случай $a = -a$ отличается от рассмотренного только тем, что формы $\omega^2{}_1$, $\omega^4{}_3$, $\omega^5{}_3$ и $\omega^5{}_4$ выражаются через A_6, A_8.

Если $\alpha^2 \neq a^2$, то для определения A_6 и A_7 получается система, аналогичная системе (2.32). Таким же образом, как в рассмотренном случае, можно доказать, что система несовместна при сделанных предположениях.

Литература

1. Картан Э., Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Москва, 1963.
2. Копп В. Г., О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1966, **126**, № 1, 13—22.
3. Лумисте Ю., Рийвес К., Перечисление и орбиты подгрупп Ли группы движений в евклидовом пространстве R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 12—30.
4. Муллари Р. Р., Исследования по теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Диссертация. Тарту, 1963.
5. Риманова геометрия в ортогональном репере (по лекциям Э. Картана). Москва, 1960.
6. Солодовников А. С., Модели эллиптических пространств. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу. Моск. ун-т, 1961, **11**, 293—308.
7. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. Москва, 1948.
8. Syptak, M., Sur les hypercirconférences et hyperhélices dans les espaces euclidiens à p dimensions. C. r. Acad. Sci., 1932, **145**, 298—299.
9. Teleman, C., Grupurile de mişcare transitive ale spatiilor riemanniene V_5. Studii şi cercetări mat. Acad RSR, 1952, **4**, 503—526.

Поступило
20 VI 1969

EUKLEIDILISE RUUMI R_5 LIIKUMISTE RÜHMA LIE ALAMRÜHMAD JA NENDE ORBIIDID. I.

K. Riives

Resümee

Töös leitakse eukleidilise ruumi R_5 liikumiste rühma paarikaupa mittekonjugeeritud intransitiivsed Lie alarühmad, mille orbiitideks on kas kõverad V_1 või 2-mõõtmelised pinnad V_2 ruumis R_5. Alamrühmad eraldatakse välja orbiitide — konstantsete diferentsiaalinvariantidega kõverate ja pindade V_2 uurimise käigus E. Cartani liikuva ortoreeperi meetodiga. Et alamrühmade lõplikku klassifitseerimist on lihtne kirjeldada invariantsete lippude abil, siis on iga alarühma jaoks näidatud ka temale vastav invariantne lipp.

ENUMERATION OF LIE SUBGROUPS IN THE GROUP OF MOTIONS IN EUCLIDEAN SPACE R_5 AND THEIR ORBITS. I

K. Riives

Summary

In the paper nontransitive Lie subgroups unconjugated in pairs, whose orbits are curves V_1 or 2-dimensional surfaces V_2 in space R_5, are established in the group of motions in Euclidean space R_5. The subgroups are separated in the course of studying their orbits — the curves and surfaces V_2 with constant differential invariants by the E. Cartan method of repère mobile. Since the final classification of subgroups is simple to describe by means of invariant flags, an invariant flag is pointed out for each subgroup.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ИЗУЧЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

А. Руубель

Эстонская сельскохозяйственная академия

1. Введение

Многие задачи техники требуют от начертательной геометрии выработки таких более гибких методов изготовления и применения плоских моделей пространства, которые удобно приспособлять к весьма разнообразным линиям и поверхностям. В последнее время, особенно в последнем десятилетии, возникли в начертательной геометрии многие новые виды прямолинейного и криволинейного проецирования. Они изучались отдельно, в основном с точки зрения их практических применений.

Настоящая статья является продолжением исследований [1, 2, 3] автора в области совместного аналитического изучения всех видов обобщенного проецирования. Рассматриваются системы уравнений проецирования и комплексных чертежей обобщенных проекций. Исходя из приведенной связи между числами уравнений и значений параметров в этих системах, в настоящей статье показывается, как и в какой мере можно наложить дополнительные условия на проецирующие, проекции, или на линии связи комплексного чертежа, когда выбранный вначале проецирующий аппарат содержит свободные параметры. Указывается также как применить графически заданные элементы определителя аппарата проецирования при составлении этих уравнений.

2. Простое обобщенное проецирование

Пусть в трехмерном пространстве точек фиксирована некоторая система координат (x_1, x_2, x_3), в общем случае криволинейных. Рассмотрим проецирование точки $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ на поверхность проекций

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1)$$

при помощи проецирующих линий, заданных системой уравнений

$$f_i(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2) = 0 \quad \text{при} \quad i = 1,\ 2, \tag{2}$$

или параметрически

$$x_j = \varphi_j(u_1, u_2, t) \quad \text{при} \quad j = 1,\ 2,\ 3, \tag{2а}$$

где u_1 и u_2 — параметры, определяющие проецирующую линию в семействе, а t — параметр, определяющий точку на проецирующей.

Поскольку координаты проецируемой точки $P^0(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$ должны удовлетворять уравнениям проецирующих, а координаты ее проекции $P'(x_1',\ x_2',\ x_3')$ уравнениям проецирующих и поверхности проекций, то получим одну из следующих систем уравнений, так называемого простого проецирования $L_2^1(0)$:

$$\begin{aligned} f_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, u_1, u_2) &= 0, \\ f_i(x_1', x_2', x_3', u_1, u_2) &= 0, \\ \pi(x_1', x_2', x_3') &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

или

$$\begin{aligned} x_j^0 &= \varphi_j(u_1, u_2, t^0), \\ x_j' &= \varphi_j(u_1, u_2, t'), \\ \pi(x_1', x_2', x_3') &= 0, \end{aligned} \tag{3а}$$

где $i = 1, 2$, и $j = 1, 2, 3$, а после исключения параметров — приведенную систему

$$\begin{aligned} F_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_1', x_2', x_3') &= 0, \quad \text{где} \quad i = 1,\ 2, \\ \pi(x_1', x_2', x_3') &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим следующие характерные свойства этих систем:

Свойство 1. *Одно уравнение системы простого проецирования не содержит координат точки P^0, а в других уравнениях координаты точек P^0 и P' фигурируют одинаково и их можно переменить местами.*

Свойство 2. *Число уравнений n и общее число N значений всех координат и параметров в системе уравнений проецирования $L_2^1(0)$ связаны формулой*

$$N - n = 3. \tag{5}$$

Областью существования проецирования $L_2^1(0)$ называется такая область пространства, в каждой точке которой f_i (или φ_j) и π непрерывны и в которой задание точки P^0 определяет одну определенную точку P', а задание на поверхности π точки P' — одну определенную непрерывную проецирующую линию с текущими координатами x_1^0, x_2^0 и x_3^0. *Областью существования проекций* называется область поверхности проекций, состоящая из проекций точек области существования проецирования.

Систему уравнений проецирования можно выписать и в том случае, когда в определитель проецирующего аппарата входят графически заданные элементы. Так, например, семейство проецирующих линий может быть определено заданием одной проецирующей на эпюре Монжа и условиями, которые определяют изменение формы и положения проецирующей с перемещением проецируемой точки в пространстве. Эти условия в свою очередь также могут быть связаны с заданными на чертеже кривыми. Все графически заданные элементы мы принимаем за постоянные данные, а условия, связывающие координаты проецируемой точки и проекции с координатами известных точек данных кривых, выражаются уравнениями, входящими в систему уравнений проецирования.

Систему уравнений $L_2{}^1(1)$, соответствующую проецированию линии

$$g_i(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \text{где} \quad i = 1, 2,$$

при том же аппарате проецирования, можно получить из системы уравнений проецирования $L_2{}^1(0)$, если добавить к (3) уравнения

$$g_k(x_1{}^0,\ x_2{}^0,\ x_3{}^0) = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2.$$

Так получается система:

$$\begin{aligned} f_i(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0, u_1, u_2) &= 0 \\ f_i(x_1', x_2', x_3', u_1, u_2) &= 0, \\ \pi(x_1', x_2', x_3') &= 0, \\ g_i(x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0) &= 0, \quad \text{где} \quad i = 1,\ 2. \end{aligned}$$

Примечание. Если a, b, c и d обозначают числа измерений проецирующей, носителя проекций, проецируемой фигуры и проекции, n — число уравнений в системе уравнений проецирования, e — число параметров, выделяющих проецирующую в семействе, E — число значений параметров, фигурирующих в системе, N — общее число значений всех координат и параметров в системе уравнений проецирования, то получаются следующие формулы для случая трехмерного пространства:

$$e = 3 - a, \tag{6}$$

$$d = a + b + c - 3, \tag{7}$$

$$N - n = a + b - 2c, \tag{8}$$

$$E = N - 6 = n + a + b - 2c - 6. \tag{9}$$

В начертательной геометрии нашли применение частные виды проецирования $L^a{}_b(c)$, соответствующие следующим тройкам значений $(a,\ b,\ c)$;

$$(1,2,0),\ (1,2,1),\ (2,1,0),\ (2,1,1),\ (2,2,0),\ (2,2,1).$$

По существу подобно предыдущему можно выписать уравнения и определить область существования этих проецирований. В нижеследующем мы останавливаемся только на рассмотрении проецирования при помощи линий на поверхность.

Уравнения проецирования дают ответ на различные вопросы, связанные с прямой или обратными задачами рассматриваемого проецирования, позволяют выяснить вопрос о заменимости одного проецирования другими и определить с точностью до каких операции проецирования эта замена осуществима.

3. Сложное обобщенное проецирование

Проецирование проекции оригинала и проецирование вместе с преобразованием оригинала или проекции дает так называемую сложную проекцию этого оригинала.

Проецируем точку $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ на поверхность $\pi(x_1, x_2, x_3) = 0$ при помощи проецирующих линий $f_i(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2) = 0$, где $i = 1, 2$, а полученную проекцию $P'(x_1', x_2, x_3')$ на поверхность $\pi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ при помощи проецирующих $\varphi_k = (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2) = 0$, где $k = 1, 2$. Обозначим новую проекцию через $P''(x_1'', x_2'', x_3'')$. Система уравнений этого двухкратного проецирования следующая:

$$\begin{aligned} f_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0, u_1, u_2) &= 0, \\ f_i(x_1', x_2', x_3', u_1, u_2) &= 0, \\ \pi_1(x_1', x_2' x_3') &= 0, \\ \varphi_k(x_1', x_2', x_3', v_1, v_2) &= 0, \\ \varphi_k(x_1'', x_2'', x_3'', v_1, v_2) &= 0, \\ \pi_2(x_1'', x_2'', x_3'') &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $i, k = 1, 2$.

Из этой системы исключим все переменные, кроме координат точек P^0 и P''. Основная формула $N - n = a + b - 2c = 3$ сохраняется и для случая краткого проецирования. С геометрической точки зрения это объясняется тем, что вторичное проецирование устанавливает взаимнооднозначное соответствие между точками поверхностей π_1 и π_2.

В сущности к подобным же результатам приводит осуществление операции проецирования вместе с предшествующим или последующим преобразованием координат. В этом случае в систему уравнений проецирования придется включить связи новых координат x_1'', x_2'' и x_3'' соответственно с координатами точек P^0 или P'.

4. Проецирование с учетом дополнительных условий

Рассмотрим теперь такой случай, когда вначале выбранный аппарат проецирования содержит известное число s свободных параметров, т. е., когда в действительности фигурирующее число параметров превышает определяемое формулой (6) на число s.

В этом случае можно задавать s таких дополнительных условий для проецирующего аппарата, или проекции, аналитические выражения которых содержит s параметров. Полученные отсюда уравнения, выраженные в координатах оригинала и проекции, включаются в систему уравнений простого или сложного проецирования, выписанной по прежней схеме. Дополнительные условия должны быть выбраны так, чтобы из полученной системы возможно было исключить s параметров.

Пример. Требуется выяснить возможно ли при помощи линейных проецирующих в сферической системе координат $(\varrho, \varphi, \Theta)$ проецировать конус вращения $\Theta = \Theta^0$, где $\Theta^0 = \text{const}$, в его развертку на плоскость, проходящую через ось вращения. Уточнить в положительном случае выбор проецирующих. Выпишем вначале уравнения проецирующих в следующем виде

$$\begin{aligned} \varrho &= a_1 + b_1 t, \\ \Theta &= a_2 + b_2 t, \\ \varphi &= a_3 + t, \end{aligned}$$

и примем за поверхность проекций полуплоскость $\varphi = 0$.

Выпишем первые квадратичные формы поверхности конуса и плоскости проекций, рассматривая на поверхности конуса ϱ-линии и φ-линии, а не плоскости проекций ϱ-линии и Θ-линии.

Из приравнивания этих квадратичных форм получим условия

$$\varrho = \text{const} \quad \text{и} \quad |d\Theta| = |\sin \Theta^\circ \, d\varphi|,$$

гарантирующие проецирование конуса в его развертку.

Отсюда получим следующую систему уравнений проецирования

$$\begin{aligned} \varrho^0 &= a_1 + b_1 t^0, \\ \Theta^0 &= a_2 + b_2 t^0, \\ \varphi^0 &= a_3 + t^0, \\ \varphi' &= a_3 + t', \\ \varrho' &= a_1 + b_1 t', \\ \Theta' &= a_2 + b_2 t', \\ \varphi' &= 0, \\ \varrho' &= \varrho^0, \\ \Theta' - \Theta^0 &= (\varphi' - \varphi^0) \sin \Theta^0. \end{aligned}$$

Эта система совместима, когда $b_1 = 0$ и $b_2 = \sin \Theta^0$. Остался еще один свободный параметр. Выберем $t^0 = 0$; тогда получим следующую систему уравнений проецирующих:

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho^0, \\ \varphi &= \varphi^0 + t, \\ \Theta &= \Theta^0 + t \sin \Theta^0, \end{aligned}$$

выражающую определенные сферические винтовые линии.

5. О комплектных чертежах

Остановимся на рассмотрении проецирований типа $L^1{}_2$. Обратимую плоскую модель точек пространства дает нам комплексный чертеж, состоящий из двух простых или сложных проекций этих точек, полученных на одной и той же плоскости $\pi(x_1, x_2, x_3) = 0$. При этом проецирующие первичных проецирований должны быть различны.

Областью существования комплексного чертежа называется общая часть областей существования составных проекций.

Система уравнений комплексного чертежа состоит в общем случае из систем уравнений всех составных проецирований, из соотношений между координатами точек, фигурирующих в различных системах координат или подвергших преобразованию и из связей, которые нам дают дополнительные условия, в случае проецирований с учетом дополнительных условий. Формулы (8) и (9) применимы и в случае комплексного чертежа.

Более подробное изучение комплексных чертежей простых и сложных проекций, а также примеры на применение комплексных чертежей при решении задач на пересечение поверхностей, имеются в прежних статьях автора [1, 2].

6. Выводы и примечания

1. Получается общая схема изучения всех видов криволинейного и прямолинейного проецирования, а также проецирования при помощи поверхностей на линию или на поверхность. Этим облегчается изучение свойств новых видов проецирования, их практическое применение, а возможно и механизация процесса проецирования.

2. Использование единой системы уравнений, в случаях изучения сложного проецирования и проецирования с учетом дополнительных условий и комплексных чертежей, позволяет обойтись без всяких промежуточных вычислений и оптимально использовать все имеющиеся возможности проведения вычислительных работ при изучении свойств рассматриваемой проекции.

3. Различные виды обобщенного проецирования легко приспосабливаются к весьма различным поверхностям и дают возможность пользоваться вырожденными проекциями последних.

4. Получаются формулы, устанавливающие связь между числами уравнений и переменных в системах уравнений проецирования и комплексных чертежей. Это имеет значение как при выборе аппарата проецирования, в смысле содержания в нем параметров, так и при проверке правильности составленных систем. На этих формулах базируется рассматриваемое проецирование с учетом дополнительных условий.

5. Проецирования с учетом дополнительных условий имеет целью приспособить обобщенное проецирование к методам начертательной геометрии, базирующимся на подсчете параметров и находящим все большее и большее применение при решении задач прикладной геометрии поверхностей. Так проецирование и составление комплексных чертежей с учетом дополнительных условий могут найти применение при изготовлении плоских моделей поверхностей, только что подлежащих конструированию и соответствующих известным предъявленным требованиям.

6. Учет дополнительных условий при проецировании позволяет упростить проекции некоторых рассматриваемых линий, или линий связи комплексного чертежа и облегчает этим графическую работу при применении проецирования.

7. Учет дополнительных условий при проецировании способствует решению обратных задач проецирования.

Литература

1. Руубель А., Комплексные чертежи криволинейных проекций. Тарту, 1961.
2. Руубель А., Комплексные чертежи вторичных проекций. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 108—117.
3. Руубель А., Обобщенная аксонометрия. Тарту, 1967.

Поступило
21 VII 1969

ÜLDISTATUD PROJEKTEERIMISE ALGEBRALISEST UURIMISEST LISATINGIMUSI ARVESTADES

A. Ruubel

Resümee

Vaadeldakse üldistatud projekteerimisele ja üldistatud projektsioonidest koosnevatele kompleksjoonistele vastavaid võrrandisüsteeme. Toodud valemi alusel määratakse vabade parameetrite arv projekteerimisaparaadis ja täiendatakse selle arvel võrrandisüsteemi sissetoodavate lisatingimustega projekteerijate, mõningate joonte projektsioonide või kompleksjooniste sidejoonte kohta.

ÜBER DIE ALGEBRALISCHE UNTERSUCHUNG DES VERALLGEMEINERTEN PROJIZIERENS MIT NEBENBEDINGUNGEN

A. Ruubel

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel werden Gleichungssysteme des verallgemeinerten Projizierens und entsprechender Zweibildersysteme betrachtet. Es wird die Zahl freier Parameter festgestellt und diese Freiheit zur Aufstellung ergänzender Nebenbedingungen, die auch in das Gleichungssystem des Projizierens mitgenommen werden, ausgenützt.

О ПРИМАРНЫХ ИДЕАЛАХ В КОЛЬЦЕ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ВЕСОМ

С. Гейсберг и В. Конюховский

Ленинградский педагогический институт им. А. И. Герцена

В работе [4] описаны некоторые непустые замкнутые подпространства в коммутативном нормированном кольце $L_\alpha(-\infty, \infty)$ функций, интегрируемых с весом на вещественной оси с нормой

$$\|f\|_L = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, e^{\alpha(x)}\, dx < \infty$$

и с умножением — сверткой,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt.$$

При этом предполагалось, что функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условиям:

1° $1 \leqslant \alpha(x) = o(|x|)$ при $|x| \to \infty$,

2° $0 \leqslant \alpha(x_1 + x_2) \leqslant \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$ при $-\infty < x_1,\ x_2 < \infty$,

3° $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{1+x^2}\, dx = \infty$,

4° $\alpha(-x) = \alpha(x)$ при $0 \leqslant x < \infty$.

Из результатов работы [2] следует, что подпространства, описанные в [4], являются примарными идеалами кольца $L_\alpha(-\infty, \infty)$, если

5° $\dfrac{x\alpha'(x)}{\alpha(x)}$ не убывает при $x \to +\infty$.

В настоящей заметке рассматривается кольцо $L_\alpha(-\infty, \infty)$, соответствующее более широкому классу весовых функций, а именно, функция $\alpha(x)$ вместо условий 4° и 5° должна удовлетворять условиям:

4°a $0 < \lambda_1 \leqslant \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(-x)} \leqslant \lambda_2 < \infty$, 5°a $$\frac{\alpha''(\pm x)}{|\alpha'(\pm x)| - \frac{\alpha(\pm x)}{x}} \leqslant \frac{d}{dx}[\ln(\alpha(x)+\alpha(-x))] \quad \text{при} \quad x \geqslant$$

$\geqslant x_0 > 0$,

и устанавливается существование в этом кольце примарных идеалов, аналогичных описанным в [2, 4].

Введем функцию $\xi(x)$ — обратную функции

$$\eta(x) = \frac{1}{\pi}\int_1^x \frac{\alpha(t)+\alpha(-t)}{t^2}\,dt \quad \text{при} \quad x \geqslant 1. \tag{1}$$

Через $I^+_{\gamma,A}$ обозначим множество функций $f(x) \in L_\alpha(-\infty, \infty)$, для которых

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln|\tilde{f}(x)|}{\xi(x-A)} \leqslant -\gamma < 0, \tag{2}$$

где

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,dt$$

— преобразование Фурье функции $f(x)$.

Будут доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для любых A и $\gamma > 0$ множество $I^+_{\gamma,A}$ содержит функцию, преобразование Фурье которой не обращается в нуль при $-\infty < x < \infty$.*

Теорема 2. *Для любых A и $\gamma > 0$ существует такая функция $g(x)$, что*

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{-\infty<x<\infty} |g(x)|\,e^{-\alpha(x)} < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx = 0, \tag{A}$$

для всех $f(x) \in I^+_{\gamma,A}$.

Замечание. При доказательстве теоремы 2 условия 4°а и 5°а не используются.

При рассмотрении колец L_α с не четным весом возникают трудности при доказательстве теоремы 1, играющей существенную роль в изучении полноты сдвигов функций в L_α. Поэтому мы приводим подробное доказательство этой теоремы.

Обозначим через $\bar{I}^+_{\gamma,A}$ замыкание множества $I^+_{\gamma,A}$. Очевидно, $\bar{I}^+_{\gamma,A}$ является замкнутым идеалом в $L_\alpha(-\infty, \infty)$. Из теоремы 2 вытекает, что $\bar{I}^+_{\gamma,A}$ не совпадает с $L_\alpha(-\infty, \infty)$. Используя теорему 1 и описание максимальных идеалов кольца $L_\alpha(-\infty, \infty)$, данное в [3], получаем, что $\bar{I}^+_{\gamma,A}$ является примарным идеалом. Таким образом, кольцо $L_\alpha(-\infty, \infty)$ содержит замкнутые примарные идеалы вида $\bar{I}^+_{\gamma,A}$.

Доказательство теоремы 1. А. Пусть S — область в комплексной плоскости $w = u + iv$ такая, что $-V^-(u) < v < V^+(u)$, $-\infty < u < \infty$,

$$V^+(u) = \begin{cases} \dfrac{\alpha[\xi(u)]}{\xi(u)} & \text{при} \quad u \geqslant 0, \\ \alpha(1) & \text{при} \quad u < 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$V^-(u) = \begin{cases} \dfrac{\alpha[-\xi(u)]}{\xi(u)} & \text{при} \quad u \geqslant 0, \\ \alpha(-1) & \text{при} \quad u < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через Γ^+ и Γ^- соответственно верхнюю и нижнюю границы полосы S.

Исследуем поведение функции $V^+(u)$ при $u > 0$. В силу условий 1° и 3° имеем $\lim\limits_{u\to\infty} V^+(u) = 0$. Далее,

$$\frac{dV^+(u)}{du} = -\frac{\alpha[\xi(u)]\xi'(u)}{\xi^2(u)}\left[1 - \frac{\xi(u)\alpha'[\xi(u)]}{\alpha[\xi(u)]}\right].$$

Из определения функции $\xi(u)$ и (1) следует, что

$$\xi'(u) = \pi \frac{\xi^2(u)}{\alpha[\xi(u)] + \alpha[-\xi(u)]}. \tag{5}$$

Тогда

$$\frac{dV^+(u)}{du} = \pi \frac{\xi(u)\alpha'[\xi(u)] - \alpha[\xi(u)])}{\alpha[\xi(u)] + \alpha[-\xi(u)]}.$$

Дифференцируя это выражение, убеждаемся, что условие 5°а обеспечивает выполнение неравенства

$$\frac{d^2V^+(u)}{du^2} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad u \geqslant u_0 = \eta(x_0).$$

При этом $\quad \lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{dV^+(u)}{du} = 0, \qquad$ поскольку $V^+(u) > 0$.

Аналогичные утверждения справедливы и для функции $V^-(u)$ при $u \to \infty$.

Б. Пусть $F(w) = \Phi(w) + i\Psi(w)$ — функция, осуществляющая конформное отображение области S на полосу $|\psi| < \pi/2$ в плоскости $f = \varphi + i\psi$; k — некоторая постоянная, которая будет выбрана ниже. Тогда функция

$$\tilde{f}_1(w) = \exp\{-\gamma k \exp[F(w)] - w^2\} \tag{6}$$

голоморфна в S, не имеет нулей и непрерывна вплоть до границы S.

Область S удовлетворяет условиям теоремы X в [1] и, следовательно, для функции $F(w)$ справедлива асимптотическая формула

$$F(w) = C + \pi \int_0^u \frac{1 + {}'\eta'^2(t)}{\vartheta(t)} dt + i\pi \frac{v - {}'\eta(u)}{\vartheta(u)} + o(1)$$

при $u \to \infty$, равномерно по $w = u + iv \in S$, где обозначено

$$\vartheta(u) = V^+(u) + V^-(u), \quad {}'\eta(u) = \frac{1}{2}[V^+(u) - V^-(u)],$$

а C — вещественная постоянная, определяющая нормировку отображения. Выберем постоянную C так, чтобы выполнялось соотношение

$$\Phi(w) \geqslant \pi \int_0^u \frac{dt}{\vartheta(t)},$$

равномерно по $w \in S$, что всегда возможно.

Из (3), (4) и (5) вытекает, что

$$\vartheta(u) = \pi \frac{\xi(u)}{\xi'(u)} \quad \text{при} \quad u > 0,$$

и, стало быть,

$$\Phi(w) \geqslant \int_0^u \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} dt = \ln \xi(u) \quad \text{при} \quad w \in S,$$

так как из (1) видно, что $\xi(0) = 1$. Отсюда имеем

$$|\tilde{f}_1(u)| \leqslant \exp\{-\gamma k e^{\Phi(u)} \cos \Psi(u)\} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-\gamma k \xi(u) \cos\left[\pi \frac{{}'\eta(u)}{\vartheta(u)} + o(1)\right]\right\}.$$

Простые вычисления показывают, что

$$\pi \frac{{}'\eta(u)}{\vartheta(u)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot \alpha[\xi(u)]}{\alpha[\xi(u)] + \alpha[-\xi(u)]} \quad \text{при} \quad u > 0.$$

Принимая во внимание условие 4°а, можем утверждать, что при достаточно большом k

$$k\gamma \cos \Psi(u) \geqslant \max\{1, \gamma\} \quad \text{при} \quad 0 < u < \infty. \tag{7}$$

Выберем k так, чтобы выполнялось (7). Тогда окончательно имеем

$$|\tilde{f}_1(u)| \leqslant \exp[-\gamma \xi(u)] \quad \text{при} \quad 0 < u < \infty, \tag{8}$$

т. е. функция $f_1(x)$ удовлетворяет условию (2) при $A = 0$.

В. Рассмотрим преобразование Фурье функции $f_1(x)$, определенной в (6):

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(u) e^{ixu} du. \tag{9}$$

Как видно из (6) этот интеграл абсолютно сходится при $-\infty < x < \infty$. Оценим $|f_1(x)|$ при $x \to +\infty$. Для этого разобьем интеграл на две части

$$\sqrt{2\pi} f_1(x) = \int_{-\infty}^{u_1} \tilde{f}_1(u) e^{ixu} du + \int_{u_1}^{\infty} \tilde{f}_1(u) e^{ixu} du,$$

и, пользуясь голоморфностью в S функции $\tilde{f}_1(w) e^{ixw}$, перенесем путь интегрирования в первом интеграле на границу Γ^+ области S. Такая деформация пути интегрирования допустима, поскольку $\lim\limits_{u \to -\infty} |\tilde{f}^1(w) e^{ixw}| = 0$, равномерно по $v, u + iv \in S$, а ширина полосы S ограничена. При этом получаем

$$\sqrt{2\pi} f_1(x) = \int\limits_{\Gamma^+(u<u_1)} \tilde{f}_1(w) e^{ix(u+iV^+(u))} dw +$$

$$+ \int_{V^+(u_1)}^{0} \tilde{f}_1(u_1 + iv) e^{ix(u_1+iv)} dv + \int_{u_1}^{\infty} \tilde{f}_1(u) e^{ixu} du.$$

Как было показано в части А функция $V^+(u)$ при достаточно больших u монотонно убывает. Функция $\xi(u)$ монотонно возрастает при $u \to \infty$. Поэтому, с учетом (8), можем написать

$$\sqrt{2\pi} |f_1(x)| \leqslant e^{-xV^+(u_1)} \int\limits_{\Gamma^+(u<u_1)} e^{-\operatorname{Re} w^2} |dw| + I(x) +$$

$$+ \exp\{-k\gamma\xi(u_1) \cos \Psi(u_1)\} \int_{u_1}^{\infty} e^{-u^2} du$$

где

$$I(x) = \int_{0}^{V^+(u_1)} |\tilde{f}_1(u_1 + iv)| e^{-xv} dv.$$

При $u < 0$ имеем $dw = du$; при $u \geqslant u_0 = \eta(x_0)$ имеем $|dw| = O(1) du$. Следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma^+(u<u_1)} e^{-\operatorname{Re} w^2} |dw| = O(1) \quad \text{при} \quad u_1 \to \infty.$$

Полагая $u_1 = u_1(x) = \eta(x)$, где x достаточно велико, имеем

$$xV^+(u_1) = x \frac{a[\xi(\eta(x))]}{\xi[\eta(x)]} = a(x),$$

а, принимая во внимание (7) и свойство 1°, получим

$$k\gamma\xi(u_1) \cos \Psi(u_1) \geqslant \xi[\eta(x)] = x > a(x).$$

Таким образом,

$$\sqrt{2\pi}\,|f_1(x)| \leqslant O(1)\,e^{-\alpha(x)} + I(x).$$

Для того, чтобы оценить $I(x)$ заметим, что

$$e^{-xv}|\tilde{f}_1(u_1+iv)| \leqslant \exp\{-xv - k\gamma\xi(u_1)\cos\Psi(u_1+iv)\} =$$
$$= \exp\{-x[v + k\gamma\cos\Psi(u_1+iv)]\}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} V^+(u) = 0$, то начиная с некоторого $\bar{u}_1$ будет выполняться: $V^+(u) \leqslant 1/\sqrt{2}$ при $u > \bar{u}_1$. Пусть $V(u)$ — прообраз прямой $\psi = \pi/4$, при отображении $F(w)$. Тогда, если $0 \leqslant v \leqslant V(u)$, то

$$k\gamma\cos\Psi(u_1+iv) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant V^+(u_1). \tag{10}$$

Если же $V(u_1) \leqslant v \leqslant V^+(u_1)$, то $k\gamma\sin\Psi(u_1+iv) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, и, стало быть,

$$\frac{\partial}{\partial v}[v+k\gamma\cos\Psi(u_1+iv)] = 1 - k\gamma\sin\Psi(u_1+iv)\,\frac{\partial\Psi(u_1+iv)}{\partial v} \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\partial\Psi(u_1+iv)}{\partial v} \quad \text{при} \quad \overline{V}(u_1) \leqslant v \leqslant V^+(u_1) \tag{11}$$

Как известно,

$$\frac{\partial\Psi(w)}{\partial v} = \mathrm{Re}[F'(w)] = |F'(w)|\cos[\arg F'(w)].$$

В А было показано, что

1. $\lim\limits_{u\to\pm\infty}\dfrac{dV^+(u)}{du} = \lim\limits_{u\to\pm\infty}\dfrac{dV^-(u)}{du} = 0.$

2. $\dfrac{d^2V^+(u)}{du^2} \geqslant 0, \quad \dfrac{d^2V^-(u)}{du^2} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad u \geqslant u_0.$

Кроме того, $\lim\limits_{u\to\infty}\vartheta(u) = 0$. Можно показать, что при этих условиях $\lim\limits_{u\to\infty}|F'(w)| = \infty$ равномерно в полосе S (см. [5]). Из теоремы II в [1] следует, что $\arg F'(w) \to 0$ при $u\to\infty$ равномерно по v, $u+iv \in S$.

Возвращаясь к (11), при достаточно больших u_1 будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial v}[v + k\gamma\cos\Psi(u_1+iv)] \leqslant 0 \quad \text{для} \quad \overline{V}(u_2) \leqslant v \leqslant V^+(u_1),$$

т. е. $v + k\gamma\cos\Psi(u_1+iv) \geqslant V^+(u_1)$ при $\overline{V}(u_1) \leqslant v \leqslant V^+(u_1)$, (12) Из (10) и (12) вытекает, что

$$e^{-xv}|\tilde{f}_1(u_1+iv)| \leqslant \exp[-xV^+(u_1)] = e^{-\alpha(x)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant v \leqslant V^+(u_1).$$

и, следовательно,

$$I(x) \leqslant e^{-\alpha(x)}V^+(u_1(x)) = o(1)e^{-\alpha(x)}.$$

Суммируя полученные оценки, окончательно имеем

$$|f_1(x)| \leqslant O(1)e^{-\alpha(x)}, \quad \text{где} \quad x>0, \quad x\to\infty. \tag{13}$$

Аналогично, при отрицательных x можем получить

$$|f_1(x)| \leqslant O(1)e^{-\alpha(x)}, \quad \text{где} \quad x<0, \quad x\to-\infty. \tag{14}$$

Г. Функция $\alpha_1(x)=\alpha(x)+\ln(1+x^2)$ удовлетворяет условиям $1^\circ \div 5^\circ$ а. Из (13) и (14) следует, что существует функция $f_1(x)\in L_\alpha$, преобразование Фурье которой не имеет нулей на действительной оси и удовлетворяет условию (2) с функцией $\xi_1(x)$, обратной функции

$$\eta_1(x)=\eta(x)+\frac{2}{\pi}\int\limits_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,dt=\eta(x)+O(1) \quad \text{при} \quad x\to\infty.$$

Но тогда $f_1(x)$ удовлетворяет условию (2) при некотором A_1 и, стало быть, функция $f(x)=e^{ix(A-A_1)}f_1(x)$ является искомой.

Теорема доказана.

Основную роль при доказательстве теоремы 2 играет

Лемма 1. *Для любой функции $\alpha(x)$, удовлетворяющей условиям 1°, 2° и 3°, существует функция $\Phi(z)$ — голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$, непрерывная при $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ и удовлетворяющая оценкам:*

1. $|\Phi(iy)|=e^{\alpha(y)}$ *при* $-\infty<y<\infty$, (15)

2. $\ln|\Phi(x)| = -\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int\limits_1^x \frac{\alpha(t)+\alpha(-t)}{t^2}\,dt+O(x)$ *при* $x>0$. (16)

3. $\ln|\Phi(x+iy)| \leqslant Cxy+O(|z|\ln(1+|z|))$, *при* $x>0$, (17)

где

$$C=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{t\alpha(t)}{(t+t^2)^2}\,dt. \tag{18}$$

Доказательство. 1. Положим $\ln\Phi(z)=(1-z^2)F(z)$, где

$$\operatorname{Re}F(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha(t)}{1+t^2}\cdot\frac{x}{(y-t)^2+x^2}\,dt.$$

Функция $\frac{a(x)}{1+x^2}$ ограничена при $-\infty < x < \infty$, поэтому $\operatorname{Re} F(z)$ представляет собой функцию, гармоническую в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и имеющую граничные значения $\operatorname{Re} F(iy) = \frac{a(y)}{1+y^2}$. Отсюда следует утверждение (15). Действительно,

$$\ln|\Phi(iy)| = (1+y^2)\operatorname{Re} F(iy) = a(y).$$

2. Оценим $\ln|\Phi(x)|$ при $x > 0$:

$$\ln|\Phi(x)| = (1-x^2)\operatorname{Re} F(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(1-x^2)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t)}{(1+t^2)} \cdot \frac{x}{(t^2+x^2)}\, dt =$$

$$= -\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t)}{(1+t^2)} \cdot \frac{x^2}{(t^2+x^2)}\, dt + O(1).$$

Введем обозначение $a_0(x) = \frac{1}{2}[a(x) + a(-x)]$. Тогда

$$\ln|\Phi(x)| = -\frac{2x}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{a_0(t)}{(1+t^2)} \cdot \frac{x^2}{(t^2+x^2)}\, dt + O(1).$$

Поскольку

$$\left|\int_{x}^{\infty} \frac{a_0(t)}{(1+t^2)} \cdot \frac{x^2}{(t^2+x^2)}\, dt\right| < \infty \qquad \text{при} \quad x > 0,$$

$$\left|\int_{0}^{x} \frac{a_0(t)}{(1+t^2)} \cdot \frac{t^2}{(t^2+x^2)}\, dt\right| = O(1) \qquad \text{при} \quad x \to \infty,$$

то окончательно имеем

$$\ln|\Phi(x)| = -\frac{2x}{\pi}\int_{0}^{x} \frac{a_0(t)}{1+t^2}\, dt + O(x),$$

что эквивалентно (16).

3. Очевидно, $\operatorname{Re} F(z) \geqslant 0$ при $x > 0$. Поэтому

$$\ln|\Phi(z)| \leqslant (1+y^2)\operatorname{Re} F(z) + 2xy \operatorname{Im} F(z).$$

Если $|y| \leqslant 2$, то оценка (17) следует из ограниченности функции $F(z)$ при $x > 0$. Считая, что $|y| > 2$, получим

$$(1+y^2)\operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{\pi}(1+y^2)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(t)}{(1+t^2)} \cdot \frac{x}{(y-t)^2+x^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2y^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t}{(1+t^2)} \cdot \frac{x}{(|y|-t)^2+x^2}\, dt =$$

$$= \frac{2y^2}{\pi} \left\{ \int_0^1 + \int_1^{|y|-1} + \int_{|y|-1}^{|y|+1} + \int_{|y|+1}^\infty \right\} \frac{xt}{(1+t^2)\left[(|y|-t)^2+x^2\right]}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2y^2}{\pi} \left\{ \frac{x}{(|y|-1)^2+x^2} + \frac{1}{y} \ln\left[(|y|+1)(|y|-1)^2\right] + \frac{2}{x(|y|-1)} \right\} =$$

$$= O[|z| \ln(1+|z|)].$$

Функция $\operatorname{Im} F(z)$ может быть восстановлена по граничному значению функции $\operatorname{Re} F(z)$ с помощью ядра, сопряженного ядру Пуассона для полуплоскости. Тогда

$$2xy \operatorname{Im} F(z) = -\frac{2xy}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha(t)}{1+t^2} \left[\frac{t}{1+t^2} + \frac{y-t}{(y-t)^2+x^2} \right] dt.$$

Аналогично предыдущему может быть получена оценка

$$\left| xy \int_{-\infty}^\infty \frac{\alpha(t)}{(1+t^2)} \cdot \frac{y-t}{(y-t)^2+x^2}\, dt \right| = O[|z| \ln(1+|z|)],$$

после чего приходим к (17). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Следуем методу, примененному в теореме 4 работы [2]. Пусть $f(x) \in I^+_{\gamma,A}$ и

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-t)^2} f(t)\, dt.$$

Из леммы 2 из [2] следует, что при $x \geqslant 0$

$$|f_1(iz)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_1(t) e^{-zt}\, dt \right| =$$

$$= O(1) \exp\left[\frac{x}{\pi} \int_1^x \frac{\alpha(t)+\alpha(-t)}{t^2}\, dt + O(x) \right].$$

Построим функцию

$$Q(z) = \Phi(z) f_1(-iz) \exp\left(-C_1 z + iC \frac{z^2}{2}\right),$$

где постоянная C определена формулой (18), а $C_1 > 0$ — некоторая достаточно большая постоянная.

Так же как в теореме 4 статьи [2] доказывается, что функция $Q(z)$ голоморфна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывна при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Как следует из [2], этого достаточно для завершения доказательства.

Замечание. Теоремы 1 и 2 справедливы и для множеств $I^{-}_{\gamma,A}$ функций $f(x) \in L_\alpha(-\infty, \infty)$, для которых

$$\varlimsup_{x \to -\infty} \frac{\ln|\tilde{f}(x)|}{\xi(|x|-A)} \leqslant -\gamma < 0.$$

Литература

1. Варшавский С. Е., О конформном отображении бесконечных полос. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1958, **2**, № 4, 66—116.
2. Гейсберг С. П., Полнота сдвигов функций в некоторых пространствах. Докл. АН СССР, 1967, **173**, № 4, 741—744.
3. Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца. Москва, 1960.
4. Коренблюм Б. И., Теоремы типа Фрагмена—Линделефа для квазианалитических функций. В сб. «Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексн. переменного», Москва, 1961, 510—514.
5. Конюховский В. С., Об оценке искажения вблизи границы при конформном отображении бесконечных полос. Матем. заметки, 1968, **4**, 723—728.

Поступило
15 XII 1968

PRIMAARSETEST IDEAALIDEST KAALUGA INTEGREERUVATE FUNKTSIOONIDE RINGIS

S. Geisberg ja V. Koniukhovski

Resümee

Artiklis vaadeldakse mõningaid primaarseid ideaale kaaluga integreeruvate funktsioonide ringis L_α $(-\infty, \infty)$. On antud piisav tingimus funktsiooni kuuluvuseks primaarsesse ideaali ja tõestatud, et seda tingimust rahuldavate funktsioonide hulk ei ole tühi.

ON PRIMARY IDEALS IN RING OF WEIGHT INTEGRABLE FUNCTIONS

S. Geisberg and V. Koniukhovski

Summary

This article concerns the commutative Banach algebra L_α $(-\infty, \infty)$ of measurable functions $f(x)$ with norm $\|f\|_L$ and multiplication defined as convolution $(f * g)$. It is supposed that the weighting function $\alpha(x)$ satisfies the conditions: 1°, 2°, 3°, 4° a and 5° a. The symbol $I^{+}_{\gamma,A}$ denotes the multitude

of functions $f(x) \in L_\alpha(-\infty, \infty)$ such that (2) is satisfied, where $\tilde{f}(x)$ is the Fourier transform of the function $f(x)$ and $\xi[\eta(x)] = x$, if $\eta(x)$ is the function (1). The following theorems are proved:

Theorem 1. *For each A and $\gamma > 0$ the multitude $I^+_{\gamma, A}$ consists of a function whose Fourier transform does not vanish for $-\infty < x < \infty$.*

Theorem 2. *For each A and $\gamma > 0$ there is such a function $g(x)$ that* (A) *holds for any $f(x) \in I^+_{\gamma, A}$.*

From these theorems, it follows that algebra $L_\alpha(-\infty, \infty)$ consists of closed primary ideals.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНУЛЕВЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ II

Э. Юримяэ

Кафедра математического анализа

Целью настоящей заметки является исправление некоторых неточностей и уточнение одного результата в работе автора [1]. В этой работе формулировка теоремы 1 не учитывает все условия, необходимые для доказательства. В случае корегулярного метода $A = (a_{nk})$ из доказательства вытекает существенное условие

$$\varrho(A) \cdot \lim_{n\to\infty} \omega_n = 0.$$

Здесь $\varrho(A) = a - \sum_k a_k$, где $a = \lim_{n\to\infty} \sum a_{nk}$ и $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{nk}$. Таким образом вышеупомянутая теорема оказывается верной в следующей формулировке.

Теорема 1. *Реверсивный метод суммирования $A = (a_{nk})$, сохраняющий сходимость, является совершенным тогда и только тогда, когда система*

$$\begin{aligned} &\sum_n \omega_n \overline{\triangle}_n a_{nk} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots) \\ &\varrho(A) \cdot \lim_{n\to\infty} \omega_n = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

имеет в пространстве абсолютно сходящихся последовательностей только тривиальное решение $\omega_n = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Нахождение такого рода условия было обусловлено желанием получить единое условие совершенности как для корегулярных, так и для конулевых методов суммирования. Учитывая, что последовательность $e = \{1, 1, \ldots, 1, \ldots\}$ является точкой прикосновения множества c_0 в поле конулевого метода суммирования A^*, можно формулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Реверсивный конулевой метод A является совершенным тогда и только тогда, когда система*

$$a_k \tau + \sum_n a_{nk} \tau_n = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

имеет только тривиальное решение в пространстве l.

Учитывая эту теорему и доказательство теоремы Мазура—Банаха (см. [3]), можно получить следующую теорему.

Теорема 3. *Реверсивный метод суммирования $A=(a_{nk})$, сохраняющий сходимость, является совершенным тогда и только тогда, когда система*

$$\begin{aligned} a_k\tau + \sum_n a_{nk}\tau_n &= 0 \quad (k=0,1,\ldots) \\ \varrho(A)\tau &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

имеет только тривиальное решение $\{\tau, \tau_0, \tau_1, \ldots\}$ в пространстве l.

На основе вышесказанного надо сделать поправку и в определении методов типа P. Под *методами типа P* надо понимать такие методы суммирования A, сохраняющие сходимость, для которых система (1) имеет только тривиальное решение в пространстве абсолютно сходящихся последовательностей или система (2) имеет только тривиальное решение в пространстве абсолютно сходящихся рядов l.

При таком определении методов типа P оказывается верным теорема 9 в [1].

Применение теории F-пространств при изучении множества $m \cap A^*$, как это сделано в [1], оправдано тогда, когда O-совершенность понимается так, что все ограниченные A-суммируемые последовательности принадлежат множеству совершенства метода A. (Множеством совершенства метода A, сохраняющего сходимость, называется множество $\bar{c}$ в A^*.) Этот момент был и основой исследований в [1]. К сожалению, в определение O-совершенности попали три лишных слова, изменяющие понятие O-совершенности в более общее понятие. Определение O-совершенности надо читать следующим образом: метод A называется *O-совершенным*, если для любого метода B, для которого $A^* \subset B^*$, условие

$$B\{x\} = A\{x\} \quad \text{для} \quad x \in c$$

влечет за собой

$$B\{x\} = A\{x\} \quad \text{для всех} \quad x \in m \cap A^*.$$

В [2] показано, что при конулевых методах условие $A^* \subset B^*$ не заменимо условием $m \cap A^* \subset m \cap B^*$, как это можно при корегулярных методах суммирования.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свое признание проф. Г. Кангро и авторам статьи [2] за указание неточностей в работе [1].

Литература

1. Юримяэ Э., Топологические свойства конулевых методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 43—61.

2. Chang, S. C., Macphail, M. S., Snyder, A. K., Wilansky, A., Consistency and replaceability for conull matrices. Math. Z., 1968, 105, 208—212.
3. Macphail, M. S., On some recent developments in the theory of series. Canad. J. Math., 1954, 6, 405—409.

Поступило
28 VI 1968

KONULLMENETLUSTE TOPOLOOGILISED OMADUSED II

E. Jürimäe

Resümee

Käesolevas töös parandatakse viga, mis esineb töös [1] ning antakse üks uus tingimus (teoreem 3) pööratava koonduvust säilitava menetluse perfektsuseks.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF THE CO-NULL METHODS OF SUMMABILITY II

E. Jürimäe

Summary

It is the purpose of this note to correct a mistake in [1] and to give two conditions of the perfectness for the reversible matrices.

The formulation of the theorem 1 and the definition of the P-matrix are false in [1]. The formulation of the above-mentioned theorem must be the following.

Theorem 1. *The reversible conservative matrix $A=(a_{nk})$ is perfect if and only if for any sequence $\{\omega_n\}$*

$$\text{(P)}\quad \left.\begin{aligned} &\sum_n |\omega_n-\omega_{n-1}|<\infty \\ &\sum_n \omega_n(a_{nk}-a_{n-1,k})=0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots). \\ &\varrho(A)\cdot\lim_{n\to\infty}\omega_n=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\textit{imply } \omega_n=0 \\ &(n=0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned}$$

The next theorem gives another condition for the perfectness.

Theorem 3. *The reversible conservative matrix $A=(a_{nk})$ is perfect if and only if for any sequence $\{\tau_n\}$*

$$\text{(P}'\text{)}\quad \left.\begin{aligned} &\sum_n |\tau_n|<\infty \\ &\tau a_k+\sum_n \tau_n a_{nk}=0 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots). \\ &\tau\cdot\varrho(A)=0 \end{aligned}\right\} \textit{imply} \begin{cases} \tau=0 \\ \tau_n=0 \end{cases} \quad (n=0,\ 1,\ \ldots).$$

For the correctness of the theorem 9 in [1], it is necessary to define a *P-matrix* as a matrix $A=(a_{nk})$ with (P) or (P′).

ПРИМЕР РЯДА, ИМЕЮЩЕГО ДИСКРЕТНУЮ ОБЛАСТЬ СУММ

Э. Тийт

Кафедра вычислительной математики

Областью сумм S ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i = \sum r_i \tag{1}$$

называется множество сумм всех перестановок этого ряда. Известно, что в конечномерном пространстве область сумм всегда непрерывна [3], но для бесконечномерных пространств этого доказать не удалось [2]. В [1] автор доказал, что в бесконечномерных пространствах область сумм может иметь также форму «решетки», и дал соответствующие примеры, но без доказательства.

В настоящей заметке приводится пример ряда, имеющего дискретную область сумм, причем даются все нужные доказательства.

Определим ряд (1) в пространстве l_2 так, чтобы общей частью $S \cap (\lambda, 0, 0, \ldots)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ являлась решетка[1] $\{(n, 0, 0, \ldots), n \in T\}$. Для определения ряда (1) необходимо определить некоторые вспомогательные величины.

Определение 1. Величины $M^i{}_{nk}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n!\ n = 1, 2, \ldots)$ определяются следующим образом: $M^1{}_{11} = 1$; при $n > 1$, $i = 1, 2, \ldots (n-1)!$ положим

$$M^i{}_{nk} = -M^i{}_{n-1, p+1},$$

где

$$k = pn + s \quad (p = 0, 1, \ldots, (n-1)! - 1; \ s = 1, 2, \ldots, n); \tag{2}$$

если $n > 1$, то i $(i = (n-1)! + 1, \ldots, n!)$

выражается однозначно:

[1] В дальнейшем всегда T — множество целых чисел.

$$i=(n-1)!+p(n-1)+q \quad (q=1, \ldots, n-1);$$

тогда

$$M^i{}_{nk}=1 \qquad \text{при } s=1;$$

если $s=2, 3, \ldots, n$, то

$$M^i{}_{nk}=1 \qquad \text{при } q=1,2, \ldots, n-s,$$

$$M^i{}_{nk}=-(s-1) \qquad \text{при } q=n-s+1,$$

где величина s определяется по индексу k из формулы (2);

$$M^i{}_{nk}=0$$

для всех остальных комбинации индексов i, k и n. Значения величин $M^i{}_{nk}$ для $n=1, \ldots, 5$, $i=1, 2, \ldots, 28$ приведены в таблице 1.

Определение 2. Величины c_i определяются как решения системы уравнений

$$\sum_{i=(n-1)!+1}^{(n-1)!+k-1} c^2{}_i+(n-k)^2 c_{(n-1)!+k}=nn! \quad (k=1, \ldots, n-1). \qquad (3)$$

В явном виде величины c_i выражаются следующим образом:

$$c_1=1,$$

$$c^2{}_{(n-1)!+p(n-1)+k}=\frac{n^2 n!}{(n-1)(n-k+1)(n-k)}$$

$$(k=1, \ldots, n-1;\ p=0, 1, \ldots, (n-1)!-1;\ n=2, 3, \ldots).$$

Значения величин c_i для $i=1,2, \ldots, 28$ приведены в таблице 2.

Введем еще некоторые обозначения, нужные для определения ряда (1) и полезные нам в дальнейшем:

$$\begin{aligned} t!+(t+1)!+\ldots+s! &= K(t,s), \\ (2t-1)!+(2t+1)!+\ldots+(2s-1)! &= R(t,s), \\ (2t)!+(2t+2)!+\ldots+(2s)! &= Q(t,s), \\ \frac{(t+s)!}{t!} &= N(t,s). \end{aligned} \qquad (4)$$

По величинам, данным определениями 1 и 2 и соотношением (4) мы определим ряд (1).

Определение 3. Ряд (1) определяется следующим образом:

$$r_{K(1,n-1)+k}=a_{nk} \qquad (k=1, \ldots, n!;\ n=1, 2, \ldots), \qquad (5)$$

где

$$a_{nk}=(a^1{}_{nk}, a^2{}_{nk}, \ldots)$$

(см. таблицу 2),

$$a^i{}_{nk}=\frac{1}{n!}c^i M^i{}_{nk} \qquad (i=1, 2, \ldots, n!),$$

$$a^i{}_{nk}=0 \qquad (i=n!+1, \ldots).$$

Рассмотрим свойства этого ряда. Из определений 1—3 видно, что члены ряда (1) определены по группам $\{a_{nk};\ k=1,\ \dots,\ n!\}$ состоящим из $n!$ членов, притом каждому элементу a_{nk} соответствуют $n+1$ элементов $a_{n+1,x}$, $x=(n+1)(k-1)+1,\ \dots,\ \dots,\ (n+1)k$ из следующей группы. Из этого следует, что имеют место равенства

$$a_{nk}=(-1)^s\sum_{q=1}^{N(n,s)}a_{n+s,N(n,s)(k-1)+q}$$

$$(k=1,\ 2,\ \dots,\ n!,\ \ n,s=1,\ 2,\ \dots). \tag{7}$$

В таком случае мы скажем, что *группа элементов*

$$\{a_{n+s,q}:q=N(n,s)\cdot(k-1)+1,\ \dots,\ N(n,s)\cdot k\}=[a_{nk};s] \tag{8}$$

компенсирует элемент a_{nk}, если s нечетное.

Из соотношения (7) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n!}a_{nk}=\begin{cases}(0,\ 0,\ \dots), & \text{если } m \text{ четное},\\ (1,\ 0,\ 0,\ \dots), & \text{если } m \text{ нечетное}.\end{cases} \tag{9}$$

Действительно,

$$\sum_{n=1}^{2\mu}\sum_{k=1}^{n!}a_{nk}=\sum_{n=1}^{\mu}\left(\sum_{k=1}^{(2n-1)!}a_{2n-1,k}+\sum_{k=1}^{(2n)!}a_{2n,k}\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\mu}\sum_{k=1}^{(2n-1)}\left(a_{2n-1,k}+\sum_{q=1}^{2n}a_{2n,2n(k-1)+q}\right)=(0,\ 0,\ \dots);$$

$$\sum_{n=1}^{2\mu+1}\sum_{k=1}^{n!}a_{nk}=a_{11}+\sum_{n=1}^{\mu}\left(\sum_{k=1}^{(2n)!}a_{2n,k}+\sum_{k=1}^{(2n+1)!}a_{2n+1,k}\right)=$$

$$=(1,\ 0,\ 0,\ \dots)+(0,\ 0,\ \dots)=(1,\ 0,\ 0,\ \dots).$$

Применяя определение 3, мы получим отсюда:

$$\sum_{i=1}^{K(1,m)}r^0{}_i=\begin{cases}(1,\ 0,\ 0,\ \dots), & \text{если } m=2\mu-1,\\ (0,\ 0,\ \dots), & \text{если } m=2\mu\ \ (\mu=1,\ 2,\ \dots).\end{cases} \tag{10}$$

Значит, ряд (1) является расходящимся.

Введем еще некоторые обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} b&=(\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,),\\ b^s{}_q&=(0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ \beta_q,\ \beta_{q+1},\ \dots,\ \beta_s,\ 0,\ 0,\ \dots),\\ b_q&=(0,\ 0,\ \dots,\ \beta_q,\ \beta_{q+1},\ \dots),\\ b^s&=(\beta_1,\ \beta_2,\ \dots,\ \beta_s,\ 0,\ 0,\ \dots). \end{aligned} \tag{11}$$

Из определений 1—3 вытекает равенство

Таблица 1

Значения коэффициентов c_i и $M^i{}_{nk}$, $n = 1, \ldots, 5$; $i = 1, \ldots, 28$

			c_i	1	2	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	8	$\frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\frac{8\sqrt{6}}{3}$	8	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$	$\frac{5\sqrt{10}}{2}$	$5\sqrt{5}$	$5\sqrt{15}$
$k^{(j)}$	n	$\frac{1}{n!}$	k^{l}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1		1	+																											
2	2	$\frac{1}{2}$	1	−	−																										
3			2	−	−																										
4	3	$\frac{1}{6}$	1	+	−	+	+																								
5			2	+	−	+	−																								
6			3	+	−	−2																									
7			4	+	+			+	+																						
8			5	+	+			+	−																						
9			6	+	+			−2																							
10	4	$\frac{1}{24}$	1	−	+	−	−			+	+	+																			
11			2	−	+	−	−			+	+	−																			
12			3	−	+	−	−			+	−2																				
13			4	−	+	−	−			−3																					
14			5	−	+	−	+						+	+	+																
15			6	−	+	−	+						+	+	−																
16			7	−	+	−	+						+	−2																	
17			8	−	+	−	+						−3																		
18			9	−	+	2										+	+	+													
19			10	−	+	2										+	+	−													
20			11	−	+	2										+	−2														
21			12	−	+	2										−3															
22			13	−	−			−	−										+	+	+										
23			14	−	−			−	−										+	+	−										
24			15	−	−			−	−										+	−2											
25			16	−	−			−	−										−3												
26			17	−	−			−	+													+	+	+							
27			18	−	−			−	+													+	+	−							
28			19	−	−			−	+													+	−2								
29			20	−	−			−	+													−3									
30			21	−	−			2																	+	+	+				
31			22	−	−			2																	+	+	−				
32			23	−	−			2																	+	−2					
33			24	−	−			2																	−3						
34	5	$\frac{1}{120}$	1	+	−	+	+			−	−	−																+	+	+	+
35			2	+	−	+	+			−	−	−																+	+	+	−
36			3	+	−	+	+			−	−	−																+	+	−2	
37			4	+	−	+	+			−	−	−																+	−3		
38			5	+	−	+	+			−	−	−																−4			

Значения величин a^i_{nk}, полученных из таблицы 1

$(n-1)+k$	n	$\frac{1}{n!}$	C_i / k^i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
1	1	1	1	1000																											
2	2	$\frac{1}{2}$	1	-500	1000																										
3			2	-500	1000																										
4	3	$\frac{1}{6}$	1	167	-333	354	613																								
5			2	167	-333	354	-613																								
6			3	167	-333	-707																									
7			4	167	333			354	613																						
8			5	167	333			354	-613																						
9			6	167	333			-707																							
10	4	$\frac{1}{24}$	1	-42	83	-88	-153			136	193	333																			
11			2	-42	83	-88	-153			136	193	-333																			
12			3	-42	83	-88	-153			136	-386																				
13			4	-42	83	-88	-153			-408																					
14			5	-42	83	-88	153						136	193	333																
15			6	-42	83	-88	153						136	193	-333																
16			7	-42	83	-88	153						136	-386																	
17			8	-42	83	-88	153						-408																		
18			9	-42	83	177										136	193	333													
19			10	-42	83	177										136	193	-333													
20			11	-42	83	177										136	-386														
21			12	-42	-83	177										-408															
22			13	-42	-83			-88	-153										136	193	333										
23			14	-42	-83			-88	-153										136	193	-333										
24			15	-42	-83			-88	-153										136	-386											
25			16	-42	-83			-88	-153										-408												
26			17	-42	-83			-88	153													136	193	333							
27			18	-42	-83			-88	153													136	193	-333							
28			19	-42	-83			-88	153													136	-386								
29			20	-42	-83			-88	153													-408									
30			21	-42	-83			177																	136	193	333				
31			22	-42	-83			177																	136	193	-333				
32			23	-42	-83			177																	136	-386					
33			24	-42	-83			177																	-408						
34	5	$\frac{1}{120}$	1	8	-17	16	31			-27	-39	-67																51	66	93	161
35			2	8	-17	16	31			-27	-39	-67																51	66	93	-161
36			3	8	-17	16	31			-27	-39	-67																51	66	-186	
37			4	8	-17	16	31			-27	-39	-67																51	-198		
38			5	8	-17	16	31			-27	-39	-67																-204			

$$(-1)^s \frac{p}{N(n,s)} a_{nk} = \left[\sum_{j=1}^{p} a_{n+s,N(n,s)\cdot(k-1)+q_j} \right]^{n!}, \tag{12}$$

где $\{q_j;\ j = 1, 2, \ldots, p\}$ произвольное подмножество множества $\{1, \ldots, N(n,s)\}$ $(p = 1, 2, \ldots, N(n,s))$. Заметим, что равенство (12) сохраняется только для первых $n!$ компонентов рассматриваемых векторов, так как следующие компоненты у вектора a_{nk} все равняются нулю (см. определения 1—3), но у векторов $a_{n+p,q}$ не все компоненты $a^i{}_{n+p,q}$, $i > n!$, равны нулю. Другими словами, соотношение (12) выражает тот факт, что подгруппа элементов, состоящая из s элементов группы (9) (общее число элементов которой равняется $N(n,s)$) компенсирует $p/(N(n,s))$-тую часть вектора a_{nk}. Соотношение (12) называется *частичной компенсацией вектора* a_{nk}.

Для изучения области сумм ряда (1) мы должны рассмотреть некоторые перестановки ряда (1). Ряд

$$\sum r^0{}_i \tag{13}$$

определим так, что после каждого элемента $a_{2\mu-1,k}$ $(k = 1, 2, \ldots \ldots, (2\mu-1)!;\ \mu = 1, 2, \ldots)$ поставим следующую компенсирующую этот элемент группу

$$[a_{2\mu-1},\ k;\ 1] = \{a_{2\mu,x};\ x = 2\mu(k-1)+1, \ldots, 2\mu k\}.$$

Определение 4. Ряд (13) определяется следующим образом:

$$r^0{}_1 = a_{11};$$

если определены все члены ряда (13) до некоторого члена

$$r^0{}_\nu = a_{2p-1,k} \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

то следующими членами будут

$$\begin{aligned}
r^0{}_{\nu+i} &= a_{2p,2p(k-1)+i}, && i = 1, 2, \ldots, 2p;\\
r^0{}_{\nu+2p+1} &= a_{2p-1,k+1}, && \text{если}\quad k = 1, \ldots, (2p-1)!-1,\\
r^0{}_{\nu+2p+1} &= a_{2p+1,1}, && \text{если}\quad k = (2p-1)!
\end{aligned} \tag{14}$$

Теорема 1. *Точка* $(0, 0, 0, \ldots)$ *принадлежит области сумм ряда* (1).

Доказательство. Из определения 4 вытекает, что ряд (13) является предельной точкой для последовательности частных сумм ряда (1), так как на основании формулы (11) имеем

$$\sum_{i=1}^{K(1,2p)} r^0{}_i = \sum_{q=1}^{p} \sum_{k=1}^{(2q-1)!} \left(a_{2q-1,k} + \sum_{i=1}^{2q} a_{2q,2q(k-1)+i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{K(1,2p)} r_i = (0, 0, \ldots).$$

Остается еще доказать, что

$$\Big\| \sum_{i=1}^{K(1,2p)+x} r^0{}_i \Big\| \to 0 \tag{15}$$

для каждого x $(x = 0, 1, \ldots, K(2p+1, 2p+2) - 1)$, если $p \to \infty$.

Из конструкции (14) ряда (13) следует, что для этого достаточно доказать соотношение

$$\Big\| \sum_{i=N(1,2p)+1}^{N(1,2p)+x} r^0{}_i \Big\| \to 0.$$

Обозначим

$$x = (2p+3)\nu + \mu$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, (2p+1)! - 1; \ \mu = 0, 1, \ldots, 2p+2).$$

Тогда из (14) следует, что

$$\sum_{i=N(1,2p)+1}^{N(,1,2p)+x} r^0{}_i = \sum_{k=1}^{\nu} \left(a_{2p+1,k} + \sum_{i=1}^{2p+2}{}' a_{2p+2,(2p+2)(k-1)+i} \right) +$$

$$+ \gamma_0 \left(a_{2p+1,\nu+1} + \gamma_1 \sum_{i=1}^{\mu-1} a_{2p+2,(2p+2)\nu+i} \right),$$

где

$$\gamma_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = 0, \\ 1, & \text{если } \mu = 1, 2, \ldots, (2p+2); \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu = 1, \\ 1, & \text{если } \mu = 2, \ldots, (2p+2). \end{cases}$$

Но на основании равенства (8)

$$a_{2p+1,k} + \sum_{i=1}^{2p+2}{}' a_{2p+2,(2p+2)(k-1)+i} = (0, 0, \ldots).$$

Поэтому

$$\sum_{i=N(1,2p)+1}^{N(1,2p)+x} r^0{}_i = \gamma_0 \left(a_{2p+1,\nu+1} + \gamma_1 \sum_{i=1}^{\mu-1} a_{2p+2,(2p+2)\nu+i} \right).$$

Выразим квадрат нормы рассматриваемой суммы в форме суммы квадратов норм двух слагаемых, применяя обозначения (11). Имеем

$$\Big\| \gamma_0 \left(a_{2p+1,\nu+1} + \gamma_1 \sum_{i=1}^{\mu-1} a_{2p+2,(2p+2)\nu+i} \right) \Big\|^2 =$$

$$= \gamma^2{}_0 \left\| \left(a_{2p+1,\nu+1} + \gamma_1 \sum_{i=1}^{\mu-1} a_{2p+2(2p+2)\nu+i} \right)^{(2p+1)!} \right\|^2 +$$

$$+ \gamma^2{}_0 \gamma^2{}_1 \left\| \left(\sum_{i=1}^{\mu-1} a_{2p+2,(2p+2)\nu+i} \right)_{(2p+1)!+1} \right\|^2 .$$

Оценим первый член правой стороны равенства, применяя равенство (12) и формулу (3) в определении 2:

$$\gamma^2{}_0 \left\| \left(a_{2p+1,\nu+1} + \gamma_1 \sum_{i=1}^{\mu-1} a_{2p+2,(2p+2)\nu+i} \right)^{(2p+1)!} \right\|^2 =$$

$$= \gamma^2{}_0 \left\| \frac{2p+2-(\mu-1)}{2p+2} \cdot a_{2p+1,k} \right\|^2 \leqslant \left\| a_{2p+1,k} \right\|^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{(2p+1)!} \right]^2 \cdot \sum_{i=1}^{2p+1} i i! \to 0.$$

По определению 2 оценим и второй член:

$$\gamma^2{}_0 \gamma^2{}_1 \left\| \left(\sum_{i=1}^{\mu-1} a_{2p+2,(2p+2)\nu+i} \right)_{(2p+1)!+1} \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\mu-1) \left[\frac{1}{(2p+2)!} \right]^2 (2p+2)!\,(2p+2) \to 0.$$

Таким образом, соотношение (15), а тем и наша теорема доказаны.

Лемма 1. *Если точка* $(\delta, 0, 0, \ldots)$ *принадлежит области сумм ряда* (1), *то и каждая точка* $(\delta + t,\ 0,\ 0, \ldots)$, $t \in T$, *принадлежит этой области сумм.*

Доказательство. Пусть у нас имеется перестановка ряда (1)

$$\sum r^*{}_i = (\delta,\ 0,\ 0,\ \ldots). \tag{16}$$

Рассмотрим случай $t > 0$. Найдем такую перестановку ряда (16), чтобы имело место равенство

$$\sum r^{(t)}{}_i = (\delta + t,\ 0,\ 0,\ \ldots). \tag{17}$$

Начальные члены ряда (17) определим следующим образом:

$$r^{(t)}{}_1 = a_{11},$$
$$r^{(t)}{}_{R(1,s)+i} = a_{2s+1,i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ (2s+1)!,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ t-1).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{R(1,t)} r^{(t)}{}_i = (t,\ 0,\ 0,\ \ldots,). \tag{18}$$

Разобьем все члены ряда (16) на две группы:

$$r^*_i = a_{2\mu_i,\nu} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ (2\mu_i)!),$$

$$r^*_i = a_{2\mu_i-1,\nu}\ (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ (2\mu_i - 1)!),\ \text{где}\ \mu_i = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Члены первой группы обозначим через r'_{ij} и члены второй группы через r''_{ij}. Каждая частичная сумма ряда (16) будет выражаться в виде суммы

$$\sum_{i=1}^{N} r^*_i = \sum_{j=1}^{P(N)} r'_{ij} + \sum_{j=1}^{S(N)} r''_{ij},$$

где $P(N),\ S(N) \geqslant 0,\ P(N) + S(N) = N$.

Построим ряд

$$\sum {}'r_i \tag{19}$$

следующим образом. Вместо каждого члена $r''_{ik} = a_{2\mu-1,\nu}$ из (16) поставим компенсирующую его группу $[a_{2\mu-1,\nu};\ 2t]$, количество членов которой по формуле (7) равно $N(2\mu - 1,\ 2\mu - 1 + 2t)$. Все остальные члены $r''_{ij} = a_{2\mu,\nu}$ ряда (16) оставим на их начальных местах относительно групп $[a_{2\mu-1,\nu};\ 2t]$, заменяющих члены $a_{2\mu-1,\nu}$.

Обозначим сумму членов всех компенсирующих групп до индекса N через $Z(N)$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{S(N)} N(2\mu_{i_j} - 1,\ 2\mu_{i_j} - 1 + 2t) = Z(N).$$

Таким образом, мы получим следующее равенство, вытекающее из определения ряда (19) и формулы (9):

$$\sum_{i=1}^{P(N)+Z(N)} {}'r_i = \sum_{i=1}^{P(N)+S(N)} r^*_i \qquad (N = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{20}$$

Аналогично соответствующему доказательству в теореме 1 нетрудно доказать и соотношение

$$\left\| \sum_{i=P(N)+Z(N)+1}^{P(N)+Z(N)+x} {}'r_i \right\| \to 0$$

для каждого $x = 0, 1,\ \ldots,\ Z(N+1) - Z(N)$, при $N \to \infty$. Значит, из равенства (20) следует

$$\sum {}'r_i = \sum r^*_i = (\delta,\ 0,\ 0,\ \ldots). \tag{21}$$

Теперь продолжим конструкцию ряда (17) следующим образом:

$$r^{(t)}{}_{R(1,t)+i} = {}'r_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ряд (17) является перестановкой ряда (1). На основании равенств (18), (20) и (21) получим:

$$\sum_{i=1}^{R(1,t)+M} r^{(t)}_i = (t,\ 0,\ 0,\ \ldots) + \sum_{i=1}^{M}{}' r_i \qquad (M = 1,\ 2,\ \ldots)$$

и

$$\sum r^{(t)}_i = (t,\ 0,\ 0,\ \ldots) + \sum{}' r_i = (t + \delta,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

Наша лемма доказана для случая $t > 0$.

Рассмотрим случай $t < 0$. Ряд (17) в этом случае определяется следующим образом:

$$r^{(t)}_1 = a_{21},$$
$$r^{(t)}_2 = a_{22},$$
$$r^{(t)}_{Q(1,s)+i} = a_{2s,i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ (2s)!,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ t).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{Q(1,t)} r^{(t)}_i = (t,\ 0,\ 0,\ \ldots).$$

Дальнейший ход конструкции полностью совпадает с соответствующей конструкцией для случая $t > 0$.

Так как случай $t = 0$ тривиальный, то наша лемма доказана.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает следующее

Следствие. *Области сумм ряда* (1) *принадлежит множество точек* $(t,\ 0,\ 0,\ \ldots)$, $t \in T$.

Лемма 2. *Пусть ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} r^*_i \tag{22}$$

является перестановкой ряда (1), *и*

$$S^*_N = \sum_{i=1}^{N} r^*_i = (d_1,\ d_2,\ \ldots), \tag{23}$$

где $0 \leqslant d_1 < 1$. *Тогда*

$$D = \|(0,\ d_2,\ d_3,\ \ldots)\|^2 \geqslant \frac{\delta}{2}, \tag{24}$$

где $\delta = \min(d_1,\ 1 - d_1)$.

Доказательство. Разделим доказательство на 2 части — А и В.

А. Пусть $d_1 \leqslant \frac{1}{2}$, т. е.

$$\delta = d_1. \tag{25}$$

Рассмотрим множество членов ряда (22), содержащееся в сумме (23), т. е. множество

$$\{r^*_1,\ \ldots,\ r^*_N\} = \{a_{n_1\nu_1},\ \ldots,\ a_{n_N\nu_N}\}.$$

Пусть $n = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Переставим члены суммы (23) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N} r^*{}_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} a_{i,k_{ij}},$$

где

$$\{k_{i1}, \ldots, k_{ip_i}\} \subset \{1, \ldots, i!\}.$$

При помощи формул компенсации (7) можно сумму (23) написать и в форме

$$\sum_{i=1}^{N} r^*{}_i = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{n-i} \sum_{j=1}^{p_i} \sum_{\nu=1}^{N(i,n)} a_{n, (k_{ij}-1)N(i,n)+\nu}. \tag{26}$$

Из формулы (23) и определений 1—3 вытекает, что существует такое натуральное число K, что

$$\delta = \frac{K}{n!},$$

и из (25) следует, что

$$K \leqslant \frac{1}{2} n!. \tag{27}$$

Из соотношения (26) вытекает и равенство

$$K = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \cdot N(i, n) \cdot p_i.$$

Рассмотрим группы

$$A_q = \{a_{n\nu} : \nu = (q-1)n + 1, \ldots, qn\} \qquad (q = 1, \ldots, (n-1)!)$$

членов ряда (1). Пусть в сумму (26) входит $\lambda^+{}_q$ членов группы A_q с коэффициентом $+1$ и $\lambda^-{}_q$ членов группы A_q с коэффициентом -1. Обозначив

$$\lambda^+{}_q - \lambda^-{}_q = k_q, \tag{28}$$

получим из формул (6) и (19) и из определений 1—3, что

$$\sum_{q=1}^{(n-1)!} k_q = K. \tag{29}$$

Рассмотрим все такие группы A_q, при которых

$$k_q \equiv s \pmod n, \qquad s = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пусть число таких групп будет μ_s для каждого s. Тогда

$$\sum_{s=0}^{n-1} \mu_s = (n-1)!,$$

а разность

$$K - \sum_{s=0}^{n-1} s \cdot \mu_s \tag{30}$$

делится на n. Обозначив величину (30) символом $n\mu_n$, получим

$$K = \sum_{s=1}^{n} s \cdot \mu_s. \tag{31}$$

Найдем оценку для величины

$$D_n = \|0, \ldots, 0, d_{(n-1)!+1}, \ldots, d_{n!}, 0, \ldots\|^2.$$

Для этого вычислим нормы сумм

$$\left(\sum_{\nu=(q-1)n+1}^{(q-1)n+k} a_{n\nu}\right)_{(n-1)!+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n;\ q = 1, 2, \ldots, (n-1)!).$$

Из определений 1—3 вытекает, что

$$\left\|\left(\sum_{\nu=(q-1)n+1}^{(q-1)n+k} a_{n\nu}\right)_{(n-1)!+1}\right\|^2 = \left\|\left(\sum_{\nu=1}^{k} a_{n\nu}\right)_{(n-1)!+1}\right\|^2$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ q = 1, 2, \ldots, (n-1)!).$$

По определению 1 величин $M^i{}_{nk}$, входящих в определение 3 величин $a_n{}^\nu$, найдем

$$\left(\sum_{\nu=1}^{k} a_{n\nu}\right)_{(n-1)!+1} =$$

$$= \frac{1}{n!}(0, \ldots, 0, kc_{(n-1)!+1}\ kc_{(n-1)!+2}, \ldots, kc_{(n-1)!+n-k}, 0, 0, \ldots),$$

и по определению 2 вычислим квадрат нормы полученной суммы:

$$\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{k} a_{n\nu}\right)_{(n-1)!+1}\right\|^2 = \frac{k^2}{(n!)^2}\sum_{\nu=(n-1)!+1}^{(n-1)!+n-k} c^2{}_\nu =$$

$$= \frac{k^2}{(n!)^2}\sum_{\nu=1}^{n-k}\frac{n!n^2}{(n-1)(n-\nu)(n-\nu+1)} =$$

$$= \frac{n!n^2k^2(n-k)}{(n!)^2(n-1)n\cdot k} = \frac{k(n-k)}{(n-1)(n-1)!}.$$

В случае $k = 1$ получим отсюда

$$\|(a_{n1})_{(n-1)!+1}\|^2 = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Сразу вытекают и неравенства

$$\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{k} a_{n\nu}\right)_{(n-1)!+1}\right\|^2 \geqslant \left\|(a_{n1})_{(n-1)!+1}\right\|^2 = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$(k = 1, \ldots, n-1).$$

Для оценки величины D_n мы разделим ее на части, соответствующие группам A_q:

$$D_n = \|0, 0, \ldots, 0, d_{(n-1)!+1}, \ldots, d_{n!}, 0, 0, \ldots\|^2 =$$

$$= \sum_{q=1}^{(n-1)!} \|0, 0, \ldots, 0, d_{(n-1)!+(q-1)(n-1)+1}, \ldots, d_{(n-1)!+q(n-1)}, 0, 0, \ldots\|^2.$$

Здесь

$$\|0, 0, \ldots, 0, d_{(n-1)!+(q-1)(n-1)+1}, \ldots, d_{(n-1)!+q(n-1)}, 0, 0, \ldots\|^2 =$$

$$= \frac{k'_q(n-k'_q)}{(n-1)(n-1)!},$$

где $k_q = k'_q (\mathrm{mod}\, n)$, $(0 \leqslant k'_q \leqslant n-1)$ и k_q определяются по формуле (28).

Таким образом,

$$D_n = \sum_{q=1}^{(n-1)!} \frac{k'_q(n-k'_q)}{(n-1)(n-1)!} = \sum_{s=0}^{n-1} \mu_s \frac{s(n-s)}{(n-1)(n-1)!} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(n-1)!} \sum_{s=0}^{n-1} \mu_s = \frac{n}{n!} \sum_{s=0}^{n-1} \mu_s \geqslant \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^{n-1} s\mu_s = \frac{K - n\mu_n}{n!},$$

значит, имеет место неравенство

$$D_n \geqslant \frac{K - n\mu_n}{n!}. \tag{32}$$

Если

$$n\mu_n! \leqslant \frac{K}{2}, \tag{33}$$

то из формулы (32) вытекает, что $D_n > \frac{\delta}{2}$. Так как $D > D_n$, то условие (24) выполняется и лемма доказана.

Рассмотрим случай, когда условие (33) не выполнено, и

$$n\mu_n > \frac{K}{2}.$$

Тогда мы можем группы $A_q = [a_{n-1,q}; 1]$, содержащие точно n элементов $a_{n\nu}$, рассмотреть как элементы $(-1)a_{n-1,q}$. Найдем оценку для величины

$$D - D_n = \|0, d_2, d_3, \ldots, d_{(n-1)!}, 0, 0, \ldots\|.$$

В отношении оценки величины $D - D_n$ расположение элементов a_n внутри группы A_q несущественно. Оценим величину

$$D_{n-1} = \|0, 0, \ldots, 0, d_{(n-2)!+1}, \ldots, d_{(n-1)!}, 0, 0, \ldots\|^2,$$

рассматривая притом только влияние элементов $a_{n-1,q}$, общее число которых равняется $K_1 = \mu_n$. Для этого рассмотрим группы

$$A^1{}_q = \{a_{n-1,\nu};\ \nu = (q-1)(n-1)+1, \ldots, q(n-1)\}$$
$$(q = 1, \ldots, (n-2)!).$$

Определим величины $\lambda^{1+}{}_q$ и $\lambda^{1-}{}_q$ аналогично величинам $\lambda^+{}_q$ и $\lambda^-{}_q$, и величины $k^1{}_q$ по формулам, аналогичным к формуле (28):

$$k^1{}_q = \lambda^+{}_q - \lambda^-{}_q \qquad (q = 1, 2, \ldots, (n-2)!).$$

Тогда имеет место и равенство

$$\sum_{q=1}^{(n-2)!} k^1{}_q = K_1.$$

Пусть число групп $A^1{}_q$, при которых

$$k^1{}_q = s(\mathrm{mod}(n-1))$$

равняется $\mu^1{}_s (s = 0, 1, \ldots, n-2)$. Целое число $\mu^1{}_{n-1}$ определяется аналогично числу μ_n из равенства

$$(n-1)\mu^1{}_{n-1} = K_1 - \sum_{s=0}^{n-2} s\mu^1{}_s.$$

Величину D_{n-1} оценим аналогично величине D_n, учитывая определения 1—3:

$$D_{n-1} \geqslant \sum_{s=0}^{n-2} \frac{s(n-1-s)}{(n-2)(n-2)!}\mu^1{}_s \geqslant \frac{n-1}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2}\mu^1{}_s \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(n-1)!}\sum_{s=0}^{n-2} s\mu^1{}_s = \frac{K-(n-1)\mu^1{}_{n-1}}{(n-1)!}.$$

Так как

$$D \geqslant D_n + D_{n-1},$$

то для выполнения неравенства (24) достаточно, чтобы

$$\frac{K - n\mu_n}{n!} + \frac{K_1 - (n-1)\mu^1{}_{n-1}}{(n-1)!} \geqslant \frac{K}{2n!}.$$

В противном случае должно сохраняться неравенство

$$n(n-1)\mu^1{}_{n-1} > \frac{K}{2}$$

одновременно с неравенством, противоположным к (33):

$$n\mu_n > \frac{K}{2}.$$

Продолжая аналогичное рассуждение, мы найдем, что для выполнения неравенства

$$D_n + D_{n-1} + \ldots + D_{n-s} < \delta,$$

необходимо, чтобы имели место неравенства

$$N(n-r-1,\ r+1)\mu^r{}_{n-r} > \frac{K}{2},\quad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s. \tag{34}$$

Рассмотрим случай, когда неравенство (34) выполняется для всех $r (r = 0, 1, \ldots, n-2)$. В таком случае имеет место и неравенство

$$N(1,\ n-1)\mu^{n-2}{}_2 = n!\mu^{n-2}{}_2 > \frac{K}{2}. \tag{35}$$

Так как по предположению $K > 0$, а по определению $\mu^r{}_{n-r}$ — целое число, то $\mu^2{}_{n-1} \geqslant 1$. Найдем оценку для K, учитывая выражение (31):

$$K \geqslant n\mu_n \geqslant n(n-1)\mu^1{}_{n-1} \geqslant \ldots \geqslant N(n-r-1, r+1)\mu^r{}_{n-r} \geqslant \ldots$$
$$\geqslant \ldots \geqslant n!\mu^{n-2}{}_2 \geqslant n!$$

Таким образом, мы получили неравенство, противоречащее предположению (27). Отсюда вытекает, что всегда существует натуральное число $s \geqslant 2$ такое, что хотя неравенство (34) выполняется для всех r $(r = 0, 1, \ldots, s-1)$, но для s имеет место обратное неравенство

$$N(n-s-1, s+1)\mu^s{}_{n-s} < \frac{K}{2}.$$

Но тогда получим оценку

$$D_n + D_{n-1} + \ldots + D_{n-s} =$$
$$= \frac{K - n\mu_n}{n!} + \frac{K_1 - (n-1)\mu^1{}_{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{K_s - (n-s)\mu^s{}_{n-s}}{(n-s)!} =$$
$$= \frac{K}{n!} - \frac{N(n-s-1, s+1)\mu^s{}_{n-s}}{n!} > \frac{K}{2n!}.$$

Таким образом, имеет место и неравенство (24). Лемма доказана для случая А (выполняется условие (25)).

В. Пусть $d_1 > \frac{1}{2}$. Определим соответственно ряду (23) ряд

$$\sum_{i=1}^{M} r^{**}{}_i \tag{37}$$

следующим образом:

$$\{r^{**}{}_1,\ \ldots,\ r^{**}{}_M\} =$$

$$= \begin{cases} \{a_{11}, \dots, a_{n,n!}\} - \{r^*_1, \dots, r^*_N\}, & \text{если } n \text{ — четное число;} \\ \{a_{11}, \dots, a_{n+1,(n+1)!}\} - \{r^*_N, \dots, r^*_N\}, & \text{если } n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} r^*_i + \sum_{i=1}^{M} r^{**}_i = (1, 0, 0, \dots).$$

Теперь из равенства (19) вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{M} r^{**}_i = (1 - d_1, -d_2, -d_3, \dots).$$

Полученный ряд (37) удовлетворяет условию (21), значит для него можно доказать, учитывая часть А доказательства леммы, что

$$\|(0, -d_2, -d_3, \dots)\|^2 \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Но так как

$$\|(0, d_2, d_3, \dots)\|^2 = \|(0, -d_2, -d_3, \dots)\|^2,$$

то лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Точка* $(\delta, 0, 0, \dots)$ *принадлежит области сумм ряда* (1) *тогда и только тогда, когда*

$$\delta \in T. \tag{38}$$

Доказательство. Достаточность условия (38) вытекает из следствия 1. Для доказательства необходимости мы докажем, что для включения $(\delta, 0, 0, \dots) \in S$ при $0 \leqslant \delta < 1$ необходимо, чтобы $\delta = 0$. Необходимость условия (38) вытекает из лемм 1 и 2.

Литература

1. Тийт Э., Об области сумм в линейных нормированных пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 308—322.
2. Hadwiger, H. Über das Umordnungsproblem im Hilbertschen Raum. Math. Z., 1940, **46**, 70—79.
3. Steinitz, E., Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. J. reine und angew. Math., 1913, **143**, 128—175.

Поступило
9 XI 1967

DISKREETSE SUMMADEPIIRKONNAGA REA NÄIDE

E. Tiit

Resümee

Rea $\sum r_i$ summadepiirkonnaks S nimetatakse selle rea kõigi ümberjärjestuste summade hulka. Lõplikudimensionaalses ruumis on S alati pidev. Lõpmatudimensionaalses ruumis ei saa tõestada, et S on pidev, kuid puudusid ka näited diskreetsete summadepiirkonnaga rea kohta.

Käesolevas töös konstrueeritakse rida ruumis l_2, mille summadepiirkonna S ja sirge $\Lambda = \{\lambda, 0, 0, \ldots; -\infty < \lambda < \infty\}$ ühisosaks on võre:

$$S \cap \Lambda = \{n, 0, 0, \ldots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

EXAMPLE OF A SERIES THAT HAS A DISCRETE REARRANGEMENT SET

E. Tiit

Summary

The rearrangement set S of a series $\sum r_i$ is a set of all sums of all rearrangements of this series. It is proved, that in finite-dimensional spaces the rearrangement set is always continuous, but for infinite-dimensional spaces it is impossible to prove that. On the other hand, there was no example of a discrete rearrangement set.

In the present paper a construction of a series in space l_2 is given so that the common part of straight $\Lambda = \{\lambda, 0, 0, \ldots\}$ and the rearrangement set S has the form

$$S \cap \Lambda = \{n, 0, 0, \ldots; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

ТЕОРЕМЫ О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДОВ A^α

С. Барон

Кафедра математического анализа

Комплексные числа ε_n называются *множителями суммируемости типа* (A, B) (или (A_O, B) или $(|A|, B)$), если для любого A-суммируемого (соответственно A-ограниченного или абсолютно A-суммируемого) ряда [1]

$$\sum u_n \tag{1}$$

ряд

$$\sum \varepsilon_n u_n \tag{2}$$

является B-суммируемым. Если $B = E$, где E — метод сходимости, то говорят о *множителях сходимости* для A, A_O или $|A|$. Аналогично определяются множители суммируемости типов $(A, |B|)$, $(A_O, |B|)$ и $(|A|, |B|)$.

Все названные типы множителей суммируемости найдены для методов Чезаро (см., например, [3], стр. 160—161), т. е. при $A = C^\alpha$ и $B = C^\beta$. Они также найдены для методов взвешенных средних Рисса $P = (R, p_n)$ и P^α в статьях Кангро [4] (при $A = P$ и даже произвольном B), Тюрнпу [7] (при $A = P^\alpha$ в $B = P^\beta$) и др. (см. также [3], стр. 161—164, 177—179).

Ввиду многочисленных применений (см., например, [6]), интерес к множителям суммируемости все возрастает.

В настоящей статье через A^α обозначаем нормальный метод с матрицей $A = (a_{nk})$ преобразования ряда в последовательность, в обратной матрице $A^{-1} = (\eta_{nk})$ которого имеется $\alpha + 2$ отличных от нуля диагоналей, т. е.

$$\eta_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad k < n - \alpha - 1.$$

Методами A^α являются методы Чезаро C^α при $\alpha = 0, 1, \ldots$, Рисса P^α при $\alpha = 1, 2, \ldots$ и др.

Метод B считаем треугольным.

[1] Если пределы изменения индексов у знаков Σ, O и o не указаны, то они изменяются от 0 до $+\infty$, а выражения с отрицательными индексами считаем равными нулю.

Нашей целью является нахождение множителей суммируемости всех перечисленных типов при некоторых ограничениях относительно B, т. е. доказательство следующих теорем, где

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk},$$

$$H\varepsilon_n = \sum_{\nu=n}^{n+\alpha+1} \eta_{\nu n}\varepsilon_\nu,$$

$$K\varepsilon_n = \sum_{k=n}^{n+\alpha} \sum_{\nu=k}^{n+\alpha} \eta_{\nu k}\varepsilon_\nu,$$

$$G\varepsilon_n = \sum_{\nu=n}^{n+\alpha+1} (\nu + 1 - n)\eta_{\nu n}\varepsilon_\nu,$$

причем при $n = 0, 1, \ldots, \alpha + 1$ предполагается существование конечных

$$D_n = \sup_k |a_{n+k,n+k}\eta_{n+k,k}|.$$

Теорема 1. *Пусть метод B нормален, регулярен и удовлетворяет условиям*[2]

$$\sum_{k=0}^{n-1} |b^{-1}{}_{kk}\Delta b_{nk}| = O(1), \tag{3}$$

$$b_{k+1,k+1} = O(b_{kk}). \tag{4}$$

Для того, чтобы ε_n были множителями суммируемости типа (A^α, B), необходимо и достаточно выполнение условий
B-суммируемость последовательности $\{\varepsilon_n\eta_n\}$, (5)

$$\sum |H\varepsilon_n| < \infty, \tag{6}$$

$$\varepsilon_n = O(a_{nn}/b_{nn}), \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{n,k+\alpha+2}G\varepsilon_k| = O(1). \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть метод B нормален, регулярен и удовлетворяет условиям* (3) *и* (4). *Для того, чтобы ε_n были множителями суммируемости типа $(A^\alpha{}_0, B)$, необходимо и достаточно выполнение условий* (6) *и*

$$\varepsilon_n = o(a_{nn}/b_{nn}), \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |b_{n,k+\alpha+2}G\varepsilon_k| = o(1). \tag{10}$$

---

[2] Во всей статье (b_{nk}) — матрица метода B преобразования последовательности в последовательность, (β_{nk}) — преобразования ряда в последовательность, $(\bar\beta_{nk})$ — преобразования ряда в ряд. Так как B треуголен, то $b_{nk} = \Delta\beta_{nk}$ при $k < n$, $\bar\Delta b_{nk} = \Delta\bar\beta_{nk}$ при $k < n$, $\bar\Delta b_{nk} = b_{nn} = \beta_{nn} = \bar\beta_{nn}$ при $k = n$.

Теорема 3. *Пусть $a_{n0} = 1$, а метод B нормален, абсолютно регулярен и удовлетворяет условиям*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |\overline{\Delta} b_{nk}| = O(b_{kk}), \tag{11}$$

$$b_{kk} = O(b_{k+1,k+1}). \tag{12}$$

Для того, чтобы ε_n были множителями суммируемости типа $(|A^\alpha|, B)$ или $(|A^\alpha|, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение условий (7) *и*

$$K\varepsilon_n = O(1). \tag{13}$$

Теорема 4. *Пусть метод B абсолютно регулярен и удовлетворяет условиям* (11) *и* (12). *Для того, чтобы ε_n были множителями суммируемости типа $(A^\alpha, |B|)$ или $(A^\alpha{}_0, |B|)$, необходимо и достаточно выполнение условий* (6) *и*

$$\sum \left| \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \varepsilon_n \right| < \infty. \tag{14}$$

§ 1. Доказательство теоремы 1

По теореме 22.1 и лемме 22.1 из [3] получаем необходимость условий (5), (6) и (7), ибо ввиду регулярности метода B ниже имеем $g_k = H\varepsilon_k$. Необходимость условия (8) установим ниже. Докажем их достаточность. Для этого, учитывая теорему 22.1 из [3], нам надо лишь показать, что (6), (7) и (8) влекут за собой

$$\sum_{k=0}^{n} |g_{nk}| = O(1), \tag{15}$$

где

$$g_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n}{}' \beta_{n\nu} \eta_{\nu k} \varepsilon_\nu.$$

Для методов A^α при $n > k + \alpha + 1$

$$g_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} \beta_{n\nu} \eta_{\nu k} \varepsilon_\nu.$$

Отсюда видим, что существуют пределы $g_k = H\varepsilon_k$, т. е. условие 1° теоремы 22.1 из [3] выполнено.

Применяя преобразование Абеля, находим

$$g_{nk} = h_{nk} + \beta_{n,k+\alpha+2} H\varepsilon_k,$$

где

$$h_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} b_{n\nu} \sum_{\varkappa=k}^{\nu} \eta_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa.$$

Ввиду регулярности метода B из (6) вытекает

$$\sum_{k=0}^{n} |\beta_{n,k+\alpha+2} H\varepsilon_k| = O(1) \sum |H\varepsilon_k| = O(1).$$

Применяя к h_{nk} преобразование Абеля, получаем

$$h_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} \Delta b_{n\nu} \sum_{s=k}^{\nu} \sum_{\varkappa=k}^{s} \eta_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa + b_{n,k+\alpha+2} \sum_{s=k}^{k+\alpha+1} \sum_{\varkappa=k}^{s} \eta_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa =$$
$$= h'_{nk} + h''_{nk}.$$

Теперь изменяя порядок суммирования, находим

$$h'_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} \Delta b_{n\nu} \sum_{\varkappa=k}^{\nu} (\nu - \varkappa + 1) \eta_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa =$$
$$= O(1) \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} |\Delta b_{n\nu}| \sum_{\varkappa=k}^{\nu} |\eta_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa|. \tag{16}$$

Применяя условие (7), получаем

$$h'_{nk} = O(1) \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} |\Delta b_{n\nu}| \sum_{\varkappa=k}^{\nu} |\eta_{\varkappa k} a_{\varkappa\varkappa} b^{-1}{}_{\varkappa\varkappa}|,$$

откуда ввиду (4) убеждаемся в том, что

$$h'_{nk} = O(1) \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} |b^{-1}{}_{\nu\nu} \Delta b_{n\nu}| \sum_{\varkappa=0}^{\nu-k} |\eta_{\varkappa+k,k} a_{\varkappa+k,\varkappa+k}| =$$
$$= O(1) \sum_{\varkappa=0}^{\alpha+1} D_\varkappa \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} |b^{-1}{}_{\nu\nu} \Delta b_{n\nu}|.$$

Следовательно, ввиду (3) заключаем

$$\sum_{k=0}^{n} |h'_{nk}| = O(1) \sum_{\varkappa=0}^{\alpha+1} D_\varkappa \sum_{\nu=0}^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{n} |b^{-1}{}_{\nu+k,\nu+k} \Delta b_{n,\nu+k}| = O(1).$$

Далее, так как

$$\sum_{s=k}^{\alpha+k+1} \sum_{\varkappa=k}^{s} \eta_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa = \sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha+1} (k + \alpha + 2 - \varkappa) \eta_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa = (\alpha + 3) H\varepsilon_k - G\varepsilon_k,$$

то из условий (6) и (8) и регулярности метода B вытекает

$$\sum_{k=0}^{n} |h''_{nk}| = O(1).$$

Таким образом, (6), (7) и (8) обеспечивают выполнение условия (15).

Остается доказать, необходимость условия (8). Но это по доказанному ввиду необходимости условия (15) следует из тождества

$$b_{n,k+\alpha+2} G\varepsilon_k = h'_{nk} + [\beta_{n,k+\alpha+2} + (\alpha + 3) b_{n,k+\alpha+2}] H\varepsilon_k - g_{nk},$$

усматриваемого из хода доказательства. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 при $B = E$ доказана Абелем и Тюрнпу ([1], теорема 1), а в частном случае $A = P^{\alpha}$ — также Расселем ([15], теорема 3). При $A = P$ и $A = P^{\alpha}$ теорема 1 превращается в частные случаи соответственно теоремы 15 статьи Кангро [4] и теоремы 1 статьи Тюрнпу [7].

Если $A = C^{\alpha}$, то условие (8) в теореме 1 можно заменить необходимым ([3], лемма 21.1) условием

$$\varepsilon_n = O(1). \tag{17}$$

Действительно, по формуле (15.17) из [3] для метода Чезаро C^{α}, имеем

$$G\varepsilon_n = A^{\alpha}_{n} \sum_{\nu=n}^{n+\alpha+1} (\nu + 1 - n) A^{-\alpha-2}_{\nu-n} \varepsilon_{\nu} =$$

$$= A^{\alpha}_{n} [(\alpha + 2)\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n - (\alpha + 1)\Delta^{\alpha}\varepsilon_n].$$

Отсюда, если $\alpha > 0$, то по лемме 22.4 из [3] условия (17) и (6) влекут за собой

$$G\varepsilon_n = o(1), \tag{18}$$

а если $\alpha = 0$, то условие (17) дает

$$G\varepsilon_n = 2\Delta\varepsilon_n - \varepsilon_n = O(1).$$

§ 2. Доказательство теоремы 2

Заменяя в доказательстве теоремы 1 теорему Кожима—Шура теоремой Шура ([3], теорема 2.1), получаем:

Числа ε_n являются множителями сумируемости типа $(A^{\alpha}{}_{O}, B)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (15) *и*

$$\lim_{n} \sum_{k=0}^{n} |g_{nk} - H\varepsilon_k| = 0. \tag{19}$$

Из (19) заключаем необходимость условия (9) (ср. [3], стр. 169). Необходимость условия (6) следует из теоремы 1, а необходимость условия (10) установим ниже. Докажем достаточность условий (6), (9) и (10), т. е. что из них вытекает (19), ибо условие (15) мы вывели из них при доказательстве теоремы 1.

Учитывая выкладки в доказательстве теоремы 1, имеем

$$g_{nk} - H\varepsilon_k =$$
$$= h'_{nk} + [\beta_{n,k+\alpha+2} - 1 + (\alpha + 3) b_{n,k+\alpha+2}] H\varepsilon_k - b_{n,k+\alpha+2} G\varepsilon_k, \tag{20}$$

а ввиду регулярности метода B и условия (6) выводим

$$\sum_{k=0}^{n} |\beta_{n,k+\alpha+2} - 1 + (\alpha + 3) b_{n,k+\alpha+2}| \, |H\varepsilon_k| = o(1),$$

то, используя (10), остается доказать, что выполнено условие

$$\sum_{k=0}^{n} |h'_{nk}| = o(1). \tag{21}$$

Применяя условие (9) к (16), находим

$$h'_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} |\Delta b_{n\nu}| \sum_{\varkappa=k}^{\nu} |\eta_{\varkappa k} o(a_{\varkappa\varkappa} b^{-1}{}_{\varkappa\varkappa})|,$$

откуда ввиду (4) получаем

$$h'_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha+1} |o(b^{-1}{}_{\nu\nu}) \Delta b_{n\nu}| \sum_{\varkappa=0}^{\nu-k} |\eta_{\varkappa+k,k} a_{\varkappa+k,\varkappa+k}|.$$

Отсюда при помощи (4) аналогично доказательству теоремы 1 обнаруживаем справедливость оценки (21).

Необходимость условия (10) следует по доказанному и ввиду необходимости условия (19) из тождества (20).

Теорема 2 при $A = P$ и произвольном B доказана Кангро ([4], теорема 18).

Если $A = C^{\alpha}$, то условие (10) в теореме 2 можно заменить необходимым (см. [4], стр. 210) для множителей суммируемости типа (E_0, B) условием

$$\varepsilon_n = o(1). \tag{22}$$

Действительно, условия (22) и (6) влекут за собой (18) при всех $\alpha \geqslant 0$.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Как и в доказательстве теоремы 22.3 из [3] при помощи теоремы Хана ([3], теорема 3.1) получаем:

Числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(|A^{\alpha}|, B)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\exists \lim_{n} \gamma_{nk} = \gamma_k, \tag{23}$$

$$\gamma_{nk} = O(1), \tag{24}$$

где

$$\gamma_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \beta_{n\nu} \bar{\eta}_{\nu k} \varepsilon_\nu,$$

$$\bar{\eta}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \eta_{n\nu}.$$

По теореме 9.2 и формуле (9.6) из [3] условие $a_{n0} = 1$ дает

$$\bar{\eta}_{nk} = \delta_{n0} - \sum_{\nu=0}^{k-1} \eta_{n\nu} \quad \text{при} \quad k \geqslant 1,$$

и, следовательно,

$$\bar{\eta}_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad n > k + \alpha.$$

Поэтому при $n > k + \alpha$

$$\gamma_{nk} = \sum_{\nu=k}^{k+\alpha} \beta_{n\nu} \bar{\eta}_{\nu k} \varepsilon_\nu.$$

Отсюда ввиду абсолютной регулярности B условие (23) выполнено, причем $\gamma_k = K\varepsilon_k$. Поэтому из (23) и (24) вытекает необходимость условия (13). Вытекающее из (24) необходимое условие $\gamma_{nn} = O(1)$ есть условие (7).

Теперь при помощи теоремы Кноппа—Лоренца ([3], теорема 4.1) получаем:

Числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(|A^\alpha|, |B|)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\gamma}_{nk}| = O(1), \tag{25}$$

где

$$\bar{\gamma}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \bar{\beta}_{n\nu} \bar{\eta}_{\nu k} \varepsilon_\nu.$$

Для доказательства теоремы 3 остается показать, что ее условия влекут за собой условие (25).

Применяя преобразование Абеля, находим

$$\bar{\gamma}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \Delta\bar{\beta}_{n\nu} \sum_{\varkappa=k}^{\nu} \bar{\eta}_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa = \\ = \bar{\beta}_{nk} K\varepsilon_k - \bar{\lambda}_{nk},$$

где

$$\bar{\lambda}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \Delta\bar{\beta}_{n\nu} \sum_{\varkappa=\nu+1}^{\infty} \bar{\eta}_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa.$$

Ввиду условия (13) и абсолютной регулярности B

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\beta}_{nk} K\varepsilon_k| = O(1) \sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\beta}_{nk}| = O(1).$$

Далее, применяя (11), убеждаемся в том, что

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\lambda}_{nk}| \leqslant \sum_{\nu=k}^{\infty} \sum_{\varkappa=\nu}^{\infty} |\bar{\eta}_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa| \sum_{n=\nu}^{\infty} |\Delta\bar{\beta}_{n\nu}| = \\ = O(1) \sum_{\nu=k}^{\infty} |\beta_{\nu\nu}| \sum_{\varkappa=\nu}^{\infty} |\bar{\eta}_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa|.$$

Теперь, учитывая, что $\bar{\eta}_{\varkappa k} = 0$ при $\varkappa > k + \alpha$, а также оценку (12), находим

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\lambda}_{nk}| = O(1) \sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha} |\bar{\eta}_{\varkappa k} \varepsilon_\varkappa| \sum_{\nu=k}^{\varkappa} |\beta_{\nu\nu}| = \\ = O(1) \sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha} |\varepsilon_\varkappa \beta_{\varkappa\varkappa}| \sum_{s=k}^{\varkappa} |\eta_{\varkappa s}|.$$

Отсюда, применяя условие (7), заключаем

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\overline{\lambda}_{nk}| = O(1)\sum_{s=k}^{k+\alpha}\sum_{\varkappa=s}^{k+\alpha}|\eta_{\varkappa s}a_{\varkappa\varkappa}| =$$

$$= O(1)\sum_{s=k}^{k+\alpha}\sum_{\varkappa=0}^{k+\alpha-s}|\eta_{\varkappa+s,s}a_{\varkappa+s,\varkappa+s}| =$$

$$= O(1)\sum_{s=k}^{k+\alpha}\sum_{\varkappa=0}^{k+\alpha-s}D_{\varkappa} =$$

$$= O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}(\alpha+1-\varkappa)D_{\varkappa} = O(1).$$

Теорема 3 при $B = E$ доказана Абелем и Тюрнпу ([1], теоремы 2 и 3). При $A = P$ и $A = P^{\alpha}$ теорема 3 превращается в частные случаи соответственно теорем 16 и 17 статьи Кангро [4] и теоремы 2 статьи Тюрнпу [7]. Если $\alpha > 1$ и $B = A^{1} = (R, p_n)$ с $p_n > 0$, то теорема 3 следует из теоремы 1 статьи Ирвина [10], однако, если $\alpha > 1$ и $B = A^{\alpha}$, то теорема 3 не вытекает из результата Ирвина, ибо даже для $A^{\alpha} = C^{\alpha}$ ограничения теоремы Ирвина не выполняются при $\alpha > 1$.

Отметим, что ввиду формулы (9.6) работы [3] имеем

$$K\varepsilon_n = \sum_{\nu=n}^{n+\alpha}\overline{\eta}_{\nu n}\varepsilon_{\nu}.$$

Таким образом, для метода Чезаро C^{α} находим

$$K\varepsilon_n = nA_n^{\alpha}\sum_{\nu=n}^{n+\alpha}A_{\nu-n}^{-\alpha-1}\varepsilon_{\nu}/\nu = nA_n^{\alpha}\Delta^{\alpha}(\varepsilon_n/n),$$

и условие (13) принимает вид

$$\Delta^{\alpha}(\varepsilon_n/n) = O(n^{-\alpha-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, положив в теореме 3 метод $A = C^{1}$, метод $B = (WN, p_n)$ с $0 < p_n\downarrow$, а числа $\varepsilon_n = P_n/n$, непосредственно получаем основную теорему статьи Кишоре [11]. При $A = C^{1}$ и $B = (WN, (n+1)^{-1})$ из теоремы 3 вытекает теорема 2 статьи [18]. Названные результаты из [11, 18] и теорема 2 статьи [19] также следуют из теоремы 17 Кангро [4].

§ 4. Доказательство теоремы 4

Пользуясь теоремой Пейеримхоффа ([3], теорема 5.1), выводим:

Числа ε_n являются множителями суммируемости типов $(A^{\alpha}, |B|)$ или $(A^{\alpha}{}_0, |B|)$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого конечного множества $\mathfrak{N}$ неотрицательных целых чисел

$$\sum_{k}\Big|\sum_{n\in\mathfrak{N}}\overline{g}_{nk}\Big| \leqslant M, \tag{26}$$

где

$$\overline{g}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\overline{\beta}_{n\nu}\eta_{\nu k}\varepsilon_{\nu}.$$

Необходимость условия (6) вытекает из теоремы 1 (также из (26) ввиду абсолютной регулярности метода B, аналогично, как в [3], стр. 172). Необходимость условия (14) получаем при помощи одной теоремы Пейеримхоффа ([3], следствие 5.1 с $\tau_n=n$).

Для доказательства теоремы 4 покажем, что из ее условий вытекает условие

$$\sum_{k}\sum_{n=k}^{\infty}|\overline{g}_{nk}|<\infty,$$

более сильное, чем (26).

Как и в доказательстве теоремы 3 находим

$$\overline{g}_{nk}=\overline{\beta}_{nk}H\varepsilon_k-\overline{l}_{nk},$$

где

$$\overline{l}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\Delta\overline{\beta}_{n\nu}\cdot\sum_{\varkappa=\nu+1}^{\infty}\eta_{\varkappa k}\varepsilon_{\varkappa}.$$

Ввиду условия (6) и абсолютной регулярности B

$$\sum_{k}\sum_{n=k}^{\infty}|\overline{\beta}_{nk}H\varepsilon_k|=\sum_{k}|H\varepsilon_k|\sum_{n=k}^{\infty}|\overline{\beta}_{nk}|=O(1).$$

Далее, применяя (11), убеждаемся в том, что

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\overline{l}_{nk}|=O(1)\sum_{\nu=k}^{\infty}|\beta_{\nu\nu}|\sum_{\varkappa=\nu}^{\infty}|\eta_{\varkappa k}\varepsilon_{\varkappa}|.$$

Теперь, учитывая, что $\eta_{\varkappa k}=0$ при $\varkappa>k+\alpha+1$, а также оценку (12) и нормальность метода A^{α}, находим

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\overline{l}_{nk}|=O(1)\sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha+1}|\eta_{\varkappa k}\varepsilon_{\varkappa}|\sum_{\nu=k}^{\varkappa}|\beta_{\nu\nu}|=$$

$$=O(1)\sum_{\varkappa=k}^{k+\alpha+1}|\eta_{\varkappa k}\beta_{\varkappa\varkappa}\varepsilon_{\varkappa}|=$$

$$=O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha+1}D_{\varkappa}|\beta_{\varkappa+k,\varkappa+k}\varepsilon_{\varkappa+k}/\alpha_{\varkappa+k,\varkappa+k}|.$$

Отсюда, применяя условие (14), заключаем

$$\sum_{k}\sum_{n=k}^{\infty}|\overline{l}_{nk}|=O(1)\sum_{\varkappa=0}^{\alpha+1}\sum_{k=\varkappa}^{\infty}|\beta_{kk}\varepsilon_k/\alpha_{kk}|<\infty.$$

Теорема 4 при $B=E$ доказана Абелем и Тюрнпу ([1], теорема 4). При $A=P^{\alpha}$ теорема превращается в частный случай теоремы 3 статьи Тюрнпу [7]. В случае $A^{\alpha}=(R,p_n)$ с $p_n>0$ теорему 4 доказал Куртц ([13], теорема 2), а для произвольных $p_n\neq 0$ — Барон ([2], теорема 1) с заменой (12) на (4).

Если $\alpha = 1$ и $B = A^1 = (R, p_n)$ с $p_n > 0$, то теорема 4 следует из теоремы 1 статьи Куртца ([12], стр. 240 и 245), а если $\alpha = 1$ и $B = (R, p_n)$ — из теоремы 1 статьи Куртца [13]. Однако, если $\alpha > 1$, то теорема 4 не вытекает из результатов Куртца, так как даже для $A = C^\alpha$ теорема о среднем не имеет места при $\alpha > 1$. Из теоремы 4 при $A = (R, (n+1)^{-1})$ и $B = C^\beta$ с $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ вытекает теорема 3 статьи [19], а при $A = (R, p_n)$ и $B = (WN, p_n)$ с $0 < p_n \downarrow$ следует теорема 2 статьи [17]. Обе названные теоремы непосредственно вытекают и из теоремы 1 статьи [2].

Что касается случая $B = E$, то теорему 4 можно доказать при более общих условиях. Именно, имеет место

Теорема 5. *Пусть нормальный метод A удовлетворяет условию*

$$\sum D_n < \infty. \tag{27}$$

Для того, чтобы ε_n были множителями сходимости типов $(A, |E|)$ или $(A_0, |E|)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum \left| \frac{\varepsilon_n}{\alpha_{nn}} \right| < \infty. \tag{28}$$

Доказательство. Теперь необходимо и достаточно условие (26) с

$$\bar{g}_{nk} = \eta_{nk}\varepsilon_n.$$

Необходимость условия (28) следует из доказательства теоремы 4. Условие (28) и достаточно, так как из (27) и (28) заключаем

$$\sum_k \sum_{n=k}^{\infty} |\bar{g}_{nk}| = \sum_k \sum_n |\eta_{n+k,k}\varepsilon_{n+k}| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_n D_n \sum_k |\varepsilon_{n+k}/\alpha_{n+k,n+k}| < \infty.$$

Все другие типы множителей сходимости (соответствующие случаю $B = E$ теоремам 1, 2 и 3) рассмотрены в статье Кангро [5], если A — нормальный метод, для которого $\Sigma nD_n < \infty$. Теорему 5 в случае, когда A удовлетворяет теореме о среднем и $\alpha_{n+1,n+1} = O(\alpha_{nn})$, доказал Куртц ([13], теорема 3).

Отметим, что для методов A^α величины $D_n = 0$ при всех $n \geqslant \alpha + 2$, а для любых нормальных методов $D_0 = 1$.

§ 5. Методы B, удовлетворяющие условиям теорем 1—4

1. Пусть метод B нормален, регулярен и таков, что $b_{nk} \geqslant 0$,

$$b_{nk} \leqslant b_{n,k+1} \quad \text{при} \quad k \leqslant n-1, \tag{29}$$

$$b_{nk} \leqslant b_{n-1,k} \quad \text{при} \quad k \leqslant n-1, \tag{30}$$

$$b_{nn} = O(b_{kk}) \quad \text{при} \quad k \leqslant n. \tag{31}$$

Из (31) и (29) вытекает (3), так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^{-1}{}_{kk} |\Delta b_{nk}| = O(b^{-1}{}_{nn}) \left|\sum_{k=0}^{n-1} \Delta b_{nk}\right| =$$

$$= O(b^{-1}{}_{nn}) |b_{n0} - b_{nn}| = O(1).$$

Из (30) вытекает (11), так как

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |\overline{\Delta} b_{nk}| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} \overline{\Delta} b_{nk}\right| = \left|-b_{kk} + \lim_{n} b_{nk}\right| = |b_{kk}|.$$

Условиям (29), (30) и (31) удовлетворяет метод Вороного—Нёрлунда (WN, q_n) при $0 \leqslant q_n \downarrow$. Такой метод сохраняет абсолютную сходимость ([14], следствие 1). Метод (WN, q_n) регулярен (см. [8], теорема 16, или [3], следствие 16.1) при $q_n = o(Q_n)$. Если $q_n \downarrow$, то имеют место и вытекающее из (31) условие (4), а также условие (12), ибо

$$0 < \frac{b_{kk}}{b_{k+1,k+1}} = \frac{Q_{k+1}}{Q_k} = 1 + \frac{q_{k+1}}{Q_k} \leqslant 1 + \frac{q_k}{Q_k} = O(1).$$

Из сказанного непосредственно следует, что, например, метод Чезаро C^β при $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, метод гармонических средних $(WN, (n+1)^{-1})$ и метод Z_β Сильвермана—Саса ([16], стр. 347 и 350) при всех $\beta = 1, 2, \ldots$ удовлетворяют условиям теорем 1—4 относительно B.

2. Покажем, что метод Бернштейна—Рогозинского с

$$\beta_{nk} = \cos \frac{k\pi}{2n+1}$$

также удовлетворяет условиям теорем 1—4 относительно B.

Действительно, этот метод нормален и регулярен ([8], стр. 481, теорема II). Далее, в виду того, что

$$b_{nk} = 2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} \sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \quad \text{при} \quad k \leqslant n-1,$$

$$b_{nn} = \sin \frac{\pi}{2(2n+1)},$$

то $b_{nk} \geqslant 0$ и выполняются условия (29), (30) и (31). Условие (12) также выполнено, ибо $b_{kk} \sim b_{k+1,\,k+1}$. Наконец, этот метод сохраняет абсолютную сходимость, так как при $k \leqslant n-1$

$$\overline{\beta}_{nk} = 2 \sin \frac{2kn\pi}{4n^2-1} \sin \frac{k\pi}{4n^2-1} = O\left(\frac{k^2}{n^3}\right),$$

откуда

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\overline{\beta}_{nk}| = \beta_{kk} + O(k^2) \sum_{n=k+1}^{\infty} 1/n^3 = O(1).$$

3. Пусть $B=(R,q_n)$. Тогда выполнение условия (11) теорем 3 и 4 вытекает из того, что B сохраняет абсолютную сходимость (см. [3], теорема 17.2), так как

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}|\overline{\Delta} b_{nk}| = |b_{kk}Q_k| \sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\right| = O(b_{kk}).$$

Однако условию (3) теорем 1 и 2 не всякий регулярный метод (R,q_n) удовлетворяет. Примером этому служит метод логарифмических средних $(R,\ (n+1)^{-1})$, который сильнее[3] метода C^1. Все же условию (3) удовлетворяет всякий B при $0<q_n\uparrow$ с $q_n/Q_n\downarrow$, ибо для такого B имеют место неравенства (29) и (31). Следует отметить, что при $0<q_n\uparrow$ метод $B\subset C^1$ (см. [3], теорема 17.3), ибо $Q_n\leqslant(n+1)q_n$, откуда

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|Q_k\Delta\frac{1}{q_k}\right| + |Q_n/q_n| \leqslant n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\frac{1}{q_k}\sum_{\nu=0}^{k}q_\nu =$$

$$= n+1+\sum_{\nu=0}^{n-1}(1-q_\nu/q_n) = O(n+1).$$

Так как C^1 удовлетворяет условию (3), то методы $B\sim C^1$ для нас тривиальны. Тривиален также любой метод $B\sim E$, т. е. (см. [3], теорема 17.9) когда $Q_n=O(q_n)$. Нетривиальными в этом смысле являются методы (R,q_n), например, при $Q_n=\exp n^\alpha$ с $0<\alpha\leqslant 1$ и при $Q_n=\exp(n/\ln n)$ для $n\geqslant 2$. Последние методы, ввиду изложенного, удовлетворяют условию (3) и для них $Q_n\neq O(q_n)$, причем (см. [9], стр. 79) первый из них слабее метода $C^{1-\alpha}$, а второй — метода гармонических средних.

4. Пусть $B=C^\beta$, где β — комплексное число с $0<\operatorname{Re}\beta<1$. Этот метод B регулярен и сохраняет абсолютную сходимость. Условия (4) и (12) выполнены. Условия (3) и (11) также выполнены, так как

$$\sum_{k=0}^{n-1}|b_{kk}^{-1}\Delta b_{nk}| = O(1)\sum_{k=0}^{n-1}|A_{n-k}^{\beta-2}| = O(1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\operatorname{Re}\beta-2} = O(1),$$

а по формуле разности произведения находим

$$nA_n^\beta\Delta\overline{\beta}_{nk} = \Delta(kA_{n-k}^{\beta-1}) = kA_{n-k}^{\beta-2} - A_{n-k-1}^{\beta-1},$$

откуда и следует (11), ибо первое слагаемое оценивается непосредственно, а для второго применяется формула Чжоу ([3], стр. 73).

Аналогично убеждаемся и в том, что метод $B=(WN,\ q_n)$ с $q_n=(n+1)^{\beta-1}$ при $0<\operatorname{Re}\beta<1$ также удовлетворяет условиям теорем 1—4 относительно B. Здесь $Q_n\sim\beta^{-1}(n+1)^\beta$.

[3] Отметим, что метод Бернштейна—Рогозинского также сильнее C^1 (см. Стечкин [8], стр. 488), но удовлетворяет условию (3).

§ 6. О множителях суммируемости для метода Чезаро и произведения методов Рисса

Пусть $A = C^\alpha$. Тогда все D_n существуют и условие (5) выполнено ([2], стр. 117), а $H\varepsilon_n = A^\alpha{}_n\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n$. К чему сводятся условия (8), (10) и (13) мы отмечали выше. Следовательно, из теорем 1—4 получаем теоремы о множителях суммируемости типов (C^α, B), $(C^\alpha{}_o, B)$, $(|C^\alpha|, B)$, $(|C^\alpha|, |B|)$, $(C^\alpha, |B|)$ и $(C^\alpha{}_o, |B|)$, из которых при $B = C^\beta$ вытекают частные случаи $\alpha = 0, 1, \ldots$ с $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ и $0 < \operatorname{Re}\beta < 1$ известных теорем о множителях суммируемости для методов Чезаро.

Пусть теперь $A = R = QP$, где $Q = (R, q_n)$. Тогда при помощи формул (17.5) и (17.6) из [3] заключаем, что R является методом A^2, а если $P_k = O(P_{k+1})$, $Q_k = O(Q_{k+1})$, $p_{k+1}/P_{k+1} = O(p_k/P_k)$ и $q_{k+1}/Q_{k+1} = O(q_k/Q_k)$, то существуют D_1, D_2 и D_3. Условие (5) выполнено, ибо $a_{n0} = 1$ (см. [3], теорема 9.2). Далее, обозначив $S_n = P_n/q_n$, $e_n = (\Delta\varepsilon_n)/p_n$ и $f_n = \varepsilon_n/p_n$, находим, что $H\varepsilon_n = Q_n\Delta(S_n\Delta e_n)$, $G\varepsilon_n = H(n\varepsilon_n) - (n-1)H\varepsilon_n = 4H\varepsilon_n - 2Q_nS_n\Delta e_n - Q_n\Delta[S_n(e_n + \Delta f_n)]$, $K\varepsilon_n = Q_nS_n\Delta e_n + P_{n+1}e_{n+1} + \varepsilon_{n+2}$. Следовательно, из теорем 1—4 получаем теоремы о множителях суммируемости типов (R, B), (R_o, B), $(|R|, B)$, $(|R|, |B|)$, $(R, |B|)$ и $(R_o, |B|)$. Если $R \supset P$, то, применяя теоремы 15 и 18 (и условие 4° теоремы 8) из [4] и учитывая (верное для всех методов A^α с $a_{n0} = 1$) тождество

$$K\varepsilon_n + \sum_{k=0}^{n-1} H\varepsilon_k = \varepsilon_0,$$

получаем, что в условиях (8) и (10) можно $G\varepsilon_k$ заменить на $Q_k\Delta[S_k(e_k + \Delta f_k)]$, добавляя для множителей суммируемости типа (R, B) необходимое условие $Q_nS_n\Delta e_n = O(1)$, а для (R_o, B) — необходимое условие $Q_nS_n\Delta e_n = o(1)$. Если $|R| \supset |P|$, то, применяя теорему 16 из [4], видим, что условие (13) равносильно условиям $Q_nS_n\Delta e_n = O(1)$, $P_ne_n = O(1)$ и (17).

Отметим, что для любого треугольного T включение $TP \supset P$ (соответственно $|TP| \supset |P|$) имеет место тогда и только тогда, когда T сохраняет сходимость (соответственно абсолютную сходимость). В этом убеждаемся, рассматривая доказательства теорем 17.3 и 17.4 из [3].

Литература

1. Абель М., Тюрнпу Х., Множители ψ-сходимости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 106—121.
2. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 106—120.
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
4. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
5. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.

6. Кангро Г., О некоторых исследованиях по теории суммируемости. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1967, **16**, 255—266.
7. Тюрнпу Х., Множители суммируемости для методов Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 90—105.
8. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
9. Dikshit, G. D., On inclusion relation between Riesz and Nörlund means. Indian J. Math., 1965, **7**, 73—81.
10. Irwin, R. L., Absolute summability factors I. Tôhoku Math. J., 1966, **18**, 247—254; 1967, **19**, 243; 1968, **20**, 111.
11. Kishore, N., On the absolute Nörlund summability factors. Riv. mat. Univ. Parma, 1965, **6**, 129—134.
12. Kurtz, J. C., Hardy-Bohr theorems. Tôhoku Math. J., 1966, **18**, 237—246
13. Kurtz, J. C., A note on convergence and summability factors. Tõhoku Math. J., 1968, **20**, 113—119.
14. Mears, F. M., Absolute Regularity and the Nörlund Mean. Ann. Math., (2), 1937, **38**, 594—601.
15. Russel, D. C., Note on convergence factors. Tôhoku Math. J., 1966, **18**, 414—428.
16. Silverman, L. L., Szasz, O., On a class of Nörlund matrices. Ann. Math., (2), 1944, **45**, 347—357.
17. Daniel, E. C., Absolute summability factors for series bounded $(\bar{N}, p_n)$. Rend. Circolo mat. Palermo, 1968, **17**, № 1, 68—80.
18. Das, G., Srivastava, V. P., Mohapatra, R. N., On absolute summability factors of infinite series. J. Indian Math. Soc., 1968, **31**, № 4, 189—200.
19. Mohapatra, R. N., A note on summability factors. J. Indian Math. Soc., 1968, **31**, № 4, 213—224.

Поступило
19 XII 1968

TEOREEMID SUMMEERUVUSTEGURITEST MENETLUSTE A^α JAOKS

S. Baron

Resümee

Olgu A^α normaalne menetlus, mille rida-jada teisenduse pöördmaatriksil on $\alpha+2$ nullist erinevat diagonaali, ning B suvaline normaalne menetlus. Artiklis leitakse summeeruvustegurid (A^α, B) ja $(A^\alpha{}_0, B)$ tüüpi juhul, kui regulaarne menetlus B rahuldab tingimusi (3) ja (4) ning tüüpi $(|A^\alpha|, B)$, $(|A^\alpha|, |B|)$, $(A^\alpha, |B|)$ ja $(A^\alpha{}_0, |B|)$ juhul, kui absoluutselt regulaarne menetlus B rahuldab tingimusi (11) ja (12). Leitakse ka koonduvustegurid $(A, |E|)$ ja $(A_0, |E|)$ tüüpi suvalise normaalse menetluse A korral, mis rahuldab tingimust (27).

SÄTZE ÜBER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR DIE VERFAHREN A^α

S. Baron

Zusammenfassung

Bezeichnen wir mit A^α ein solches normales Matrixverfahren, dessen Umkehrmatrix der Reihe-Folge-Transformation $\alpha+2$ von Null verschiedene Diagonale besitzt. Es sei B ein beliebiges normales Matrixverfahren. In diesem Artikel werden Summierbarkeitsfaktoren von den Typen (A^α, B) und $(A^\alpha{}_0, B)$ mit den Einschränkungen (3) und (4) für das reguläre B und von den Typen $(|A^\alpha|, B)$, $(|A^\alpha|, |B|)$, $(A^\alpha, |B|)$ und $(A^\alpha{}_0, |B|)$ mit den Einschränkungen (11) und (12) für das absolut reguläre B gefunden. Es werden auch Konvergenzfaktoren von den Typen $(A, |E|)$ und $(A_0, |E|)$ für das beliebige normale Verfahren A, das die Einschränkung (27) erfüllt, abgeleitet.

О МНОЖИТЕЛЯХ ψ-СХОДИМОСТИ ДЛЯ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

М. Абель

Кружок СНО при кафедре математического анализа

Введение

Пусть X и $У$ банаховы пространства. Ряд [1]

$$\sum x_n \tag{1}$$

из X (последовательность $\{x_n\}$ из X) называется *φ-C^α-суммируемым* (соответственно *φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-суммируемой*), если последовательность

$$x'_n = \varphi_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k \qquad (\text{соответственно} \quad x''_n = \varphi_n \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k) \tag{2}$$

сходится, где $\{\varphi_n\}$ — заданная числовая последовательность, причем

$$a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}} \quad \text{и} \quad a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}.$$

Аналогично определяются *φ-C^α-ограниченность* и φ-C^α-суммируемость к нулю (или *φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-ограниченность* и φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-суммируемость к нулю) ряда (1) (или последовательности $\{x_n\}$), которые соответственно обозначаем через φ-$C^\alpha{}_O$ и φ-$C^\alpha{}_0$ (или φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ и φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$).

Ряд (1) (последовательность $\{x_n\}$) называется *абсолютно φ-C^α-суммируемым*, коротко φ-$|C^\alpha|$-суммируемым, (соответственно *абсолютно φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-суммируемой*, коротко φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$-суммируемой), если сходится ряд [2]

---

[1] Как правило, в дальнейшем мы $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ заменяем через Σx_k и $\sum\limits_{k=0}^{n} S_{nk}$ через ΣS_{nk}, кроме того свободные индексы принимают все значения $0, 1, 2, \ldots$.

[2] Здесь $\overline{\Delta} S_{nk} = S_{nk} - S_{n-1,k}$.

$$\sum_n \|\varphi_n \sum_{k=0}^{n} \bar{\Delta}_n a_{nk} x_k\| \quad (\text{соответственно} \quad \sum_n \|\varphi_n \sum_{k=0}^{n} \bar{\Delta}_n a_{nk} x_k\|). \qquad (3)$$

Если $\alpha = 0$, то мы получаем определение φ-сходимости или абсолютной φ-сходимости ряда (1) (соответственно последовательности $\{x_n\}$).

Пусть ε_n — линейные непрерывные операторы из X в $У$.

Операторы ε_n называем *множителями ψ-сходимости* (*множителями абсолютной ψ-сходимости*) *в ряде относительно метода* φ-A, если из φ-A-суммируемости ряда (1), всегда следует ψ-сходимость (соответственно абсолютная ψ-сходимость) ряда

$$\sum \varepsilon_n x_n \qquad (4)$$

из $У$, где $A = C^\alpha$, $|C^\alpha|$ (соответственно $A = C^\alpha$, $|C^\alpha|$, $C^\alpha{}_O$, $C^\alpha{}_0$).

Операторы ε_n называем *множителями ψ-сходимости* (*множителями абсолютной ψ-сходимости*) *в ряде относительно метода* φ-$\mathfrak{A}$, если из φ-$\mathfrak{A}$-суммируемости последовательности $\{x_n\}$, всегда следует ψ-сходимость (соответственно абсолютная ψ-сходимость) ряда (4), где $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $|\mathfrak{C}^\alpha|$ (соответственно $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $|\mathfrak{C}^\alpha|$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_O$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_0$).

Операторы ε_n называем *множителями ψ-сходимости* (*множителями абсолютной ψ-сходимости*) *в последовательности относительно метода* φ-$\mathfrak{A}$, если из φ-$\mathfrak{A}$-суммируемости последовательности $\{x_n\}$ всегда следует ψ-сходимость (соответственно абсолютная ψ-сходимость) последовательности $\{\varepsilon_n x_n\}$ из $У$, где $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $|\mathfrak{C}^\alpha|$ (соответственно $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $|\mathfrak{C}^\alpha|$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_O$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_0$).

В статье [3] рассматриваются вышеназванные множители ψ-сходимости и абсолютной ψ-сходимости в случае, когда A и $\mathfrak{A}$ — произвольные треугольные методы суммирования, имеющие в своей обратной матрице конечное число отличных от нуля диагоналей.

В случае[3] $X = У = K$ и $\alpha \geqslant 0$, множители[4] сходимости в ряде относительно методов φ-C^α, φ-$C^\alpha{}_0$ и φ-$C^\alpha{}_O$ при $\varphi_n \sim n^{-p}$, $p \geqslant 0$, рассмотрены[5] в [10—12]; множители абсолютной сходимости в ряде относительно метода φ-$|C^\alpha|$ в случае, когда $\{n^{-1}\varphi_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел — в [14, 15]; множители ψ-сходимости в последователь-

[3] Здесь через K обозначаем пространство комплексных чисел.

[4] При $\psi_n = 1$, вместо ψ-сходимости и абсолютной ψ-сходимости коротко пишем сходимость и абсолютная сходимость, а при $\varphi_n = 1$ вместо φ-A-суммируемости (или φ-$\mathfrak{A}$-суммируемости) коротко пишем A-суммируемость (соответственно $\mathfrak{A}$-суммируемость). Из статей [1, 2, 4—6, 9—15, 18] получаем теоремы множителей ψ-сходимости и абсолютной ψ-сходимости, если в них положим $\beta = 0$ или $\varrho = 0$.

[5] Бозанкет в [11, 12] рассмотрел случай, когда из ψ-сходимости к нулю последовательности $\{\varepsilon_n x_n\}$ всегда следовала φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-суммируемость к нулю последовательности $\{x_n\}$.

ности относительно метода φ-$\mathfrak{C}^\alpha$ при $\varphi_n \sim n^{-p}$, $\psi_n \sim n^{-(p+q)}$, $p > -1$, $p+q > -1$ или $p+q$ произвольные — в [11], а при $\varphi_n = \psi_n = 1$ — в [18] и множители абсолютной сходимости в последовательности относительно метода $|\mathfrak{C}^\alpha|$ — в [18].

Если $X = Y = K$ и $\{\varphi_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, то множители сходимости в ряде относительно методов φ-$C^\alpha{}_O$ и φ-$|C^\alpha|$ и множители абсолютной сходимости в ряде относительно методов φ-C^α, φ-$|C^\alpha|$ и φ-$C^\alpha{}_O$ при $\alpha \geqslant 0$ рассмотрены в [1, 5]; множители сходимости и абсолютной сходимости в ряде относительно методов φ-$\mathfrak{C}^\alpha$ и φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ при $\alpha = 0, 1, \ldots$ — в [2], а множители абсолютной сходимости в ряде относительно методов $\mathfrak{C}^\alpha$ и $\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ при $\alpha \geqslant 0$ в [4] (теорема 24.3).

Если X и Y — банаховы пространства, то множители сходимости в ряде относительно методов C^α и $|C^\alpha|$ и множители абсолютной сходимости в ряде относительно метода $|C^\alpha|$ при $\alpha \geqslant 0$ рассмотрены в [6], а множители ψ-сходимости или абсолютной ψ-сходимости в последовательности относительно методов φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ и φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$ при $\alpha = 0, 1, \ldots$, где

$$\varphi_n = O(\varphi_{n-1}) \quad \text{и} \quad \psi_n = O(\psi_{n-1})$$

или $\{\psi_n\}$ — произвольная последовательность, рассмотрены в [3].

В настоящей статье рассмотрим все вышеназванные типы множителей ψ-сходимости и абсолютной ψ-сходимости, при произвольных комплексных α с $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$, когда $\varphi_n > 0$ и $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию

$$\{\varphi_n\} \text{ — невозрастающая последовательность} \tag{5}$$

и $\{\psi_n\}$ — произвольная последовательность с $\psi_n \neq 0$ или $\psi_n > 0$ и удовлетворяет одному из условий

$$\{\psi_n\} \text{ — неубывающая последовательность} \tag{6}$$

или

$$\psi_n = O(\psi_{n-1}). \tag{7}$$

§ 1. Неэффективные условия

В дальнейшем мы воспользуемся следующими леммами, которые доказываются аналогично, как в [3, 8].

Обозначим

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^{-1} \eta_{nk} \quad \text{и} \quad \xi_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^{-1} \xi_{nk},$$

где

$$\eta_{nk} = A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-2} \quad \text{и} \quad \xi_{nk} = A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-1}.$$

Лемма 1. *Операторы ε_n являются*

а) *множителями ψ-сходимости в ряде относительно метода φ-C^α,*

б) *множителями ψ-сходимости в ряде относительно метода φ-$\mathfrak{C}^\alpha$,*

в) *множителями ψ-сходимости в последовательности относительно метода φ-$\mathfrak{C}^\alpha$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

в случае а)

$$1^\circ \quad \sum_n \eta_{nk}\varepsilon_n x \text{ и } \sum \eta_n\varepsilon_n x \text{ являются } \psi\text{-сходящимися } (x \in X),$$

$$2^\circ \quad \sup_{\|x_k\|\leqslant 1} \Big\|\sum_{k=0}^{m} \psi_n c_{nk} x_k\Big\| = O(1)$$

при

$$c_{nk} = \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{n} \eta_{sk}\varepsilon_s, \tag{8}$$

в случае б) — *условие* 2° *при*

$$c_{nk} = \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{n} \xi_{sk}\varepsilon_s \tag{9}$$

и

$$3^\circ \quad \sum_n \xi_{nk}\varepsilon_n x \text{ и } \sum \xi_n\varepsilon_n x \text{ являются } \psi\text{-сходящимися } (x \in X),$$

в случае в) — *условие* 2° *при*

$$c_{nk} = \varphi_k^{-1}\xi_{nk}\varepsilon_n \tag{10}$$

и

$$4^\circ \quad \{\xi_{nk}\varepsilon_n x\} \text{ и } \{\xi_n\varepsilon_n x\} \text{ являются } \psi\text{-сходящимися } (x \in X).$$

Обозначим

$$\eta'_{nk} = \sum_{s=k}^{n} \eta_{ns} \quad \text{и} \quad \xi'_{nk} = \sum_{s=k}^{n} \xi_{ns}.$$

Лемма 2. *Операторы ε_n являются*

а) *множителями ψ-сходимости в ряде относительно метода φ-$|C^\alpha|$,*

б) *множителями ψ-сходимости в ряде относительно метода φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$,*

в) *множителями ψ-сходимости в последовательности относительно метода φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

в случае а)

1° $\sum_n \eta'_{nk}\varepsilon_n x$ *являются* ψ*-сходящимися* $(x \in X)$

2° $\|\gamma_{nk}\| = O(\psi_n^{-1})$

при

$$\gamma_{nk} = \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{n} \eta'_{sk}\varepsilon_s, \tag{11}$$

в случае б) — *условие* 2° *при*

$$\gamma_{nk} = \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{n} \xi'_{sk}\varepsilon_s \tag{12}$$

и

3° $\sum_n \xi'_{nk}\varepsilon_n x$ *являются* ψ*-сходящимися* $(x \in X)$,

в случае в) — *условие* 2° *при*

$$\gamma_{nk} = \varphi_k^{-1}\xi'_{nk}\varepsilon_n \tag{13}$$

и

4° $\{\xi'_{nk}\varepsilon_n x\}$ *являются* ψ*-сходящимися* $(x \in X)$.

Лемма 3. *Операторы* ε_n *являются*

а) *множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно метода* φ-$|C^\alpha|$,

б) *множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно метода* φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$,

в) *множителями абсолютной* ψ*-сходимости в последовательности относительно метода* φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sum_n \|\psi_n \bar{\Delta}_n \gamma_{nk} x\| = O(\|x\|) \qquad (x \in X),$$

где γ_{nk} *задаются*

в случае а) — *формулами* (11),

в случае б) — *формулами* (12),

в случае в) — *формулами* (13).

Лемма 4 (см. [16]). *Пусть* $X = Y = R$. *Числа* ε_n *являются*

а) *множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно методов* φ-C^α, φ-$C^\alpha{}_0$ *или* φ-$C^\alpha{}_O$,

б) *множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно методов* φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$ *или* φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$,

в) *множителями абсолютной* ψ*-сходимости в последовательности относительно методов* φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$ *или* φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sum_k \left| \sum_{n=k}^{\infty} \psi_n (\bar{\Delta}_n c_{nk}) d_n \right| < \infty,$$

где $\{d_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность, а c_{nk} задаются

в случае а) — *формулами* (8),

в случае б) — *формулами* (9),

в случае в) — *формулами* (10).

Лемма 5 (см. [17]). *Пусть $X = Y = R$. Если числа ε_n являются*

а) *множителями абсолютной ψ-сходимости в ряде относительно методов φ-C^α, φ-C^α_0 или φ-$C^\alpha o$,*

б) *множителями абсолютной ψ-сходимости в ряде относительно методов φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, φ-$\mathfrak{C}^\alpha_0$ или φ-$\mathfrak{C}^\alpha o$,*

в) *множителями абсолютной ψ-сходимости в последовательности относительно методов φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, φ-$\mathfrak{C}^\alpha_0$ или φ-$\mathfrak{C}^\alpha o$, то*

$$\sum_k |\psi_{n(k)} c_{n(k),k}| < \infty,$$

где $n(k)$ — строго возрастающая целочисленная функция от k, а c_{nk} задаются

в случае а) — *формулами* (8),

в случае б) — *формулами* (9),

в случае в) — *формулами* (10).

§ 2. Множители ψ-сходимости

Воспользуясь леммой 1, получаем следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$ *и* $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *удовлетворяют соответственно условиям* (5) *и* (6). *Операторы ε_n являются множителями ψ-сходимости в ряде относительно метода φ-C^α тогда и только тогда, когда выполнены условия*[6]:

$$\left\{ \sum_{n=0}^{m} \varphi_n^{-1} (n+1)^\alpha \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_n x \right\}_{m=0,1,\ldots} \tag{14}$$

$$\{\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_n x\}_{m=0,1,\ldots} \tag{15}$$

являются[7] *ψ-сходящимися при $x \in X$,*

$$\|\varepsilon_n\| = O(\varphi_n \psi_n^{-1} n^{-\operatorname{Re}\alpha}) \tag{16}$$

и

---

[6] Если операторы ε_n являются множителями ψ-сходимости в ряде относительно метода φ-$C\alpha_0$, то условие (14) отпадает. Если $\varphi_n = \psi_n = 1$, то условия (14) и (15) отпадают, а если $\psi_n = 1$ и $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (5), то условие (15) отпадает и условие (14) имеет вид:

$\Sigma \varphi_n^{-1} (n+1)^\alpha \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n x$ является сходящимся при $x \in X$.

[7] Здесь и всюду дальнейшем

$$\Delta_m^\alpha \varepsilon_n = \sum_{k=n}^{m} A_{k-n}^{-\alpha-1} \varepsilon_n.$$

$$\sup_{\|x_k\|\leqslant 1}\left\|\sum_{k=0}^{m}\varphi_k^{-1}(k+1)^{\alpha}\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k x_k\right\| = O(\psi_n^{-1}) \text{ для всех } m\leqslant n. \quad (17)$$

Доказательство. Необходимость. Из условий 1° леммы 1а непосредственно следует необходимость условий (14) и (15). Из условия 2° леммы 1а выводим, что

$$\|\psi_n c_{nk}\| = O(1), \quad (18)$$

откуда при $k=n$ получаем необходимость условия (16).

Пусть $\operatorname{Re}\alpha>0$. В силу условия (16), получаем[8], что

$$\sum_{k=0}^{m}\left\|\psi_n\varphi_k^{-1}A_k^{\alpha}\sum_{s=n+1}^{\infty}A_{s-k}^{-\alpha-2}\varepsilon_s\right\| =$$

$$= O(1)\sum_{k=0}^{n}\psi_n\varphi_n^{-1}A_k^{\operatorname{Re}\alpha}\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{\psi_s\varphi_s^{-1}s^{-\operatorname{Re}\alpha}}{(s-k+1)^{\operatorname{Re}\alpha+2}} =$$

$$= O(1)\sum_{k=0}^{n}A_k^{\operatorname{Re}\alpha}\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{s^{-\operatorname{Re}\alpha}}{(s-k+1)^{\operatorname{Re}\alpha+2}} = O(1). \quad (19)$$

Так как

$$\sup_{\|x_k\|\leqslant 1}\left\|\sum_{k=0}^{m}\psi_n\varphi_k^{-1}A_k^{\alpha}\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k x_k\right\| \leqslant \sup_{\|x_k\|\leqslant 1}\left\|\sum_{k=0}^{m}\psi_n c_{nk}x_k\right\| +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\left\|\psi_n\varphi_k^{-1}A_k^{\alpha}\sum_{s=n+1}^{\infty}A_{s-k}^{-\alpha-2}\varepsilon_s\right\|,$$

то, в силу (19), из условия 2° леммы 1а следует необходимость условия (17).

Достаточность. Из условий (14) и (15) вытекает выполнение условий 1° леммы 1а. Из условий (16) и (17), в силу соотношения (19) и неравенства

$$\sup_{\|x_k\|\leqslant 1}\left\|\sum_{k=0}^{m}\psi_n c_{nk}x_k\right\| \leqslant \sup_{\|x_k\|\leqslant 1}\left\|\sum_{k=0}^{m}\psi_n\varphi_k^{-1}A_k^{\alpha}\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k x_k\right\| +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\left\|\psi_n\varphi_k^{-1}A_k^{\alpha}\sum_{s=n+1}^{\infty}A_{s-k}^{-\alpha-2}\varepsilon_s\right\|,$$

следует выполнение условия 2° леммы 1а.

При $\alpha=0, 1, \ldots$ и $\varphi_n=\psi_n=1$ из теоремы 1 получаем теорему 6 из [6]; а при $X=Y=K$, $\alpha=0, 1, \ldots$, $\psi_n=1$ и $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (5) — теорему 2 из [1], положив в ней $\beta=0$.

---

[8] Если $\alpha=0$, то условие 2° леммы 1а равносильно условию (17).

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 1$, $\alpha = 1$ *или* $\alpha = 0$ *и* $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *удовлетворяют соответственно условиям* (5) *и* (6). *Операторы* ε_n *являются множителями* ψ*-сходимости в ряде относительно метода* φ-$\mathfrak{C}^\alpha$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*[9] (16),

$$\left\{\sum_{n=0}^{m} \varphi_n^{-1}(n+1)^\alpha \Delta_m^\alpha \varepsilon_n x\right\}_{m=0,1,\dots} \tag{20}$$

$$\{\Delta_m^\alpha \varepsilon_n x\}_{m=0,1,\dots} \tag{21}$$

являются ψ*-сходящимися при* $x \in X$ *и*

$$\sup_{\|x_k\| \leqslant 1} \left\| \sum_{k=0}^{m} \varphi_k^{-1}(k+1)^\alpha \Delta^\alpha \varepsilon_k x_k \right\| = O(\psi_n^{-1}) \quad \textit{для всех } m \leqslant n. \tag{22}$$

Доказательство теоремы 2 получается из доказательства теоремы 1, если в последнем заменить числа η_{nk} через ξ_{nk} и воспользоваться вместо леммы 1а леммой 1б.

Если $X = Y = K$, $\psi_n = 1$ и $\alpha = 0, 1, \dots$, то из теоремы 2 получаем теорему 1 из [2], положив в ней $\beta = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$, $\{\varphi_n\}$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\{\psi_n\}$ — *произвольная. Операторы* ε_n *являются множителями* ψ*-сходимости в последовательности относительно метода* φ-$\mathfrak{C}^\alpha$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*[10] (16) *и*

$$\{\varepsilon_n x\} \tag{23}$$

$$\{\xi_n \varepsilon_n x\} \tag{24}$$

являются ψ*-сходящимися при* $x \in X$, *где*

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k^{-1} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-1}.$$

Доказательство. Необходимость. В силу включения $\mathfrak{C}^\alpha \subset \varphi$-$\mathfrak{C}^\alpha$, из условий 4° леммы 1в получаем необходимость условий (23) и (24). Необходимость условия (16) непосредственно вытекает из (18), при $k = n$.

---

[9] Если операторы ε_n являются множителями ψ-сходимости в ряде относительно метода φ-$\mathfrak{C}\alpha_0$, то условие (20) отпадает. Если $\varphi_n = \psi_n = 1$, то условия (20) и (21) отпадают, а при $\psi_n = 1$ и $\{\varphi_n\}$ — удовлетворяет условию (5), то условие (21) отпадает, а условие (20) имеет вид:

$\Sigma\, \varphi_n{}^{-1}(n+1)^\alpha \Delta^\alpha \varepsilon_n x$ является сходящимся при $x \in X$.

[10] При α целом условие (23) отпадает, при $\alpha = 0$ условия (24) и (16) имеют соответственно вид:

$\{\varphi_n{}^{-1}\varepsilon_n x\}$ является ψ-сходящейся при $x \in X$,

$$\|\varepsilon_n\| = O(\varphi_n \psi_n{}^{-1}). \tag{16'}$$

Если $\varphi_n = 1$, то $\xi_n = 1$, и условие (24) совпадает с условием (23), а если $\varphi_n = \psi_n = 1$, то условие (24) отпадает, и условие (23) имеет вид:

$\{\varepsilon_n x\}$ является сходящейся при $x \in X$.

Достаточность. В силу условий (23) и (24) получаем выполнение условий 4° леммы 1в, а в силу (16) — выполнение условия 2° леммы 1в.

Действительно,

$$\sup_{\|x_k\|\leqslant 1} \left\| \sum_{k=0}^{m} \psi_n c_{nk} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|\psi_n \varphi_k^{-1} A_k^{\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1} \varepsilon_n\| = $$
$$= O(1) \sum_{k=0}^{n} |A_{n-k}^{-\alpha-1}| = $$
$$= O(1).$$

Если $\alpha = 0, 1, \ldots$, то из теоремы 3 получаем следствие 10 из [3]; если после этого $X = Y = K$, $\varphi_n \sim n^{-p}$, $\psi_n \sim n^{-(p+q)}$, $p > -1$, $p + q > -1$ или $p + q$ произвольные — результаты из [11, 13], а при $\psi_n = \varphi_n = 1$ — результаты из [18], стр. 342, положив в них $\beta = 0$.

Так как для методов Чезаро

$$\eta'_{nk} = \frac{k}{n} A_k^{\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1} \quad \text{и} \quad \xi'_{nk} = \sum_{s=k}^{n} A_s^{\alpha} A_{n-s}^{-\alpha-1},$$

то воспользуясь леммой 2, получаем следующие результаты.

Теорема 4. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$ *и* $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *удовлетворяют условию* (5). *Операторы* ε_n *являются множителями* ψ*-сходимости в ряде относительно метода* φ-$|C^{\alpha}|$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*[11] (16) *и*

$$\left\{ \Delta_m^{\alpha} \frac{\varepsilon_n}{n} x \right\}_{m=0,1,\ldots} \quad \text{является } \psi\text{-сходящейся при } x \in X. \tag{25}$$

Доказательство. Необходимость условия (16) вытекает из условия 2° леммы 2а при $k = n$, а необходимость условия (25) — из условия 1° леммы 2а.

Достаточность. Из условия (25) следует выполнение условия 1° леммы 2а. В силу условия (16) получаем

$$\|\gamma_{nk}\| = O(\varphi_k^{-1} k^{\operatorname{Re}\alpha+1}) \sum_{s=k}^{n} \frac{\varphi_s \psi_s^{-1} s^{-(\operatorname{Re}\alpha+1)}}{(s-k+1)^{\operatorname{Re}\alpha+1}} =$$
$$= O(\psi_n^{-1}) \sum_{s=k}^{n} \frac{1}{(s-k+1)^{\operatorname{Re}\alpha+1}} =$$
$$= O(\psi_n^{-1}),$$

т. е. условие 2° леммы 2а тоже выполнено.

Если $\alpha = 0, 1, \ldots$, $\varphi_n = \psi_n = 1$, то из теоремы 4 получаем теорему 8 из [6] при $\beta = 0$.

---

[11] При $\alpha = 0$ необходимым и достаточным является условие (16'), а при $\psi_n = 1$ — условие (16), поскольку (25) отпадает.

Теорема 5. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$, $\{\varphi_n\}$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\{\psi_n\}$ — *произвольная. Операторы* ε_n *являются множителями* ψ*-сходимости в последовательности относительно метода* φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*[12] (16) *и* (23).

Доказательство. Необходимость условия (16) вытекает из условия 2° леммы 2в при $k = n$. В силу включения $|\mathfrak{C}^0| \subset \varphi$-$|\mathfrak{C}^\alpha|$, из условия 4° леммы 2в получаем необходимость условия (23).

Достаточность. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=k}^{n} A_s^\alpha A_{n-s}^{-\alpha-1} = 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{s=0}^{k-1} A_s^\alpha A_{n-s}^{-\alpha-1} = 1$$

при $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$, то из условия (23) вытекает выполнение условия 4° леммы 2в. В силу условия (16) получаем выполнение условия 2° леммы 2в.

Если $\alpha = 0, 1, \ldots$, то из теоремы 5 получаем следствие 13 из [3].

§ 3. Множители абсолютной ψ-сходимости

Воспользуясь леммой 3, получаем следующие результаты.

Теорема 6. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$, $\{\varphi_n\}$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\{\psi_n\}$ — *произвольная. Операторы* ε_n *являются множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно метода* φ-$|C^\alpha|$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*[13] (16).

Доказательство. Необходимость. Из условия леммы 3а выводим, что

$$\|\psi_n \bar{\Delta}_n \gamma_{nk}\| = \|\psi_n \varphi_k^{-1} \eta'_{nk} \varepsilon_k\| = O(1). \tag{26}$$

Из (26) при $k = n$ вытекает необходимость условия (16).

Достаточность. В силу условия (16) получаем, что

$$\sum_{n=k}^{\infty} \|\psi_n \bar{\Delta}_n \gamma_{nk} x\| = O(\|x\|) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\psi_n \varphi_n^{-1} n^{\operatorname{Re}\alpha} \|\varepsilon_n\|}{(n-k+1)^{\operatorname{Re}\alpha+1}} = O(\|x\|),$$

т. е. условие леммы 3а выполнено.

Если $\alpha = 0, 1, \ldots$, $\varphi_n = \psi_n = 1$, то из теоремы 6 получаем теорему 8 из [6] при $\beta = 0$.

Теорема 7. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$, $\{\varphi_n\}$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\{\psi_n\}$ — *произвольная. Операторы* ε_n *являются множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно*

---

[12] Если $\alpha = 0$, то вместо условия (16) получается условие (16').

[13] При $\alpha = 0$ необходимым и достаточным является условие (16').

метода φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$ тогда и только тогда, когда выполнено условие[14]

$$\sum (n+1)^{\mathrm{Re}\alpha}\psi_n\varphi_n^{-1}\|\varepsilon_n\| < \infty. \tag{27}$$

Доказательство. Необходимость условия (27) вытекает из условия леммы 3б при $k=n$.

Достаточность. В силу условия (27) получаем

$$\sum_n \|\psi_n \bar{\Delta}_n\gamma_{nk}x\| = O(\|x\|)\sum_n \psi_n\varphi_n^{-1}\|\varepsilon_n\|\sum_{s=k}^{n}\frac{(s+1)^{\mathrm{Re}\alpha}}{(n-s+1)^{\mathrm{Re}\alpha+1}} =$$

$$= O(\|x\|)\sum_n (n+1)^{\mathrm{Re}\alpha}\psi_n\varphi_n^{-1}\|\varepsilon_n\|,$$

т. е. условие леммы 3б выполнено.

Теорема 8. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ *или* $\alpha=0$ *и* $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *удовлетворяют соответственно условиям* (5) *и* (7). *Операторы* ε_n *являются множителями абсолютной* ψ-*сходимости в последовательности относительно метода* φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*[15] (27).

Доказательство. Необходимость условия (27) вытекает из условия леммы 3в при $k=n$.

Достаточность. Так как

$$\bar{\Delta}_n\gamma_{nk} = \varphi_k^{-1}[\varepsilon_n\xi_{nn} + \sum_{s=k}^{n-1}\bar{\Delta}_n(\varepsilon_n\xi_{ns})], \tag{28}$$

то в силу условий (7), (16) и (27) получаем, что

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\|\psi_n\varphi_k^{-1}\sum_{s=k}^{n-1}A_s^{\alpha}\bar{\Delta}_n(\varepsilon_n A_{n-s}^{-\alpha-1})\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty}(n+1)^{\mathrm{Re}\alpha}\psi_n\varphi_n^{-1}\|\varepsilon_n\|\sum_{s=k}^{n-1}|A_{n-s}^{-\alpha-1}| +$$

$$+ O(1)\sum_{n=k+1}^{\infty} n^{\mathrm{Re}\alpha}\psi_{n-1}\varphi_{n-1}^{-1}\|\varepsilon_{n-1}\|\sum_{s=k}^{n-1}|A_{n-s-1}^{-\alpha-1}| =$$

$$= O(1)\sum_{n=k+1}^{\infty}(n+1)^{\mathrm{Re}\alpha}\psi_n\varphi_n^{-1}\|\varepsilon_n\| + O(1)(k+1)^{\mathrm{Re}\alpha}\psi_k\varphi_k^{-1}\|\varepsilon_k\| =$$

$$= O(1). \tag{29}$$

Из условия (16) и (27), в силу соотношения (29), следует выполнение условия леммы 3б.

---

[14] При $\alpha=0$ необходимым и достаточным является условие

$$\sum \psi_n\varphi_n^{-1}\|\varepsilon_n\| < \infty. \tag{27'}$$

[15] При $\alpha=0$ необходимым и достаточным является условие (27'), так как из условия (27') следует выполнение условия

$$\sum \psi_n\varphi_n^{-1}\|\Delta\varepsilon_n x\| = O(\|x\|). \tag{27''}$$

Так как условие (16) следует из условия (27), то необходимым и достаточным является условие (27).

Если $\alpha = 0, 1, \ldots$, то из теоремы 8 получаем следствие 15 из [3], а если[16] после этого $X = Y = K$ и $\varphi_n = \psi_n = 1$ — теорему 1 из [18] при $\varrho = 0$.

Воспользуясь леммами 4 и 5, получаем следующие результаты.

Теорема 9. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, $\{\varphi_n\}$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\{\psi_n\}$ — *произвольная. Числа* ε_n *являются множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно методов* φ-C^α, φ-$C^{\alpha}{}_0$ *и* φ-$C^\alpha{}_O$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sum (n+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \psi_n \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| < \infty. \tag{30}$$

Доказательство. Необходимость. Из леммы 5а следует, что сходятся ряды

$$\sum_k |\psi_{n(k)} c_{n(k),k}|,$$

откуда, при $n(k) = k$, получаем необходимость условия (30).

Достаточность. Так как

$$\bar{\Delta}_n c_{nk} = \varphi_k^{-1} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-2} \varepsilon_n,$$

то

$$\sum_k \Big| \sum_{n=k}^{\infty} \psi_n (\bar{\Delta}_n c_{nk}) d_n \Big| = O(1) \sum_k \sum_{n=k} \psi_n \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| (n+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |A_{n-k}^{-\alpha-2}| =$$

$$= O(1) \sum_n (n+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \psi_n \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| \sum_{k=0}^{n} |A_{n-k}^{-\alpha-2}| =$$

$$= O(1) \sum (n+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \psi_n \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n|,$$

откуда, в силу условия (30), следует условие леммы 4а.

При $\alpha \geqslant 0$ и $\varphi_n \sim n^{-q}$ с $q > 0$, из теоремы 9 получаем множители абсолютной сходимости ряда относительно метода φ-$C^\alpha{}_O$ (см. [15]).

Теорема 10. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$, $\{\varphi_n\}$ *удовлетворяет условию* (5) *и* $\{\psi_n\}$ — *произвольная. Числа* ε_n *являются множителями абсолютной* ψ*-сходимости в ряде относительно методов* φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$ *и* φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*[17] (30).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

[16] Здесь необходимыми и достаточными являются условия (16) и (27″), но выполнение этих условий следует из условия (27).

[17] При $\alpha = 0$ необходимым и достаточным является условие

$$\Sigma \psi_n \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| < \infty. \tag{30'}$$

Если $X = Y = K$, $\alpha = 0, 1, \ldots$, и $\psi_n = 1$, то из теоремы 10 получаем теорему 3 из [2], положив в ней $\beta = 0$.

Теорема 11. *Пусть* $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ *или* $\alpha = 0$ *и* $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *удовлетворяют соответственно условиям* (5) *и* (7). *Числа* ε_n *являются множителями абсолютной* ψ*-сходимости в последовательности относительно методов* φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$ *и* φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*[18] (30).

Доказательство. Необходимость условия (30) получается аналогично тому, как и в теореме 9.

Достаточность. В силу предположений теоремы получаем

$$\sum_k \Big| \sum_{n=k}^{\infty} \psi_n (\bar{\Delta}_n c_{nk}) d_n \Big| = O(1) \sum_k \Big(\sum_{n=k}^{\infty} |\psi_n c_{nk}| + \sum_{n=k}^{\infty} |\psi_n c_{n-1,k}| \Big) =$$

$$= O(1) \sum_k \sum_{n=k}^{\infty} \psi_n |c_{nk}| =$$

$$= O(1) \sum_n (n+1)^{\mathrm{Re}\,\alpha} \psi_n \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| \sum_{k=0}^{n} \big| A_{n-k}^{-\alpha-1} \big| =$$

$$= O(1) \sum (n+1)^{\mathrm{Re}\,\alpha} \psi_n \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n|,$$

откуда, в силу условия (30), следует выполнение условия леммы 4б.

Если $\alpha = 0, 1, \ldots$, $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (7), то из теоремы 11 получаем следствие 18 из [3].

Литература

1. Абель М., Множители суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 92—105.
2. Абель М., Множители суммируемости первого рода для метода Чезаро комплексного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 145—153.
3. Абель М., Тюрнпу Х., Множители ψ-сходимости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 106—121.
4. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
5. Барон С., Паллум Э., Петерсон М., О двух теоремах Чжоу и их обобщении на двойные ряды. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. н., 1962, **11**, № 4, 277—287.
6. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. н., 1956, **5**, № 2, 108—128.
7. Кангро Г., Ламп Ю., Об одном классе матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 80—91.
8. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для методов взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 249—262.

[18] При $\alpha = 0$ необходимым и достаточным является условие (30').

9. A n d e r s e n, A. F., On the extensions within the theory of Cesàro summability of classical convergence theorem of Dedekind. Proc. London Math. Soc., (3), 1958, **8**, 1—52.
10. B o s a n q u e t, L. S., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1945, **20**, 39—48.
11. B o s a n q u e t, L. S., Note on convergence and summability factors (II). Proc. London Math. Soc., (2), 1948, **50**, 295—304.
12. B o s a n q u e t, L. S., Note on convergence and summability factors (III). Proc. London Math. Soc., (2), 1949, **50**, 482—496.
13. B o s a n q u e t, L. S., On convergence and summability factors in a sequence. Mathematika, 1954, **1**, 24—44.
14. B o s a n q u e t, L. S., C h o w, H. C., Some remarks on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 73—82.
15. C h o w, H. C., Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 459—476.
16. P e y e r i m h o f f, A., Über Summierbarkeltsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesaroverfahren I. Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, **8**, 139—156.
17. P e y e r i m h o f f, A., Über ein Lemma von H. C. Chow, J. London Math. Soc., 1957, **32**, 33—36.
18. T a y l e r, B., Absolute convergence and summability factors in a sequence. J. London Math. Soc., 1958, **33**, 341—351.

Поступило
17 VII 1966

ψ-KOONDUVUSTEGURITEST KOMPLEKSSET JÄRKU CESÀRO MENETLUSTE KORRAL

M. Abel

R e s ü m e e

Olgu X ja Y Banachi ruumid, ε_n — pidevad lineaarsed operaatorid ruumist X ruumi Y ning $\{\varphi_n\}$ ja $\{\psi_n\}$ suvalised nullist erinevad arvjadad.

Rida (1) (jada $\{x_n\}$) nimetatakse φ-C^{α}-summeeruvaks (vastavalt φ-$\mathfrak{C}^{\alpha}$-summeeruvaks), kui koondub jada (2) ning absoluutselt φ-C^{α}-summeeruvaks või φ-$|C^{\alpha}|$-summeeruvaks (vastavalt absoluutselt φ-$\mathfrak{C}^{\alpha}$-summeeruvaks või φ-$|\mathfrak{C}^{\alpha}|$-summeeruvaks), kui koondub rida (3). Analoogiliselt defineeritakse rea φ-C^{α}-tõkestatus ja φ-C^{α}-summeeruvus nulliks (jada φ-$\mathfrak{C}^{\alpha}$-tõkestatus ja φ-$\mathfrak{C}^{\alpha}$-summeeruvus nulliks), mida tähistame vastavalt φ-C^{α}_{O} ja φ-C^{α}_{0} (vastavalt φ-$\mathfrak{C}^{\alpha}_{O}$ ja φ-$\mathfrak{C}^{\alpha}_{0}$. Juhul kui $\alpha = 0$, saame rea (1) või jada $\{x_n\}$ ψ-koonduvuse- ja absoluutse φ-koonduvuse definitsioonid.

Operaatoreid ε_n nim. rea ψ-koonduvusteguriteks (absoluutseteks ψ-koonduvusteguriteks) menetluse A suhtes, kui iga φ-A-summeeruva rea (1) korral alati rida (4) on ψ-koonduv (absoluutselt ψ-koonduv), kus $A = C^{\alpha}$, $|C^{\alpha}|$ (vastavalt $A = C^{\alpha}$, $|C^{\alpha}|$, C^{α}_{O}, C^{α}_{0}).

Analoogiliselt defineeritakse ka rea ja jada ψ-kooduvustegurid (absoluutsed ψ-koonduvustegurid) menetluse φ-A suhtes, kus $A = \mathfrak{C}^{\alpha}$, $|\mathfrak{C}^{\alpha}|$ (vastavalt $A = \mathfrak{C}^{\alpha}$, $|\mathfrak{C}^{\alpha}|$, $\mathfrak{C}^{\alpha}_{O}$, $\mathfrak{C}^{\alpha}_{0}$).

Käesolevas artiklis vaadeldakse kõiki ülalnimetatud ψ-koonduvus- ja absoluutse ψ-koonduvustegurite tüüpe juhul, kui α on suvaline kompleksarv, millel $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ või $\alpha = 0$, jada $\{\varphi_n\}$ rahuldab tingimust (5) ning jada $\{\psi_n\}$ — tingimust (6) või (7).

ABOUT ψ-CONVERGENCE FACTORS FOR COMPLEX ORDER CESÀRO'S SUMMATION METHODS

M. Abel

Summary

Let X and Y be Banach spaces, ε_n — continuous linear operators from X to Y and $\{\varphi_n\}$ and $\{\psi_n\}$ — arbitrary non-zero sequences of numbers.

The series (1) (the sequence $\{x_n\}$) is said to be φ-C^α-summable (resp φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-summable), if the sequence (2) is convergent and absolutely φ-C^α-summable or φ-$|C^\alpha|$-summable (resp. absolutely φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-summable or φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$-summable), if the series (3) is convergent.

The φ-C^α-boundedness and φ-C^α-summability to zero for series (1) (φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-boundedness and φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-summability to zero for seguence $\{x_n\}$) are defined analogically and are denoted accordingly by φ-$C^\alpha{}_O$ and φ-$C^\alpha{}_0$ (accordingly by φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_o$ and φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$). The case, when $\alpha = 0$ gives us the definitions of φ-convergence and absolute φ-convergence for series (1) or sequence $\{x_n\}$

The operators ε_n are said to be ψ-convergence factors (the absolute ψ-convergence factors) of series for summation method φ-A, if for any φ-A-summable series (1), series (4) is always ψ-convergent (resp. is absolute ψ-convergent), where $A = C^\alpha$, $|C^\alpha|$ (resp. $A = C^\alpha$, $|C^\alpha|$, $C^\alpha{}_O$, $C^\alpha{}_o$).

The ψ-convergence factors (the absolute ψ-convergence factors) of series or sequence for summation method φ-$\mathfrak{A}$ are defined analogically, where $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $|\mathfrak{C}^\alpha|$ (resp. $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $|\mathfrak{C}^\alpha|$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_O$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_0$).

In the present paper we have considered all types of the above-mentioned ψ-convergence and absolute ψ-convergence factors in the case when α is any complex number with $\operatorname{Re}\alpha > 0$ or $\alpha = 0$, the sequence $\{\varphi_n\}$ satisfies the condition (5) and the sequence $\{\psi_n\}$ fulfills the condition (6) or (7).

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ И МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ

М. Тыннов

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

В настоящей статье обобщаются результаты работ [4, 5, 8—11] на полунепрерывные методы.

Метод $T = (\tau_k(\omega))$ называются *полунепрерывным*, если функции $\tau_k(\omega)$ неотрицательного аргумента ω непрерывны при всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ на множестве $\Omega = [0, \omega_0)$, где ω_0 конечное число или ∞. В частности, метод $T = (\tau_k(\omega))$ называют матричным, если ω принимает лишь целые значения $\omega = n = 0, 1, 2, \ldots$ и $\omega_0 = \infty$. Ряд Σa_k называется T-суммируемым, если существует $\lim\limits_{\omega \to \omega_0} \sigma(\omega)$, где

$$\sigma(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k(\omega) a_k;$$

T-ограниченным, если функция $\sigma(\omega)$ ограничена на Ω;
$|T|$-суммируемым, если $\sigma(\omega)$ является функцией ограниченной вариации на Ω.

Предположим здесь и всюду в дальнейшем, что

$$K(\omega, x) = \frac{1}{2} \tau_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(\omega) \cos kx$$

сходится равномерно относительно x на $[-\pi, \pi]$ при каждом $\omega \in \Omega$ и метод T регулярен, т. е.

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \tau_k(\omega) = 1,$$

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sum_k |\tau_k(\omega) - \tau_{k+1}(\omega)| < \infty.$$

В настоящей статье мы пользуемся обозначениями статьей [4, 5].

§ 2. *T*-дополнительные пространства

Аналогично, как в статье [4], можно доказать следующие леммы.

Лемма 2.1. *Если T удовлетворяет условию*

$$\sup_{\omega\in\Omega}\int_0^\pi |K(\omega,t)|\,dt = K < \infty, \tag{K}$$

то

1) $f^\circ \in E$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(\omega, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(\omega)\,(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

ограничена в пространстве E, где $E = L_\Psi$, L_p $(1 < p \leqslant \infty)$;

2) $f^\circ \in E$ *тогда и только тогда, когда $\sigma(\omega, f^\circ)$ сходится по норме в E, где*[1] $E = L_\Phi$, L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, C;

3) $f^\circ \in dV$ *(или V) тогда и только тогда, когда $\sigma(\omega, f^\circ)$ (соответственно $\frac{d}{dx}\sigma(\omega, f^0)$) ограничена в L.*

Доказательство. Для пространств L_Φ, L_Ψ, C, dV, V при регулярных матричных методах утверждения доказаны в [4] (см. стр. 67—72), а для L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в книге [1] (см. стр. 251—255). Поскольку $L_\Phi = L_p$ при $1 < p < \infty$ для $\Phi(u) = cu^p$ $(c > 0)$, то утверждение для $L_p (1 < p < \infty)$ следует из утверждения для L_Φ. Следовательно, утверждение 1) достаточно для L и L_∞, а 2) для L_Φ, L и C. Приведем ход доказательства.

Часть 1) для L_Ψ доказывается, так же как в [4]. Именно, из ограниченности $\sigma(\omega, f^\circ)$ в L_Ψ следует существование последовательности $\sigma(\omega_n, f^\circ)$ (см. [4]) и $f_1 \in L_\Psi$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega_n, f^0)\, g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, g(x)\,dx \qquad (\forall g \in L_\Phi),$$

откуда уже так же, как в [4], следует, что $f^\circ_1 = f^\circ \in L_\Psi$. Доказательство необходимости такое же как в [4].

Если $f^\circ \in L_\infty$, то аналогично как в [6] (см. стр. 94—95) можно доказать неравенство

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|\sigma(\omega, f^0)\|_C \leqslant K\,\|f^0\|_{L_\infty}. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то для любой $\{\omega_n\} \subset \Omega$ последовательность

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega_n, f^0)\, g(x)\,dx \qquad (\forall g \in L)$$

[1] Для пространства C условие (K) является и необходимым.

ограничена. Следовательно, существует сходящаяся последовательность

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega_{n_m}, f^0) g(x) dx.$$

По теореме Банаха—Штейнгауза $\exists f_1 \in L_\infty$, такая что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega_{n_m}, f^0) g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) g(x) dx \qquad (\forall g \in L).$$

Отсюда уже вытекает, что $f^\circ{}_1 = (a_k, b_k)$.

Часть 2) доказывается так же, как в [4] теорема 2, поскольку из $f^\circ \in L_\Phi$, L или C следует ограниченность $\sigma(\omega, f^\circ)$ в соответственных пространствах.

Часть 3) доказывается аналогично как для треугольной матрицы в [4].

Лемма 2.2. *Для того, чтобы $f^\circ \in L_\Phi$, L_Ψ, L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или dV необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum (a_k c_k + b_k d_k)$$

был T-суммируемым при каждом g° соответственно из L_Ψ, L_Φ, L_q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ или C.

Доказательство по методу то же самое, что в [4] (см. теоремы 6—8).

Из лемм 2.1. и 2.2. вытекают следующие включения для T-дополнительных пространств

$$(L_\Phi, T) \subset L_\Psi, \qquad (L_\Psi, T) \subset L_\Phi,$$

$$(L_p, T) \subset L_q, \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty\right)$$

$$(L_p, T) = L_q \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty,$$

$$(C, T) \subset dV.$$

Если же T удовлетворяет условию (K), то вместо этих включений имеют место равенства.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы $f^\circ \in (V, T)$ необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(\omega, F^\circ)$ сходилась ограниченно при $\omega \to \omega_0$; т. е.*

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|\sigma(\omega, F^0)\|_C < \infty$$

и

$$\sigma(\omega, F^0) = \int_{-\pi}^{x} \sigma(\omega, f^0) dt$$

сходилась при $\omega \to \omega_0$.

Доказательство. Если $f^\circ \in (V, T)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k c_k + b_k d_k) \tau_k(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega, f^0) g(x) dx$$

сходится при $\omega \to \omega_0$ для $\forall g \in V$. Тогда из теоремы Орлича (ср. [4], стр. 75) получим для каждой последовательности $\omega_n \to \omega_0$, что

$$\sup_n \|\sigma(\omega_n, F^0)\|_C < \infty$$

и (3)

$$\exists \lim_{\omega_n \to \omega_0} \sigma(\omega_n, F^0).$$

А это и значит, что выполнены условия теоремы. Обратно, условия (3) гарантируют по теореме Орлича существование

$$\lim_{\omega_n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega_n, f^0) g(x)\,dx \qquad (\forall g \in V).$$

Поскольку последний предел существует для каждой $\omega_n \to \omega_0$, то

$$\exists \lim_{\omega \to \omega_0} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega, f^0) g(x)\,dx \qquad (\forall g \in V).$$

В статье [4] (см. стр. 76) доказана

Лемма 2.3. *Для того, чтобы $f^\circ \in (E, T)$, необходимо и достаточно, чтобы $F^\circ \in (dE, T)$.*

Теперь из леммы 2.3 и теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. *Для того, чтобы $f^\circ \in (dV, T)$, необходимо и достаточно, чтобы f° был ограниченно T-суммируемым.*

Аналогично как для матричных методов (см. [4] стр. 76) можно убедиться в том, что если E — нормированное пространство, то и (E, T) — нормированное пространство, если норму определить равенством

$$\|f^0\|_{(E,T)} = \pi \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|g^0\|_E \leqslant 1} \left|\sum \tau_k(\omega)\,(a_k c_k + b_k d_k)\right|.$$

Пространство (E, T) является, кроме того, BK-пространством, если E есть BK-пространство.

Непосредственным обобщением теоремы 13 статьи [4] является следующая

Теорема 2.3. *Если $E \cap P$ всюду плотно в E, и E есть BK-пространство, то $f^\circ \in (E, T)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|g^0\|_E \geqslant 1} |\langle \sigma(\omega, f^0), g^0 \rangle| < \infty.$$

Отсюда уже вытекает (аналогично как в [4], стр. 79—80) следующий результат.

Следствие 2.4. *Для того, чтобы $f^0 \in (E, T)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|\sigma(\omega, f^0)\|_{E^*} < \infty,$$

где E есть L_Φ, L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, C или A.

Теорема 2.4. *Для того, чтобы $f^0 \in (L_\infty, T)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma(\omega, f^0)$ сходилась слабо к $f^0 \in L$ при $\omega \to \omega_0$.*

Доказательство. Если $f^0 \in (L_\infty, T) \subset L$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

существует для $\forall g \in L_\infty$. Следовательно, $\sigma(\omega, f^0)$ сходится слабо к $f \in L$ при $\omega \to \omega_0$, т. е.

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma(\omega, f^0) g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \quad (\forall g \in L_\infty). \tag{4}$$

Обратно, если $\sigma(\omega, f^0)$ сходится слабо к $f \in L$ при $\omega \to \omega_0$, то имеет место (4), и, следовательно, $f^0 \in (L_\infty, T)$.

Приведем еще следующие свойства дополнительных пространств, доказанных Гёсом [12].

Теорема 2.5. *Если T_1 суммирует все T-суммируемые ряды, то*

$$E \subset ((E, T), T_1),$$

и, если $E \subset E_1$, то

$$(E_1, T) \subset (E, T_1).$$

Примечание. Отметим, что $E = ((E, T), T)$ тогда и только тогда, когда существует E_2 такое, что $E = (E_2, T)$.

§ 3. Множители суммируемости и коэффициенты Фурье

Точно такими же рассуждениями, как в [5], исходя из результатов о T-дополнительных пространствах предыдущего параграфа, мы можем доказать следующие предложения о связи между множителями суммируемости и коэффициентами Фурье.

Теорема 3.1. *Если*

1) $\{a_k\} \in (T, T_1)$, то $K^0 \in ((dV, T), T_1)$;
2) $\{ka_k\} \in (T, T_1)$, то $S^0 \in ((V, T), T_1)$,
$S^0 \in (dV, T_1) \subset (L, T_1) \subset L_p$ $\quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *и*
$K^0 \in L_q$ $\quad (1 \leqslant q < \infty)$;
3) $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, то $K^0 \in ((L, T), T_1)$;
4) $\{ka_k\} \in (T_O, T_1)$, то $S^0 \in ((A, T), T_1)$.

Следствие 3.1. *Пусть T удовлетворяет условию* (K). *Тогда, если*

1) $\{a_k\} \in (T, T_1)$, то $K^0 \in dV$;
2) $\{ka_k\} \in (T, T_1)$, то $S^0 \in V$;
3) $\{a_k\} \in (T_O, T_1)$, то $K^0 \in L$;
4) $\{ka_k\} \in (T_O, T_1)$, то $S^0 \in A$.

Теорема 3.2. *Пусть T абсолютно суммирует любой $f^0 \in V$. Тогда, если*

1) $\{a_k\} \in (|T|, T_1)$, то $K^0 \in (V, T_1)$;
2) $\{ka_k\} \in (|T|, T_1)$, то $S^0 \in (dV, T_1)$.

§ 4. Мультипликаторы и дополнительные пространства

Теоремы настоящего параграфа дают некоторые необходимые и достаточные условия для классов мультипликаторов, связанных с дополнительными пространствами. Предложения мы даём без доказательств, поскольку они доказываются аналогично, как в [5].

Теорема 4.1. *Если E — инвариантное относительно сдвига аргумента ВК-пространство, то $\{\lambda_k\} \in (E, (dV, T))$ тогда и только тогда, когда $K^0 = \Sigma \lambda_k \cos kx \in (E, T)$.*

Теорема 4.2. *Если E есть ВК-пространство и P всюду плотно в E, а ВК-пространства E_0 и E_1 являются определяющими многообразиями для пространства E, то*

$$(E_0, (E, T)) = (E_1, (E, T)).$$

Теорема 4.3. *Если E — инвариантное относительно сдвига аргумента ВК-пространство и P всюду плотно в E, то $\{\lambda_k\} \in$ $\in (E, (dV, T)) = (E, C_{TN}) = (dV, (E, T)) = (L, (E, T))$ тогда и только тогда, когда $K^0 \in (E, T)$.*

Из теорем 4.1—4.3 получим следующие конкретные результаты.

Следствие 4.1. *Последовательность $\{\lambda_k\}$ тогда и только тогда является мультипликатором классов*:

1) (L_Φ, C_{TN}), *если* $K^0 \in (L_\Phi, T)$;
2) (L_p, C_{TN}), *если* $K^0 \in L_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ 1 < p < \infty\right)$;
3) (L, C_{TN}), *если* $K^0 \in (L, T)$;
4) (C, C_{TN}), *если* $K^0 \in (C, T)$.

Следствие 4.2. *Если $E = L_\Phi$, L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ или C, то*

$$(dV, (E, T)) = (L, (E, T)).$$

Важным является и следующий общий результат о классах мультипликаторов.

Теорема 4.4. *Для любых E и E_1 имеет место включение*

$$(E, E_1) \subset [(E_1, T), (E, T)].$$

§ 5. О связи между классами множителей суммируемости и классами мультипликаторов

В настоящем параграфе обобщаем теоремы 5.1—5.6 статьи [5], характеризующие связи между классами множителей суммируемости и мультипликаторов. Доказательства мы опускаем, поскольку они аналогичны доказательствам соответствующих теорем статьи [5]. В доказательствах надо применять теоремы о связи между множителями суммируемости и дополнительными пространствами, которые рассматривались в § 3 и теоремы о мультипликаторах Харшиладзе [7], Скворцовой [2, 3] и Верблюнского [13].

Теорема 5.1. *Для каждого E имеет место*

$$(T, T_1) \subset ((E, T), (E, T_1)),$$
$$(T, T_1) \subset (E, ((E, T), T_1)).$$

Из теоремы 5.1 вытекает

Следствие 5.1. *Если T удовлетворяет условию* (K) и $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\}$ *является мультипликатором классов*

$$[dV, (C, T_1)] \subset (dV, dV), (L_p, L_p) \quad (1 < p < \infty),$$
$$[L_\infty, (L, T_1)] \subset (L_\infty, L_\infty), [L, (L_\infty, T_1)] \subset (L, L),$$
$$[L_\Phi, (L_\Psi, T_1)] \subset (L_\Phi, L_\Phi), [C, (dV, T_1)],$$
$$[L_\Psi, (L_\Phi, T_1)] \subset (L_\Psi, L_\Psi).$$

Теорема 5.2. *Если* $\{k\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\}$ *является мультипликатором классов* $(\bar{R}, C)$ (R, C), (V_1, L), (D, L), $(L_p, C_{T\,N}) = [L_p, (dV, T_1)]$.

Теорема 5.3. *Пусть T удовлетворяет условию* (K). 1) *Если* $\{\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\}$ *является мультипликатором классов*: (C, C_{TN}), (C_N, C_N), (D, dV), (L, L_N), (V_1, V_1). 2) *Если* $\{k\lambda_k\} \in (T, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\} \in (dV, V)$.

Теорема 5.4. *Пусть T удовлетворяет условию* (K). 1) *Если* $\{\lambda_k\} \in (T_O, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\}$ *является мультипликатором классов*: $(D, L), (V_1, L)$, (R, C). 2) *Если* $\{k\lambda_k\} \in (T_O, T_1)$, *то* $\{\lambda_k\} \in (dV, A)$.

Теорема 5.5. *Пусть T абсолютно суммирует любой $f^0 \in V$. Тогда*

$$(|T|, T_1) \subset (V, (dV, T_1)).$$

Здесь мы получили для мультипликаторов условия, выраженные через множителей суммируемости. Для многих классов множителей суммируемости условия принадлежности хорошо изучены, причем получены эффективные условия.

Литература

1. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва 1958.
2. Скворцова М. Г., К теории множителей, преобразующих ряды Фурье. Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1959, 3, 307—326.

3. Скворцова М. Г., О множителях преобразования рядов Фурье некоторых классов функций. Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1961, **13**, 147—150.
4. Тыннов М., T-дополнительные пространства коэффициентов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 65—81.
5. Тыннов М., Множители суммируемости, коэффициенты Фурье и мультипликаторы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 82—97.
6. Харди Г. Х., Рогозинский В. В., Ряды Фурье. Москва, 1962.
7. Харшиладзе Ф. И., Множители равномерной сходимости. Тр. Тбилисск. ун-та, 1960, **27**, 195—208.
8. Goes, G., BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Math. Z., 1959, **70**, 345—371.
9. Goes, G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren Math. Ann., 1959, **137**, 371—384.
10. Goes, G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorem und Multiplikatoren. Studia math., 1960, **19**, 133—148.
11. Goes, G., Identische Multiplikatorenklassen und C_k-Basen in C_k-komplementären Fourierkoeffizientenräumen. Math. Nachr., 1960, **21**, 150—159.
12. Goes, G., Complementary Species of Fourier Coefficients, Convolutions, and Generalized Tranformations and Operators between. BK-spaces J. Math. und Mech., 1961, **10**, 135—157.
13. Verblunsky, S., On some classes of Fourier series. Proc. London Math., Soc., 1932, **33**, 287—327.

Поступило
27 VI 1968

FORIER' KORDAJAD JA SUMMEERUVUSTEGURID

M. Tõnnov

Resümee

Artiklis üldistatakse artiklites [4, 5] saadud tulemused täiendruumide Fourier' kordajate ja multiplikaatorite karakteristika kohta üldisele poolpideva menetluse T juhule. Menetluseks T võib erijuhul olla ka maatriksmenetlus.

FOURIERKOEFFIZIENTEN UND SUMMIERBARKEITSFAKTOREN

M. Tõnnov

Zusammenmassung

In dem vorliegenden Artikel wird die in [4, 5] vom Autor begonnene Charakterisierung von Fourierkoeffizientenräumen, Fourierkoeffizienten und Multiplikatoren mit Summierbarkeitsfaktoren fortgesetzt, dazu gebraucht man Summierbarakeitsfaktoren für die allgemeinen Verfahren $T = (\tau_k(\omega))$ und $T_1 = (\tau_k{}^1(\omega))$, wobei für das Verfahren T die Bedingung (K) gilt, und T-komplementäre Fourierkoeffizientenräume. Hier mag T auch stetiges Verfahren werden (zum Beispiel das Verfahren Abels). Resultate sind derartig wie in [4, 5].

СОПРЯЖЕННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

М. Тыннов

Кафедра математического анализа

Из определения дополнительного пространства[1] вытекает, что всегда имеет место включение $(E, T) \subset E^*$. В статье [1] (см. теорема 2.3 и следствие 2.1) мы видели, что дополнительные и сопряженные пространства совпадают во многих случаях. Например, $(L_p, T) = L_q = L^*_p$ $(1 < p < \infty,\ 1/p + 1/q = 1)$, а если T удовлетворяет условию (K), то $(C, T) = dV = C^*$, $(L, T) = L_\infty = L^*$. Возникает вопрос: как обстоит дело в общем случае? Можно ответить так: если все $f^0 \in E$ являются T-суммируемыми по норме пространства E, то $(E, T) = E^*$ алгебраическом смысле, а топологии обоих пространств равносильны. В этом нас убеждает[2]

Теорема. *Если E является BK-пространством и $E = E_{TN}$, то $(E, T) = E^*$.*

Доказательство. Пусть $E = E_{TN}$. Тогда для всех $f^0 \in E$

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \|\sigma(\omega, f^0) - f\|_E = 0.$$

Если $\varphi \in E^*$, то, в силу неравенства

$$|\varphi[\sigma(\omega, f^0)] - \varphi(f^0)| \leqslant \|\varphi\|_{E^*} \|\sigma(\omega, f^0) - f^0\|_E,$$

мы имеем

$$\varphi(f_0) = \lim_{\omega \to \omega_0} \varphi[\sigma(\omega, f^0)] =$$

$$= \lim_{\omega \to \omega_0} \sum \tau_k(\omega) [a_k \varphi(\cos kx) + b_k \varphi(\sin kx)]$$

для всех $f^0 = (a_k, b_k) \in E$. Последний предел существует для каждого $f^0 \in E$, следовательно, $(\varphi(\cos kx), \varphi(\sin kx)) \in (E, T)$. А каждым $g^0 = (c_k, d_k)$ из (E, T) определяется линейный непрерывный функционал

$$\varphi(f^0) = \lim_{\omega \to \omega_0} \sum_k \tau_k(\omega) (a_k c_k + b_k d_k) = \lim_{\omega \to \omega_0} \langle \sigma(\omega, f^0), g^0 \rangle, \quad (1)$$

[1] Здесь мы сохраняем обозначения статьи [1].

[2] Для метода Чезаро эта теорема доказана Гёсом [2].

где $\varphi \in E^*$. Следовательно, существует взаимнооднозначное соответствие между элементами пространств (E, T) и E^*. Кроме того, это соответствие есть изоморфизм.

Покажем, что (E, T) и E^* можно отождествить при $E = E_{TN}$ и с топологической точки зрения. Если $f^0 \in E = E_{TN}$, то

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|\sigma(\omega, f^0)\|_E < \infty.$$

Но $\sigma(\omega, f)$ является непрерывным линейным оператором из E в E при каждом $\omega \in \Omega$. По принципу равномерной ограниченности для каждого $f^0 \in E$

$$\sup_{\omega \in \Omega} \|\sigma(\omega, f^0)\|_E \leqslant \beta \|f^0\|_E.$$

Теперь

$$\begin{aligned}
\|g^0\|_{(E,T)} &= \pi \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|f^0\|_E \leqslant 1} |<g^0, \sigma(\omega, f^0)>| \leqslant \\
&\leqslant \pi \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|\sigma(\omega, f^0)\|_E \leqslant \beta} |<g^0, \sigma(\omega, f^0)>| \leqslant \\
&\leqslant \pi\beta \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|\sigma(\omega, f^0)\|_E \leqslant 1} |<g^0, \sigma(\omega, f^0)>| \leqslant \\
&\leqslant \pi\beta \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|\sigma(\omega, f^0)\|_E \leqslant 1} |\lim_{\varkappa \to \omega_0} \sigma\{\varkappa, <g^0, \sigma(\omega, f^0)>\}| \leqslant \\
&\leqslant \pi\beta \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|f^0\|_E \leqslant 1} |\lim_{\varkappa \to \omega_0} \sigma(\varkappa, <g^0, f^0>)| = \\
&= \pi\beta \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|f^0\|_E \leqslant 1} |\lim_{\varkappa \to \omega_0} <\sigma(\varkappa, f^0), g^0>| = \\
&= \pi\beta \sup_{\|f^0\|_E \leqslant 1} |\lim_{\varkappa \to \omega_0} <\sigma(\varkappa, f^0), g^0>|.
\end{aligned}$$

Имея в виду, что (1) является непрерывным линейным функционалом в $E = E_{TN}$, мы доказали неравенство

$$\|g_0\|_{(E,T)} \leqslant \beta\pi \|g^0\|_{E^*},$$

где β — положительная постоянная, независящая от $g^0 \in (E, T)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\|g^0\|_{E^*} &= \sup_{\|f^0\|_E \leqslant 1} |\lim <f^0, \sigma(\omega, g^0)>| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|f^0\|_E \leqslant 1} |<f^0, \sigma(\omega, g^0)>| = \\
&= \frac{1}{\pi} \pi \sup_{\omega \in \Omega} \sup_{\|f^0\|_E \leqslant 1} |<f^0, \sigma(\omega, g^0)>| = \\
&= \frac{1}{\pi} \|g^0\|_{(E,T)}.
\end{aligned}$$

Тем самым мы и доказали неравенство

$$\|g^0\|_{(E,T)} \leqslant \beta\pi \|g^0\|_{E^*} \leqslant \beta \|g^0\|_{(E,T)},$$

откуда и вытекает, что топологии в пространствах (E, T) и E^* равносильны при $E = E_{TN}$. Теорема доказана.

Если $E = E_{TN}$, то $P \cap E$ всюду плотно в E. Следовательно, по теореме 2.3 статьи [1] будет $f^0 \in (E, T)$ тогда и только тогда, когда $\|f^0\|_{(E,T)} < \infty$. Но теперь по нашей теореме

$$\|f^0\|_{(E,T)} \leqslant \beta\pi \|f^0\|_{E^*} \leqslant \beta \|f^0\|_{(E,T)}$$

$(0 < \beta = \text{const})$ и $(E, T) = E^*$. Таким образом, нами доказано

Следствие 1. *Если E является BK-пространством и $E = E_{TN}$ то $f^0 \in (E, T) = E^*$ тогда и только тогда, когда $\|f^0\|_{E^*} < \infty$.*

Из теоремы можно делать еще следующий вывод о сравнении дополнительных пространств:

Следствие 2. *Если E является BK-пространством и $E = E_{TN}$, то $(E, T) = (E, T_1)$ для всех $T_1 = (\tau^1{}_k(\omega))$, суммирующих все T-суммируемые ряды.*

Доказательство. Действительно, имеем $(E, T) \subset (E, T_1)$, а с другой стороны $(E, T) = E^*$. Если $f^0 \in (E, T_1)$, то

$$<\sigma^1(\omega, f^0), g^0> = \sum \tau^1{}_k(\omega)\,(a_k c_k + b_k d_k)$$

является непрерывным линейным функционалом, сходящимся при $\omega \to \omega_0$ для каждого $g^0 \in E$. Следовательно,

$$f^0 \in E^* = (E, T).$$

Литература

1. Тыннов М., Коэффициенты Фурье и множители суммируемости. Настоящий сборник, стр. 194—201.
2. Goes, G., *BK*-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten Math. Z., 1959, 70, 345—371.

Поступило
29 VIII 1968

TÄIEND- JA KAASRUUMID

M. Tõnnov

Resümee

Artiklis uuritakse, mis puhul kaas- ja täiendruumid langevad ühte. Tõestatakse, et T-täiendruum (E, T) ja kaasruum E^* ühtivad algebralises mõttes ning topoloogiad on ekvivalentsed, kui ruum E on BK-ruum ja tema Fourier' read on T-summeeruvad E normi järgi.

KOMPLEMENTÄRRÄUME UND CONJUGATE RÄUME

M. Tõnnov

Zusammenmassung

Im vorliegenden Artikel beweist man, dass T-komplementärraum (E, T) und der conjugate Raum E^* gleich wie Banach Räume sind, wenn alle Fourierreihen (von dem BK-Raum E) T-summierbar in E sind.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ И МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ

М. Скворцова

Кабардино-Балкарский государственный университет

§ 1. Постановка задачи и обозначения

Гёс [6—8] ввёл понятие C^α-дополнительного пространства к пространству E коэффициентов Фурье. Тыннов [5] обобщил понятие дополнительного пространства, введя понятие T-дополнительного пространства. Результаты Тыннова по проблеме мультипликаторов для дополнительных пространств представляют собой обобщение результатов Гёса в этом направлении. Используя утверждения о мультипликаторах Верблюнского [10], Гёса [6, 7], Качмажа [9], Тыннова [5], а также утверждения о множителях суммируемости Гёса [8] и Тыннова [5], в настоящей статье мы излагаем наши результаты о соотношениях между классами мультипликаторов и о связи между множителями суммируемости и мультипликаторами.

Сохраняем обозначения, введённые в работе [5]. Через P обозначаем множество всех тригонометрических полиномов, а через T — полунепрерывный метод суммирования (см. [5]).

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что она преобразует каждый чётный ряд класса E в ряд класса E_1, то будем записывать: $\{\lambda_n\} \in (E, E_1)^+$.

Если последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что преобразует каждый нечётный ряд класса E в ряд класса E_1, то будем записывать: $\{\lambda_n\} \in (E, E_1)^-$.

§ 2. Вспомогательные результаты

Для доказательства наших теорем нужны следующие леммы.

Лемма 2.1. *Если E и (E,T) суть BK-пространства, а P всюду плотно в инвариантном относительно сдвига аргумента пространстве E, то для того, чтобы $\{\lambda_n\}$ была мультипликатором класса $[E, (dV, T)] = (E, C_{TN})$, необходимо и достаточно, чтобы было*[1] $K^\circ = \Sigma \lambda_n \cos nx \in (E, T)$.

Лемма 2.2. *Если E — инвариантное относительно сдвига аргумента ВК-пространство и P всюду плотно в E, то для того, чтобы было $\{\lambda_n\} \in [dV, (E, T)] = [L, (E, T)]$, необходимо и достаточно выполнение условия $K^\circ \in (E, T)$.*

Доказательства лемм 2.1 и 2.2 даны в статье [5].

Лемма 2.3. *Для того, чтобы было $\{\lambda_n\} \in (L, L_N) = (C, C_N)$, необходимо и достаточно выполнение условия $K^\circ \in (C, C^0)$.*

Доказательство дано в статье [7], стр. 382—383.

В дальнейшем условие, необходимое и достаточное для того, чтобы $\{\lambda_n\}$ была мультипликатором класса (E, E_1), будем называть кратко условием (E, E_1). Кроме лемм 2.1—2.3, мы будем пользоваться и другими условиями для мультипликаторов. Эти условия изложены в работах [2—4, 7, 9, 10].

§ 3. О классах мультипликаторов

В этом параграфе излагаем некоторые теоремы о классах мультипликаторов.

Теорема 3.1. *Если*[2] $\{\lambda_n\} \in (L_p, C_{TN})$, *то*

$$\{n\lambda_n\} \in [V^p, (C, T)]^+ \cap [L_p, (A, T)]^+.$$

Доказательство. Если $\{\lambda_n\} \in (L_p, C_{TN})$, а последовательность $\{\mu_n\}$ выбрана так, что ряд

$$\sum \frac{\mu_n}{n} \cos nx \tag{3.1}$$

принадлежит классу V^p $(1 < p < \infty)$, то — как показано в работе [9] — будет $\{\mu_n\} \in (C, L_p)$, а потому $\{\mu_n\lambda_n\} \in (C, C_{TN})$. По лемме 2.1, получим, что ряд

$$\sum \mu_n\lambda_n \cos nx \tag{3.2}$$

принадлежит (C, T). Сравнивая полученное для рядов (3.1) и (3.2), замечаем, что $\{n\lambda_n\} \in [V^p, (C, T)]^+$.

Далее, выберем последовательность $\{\mu_n\}$ так, чтобы ряд

$$\sum \frac{\mu_n}{n} \sin nx \tag{3.3}$$

принадлежал L_p. Тогда, в силу условия (A, L_p) (см. [9]), получаем, что $\{\mu_n\} \in (A, L_p)$, а потому $\{\mu_n\lambda_n\} \in (A, C_{TN})$. По лемме 2.1, ряд (3.2) принадлежит (A, T). Применяя теорему М. Рисса (см. [1], стр. 404), получаем, что $\{n\lambda_n\} \in [L_p, (A, T)]^+$.

Теорема 3.2. *Если* $\{\lambda_n\} \in (B, C_{TN})$, *то* $\{\lambda_n\} \in (L_p, L_p)$, *а* $\{n\lambda_n\} \in [\overline{V}, (C, T)]^+ \cap [\overline{B}, (A, T)]^+$.

---

[1] Индексы принимают все значения от 1 до ∞, если границы их изменения не указаны.

[2] Рассматривая L_p, во всей статье полагаем $1 < p < \infty$.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\} \in (B, C_{TN})$. Возьмём последовательность $\{\mu_n\}$ так, чтобы ряд

$$\sum \mu_n \cos nx \tag{3.4}$$

принадлежал L_p. Тогда, в силу условия[3] (L_q, B) (см. [9]), получаем, что $\{\mu_n\} \in (L_q, B)$. Поэтому $\{\mu_n\lambda_n\} \in (L_q, C_{TN})$. В силу леммы 2.1, ряд (3.2) принадлежит L_p. Применяя теорему М. Рисса, заключаем, что $\{\lambda_n\} \in (L_p, L_p)$.

А теперь пусть последовательность $\{\mu_n\}$ взята так, что ряд (3.3)принадлежит V. В силу условия (C, B) (см. [10]), будет $\{\mu_n\} \in (C, B)$, а потому $\{\mu_n\lambda_n\} \in (C, C_{TN})$. По лемме 2.1, ряд (3.2) принадлежит (C, T). Следовательно, $\{n\lambda_n\} \in [\bar{V}, (C, T)]^+$.

Если $\{\lambda_n\} \in (C, C_{TN})$, а последовательность $\{\mu_n\}$ выбрана так, что ряд (3.3) принадлежит B, то, по условию (A, B) (см. [10]), получаем, что $\{\mu_n\} \in (A, B)$, а потому $\{\mu_n\lambda_n\} \in (A, C_{TN})$. По лемме 2.1, ряд (3.2) принадлежит (A, T). Видим, что $\{n\lambda_n\} \in$ $\in [B, (A, T)]^+$.

Теорема 3.3. *Если* $\{\lambda_n\} \in (L, C_{TN})$, *то*

$$\{n\lambda_n\} \in (V^p, L_p)^- \cap [\bar{V^1}, (C, T)]^+, \ a \ \{n^2\lambda_n\} \in [V, (A, T)]^+.$$

Доказательство. Выберем последовательность $\{\mu_n]$ так, чтобы ряд (3.3) принадлежал V^p $(1 < p < \infty)$. Тогда, по условию (L_q, L) (см. [9]), будет $\{\mu_n\} \in (L_q, L)$, а потому $\{\mu_n\lambda_n\} \in$ $\in (L_q, C_{TN})$. По лемме 2.1, получаем, что ряд (3.2) принадлежит L_p. В силу теоремы М. Рисса, $\{n\lambda_n\} \in (V^p, L_p)^-$.

Если последовательность $\{\mu_n\}$ выбрана так, что ряд (3.3) принадлежит V^1, то, по условию (C, L) (см. [10]), получаем, что $\{\mu_n\} \in (C, L)$, а потому $\{\mu_n\lambda_n\} \in (C, C_{TN})$. Значит, ряд (3.2) принадлежит (C, T). Отсюда: $\{n\lambda_n\} \in [\bar{V^1}, (C, T)^+]$.

Если же последовательность $\{\mu_n\}$ выбрана так, что ряд

$$\sum \frac{\mu_n}{n^2} \cos nx \tag{3.5}$$

принадлежит V, то, согласно условию (A, L) (см. [10]), будет $\{\mu_n\} \in (A, L)$. Поэтому $\{\mu_n\lambda_n\} \in (A, C_{TN})$. Отсюда заключаем, что ряд (3.2) принадлежит (A, T). Значит, $\{n^2\lambda_n\} \in [V, (A, T)]^+$.

Замечание. Мы не будем доказывать остальных теорем этого параграфа, так как их доказательства аналогичны доказательствам теорем, рассмотренных выше. После формулировки каждой теоремы лишь укажем те условия для мультипликаторов, которые надо использовать при её доказательстве.

Теорема 3.4. *Если* $\{\lambda_n\} \in (A, C_{TN})$, *то*

$$\{\lambda_n\} \in [V, (L, T)]^+ \cap [V^1, (C, T)]^+ \cap (V^p, L_p)^+,$$
$$\{n\lambda_n\} \in [\bar{V}, (A, T)]^+.$$

---

[3] Во всей статье $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство основано на применении условий: (L, A) и (L, C_{TN}), (C, A) и (C, C_{TN}), (L_q, A) и (L_q, C_{TN}), (A, A) и (A, C_{TN}).

Теорема 3.5. *Пусть E и (E, T) суть ВК-пространства, а множество P всюду плотно в инвариантном относительно сдвига аргумента пространстве E. Если $\{\lambda_n\}$ принадлежит хотя бы одному из классов мультипликаторов $[(dV, T), C_{TN}]$, (C_{TN}, C_{TN}), $[C_{TN}, (dV, T)]$, $[(dV, T), (dV, T)]$, то $\{\lambda_n\} \in [(E, T), (E, T)]^+$.*

Доказательство получается при использовании условий: $[E, (dV, T)]$ и (E, C_{TN}), (E, C_{TN}), (E, C_{TN}) и (E, C_{TN}), (E, C_{TN}) и $[E, (dV, T)]$, $[E, (dV, T)]$ и $[E, (dV, T)]$.

Теорема 3.6. *Пусть E — инвариантное относительно сдвига аргумента ВК-пространство и P всюду плотно в E. Тогда*

а) $[(dV, C^1), (E, T)] \subset [B, (E, T)]^+$;

б) $[L_N, (E, T)] \subset [(C, C^0), (E, T)]^+$;

в) $[R, (E, T)] \subset [B, (E, T)]^+$,
$[C, (E, T)] \subset [B, (E, T)]^+$;

г) $[C_N, (E, T)] \subset [(L, C^0), (E, T)]^+$,
$[(dV, C^0), (E, T)] \subset [(L, C^0), (E, T)]^+$.

Доказательство основано на применении условий: а) $[L, (dV, C^1)]$, $[L, (E, T)]$; б) (L, L_N), $[L, (E, T)]$; в) (L, R) и $[L, (E, T)]$, (L, C) и $[L, (E, T)]$; г) (L, C_N) и $[L, (E, T)]$, $[L, (dV, C^0)]$ и $[L, (E, T)]$.

Теорема 3.7. *Пусть $E = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, L_Φ, C, A. Тогда:*

а) $(C, C_{TN}) \subset [(E, C^1), (E, T)]^+$;

б) $(C_{TN}, C) \subset [(E, T), (E, C^1)]^+$.

Доказательство требует применения условий: а) (E, C) и (E, C_{TN}), б) (E, C_{TN}) и (E, C).

§ 4. О связи между классами множителей суммируемости и классами мультипликаторов

В работе [5] Тыннов доказал ряд теорем о связи между множителями суммируемости и мультиприкаторами. В этом же направлении в настоящем параграфе излагаем некоторые новые результаты.

Теорема 4.1. *Если $\{\lambda_n\} \in (T, T_1)$, где T удовлетворяет условию* (К), *то $\{\lambda_n\}$ является мультипликатором классов*[4] *(R, R), (V, V), (A, A), (C, R), (A, V), (R, B), (V^s, V^s), $(Q^s_{\beta,1}, Q^s_{\beta,1})$, (A_2, A_2), $(Q_{\beta,k}, Q_{\beta,k})$, $(\tilde{Q}_{\beta,k}, \tilde{Q}_{\beta,k})$, (E, dV), где E — любой функциональный класс, принадлежащий классу L.*

[4] Во всей статье $s \geqslant 1$, k — натуральное число.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\} \in (T, T_1)$, где T удовлетворяет условию (К). Тогда (см. [5]) получаем: $K^\circ \in dV$. А это условие, как показано в работах [4, 10], является достаточным для того, чтобы $\{\lambda_n\}$ была мультипликатором всех рассматриваемых классов.

Теорема 4.2. *Если $\{n\lambda_n\} \in (T, T_1)$, где T удовлетворяет условию* (К), *то $\{\lambda_n\}$ — мультипликатор классов* $(\overline{L}, A)$, $(\overline{E}, V)$, *где E — любой функциональный класс, принадлежащий классу L.*

Доказательство. Пусть $\{n\lambda_n\} \in (T, T_1)$. Тогда, в силу утверждения из статьи [5], ряд

$$S^\circ = \sum \lambda_n \sin nx$$

принадлежит классу V. Отсюда (см. [4, 10]) следует, что $\{\lambda_n\}$ есть мультипликатор классов $(\overline{L}, A)$, $(\overline{E}, A)$, где E — любой функциональный класс, принадлежащий классу L.

Теорема 4.3. *Если числа $n\lambda_n$ являются множителями сходимости для класса сходящихся рядов, то $\{\lambda_n\}$ есть мультипликатор* классов (dV, L_p), (L_q, B), (L_q, R), (L_q, C), (L, L_p), $(\overline{L}, L_p)$, (B, L_p).

Доказательство. Пусть числа $n\lambda_n$ являются множителями сходимости для класса сходящихся рядов. Тогда (см. [8], стр. 138) получаем, что $K^\circ \in L_p$. Но если $K^\circ \in L_p$, то последовательность $\{\lambda_n\}$ есть мультипликатор всех рассматриваемых классов (см. [9,2]).

Теорема 4.4. *Если числа λ_n являются множителями сходимости для класса сходящихся рядов, то $\{\lambda_n\}$ есть мультипликатор классов* (V, L_p), (A, L_p).

Доказательство. Пусть числа λ_n являются множителями сходимости для класса сходящихся рядов. В таком случае (см. [8], стр. 138) ряд

$$\sum \frac{\lambda_n}{n} \sin nx \tag{4.1}$$

принадлежит классу L_p. А это условие является достаточным для того, чтобы $\{\lambda_n\}$ была мультипликатором классов (V, L_p), (A, L_p) (см. [9]).

Теорема 4.5. *Если $\{\lambda_n\} \in (T_O, T_1)$, где T удовлетворяет условию* (К), *то $\{\lambda_n\}$ есть мультипликатор классов* (V, A), $[B, (dV, C^1)]$, (E, L), *где E — любой функциональный класс, принадлежащий классу L.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\} \in (T_O, T_1)$. Тогда (см. [5]) ряд (4.1) принадлежит классу A. А это условие достаточно для того, чтобы $\{\lambda_n\}$ была мультипликатором класса (V, A) (см. [10]) и класса (E, L), где E — любой функциональный класс, принадлежащий классу L (см. [4]).

Далее, из условия, что ряд (4.1) принадлежит классу A, следует, что $K^\circ \in L$. Условие $K^\circ \in L$ достаточно для того, чтобы было $\{\lambda_n\} \in [B, (dV, C^1)]$ (см. [7], стр. 283).

Теорема 4.6. *Если* $\{n\lambda_n\} \in (T_O, T_1)$ *и при этом* T *удовлетворяет условию* (К), *то* $\{\lambda_n\}$ *есть мультипликатор класса* $(\bar{E}, A)$, *где* E — *любой функциональный класс, принадлежащий классу* L.

Доказательство. Пусть $\{n\lambda_n\} \in (T_O, T_1)$. Тогда (см. [5]) получаем, что $S^\circ \in A$. Условие $S^\circ \in A$ достаточно для того, чтобы было $\{\lambda_n\} \in (\bar{E}, A)$ (см. [4]).

Теорема 4.7. *Если* $\{\lambda_n/n\} \in (T, T_1)$, *где* T *удовлетворяет условию* (К), *то* $\{\lambda_n\}$ *есть мультипликатор класса* $(\bar{A}, L)$.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n/n\} \in (T, T_1)$. Отсюда вытекает (см. [5]), что ряд

$$\sum \frac{\lambda_n}{n} \cos nx \tag{4.2}$$

принадлежит классу dV. Поэтому ряд

$$\sum \frac{\lambda_n}{n^2} \sin nx$$

принадлежит классу V. А это, в силу условия $(\bar{A}, L)$, означает, что $\{\lambda_n\} \in (\bar{A}, L)$ (см. [10]).

Теорема 4.8. *Если* $\{\lambda_n/n\} \in (T_O, T_1)$, *где* T *удовлетворяет условию* (К), *то* $\{\lambda_n\}$ *есть мультипликатор класса* $(\bar{V}, L)$.

Доказательство. Если $\{\lambda_n/n\} \in (T_O, T_1)$, то получаем, что ряд (4.2) принадлежит классу L (см. [5]). А это, в силу условия $(\bar{V}, L)$, означает, что $\{\lambda_n\} \in (\bar{V}, L)$ (см. [10]).

Литература

1. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I. Москва, 1965.
2. Скворцова М. Г., Некоторые теоремы о преобразованиях рядов Фурье. Уч. зап. Кабардино-Балкарск. пед. ин-та, 1957, **12**, 55—61.
3. Скворцова М. Г., Некоторые новые теоремы о классах множителей, преобразующих ряды Фурье (часть 1). Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1961, **13**, 141—147.
4. Скворцова М. Г., Мультипликаторы рядов Фурье (часть 2). Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, 1967, **36**, 60—64.
5. Тыннов М., Множители суммируемости и коэффициенты Фурье. Настоящий сборник, стр. 194—201.
6. Goes, G., BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Math. Z., 1959, **70**, 345—371.
7. Goes, G., Komplementäre Fourierkoeffizienräume und Muttiplikatoren. Math. Ann., 1959, **137**, 371—384.
8. Goes, G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorem und Multiplikatoren. Studia math., 1960, **19**, 133—148.

9. K a c z m a r z, S., On some classes of Fourier series. J. London Math. Soc., 1933, 8, 39—46.
10. V e r b l u n s k y, S., On some classes of Fourier series. Proc. London Math. Soc., 1932, 33, 287—327.

Поступило
15 XII 1967

MULTIPLIKAATORID JA SUMMEERUVUSTEGURID

M. Skvortsova

R e s ü m e

Artiklis kasutatakse töödes [5—10] antud täiendruumide ja Fourier' kordajate ning multiplikaatorite karakteristikat, et leida uusi seoseid multiplikaatorite klasside ja summeeruvustegurite klasside vahel. Töös on leitud ka mõned multiplikaatorite klasside eneste vahelised suhted.

MULTIPLIKATOREN UND SUMMIERBARKEITSFAKTOREN

M. Skvortsova

Z u s a m m e n m a s s u n g

Goes [6—8] hat den Begriff des zum E-Raum der Fourierkoeffizienten $C\alpha$-komplementären Raumes eingeführt. Tõnnov [5] verallgemeinerte den Begriff des komplementären Raumes, indem er den Begriff des T-komplementären Raumes einführte.

Indem wir die Behauptungen über die Multiplikatoren von Verblunsky [10], Goes [6, 7], Kaczmarz [9], Tõnnov [5], sowie die Behauptungen über die Summierbarkeitsfaktoren von Goes [8], Tõnnov [5] ausnutzen, legen wir in diesem Arbeit unsere Ergebnisse betreffend der Korrelation zwischen den Klassen der Multiplikatoren und über den Zusammenhang zwischen den Summierbarkeitsfaktoren und den Multiplikatoren dar.

Formulieren wir einige der erhaltenen Ergebnisse:

Satz 3.5. *Nehmen wir an, daß E und (E, T) BK-Räume sind und die Menge P überall dicht ist in einem invariantem bezüglich auf die Verlagerung des Arguments E-Raumes. Ist $\{\lambda_n\}$ ein Multiplikator wenigstens einer der Klassen* $[(dV, T), C_{TN}]$, (C_{TN}, C_{TN}), $[C_{TN}, (dV, T)]$, $[(dV, T), (dV, T)]$ *so ist $\{\lambda_n\}$ ein Multiplikator der Klasse* $[(E, T), (E, T)]^+$.

Satz 4.8. *Wenn $\{\lambda_n/n\} \in (T_0, T_1)$, wo T die Bedingung* (K) *erfüllt, so ist $\{\lambda_n\}$ ein Multipliktor der Klasse* $(\overline{V}, L)$.

О ЛОКАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ И СОПРЯЖЕННЫХ РЯДОВ

С. Барон

Кафедра математического анализа

Введение

Пусть f — вещественная 2π-периодическая функция, интегрируемая по Лебегу на $(-\pi, \pi)$. Пусть

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \tag{1}$$

является рядом Фурье функции f, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nt - b_n \cos nt) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \tag{2}$$

является ее сопряженным рядом.

Известно, что (в противоположность обыкновенной сходимости) абсолютная сходимость ряда (1) не является локальным свойством функции f (см. [1], стр. 638, [5], стр. 390). Естествен вопрос: является ли $|A|$-суммируемость (т. е. абсолютная суммируемость методом A) рядов (1) и (2) в точке x локальным свойством функции f? Уже в 1936 г. Бозанкет ([14], стр. 519) показал, что чезаровская $|C, \alpha|$-суммируемость ряда (1) является локальным свойством f при $\alpha > 1$. В 1939 г. Бозанкет и Кестельман ([15], теорема 2) показали, что $|C, 1|$-суммируемость не является локальным свойством f. Позже Идзуми ([20], теорема 1) показал, что абсолютная суммируемость ряда (1) методом логарифмических средних l также не является локальным свойством. Аналогичные результаты (см. [2], стр. 106, 116—118) для некоторых других конкретных A получили Моханти, Мацумото, Бхатт, Лал и др., рассматривая также более общие ряды [1]

$$\sum \lambda_n A_n(t). \tag{3}$$

[1] Если пределы суммирования у знака суммы не обозначены, то суммирование происходит по индексу n от 0 до ∞. Во всех условиях и оценках свободные индексы принимают все значения $0, 1, \ldots$.

В статье [2] эти вопросы рассматривались для произвольного A, удовлетворяющего некоторому условию типа теоремы о среднем значении. Теоремы статьи [2] содержат в себе, как частные случаи, все вышеназванные результаты.

Интересен вопрос: если же $|A|$-суммируемость ряда (3) не является локальным свойством f в каждой точке, то при каких условиях $|A|$-суммируемость ряда становится локальным свойством функции f в данной точке x. Для метода l первый ответ на такой вопрос дал уже Идзуми ([20], теорема 2), показавший, что $|l|$-суммируемость ряда (1) является локальным свойством f в точке x при $A_n(x) = o(\ln^{-2} n)$. Позже Моханти и Идзуми ([25], теорема 1) заменили последнее условие на

$$\Sigma |A_n(x)| (n+1)^{-1} \ln \ln (n+2) < \infty.$$

Наилучший результат в этом направлении получил Бхатт ([9], стр. 14), доказавший, что $|l|$-суммируемость ряда (1) в точке x является локальным свойством f в точке x, если $\Sigma |A_n(x)| (n+1)^{-1} \ln^{-1}(n+2) < \infty$, причем последнее условие необходимо для $|l|$-суммируемости ряда (1) при $t = x$. При условии $\Sigma |A_n(x)| (n+1)^{-1} \ln (n+2) < \infty$ Моханти [24] установил, что $|C, 1|$-суммируемость ряда (1) является локальным свойством f в точке x. Впоследствии Бхатт [8] показал, что $|C, 1|$-суммируемость ряда (1) является локальным свойством в точке x уже при выполнении условия $\Sigma |A_n(x)| (n+1)^{-1} < \infty$. Юркат и Пейеримхофф ([21], теорема 5) показали, что $|C, \alpha|$-суммируемость при $\alpha > -1$ ряда (1) является локальным свойством f в точке x, если $\Sigma |A_n(x)| (n+1)^{-\alpha} < \infty$. Аналогичный результат они получили и для ряда (2). Такие же теоремы относительно ряда (1) для методов Вороного—Нёрлунда (WN, p_n) и взвешенных средних Рисса (R, p_n) доказали соответственно Бхатт [10] и Дикшит [19], а относительно ряда (2) — Саксена [27, 28]. Недавно Даниэл [17] распространил одну теорему Бхатта [10] на ряды (3).

Целью настоящей статьи является получить такие теоремы о локальном свойстве абсолютной суммируемости тригонометрических рядов произвольным матричным методом A, из которых вытекали бы все до сих пор известные результаты, касающиеся абсолютной суммируемости рядов (3) конкретными методами, а также сопряженных рядов (2) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n(t). \tag{4}$$

Сначала, предполагая, что A удовлетворяет как и в [2] некоторому ограничению, находим условия, при которых $|A|$-суммируемость рядов (3) и (4) является локальным свойством f в точке x (теоремы 1 и 2). Затем несколько расширяем результаты предыдущей нашей статьи [2], распространяя их также на ряды

(4) (теоремы 3 и 5). Наконец, ослабляя ограничения на метод A, доказывается теорема о локальном свойстве $|A|$-суммируемости рядов (3) и (4) даже при $\lambda_n \neq O(1)$ (теорема 4).

§ 1. Условия, чтобы $|A|$-суммируемость ряда являлась локальным свойством функции в точке

Обозначим через $A = (\bar{\alpha}_{nk})$ нормальный метод суммирования в виде преобразования ряда в ряд, а через $A = (\alpha_{nk})$ — тот же метод в виде преобразования ряда в последовательность. Ряд

$$\sum u_n \tag{5}$$

с частичными суммами

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

называется абсолютно A-суммируемым, коротко $|A|$-суммируемым, если

$$\sum u'_n$$

сходится абсолютно, где[2]

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_{nk} u_k = \sum_{k=0}^{n} \Delta\bar{\alpha}_{nk} \cdot U_k.$$

Говорят, что $|A|$-суммируемость ряда (3) (соответственно (4)) *является локальным свойством функции f в точке x*, если $|A|$-суммируемость ряда (3) (соответственно (4)) в точке x зависит от поведения f лишь в произвольно малой окрестности точки x.

Для нахождения условий, когда $|A|$-суммируемость рядов (3) и (4) является локальным свойством, будем применять следующий признак $|A|$-суммируемости.

Лемма 1. *Пусть метод A сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |\Delta\bar{\alpha}_{nk}| = O(\alpha_{kk}). \tag{6}$$

Если

$$\sum |\Delta\varepsilon_n \cdot U_n| < \infty \quad \text{и} \quad \sum |\alpha_{nn}\varepsilon_n U_n| < \infty,$$

то ряд

$$\sum \varepsilon_n u_n \tag{7}$$

является $|A|$-суммируемым.

Доказательство. Применяя преобразование Абеля и формулу разности произведения ([3], стр. 112), находим

---

[2] Обозначаем $\Delta s_{nk} = s_{nk} - s_{n,k+1}$, $\bar{\Delta} s_{nk} = s_{nk} - s_{n-1,k}$, $s_{-1,k} = 0$, $\Delta^p s_{nk} = \Delta(\Delta^{p-1} s_{nk})$ при $p = 1, 2, \ldots$, $\Delta^0 s_{nk} = s_{nk}$.

$$v'_n=\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_{nk}\varepsilon_k u_k=\sum_{k=0}^{n}\Delta(\varepsilon_k\bar{a}_{nk})\cdot U_k=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(\varepsilon_k\Delta\bar{a}_{nk}+\Delta\varepsilon_k\cdot\bar{a}_{n,k+1})\,U_k.$$

Теперь, учитывая условие (6) и теорему Кноппа—Лоренца ([3], теорема 4.1) заключаем

$$\sum|v'_n|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_k U_k|\sum_{n=k}^{\infty}|\Delta\bar{a}_{nk}|+\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta\varepsilon_k\cdot U_k|\sum_{n=k}^{\infty}|\bar{a}_{n,k+1}|=$$
$$=O(1)\sum|\varepsilon_n U_n a_{nn}|+O(1)\sum|\Delta\varepsilon_n\cdot U_n|<\infty.$$

Для метода (WN, p_n) с $0\leqslant p_n\downarrow$ и $p_0>0$ лемма 1 доказана Даниэлом ([17], лемма 2), а при $\varepsilon_n=1$ — Бхаттом [10]. Если в лемме 1 положить $A=(R, p_n)$ с $p_n>0$ и $P_n\to\infty$, получаем результат Даниэла, чему посвящена статья [16].

Обозначим частичные суммы рядов (1) и (2) соответственно через S_n и $\bar{S}_n$. Положим

$$\varphi_x(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\},$$
$$\psi_x(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)-f(x-t)\}.$$

По теореме Лузина—Привалова (см. [1], стр. 528) почти всюду определена сопряженная с f функция $\bar{f}$, причем

$$\bar{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(u)\cot\frac{u}{2}\,du. \tag{8}$$

Для произвольного $\delta>0$ имеем

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}(I_n+J_n), \tag{9}$$

а, если интеграл (8) сходится, также

$$\bar{S}_n(x)-\bar{f}(x)=\frac{1}{\pi}(H_n+V_n), \tag{10}$$

где

$$I_n=\int_0^{\pi}\varphi_x(u)F(u,\delta)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du,$$

$$J_n=\int_0^{\delta}\varphi_x(u)G(u,\delta)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du,$$

$$H_n = \int_0^{\pi} \psi_x(u) F(u, \delta) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) u\, du,$$

$$V_n = \int_0^{\delta} \psi_x(u) G(u, \delta) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) u\, du,$$

$$F(u, \delta) = \begin{cases} \sin^{-2}\frac{\delta}{2} \cdot \sin\frac{u}{2} & \text{при} \quad 0 \leqslant u < \delta, \\ \sin^{-1}\frac{u}{2} & \text{при} \quad \delta \leqslant u \leqslant \pi, \end{cases}$$

$$G(u, \delta) = \left\{1 - \left(\sin\frac{u}{2} / \sin\frac{\delta}{2}\right)^2\right\} \sin^{-1}\frac{u}{2}.$$

Лемма 2. *Имеет место оценка*

$$I_n = O(1) \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \right) \frac{|A_k|}{(n-k)^2} + O(A_n),$$

причем положено $A_k = A_k(x) = A_{-k}(x)$.

Доказательство см. Бхатт [8], стр. 18, или [9], стр. 792.

Лемма 3. *Если интеграл* (8) *сходится, то имеет место оценка*

$$H_n = O(1) \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=1}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \right) \frac{|B_k|}{(n-k)^2} + O(B_n),$$

где положено $B_k = B_k(x) = -B_{-k}(x)$.

Доказательство см. Саксена [25], стр. 190.

Для сокращения записи всюду в дальнейшем обозначаем

$$\gamma_n = \lambda_n a_{nn}.$$

Теорема 1. *Пусть метод A сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию* (6). *Пусть метод A и числа λ_n удовлетворяют условиям*

$$\gamma_n = O(\gamma_k) \qquad (k < n), \tag{11}$$

$$\gamma_n = O(\gamma_{n+k}) \qquad (k < n), \tag{12}$$

$$\sum |\Delta\lambda_n| < \infty, \tag{13}$$

$$\sum (n+1)^{-1} |\gamma_n| < \infty. \tag{14}$$

1. *Если*

$$\sum |\gamma_n A_n(x)| < \infty, \tag{15}$$

то $|A|$-суммируемость ряда (3) *является локальным свойством функции f в точке x.*

2. *Если же сходится интеграл* (8) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n B_n(x)| < \infty, \tag{16}$$

то $|A|$-суммируемость ряда (4) *является локальным свойством функции f в точке x.*

Доказательство приведем для второй части теоремы, поскольку первая часть при помощи (9) и леммы 2 доказывается аналогично.

Определим метод B, полагая (здесь и в дальнейшем) $\beta_{nk} = a_{nk}\lambda_k$. Так как A сохраняет абсолютную сходимость, то постоянная последовательность $|B|$-суммируема. Поэтому $|B|$-суммируемость последовательности $\overline{S}_n(x)$ вытекает из $|B|$-суммируемости последовательности $\overline{S}_n(x) - \overline{f}(x)$ и, ввиду (10), из $|B|$-суммируемости обеих последовательностей H_n и V_n. Однако, $|B|$-суммируемость V_n зависит лишь от значений f в произвольно малой окрестности точки x, ибо в интеграле V_n входят значения f только при $t \in (x-\delta, x+\delta)$. Поэтому, применяя лемму 1 с $\varepsilon_n = \lambda_n$, нам надо показать, что

$$\sum |\Delta\lambda_n \cdot H_n| < \infty, \tag{17}$$

$$\sum |\gamma_n H_n| < \infty. \tag{18}$$

Для доказательства (17) заметим, что по теореме Римана—Лебега

$$A_n(t) = o(1), \quad B_n(t) = o(1).$$

Теперь, учитывая лемму 3, разделим H_n на четыре части и, оценив каждую из них в отдельности, находим, что $H_n = O(1)$. Применяя теперь условие (13), видим, что (17) имеет место.

Для доказательства (18) также применим к H_n лемму 3 и оценим каждую из четырех частей ее в отдельности.

Для первой части условие (14) дает

$$\sum |\gamma_n| \sum_{k=-\infty}^{-1} |B_k| (n-k)^{-2} = \sum |\gamma_n| \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| (n+k)^{-2} =$$
$$= O(1) \sum |\gamma_n| \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2} =$$
$$= O(1) \sum (n+1)^{-1} |\gamma_n| < \infty.$$

Для второй части из (11) и (16) выводим

$$\sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=1}^{n-1} |B_k| (n-k)^{-2} = \sum_{n=2}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=1}^{n-1} |B_{n-k}| k^{-2} =$$
$$= O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=k+1}^{\infty} |\gamma_{n-k} B_{n-k}| < \infty.$$

Для третьей части имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=n+1}^{\infty} |B_k| (n-k)^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \left(\sum_{n=1}^{k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \right) |\gamma_n B_{n+k}| =$$
$$= K_1 + K_2.$$

Из условия (14) вытекает

$$K_1 = O(1)\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\sum_{n=1}^{k}|\gamma_n| = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|\sum_{k=n}^{\infty}k^{-2} =$$
$$= O(1)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|\gamma_n| < \infty.$$

Из условий (12) и (16) следует

$$K_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\sum_{n=k+1}^{\infty}|\gamma_n B_{n+k}| = O(1)\sum_{k=1}^{\infty}k^{-2}\sum_{n=k+1}^{\infty}|\gamma_{n+k}B_{n+k}| < \infty.$$

Наконец, оценку четвертой части дает условие (16).

Теорема 2. *Пусть метод* A *сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию* (6). *Пусть метод* A *и числа* λ_n *удовлетворяют* а) *условиям* (11), (12), (13) *и*

$$\sum (n+1)^{-2}|\gamma_n|^{-1} < \infty, \qquad |\gamma_n|^{-1} = O(n+1); \tag{19}$$

или б) *условиям* (11), (13) *и*

$$(k+1)^2\,\gamma_k = O(1)\,(n+1)^2\,\gamma_n \qquad (k < n). \tag{20}$$

1. *Если выполнено условие* (15), *то* $|A|$*-суммируемость ряда* (3) *является локальным свойством функции* f *в точке* x.

2. *Если же сходится интеграл* (8) *и имеет место условие* (16), *то* $|A|$*-суммируемость ряда* (4) *является локальным свойством функции* f *в точке* x.

Доказательство отличается от доказательства теоремы 1 лишь оценкой тех частей, где применяется условие (14), ибо из (20) вытекает (12). Остановимся на оценке этих частей. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|\sum_{k=-\infty}^{-1}|B_k|(n-k)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|\left(\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\right)|B_k|(n+k)^{-2} =$$
$$= L_1 + L_2.$$

Из условий (11) и (16) получаем

$$L_1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|\,n^{-2}\sum_{k=1}^{n}|B_k| = O(1)\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k B_k| < \infty.$$

Поскольку $a_{nn} = O(1)$, а (13) влечет за собой $\lambda_n = O(1)$, то при помощи второго из условий (19) и условия (16) обнаруживаем, что

$$L_2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|\sum_{k=n+1}^{\infty}|B_k|(n+k)^{-2} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty}k^{-2}|B_k|\sum_{n=1}^{k-1}|\gamma_n| =$$
$$= O(1)\sum_{k=2}^{\infty}|\gamma_k B_k|\,k^{-1}|\gamma_k|^{-1} = O(1)\sum_{k=2}^{\infty}|\gamma_k B_k| < \infty.$$

В то же время из (20) и (16) вытекает

$$L_2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\gamma_k B_k| \, |\gamma_n| k^{-2} |\gamma_k|^{-1} = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sum_{k=n}^{\infty} |\gamma_k B_k| < \infty.$$

Наконец, учитывая, что $\gamma_n = O(1)$, из условий (12), (16) и первого из (19) следует

$$K_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \sum_{n=1}^{k} |\gamma_n B_{n+k}| = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} |\gamma_k|^{-1} \sum_{n=1}^{k} |\gamma_{k+n} B_{n+k}| < \infty,$$

а из (20) и (16) заключаем

$$K_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| \sum_{k=n}^{\infty} |\gamma_{n+k} B_{n+k}| \left(\frac{n+k}{k} \right)^2 (n+k)^{-2} |\gamma_{n+k}|^{-1} =$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| n^{-2} |\gamma_n|^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} |\gamma_{k+n} B_{k+n}| < \infty.$$

Теоремы 1 и 2 являются обобщениями всех частных результатов, полученных рядом авторов для методов суммирования Вороного—Нёрлунда (WN, p_n) и взвешенных средних Рисса (R, p_n). Действительно, метод (WN, p_n) с $0 \leqslant p_n \downarrow$ сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию (6) (см. [4], стр. 175), а при $\lambda_n = 1$ также условиям (11) и (12). Метод (R, p_n) удовлетворяет условию (6), если он сохраняет абсолютную сходимость (см. [4], стр. 176), например, при $p_n > 0$ (см. [3], стр. 107).

Таким образом, при $0 < \lambda_n \downarrow$ и $A = (WN, p_n)$ с $0 < p_n \downarrow$ из части 1 теоремы 1 следует результат Даниэла [17]. При $\lambda_n = 1$ и $A = (WN, p_n)$ с $0 \leqslant p_n \downarrow$ и $P_n \to \infty$ из части 1 теорем 1 и 2а получаем теоремы Бхатта [10], а из части 2 — теоремы Саксены [27]. При $\lambda_n = 1$ из части 1 теоремы 1 вытекают теоремы Бхатта [8, 9] соответственно для методов арифметических средних $(C, 1)$ и логарифмических средних $l = (R, (n+1)^{-1})$. Отсюда получаем приведенные во введении: для метода $(C, 1)$ результат Моханти [24], для метода l теорему 2 Идзуми [20] и теорему 1 Моханти и Идзуми [25]. При $\lambda_n = 1$ и $A = (R, p_n)$ с $0 < p_n/P_n \downarrow$ часть 1 теоремы 2б дает результат Дикшита ([19], теорема 2), а часть 2 — результат Саксены ([28], теорема 2).

Примечание. Для многих методов суммирования A выполнение условия $\Sigma |a_{nn} u_n| < \infty$ необходимо для $|A|$-суммируемости ряда (5) (см. ниже условие (24) и леммы 8 и 9). Напротив, из леммы 1 следует, что при ограничении (6) условие $\Sigma |a_{nn} U_n| < \infty$ уже достаточно для $|A|$-суммируемости ряда (5). Возникает вопрос: не является ли условие (15) (соответственно (16)) достаточным для $|A|$-суммируемости ряда (3) (соответственно (4)) в точке $t = x$. Это все же не так. Например, при $A = (C, \alpha) = (WN, A_n^{\alpha-1})$ с $0 < \alpha < 1/2$ и $\lambda_n = A_n(x) = (n+1)^{-1/2}$ выполнены все условия теорем 1 и 2 (ибо $a_{nn} =$

$= 1/A_n^\alpha \sim \Gamma(\alpha+1)\ (n+1)^{-\alpha}$ при $n \to \infty$), однако $\Sigma\ (n+1)^{-1}$ не является даже (C, α)-суммируемым, так как метод (C, α) вполне регулярен ([7], стр. 74).

§ 2. Условия, чтобы $|A|$-суммируемость любого ряда являлась локальным свойством

Говорят, что $|A|$-суммируемость ряда (3) (соответственно (4)) *является локальным свойством функций* f, если она является локальным свойством f в каждой точке x.

В теоремах 1 и 2 условия (12), (14), (19) и (20) являются сильными ограничениями на методы A, удовлетворяющие условию (6), и числа λ_n. Здесь докажем теоремы, свободные от этих ограничений, но зато условия (15) и (16) заменяются более сильным.

Лемма 4. *Пусть метод A сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию* (6). *Если выполнены условия*

$$\sum |\Delta\varepsilon_n| < \infty \quad и \quad \sum |\varepsilon_n \alpha_{nn}| < \infty,$$

то для любого сходящегося (или ограниченного) ряда (5) *ряд* (7) *является $|A|$-суммируемым.*

Доказательство следует из леммы 1 при $U_n = O(1)$ (ср. [2], стр. 109).

Теорема 3. *Пусть метод A сохраняет абсолютную сходимость и удовлетворяет условию* (6). *Если выполнены условия* (13) *и*

$$\sum |\gamma_n| < \infty, \tag{21}$$

то $|A|$-суммируемость каждого из рядов (3) *и* (4) *является локальным свойством функции* f.

Доказательство приведем для ряда (4), поскольку в статье [2] теорема доказана для ряда (3) при дополнительном условии $\alpha_{k+1,\,k+1} = O(\alpha_{kk})$.

Как известно ([1], стр. 109, [5], стр. 95), если $f \in L(-\pi, \pi)$, то

$$\overline{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,\frac{1-\cos nt}{t}\,dt + R_n(x),$$

где $\delta > 0$ произвольно, а $R_n(x) = O(1)$. Далее, при помощи леммы 4 доказательство такое же, как для теоремы 5 статьи [2], заменив в ней ряд (1) на ряд (2) и положив

$$K_n(t) = -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n} \Delta\,(\overline{\alpha}_{nk}\lambda_k)\cdot\frac{1-\cos kt}{t},$$

$$\beta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\alpha}_{nk}\lambda_k \overline{\Delta} R_k(x).$$

Теорему 3 относительно рядов (3) для различных частных случаев доказывали многие авторы (см. [2], стр. 116—118). Отметим, что из теоремы 3 также следует результат Кишоре ([22], стр. 133) относительно $|WN, p_n|$-суммируемости рядов (3) с $0 \leqslant p_n \downarrow$ и $\lambda_n = \mu_n P_n (n+1)^{-1}$, $\Sigma (n+1)^{-1} \mu_n < \infty$, $\Delta^2 \mu_n \geqslant 0$. При дополнительном ограничении $\Delta p_n \downarrow$ тот же результат получил Трипати [29].

Для частичных сумм U_n ряда (5) обозначим

$$S^1{}_n = \sum_{k=0}^{n} U_k.$$

Обозначим также

$$\nu_k = \sum_{n=k}^{\infty} |\bar{a}_{nk}|, \quad \nu'_k = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta \bar{a}_{nk}|, \quad \nu''_k = \sum_{n=k}^{\infty} |\Delta^2 \bar{a}_{nk}|.$$

Лемма 5. *Пусть метод A удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} |\Delta^2 \bar{a}_{nk}| = O(a_{kk}). \tag{22}$$

Если имеют место[3]

$$\sum \nu_{n+2} |\Delta^2 \varepsilon_n \cdot S^1{}_n| < \infty,$$

$$\sum \nu'_{n+1} |\Delta \varepsilon_n \cdot S^1{}_n| < \infty, \quad \sum |\varepsilon_n a_{nn} S^1{}_n| < \infty,$$

то ряд (7) *является $|A|$-суммируемым.*

Доказательство. Применяя дважды преобразование Абеля и затем формулу разности произведения ([3], стр. 158), находим

$$v'_n = \sum_{k=0}^{n} \Delta^2 (\varepsilon_k \bar{a}_{nk}) \cdot S^1{}_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\varepsilon_k \Delta^2 \bar{a}_{nk} + 2\Delta \varepsilon_k \cdot \Delta \bar{a}_{n,k+1} + \Delta^2 \varepsilon_k \cdot \bar{a}_{n,k+2}) S^1{}_k.$$

Теперь, учитывая (22), получаем требуемое.

Лемма 5 при $A = (WN, p_n)$, где $p_n > 0$, $\overline{\Delta p_n} = O(1)$ и $\overline{\Delta p_n} \downarrow$, и $\varepsilon_n = 1$ доказана в статье Бхатта ([11], стр. 89—90).

Теорема 4. *Пусть метод A и числа λ_n удовлетворяют условиям* (22) *и*

$$\sum \nu_{n+2} |\Delta^2 \lambda_n| < \infty, \qquad \sum \nu'_{n+1} |\Delta \lambda_n| < \infty. \tag{23}$$

1. *Если выполнено условие* (21), *то $|A|$-суммируемость ряда* (3) *является локальным свойством f.*

2. *Если, кроме того, сходится интеграл* (8), *то $|A|$-суммируемость ряда* (4) *также является локальным свойством f.*

---

[3] Если A не сохраняет абсолютную сходимость, то возможен случай $\nu_k = \infty$. Тогда при $\varepsilon_n = 1$ в условиях полагаем $\infty \cdot 0 = 0$.

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ имеем

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}(Q_n + T_n),$$

где (D_n — ядро Дирихле)

$$Q_n = \int_0^\delta \varphi_x(u) D_n(u)\,du, \quad T_n = \int_\delta^\pi \varphi_x(u) D_n(u)\,du.$$

Так как $|A|$-суммируемость последовательности Q_n зависит лишь от значений f при $t \in (x-\delta,\ x+\delta)$, то остается доказать $|B|$-суммируемость последовательности T_n. Но поскольку

$$\left|\sum_{k=0}^n T_k\right| = \left|\int_\delta^\pi \varphi_x(u) \sum_{k=0}^n D_k(u)\,du\right| =$$

$$= \left|\int_\delta^\pi \varphi_x(u) \frac{\sin^2[(n+1)u/2]}{2\sin^2(u/2)}\,du\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sin^{-2}(\delta/2)\cdot \int_\delta^\pi |\varphi_x(u)|\,du = O(1),$$

то по лемме 5 условия (21) и (23) влекут за собой $|B|$-суммируемость T_n.

Часть 2 теоремы 4 доказывается аналогично, рассматривая $\overline{S}_n(x) - \overline{f}(x)$ и учитывая вычисления из [1], стр. 520 и 524.

Из части 1 теоремы 4 при $\lambda_n = 1$ следует теорема Бхатта [11], утверждающая, что $|WN, p_n|$-суммируемость ряда (1) является локальным свойством f, если $p_n > 0$, Δp_n не возрастает и ограничена, а $\sum 1/P_n < \infty$. Действительно, так как $\Delta\,\overline{a}_{nk} = \Delta(p_{n-k}/P_n)$ и, следовательно (см. [3], стр. 89),

$$\Delta^2\overline{a}_{nk} = \Delta p_{n-k}\ \overline{\Delta}(1/P_n) + \Delta^2 p_{n-k}/P_{n-1},$$

то условия теоремы Бхатта приводят к выполнению условий (22) и (21) теоремы 4.

Для метода Чезаро (C,α) имеем $\nu_k = O(\eta_k)$, где $\eta_k = (k+1)^{-\operatorname{Re}\alpha}$ при $-1 < \operatorname{Re}\alpha < 0$, $\eta_k = \ln(k+2)$ при $\alpha \neq 0$ с $\operatorname{Re}\alpha = 0$, а, применяя (15.18) из [3], получаем, что $\eta_k = 1$ при $\alpha \geqslant 0$ или $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Ввиду формулы

$$\overline{\Delta}^p a_{nk} = (nA_n^\alpha)^{-1}(kA_{n-k}^{\alpha-p-1} - pA_{n-k-1}^{\alpha-p}) \quad \text{при} \quad p = 0, 1, \ldots,$$

вытекающей из формулы разности произведения, имеем $\nu'_k = O(\xi_k)$, где

$$\xi_k = \begin{cases} (k+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} & \text{при} \quad -1<\alpha\leqslant 1 \text{ или } -1<\operatorname{Re}\alpha<1, \\ (k+1)^{-1} & \text{при} \quad \alpha\geqslant 1 \text{ или } \operatorname{Re}\alpha>1, \\ (k+1)^{-1}\ln(k+2) & \text{при} \quad \alpha\neq 1 \text{ с } \operatorname{Re}\alpha=1. \end{cases}$$

Аналогично находим, что условие (22) выполнено при $-1 < \alpha \leqslant 2$ или $-1 < \operatorname{Re}\alpha < 2$. Итак, метод (C,α) удовлетворяет условиям теоремы 3 лишь при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ или $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$, в то время как из теоремы 4 следует

Следствие 1. *Если при* $-1<\alpha\leqslant 2$ *или* $-1<\mathrm{Re}\,\alpha<2$ *выполнены условия*

$$\sum \eta_n|\Delta^2\lambda_n|<\infty,\qquad \sum \xi_n|\Delta\lambda_n|<\infty,\qquad \sum (n+1)^{-\mathrm{Re}\,\alpha}|\lambda_n|<\infty,$$

то $|C,\alpha|$*-суммируемость ряда* (3) *является локальным свойством* f.

Положив здесь $\lambda_n=1$ и учитывая включение $|C,\beta|\supset|C,\alpha|$ при $\mathrm{Re}\,\beta>\mathrm{Re}\,\alpha>-1$ (см. [3], стр. 82), получаем первый результат Бозанкет ([14], стр. 519): $|C,\alpha|$*-суммируемость ряда* (1) *является локальным свойством* f *при* $\alpha>1$. Этот результат дополняет вытекающий из теоремы 2б при $A=(C,\alpha)$ с $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ и $\lambda_n=1$ результат Юрката—Пейеримхоффа, приведенный во введении. Если же $-1<\alpha\leqslant 0$, то $\Sigma|u_n|(n+1)^{-\alpha}<\infty$ влечет за собой $|C,\alpha|$-суммируемость ряда (5) (см. [21], стр. 258).

Замечание. В части 2 теоремы 4 можно условие (22) заменить более слабым

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}|\Delta^3\overline{a}_{nk}|=O(a_{kk}),$$

если (23) заменить на

$$\sum \nu_{n+3}|\Delta^3\lambda_n|<\infty,\quad \sum \nu'_{n+2}|\Delta^2\lambda_n|<\infty,\quad \sum \nu''_{n+1}|\Delta\lambda_n|<\infty.$$

Это доказывается аналогично части 2 теоремы 4 при помощи обобщения леммы 5 на величины S^2_n (см. [3], стр. 66), учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(k+1)u=\left[\cos\frac{u}{2}-\cos\left(n+\frac{3}{2}\right)u\right]\Big/\left(2\sin\frac{u}{2}\right).$$

§ 3. Условия, чтобы $|A|$-суммируемость не являлась локальным свойством

Говорят, что числа ε_n являются *множителями сходимости типа* $(|A|,\ |E|)$, коротко $\varepsilon_n\in(|A|,\ |E|)$, если для любого $|A|$-суммируемого ряда (5) ряд (7) абсолютно сходится.

Лемма 6. *Пусть* f_n — *последовательность измеримых в промежутке* $(\alpha,\ \beta)$, $\beta-\alpha\leqslant\infty$, *функций. Для того, чтобы при любой* $g\in L(\alpha,\ \beta)$ *функции* $f_ng\in L(\alpha,\beta)$ *и*

$$\sum\left|\int_{\alpha}^{\beta}f_n(t)g(t)\,dt\right|<\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы почти всюду в (α,β) *выполнялось условие*

$$\sum|f_n(t)|=O(1).$$

Доказательство см. [15], стр. 91.

Лемма 7 (Салем). *Если* $\varrho_n=(a^2{}_n+b^2{}_n)^{1/2}=O(1)$ *и* $\Sigma\varrho_n=\infty$, *то при* $n\to\infty$ *почти всюду*

$$\sum_{k=1}^{n} \varrho_k \left|\cos(kt - \alpha_k)\right| \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \varrho_k.$$

Доказательство см. [1], стр. 766.

Говорят, что $|A|$-суммируемость ряда (3) (соответственно (4)) *не является локальным свойством функции* f, если найдутся промежуток $(x+\alpha,\ x+\beta)$, где $x < x+\alpha < x+\beta < x+2\pi$, и функция, равная f в $(x+\alpha,\ x+\beta)$ и равная нулю в $(x,\ x+\alpha) \cup \cup (x+\beta,\ x+2\pi)$, для которой ряд (3) (соответственно (4)) не является $|A|$-суммируемым в точке x.

Теорема 5. *Если*

$$a_{nn} \in (|A|, |E|) \tag{24}$$

и

$$\sum |\gamma_n| = \infty, \tag{25}$$

то $|A|$-суммируемость рядов (3) *и* (4) *не является локальным свойством функции* f.

Доказательство проведем для ряда (4), поскольку для ряда (3) оно то же, что для теоремы 7 статьи [2].

Предположим от противного, что для любой функции f, интегрируемой в $(x+\alpha,\ x+\beta)$ и равной нулю в $(x, x+\alpha) \cup \cup (x+\beta,\ x+2\pi)$ ряд (4) является $|A|$-суммируемым в точке x. Тогда, ввиду (24),

$$\sum |\gamma_n B_n(x)| < \infty.$$

Далее, так как для любой 2π-периодической функции $f \in L(0, 2\pi)$

$$B_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{x}^{x+2\pi} f(x+t) \sin nt\, dt,$$

то в нашем случае

$$\sum \left|\gamma_n \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x+t) \sin nt\ dt\right| < \infty.$$

Следовательно, по лемме 6 с $g(t) = f(x+t)$, почти всюду в $(\alpha,\ \beta)$ должно быть

$$\sum |\gamma_n \sin nt| = O(1). \tag{26}$$

С другой стороны, в случае $\gamma_n = O(1)$ по лемме 7 (положив в ней $\alpha_k = \pi/2$), а в случае $\gamma_n \neq O(1)$ ввиду $\lim \gamma_n \sin nt \neq 0$, из условия (25) вытекает, что почти всюду в $(\alpha,\ \beta)$

$$\sum |\gamma_n \sin nt| = \infty,$$

что противоречит условию (26).

Для проверки условия (24) основную роль играет следующий результат Кангро ([6], теорема 3), где обозначено

$$(\eta_{nk}) = (a_{nk})^{-1},\ \ \eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk},\ \ D_n = \sup_k |a_{k+n,k+n} \eta_{k+n,k}|.$$

Лемма 8. *Пусть метод A удовлетворяет условию*

$$\sum nD_n < \infty. \tag{27}$$

Для того, чтобы $\varepsilon_n \in (|A|, |E|)$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum |\eta_n \varepsilon_n| < \infty, \qquad \varepsilon_n = O(a_{nn}).$$

Отметим, что при $a_{n0} = 1$ имеем $\eta_n = \delta_{n0}$ (см. [3], теорема 9.2) и, следовательно, $\Sigma |\eta_n \varepsilon_n| < \infty$.

Положим

$$\sum c_n x^n = (\sum p_n x^n)^{-1}.$$

Обозначим через W метод (WN, p_n), для которого

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k| = O(P_n).$$

Лемма 9. *Пусть метод W удовлетворяет условию*

$$\sum |c_n| < \infty. \tag{28}$$

Для того, чтобы $\varepsilon_n \in (|W|, |E|)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\varepsilon_n = O(1/P_n).$$

Доказательство см. [18], теорема 1.

Если условие (24) проверить при помощи леммы 8, то из теоремы 5 получим все известные результаты (см. [2], стр. 116—118), когда $|A|$-суммируемость ряда (3) не является локальным свойством. Отметим, что из теоремы 5 также следуют теоремы Дикшита ([19], теорема 1) и Саксены ([28], теорема 1), первая из которых является частным случаем $\gamma_n \downarrow 0$ теоремы 8 статьи [2].

Из теорем 3 и 5 вытекает

Следствие 2. *Пусть $p_n > 0$ и $1 \geqslant p_{n+1}/p_n \uparrow$. Тогда $|WN, p_n|$-суммируемость каждого из рядов* (3) *и* (4) *является локальным свойством f, если выполнены условия* (13) *и*

$$\sum |\lambda_n|/P_n < \infty,$$

и не является локальным свойством, если

$$\sum |\lambda_n|/P_n = \infty.$$

Доказательство. Так как $0 < p_n \downarrow$ (ср. [7], стр. 94), то (как отмечалось выше) метод (WN, p_n) сохраняет абсолютную сходимость и выполнено условие (6) теоремы 3. По теореме Калузы ([7], теорема 22) выполнено условие (28) леммы 9. Теперь из теорем 3 и 5 получаем требуемое.

Следствие 2 является обобщением и уточнением теоремы 10 статьи [2], в которой рассматривалось локальное свойство абсолютной суммируемости методом гармонических средних $(WN, (n+1)^{-1})$.

Из теоремы 5 и леммы 9 получаем результат Даниэла [17], утверждающий, что $|W|$-суммируемость ряда (3) не является локальным свойством f при выполнении условий (28) и $\Sigma|\lambda_n/P_n| = \infty$ (условие $\Sigma|\varepsilon_n/P_n|\cos 2nx < \infty$ у Даниэла излишне).

Остановимся на применении теоремы 5 для продифференцированного ряда (1). Для этого заметим, что в случае абсолютно непрерывной f для ее производной f' имеем

$$f'(t) \sim -\sum nB_n(t).$$

Вообще, если существует $f^{(k-1)} \in A[0, 2\pi]$ при некотором $k = 1, 2, \ldots$, то

$$f^{(k)}(t) \sim (-1)^{(k+1)/2} \sum n^k B_n(t) \quad \text{при нечетном } k,$$
$$f^{(k)}(t) \sim (-1)^{k/2} \sum n^k A_n(t) \quad \text{при четном } k.$$

Теперь, если в теореме 5 заменить λ_n на $n^k\lambda_n$, то из теоремы 5 непосредственно следует

Теорема 6. *Если выполнены условия* (24) *и*

$$\sum n^k|\gamma_n| = \infty,$$

то $|A|$-суммируемость k раз продифференцированного ряда (1) *не является локальным свойством функции f.*

Учитывая, что при $A = (C, \alpha+1)$ выполнено условие (27) леммы 8 (ср. [2], стр. 117), то из теоремы 6 следует результат Бхатта ([13], теорема 1): $|C, \alpha+1|$-суммируемость α раз продифференцированного ряда (1) не является локальным свойством f. Этот результат при $\alpha = 1$ доказал ранее Лал ([23], теорема 1).

При $A = (R, p_n)(C, 1)$ и $k = 1$ из теоремы 6 следует результат Саксены ([26], теорема 1), частный случай $p_n = (n+1)^{-1}$ которого доказал ранее Бхатт ([12], теорема 1). Заметим, что выполнение условия (24) теоремы 6 получаем при помощи леммы 8, поскольку условие (27) здесь выполнено (см. [4], стр. 174).

Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 106—120.
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
4. Барон С., Теоремы о множителях суммируемости для методов $A\alpha$. Настоящий сборник, стр. 165—178.
5. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I. Москва, 1965.
6. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.
7. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
8. Bhatt, S. N., An aspect of local property of a Fourier series. Vijnana parishad anusandhan patrika. Res. J. Hindi Sci. Acad., 1959, **2**, 73—78 (на яз. хинди).

9. B h a t t, S. N., An aspect of local property of $|R, \log n, 1|$ summability of Fourier series. Tôhoku Math. J., 1959, **11**, 13—19.
10. B h a t t, S. N., An aspect of local property of absolute Nörlund summability of Fourier series. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1962, **A 28**, № 5, 789—794; Addendum, 1963, **A 29**, № 1, 119—120.
11. B h a t t, S. N., An aspect of local property of $|N, p_n|$ summability of a Fourier series. Indian J. Math., 1963, **5**, № 2, 87—91.
12. B h a t t, S. N., An aspect of local property of absolute summability of the derived Fourier series. Math. Z., 1963, **80**, № 5, 384—389.
13. B h a t t, S. N., An aspect of local property of the absolute summability of the rth derived series. Indian J. Math., 1967, **9**, № 1, 17—24.
14. B o s a n q u e t, L. S., The absolute Cesàro summability of a Fourier series. Proc. London Math. Soc., 1936, **41**, 517—528.
15. B o s a n q u e t, L. S., K e s t e l m a n, H., The absolute convergence of series and integrals. Proc. London Math. Soc., (2), 1939, **45**, 88—97.
16. D a n i e l, E. C., On Absolute Summability Factors of Infinite Series. Proc. Japan Acad., 1964, **40**, № 2, 65—69.
17. D a n i e l, E. C., The Non-Local Character of Summability $|N, p_n|$ of a Fourier Series with Factors. Math. Z., 1967, **99**, № 5, 392—399.
18. D a s, G., On the absolute Nörlund summability factors of infinite series. J. London Math. Soc., 1966, **41**, № 4, 685—692.
19. D i k s h i t, G. D., Localization relating to the summability $|R, \lambda_n, 1|$ of Fourier series. Indian J. Math., 1965, **7**, № 1, 31—39.
20. I z u m i, S., Notes on Fourier Analysis (VII): Local properties of Fourier series. Tôhoku Math. J., 1950, **1**, 136—143.
21. J u r k a t, W., P e y e r i m h o f f, A., Lokalisation bei absoluter Cesàro-Summierbarkeit von Potenzreihen und trigonometrischen Reihen. Math. Z., 1954, **60**, 255—270; 1956, **64**, 151—158.
22. K i s h o r e, N., On the Absolute Nörlund Summability Factors. Riv. mat. Univ. Parma, 1965, **6**, 129—134.
23. L a l, S. N., An aspect of local property of $|C, 2|$ summability of the derived Fourier series. Ann. mat. pura ed. appl., 1962, **59**, 65—75.
24. M o h a n t y, R., On the summability $|C, 1|$ of Fourier series. Bull. Calcutta Math. Soc., 1955, **47**, 53—54.
25. M o h a n t y, R., I z u m i, S., On the absolute logaritmic summability of a Fourier series of order one. Tôhoku Math. J., 1956, **8**, № 2, 201—204.
26. S a x e n a, A., An aspect of local property of absolute summability of the derived series of a Fourier series. Rend. Circolo mat. Palermo, 1964, **13**, № 3, 263—272.
27. S a x e n a, A., An Aspect of Local Property of Absolute Nörlund Summability of the Conjugate Series of a Fourier Series. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1966, **14**, № 4, 183—191.
28. S a x e n a, A., Localization relating to the summability $|R, \lambda_n, 1|$ of the conjugate series of a Fourier series. Rend. Circolo mat. Palermo, 1966, **15**, № 3, 319—330.
29. T r i p a t h i, L. M., An aspect of local property of $|N, p_n|$ summability of a factored Fourier series. Proc. Japan Acad., 1964, **40**, № 6, 379—384.
30. M o h a p a t r a, R. N., On absolute convergence factors. Rend. Circolo mat. Palermo, 1968, **16**, № 3, 259—272.

Поступило
28 XI 1969

П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. Обобщая лемму 9, Мохапатра ([30], теоремы 1 и 2) нашел необходимые и достаточные условия для $\varepsilon_n \in (|WQ|, |E|)$ и $\varepsilon_n \in (|QW|, |E|)$, где $Q = (R, q_n)$. Отсюда он выводит ([30], теорема 3), что $|H(C, 1)|$- и $|(C, 1)H|$-суммируемость ряда (1) не является локальным свойством функции f, где $H = (WN, (n+1)^{-1})$. Однако, применяя теоремы 1 и 2 из [30] для проверки условия (24), можно при помощи теоремы 5 получить более общие результаты.

FOURIER' RIDADE JA KAASRIDADE ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE LOKAALSUSE OMADUSEST

S. Baron

Resümee

Olgu f Lebesgue'i mõttes vahemikus $(-\pi, \pi)$ integreeruv 2π-perioodiline funktsioon ning (1) ja (2) olgu vastavalt funktsiooni $f(t)$ Fourier' rida ja kaasrida. Olgu λ_n — kompleksarvude jada. Artiklis leitakse tingimused selleks, et ridade (3) ja (4) absoluutne summeeruvus antud punktis normaalse maatriksmenetlusega A oleks või ei oleks funktsiooni f lokaalne omadus. Siinjuures tõestatakse teoreemid, millal iga integreeruva f rida (3) või (4) absoluutne A-summeeruvus oleks f lokaalne omadus ja millal konkreetse rea absoluutne A-summeeruvus on f lokaalne omadus. Vaadeldakse ka, millal k korda diferentseeritud rea (3) absoluutne A-summeeruvus pole f lokaalne omadus.

LOCAL PROPERTY OF ABSOLUTE SUMMABILITY OF FOURIER SERIES AND ITS CONJUGATE SERIES

S. Baron

Summary

It is supposed that f is a periodic function, with period 2π, which is integrable in the Lebesgue sense over $(-\pi, \pi)$. Let the Fourier series of f be (1) and its conjugate series be (2) and λ_n be a sequence of complex numbers.

The purpose of this paper is to study the conditions for the normal matrix $A = (a_{nk})$ and for the sequence $\{\lambda_n\}$ when the $|A|$-summability of the series (3) and (4) in a given point is or is not a local property of the function f. It is supposed by the following theorems 1,2 and 3 that the matrix A is absolutely conservative, and by the theorems 1, 2 and 4 in connection with the series (4), that the integral (8) exists.

Theorem 1. *Let A and λ_n satisfy the conditions* (6), (11), (12), (13) *and* (14). *If* (15) *(resp.* (16)) *is satisfied, then $|A|$-summability of the series* (3) *(resp* (4)) *is a local property of f in point x.*

Theorem 2. *Let A and λ_n satisfy the conditions* (6), (11), (12), (13) *and* (19) *or* (6), (11), (13) *and* (20). *If* (15) *(resp.* (16)) *is satisfied, then $|A|$-summability of the series* (3) *(resp.* (4)) *is a local property of f in point x.*

These theorems 1—2 contain the results of Bhatt [8—10], Daniel [17], Dikshit [19], Saxena [27, 28] and others.

Theorem 3. *Let A and λ_n satisfy the conditions* (6), (13) *and* (21). *Then $|A|$-summability of the both series* (3) *and* (4) *is a local property of f.*

Theorem 3 contains the results of Kishore [22], Tripathi [29] and other (cf. [2]).

Theorem 4. *Let A and λ_n satisfy the conditions* (22), (23) *and* (21). *Then $|A|$-summability of the both series* (3) *and* (4) *is a local property of f.*

This theorem is a generalization of the theorems of Bhatt [11] and Bosanquet [14].

Theorem 5. *If a_{nn} is an absolutely convergence factor for $|A|$ and the condition* (25) *is satisfied, then $|A|$-summability of the series* (3) *and* (4) *is not a local property of f.*

Theorem 5 implies the results of Dikshit [19], Saxena [28], of Daniel [17] and others (cf. [2]) and also the results of Bhatt [12, 13], Lal [23] and Saxena [26] of the non-local property of $|A|$-summability of the derived Fourier series.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ И МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л. Кагадий

Днепропетровский сельскохозяйственный институт

Введение

Пусть L_p означает пространство измеримых периодических с периодом 2π относительно каждой из переменных функций $f(x, y)$, для которых

$$\|f(x, y)\|_{L_p} = \{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p \, dx\, dy\}^{1/p} < \infty \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$

а при $p = \infty$

$$\|f(x, y)\|_{L_p} = \operatorname*{vraisup}_{x,y} |f(x, y)| < \infty.$$

Так как в дальнейшем при $p = \infty$ будут рассматриваться лишь непрерывные функции двух переменных, то

$$\|f(x, y)\|_{L_\infty} = \|f(x, y)\|_C = \max_{x,y} |f(x, y)|.$$

Под модулем гладкости порядка k, l функции $f(x, y) \in L_p$ будем понимать величину

$$\overset{(p)}{\omega}_{k,l}(u, v) = \sup_{|\xi|,|\eta|\leqslant u,v} \Big\| \sum_{i,j=0}^{k,l} (-1)^{k+l-i-j} \binom{k}{i}\binom{l}{j} \cdot$$

$$\cdot f[x + (2i - k)\xi,\ y + (2j - l)\eta] \Big\|_{L_p}.$$

Зависимость коэффициентов Фурье от поведения модулей непрерывности для функции одной переменной исследовалась в работах Конюшкова [2], Алянчича и Томича [3] и других. Алянчич и Томич [3] доказали следующее утверждение: если коэффициенты Фурье μ_n для $f(x) \in L_p$ $(p < 1)$ монотонно убывают и $\mu_n > 0$, то [1]

[1] Во всей статье через M_p, A, B, A_p и B_p обозначены положительные постоянные.

$$n^{1-1/p}\mu_n \leqslant M_p \omega^{(p)}\left(f, \frac{\pi}{2n}\right),$$

где

$$\omega^{(p)}\left(f, \frac{\pi}{2n}\right) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|f(x+h)-f(x-h)\|_{L_p}.$$

Они показали также, что это неравенство при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты μ_n можно обратить. В работе Алянчича и Томича установлены оценки коэффициентов Фурье и для случаев $p=1$ и $p=\infty$. Для функции двух переменных $f(x,y)\in L$ оценка коэффициентов Фурье приведена в работе И. Е. Жака [1]. Им показано, что

$$|c_{m,n}| < \frac{1}{16\pi^2}\,\omega_{11}^{(1)}\left(f, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right).$$

В настоящей работе обобщаются на случай двух переменных результаты Алянчича и Томича [3], а также дополняется и уточняется оценка, полученная Жаком в [1].

§ 1. Коэффициенты Фурье функций двух переменных, принадлежащих L_p

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Пусть $f(x,y)\in L_p$ $(p>1)$ является четной функцией по каждой из переменных, имеющей числа $a_{mn}>0$ своими коэффициентами Фурье. Тогда, если последовательность $\{a_{mn}\}$ монотонно убывает по каждому из индексов m, n, то для любых натуральных чисел k, l справедливо неравенство*

$$(mn)^{1-1/p}a_{mn} \leqslant M_p\omega_{k,l}^{(p)}\left(f, \frac{\pi}{2m}\ \frac{\pi}{2n}\right). \tag{1.1}$$

Такое же неравенство справедливо и в том случае, если функция $f(x,y)\in L_p$ является либо нечетной функцией по обеим переменным, либо четной по одной из переменных и нечетной по другой.

Теорема 1.2. *Пусть функция $f(x,y)\in L_p$ $(1<p<\infty)$ является четной по обеим из переменных, либо по одной из переменных и нечетной по другой. Тогда, если ее коэффициенты Фурье $a_{mn}>0$ и удовлетворяют условиям*

$$\Delta_m a_{mn}>0,\quad \Delta_n a_{mn}>0,\quad \Delta_{mn}a_{mn}>0, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}\sum_{i,j=0}^{m,n}(ij)^{1-1/p}a_{ij} = O[(mn)^{2-1/p}a_{mn}],\\ \sum_{i,j=m+1,n+1}^{\infty}(ij)^{p-2}a^p_{ij} = O[(mn)^{p-1}a^p_{mn}],\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\sum_{i,j=m+1,0}^{\infty,n} i^{p-2} j^{1-1/p} a_{ij}^{p} = O[m^{p-1} n^{2-1/p} a_{mn}^{p}],$$
$$\sum_{i,j=0,n+1}^{m,\infty} i^{1-1/p} j^{p-2} a_{ij}^{p} = O[m^{2-1/p} n^{p-1} a_{mn}^{p}], \tag{1.4}$$

то справедливо следующее соотношение:

$$\omega_{11}^{(p)}\left(f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right) = O[(mn)^{1-1/p} a_{mn}],$$

где

$$\Delta_{mn} a_{mn} = \Delta_m(\Delta_n a_{mn}), \quad \Delta_m a_{mn} = a_{mn} - a_{m+1,n}.$$

Справедливо также следующее утверждение, которое при $k = 1$, $l = 1$, $p = 1$ дает результат Жака [1].

Теорема 1.3. *Если функция $f(x, y) \in L_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, то для ее комплексных коэффициентов Фурье $\{c_{mn}\}$, $(m, n = 0, 1, 2, \ldots -1, -2 \ldots)$ справедливо неравенство*

$$|c_{mn}| \leqslant A\omega_{k,l}^{(p)}\left(f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right), \tag{1.5}$$

где k, l — любые натуральные числа.

Если функция $f(x, y) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ и является четной по обеим переменным либо нечетной по обеим переменным, либо четной по одной и нечетной по другой переменной, а ее коэффициенты Фурье $\{a_{mn}\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 *и* 1.3, *то*

$$A_p (mn)^{1-1/p} a_{mn} \leqslant \omega_{kl}^{(p)}\left(f, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \leqslant B_p (mn)^{1-1/p} a_{mn}.$$

Доказательство теоремы 1.1. Так как функция $f(x, y)$ четная по каждой из переменных, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{mn} a_{mn} \cos mx \cos ny,$$

где

$$\lambda_{mn} = 1, \ \lambda_{m,0} = \lambda_{0,n} = \frac{1}{2}, \quad m, n \geqslant 1, \quad \lambda_{0,0} = \frac{1}{4}.$$

Пусть вначале k и l — четные числа, а

$$T_{mn}(x, y) = \sum_{i,j=M,N}^{m,n} \cos ix \cos jy,$$

где $M = [m/2]$, $N = [n/2]$. Применяя равенство Парсеваля, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{i,j=0}^{k,l} (-1)^{k+l-i-j} \binom{k}{i}\binom{l}{j} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot f[x + (2i - k)\xi, y + (2j - l)\eta] \cdot T_{mn}(x, y)\right\} dx\, dy =$$
$$= (2\pi)^{k+l} \sum_{i,j=M,N}^{m,n} a_{ij} \sin^k i\xi \cdot \sin^l j\eta. \tag{1.6}$$

В силу монотонного убывания последовательности $\{a_{mn}\}$ находим, что

$$\sum_{i,j=M,N}^{m,n} a_{ij} \sin i \frac{\pi}{2m} \sin j \frac{\pi}{2n} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{n}{2} + 1 \right)\left(\frac{m}{2} + 1 \right) a_{mn} \sin^k i \frac{\pi}{2m} \cdot \sin^l j \frac{\pi}{2n} \geqslant Cmna_{mn}. \qquad (1.7)$$

Далее имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_{m,n}(x, y)|^q \, dx\, dy = 4 \{ \int_0^{\pi/m} \int_0^{\pi/n} O[(mn)^q] dx\, dy +$$

$$+ \int_{\pi/m}^{\pi} \int_{\pi/n}^{\pi} O[(xy)^{-q}] dx\, dy + \int_0^{\pi/m} \int_{\pi/n}^{\pi} O(n^q) O(y^{-q})\, dx\, dy +$$

$$+ \int_{\pi/m}^{\pi} \int_0^{\pi/n} O(m^q) O(x^{-q})\, dx\, dy\} = O[(mn)^{q-1}].$$

Применяя теперь неравенство Гельдера,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\sum_{i,j=0}^{k,l} (-1)^{k+l-i-j} \binom{k}{i} \binom{l}{j} f[x + (2i - k)\xi, y + (2j - l)\eta] \times$$

$$\times T_{mn}(x, y) \Big] dx\, dy \leqslant A (mn)^{1/p} \omega_{k,l}^{(p)} \left(f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n} \right). \qquad (1.8)$$

Таким образом, из (1.6), (1.7) и (1.8) следует утверждение теоремы 1.1. Доказательство теоремы в случае, когда k и l нечетные, либо одно из них четное число, а другое нечетное, проводится аналогично. В этих случаях соответственно надо взять полиномы

$$T'_{m,n}(x, y) = \sum_{i,j=M,N}^{m,n} \sin ix \sin jy,$$

$$T^*_{m,n}(x, y) = \sum_{i,j=M,N}^{m,n} \sin ix \cos jy.$$

Из доказательства видно как получить неравенство (1.1) для случаев, когда функция $f(x, y) \in L_p$ является нечетной по каждой из переменных, либо четной по одной из переменных и нечетной по другой.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть функция $f(x, y)$ является четной по каждой из переменных и

$$\psi_{\xi,\eta}(x, y) = f(x + \xi, y + \eta) - f(x - \xi, y + \eta) -$$
$$- f(x + \xi, y - \eta) + f(x - \xi, y - \eta).$$

Тогда, так как $p > 1$, то

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\psi_{\xi,\eta}(x,y)|^p\,dx\,dy\right\}^{1/p}\leqslant\left\{4\int_{0}^{\pi/m}\int_{0}^{\pi/n}|\psi_{\xi,\eta}(x,y)|^p\,dx\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{4\int_{\pi/m}^{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}|\psi_{\xi,\eta}(x,y)|^p\,dx\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{4\int_{0}^{\pi/m}\int_{\pi/n}^{\pi}|\psi_{\xi,\eta}(x,y)|^p\,dx\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{4\int_{\pi/m}^{\pi}\int_{0}^{\pi/n}|\psi_{\xi,\eta}(x,y)|^p\,dx\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$=4^{1/p}(I_{\mathrm{I}}+I_{\mathrm{II}}+I_{\mathrm{III}}+I_{\mathrm{IV}}).$$

Введем обозначения

$$\Delta_u\varphi(x)=\varphi(x+u)-\varphi(x-u).$$

Применяя неравенство Минковского, находим, что

$$I_{\mathrm{I}}\leqslant\left\{4\int_{0}^{\pi/m}\int_{0}^{\pi/n}\left|\sum_{i,j=0}^{m-1,\,n-1}a_{ij}\sin ix\sin jy\sin i\xi\sin j\eta\right|^p dx\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\int_{0}^{\pi/m}\int_{0}^{\pi/n}\left|\sum_{i,j=m,n}^{\infty}a_{ij}\Delta_\xi\cos ix\,\Delta_\eta\cos jy\right|^p dx\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$+2\left\{\int_{0}^{\pi/m}\int_{0}^{\pi/n}\left|\sum_{i,j=0,n}^{m-1,\,\infty}a_{ij}\sin ix\sin i\xi\,\Delta_\eta\cos jy\right|^p dx\,dy\right\}^{1/p}+$$

$$+2\left\{\int_{0}^{\pi/m}\int_{0}^{\pi/n}\left|\sum_{i,j=m,0}^{\infty,\,n-1}a_{ij}\sin jy\sin j\eta\,\Delta_\xi\cos ix\right|^p dx\,dy\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant 4I_{11}+I_{12}+2I_{13}+2I_{14}. \tag{1.10}$$

Тогда в силу условий (1.3) и неравенства

$$\sum_{i,j=0}^{m,n}ija_{ij}=\sum_{i,j=0}^{m,n}(ij)^{1-1/p}a_{ij}(ij)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant(mn)^{1/p}\sum_{i,j=0}^{m,n}(ij)^{1-1/p}a_{ij}=O(m^2n^2a_{mn}) \tag{1.11}$$

при $0<\xi\leqslant\pi/(2m)$, $0<\eta\leqslant\pi/(2n)$ имеем

$$I^p_{11}\leqslant\int_{0}^{\pi/m}\int_{0}^{\pi/n}\left(\sum_{i,j=0}^{m-1,\,n-1}\xi\eta ija_{ij}\right)^p dx\,dy=$$

$$=\frac{\pi}{mn}(\xi\eta)^pO[(mn)^{2p}a^p_{mn}]=O[(mn)^{p-1}a^p_{mn}].$$

Произведя замену переменных, с помощью неравенства Минковского получим, что

$$I^p{}_{12} \leqslant \Big(\int\limits_{\xi}^{\xi+\pi/m} \int\limits_{\eta}^{\eta+\pi/n} + \int\limits_{-\xi}^{-\xi+\pi/m} \int\limits_{\eta}^{\eta+\pi/n} + \int\limits_{\xi}^{\xi+\pi/m} \int\limits_{-\eta}^{-\eta+\pi/n} + \int\limits_{-\xi}^{-\xi+\pi/m} \int\limits_{-\eta}^{-\eta+\pi/n} \Big) \times$$

$$\times \Big| \sum_{i,j=m,n}^{\infty} a_{ij} \cos ix \cos jy \Big|^p dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant 9 \int\limits_{0}^{3\pi/(2m)} \int\limits_{0}^{3\pi/(2n)} \Big| \sum_{i,j=m,n}^{\infty} a_{ij} \cos ix \cos jy \Big|^p dx\, dy.$$

Суммы $I^p{}_{12}$ разложим на четыре части по схеме

$$\sum_{i,j=m,n}^{\infty} = \sum_{i,j=m,n}^{k,l} + \sum_{i,j=k+1,n}^{\infty,l} + \sum_{i,j=m,l+1}^{k,\infty} + \sum_{i,j=k+1,l+1}^{\infty},$$

и каждая часть в отдельности дает оценку $O[(mn)^{p-1}a_{mn}]$. Тогда, в силу (1.10) и $I_{12} = O[(mn)^{1-1/p}a_{mn}]$, имеем $I_1 = O[(mn)^{1-1/p}a_{mn}]$. Для оценки I_{II} воспользуемся соотношением

$$\Big\{ \int\limits_0^{\pi} |\Delta_\xi D_i(x)|^p dx \Big\}^{1/p} = O[\xi i^{2-1/p}], \tag{1.12}$$

где $0 < \xi \leqslant \pi/(2m)$, $i = 1, 2, \ldots, m, x \geqslant \pi/i \geqslant \pi/m > 2\xi$; $D_i(x)$ — ядро Дирихле. Применяя преобразования Абеля и неравенство Минковского, получим

$$I_{II} \leqslant \sum_{i,j=0}^{m,n} \Delta_{ij} a_{ij} \Big\{ \int\limits_{\pi/m}^{\pi} \int\limits_{\pi/n}^{\pi} |\Delta_\xi D_i(x)|^p\, |\Delta_\eta D_j(y)|^p\, dx\, dy \Big\}^{1/p} +$$

$$+ 4 \Big\{ \int\limits_{\pi/(2m)}^{\pi+\pi/(2m)} \int\limits_{\pi/(2n)}^{\pi+\pi/(2n)} \Big| \sum_{i,j=m+1,n+1}^{\infty} \Delta_{ij} a_{ij} D_i(x) D_j(y) \Big|^p dx\, dy \Big\}^{1/p} +$$

$$+ 2 \Big\{ \int\limits_{\pi/2m}^{\pi+\pi(2m)} \int\limits_{\pi/n}^{\pi} \Big| \sum_{i,j=m+1,0}^{\infty,n} \Delta_{ij} a_{ij} D_i(x) \Delta_\eta D_j(y) \Big|^p dx\, dy \Big\}^{1/p} +$$

$$+ 2 \Big\{ \int\limits_{\pi/m}^{\pi} \int\limits_{\pi/n}^{\pi+\pi/2n} \Big| \sum_{i,j=0,n+1}^{m,\infty} \Delta_{ij} a_{ij} D_j(y) \Delta_\xi D_i(x) \Big|^p dx\, dy \Big\}^{1/p} =$$

$$= I_{21} + 4I_{22} + 2I_{23} + 2I_{24}.$$

Используя (1.2), получим, что

$$I_{22} = O(a_{mn}) \Big\{ \int\limits_{\pi/(2m)}^{\infty} \int\limits_{\pi/(2n)}^{\infty} (xy)^{-p}\, dx\, dy \Big\}^{1/p} \leqslant O[(mn)^{1-1/p}a_{mn}].$$

В силу (1.12) и условия (1.4) убеждаемся в том, что

$$I_{12} = O(\xi\eta) \sum_{i,j=0}^{m,n} (ij)^{2-1/p} \Delta_{ij} a_{ij} =$$

$$= O(\xi\eta) \left\{ \sum_{i,j=1}^{m,n} [i^{2-1/p} - (i-1)^{2-1/p}][j^{2-1/p} - (j-1)^{2-1/p} a_{ij}] - \right.$$

$$\left. - n^{2-1/p} \sum_{i=0}^{m-1} i^{1-1/p} a_{in} - (mn)^{2-1/p} a_{mn} - m^{2-1/p} \sum_{j=0}^{n-1} j^{1-1/p} a_{mj} \right\} =$$

$$= O[(mn)^{1-1/p} a_{mn}].$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского и учитывая (1.12) и (1.4), получим, что

$$I_{23} \leqslant \sum_{i,j=m+1,0}^{\infty,n} \Delta_{ij} a_{ij} \left\{ \int_{\pi/(2m)}^{\pi+\pi/(2m)} \int_{\pi/n}^{\pi} |D_i(x) \Delta_\eta D_j(y)|^p \, dx \, dy \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n} \Delta_j a_{mj} \left\{ \int_{\pi/(2m)}^{\infty} x^{-p} \, dx \int_{\pi/n}^{\pi} |\Delta_\eta D_j(y)|^p \, dy \right\}^{1/p} =$$

$$= O[(mn)^{1-1/p} a_{mn}].$$

Аналогично находим, что $I_{24} = O[(mn)^{1-1/p} a_{mn}]$. Следовательно, $I_{\mathrm{II}} = O[(mn)^{1-1/p} a_{mn}]$. Оценим теперь I_{III}. Применяя преобразование Абеля и неравенство Минковского, находим

$$I_{\mathrm{III}} \leqslant \left\{ \int_0^{\pi/n} \int_{\pi/m}^{\pi} \left| \sum_{i,j=0}^{\infty} \Delta_{ij} a_{ij} \Delta_\xi D_i(x) \Delta_\eta D_j(y) \right|^p dx \, dy \right\}^{1/p}.$$

Сумма I_{III} разлагается на четыре части по схеме

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} = \sum_{i,j=0}^{m-1,n-1} + \sum_{i,j=m,0}^{\infty,n-1} + \sum_{i,j=0,n}^{m-1,\infty} + \sum_{i,j=m,n}^{\infty}.$$

Первые три части на основании обобщенного неравенства Минковского и условия (1.2) так же, как при оценке I_{21}, дают $O[(mn)^{p-1} a_{mn}]$. Последнюю часть представим в виде

$$3^{1/p} \sum_{k=m}^{\infty} \int_{3\pi/(2k+2)}^{3\pi/(2k)} \int_{3\pi/(2n)}^{\pi+\pi/(2n)} \left| \sum_{i,j=m,n}^{\infty} \Delta_{ij} a_{ij} D_i(x) D_j(y) \right|^p dx \, dy,$$

применим условие (1.4) и получим ту же оценку, что и для первых трех. Итак, $I_{\mathrm{III}} = O[(mn)^{1-1/p} a_{mn}]$. Совершенно аналогично можно получить, что $I_{\mathrm{IV}} = O[(mn)^{1-1/p} a_{mn}]$. Тогда из неравенства (1.9) следует утверждение теоремы.

Теорема 1.3 вытекает из следующего тождества:

$$(2\pi)^{k+l}c_{m,n} = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{i,j=0}^{k,l}(-1)^{k+l-i-j}\binom{k}{i}\binom{l}{j}\times$$

$$\times f[x+(2i-k)\xi, y+(2j-l)\eta]e^{-i(mx+ny)}dx\,dy,$$

где

$$c_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(x,y)\,e^{-i(mx+ny)}\,dx\,dy.$$

§ 2. Оценка коэффициентов Фурье для интегрируемой функции двух переменных

Теорема 2.1. *Если четная по каждой из переменных функция $f(x,y)\in L$ имеет коэффициенты Фурье a_{mn} и удовлетворяет условиям* (1.2) *и*

$$\Delta^2{}_{mn}a^2{}_{mn}\geqslant 0,\qquad \Delta_m\Delta^2{}_n a_{mn}>0,\qquad \Delta_n\Delta^2{}_m a_{mn}>0, \tag{2.1}$$

$$\sum_{ij=0}^{m,n}a_{ij}=O(mna_{mn}), \tag{2.2}$$

тогда

$$\omega_{11}^{(1)}\left(f,\frac{\pi}{2m},\frac{\pi}{2n}\right)=O(a_{mn}), \tag{2.3}$$

где

$$\Delta^2{}_{mn}a_{mn}=\Delta_{mn}(\Delta_{mn}a_{mn}),\quad \Delta^2{}_m a_{mn}=\Delta_m(\Delta_m a_{mn}).$$

Теорема 2.2. *Соотношение* (2.3) *справедливо также и для случая функции $f(x,y)\in L$ нечетной по каждой из переменных, если ее коэффициенты Фурье a_{mn}, кроме условий* (1.2), (2.1) *и* (2.2), *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{i,j=m+1,n+1}^{\infty}(ij)^{-1}a_{ij}=O(a_{mn}), \tag{2.4}$$

$$\sum_{i,j=m+1,0}^{\infty,n}i^{-1}a_{ij}=O(na_{mn}), \tag{2.5}$$

$$\sum_{i,j=0,n+1}^{m,\infty}j^{-1}a_{ij}=O(ma_{mn}). \tag{2.6}$$

Теорема 2.3. *Если $f(x,y)\in L$ и четная по одной и нечетная по другой переменной, а ее коэффициенты удовлетворяют условиям теоремы* 2.1 *и* (2.6), *то для нее справедливо* (2.3).

Следует отметить, что из теоремы 2.1 и оценки (1.5), которая справедлива и при $p=1$ вытекает, что

$$Aa_{mn} \leqslant \omega_{k,l}^{(1)}\left(f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right) \leqslant Ba_{mn}, \tag{2.7}$$

где некоторые константы A, B не зависят от n, m, f.

Доказательство теоремы 2.1. В силу условий (1.2)

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=1}^{m+1,n+1} a_{ij} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=1}^{m,n} ij\Delta_{ij}a_{ij} + $$
$$+ \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m} i\Delta_i a_{i,n+1} +$$
$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n} j\Delta_j a_{m+1,j} + a_{m+1,n+1} >$$
$$> \frac{1}{4} mn\Delta_{mn}a_{mn}.$$

Применяя к левой части этого неравенства условие (2.2), получим

$$\Delta_{mn}a_{mn} = O(m^{-1}n^{-1}a_{mn}). \tag{2.8}$$

Из неравенства

$$\frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=1}^{m+1,n+1} a_{ij} > \frac{1}{m+1} \Delta_m a_{mn} \sum_{i=1}^{m} i$$

в силу тех же условий, находим, что

$$\Delta_m a_{mn} = O(m^{-1}a_{mn}). \tag{2.9}$$

Аналогично получается оценка

$$\Delta_n a_{mn} = O(n^{-1}a_{mn}). \tag{2.10}$$

Для доказательства теоремы используем известную (см. [3]) оценку:

$$I_i(\xi) = \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\xi K_i(x)|\, dx = \begin{cases} O(1) & \text{для } i = 1, 2, \ldots, \\ O(i\xi) & \text{для } i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

где $0 < \xi \leqslant \pi/(2m)$; $K_i(x)$ — ядро Фейера. Дважды применяя преобразование Абеля, в силу условий (1.2) и (2.1) находим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_{\xi,\eta}(x, y)|\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i,j=0}^{\infty} (i+1)(j+1)\Delta^2_{ij}a^2_{ij} |\Delta_\xi K_i(x)|\, |\Delta_\eta K_j(y)|\, dx\, dy =$$

$$= \left(\sum_{i,j=0}^{m,n} + \sum_{i,j=m+1,n+1}^{\infty} + \sum_{i,j=0,n+1}^{m,\infty} + \sum_{i,j=m+1,0}^{\infty,n} \right) (i+1)(j+1)\cdot$$

$$\cdot \Delta^2{}_{ij} a^2{}_{ij} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\xi K_i(x)|\, |\Delta_\eta K_j(y)|\, dx\, dy =$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}. \tag{2.11}$$

Оценим I. В силу (2.11), (2.8), (2.9), (2.10) и условия (21)

$$\mathrm{I} = O(\xi\eta) \sum_{i,j=0}^{m,\eta} (i+1)^2 (j+1)^2 \Delta^2{}_{ij} a^2{}_{ij} =$$

$$= O(\xi\eta) \left\{ \left[2 \sum_{i,j=0}^{m,\eta} a_{ij} - 2(n+1 \sum_{i=0}^{m} a_{i,n+1} - (n+1)^2 \sum_{i=0}^{m} \Delta_{n+1} a_{i,n+1} \right] - \right.$$

$$- (2m-1) \left[\sum_{j=0}^{n} a_{m+1,j} - (2n+1) a_{m+1,n+1} - (n+1) \Delta_{n+1} a_{m+1,n+1} \right] -$$

$$- (m+1)^2 \left[\sum_{j=0}^{n} \Delta_{m+1} a_{m+1,j} - (2n+1) \Delta_{m+1} a_{m+1,n+1} - \right.$$

$$\left. \left. - (n+1) \Delta_{m+1,n+1} a_{m+1,n+1} \right] \right\} = O(\xi\eta)\, O(mna_{mn}) = O(a_{mn}).$$

Рассмотрим вторую сумму. Учитывая (2.11), (2.8), условия (1.2) и (2.1), получим, что

$$\mathrm{II} = O(1) \sum_{i,j=m+1,n+1}^{\infty} (i+1)(j+1) \Delta^2{}_{ij} a_{ij} = O(1) \left\{ \sum_{i,j=m+1,n+1}^{\infty} \Delta_{ij} a_{ij} + \right.$$

$$+ \sum_{i=m+1}^{\infty} (n+1) \Delta_{i,n+1} a_{i,n+1} + \sum_{j=n+1}^{\infty} (m+1) \Delta_{m+1,j} a_{m+1,j} +$$

$$\left. + (m+1)(n+1) \Delta_{m+1,n+1} a_{m+1,n+1} \right\} = O(a_{mn}).$$

В силу условий (1.2), (2.1), (2.11) и (2.8) находим оценку для

$$\mathrm{III} = O(\xi) \sum_{i,j=0,n+1}^{m,\infty} (i+1)^2 (j+1) \Delta^2{}_{ij} a^2{}_{ij} =$$

$$= O(\xi) \left\{ \sum_{i,j=0,n+i}^{m,\infty} (i+1)^2 \Delta_j \Delta^2{}_i a_{ij} + \sum_{i=1}^{m} (i+1)^2 (n+1) \Delta^2{}_{i,n+1} a_{in} \right\} =$$

$$= O(\xi) \left\{ \sum_{i=1}^{m} \Delta^2{}_i a_{i,n+1} (i+1)^2 + \sum_{i=0}^{m} (i+1)^2 \Delta^2{}_i a_{in} \right\} =$$

$$= O(\xi) \sum_{i=0}^{m} (i+1)^2 \Delta^2{}_i a_{in} =$$

$$= O(\xi)\left\{2\sum_{i=0}^{m} a_{in} - (2m+1)a_{m+1,n} - (m+1)^2\Delta_{m+1}a_{m+1,n}\right\} =$$
$$= O(\xi)O(ma_{mn}) = O(a_{mn}).$$

Аналогично $\mathrm{IV} = O(a_{mn})$.

Доказательство теоремы 2.2. Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_{\xi,\eta}(x, y)|\,dx\,dy = 4\left(\int_0^{\pi/m}\int_0^{\pi/n} + \int_{\pi/m}^{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi} + \int_0^{\pi/m}\int_{\pi/n}^{\pi} + \int_{\pi/m}^{\pi}\int_0^{\pi/n}\right) =$$
$$= 4(I_{11} + I_{22} + I_{12} + I_{21}),$$

то надо показать, что

$$I_{11},\ I_{22},\ I_{12},\ I_{21} = O(a_{mn}).$$

В силу того, что $0 < \xi \leqslant \pi/(2m)$, $0 < \eta \leqslant \pi/(2n)$, получим

$$I_{11} \leqslant \left(\int_{\xi}^{\pi/m+\xi}\int_{\eta}^{\pi/n+\eta} + \int_{-\xi}^{\pi/m-\xi}\int_{\eta}^{\pi/n+\eta} + \int_{\xi}^{\pi/m+\xi}\int_{-\eta}^{\pi/n-\eta} + \right.$$
$$\left. + \int_{-\xi}^{\pi/m-\xi}\int_{-\eta}^{\pi/n-\eta}\right)|f(x, y)|\,dx\,dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{3\pi/(2m)}\int_0^{3\pi/(2n)} |f(x, y)|\,dx\,dy =$$

$$= 9\sum_{k,l=m,n}^{\infty}\int_{3\pi/(2k+2)}^{3\pi/(2k)}\int_{3\pi/(2l+2)}^{3\pi/(2l)} |f(x, y)|\,dx\,dy. \tag{2.12}$$

Пусть $S_{k,l} = \sum_{i,j=0}^{k,l} a_{ij}$. На основании (1.2) имеем

$$S_{k,l} \geqslant kla_{k,l}. \tag{2.13}$$

Так как

$$|f(x, y)| \leqslant \sum_{i,j=0}^{k,l} a_{i,j} + \left|\sum_{i,j=k+1,l+1}^{\infty} a_{ij}\sin ix \sin jy\right| +$$
$$+ \left|\sum_{i,j=k+1,0}^{\infty,l} a_{ij}\sin ix\right| + \left|\sum_{i,j=0,l+1}^{k,\infty} a_{ij}\sin jy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{k} a_{i,l+1}\pi y^{-1} + \sum_{j=0}^{l} a_{k+1,j}\pi x^{-1} + S_{k,l} + \pi^2(xy)^{-1}a_{k+1,l+1},$$

то для $3\pi/2(k+1) \leqslant x \leqslant 3\pi/2k$, $3\pi/2(l+1) \leqslant y \leqslant 3\pi/2l$ на основании (2.13) справедливо

$$|f(x, y)| \leqslant S_{k,l} + \frac{4}{9}(k+1)(l+1)a_{k,l} + \frac{2}{3}k(l+1)a_{k,l+1} + \\ + \frac{2}{3}l(k+1)a_{k+1,l} \leqslant AS_{k,l}.$$

Из (2.12) в силу (2.2) и условий теоремы 2.2 следует

$$I_{11} \leqslant A \sum_{k,l=m,n}^{\infty} S_{k,l}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) =$$

$$= A\left(\sum_{k,l=m+1,n+1}^{\infty} (kl)^{-1}a_{k,l} + \frac{1}{mn}\sum_{k,l=0}^{m,n} a_{k,l} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\sum_{k,l=m+1,0}^{\infty,n} k^{-1}a_{k,l} + \frac{1}{m}\sum_{k,l=0,n+1}^{m,\infty} l^{-1}a_{kl}\right) =$$

$$= O(a_{mn}).$$

Поступая таким образом, как в теореме 2.1 при оценке I, находим $I_{22} = O(a_{mn})$. Рассмотрим теперь I_{12}. Имеем

$$I_{12} \leqslant \int_{0}^{\pi}\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\Delta_{\xi}\sin ix\,\Delta_{\eta}\sin jy\right| dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{k=m}^{\infty}\left\{\int_{3\pi/(2k+2)}^{3\pi/(2k)}\int_{\pi/n}^{\pi}\left(\left|\sum_{i,j=0}^{k,\infty} a_{ij}\sin ix\,\Delta_{\eta}\sin jy\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left|\sum_{i,j=k+1,0}^{\infty} a_{ij}\sin ix\,\Delta_{\eta}\sin jy\right|\right) dx\,dy \leqslant\right.$$

$$\leqslant 3\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\int_{\pi/n}^{\pi}\left|\sum_{i,j=0}^{k,\infty} a_{ij}\Delta_{\eta}\sin jy\right| dy +$$

$$+ 3\sum_{k=n}^{\infty}\int_{3\pi/(2k+2)}^{3\pi/(2k)}\int_{\pi/n}^{\pi}|a_{ij}\sin ix\,\Delta_{\eta}\sin jy|\,dx\,dy =$$

$$= \sum\nolimits' + \sum\nolimits''.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, в силу условий (2.2), (2.5) и (2.6), получим, что

$$\sum' \leqslant \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k^{-1}a_{kj} + m^{-1}\sum_{k=0}^{m} a_{kj}\right)\int_{\pi/n}^{\pi} |\Delta_\eta \sin jy|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{j=0}^{\infty} a_{mj}\int_{\pi/n}^{\pi} |\Delta_\eta \sin jy|\,dy.$$

Дважды применяя преобразование Абеля, находим так же как при оценке I, что

$$\sum' = O(a_{mn}).$$

Рассмотрим Σ''. Пусть

$$b_{kj}(x) = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_{ij}\sin ix.$$

Тогда, дважды применяя преобразование Абеля, в силу неравенства Минковского имеем

$$\sum'' \leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\int_{3\pi/(2k+2)}^{3\pi/(2k)}\Big[O(\eta)\sum_{j=0}^{n}(j+1)^2\Delta^2{}_j b_{kj}(x) +$$

$$+ O(1)\sum_{j=n+1}^{\infty}(j+1)\Delta^2{}_j b_{kj}(x)\Big]dx.$$

Рассмотрим выражение под интегралом. Оценив первую сумму как I, а вторую как II, получим

$$\sum'' \leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\int_{3\pi/(2k+2)}^{3\pi/2k} b_{kn}(x)\,dx.$$

Так как

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} a_{in}\sin ix \leqslant \pi x^{-1}a_{k+1,n},$$

то при $3\pi/2(k+1) \leqslant x \leqslant 3\pi/(2k)$ в силу (2.13)

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} a_{in}\sin ix \leqslant \frac{2}{3}(k+1)a_{kn} \leqslant M\sum_{i=1}^{m} a_{in}.$$

Тогда

$$\sum'' \leqslant A\sum_{k,i=m,0}^{\infty,k} a_{in}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= A\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} k^{-1}a_{kn} + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} a_{km}\right),$$

откуда в силу (2.5) и (2.2) находим, что $\Sigma'' = O(a_{mn})$.

Итак, $I_{12} = O(a_{mn})$. Аналогично $I_{21} = O(a_{mn})$.

Доказательство теоремы 2.3. Пусть функция $f(x, y)$ является четной по y и нечетной по x. Тогда ряд Фурье имеет вид

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} a_{m\,n} \cos mx \sin ny,$$

где

$$\lambda_{m,n} = 1, \quad \lambda_{m,0} = \lambda_{0,n} = \frac{1}{2}, \quad m, n \geqslant 1, \quad \lambda_{0,0} = \frac{1}{4}.$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_{\xi,\eta}(x, y)|\, dx\, dy = 2\left(\int_{0}^{\pi/m} \int_{-\pi}^{\pi} + \int_{\pi/m}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi}\right) = 2(I_1 + I_2), \quad (2.16)$$

то надо показать, что $I_1, I_2 = O(a_{mn})$. Поступая таким же образом, как в теореме 2.1 при оценке 1, находим, что $I_2 = O(a_{mn})$. Оценку $I_1 = O(a_{mn})$ получим таким же способом, как в теореме 2.2 для I_{12}. Тогда, из (2.16) следует утверждение теоремы.

§ 3. Коэффициенты Фурье непрерывных функций двух переменных

Теорема 3.1. *Пусть последовательность коэффициентов Фурье $\{a_{mn}\}$ функции $f(x, y) \in C$ нечетной по обеим переменным удовлетворяет условию (1.2) и*

$$\sum_{i,j=0}^{m,n} i^k j^l a_{ij} = O(m^{k+1} n^{l+1} a_{mn}). \quad (3.1)$$

Тогда справедливо соотношение

$$\omega_{11}^{(\infty)}\left(f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right) = O(\alpha_{mn}), \quad (3.2)$$

где $\alpha_{mn} = \sup\limits_{u,v \geqslant m,n} (uva_{uv})$.

Теорема 3.2. *Если $f(x, y) \in C$ является функцией четной по обеим переменным и последовательность ее коэффициентов Фурье $\{a_{mn}\}$ кроме (3.1) удовлетворяет условиям*

$$a_{mn} \geqslant 0, \quad (3.3)$$

$$\sum_{i,j=m+1,n+1}^{\infty} a_{ij} = O(mna_{mn}), \quad (3.4)$$

$$\sum_{i,j=m+1,0}^{\infty,n} j^l a_{ij} = O(mn^{l+1} a_{mn}), \quad (3.5)$$

$$\sum_{i,j=0,n+1}^{m,\infty} i^k a_{ij} = O(m^{k+1} n a_{mn}),$$

то

$$\omega_{11}^{(\infty)}\left(f, \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2n}\right) = O(mna_{mn}). \qquad (3.7)$$

Теорема 3.3. *Если функция* $f(x, y) \in C$ *и является четной по одной и нечетной по другой из переменных, а ее коэффициенты Фурье удовлетворяют условиям теоремы* 3.1 *и* (3.6), *то для неё справедливо* (3.7).

Заметим, что для непрерывной функции $f(x, y)$ справедлива оценка (1.5) при $p = \infty$.

Доказательство теорем этого параграфа проводится методами, аналогичными тем, которые применяются в § 2.

Литература

1. Жак И. Е., О сопряженных двойных тригонометрических рядах. Матем. сб., 1952, **31**, № 3, 469—484.
2. Конюшков А. А., Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. Матем. сб., 1958, **44**, № 1, 53—84.
3. Aljančić, S., Tomić, M., Über den Stetigkeitsmodul von Fourier-Reihen mit monotonen Koefizienten. Math. Z. 1965, **88**, 274—284.

Поступило
16 II 1968

KAHEMUUTUJA FUNKTSIOONI FOURIER' KORDAJAD JA PIDEVUSE MOODULID

L. Kagadi

Resümee

Artiklis tuletatakse kahemuutuja funktsiooni Fourier' kordajate ja pidevuse moodulite vahelised seosed. Ühemuutuja funktsiooni korral on analoogilisi tulemusi saanud töös [3] S. Aljancic ja M. Tomic ainult perioodiliste funktsioonide jaoks.

FOURIER-KOEFFIZIENTEN UND GLATTHEITSMODUL EINER FUNKTION VON ZWEIER VARIABLEN

L. Kagadij

Zusammenfassung

Im Artikel sind Ordnungsverhältnisse zwischen Fourier-Koeffizienten von einer Funktion zweier Variablen und ihren gemischten Glattheitsmodul festgesetzt worden.

Für den Fall der Funktion einer Variablen sind Resultaten solcher Art in dem Werk [3] von S. Aljančić und M. Tomić abgeleitet worden, aber nur für Kontinuitätsmodul von periodische Funktion $f(x)$.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. Вайникко

Кафедра математического анализа

Сходимость метода коллокации для одномерных интегральных и дифференциальных уравнений исследована в [5—8, 11, 1, 2, 12]. Различные модификации метода коллокации для одномерных уравнений рассмотрены в [11, 13, 15, 10, 16, 17]. В [9] изучена сходимость метода коллокации для эллиптических уравнений в прямоугольной области.

В настоящей статье предлагается и изучается одна возможная схема метода коллокации для многомерных интегральных уравнений в области произвольной формы. Ради краткости и наглядности изложения мы ограничимся рассмотрением лишь двумерных интегральных уравнений. Случай m-мерных интегральных уравнений (с произвольным $m \geqslant 2$) не содержит никаких новых затруднений, по сравнению со случаем $m = 2$. Кроме того, мы ограничимся случаем, когда приближенное решение интегрального уравнения разыскивается в виде алгебраического многочлена. Аналогичные результаты можно получить в случае, когда приближенное решение разыскивается в виде тригонометрического многочлена и используется равномерная сетка узлов интерполяции.

Доказательство теорем о сходимости проведем, пользуясь методикой работы [1], в которой метод коллокации трактуется как метод Галеркина. По-другому эти теоремы сходимости могут быть установлены на основании результатов [4] о фактор-методе (соответствующие рассуждения намечены в § 4).

§ 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Вводимые ниже обозначения используются на протяжении всей статьи.

Пусть D — ограниченная замкнутая область в R^2, характеристическая функция

$$\chi_D(t,\tau)=\begin{cases}1 \text{ при } (t,\tau)\in D,\\ 0 \text{ при } (t,\tau)\overline{\in} D,\end{cases}$$

которой (R)-интегрируема (интегрируема по Риману). Пусть D содержится в прямоугольнике

$$\Omega: a\leqslant t\leqslant b,\quad \alpha\leqslant\tau\leqslant\beta,$$

и пусть $g(t)$ и $\gamma(\tau)$ — неотрицательные функции, суммируемые соответственно на $[a,b]$ и $[\alpha,\beta]$ вместе с $1/g(t)$ и $1/\gamma(\tau)$. Пусть, далее, $\{r_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система ортогональных на $[a,\ b]$ по весу $g(t)$ многочленов, а $\{\varrho_\nu(\tau)\}_{\nu=0}^{\infty}$ — система ортогональных на $[\alpha,\ \beta]$ по весу $\gamma(\tau)$ многочленов ($r_n(t)$ и $\varrho_\nu(\tau)$ — многочлены степени n и ν соответственно). Пусть, наконец, $t_{0n}, t_{1n}, \ldots, t_{nn}$ и $\tau_{0\nu}, \tau_{1\nu}, \ldots, \tau_{\nu\nu}$ — корни многочленов $r_{n+1}(t)$ и $\varrho_{\nu+1}(\tau)$ соответственно; известно [14], что они вещественные, простые и принадлежат соответственно $(a,\ b)$ и $(\alpha,\ \beta)$. Введем соответствующие этим корням фундаментальные многочлены интерполирования по Лагранжу:

$$l_{kn}(t)=\frac{l_n(t)}{l'_n(t_{kn})(t-t_{kn})}\qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

$$\lambda_{\varkappa\nu}(\tau)=\frac{\lambda_\nu(\tau)}{\lambda'_\nu(\tau_{\varkappa\nu})(\tau-\tau_{\varkappa\nu})}\qquad (\varkappa=0,\ 1,\ \ldots,\ \nu),$$

где

$$l_n(t)=(t-t_{0n})(t-t_{1n})\ldots(t-t_{nn}),$$

$$\lambda_\nu(\tau)=(\tau-\tau_{0\nu})(\tau-\tau_{1\nu})\ldots(\tau-\tau_{\nu\nu}).$$

Напомним некоторые свойства фундаментальных многочленов (см. [14]):

$$l_{kn}(t_{in})=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq k\\ 1 \text{ при } i=k\end{cases}\qquad (i,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \tag{1.1}$$

$$\int_a^b g(t)\,l_{in}(t)\,l_{kn}(t)\,dt=0 \text{ при } i\neq k\quad (i,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\int_a^b g(t)\,l^2_{kn}(t)\,dt=\int_a^b g(t)\,dt. \tag{1.3}$$

Аналогичными свойствами обладают многочлены $\lambda_{\varkappa\nu}(\tau)$.

Любой определенной на D функции $z(t,\tau)$ ставим в соответствие интерполяционный многочлен Лагранжа

$$P_{n,\nu}z(t,\tau)=\sum_{\substack{k=0\\(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\in D}}^{n}\ \sum_{\varkappa=0}^{\nu} z(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\,l_{kn}(t)\,\lambda_{\varkappa\nu}(\tau) \tag{1.4}$$

(суммирование проводится по тем индексам k, $\varkappa$, которые соответствуют попавшим в D узлам $(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})$).

Введем банахово пространство $L^2_{g\gamma}(D)$ квадратично-суммируемых в D по весу $g(t)\gamma(\tau)$ функций,

$$\|z\|_{L^2_{g\gamma}(D)} = [\iint\limits_D g(t)\gamma(\tau)|z(t,\tau)|^2 dt\, d\tau]^{1/2}.$$

Лемма 1. *Для каждой (R)-интегрируемой в D функции $z(t,\tau)$ имеет место сходимость*

$$\|z - P_{n,\nu}z\|_{L^2_{g\gamma}(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad n,\nu \to \infty. \tag{1.5}$$

Доказательство. Доопределим $z(t,\tau)$ в прямоугольник Ω, положив

$$y(t,\tau) = \begin{cases} z(t,\tau) & \text{при} \quad (t,\tau) \in D, \\ 0 & \text{при} \quad (t,\tau) \in \Omega \setminus D. \end{cases}$$

Имеем

$$P_{n,\nu}z = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} y(t_{kn}, \tau_{\varkappa\nu}) l_{kn}\lambda_{\varkappa\nu} = Q_{n,\nu}y,$$

т. е. $P_{n,\nu}z$ совпадает с интерполяционным многочленом $Q_{n,\nu}y$ функции y, построенным по всем узлам $(t_{kn}, \tau_{\varkappa\nu})$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ \varkappa = 0, 1, \ldots, \nu)$. В силу (R)-интегрируемости функций $z(t,\tau)$ и $\chi_D(t,\tau)$ функция $y(t,\tau)$ (R)- интегрируема в прямоугольнике Ω, и для нее сходимость

$$\|y - Q_{n,\nu}y\|_{L^2_{g\gamma}(\Omega)} =$$
$$= [\iint\limits_\Omega g(t)\gamma(\tau)|Q_{n,\nu}y - y|^2 dt\, d\tau]^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad n,\nu \to \infty$$

доказывается совершенно аналогично, как для функций одной переменной (см. [14]). Поскольку в точках $(t,\tau) \in D$ имеем $z(t,\tau) = y(t,\tau)$, $P_{n,\nu}z(t,\tau) = Q_{n,\nu}y(t,\tau)$, то имеем также

$$\|z - P_{n,\nu}z\|_{L^2_{g\gamma}(D)} \leqslant \|y - Q_{n,\nu}y\|_{L^2_{g\gamma}(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad n,\nu \to \infty.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 1 является аналогом известной теоремы Эрдеш—Туран (см. [14]) о среднеквадратичной сходимости интерполяционного процесса Лагранжа для функций одной переменной.

Лемма 2. *Для любого многочлена*

$$z_{n,\nu}(t,\tau) = \sum_{\substack{k=0 \\ (t_{kn},\tau_{\varkappa\nu}) \in D}}^{n} \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \zeta_{k,\varkappa} l_{kn}(t)\lambda_{\varkappa\nu}(\tau)$$

справедлива оценка

$$\|z_{n,\nu}\|_{L^2_{g\gamma}(D)} \leqslant \|z_{n,\nu}\|_{L^2_{g\gamma}(\Omega)} \leqslant c_{g\gamma} \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n;\ 0 \leqslant \varkappa \leqslant \nu \\ (t_{kn},\tau_{\varkappa\nu}) \in D}} |\zeta_{k,\varkappa}|,$$

где

$$c_{g\gamma}=[\int\limits_a^b g(t)\,dt\int\limits_\alpha^\beta \gamma(\tau)\,d\tau]^{1/2}<\infty. \tag{1.6}$$

Доказательство немедленно вытекает из равенств (1.2), (1.3) и аналогичных равенств для $\lambda_{\varkappa\nu}(\tau)$.

Из (1.4) и леммы 2 вытекает, что

$$\|P_{n,\nu}\|_{C(D)\to L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant c_{g\gamma}\qquad (n,\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{1.7}$$

где $C(D)$ — банахово пространство непрерывных на D функций с нормой

$$\|z\|_{C(D)}=\max_{(t,\tau)\in D}|z(t,\tau)|.$$

Лемма 3. *Если D — прямоугольная область ($D=\Omega$), то для любой непрерывной на D функции $z(t,\tau)$ справедлива оценка*

$$\|z-P_{n,\nu}z\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant 2c_{g\gamma}e_{n,\nu}(z), \tag{1.8}$$

где $c_{g\gamma}$ — определенная в (1.6) *постоянная, а*

$$e_{n,\nu}(z)=\inf_{\zeta_{k,\varkappa}}\ \max_{(t,\tau)\in D}|z(t,\tau)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{\varkappa=0}^{\nu}\zeta_{k,\varkappa}t^k\tau^\varkappa|$$

— наилучшее равномерное приближение $z(t,\tau)$ многочленами $z_{n,\nu}(t,\tau)$ степени $\leqslant n$ относительно t и степени $\leqslant \nu$ относительно τ.

Доказательство. Из $D=\Omega$ вытекает, что $P_{n,\nu}z_{n,\nu}=$ $=z_{n,\nu}$ для любого многочлена указанного вида, поэтому

$$z-P_{n,\nu}z=(z-z_{n,\nu})-P_{n,\nu}(z-z_{n,\nu})$$

и

$$\|z-P_{n,\nu}z\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant\{[\int\limits_a^b g(t)\,dt\int\limits_\alpha^\beta\gamma(\tau)\,d\tau]^{1/2}+\|P_{n,\nu}\|_{C(D)\to L^2_{g\gamma}(D)}\}\times$$
$$\times\max_{(t,\tau)\in D}|z(t,\tau)-z_{n,\nu}(t,\tau)|.$$

Ввиду (1.7) и произвольности многочлена $z_{n,\nu}$ отсюда получаем (1.8). Лемма 3 доказана.

В случае области D произвольной формы нам не известно удобных оценок $\|z-P_{n,\nu}z\|_{L^2_{g\gamma}(D)}$.

§ 2. Приближенное решение неоднородных интегральных уравнений

1. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$x(t,\tau)=\iint\limits_D K(t,\tau;s,\sigma)\,x(s,\sigma)\,ds\,d\sigma+f(t,\tau). \tag{2.1}$$

Приближенное решение уравнения (2.1) ищем в виде

$$x_{n,\nu}(t,\tau)=\sum_{\substack{k=0\\(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\in D}}^{n}{}' \sum_{\varkappa=0}^{\nu}{}' \xi_{k,\varkappa} l_{kn}(t)\lambda_{\varkappa\nu}(\tau). \tag{2.2}$$

Коэффициенты $\xi_{k,\varkappa}$ определяем из условия обращения в нуль невязки в тех узлах $(t_{in},\tau_{\iota\nu})$, которые попали в D:

$$\left[x_{n,\nu}(t,\tau)-\iint_D K(t,\tau;s,\sigma)x_{n,\nu}(s,\sigma)\,ds\,d\sigma-f(t,\tau)\right]_{t=t_{in},\,\tau=\tau_{\iota\nu}}=0$$

$$(i=0,1,\ldots,n;\ \iota=0,1,\ldots,\nu;\ (t_{in},\tau_{\iota\nu})\in D). \tag{2.3}$$

Ввиду (1.1) это приводит к нахождению вектора $\xi^{(n,\nu)}=\{\xi_{k,\varkappa}\}$ из линейной системы алгебраических уравнений

$$\xi^{(n,\nu)}=A_{n,\nu}\xi^{(n,\nu)}+p_{n,\nu}f, \tag{2.4}$$

где

$$p_{n,\nu}f=\{f(t_{in},\tau_{\iota\nu})\} \tag{2.5}$$

— вектор значений функции $f(t,\tau)$ в узлах $(t_{in},\tau_{\iota\nu})\in D$, а матрица

$$A_{n,\nu}=\{a_{i,\iota;k,\varkappa}\} \tag{2.6}$$

имеет своими элементами

$$a_{i,\iota;k,\varkappa}=\iint_D K(t_{in},\tau_{\iota\nu};s,\sigma)l_{kn}(s)\lambda_{\varkappa\nu}(\sigma)\,ds\,d\sigma$$

$$(i,k=0,1,\ldots,n;\ \iota,\varkappa=0,1,\ldots,\nu;\ (t_{in}\tau_{\iota\nu})\in D,\ (t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\in D). \tag{2.7}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *свободный член $f(t,\tau)$ уравнения* (2.1) *непрерывен в D;*

2) $\sup\limits_{(t,\tau)\in D}\iint_D \dfrac{|K(t,\tau,s,\sigma)|^2}{g(s)\gamma(\sigma)}\,ds\,d\sigma<\infty$ *и для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что*

$$\iint_D \frac{|K(t_1,\tau_1;s,\sigma)-K(t_2,\tau_2;s,\sigma)|^2}{g(s)\gamma(\sigma)}\,ds\,d\sigma<\varepsilon$$

при $|t_1-t_2|<\delta,\ |\tau_1-\tau_2|<\delta,\ (t_i,\tau_i)\in D\ (i=1,2)$;

3) *уравнение* (2.1) *имеет единственное решение $x_\infty(t,\tau)$.*

Тогда найдется такое N, что при $n,\nu\geqslant N$ система уравнений (2.4) *имеет единственное решение. При $n,\nu\to\infty$ соответствующие приближения* (2.2) *среднеквадратично с весом $g(t)\gamma(\tau)$ сходятся к $x_\infty(t,\tau)$. Справедлива оценка*[1]

$$\|x_{n,\nu}-x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant c\|x_\infty-P_{n,\nu}x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\qquad (c=\text{const}). \tag{2.8}$$

---

[1] Об оценке правой части (2.8) см. лемму 3.

Доказательство. Интегральное уравнение (2.1) рассмотрим как линейное операторное уравнение $x = Ax + f$ в банаховом пространстве $L^2_{g\gamma}(D)$. Из условия 2) вытекает, что интегральный оператор

$$Ax(t, \tau) = \iint_D K(t, \tau; s, \sigma)\, x(s, \sigma)\, ds\, d\sigma \qquad (2.9)$$

действует и вполне непрерывен из $L^2_{g\gamma}(D)$ в $C(D)$. Тем более, A вполне непрерывен как оператор в $L^2_{g\gamma}(D)$, и из условия 3) вытекает непрерывная обратимость оператора $I - A$, где I — единичный оператор.

Условия (2.2)—(2.3) метода коллокации равносильны галеркинскому уравнению

$$x_{n,\nu} = P_{n,\nu} A x_{n,\nu} + P_{n,\nu} f.$$

В силу леммы 1 и полной непрерывности оператора $A : L^2_{g\gamma}(D) \to C(D)$ имеем

$$\|P_{n,\nu}A - A\|_{L^2_{g\gamma}(D) \to L^2_{g\gamma}(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad n, \nu \to \infty. \qquad (2.10)$$

Теперь из непрерывной обратимости $I - A$ получаем, что при достаточно больших n и ν непрерывно обратимы в $L^2_{g\gamma}(D)$ и операторы $I - P_{n,\nu}A$, причем нормы обратных операторов ограничены в совокупности. Из равенства

$$(I - P_{n,\nu}A)(x_\infty - x_{n,\nu}) = x_\infty - P_{n,\nu}x_\infty$$

получаем оценку (2.8). Сходимость $\|x_{n,\nu} - P_{n,\nu}x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)} \to 0$ вытекает из (2.8) и леммы 1.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Из проведенного доказательства видно, что теорема 1 остается в силе, если условия 1) и 2) заменить следующими менее ограничительными условиями:

1′) функция $f(t, \tau)$ (R)-интегрируема в D;

2′) интегральный оператор (2.9) действует и вполне непрерывен из $L^2_{g\gamma}(D)$ в банахово пространство $R(D)$ функций, (R)-интегрируемых на D, причем

$$\|z\|_{R(D)} = \sup_{(t,\tau) \in D} |z(t, \tau)|.$$

Замечание 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда последовательность

$$y_{n,\nu}(t, \tau) = \iint_D K(t, \tau; s, \sigma)\, x_{n,\nu}(s, \sigma)\, ds\, d\sigma + f(t, \tau)$$

сходится к $x_\infty(t, \tau)$ равномерно:

$$\max_{(t,\tau) \in D} |y_{n,\nu}(t, \tau) - x_\infty(t, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c\|x_\infty - P_{n,\nu}x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad n, \nu \to \infty.$$

Доказательство вытекает из равенства

$$y_{n,\nu}(t,\tau)-x_\infty(t,\tau)=\iint\limits_D K(t,\tau;s,\sigma)\,[x_{n,\nu}(s,\sigma)-x_\infty(s,\sigma)\,]ds\,d\sigma,$$

оценки (2.8) и ограниченности оператора $A: L^2_{g\gamma}(D)\to C(D)$, определенного в (2.9).

Ввиду того, что $y_{n,\nu}(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})=x_{n,\nu}(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})=\xi_{k,\varkappa}$ в узлах интерполяции $(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\in D$, получаем из замечания 2 следующее утверждение.

Замечание 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Хотя сами приближения $x_{n,\nu}$ сходятся к x_∞, вообще говоря, лишь среднеквадратично с весом $g(t)\gamma(\tau)$, в узлах интерполяции сходимость все же равномерная:

$$\max_{(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\in D}|\xi_{k,\varkappa}-x_\infty(t_{kn},\ {}_{\varkappa\nu})|\leqslant$$
$$\leqslant c\|x_\infty-P_{n,\nu}x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\to 0\qquad\text{при}\qquad n,\nu\to\infty.$$

2. Укажем на возможность применения теоремы 1 при изучении сходимости метода коллокации для краевых задач. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\tau^2}-c(t,\tau)u=f(t,\tau),\qquad u\big|_S=0,\tag{2.11}$$

где $c(t,\tau)$ и $f(t,\tau)$ — непрерывные в D функции, а S — граница D. Допустим, что нам известны функции $v_{kn;\varkappa\nu}(t,\tau)$, удовлетворяющие условиям

$$\Delta v_{kn;\varkappa\nu}=l_{kn}(t)\lambda_{\varkappa\nu}(\tau),\qquad v_{kn;\varkappa\nu}\big|_S=0.$$

Приближенное решение задачи (2.11) ищем в виде

$$u_{n,\nu}(t,\tau)=\sum_{\substack{k=0\\(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\in D}}^{n}\ \sum_{\varkappa=0}^{\nu}\xi_{k,\varkappa}v_{kn;\varkappa\nu}(t,\tau)\tag{2.12}$$

и определим, по методу коллокации, из условий

$$\begin{gathered}[\Delta u_{n,\nu}-cu_{n,\nu}-f]_{t=t_{in},\tau=\tau_{\iota\nu}}=0\\ (i=0,\,1,\,\ldots,\,n;\quad \iota=0,\,1,\,\ldots,\,\nu;\quad (t_{in},\tau_{\iota\nu})\in D).\end{gathered}\tag{2.13}$$

Допустим, что оператор Δ имеет при нулевом краевом условии Дирихле функцию Грина $G(t,\tau;s,\sigma)$. Тогда замена $\Delta u=x$ сводит краевую задачу (2.11) и метод коллокации (2.12)—(2.13) к интегральному уравнению (2.1) и методу коллокации (2.2)—(2.3) для него, причем

$$K(t,\tau;s,\sigma)=c(t,\tau)G(t,\tau;s,\sigma).$$

Пусть $g(t)\geqslant g_0>0$, $\gamma(\tau)\geqslant\gamma_0>0$. Тогда из свойств функции Грина вытекает, что $K(t,\tau;s,\sigma)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Выполнено и условие 1) теоремы 1. Пусть, наконец, задача (2.11) имеет единственное решение $u_\infty(t,\tau)$. Тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение $x_\infty=\Delta u_\infty$, т. е. выполнено также условие 3) теоремы 1.

Из теоремы 1 заключаем, что метод коллокации (2.12)—(2.13) дает при достаточно больших n,ν единственное приближение $u_{n,\nu}(t,\tau)$ и

$$\|\Delta(u_{n,\nu}-u_\infty)\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant c\|\Delta u_\infty - P_{n,\nu}\Delta u_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\to 0 \quad \text{при} \quad n,\nu\to\infty.$$

Отсюда и из свойств функции Грина вытекает равномерная сходимость $u_{n;\nu}(t,\tau)$ к $u_\infty(t,\tau)$:

$$\max_{(t,\tau)\in D}\left|u_{n,\nu}(t,\tau)-u_\infty(t,\tau)\right|\leqslant$$
$$\leqslant c\|\Delta u_\infty - P_{n,\nu}\Delta u_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\to 0 \quad \text{при} \quad n,\nu\to\infty.$$

§ 3. Приближенное решение проблемы собственных значений

Рассмотрим снова интегральный оператор A, определенный в (2.9), и матрицу $A_{n,\nu}$, определенную в (2.6)—(2.7). Собственные значения матрицы $A_{n,\nu}$ примем за приближенные собственные значения оператора A. Каждому собственному или корневому вектору $\xi^{(n,\nu)}=\{\xi_{k,\varkappa}\}$ матрицы $A_{n,\nu}$ ставим по формуле (2.2) в соответствие многочлен $x_{n,\nu}(t,\tau)$, который примем за приближенную собственную или корневую функцию оператора A. Норма $\|x\|$ ниже означает норму в $L^2_{g\gamma}(D)$.

Теорема 2. *Пусть ядро $K(t,\tau;\ s,\sigma)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Каждое собственное значение $\mu_\infty\neq 0$ интегрального оператора A является пределом при $n,\nu\to\infty$ собственных значений $\mu_{n,\nu}$ матриц $A_{n,\nu}$, и, наоборот, каждая ненулевая точка сгущения любой последовательности $\mu_{n,\nu}$ $(n,\nu=1,2,\ \ldots)$ собственных значений матриц $A_{n,\nu}$ является собственным значением оператора A.*

2) *При $n,\nu\to\infty$ имеет место сходимость*

$$d_{n,\nu;\infty}\equiv\sup_{\xi^{(n,\nu)}\in\Xi_{n,\nu},\ \|x_{n,\nu}\|=1}\ \inf_{x_\infty\in X_\infty}\|x_n-x_\infty\|\to 0,$$

$$d_{\infty;n,\nu}\equiv\sup_{x_\infty\in X_\infty,\ \|x_\infty\|=1}\ \inf_{\xi^{(n,\nu)}\in\Xi_{n,\nu}}\|x_n-x_\infty\|\to 0,$$

где X_∞ — корневое подпространство оператора A, соответствующее собственному значению $\mu_\infty\neq 0$; $\Xi_{n,\nu}$ — линейная оболочка тех корневых подпространств матрицы $A_{n,\nu}$, которые соответствуют близким к μ_∞ (сходящимся к μ_∞) собственным значениям матрицы $A_{n,\nu}$; вектор $\xi^{(n,\nu)}=\{\xi_{k,\varkappa}\}$ и функция $x_{n,\nu}=x_{n,\nu}(t,\tau)$ связаны равенством (2.2).

3) *Справедливы оценки*

$$|\mu_{n,\nu}-\mu_\infty|\leqslant c(\varepsilon_{n,\nu})^{1/h},\qquad d_{n,\nu;\infty}\leqslant c\varepsilon_{n,\nu},\qquad d_{\infty;n,\nu}\leqslant c\varepsilon_{n,\nu},$$

где $c=\mathrm{const}$, h — ранг собственного значения $\mu_\infty\neq 0$ оператора A, а

$$\varepsilon_{n,\nu}=\sup_{x_\infty\in X_\infty,\ \|x_\infty\|=1}\|x_\infty-P_{n,\nu}x_\infty\|.$$

Доказательство. Оператор $P_{n,\nu}$ является (неограниченным в $L^2_{g\gamma}(D)$) проектором, проектирующим в подпространство многочленов вида (2.2). Оператор $P_{n,\nu}A$ определен на всем $L^2_{g\gamma}(D)$, ограничен, и имеет место сходимость (2.10) (см. доказательство теоремы 1). Отсюда следует (см. [3]), что для операторов A и $P_{n,\nu}A$ справедливы утверждения, аналогичные утверждениям 1)—3) доказываемой теоремы — во всех формулировках следует лишь матрицу $A_{n,\nu}$ заменить оператором $P_{n,\nu}A$, и, соответственно, $\Xi_{n,\nu}$ заменить линейной оболочкой $X_{n,\nu}$ корневых подпространств оператора $P_{n,\nu}A$, принадлежащих близким к μ_∞ собственным значениям оператора $P_{n,\nu}A$. Теперь для завершения доказательства теоремы остается заметить, что собственные значения матрицы $A_{n,\nu}$ совпадают с собственными значениями оператора $P_{n,\nu}A$ и что уравнения

$$(\mu_{n,\nu}I - P_{n,\nu}A)^j x_{n,\nu} = 0$$

и

$$(\mu_{n,\nu}I_{n,\nu} - A_{n,\nu})^j \xi^{(n,\nu)} = 0$$

при каждом $j = 1, 2, \ldots$ равносильны (их решения связаны равенством (2.2)). Здесь $I_{n,\nu}$ — единичная матрица.

Теорема 2 доказана.

Утверждения, аналогичные замечаниям 1—3, справедливы и для проблемы собственных значений.

§ 4. Точка зрения фактор-метода

Укажем на возможность доказательства теорем 1 и 2 на основании результатов [4] о сходимости фактор-метода. Одновременно установим вспомогательные результаты, нужные в следующем параграфе.

Так как определенный в (2.9) интегральный оператор A вполне непрерывен как оператор из $L^2_{g\gamma}(D)$ в $C(D)$, то он вполне непрерывен и как оператор в пространстве $E = C(D)$. Обозначим через $E_{n,\nu}$ подпространство пространства $E = C(D)$, состоящее из аннулирующихся в узлах $(t_{kn}, \tau_{\varkappa\nu}) \in D$ непрерывных функций. Тогда факторпространство $E/E_{n,\nu}$ можно отождествить с векторным пространством векторов вида

$$\xi^{(n,\nu)} = \{\xi_{k,\varkappa}\}_{\substack{k=0,1,\ldots,n;\ \varkappa=0,1,\ldots,\nu, \\ (t_{k,n},\, \tau_{\varkappa\nu}) \in D}}$$

причем каноническое отображение $p_{n,\nu}: E \to E/E_{n,\nu}$ дается формулой (2.5). Естественная норма в $E/E_{n,\nu}$ (норма, индуцированная в $E/E_{n,\nu}$ нормой пространства $E = C(D)$) имеет вид

$$\|\xi^{(n,\nu)}\|_{E/E_{n,\nu}} = \max_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n;\ 0 \leqslant \varkappa \leqslant \nu \\ (t_{kn},\, \tau_{\varkappa\nu}) \in D}} |\xi_{k,\varkappa}| = \|\xi^{(n,\nu)}\|_{m_{n,\nu}},$$

т. е. $E/E_{n,\nu}$, как банахово пространство, отождествимо с пространством $m_{n,\nu}$ векторов указанного вида. Ввиду того, что узлы $(t_{kn}, \tau_{\varkappa\nu})$ расположены в D «предельно плотно», для каждой функции $x \in C(D)$ выполняется соотношение

$$\|p_{n,\nu}x\|_{E/E_{n,\nu}} \to \|x\|_E \quad \text{при} \quad n,\nu \to \infty. \tag{4.1}$$

Система уравнений (2.4) метода коллокации представляет собой операторное уравнение в факторпространстве $E/E_{n,\nu} = m_{n,\nu}$. Аналогично, собственные значения и корневые векторы матрицы $A_{n,\nu}$ можно рассматривать как собственные значения и собственные элементы оператора $A_{n,\nu}: E/E_{n,\nu} \to E/E_{n,\nu}$ (для оператора, порожденного матрицей $A_{n,\nu}$ в пространстве $m_{n,\nu} = E/E_{n,\nu}$, сохраняем то же самое обозначение $A_{n,\nu}$).

Напомним определение [4]: говорят, что последовательность вполне непрерывных операторов $A_{n,\nu}: E/E_{n,\nu} \to E/E_{n,\nu}$ $(n, \nu = 1, 2, \ldots)$ *компактно аппроксимирует* вполне непрерывный оператор $A: E \to E$, если выполнены следующие два условия:

а) $\|p_{n,\nu}Ax - A_{n,\nu}p_{n,\nu}x\| \to 0$ при $n, \nu \to \infty$ для любого $x \in E$;

б) для любых $\xi^{(n,\nu)} \in E/E_{n,\nu}$ $(\|\xi^{(n,\nu)}\| \leqslant 1;\ n, \nu = 1, 2, \ldots)$ существуют такие представители $y_{n,\nu} \in A_{n,\nu}\xi^{(n,\nu)}$ $(n, \nu = 1, 2, \ldots)$, что последовательность $y_{n,\nu}$ компактна в E.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие* 2) *теоремы* 1. *Тогда последовательность определенных в* (2.6)—(2.7) *операторов* $A_{n,\nu}: m_{n,\nu} \to m_{n,\nu}$ *компактно аппроксимирует оператор* $A: C(D) \to C(D)$, *определенный в* (2.9).

Доказательство. Используя (2.5)—(2.7) и (1.4), находим

$$\|p_{n,\nu}Ax - A_{n,\nu}p_{n,\nu}x\|_{m_{n,\nu}} =$$

$$= \max_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n;\ 0 \leqslant \iota \leqslant \nu \\ (t_{in}, \tau_{\iota\nu}) \in D}} \left| \iint_D K(t_{in}, \tau_{\iota\nu}; s, \sigma)[x(s, \sigma) - P_{n,\nu}x(s, \sigma)]ds\, d\sigma \right|, \tag{4.2}$$

и выполнение условия а) вытекает из леммы 1 и ограниченности A как оператора из $L^2{}_{g\gamma}(D)$ в $C(D)$.

Пусть $\xi^{(n,\nu)} \in m_{n,\nu}$, $\|\xi^{(n,\nu)}\| \leqslant 1$ $(n, \nu = 1, 2, \ldots)$. Составим соответствующую $\xi^{(n,\nu)}$ функцию $x_{n,\nu}$ по формуле (2.2). По лемме 2 имеем

$$\|x_{n,\nu}\|_{L^2_{g\gamma}(D)} \leqslant c_{g\gamma} = \text{const} \qquad (n, \nu = 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

Используя (2.6)—(2.7) и (1.4), находим, что вектор $\eta^{(n,\nu)} = A_{n,\nu}\xi^{(n,\nu)}$ имеет своими компонентами

$$\eta_{i,\iota} = \iint_D K(t_{in}, \tau_{\iota\nu}; s, \sigma)x_{n,\nu}(s, \sigma)ds\, d\sigma. \tag{4.4}$$

Следовательно, положив

$$y_{n,\nu}(t,\tau)=\iint_D K(t,\tau;s,\sigma)x_{n,\nu}(s,\sigma)\,ds\,d\sigma,$$

имеем $y_{n,\nu}\in A_{n,\nu}\xi^{(n,\nu)}$; из (4.3) и полной непрерывности A как оператора из $L^2{}_{g\gamma}(D)$ в $C(D)$ вытекает, что последовательность $y_{n,\nu}(t,\tau)$ компактна в $C(D)$, т. е. выполнено условие б).

Лемма 4 доказана.

Привлекая доказанную лемму 4 и соотношение (4.1), можно теоремы 1 и 2 вывести из теорем 1 и 3 статьи [4]. Например, непосредственным применением теоремы 1 из [4] устанавливаем однозначную разрешимость системы (2.4) при достаточно больших n,ν, сходимость $\|\xi^{(n,\nu)}-p_{n,\nu}x_\infty\|_{m_{n,\nu}}\to 0$ при $n,\nu\to\infty$ и оценку

$$\|\xi^{(n,\nu)}-p_{n,\nu}x_\infty\|_{m_{n,\nu}}\leqslant c\,\|p_{n,\nu}Ax_\infty-A_{n,\nu}p_{n,\nu}x_\infty\|_{m_{n,\nu}},$$

где x_∞ и $\xi^{(n,\nu)}$ — решения уравнения (2.1) и системы (2.4) соответственно. Используя (4.2) и лемму 2, получаем сходимость

$\|x_{n,\nu}-P_{n,\nu}x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\to 0$ и оценку

$$\|x_{n,\nu}-P_{n,\nu}x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant c\,\|x_\infty-P_{n,\nu}x_\infty\|_{L^2_{g\gamma}(D)}.$$

Эти соотношения равносильны утверждениям теоремы 1. Аналогичные рассуждения позволяют из теоремы 3 статьи [4] вывести теоремы 2.

Отметим, что использование фактор-методики наталкивается на затруднения при доказательстве замечания 1. Это связано с тем, что для разрывных функций $x\in R(D)$ нарушается (4.1).

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда матрицы $I_{n,\nu}-A_{n,\nu}$ обратимы при достаточно больших n,ν и*

$$\|(I_{n,\nu}-A_{n,\nu})^{-1}\|_{m_{n,\nu}\to m_{n,\nu}}\leqslant c=\mathrm{const}\qquad (n,\nu\geqslant N).$$

Это утверждение является следствием леммы 4 и леммы 3 из [4].

§ 5. Устойчивость вычислительного процесса

Здесь мы покажем, что изучаемая схема метода коллокации устойчива по отношению к малым погрешностям в системе уравнений метода коллокации. Рассмотрим наряду с системой (2.4) возмущенную систему

$$\tilde\xi^{(n,\nu)}=A_{n,\nu}\tilde\xi^{(n,\nu)}+\Gamma_{n,\nu}\tilde\xi^{(n,\nu)}+p_{n,\nu}f+\delta^{(n,\nu)}. \tag{5.1}$$

Здесь $\Gamma_{n,\nu}=\{\gamma_{i,\iota;k,\varkappa}\}$ и $\delta^{(n,\nu)}=\{\delta_{k,\varkappa}\}$ — матрица и вектор погрешностей, допущенные при вычислении $A_{n,\nu}$ и $p_{n,\nu}f$. Решив вместо (2.4) возмущенную систему (5.1), получим вместо (2.2) возмущенное приближение

$$\tilde{x}_{n,\nu}(t,\tau)=\sum_{\substack{k=0\\(t_{kn},\tau_{\varkappa\nu})\in D}}^{n}\ \sum_{\varkappa=0}^{\nu}\tilde{\xi}_{k,\varkappa}l_{kn}(t)\lambda_{\varkappa\nu}(\tau). \tag{5.2}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда найдутся не зависящие от n и $f(t,\tau)$ положительные постоянные η, c_1, c_2 и натуральное N, такие, что при $n,\nu\geqslant N$ и*

$$\|\Gamma_{n,\nu}\|_{m_{n,\nu}\to m_{n,\nu}}\leqslant\eta \tag{5.3}$$

система уравнений (5.1) *однозначно разрешима и*

$$\|\tilde{x}_{n,\nu}-x_{n,\nu}\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant$$

$$\leqslant c_1\max_{(t,\tau)\in D}|f(t,\tau)|\,\|\Gamma_{n,\nu}\|_{m_{n,\nu}\to m_{n,\nu}}+c_2\|\delta^{(n,\nu)}\|_{m_{n,\nu}}, \tag{5.4}$$

где $x_{n,\nu}$ и $\tilde{x}_{n,\nu}$ — приближения (2.2) *и* (5.2), *соответствующие невозмущенной и возмущенной системам* (2.4) *и* (5.1).

Доказательство. По лемме 5 найдутся такие N и $c<\infty$, что

$$\|(I_{n,\nu}-A_{n,\nu})^{-1}\|_{m_{n,\nu}\to m_{n,\nu}}\leqslant c \quad \text{при} \quad n,\nu\geqslant N. \tag{5.5}$$

Положим $\eta=1/(2c)$. Тогда из (5.3) и (5.5) вытекает обратимость $I_{n,\nu}-A_{n,\nu}-\Gamma_{n,\nu}$ и оценка

$$\|(I_{n,\nu}-A_{n,\nu}-\Gamma_{n,\nu})^{-1}\|_{m_{n,\nu}\to m_{n,\nu}}\leqslant 2c \quad \text{при} \quad n,\nu\geqslant N. \tag{5.6}$$

Для решений $\xi^{(n,\nu)}$ и $\tilde{\xi}^{(n,\nu)}$ систем (2.4) и (5.1) имеем

$$(I_{n,\nu}-A_{n,\nu}-\Gamma_{n,\nu})(\tilde{\xi}^{(n,\nu)}-\xi^{(n,\nu)})=\Gamma_{n,\nu}\xi^{(n,\nu)}+\delta^{(n,\nu)},$$

откуда на основании (5.6) находим

$$\|\tilde{\xi}^{(n,\nu)}-\xi^{(n,\nu)}\|_{m_{n,\nu}}\leqslant$$

$$\leqslant 2c\left(\|\Gamma_{n,\nu}\|_{m_{n,\nu}\to m_{n,\nu}}\|\xi^{(n,\nu)}\|_{m_{n,\nu}}+\|\delta^{(n,\nu)}\|_{m_{n,\nu}}\right). \tag{5.7}$$

Заметив, что по лемме 2

$$\|\tilde{x}_{n,\nu}-x_{n,\nu}\|_{L^2_{g\gamma}(D)}\leqslant c_{g\gamma}\|\tilde{\xi}^{(n,\nu)}-\xi^{(n,\nu)}\|_{m_{n,\nu}}$$

и что в силу (5.5)

$$\|\xi^{(n,\nu)}\|_{m_{n,\nu}}\leqslant c\,\|p_{n,\nu}f\|_{m_{n,\nu}}\leqslant c\max_{(t,\tau)\in D}|f(t,\tau)|,$$

получаем из (5.7) неравенство (5.4), в котором $c_1 = 2c^2 c_{g\gamma}$ и $c_2 = 2cc_{g\gamma}$ не зависят от n и $f(t, \tau)$.

Теорема 3 доказана.

Обсудим вкратце вопрос об устойчивости метода коллокации в проблеме собственных значений. Вместо собственных значений и корневых подпространств матрицы $A_{n,\nu}$ мы в действительности находим собственные значения $\tilde{\mu}_{n,\nu}$ и корневые подпространства $\widetilde{\Xi}_{n,\nu}$ возмущенной матрицы $A_{n,\nu} + \Gamma_{n,\nu}$. Допустим, что вычисления проводятся с повышающей точностью, а именно, что

$$\|\Gamma_{n,\nu}\|_{m_{n,\nu} \to m_{n,\nu}} \to 0 \quad \text{при} \quad n, \nu \to \infty.$$

Тогда из леммы 4 следует, что последовательность операторов $A_{n,\nu} + \Gamma_{n,\nu} : m_{n,\nu} \to m_{n,\nu}$ компактно аппроксимирует интегральный оператор $A : C(D) \to C(D)$. Применив теорему 3 из [4], получаем, что возмущенный вычислительный процесс остается сходящимся: справедливы аналоги утверждений 1) и 2) теоремы 2 (в формулировках следует $A_{n,\nu}$, $\mu_{n,\nu}$ и $\Xi_{n,\nu}$ заменить соответственно на $A_{n,\nu} + \Gamma_{n,\nu}$, $\widetilde{\mu}_{n,\nu}$ и $\widetilde{\Xi}_{n,\nu}$).

Литература

1. Вайникко Г., О сходимости и устойчивости метода коллокации. Дифференц. уравнения, 1965, **1**, № 2, 244—254.
2. Вайникко Г., О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 1, 35—42.
3. Вайникко Г., О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, **7**, № 5, 977—987.
4. Вайникко Г., Компактная аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов операторами в фактопространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, **220**, 190—204.
5. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—187.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
7. Карпиловская Э. Б., О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 3, 111—118.
8. Карпиловская Э. Б., О сходимости метода коллокации. Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 4, 766—769.
9. Карпиловская Э. Б., О сходимости метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики. Сиб. матем. ж., 1963, **4**, № 3, 632—640.
10. Каспшицкая М. Ф., Тукалевская Н. И., К вопросу о сходимости метода коллокации. Укр. матем. ж,. 1967, **19**, № 4, 48—56.
11. Киш О., О сходимости интерполяционного метода для дифференциальных и интегральных уравнений. Magyar tud. akad. Mat. kutato int. közl., 1958, **3**, № 1—2, 25—36.

12. Киш О., О сходимости метода совпадения. Acta math. Acad. scient. hung., 1966, 17, № 3—4, 433—442.
13. Петерсен И., О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН ЭстССР, Сер. физ.-матем. и техн. н., 1961, 10, № 1, 3—12.
14. Сеге Г., Ортогональные многочлены. Москва, 1962.
15. Ярцев Ю. П., О сходимости одного метода коллокационного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, 7, № 4, 892—894.
16. Elliott, D., Warne, W. G., An algorithm for the numerical solution of linear integral equations. I. C. C. Bull., 1967, 6, Nr. 4, 207—224.
17. Kadner, H., Die numerische Behandlung von Integralgleichung nach der Kollokationsmethode. Numer. Math., 1967, 10, № 3, 241—260.

Поступило
29 X 1968

KOLLOKATSIOONIMEETODI KOONDUMISEST MITMEMÕÕTMELISTE INTEGRAALVÕRRANDITE JAOKS

G. Vainikko

Resümee

Olgu piirkond D selline, et tema karakteristlik funktsioon $\chi_D(t, \tau)$ on integreeruv Riemanni mõttes. Uuritakse kollokatsioonimeetodi $\{(2.2), (2.3)\}$ koondumist ja stabiilsust võrrandi (2.1) jaoks ning omaväärtusülesandes.

ON THE CONVERGENCE OF COLLOCATION METHOD FOR TWO OR MORE DIMENSIONAL INTEGRAL EQUATIONS

G. Vainikko

Summary

Let D be a region with Riemann-integrable characteristic function $\chi_D(t, \tau)$. The convergence and the stability of collocation method $\{(2.2), (2.3)\}$ for integral equation (2.1) and in the eigenvalue problem are investigated. The main results are contained in theorems 1—3.

О РЕШЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Э. Тамме

Кафедра вычислительной математики

§ 1. Аппроксимация краевой задачи

Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$Lu \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(k_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha=1}^{p}\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(p_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right] +$$

$$+ ru = f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right) \qquad \text{при} \quad x \in D, \tag{1.1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = \nu \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \tag{1.2}$$

где Γ — граница p-мерного прямоугольного параллелепипеда

$$D = \{x = (x_1, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, p\},$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к границе Γ и

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_p}\right), \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}\right)$$

векторы всех частных производных соответственно первого и второго порядка.

Во всем дальнейшем предполагается, что выполнены нижеследующие

Условия А. *Пусть*

а) *коэффициенты* $k_{\alpha\alpha}(x) \geqslant A_{\alpha\alpha} > 0$, $k_{\alpha\beta}(x) \geqslant A_{\alpha\beta} \geqslant 0$ (*при* $\alpha \neq \beta$), $p_\alpha(x) \geqslant 0$ *и* $r(x) \geqslant 0$ *при* $x \in D$,

б) $\sigma(x) \geqslant 0$ *при* $x \in \Gamma$, в) $0 \leqslant k_{\alpha\alpha}(x)\left(\frac{2l_\alpha}{3A_{\alpha\alpha}}\right)^{1/2} \leqslant A$ *при* $x \in \Gamma$ *и* $x_\alpha = 0$ *или* $x_\alpha = l_\alpha$,

г) *функции* $q_\alpha(x)$ *не зависят от* x_α,
где $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$ *и* $A_{\alpha\beta}$, A — *постоянные*.

При аппроксимации краевой задачи разностной краевой задачей пользуемся разностной сеткой

$$\bar{\omega} = \{x = (x_1, \ldots, x_p):\ x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = -1, 0, \ldots, N_\alpha + 1,\ h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, p\},$$

причем считаем, что все $N_\alpha \geqslant 2$. Введем обозначения для следующих подмножеств узлов:

$$\omega = \bar{\omega} \cap D \quad \text{(множество внутренних узлов)},$$

$$\gamma = \bar{\omega} \cap \Gamma \quad \text{(множество граничных узлов)},$$

$$\gamma_\alpha^- = \{x = (x_1, \ldots, x_p):\ x \in \gamma,\ x_\alpha = 0,\ x_\beta \neq 0 \text{ и } x_\beta \neq l_\alpha \text{ при } \beta \neq \alpha\},$$

$$\gamma_\alpha^+ = \{x = (x_1, \ldots, x_p):\ x \in \gamma,\ x_\alpha = l_\alpha,\ x_\beta \neq 0 \text{ и } x_\beta \neq l_\alpha \text{ при } \beta \neq \alpha\}.$$

Пусть $y = y(x)$ — определенная на сетке $\bar{\omega}$ функция. Ее значения в соседних к $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \omega \cup \gamma$ узлах

$$x^{(\pm 1_\alpha)} = (x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha \pm h_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p)$$

обозначим через $y^{(\pm 1_\alpha)} = y(x^{(\pm 1_\alpha)})$ и разности функции y через

$$\Delta_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha}(y^{(+1_\alpha)} - y) = y_{x_\alpha}, \quad \nabla_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha}(y - y^{(-1_\alpha)}) = y_{\bar{x}_\alpha},$$

$$\delta_\alpha y = \frac{1}{2}(\nabla_\alpha y + \Delta_\alpha y) = \frac{1}{2h_\alpha}(y^{(+1_\alpha)} - y^{(-1_\alpha)}),$$

$$\delta_\alpha^2 y = \delta_\alpha \delta_\alpha y = \Delta_\alpha \nabla_\alpha y, \quad \delta_\alpha \delta_\beta y = \delta_\alpha(\delta_\beta y) \quad \text{при} \quad \beta \neq \alpha.$$

(Подчеркнем, что $\delta^2{}_\alpha y = \delta_\alpha \delta_\alpha y$ — только символ для обозначения $\Delta_\alpha \nabla_\alpha y$, причем $\delta_\alpha \delta_\alpha y \neq \delta_\alpha(\delta_\alpha y)$.)

Аппроксимируем уравнение (1.1) во внутренних точках сетки разностным уравнением[1] (см., например, [2])

$$L_h y \equiv \sum_{\alpha=1}^{p} \delta_\alpha^2(a_{\alpha\alpha}\delta_\alpha^2 y) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p}{}' \Delta_\alpha \Delta_\beta(a_{\alpha\beta}\nabla_\alpha \nabla_\beta y) - \sum_{\alpha=1}^{p}[\Delta_\alpha(b_\alpha \nabla_\alpha y) - c_\alpha \delta_\alpha y] + dy = f(x, y, \delta y, \delta^2 y) \quad (x \in \omega), \tag{1.3}$$

---

[1] Пользуемся обозначением $\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{p}{}' a_{\alpha\beta} = \sum\limits_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{p} a_{\alpha\beta}$.

где

$\delta y = (\delta_1 y, \ldots, \delta_p y)$, $\delta^2 y = (\delta_1^2 y, \delta_1\delta_2 y, \ldots, \delta_p^2 y)$,

$a_{\alpha\alpha}(x) = k_{\alpha\alpha}(x)$, $a_{\alpha\beta}(x) = k_{\alpha\beta}(x^{(-0,5_\alpha;\ -0,5_\beta)})$ при $\beta \neq \alpha$,

$b_\alpha(x) = p_\alpha(x^{(-0,5_\alpha)})$, $c_\alpha(x) = q_\alpha(x)$, $d(x) = r(x)$.

При этом

$$x^{(-0,5_\alpha)} = (z_1, \ldots, z_p), \text{ где } z_\alpha = x_\alpha - 0{,}5h_\alpha \text{ и } z_i = x_i \text{ при } i \neq \alpha,$$

$$x^{(-0,5_\alpha;-0,5_\beta)} = (z_1, \ldots, z_p), \text{ где } z_\alpha = x_\alpha - 0{,}5h_\alpha,\ z_\beta = x_\beta - 0{,}5h_\beta$$

$$\text{при} \quad i \neq \alpha, \beta.$$

Краевые условия (1.2) аппроксимируем условиями

$$\begin{aligned} y &= 0 \quad &&\text{при} \quad x \in \gamma, \\ \delta_\alpha^2 y - \sigma\delta_\alpha y &= \nu \quad &&\text{при} \quad x \in \gamma_\alpha^-, \\ \delta_\alpha^2 y + \sigma\delta_\alpha y &= \nu \quad &&\text{при} \quad x \in \gamma_\alpha^+. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Если коэффициенты и решение задачи $\{(1.1), (1.2)\}$ достаточно гладки, то можно показать, что задача $\{(1.3), (1.4)\}$ аппроксимирует эту задачу со вторым порядком точности.

Отметим, что метод конечных разностей для решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка рассмотрен, например, в работах [5, 7, 9, 10], а для решения уравнений в частных производных четвертого порядка в работах [2, 10, 11, 12]. В упомянутых работах рассмотрены линейные задачи с краевыми условиями

$$u = \mu \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \nu \text{ на } \Gamma.$$

В [10], кроме того, исследована сходимость метода конечных разностей решения обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями

$$u(0) = \mu(0),\ u(l) = \mu(l),\ u''(0) = \nu(0),\ u''(l) = \nu(l).$$

Но в приложениях, например, в теории упругости, приходится решать уравнения четвертого порядка также с краевыми условиями (1.2) (часто $\sigma = 0$).

В дальнейшем в § 3 исследуем скорость сходимости метода конечных разностей решения задачи $\{(1.1), (1.2)\}$ (результат является новым также в случае линейной задачи) и в § 4 укажем условия сходимости одного простого итерационного процесса для решения нелинейной системы $\{(1.3), (1.4)\}$. В последнем параграфе даны некоторые уточнения результатов в одно- и двумерном случаях. При решении этих проблем основную роль играют априорные оценки для решения линейной разностной краевой задачи, изложенные в следующем параграфе.

§ 2. Априорные оценки

1. Пусть $y(x)$ и $v(x)$ — функции одного переменного, определенные на одномерной сетке

$$\omega^* = \{x : x = ih,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ h = l/N > 0\},$$

причем $N \geqslant 2$. Введем обозначения

$$y_i = y(ih),\ \Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},\ \nabla y_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},\ \delta^2 y_i = \Delta \nabla y_i,$$

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h,\quad (y, v] = \sum_{i=1}^{N} y_i v_i h,$$

$$\|y\| = (y, y)^{1/2},\ \|\nabla y\| = (\nabla y, \nabla y]^{1/2},\ \|\delta^2 y\| = (\delta^2 y, \delta^2 y)^{1/2},$$

$$\|y\|_0 = \max_{i=0,\ 1,\ \ldots,\ N} |y_i|,\quad \|\nabla y\|_0 = \max_{i=1,\ \ldots,\ N} |\nabla y_i|.$$

Имеет место следующая формула суммирования по частям (см., например, [5])

$$(\Delta y, v) = -(y, \nabla v] + y_N v_N - y_1 v_0. \tag{2.1}$$

Справедлива (ср. [1, 4])

Лемма 1. *Для любой функции $y(x)$, определенной на сетке ω^* и удовлетворяющей условиям $y_0 = y_N = 0$, имеют место оценки*

$$\|y\| \leqslant \frac{l}{4}\sqrt{2}\,\|\nabla y\| \leqslant \frac{l^2}{8}\|\delta^2 y\|, \tag{2.2}$$

$$\|y\|_0 \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{l}\,\|\nabla y\| \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\,\|\delta^2 y\|, \tag{2.3}$$

$$\|\nabla y\|_0 \leqslant \sqrt{\frac{l}{3}}\,\|\delta^2 y\|. \tag{2.4}$$

Доказательство. Неравенства (2.2) получаем при помощи разложения (см., например, [1])

$$y = \sum_{k=1}^{N-1} \eta_k v_k, \qquad \text{где} \qquad v_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

собственные функции задачи

$$\delta^2 v + \lambda v = 0,\quad v_0 = v_N = 0,$$

соответствующие собственным значениям

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{k\pi h}{2l} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1).$$

Учитывая ортонормированность v_k, несложно получить

$$\|y\|^2 = (y, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \eta_k^2, \quad \|\delta^2 y\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k^2 \eta_k^2,$$

$$\|\nabla y\|^2 = (\nabla y, \nabla y] = -(\delta^2 y, y) = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k \eta_k^2.$$

Из последних соотношений и из $\lambda_k \geqslant \lambda_1$ $(k = 2, \ldots, N-1)$ следует

$$\|\delta^2 y\|^2 \geqslant \lambda_1 \|\nabla y\|^2 \geqslant \lambda_1^2 \|y\|^2,$$

и отсюда, в силу

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l} \geqslant \frac{8}{l^2} \quad \left(\text{при } \frac{l}{h} = N \geqslant 2 \right),$$

получаем неравенства (2.2).

Для доказательства неравенств (2.3) и (2.4) введем функции $w_k(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\delta^2 w_{kj} = \begin{cases} 1/h & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases} \qquad (2.5)$$
$$w_{k0} = w_{kN} = 0.$$

Нетрудно найти

$$w_{kj} = \begin{cases} -\frac{1}{l} h^2 (N-k) j & \text{при } j \leqslant k, \\ -\frac{1}{l} h^2 k (N-j) & \text{при } j \geqslant k. \end{cases}$$

Из (2.5) и (2.1) вытекает, что

$$y_k = (y, \delta^2 w_k) = -(\nabla y, \nabla w_k] = (\delta^2 y, w_k).$$

Отсюда при помощи неравенства Коши получаем

$$|y_k| = |(\nabla y, \nabla w_k]| \leqslant \|\nabla y\| \, \|\nabla w_k\| \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{l} \, \|\nabla y\|,$$

$$|\nabla y_k| = \left| \left(\delta^2 y, \frac{w_k - w_{k-1}}{h} \right) \right| \leqslant \sqrt{\frac{l}{3}} \, \|\delta^2 y\| \quad (k = 1, \ldots, N),$$

т. е. первое из неравенств (2.3) и неравенство (2.4). Второе из неравенств (2.3) следует из (2.2).

2. Пусть $y(x)$ и $v(x)$ — функции p переменных, определенные на сетке $\bar{\omega}$. Определим скалярные произведения

$$(y, v) = \sum_{\omega} y v H, \qquad (y, v]_\alpha = \sum_{\omega_\alpha} y v H,$$

$$(y, v]_{\alpha\beta} = \sum_{\omega_{\alpha\beta}} yvH, \qquad (y, v)_{\gamma_\alpha^\pm} = \sum_{\gamma_\alpha^\pm} yv\frac{H}{h_\alpha},$$

где $H = h_1 h_2 \ldots h_p$, $\omega_\alpha = \omega \cup \gamma_\alpha^+$ и $\omega_{\alpha\beta} = \omega \cup \gamma_\alpha^+ \cup \gamma_\beta^+$.

В дальнейшем пользуемся еще нормами

$$\|y\| = (y, y)^{1/2}, \quad \|\nabla_\alpha y\| = (\nabla_\alpha y, \nabla_\alpha y]_\alpha^{1/2},$$
$$\|\nabla_\alpha \nabla_\beta y\| = (\nabla_\alpha \nabla_\beta y, \nabla_\alpha \nabla_\beta y]_{\alpha\beta}^{1/2},$$
$$\|\delta_\alpha^2 y\| = (\delta_\alpha^2 y, \delta_\alpha^2 y)^{1/2}, \quad \|y\|_{\gamma_\alpha^\pm} = (y, y)_{\gamma_\alpha^\pm}^{1/2},$$
$$\|y\|_\gamma = \left[\sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|y\|^2_{\gamma_\alpha^-} + \|y\|^2_{\gamma_\alpha^+}\right)\right]^{1/2}.$$

На основании формулы (2.1)

$$\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} \Delta_\alpha y v h_\alpha = -\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} y \nabla_\alpha v h_\alpha + yv\big|_{i_\alpha=N_\alpha} - y^{(+1_\alpha)} v\big|_{i_\alpha=0}.$$

Умножая последнее равенство на H/h_α и суммируя по i_β от 1 до $N_\beta - 1$ при всех $\beta \neq \alpha$, получаем формулу

$$(\Delta_\alpha y, v) = -(y, \nabla_\alpha v]_\alpha + (y, v)_{\gamma_\alpha^+} - (y^{(+1_\alpha)}, v)_{\gamma_\alpha^-}. \tag{2.6}$$

3. Рассмотрим линейное разностное уравнение

$$L_h y = v \quad (\text{при } x \in \omega) \tag{2.7}$$

с краевыми условиями (1.4), причем $L_h y$ имеет то же значение, что и в уравнении (1.3).

Теорема 1. *Если выполнены условия* А, *то задача* {(2.7), (1.4)} *имеет единственное решение* y, *причем справедливы оценки*

$$B\|y\| \leqslant \|\delta y\|^* \leqslant \|\delta^2 y\|^* \leqslant \frac{1}{B}\|v\| + A\|\nu\|_\gamma, \tag{2.8}$$

где

$$\|\delta y\|^* = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha \|\nabla_\alpha y\|^2\right)^{1/2},$$

$$\|\delta^2 y\|^* = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} A_{\alpha\alpha} \|\delta_\alpha^2 y\|^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p}{}' A_{\alpha\beta} \|\nabla_\alpha \nabla_\beta y\|^2\right)^{1/2},$$

$$B_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} \frac{8A_{\alpha\beta}}{l_\beta^2}, \quad B = \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{8B_\alpha}{l_\alpha^2}\right)^{1/2} = \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \frac{64A_{\alpha\beta}}{l_\alpha^2 l_\beta^2}\right)^{1/2}$$

а постоянные A и $A_{\alpha\beta}$ определены условиями A.

Доказательство. Для вывода априорных оценок (2.8) пользуемся методом энергетических неравенств (см., например, [6]).

В системе линейных уравнений {(2.7), (1.4)} число неизвестных равно числу уравнений. Пусть свободные члены v и ν такие, что эта система имеет решение, и пусть $y = y(x)$ — любое решение этой системы.

Образуем скалярное произведение $(L_h y, y)$ и преобразуем его при помощи формулы (2.6), учитывая краевое условие $y(x) = 0$ при $x \in \gamma$, находим

$$(v, y) = (L_h y, y) = \sum_{\alpha=1}^{p} (\delta_\alpha^2 (a_{\alpha\alpha} \delta_\alpha^2 y), y) +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{p}{}' (\Delta_\alpha \Delta_\beta (a_{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta y), y) -$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{p} (\Delta_\alpha (b_\alpha \nabla_\alpha y), y) + \sum_{\alpha=1}^{p} (c_\alpha \delta_\alpha y, y) + (dy, y) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} [(a_{\alpha\alpha}, (\delta_\alpha^2 y)^2) - (a_{\alpha\alpha} \delta_\alpha^2 y, \nabla_\alpha y)_{\gamma_\alpha^+} + (a_{\alpha\alpha} \delta_\alpha^2 y, \Delta_\alpha y)_{\gamma_\alpha^-}] +$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{p}{}' (a_{\alpha\beta}, (\nabla_\alpha \nabla_\beta y)^2]_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha=1}^{p} (b_\alpha, (\nabla_\alpha y)^2]_\alpha +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{p} (c_\alpha \delta_\alpha y, y) + (dy, y). \qquad (2.9)$$

При помощи простых тождеств

$$\delta_\alpha y = \Delta_\alpha y - \frac{h_\alpha}{2} \delta_\alpha^2 y = \nabla_\alpha y + \frac{h_\alpha}{2} \delta_\alpha^2 y$$

из краевых условий (1.4) получаем, что

$$\delta_\alpha^2 y = \sigma^\alpha \Delta_\alpha y + \nu^\alpha \quad \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha^-,$$
$$\delta_\alpha^2 y = -\sigma^\alpha \nabla_\alpha y + \nu^\alpha \quad \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha^+,$$

где

$$\sigma^\alpha = \frac{2\sigma}{2 + \sigma h_\alpha}, \quad \nu^\alpha = \frac{2\nu}{2 + \sigma h_\alpha}.$$

Следовательно,

$$-(a_{\alpha\alpha} \delta_\alpha^2 y, \nabla_\alpha y)_{\gamma_\alpha^+} = (a_{\alpha\alpha} \sigma^\alpha, (\nabla_\alpha y)^2)_{\gamma_\alpha^+} - (a_{\alpha\alpha} \nu^\alpha, \nabla_\alpha y)_{\gamma_\alpha^+},$$

$$(a_{\alpha\alpha} \delta_\alpha^2 y, \Delta_\alpha y)_{\gamma_\alpha^-} = (a_{\alpha\alpha} \sigma^\alpha, (\Delta_\alpha y)^2)_{\gamma_\alpha^-} + (a_{\alpha\alpha} \nu^\alpha, \Delta_\alpha y)_{\gamma_\alpha^-}.$$

Из условий А вытекает, что

$$a_{\alpha\beta} \geqslant A_{\alpha\beta} \geqslant 0, \quad b_\alpha \geqslant 0, \; d \geqslant 0, \quad \sigma \geqslant 0, \quad \sigma^\alpha \geqslant 0.$$

Так как $c_\alpha(x) = q_\alpha(x)$ не зависит от x_α, то нетрудно проверить, что $(c_\alpha \delta_\alpha y, y) = 0$. Учитывая все это, получим из тождества (2.9) неравенство

$$\|\delta^2 y\|^{*2} \leqslant (v, y) + \sum_{\alpha=1}^{p} [(a_{\alpha\alpha}\nu^\alpha, \nabla_\alpha y)_{\gamma_\alpha^+} - (a_{\alpha\alpha}\nu^\alpha, \Delta_\alpha y)_{\gamma_\alpha^-}]. \qquad (2.10)$$

Из (2.2) следуют оценки

$$\|y\|^2 \leqslant \frac{l_\alpha^2}{8}\|\nabla_\alpha y\|^2 \leqslant \frac{l_\alpha^4}{64}\|\delta_\alpha^2 y\|^2,$$

$$\|\nabla_\alpha y\|^2 \leqslant \frac{l_\beta^2}{8}\|\nabla_\alpha \nabla_\beta y\|^2 \qquad (\text{при} \quad \beta \neq \alpha),$$

и отсюда, в свою очередь,

$$B\|y\| \leqslant \|\delta y\|^* \leqslant \|\delta^2 y\|^*,$$

т. е. первые два из неравенств (2.8).

Из оценки (2.4) получим

$$\|\nabla_\alpha y\|^2_{\gamma_\alpha^+} \leqslant \frac{l_\alpha}{3}\|\delta_\alpha^2 y\|^2, \quad \|\Delta_\alpha y\|^2_{\gamma_\alpha^-} \leqslant \frac{l_\alpha}{3}\|\delta_\alpha^2 y\|^2.$$

Используя эти неравенства, неравенство Коши и вытекающие из условий А неравенства

$$|\nu^\alpha| \leqslant |\nu|, \quad 0 \leqslant a_{\alpha\alpha} \leqslant A\left(\frac{3A_{\alpha\alpha}}{2l_\alpha}\right)^{1/2} \qquad (\text{при} \quad x \in \gamma_\alpha^\pm),$$

оценим правую сторону неравенства (2.10)

$$\|\delta^2 y\|^{*2} \leqslant \left(\frac{1}{B}\|v\| + A\|\nu\|_\gamma\right)\|\delta^2 y\|^*,$$

откуда следует последнее из неравенств (2.8).

Таким образом, оценки (2.8) верны для любого решения системы $\{(2.7), (1.4)\}$. Но из ограниченности множества решений этой системы следует уже однозначная разрешимость системы при любых v и ν. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Из* (2.8) *следуют оценки*

$$\|\nabla_\alpha y\| \leqslant B_\alpha^{-1/2}\|v\|^*, \qquad \|\delta_{\alpha\alpha}^2 y\| \leqslant A_{\alpha\alpha}^{-1/2}\|v\|^*,$$

$$\|\nabla_\alpha \nabla_\beta y\| \leqslant (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})^{-1/2}\|v\|^* \quad (\textit{если} \;\; A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha} > 0, \; \alpha \neq \beta),$$

где $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$ *и* $\|v\|^* = B^{-1}\|v\| + A\|\nu\|_\gamma$.

§ 3. Сходимость метода конечных разностей

Предположим, что коэффициенты и решение задачи $\{(1.1), (1.2)\}$ достаточно гладки. Точнее, предположим, что решение $u(x)$ этой задачи имеет непрерывные частные производные до шестого порядка в некоторой окрестности параллелепипеда $D \cup \Gamma$ (в этом параграфе рассмотрим только достаточно малые шаги h_α, так чтобы сетка находилась в этой окрестности), что $k_{\alpha\beta}(x)$ имеет непрерывные частные производные до четвертого и $p_\alpha(x)$ до третьего порядка в D, и что $q_\alpha(x)$, $r(x)$ ограничены в D и $\sigma(x)$ на Γ. Предположим еще, что функция f удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x, y, \delta y, \delta^2 y) - f(x, z, \delta z, \delta^2 z)\| \leqslant M\|y - z\| + \\ + \sum_{\alpha=1}^{p} M_\alpha \|\delta_\alpha y - \delta_\alpha z\| + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} M_{\alpha\beta} \|\delta_\alpha \delta_\beta y - \delta_\alpha \delta_\beta z\|, \tag{3.1}$$

где используются определенные в § 2.2 нормы.

Примечание 1. Если f имеет ограниченные частные производные по y, $\delta_\alpha y$ и $\delta_\alpha \delta_\beta y$, причем

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial(\delta_\alpha y)}\right| \leqslant M_\alpha, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial(\delta_\alpha \delta_\beta y)}\right| \leqslant M_{\alpha\beta}$$
$$(x \in D;\ \alpha,\ \beta = 1,\ \ldots,\ p),$$

то условие (3.1) выполнено. Это следует из тождества

$$f(x, y, \delta y, \delta^2 y) - f(x, z, \delta z, \delta^2 z) = \frac{\partial f}{\partial y}(y - z) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial(\delta_\alpha y)}(\delta_\alpha y - \delta_\alpha z) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial(\delta_\alpha \delta_\beta y)}(\delta_\alpha \delta_\beta y - \delta_\alpha \delta_\beta z), \tag{3.2}$$

где частные производные берутся в некоторых промежуточных точках.

При сделанных предположениях для погрешности аппроксимации

$$\psi = L_h u - f(x, u, \delta u, \delta^2 u) \qquad (x \in \omega)$$

уравнения (1.1) уравнением (1.3) на решении $u(x)$ задачи $\{(1.1), (1.2)\}$, при помощи (3.1) и разложений в ряд Тейлора, получается оценка

$$\|\psi\| = \left\|L_h u - f(x, u, \delta u, \delta^2 u) - Lu + f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}\right)\right\| \leqslant \\ \leqslant \|L_h u - Lu\| + \sum_{\alpha=1}^{p} M_\alpha \left\|\delta_\alpha u - \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right\| +$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} M_{\alpha\beta}\left\|\delta_\alpha\delta_\beta u-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right\| = O(|h|^2),$$

где $|h|^2=\sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2$. Для погрешности аппроксимации краевых условий

$$\psi=\delta_\alpha^2 u-\sigma\delta_\alpha u-\nu \quad \text{при} \quad x\in\gamma_\alpha^-,$$
$$\psi=\delta_\alpha^2 u+\sigma\delta_\alpha u-\nu \quad \text{при} \quad x\in\gamma_\alpha^+,$$

где $u(x)$ решение задачи $\{(1.1),\ (1.2)\}$, получается оценка

$$\|\psi\|_\gamma=\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\delta_\alpha^2 u-\sigma\delta_\alpha u-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right\|_{\gamma_\alpha^-}^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\delta_\alpha^2 u+\sigma\delta_\alpha u-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}-\sigma\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right\|_{\gamma_\alpha^+}^2\right)^{1/2}=O(|h|^2).$$

Пусть $y^*(x)$ — приближенное решение задачи $\{(1.1),\ (1.2)\}$, найденное как точное решение задачи $\{(1.3),\ (1.4)\}$. Его погрешность $u(x)-y^*(x)$ удовлетворяет уравнению $L_h(u-y^*)=$ $=f(x,u,\delta u,\delta^2 u)-f(x,y^*,\delta y^*,\ \delta^2 y^*)+\psi$ при $x\in\omega$ и краевым условиям

$$u-y^*=0 \quad \text{при} \quad x\in\gamma,$$
$$\delta_\alpha^2(u-y^*)-\sigma\delta_\alpha(u-y^*)=\psi \quad \text{при} \quad x\in\gamma_\alpha^-,$$
$$\delta_\alpha^2(u-y^*)+\sigma\delta_\alpha(u-y^*)=\psi \quad \text{при} \quad x\in\gamma_\alpha^+.$$

На основании теоремы 1 и условия Липшица (3.1) оценим[2]

$$\|\delta^2(u-y^*)\|^*\leqslant\frac{1}{B}\left[\|f(x,u,\delta u,\delta^2 u)-f(x,y^*,\delta y^*\ \delta^2 y^*)+\psi\|\right]+$$
$$+A\|\psi\|_\gamma\leqslant\frac{1}{B}\left[M\|u-y^*\|+\sum_{\alpha=1}^{p} M_\alpha\|\delta_\alpha u-\delta_\alpha y^*\|+\right.$$
$$\left.+\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} M_{\alpha\beta}\|\delta_\alpha\delta_\beta u-\delta_\alpha\delta_\beta y^*\|+\|\psi\|\right]+A\|\psi\|_\gamma\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{B}\left[M\|u-y^*\|+\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{M_\alpha^2}{B_\alpha}\right)^{1/2}\|\delta(u-y^*)\|^*+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{p}\frac{M_{\alpha\beta}^2}{A_{\alpha\beta}}\right)^{1/2}\|\delta^2(u-y^*)\|^*+\|\psi\|\right]+A\|\psi\|_\gamma\leqslant$$
$$\leqslant\varkappa\|\delta^2(u-y^*)\|^*+\frac{1}{B}\|\psi\|+A\|\psi\|_\gamma,$$

[2] Предполагается, что выполнено условия А, и что $A_{\alpha\beta}>0$, если $M_{\alpha\beta}>0$. При $M_{\alpha\beta}=0$ и $A_{\alpha\beta}=0$ считается $M_{\alpha\beta}/A_{\alpha\beta}=0$.

где

$$\varkappa = \frac{1}{B}\left[\frac{M}{B} + \left(\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{M_\alpha^2}{B_\alpha}\right)^{1/2} + \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \frac{M_{\alpha\beta}^2}{A_{\alpha\beta}}\right)^{1/2}\right]. \tag{3.3}$$

Если $\varkappa < 1$, то отсюда следует оценка

$$\|\delta^2(u-y^*)\|^* \leqslant \frac{1}{1-\varkappa}\left(\frac{1}{B}\|\psi\| + A\|\psi\|_\gamma\right).$$

Таким образом доказана

Теорема 2. *Пусть решение $u(x)$ и коэффициенты задачи $\{(1.1),\ (1.2)\}$ достаточно гладки, выполнены условия* А *и условие Липшица* (3.1), *причем $\varkappa < 1$ и $A_{\alpha\beta} > 0$, если $M_{\alpha\beta} > 0$. Тогда при $|h| \to 0$ решение y^* задачи $\{(1.3),\ (1.4)\}$ приближается к решению исходной задачи со скоростью*

$$\|u - y^*\| \leqslant \frac{1}{B}\|\delta^2(u-y^*)\|^* = O(|h|^2).$$

Примечание 2. Из теоремы 3 (следующего параграфа) следует, что в условиях теоремы 2 задача $\{(1.3),\ (1.4)\}$ имеет решение y^* при всех достаточно малых шагах h_α.

§ 4. Итерационный метод для решения разностной краевой задачи

Для решения нелинейной алгебраической системы $\{(1.3),\ (1.4)\}$ можно применить итерационный процесс

$$\begin{aligned} L_h y^{m+1} &= f(x, y^m, \delta y^m, \delta^2 y^m) && \text{при} \quad x \in \omega, \\ y^{m+1} &= 0 && \text{при} \quad x \in \gamma, \\ \delta_\alpha{}^2 y^{m+1} - \sigma\delta_\alpha y^{m+1} &= \nu && \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha{}^-, \\ \delta_\alpha{}^2 y^{m+1} + \sigma\delta_\alpha y^{m+1} &= \nu && \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha{}^+, \end{aligned} \tag{4.1}$$

причем $m = 0, 1, \ldots$ и y^0 — начальное приближение искомого решения y^*. На каждом шагу этого процесса надо решить линейную разностную краевую задачу.

Условия сходимости итерационного процесса (4.1) можно получить на основе принципа сжатых отображений. Сформулируем этот принцип в следующем виде (см. например, [3]).

Лемма 2. *Пусть оператор F преобразовывает сферу $S(v^c, R) = \{v : \varrho(v, v^c) \leqslant R\}$ полного метрического пространства V в то же пространство и удовлетворяет в этой сфере условию Липшица*

$$\varrho(F(v), F(w)) \leqslant \varkappa\varrho(v, w) \qquad (v, w \in S(v^c, R)),$$

причем $\varkappa < 1$ и $\varrho(F(v^c), v^c) \leqslant (1-\varkappa)R$. Тогда уравнение $v = F(v)$ имеет в сфере $S(v^c, R)$ единственное решение v^* и итерационный процесс $v^{m+1} = F(v^m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ при любом *начальном приближении* $v^0 \in S(v^c, R)$ *сходится к этому решению со скоростью*

$$\varrho(v^*, v^m) \leqslant \frac{\varkappa^m}{1-\varkappa}\varrho(v^1, v^0) \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Из этой леммы следует

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A *и условие Липшица* (3.1), *причем* $A_{\alpha\beta} > 0$, *если* $M_{\alpha\beta} > 0$, *и определенная формулой* (3.3) *величина* $\varkappa < 1$. *Тогда разностная краевая задача* $\{(1.3),\ (1.4)\}$ *имеет единственное решение* y^*, *и итерационный процесс* (4.1) *при любом начальном приближении* y^0, *удовлетворяющем условию* $y^0(x) = 0$ *при* $x \in \gamma$, *сходится к этому решению со скоростью*

$$\|y^* - y^m\| \leqslant \frac{1}{B}\|\delta^2(y^* - y^m)\|^* \leqslant K\varkappa^m \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots),$$

где K — *некоторая постоянная.*

Доказательство. Проведем в задаче $\{(1.3),\ (1.4)\}$ замену

$$\begin{aligned} v &= L_h y && \text{при} \quad x \in \omega, \\ v &= \delta_\alpha{}^2 y - \sigma\delta_\alpha y && \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha{}^-, \\ v &= \delta_\alpha{}^2 y + \sigma\delta_\alpha y && \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha{}^+. \end{aligned} \tag{4.2}$$

На основании теоремы 1 соотношения (4.2) и равенство $y(x) = 0$ при $x \in \gamma$ однозначно определяют $y = Gv$, где G линейный оператор в векторном пространстве V с расстоянием

$$\varrho(v, w) = B^{-1}\|v - w\| + A\|v - w\|_\gamma,$$

где нормы $\|v\|$ и $\|v\|_\gamma$ определены в § 2.2.

Заменой (4.2) задача $\{(1.3), (1.4)\}$ приобретает вид $v = F(v)$ и итерационный процесс (4.1) — вид $v^{m+1} = F(v^m)$, где $y^m = Gv^m$ и

$$F(v) = \begin{cases} f(x, Gv, \delta Gv, \delta^2 Gv) & \text{при} \quad x \in \omega, \\ \nu \quad \text{при} \quad x \in \gamma_\alpha{}^\pm, & \alpha = 1, \ldots, p. \end{cases}$$

Пусть $z = Gw$. Тогда на основании теоремы 1

$$B\|y - z\| \leqslant \|\delta(y - z)\|^* \leqslant \|\delta^2(y - z)\|^* \leqslant \varrho(v, w).$$

Поэтому так же, как и в § 3 получим

$$\varrho(F(v), F(w)) = \|f(x, y, \delta y, \delta^2 y) - f(x, z, \delta z, \delta^2 z)\| \leqslant \varkappa\varrho(v, w).$$

Таким путем все утверждения теоремы 3 просто следуют из леммы 2, если возьмем $v^c = v^0$ и $R = +\infty$.

Примечание 3. Для решения нелинейной системы $\{(1.3),\ (1.4)\}$ можно применить и более быстро сходящиеся итерационные методы, например, метод Ньютона. Условия сходимости метода Ньютона можно получить методикой работы [8].

§ 5. Равномерные оценки в одно- и двумерном случаях

Если в уравнении (1.1) размерность $p=1$ или $p=2$, то можно при помощи леммы 1 получить равномерные оценки для решения разностной краевой задачи $\{(2.7),\ (1.4)\}$. Это дает возможность практически использовать то обстоятельство, что в теоремах 2 и 3 можно требовать выполнение условия Липшица только в некоторой окрестности искомого решения.

1. Пусть $p=1$, т. е. уравнение (1.1) является обыкновенным дифференциальным уравнением

$$Lu \equiv (k_{11}(x)u'')'' - (p_1(x)u')' + q_1u' + r(x)u =$$
$$= f(x, u, u', u'') \qquad (0 < x < l)$$

и краевые условия (1.2) имеют вид

$$u(0) = u(l) = 0,$$
$$u''(0) - \sigma(0)u'(0) = \nu(0), \qquad u''(l) + \sigma(l)u'(l) = \nu(l),$$

где $l = l_1$.

Предположим, что выполнено условия А. Будем пользоватся обозначениями § 2.1 и обозначениями

$$v_i = v(ih), \qquad \|v\|_1 = \sum_{i=1}^{N-1} |v_i| h,$$

$$\|v\|_1^* = \frac{l}{8A_{11}} \sqrt{2l}\, \|v\|_1 + \frac{A}{\sqrt{2A_{11}}} (|\nu(0)| + |\nu(l)|).$$

Оценки (2.8) можно усилить следующим образом. При помощи неравенств (2.3) и (2.4) получим из (2.10)

$$\|\delta^2 y\|^{*2} = A_{11}\|\delta^2 y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (v, y) + k_{11}(l)|\nu(l)|\,|\nabla y_N| + k_{11}(0)|\nu(0)|\,|\Delta y_0| \leqslant$$
$$\leqslant \|v\|_1\|y\|_0 + A\sqrt{A_{11}/2}\,(|\nu(0)| + |\nu(l)|)\,\|\delta^2 y\| \leqslant$$
$$\leqslant A_{11}\|v\|_1^*\|\delta^2 y\|,$$

т. е. $\|\delta^2 y\| \leqslant \|v\|_1^*$. Таким образом из леммы 1 и теоремы 1 следует

Теорема 4. *Если выполнены условия* А, *то задача* $\{(2.7),\ (1.4)\}$ *при* $p=1$ *имеет единственное решение* y, *причем справедливы оценки*

$$\|y\|_0 \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\,\|\delta^2 y\| \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\,\|v\|_1^*, \qquad \|\nabla y\|_0 \leqslant \sqrt{\frac{l}{3}}\,\|v\|_1^*.$$

Полученные равномерные оценки дают возможность в рассматриваемом случае следующим образом уточнить теорему 3.

Теорема 5. *Пусть при $p = 1$ выполнены условия* А *и условие Липшица*

$$\|f(x, y, \delta y, \delta^2 y) - f(x, z, \delta z, \delta^2 z)\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant M\|y - z\|_0 + M_1\|\delta y - \delta z\|_0 + M_{11}\|\delta^2 y - \delta^2 z\| \qquad (5.1)$$

при

$$y, z \in S_0\left(y^0 \frac{l^3}{32A_{11}} R\right), \qquad \delta y, \delta z \in S_0\left(\delta y^0, \frac{l^2}{24A_{11}} \sqrt{6} R\right)$$

и

$$\delta^2 y, \delta^2 z \in S_2\left(\delta^2 y^0 \frac{l}{8A_{11}} \sqrt{2l} R\right),$$

причем

$$\varkappa_1 = \frac{Ml^3}{32A_{11}} + \frac{M_1 l^2}{24A_{11}} \sqrt{6} + \frac{M_{11} l}{8A_{11}} \sqrt{2l} < 1,$$

где

$$S_0(z^0, r) = \{y : \|y - z^0\|_0 \leqslant r\}, \qquad S_2(z^0, r) = \{y : \|y - z^0\| \leqslant r\}$$

и y^0 удовлетворяет краевым условиям (1.4) *и условию*

$$\|L_h y^0 - f(x, y^0, \delta y^0, \delta^2 y^0)\|_1 \leqslant (1 - \varkappa_1) R.$$

Тогда разностная краевая задача $\{(1.3), (1.4)\}$ *при $p = 1$ имеет решение*

$$y^* \in S_0\left(y^0, \frac{l^3}{32A_{11}} R\right)$$

и итерационный процесс (4.1) *сходится к этому решению со скоростью*

$$\|y^* - y^m\|_0 \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\,\|\delta^2(y^* - y^m)\| \leqslant \frac{\varkappa_1{}^m}{1 - \varkappa_1} \frac{l^3}{32A_{11}} \|L_h(y^1 - y^0)\|_1.$$

Доказательство этой теоремы в основном совпадает с доказательством теоремы 3. Проведем замену переменного (4.2) и проверим выполнение условий леммы 2, взяв $v^c = v^0$. При этом за метрическое пространство V возьмем множество векторов v, удовлетворяющих условиям $v_0 = \nu(0)$, $v_N = \nu(l)$, причем расстояние

$$\varrho(v, w) = \|v - w\|_1.$$

Если[3] $v, w \in V$ и $y = Gv$, $z = Gw$, то на основании теоремы 4

$$\|y - z\|_0 \leqslant \frac{l}{8}\sqrt{2l}\,\|\delta^2 y - \delta^2 z\| \leqslant \frac{l^3}{32A_{11}} \|v - w\|_1,$$

[3] Операторы G и F имеют то же значение, что и в доказательстве теоремы 3.

$$\|\nabla y - \nabla z\|_0 \leqslant \frac{l^2}{24A_{11}} \sqrt{6}\, \|v - w\|_1.$$

Поэтому, если $v, w \in S(v^0, R)$, то

$$y, z \in S_0\left(y^0, \frac{l^3}{32A_{11}} R \right), \quad \delta y, \delta z \in S_0\left(\delta y^0, \frac{l^2}{24A_{11}} \sqrt{6} R \right),$$

$$\delta^2 y, \delta^2 z \in S_2\left(\delta^2 y^0, \frac{l}{8A_{11}} \sqrt{2l}\, R \right)$$

и выполнено условие Липшица [3]

$$\varrho(F(v), F(w)) \leqslant \|f(x, y, \delta y, \delta^2 y) - f(x, z, \delta z, \delta^2 z)\| \leqslant \varkappa_1 \varrho(v, w).$$

Учитывая еще равенство

$$\varrho(F(v^0), v^0) = \|f(x, y^0, \delta y^0, \delta^2 y^0) - L_h y^0\|_1,$$

видим, что все условия леммы 2 выполнены. Все утверждения теоремы 5 очевидным образом следуют из этой леммы.

Примечание 4. Пусть функция $f(x, y, \delta y, \delta^2 y)$ имеет частные производные по y, δy и $\delta^2 y$ и

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial f(x_i, y_i, \delta y_i, \delta^2 y_i)}{\partial y} \right| h \leqslant M,$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial(\delta y)} \right\|_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial f(x_i, y_i, \delta y_i, \delta^2 y_i)}{\partial(\delta y)} \right| h \leqslant M_1,$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial(\delta^2 y)} \right\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial f(x_i, y_i, \delta y_i, \delta^2 y_i)}{\partial(\delta^2 y)} \right|^2 h \right)^{1/2} \leqslant M_{11}$$

при

$$y \in S_0\left(y^0, \frac{l^3}{32A_{11}} R \right), \quad \delta y \in S_0\left(\delta y^0, \frac{l^2}{24A_{11}} \sqrt{6} R \right),$$

$$\delta^2 y \in S_2\left(\delta^2 y^0, \frac{l}{8A_{11}} \sqrt{2l}\, R \right).$$

Тогда из равенства (3.2) следует, что условие Липшица (4.1) выполнено в той же области.

2. Пусть в уравнении (1.1) размерность $p = 2$ и пусть выполнены условия А, причем [4] $A_{12} + A_{21} > 0$.

---

[4] Из-за равенств $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}$ и $\nabla_1 \nabla_2 y = \nabla_2 \nabla_1 y$ можно всегда считать, что, например, $k_{21}(x) = 0$ и $A_{21} = 0$.

Для сеточной функции $y(x) = y(x_1, x_2)$, удовлетворяющей условию $y(x) = 0$ при $x \in \gamma$, из (2.3) получаем оценку

$$\|y\|_0 \leqslant \frac{1}{4}\sqrt{l_1 l_2}\,\|\nabla_1\nabla_2 y\|_{12},$$

где $\|y\|_0 = \max\limits_{x\in\omega}|y(x)|$ и $\|\nabla_1\nabla_2 y\|_{12}$ определена в § 2.2. Следовательно,

$$\|y\|_0 \leqslant C\|\delta^2 y\|^*, \qquad \text{где} \qquad C = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{l_1 l_2}{A_{12}+A_{21}}}.$$

Таким образом, из (2.8) вытекает оценка для $\|y\|_0$.

В случае, если $\nu = 0$, можем оценки (2.8) еще усилить. В таком случае получим из (2.10) для решения задачи $\{(2.7), (1.4)\}$ оценки

$$\|y\|_0 \leqslant C\|\delta y\|^* \leqslant C\|\delta^2 y\|^* \leqslant C^2\|v\|_1,$$

где

$$\|v\|_1 = \sum_{\omega}|v(x)|h_1 h_2.$$

Последние оценки дают возможность аналогично доказательству теоремы 5 получить следующий результат.

Теорема 6. *Пусть при* $p = 2$ *выполнены условия* A, *причем* $A_{12} + A_{21} > 0$, *и условие Липшица*

$$\|f(x, y, \delta y, \delta^2 y) - f(x, z, \delta z, \delta^2 z)\|_1 \leqslant M\|y - z\|_0 + $$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{2} M_\alpha\|\delta_\alpha y - \delta_\alpha z\| + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} M_{\alpha\beta}\|\delta_\alpha\delta_\beta y - \delta_\alpha\delta_\beta z\| \tag{5.2}$$

при

$$y, z \in S_0(y^0, C^2R), \qquad \delta_\alpha y, \delta_\alpha z \in S_2(\delta_\alpha y^0, B_\alpha^{-1/2}CR),$$

$$\delta_\alpha\delta_\beta y, \delta_\alpha\delta_\beta z \in S_2(\delta_\alpha\delta_\beta y^0, A_{\alpha\beta}^{-1/2}CR),$$

причем

$$\varkappa_2 = C^2 M + C\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{M_\alpha^2}{B_\alpha}\right)^{1/2} + C\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\frac{M_{\alpha\beta}^2}{A_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} < 1,$$

где

$$B_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2}\frac{8A_{\alpha\beta}}{l_\beta^2}, \qquad S_0(z^0, r) = \{y : \|y - z^0\|_0 \leqslant r\},$$

$$S_2(z^0, r) = \{y : \|y - z^0\| \leqslant r\},$$

и y^0 *удовлетворяет краевым условиям* (1.4) *и условию*

$$\|L_h y^0 - f(x, y^0, \delta y^0, \delta^2 y^0)\|_1 \leqslant (1 - \varkappa_2)R.$$

Тогда разностная краевая задача $\{(1.3), (1.4)\}$ *при* $p = 2$ *имеет решение* $y^* \in S_0(y^0, C^2R)$, *и итерационный процесс* (4.1) *схо-*

дится к этому решению со скоростью

$$\|y^*-y^m\|_0 \leqslant C\|\delta^2(y^*-y^m)\|^* \leqslant \frac{\varkappa_2^m}{1-\varkappa_2} C^2\|L_h(y^1-y^0)\|_1.$$

Примечание 5. Из равенства (3.2) следует, что условие Липшица выполнено в указанной в теореме области, если в этой области частные производные функции $f(x, \delta y, \delta^2 y)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_1 \leqslant M, \qquad \left\|\frac{\partial f}{\partial(\delta_\alpha y)}\right\| \leqslant M_\alpha,$$

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial(\delta_\alpha \delta_\beta y)}\right\| \leqslant M_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1,\ 2).$$

Примечание 6. При $p=1$, 2 можно уточнить также теорему 2. Можно получить равномерную оценку погрешности $\|u-y^*\|_0 = O(|h|^2)$, и при этом требовать выполнение условия Липшица только в некоторой окрестности начального приближения y^0, где содержатся решение $u(x)$ задачи $\{(1.1),\ (1.2)\}$ и решение $y^*(x)$ задачи $\{(1.3),\ (1.4)\}$.

Литература

1. Андреев В. Б., О равномерной сходимости некоторых разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, **6**, № 2, 238—250.
2. Дьяконов Е. Г., О некоторых итерационных методах решения систем разностных уравнений, возникающих при решении методом сеток уравнений в частных производных эллиптического типа. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1965, **3**, 191—222.
3. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа. Москва, 1965.
4. Самарский А. А., Априорные оценки для решения разностного аналога дифференциального уравнения параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 3, 441—460.
5. Самарский А. А., Априорные оценки для разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, **1**, № 6, 972—1000.
6. Самарский А. А., Классы устойчивых разностных схем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, **7**, № 5, 1096—1133.
7. Самарский А. А., Хао Шоу, Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений четвертого порядка. Сб. работ Вычисл. центра Моск. ун-та, 1967, **6**, 3—16.
8. Тамме Э. Э., О решении нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом конечных разностей. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, **8**, № 5, 988—1000.
9. Хао Шоу, Однородные разностные схемы для уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, **3**, № 5, 841—860.

10. Babuška, I., Prágér, M., Vitásek, E., Numerical processes in differential equations, Praha, 1966 (Бабушка И., Виташек Э., Прагер М., Численные процессы решения дифференциальных уравнений. Москва, 1969).
11. Bramble, J. H., A second order finite difference analog for the first biharmonic boundary value problem. Numer. Math. 1966, **9**, № 3, 236—249.
12. Zlámal, M., Asymptotic error estimates in solving elliptic equations of the fourth order by the method of the finite differences. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, **B2**, № 2, 337—344.

Поступило
4 XI 1968

NELJANDAT JÄRKU KVAASILINEAARSE RAJAÜLESANDE LAHENDAMISEST VÕRGUMEETODIGA

E. Tamme

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse rajaülesande {(1.1), 1.2)} lahendamist võrgumeetodiga, mille korral rajaülesanne aproksimeeritakse algebralise võrrandisüsteemiga {(1.3), (1.4)}. Teoreemis 3 on antud tingimused, mille puhul see meetod koondub ja on teist järku täpsusega, teoreemis 4 aga tingimused, mille puhul algebralise võrrandisüsteemi lahendamiseks saab kasutada harilikku iteratsioonimeetodit (4.1). Koonduvustingimuste tuletamisel kasutatakse oluliselt aprioorseid hinnanguid (2.8) vastava lineaarse diferentsivõrrandi rajaülesande lahendi jaoks. Viimases paragrahvis on ühe- ja kahemõõtmelise juhu jaoks tuletatud ühtlased aprioorsed hinnangud, mis võimaldavad täpsustada nii diferentsmeetodi kui ka iteratsioonimeetodi koonduvustingimusi.

ÜBER DIE LÖSUNG DER QUASILINEAREN RANDWERTAUFGABE VIERTER ORDNUNG MITTELS EINES DIFFERENZENVERFAHRENS

E. Tamme

Zusammenfassung

Im vorliegenden Aufsatz wird die Lösung der Randwertaufgabe {(1.1), (1.2)} mittels des Differenzenverfahrens betrachet, wobei die Randwertaufgabe mit dem algebraischen Gleichungssystem {(1.3), (1.4)} approximiert wird. Im Satze 3 sind die Bedingungen, wann dieses Differenzenverfahren konvergiert und wann es die Genauigkeit zweiter Ordnung hat, im Satze 4 aber die Bedingungen, wann für die Lösung des algebraischen Gleichungssystems das gewöhnliche Iterationsverfahren (4.1) verwendbar ist, angegeben. Bei der Ableitung der Konvergenzbedingungen werden im wesentlichen die apriorischen Abschätzungen (2.8) für die Lösung der Randwertaufgabe der entsprechenden linearen Differenzengleichung verwendet. In dem letzten Paragraphen sind für die ein- und zweidimensionalen Fälle gleichmässige apriorische Abschätzungen, die die Konvergenzbedingungen des Differenzenverfahrens sowie des Iterationsverfahrens genauer zu bestimmen ermöglichen, abgeleitet.

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Р. Юргенсон

Кафедра вычислительной математики

Х. Иокк

Кружок СНО при кафедре вычислительной математики

В статье рассматривается приближенное решение краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений (1.1) и для системы нелинейных дифференциальных уравнений (3.3) конечноразностными методами (1.3) и (3.1) соответственно. Для краевых условий (1.2) рассматриваются аппроксимации (1.4) и (1.5).

В первом параграфе статьи описывается разностный метод в применении к линейным задачам, вводятся предположения и нужные в дальнейшем обозначения. Второй параграф посвящен нахождению априорных оценок линейной системы, являющихся основой в получении всех результатов статьи. В третьем параграфе строятся итерационные процессы решения нелинейных разностных систем {(3.1), (3.2)}, {(3.8), (1.5)} и даются условия их сходимости (теоремы 1, 2). В § 4 исследуется сходимость решений указанных разностных систем к решению краевой задачи {(3.3), (1.2)} и выводятся соответствующие оценки погрешности (теоремы 3, 4). В частных случаях из этих оценок следуют оценки погрешности разностного метода при решении линейных краевых задач.

§ 1. Аппроксимация линейной краевой задачи

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений [1]

$$L_k[y_k(x)] \equiv y''_k + p_k(x) y'_k + \sum_{j=1}^{m} q_{kj}(x) y_j = f_k(x) \qquad (1.1)$$

[1] Здесь и в дальнейшем $k = 1, 2, \ldots, m$.

при краевых условиях

$$l_{1k}[y_k(a)] \equiv \alpha_{1k}y'_k(a) - \alpha_{0k}y_k(a) = \alpha_k,$$
$$l_{2k}[y_k(b)] \equiv \beta_{1k}y'_k(b) + \beta_{0k}y_k(b) = \beta_k. \tag{1.2}$$

Пусть выполнены следующие предположения.

a) На отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{m} q_{kj}(x) < 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \quad q_{kj}(x) \geqslant 0$$
$$(k \neq j; \; j = 1, 2, \ldots m).$$

b) Коэффициенты в краевых условиях удовлетворяют условиям

$$\alpha_{1k} > 0, \; \beta_{1k} > 0, \; \alpha_{0k} \geqslant 0, \; \beta_{0k} \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Для приближенного решения задачи $\{(1.1), (1.2)\}$ разобьем отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ на n равных частей точками $x_i = a + ih$, $h = (b-a)/n$. Дифференциальное уравнение (1.1) в точках x_i аппроксимируем соотношениями[2]

$$L_{kh}[y_{ki}] \equiv \frac{y_{k,i+1} - 2y_{ki} + y_{k,i-1}}{h^2} + p_{ki}\frac{y_{k,i+1} - y_{k,i-1}}{2h} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} q_{kji}y_{ji} = f_{ki}, \tag{1.3}$$

где $\quad p_{ki} = p_k(x_i), \; q_{kji} = q_{kj}(x_i), \; f_{ki} = f_k(x_i)$.

Предположим дополнительно, что

c) Величина шага h настолько мала, что

$$|p_k(x)| < \frac{2}{h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Это предположение в дальнейшем в некоторых случаях используется в следующем, усиленном виде.

d) Для каждого k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ выполняется условие

$$|p_k(x)| < \frac{2}{b-a}.$$

Для краевых условий (1.2) рассмотрим две различных аппроксимации:

$$l_{1kh}[y_{k0}] \equiv \alpha_{1k}\frac{y_{k1} - y_{k,-1}}{2h} - \alpha_{0k}y_{k0} = \alpha_k,$$
$$l_{2kh}[y_{kn}] \equiv \beta_{1k}\frac{y_{k,n+1} - y_{k,n-1}}{2h} + \beta_{0k}y_{kn} = \beta_k \tag{1.4}$$

[2] В случае аппроксимации краевых условий (1.4) эти соотношения следует рассматривать в точках x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, а в случае аппроксимаций (1.5) и (1.6) — в точках x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

и

$$'l_{1kh}[y_{k0}] \equiv \alpha_{1k}\frac{y_{k1}-y_{k0}}{h} - \alpha_{0k}y_{k0} = \alpha_k,$$
$$'l_{2kh}[y_{kn}] \equiv \beta_{1k}\frac{y_{kn}-y_{k,n-1}}{h} + \beta_{0k}y_{kn} = \beta_k. \tag{1.5}$$

Отдельно будем рассматривать аппроксимацию

$$y_{k0} = \alpha_k, \quad y_{kn} = \beta_k \tag{1.6}$$

краевых условий (1.2) в частном случае $y_k(a) = \alpha_k$, $y_k(b) = \beta_k$. Чтобы оценить погрешности $\varepsilon_{ki} = y_k(x_i) - y_{ki}$ методов {(1.3), (1.4)}, {(1.3, (1.5)} и {(1.3), (1.6)}, составим системы, которым эти погрешности удовлетворяют.

Погрешности ε_{ki} удовлетворяют следующим системам соответственно:

$$L_{kh}[\varepsilon_{ki}] = R_{ki}\ (i=0, 1, \ldots, n),\ l_{1kh}[\varepsilon_{k0}] = r_{k0},\ l_{2kh} = [\varepsilon_{kn}] = r_{kn}, \tag{1.7}$$

$$L_{kh}[\varepsilon_{ki}] = R_{ki}\ (i=1, 2, \ldots, n-1),\ 'l_{1kh}[\varepsilon_{k0}] = 'r_{k0},\ 'l_{2kh}[\varepsilon_{kn}] = 'r_{kn}, \tag{1.8}$$

$$L_{kh}[\varepsilon_{ki}] = R_{ki}\ (i = 1, 2, \ldots, n-1),\ \varepsilon_{k0} = \varepsilon_{kn} = 0, \tag{1.9}$$

где

$$R_{ki} = -\frac{h^2}{12}y^{\text{IV}}{}_k(\xi_{ki}) + p_{ki}\frac{h^2}{6}y'''(\xi'_{ki}),$$

$$r_{k0} = \alpha_{1k}\frac{h^2}{2}y'''{}_k(\xi'_{k0}),\ r_{kn} = \beta_{1k}\frac{h^2}{2}y'''{}_k(\xi'_{kn}) \quad (x_{i-1} \leqslant \xi_{ki},\ \xi'_{ki} \leqslant x_{i+1}),$$

$$'r_{k0} = \alpha_{1k}\frac{h}{2}y''{}_k('\xi_{k0}) \quad (x_0 \leqslant {}'\xi_{k0} \leqslant x_1),$$

$$'r_{kn} = \beta_{1k}\frac{h}{2}y''{}_k('\xi_{kn}) \quad (x_{n-1} \leqslant {}'\xi_{kn} \leqslant x_n)$$

(существование непрерывных производных до четвертого порядка включительно решений $y_k(x)$ задачи {(1.1), (1.2)} предполагается).

В статье используются следующие обозначения, оценки и нормы

$$-\sum_{j=1}^{m} q_{kji} \geqslant Q > 0,\ |p_{ki}| \leqslant P_k \leqslant P,\ |R_{ki}| \leqslant R_k \leqslant R \quad (i=1, 2, \ldots, n-1),$$

$$|R_{ki}| \leqslant R_k^{(i)} \leqslant R^{(i)} \quad (i = 0,\ n),$$

$$|y_k^{(j)}(x)| \leqslant M_{kj} \leqslant M_j\ (a \leqslant x \leqslant b),\ |y_k^{(j)}(x)| \leqslant M_{kjr} \leqslant M_{jr}$$
$$(x_{r-1} \leqslant x \leqslant x_{r+1};\ r = 0, n),$$

$$\|y\| = \max_{k,i}|y_{ki}|,\ \|\varepsilon\| = \max_{k,i}|\varepsilon_{ki}|,\ y = \{y_{ki}\},\ y^{(p)} = \{\overset{(p)}{y_{ki}}\},\ \varepsilon = \{\varepsilon_{ki}\}.$$

Для оценки решений ε_{ki} систем (1.7), (1.8) и (1.9), а также для нахождения нужных оценок в случае нелинейной задачи, мы в следующем параграфе найдем вспомогательные априорные оценки решений систем, в которых остаточные члены заменены произвольными постоянными.

§ 2. Априорные оценки решений линейных систем

1. Рассмотрим систему

$$L_{kh}[u_{ki}] = v_{ki} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \; u_{k0} = u_{kn} = 0, \qquad (2.1)$$

где v_{ki} — любые действительные числа.

Используем оценки $|v_{ki}| \leqslant v_k \leqslant v$.

Для оценки решений u_{ki} этой системы используем принцип максимума (см., например, [2], стр. 128), на основании которого, в предположениях a) и c), решения ϱ_{ki} системы

$$-L_{kh}(\varrho_{ki}) \geqslant v_k \;\; (i = 1, 2, \ldots, n-1), \; \varrho_{k0} \geqslant 0, \; \varrho_{kn} \geqslant 0 \qquad (2.2)$$

дают оценки для абсолютной величины u_{ki}, т. е. $|u_{ki}| \leqslant \varrho_{ki}$.

Следуя идее статьи [3], ищем неизвестные ϱ_{ki} тремя различными способами.

1) Возьмем $\varrho_{ki} = \lambda > 0$, где $\lambda = \text{const}$. Соответствующая подстановка в систему (2.2) дает

$$-\sum_{j=1}^{m} q_{kji}\lambda \geqslant v_k,$$

откуда

$$|u_{ki}| \leqslant \frac{v}{Q} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1; \; u_{k0} = u_{kn} = 0). \qquad (2.3)$$

2) Ищем неизвестные ϱ_{ki} в виде $\varrho_{ki} = \lambda(x_i - a)(b - x_i)$, где $\lambda > 0$. Путем такой подстановки получаем после несложных преобразований

$$\lambda[2 - p_{ki}(b + a - 2x_i) - (x_i - a)(b - x_i)\sum_{j=1}^{m} q_{kji}] \geqslant v_k, \qquad (2.4)$$

откуда, в предположении d), получаем следующие оценки

$$|u_{ki}| \leqslant v\omega_{1i} \leqslant v\omega_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1, \; u_{k0} = u_{kn} = 0), \qquad (2.5)$$

где

$$\omega_{1i} = \frac{(x_i - a)(b - x_i)}{2 - P(b-a) + h^2(n-1)Q},$$

$$\omega_1 = \frac{(b-a)^2}{4[2 - P(b-a) + h^2(n-1)Q]}.$$

3) Наконец, подставим в систему (2.2) выражения $\varrho_{ki} = \lambda_k(x_i - a)(b - x_i)$, где $\lambda_k > 0$. При такой подстановке, в предположении d), вычисления дают

$$|u_{ki}| \leqslant v_k\omega_{2ki} \leqslant v_k\omega_{2k} \leqslant v_k\omega_2 \;\; (i = 1, 2, \ldots, n-1; \; u_{k0} = u_{kn} = 0), \qquad (2.6)$$

где

$$\omega_{2ki}=\frac{(x_i-a)(b-x_i)}{2-P_k(b-a)},\quad \omega_{2k}=\frac{(b-a)^2}{4[2-P_k(b-a)]},$$

$$\omega_2=\frac{(b-a)^2}{4[2-P(b-a)]}.$$

Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Если выполнены предположения* a) *и* c), *то система* (2.1) *имеет*[3] *единственное решение* $\{u_{ki}\}$, *причем имеет место оценка* (2.3). *Если выполняется еще предположение* d), *то имеют место и оценки* (2.5), (2.6).

2. Для оценки решений системы

$$L_{kh}[u_{ki}]=v_{ki}\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),\ l_{1kh}[u_{k0}]=V_{1k},\ l_{2kh}[u_{kn}]=V_{2k} \tag{2.7}$$

исключаем из этой системы неизвестные $u_{k,-1}$ и $u_{k,n+1}$. Получаемая система имеет вид

$$\begin{aligned}
&L_{kh}[u_{ki}]=v_{ki}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\\
&\gamma_{k0}[u_{k0}]\equiv u_{k1}-\lambda_{k0}u_{k0}+\frac{h^2}{2}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq k)}}^{m} q_{kj0}u_{j0}=\mu_{k0},\\
&\gamma_{kn}[u_{kn}]\equiv u_{k,n-1}-\lambda_{kn}u_{kn}+\frac{h^2}{2}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq k)}}^{m} q_{kjn}u_{jn}=\mu_{kn},
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\lambda_{k0}=1-\frac{h^2}{2}q_{kk0}+h\frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{1k}}\left(1-\frac{h}{2}p_{k0}\right),$$

$$\lambda_{kn}=1-\frac{h^2}{2}q_{kkn}+h\frac{\beta_{0k}}{\beta_{1k}}\left(1+\frac{h}{2}p_{kn}\right),$$

$$\mu_{k0}=h\frac{V_{1k}}{\alpha_{1k}}\left(1-\frac{h}{2}p_{k0}\right)+\frac{h^2}{2}v_{k0},$$

$$\mu_{kn}=-\frac{V_{2k}}{\beta_{1k}}\left(1+\frac{h}{2}p_{kn}\right)+\frac{h^2}{2}v_{kn}.$$

Согласно принципу максимума, предположения которого, при условиях a), b), c), выполнены, оценками ϱ_{ki} для $|u_{ki}|$ являются решения системы ($|v_{ki}|\leqslant v_k\leqslant v$)

$$-L_{kh}(\varrho_{ki})\geqslant v_k\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

$$-\gamma_{k0}[\varrho_{k0}]\geqslant|\mu_{k0}|,\quad \gamma_{kn}[\varrho_{kn}]\geqslant|\mu_{kn}|.$$

Разыскивая решения ϱ_{ki} последней системы в виде положительной постоянной $\varrho_{ki}=\lambda>0$, получаем следующий результат.

---

[3] Существование единственного решения $\{u_{ki}\}$ системы (2.1) следует прямо из выполненности предположений принципа максимума.

Лемма 2. *Если выполнены предположения* a), b), c), *то система* (2.7) *имеет единственное решение* $\{u_{ki}\}$, *причем имеет место оценка*

$$|u_{ki}| \leqslant \max\left(\frac{v}{Q}, \frac{\max\limits_{k} |\mu_{kj}|}{\min c_{kj}} \right) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, n), \tag{2.9}$$

где

$$c_{k0} = h \frac{\alpha_{0k}}{\alpha_{1k}} \left(1 - \frac{h}{2} p_{k0} \right) - \sum_{j=1}^{m} q_{kj0} > 0,$$

$$c_{kn} = h \frac{\beta_{0k}}{\beta_{1k}} \left(1 + \frac{h}{2} p_{kn} \right) - \sum_{j=1}^{m} q_{kjn} > 0.$$

3. Аналогичный леммам 1, 2 результат в случае системы

$$\begin{gathered} L_{kh}[u_{ki}] = v_{ki} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ 'l_{1kh}[u_{k0}] = V_{1k}, \qquad 'l_{2kh}[u_{kn}] = V_{2k} \end{gathered} \tag{2.10}$$

доказывается при помощи принципа максимума.

Лемма 3. *Если выполнены предположения* a), c) *и условия* $\alpha_{1k} \geqslant 0$, $\beta_{1k} \geqslant 0$, $\alpha_{0k} > 0$, $\beta_{0k} > 0$, *то система* (2.10) *имеет единственное решение* $\{u_{ki}\}$, *причем имеет место оценка*

$$|u_{ki}| \leqslant \max \left(\frac{v}{Q}, \max_{k} \frac{|V_{1k}|}{\alpha_{0k}}, \max_{k} \frac{|V_{2k}|}{\beta_{0k}} \right) \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{2.11}$$

Примечание 1. В частном случае $V_{1k} = V_{2k} = 0$ из этой оценки следует оценка (2.3).

§ 3. Приближенное решение нелинейной краевой задачи

1. Рассмотрим приближенное решение методом конечных разностей

$$L_{kh}[y_{ki}] = f_k(x_i, y_{1i}, \ldots, y_{mi}) \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{3.1}$$

$$l_{1kh}[y_{k0}] = \alpha_k, \qquad l_{2kh}[y_{kn}] = \beta_k \tag{3.2}$$

системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$L_k[y_k(x)] = f_k(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)) \tag{3.3}$$

при краевых условиях (1.2).

Для решения нелинейной системы $\{(3.1), (3.2)\}$ исключаем из этой системы неизвестные $y_{k,-1}$, $y_{k,n+1}$ и применяем относительно получаемой системы метод последовательных приближений

$$L_{kh}[y_{ki}^{(p+1)}] = f_k(x_i, y_{1i}^{(p)}, \ldots, y_{mi}^{(p)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{k0}[y_{k0}^{(p+1)}] = \mu_{k0}(x_0, y_{10}^{(p)}, \ldots, y_{m0}^{(p)}), \\ \gamma_{kn}[y_{kn}^{(p+1)}] = \mu_{kn}(x_n, y_{1n}^{(p)}, \ldots, y_{mn}^{(p)}). \end{gathered} \tag{3.5}$$

Здесь использованы обозначения

$$\mu_{k0}(x_0, y_{10}, \ldots, y_{m0}) = h\frac{\alpha_k}{\alpha_{1k}}\left(1 - \frac{h}{2}p_{k0}\right) + \frac{h^2}{2}f_k(x_0, y_{10}, \ldots, y_{m0}),$$

$$\mu_{kn}(x_n, y_{1n}, \ldots, y_{mn}) = -h\frac{\beta_k}{\beta_{1k}}\left(1 + \frac{h}{2}p_{kn}\right) + \frac{h^2}{2}f_k(x_n, y_{1n}, \ldots, y_{mn}).$$

Введем следующее предположение

e) Функции $f_k(x, y_1, \ldots, y_m)$ удовлетворяют в области G точек $(x, u_1, \ldots, u_m)$, содержащей область $\|y^{(0)} - u\| \leqslant \leqslant (1-q_1)^{-1}\|y^{(1)} - y^{(0)}\|$, условию Липшица относительно y_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$:

$$|f_k(x, y'_1, \ldots, y'_m) - f_k(x, y''_1, \ldots, y''_m| \leqslant \sum_{j=1}^{m} N_{kj}|y'_j - y''_j|.$$

В дальнейшем используем обозначение $N = \max\limits_k \sum\limits_{j=1}^{m} N_{kj}$.

Условия сходимости итерационного процесса {(3.4), (3.5)} дает следующая

Теорема 1. *Если выполнены предположения* a), b), c), e) *и*

$$q_1 = N \cdot \max\left(\frac{1}{Q}, \frac{h^2}{2\min\limits_k c_{kj}}\right) < 1 \qquad (j = 0, n), \tag{3.6}$$

то система {(3.1), (3.2)} *имеет в области G единственное решение $\{y_{ki}\}$, к которому сходится последовательность приближений, найденных процессом* {(3.4), (3.5)}, *начиная с произвольного начального приближения $\{y_{ki}^{(0)}\}$, для которой $(x_i, y_{1i}^{(0)}, \ldots, y_{mi}^{(0)}) \in \in G$, со скоростью*

$$\|y - y^{(p)}\| \leqslant \frac{q_1^p}{1-q_1}\|y^{(1)} - y^{(0)}\| \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы опирается на использовании принципа неподвижной точки (см., например, [1], стр. 563). При этом, существенно используется лемма 2.

2. Используем при аппроксимации дифференциального уравнения (3.3) соотношения

$$L_{kh}[y_{ki}] = f_k(x_i, y_{1i}, \ldots, y_{mi}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (3.8)$$

а при аппроксимации краевых условий (1.2) соотношения (1.5).

Нелинейную систему {(3.8), (1.5)} решим методом последовательных приближений

$$L_{kh}[\overset{(p+1)}{y_{ki}}] = f_k(x_i, \overset{(p)}{y_{1i}}, \ldots, \overset{(p)}{y_{mi}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (3.9)$$

$$'l_{1kh}[\overset{(p)}{y_{k0}}] = \alpha_k, \quad 'l_{2kh}[\overset{(p)}{y_{kn}}] = \beta_k \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (3.10)$$

Путем применения принципа неподвижной точки, на основании леммы 3, доказывается следующая

Теорема 2. *Если выполнены предположения* a), b), e), $\alpha_{1k} \geqslant 0$, $\beta_{1k} \geqslant 0$, $\alpha_{0k} > 0$, $\beta_{0k} > 0$ *и*

$$q_2 = \frac{N}{Q} < 1, \qquad (3.11)$$

то система {(3.8), (1.5)} *имеет единственное решение* $\{y_{ki}\}$, *к которому сходится последовательность приближений, найденных процессом* {(3.9), (3.10)}, *начиная с произвольного начального приближения* $\{\overset{(0)}{y_{ki}}\}$, *для которой* $(x_i, \overset{(0)}{y_{1i}}, \ldots, \overset{(0)}{y_{mi}}) \in G$, *со скоростью*

$$\|y - y^{(p)}\| \leqslant \frac{q_2^p}{1 - q_2} \|y^{(1)} - y^{(0)}\| \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (3.12)$$

3. Теорема 2, конечно, остается в силе и в частном случае, в случае итерационного метода (3.9), $\overset{(p)}{y_{k0}} = \alpha_k$, $\overset{(p)}{y_{kn}} = \beta_k$ решения задачи {(3.8), (1.6)}, возникающей при приближенном решении методом конечных разностей уравнения (1.1) при краевых условиях $y_k(a) = \alpha_k$, $y_k(b) = \beta_k$. Но в этом частном случае, в предположении d), в силу леммы 1, теорему 2 можно применить и в форме, где q_2 заменена на $q_3 = N \cdot \omega_1$ или на более грубую $q_4 = N \cdot \omega_2$.

§ 4. Оценка погрешности метода конечных разностей

1. Чтобы оценить погрешности $\varepsilon_{ki} = y_k(x_i) - y_{ki}$, возникающие при приближенном решении краевой задачи {(3.3), (1.2)} разностным методом {(3.1), (3.2)}, выпишем систему,

$$L_{kh}[\varepsilon_{ki}] = \delta_{ki} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \gamma_{k0}[\varepsilon_{k0}] = \delta_{k0},$$
$$\gamma_{kn}[\varepsilon_{kn}] = \delta_{kn}, \qquad (4.1)$$

которой эти погрешности удовлетворяют, где

$$\delta_{ki} = f_k(x_i, y_1(x_i), \ldots, y_m(x_i)) - f_k(x_i, y_{1i}, \ldots, y_{mi}) + R_{ki}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\delta_{k0} = \frac{h^2}{2}[f_k(x_0, y_1(x_0), \ldots, y_m(x_0)) - f_k(x_0, y_{10}, \ldots, y_{m0})] +$$
$$+ h\frac{r_{k0}}{\alpha_{1k}}\left(1 - \frac{h}{2}p_{k0}\right) + \frac{h^2}{2}R_{k0},$$

$$\delta_{kn} = \frac{h^2}{2}[f_k(x_n, y_1(x_n), \ldots, y_m(x_n)) - f_k(x_n, y_{1n}, \ldots, y_{mn})] -$$
$$- h\frac{r_{kn}}{\beta_{1k}}\left(1 + \frac{h}{2}p_{kn}\right) + \frac{h^2}{2}R_{kn}$$

(см. также обозначения (2.8)).

Эта система получается из системы (2.8) путем замены в последней v_{ki} на δ_{ki} $(i = 0, 1, \ldots, n)$, V_{1k} на r_{k0} и V_{2k} на r_{kn}.

Пусть выполнены предположения a), b), c), и, кроме того, следующие предположения.

f) Краевая задача {(3.3), (1.2)} имеет на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ решение $\{y_k(x)\}$, имеющее на отрезке $a - h \leqslant x \leqslant b + h$ непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

g) Система {(3.1), (3.2)} имеет решение $\{y_{ki}\}$.

h) Функция $f_k(x, y_1, \ldots, y_m)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|f_k(x_i, y_1(x_i), \ldots, y_m(x_i)) - f_k(x_i, y_{1i}, \ldots, y_{mi})| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{m} N_{kj}|y_j(x_i) - y_{ji}|,$$

где $\{y_k(x)\}$ и $\{y_{ki}\}$ — решения задач {(3.3), (1.2)} и {(3.1), (3.2)} соответственно.

Для оценки погрешностей ε_{ki} оценим правые части системы (4.1):

$$|\delta_{ki}| \leqslant R_k + \sum_{j=1}^{m} N_{kj}|\varepsilon_{ij}| \leqslant R + N\|\varepsilon\| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$|\delta_{k0}| \leqslant \frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{m} N_{kj}|\varepsilon_{j0}| + \frac{h^3}{12}M_{k30}(2 - hp_{k0}) + \frac{h^2}{2}R_k^{(0)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h^2}{2}N\|\varepsilon\| + \delta_0,$$

$$|\delta_{kn}| \leqslant \frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{m} N_{kj}|\varepsilon_{jn}| + \frac{h^3}{12}M_{k3n}(2 + hp_{kn}) + \frac{h^2}{2}R_k^{(n)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h^2}{2}N\|\varepsilon\| + \delta_n,$$

где

$$\delta_0 = \frac{h^3}{12} M_{30} \max_k (2 - hp_{k0}) + \frac{h^2}{2} R^{(0)},$$

$$\delta_n = \frac{h^3}{12} M_{3n} \max_k (2 + hp_{nk}) + \frac{h^2}{2} R^{(n)}.$$

На основании леммы 2

$$\|\varepsilon\| \leqslant \max\left(\frac{N\|\varepsilon\| + R}{Q}, \frac{\frac{h^2}{2} N\|\varepsilon\| + \delta_j}{\min\limits_k c_{kj}}\right) \qquad (j = 0, n),$$

откуда, при условии (3.6), получаем

$$\|\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1 - q_1} \max\left(\frac{R}{Q}, \frac{\delta_j}{\min\limits_k c_{kj}}\right) \qquad (j = 0, n). \qquad (4.2)$$

Так как $R = O(h^2)$, $\delta_0 = O(h^3)$, $\delta_n = O(h^3)$, $Q = O(1)$, $c_{k0} \geqslant O(h)$, $c_{kn} \geqslant O(h)$, то $\varepsilon_{ki} = O(h^2)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 3. *Если выполнены предположения* a), b), c), f), g), h) *и условие* (3.6), *то решение* $\{y_{ki}\}$ *системы* $\{(3.1), (3.2)\}$ *сходится к решению* $\{y_k(x_i)\}$ *системы* $\{(3.5), (1.2)\}$ *со скоростью, пропорциональной* h^2, *причём имеет место оценка погрешности* (4.2).

Примечание 2. Оценку (4.2) можно применить и для оценки погрешности в линейном случае, т. е. для оценки решений системы (1.7). В этом случае $N_{kj} = 0$ при каждом k, j и в оценке (4.2) число $q_1 = 0$.

2. Аналогичным образом, на основании леммы 3, можно доказать результат, дающий оценку погрешности разностного метода $\{(3.8), (1.5)\}$ при решении краевой задачи $\{(3.3), (1.2)\}$. Этот результат оформляем в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Если выполнены предположения*[4] a), c), f), g), h), *условие* (3.11) *и* $\alpha_{1k} \geqslant 0$, $\beta_{1k} \geqslant 0$, $\alpha_{0k} > 0$, $\beta_{0k} > 0$, *то решение* $\{y_{ki}\}$ *разностной задачи* $\{(3.8), (1.5)\}$ *сходится к решению* $\{y_k(x)\}$ *краевой задачи* $\{(3.3), (1.2)\}$ *со скоростью, пропорциональной* h, *причем имеет место оценка погрешности*

$$\|\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1 - q_2} \max\left(\frac{R}{Q}, \frac{h}{2} M_2 \max_k \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{0k}}, \frac{h}{2} M_2 \max \frac{\beta_{1k}}{\beta_{0k}}\right). \qquad (4.3)$$

Примечание 3. Взяв в оценке (4.3) число $q_2 = 0$, мы получаем оценку для решения $\{\varepsilon_{ki}\}$ линейной системы (1.8).

[4] Условия f), g) рассмотрим, конечно, в виде, приспособленном к задачам $\{(3.3), (1.2)\}$, $\{(3.8), (1.5)\}$ соответственно.

3. В частном случае простейших краевых условий $y_k(a) = \alpha_k$, $y_k(b) = \beta_k$ оценка (4.3) принимает вид $\|\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1-q_2}\frac{R}{Q}$.

В случае линейной системы (1.9) число $q_2 = 0$. Но в линейном случае, в дополнительном предположении d), как легко доказать, для оценки погрешности можно применить и оценки (2.5), (2.6), заменяя в последних v на R и v_k на R_k.

Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
2. Коллац Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва, 1953.
3. Тамме Э., О решении интегро-дифференциальных уравнений эллиптического типа методом конечных разностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 154—158.

Поступило
26 XII 1968

TEIST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDISÜSTEEMIDE RAJAÜLESANNETE LAHENDAMISEST DIFERENTSMEETODIGA

R. Jürgenson ja H. Jokk

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse lineaarsete ja mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandisüsteemide rajaülesannete {(1.1), (1.2)} ja {(3.3), (1.2)} lahendamist diferentsmeetodiga. Mittelineaarsel juhul konstrueeritakse saadava mittelineaarse võrrandisüsteemi lahendamiseks iteratsiooniprotsess ning tuletatakse selle koonduvuse tingimused (§ 3). Neljandas paragrahvis leitakse diferentsmeetodi veahinnangud.

ÜBER DIE LÖSUNG DER RANDWERTAUFGABE FÜR DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMEN ZWEITER ORDNUNG MITTELS EINES DIFFEREZENVERFAHREN

R. Jürgenson und H. Jokk

Zusammenfassung

In diesem Aufsatz wird die Lösung der Randwertaufgaben der linearen und nichtlinearen Differentialgleichungssysteme {(1.1), (1.2)} und {(3.3), (1.2)} behandelt. Im nichtlinearen Falle wird ein Iterationsprozess für die Lösung des betreffenden Systems aufgestellt und dessen Konvergenybedingungen hergeleitet (§ 3). Im § 4 sind die Fehlerabschätzungen des Differenzenverfahrens gefunden.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л. Кивистик

Кафедра вычислительной математики

В настоящей статье рассматривается следующая задача нелинейного программирования: среди всех n-мерных векторов $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, компоненты которых входят в заданные отрезки

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

найти вектор, максимизирующий произведение

$$F(\boldsymbol{x}) = f_{01}(x_1) f_{02}(x_2) \ldots f_{0n}(x_n) \tag{2}$$

при условиях

$$F_j(\boldsymbol{x}) \equiv f_{j1}(x_1) f_{j2}(x_2) \ldots f_{jn}(x_n) \leqslant c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{3}$$

Сформулированная задача является обобщением задачи, рассмотренной в [1].

Так как область, определенная ограничениями (1) и (3), вообще говоря, невыпукла, то число локальных максимумов может быть достаточно большим. В статье выведен алгоритм для решения поставленной задачи при $r = 1$ (§§ 2—4).

§ 1. Постановка задачи

Исходя из теоретического обоснования применяемого в органической химии метода корреляционных уравнений, В. А. Пальмом [3, 4] предложен вариант планирования эксперимента при эмпирическом поиске, основанный на так называемом принципе полилинейности. При обработке данных, полученных при таком планировании эксперимента, требуется решение задач математического программирования следующего типа: из заданных отрезков (1) найти значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, максимизирующие (минимизирующие) функцию

$$\varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{4}$$

при ограничениях

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \mu_j \quad (\geqslant \mu_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{5}$$

Функции $y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(j = 0, 1, \ldots, r)$ определяются экспериментально и, как выяснилось [3, 4], обычно достаточно точно выражаются следующей приближенной формулой:

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx \varphi_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} z_{ji} + \\ + \alpha_j \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} z_{ji} z_{jk} + \alpha_j^2 \sum_{1 \leqslant i < k < l \leqslant n} z_{ji} z_{jk} z_{jl} + \\ + \ldots + \alpha_j^{n-1} z_{j1} z_{j2} \ldots z_{jn}, \tag{6}$$

где

$$z_{ji} = \varphi_j(x_1^0, \ldots, x^0_{i-1}, x_i, x^0_{i+1}, \ldots, x_n^0) - \\ - \varphi_j(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0), \tag{7}$$

$x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ — некоторые фиксированные значения переменных из отрезков (1) и α_j — постоянная. То обстоятельство, что встречающиеся функции $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражаются формулой (6), в [4] называют *принципом полилинейности*.

Одной из возможных интерпретаций приведенной задачи может быть проблема разработки условий получения некоторого нового материала (например, пластмассы). Свойства $y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ этого материала, такие как твердость, теплоустойчивость и т. д., зависят от факторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (количественные соотношения исходных веществ, физические условия и т. д.), действующих при синтезе материала и изменяющихся в известных пределах (1). Ищутся такие значения факторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, чтобы свойство $y_0 = \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ было оптимальным, т. е. максимальным или минимальным, при условии, что остальные свойства $y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ не хуже данных.

В некоторых случаях оптимальными считают фиксированные значения функций φ_j и ищут такие значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из отрезков (1), чтобы значения $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ были по возможности близкими к данным оптимальным значениям. Такие задачи могут быть приближенно решены путем приведения их к нескольким задачам рассматриваемого типа с разными постоянными μ_j.

Покажем, что правая часть приближенного соотношения (6), которую обозначим через $\Phi_j(\alpha_j, z_j)$, только постоянным слагаемым отличается от произведения функций одной переменной. Для этого рассмотрим многочлен относительно z

$$P(z, z_j) = (-1)^n [z^n - \sigma_{j1} z^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_{jn}] = \\ = (z_{j1} - z)(z_{j2} - z) \ldots (z_{jn} - z), \tag{8}$$

где, по формулам Виета,

$$\sigma_{jk} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} z_{ji_1} z_{ji_2} \ldots z_{ji_k}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\Phi_j(\alpha_j, z_j) &= \varphi_j(x_1^0, \ldots, x_n^0) + \sigma_{j1} + \alpha_j\sigma_{j2} + \ldots + \alpha_j^{n-1}\sigma_{jn} = \\ &= (-1)^n\alpha_j^{n-1}[(-1/\alpha_j)^n - \sigma_{j1}(-1/\alpha_j)^{n-1} + \ldots + (-1)^n\sigma_{jn}] + \\ &+ \varphi_j(x_1^0, \ldots, x_n^0) - 1/\alpha_j = \beta_j + \alpha_j^{n-1}P(-1/\alpha_j, z_j) = \\ &= \beta_j + \alpha_j^{n-1}(z_{j1} + 1/\alpha_j)(z_{j2} + 1/\alpha_j)\ldots(z_{jn} + 1/\alpha_j) = \\ &= \beta_j + \alpha_j^{-1}(1 + \alpha_j z_{j1})(1 + \alpha_j z_{j2})\ldots(1 + \alpha_j z_{jn}),\end{aligned}$$

где

$$\beta_j = \varphi_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) - 1/\alpha_j.$$

Таким образом, функция $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая точно удовлетворяет принципу полилинейности, т. е. удовлетворяет соотношению (6), где знак приближенного равенства заменен знаком точного равенства, выражается в виде

$$\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \beta_j + \alpha_j^{-1}f_{j1}(x_1)f_{j2}(x_2)\ldots f_{jn}(x_n), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}f_{ji}(x_i) &= 1 + \alpha_j z_{ji} = \\ &= 1 + \alpha_j[\varphi_j(x_1^0, \ldots, x_i, \ldots, x_i^0) - \varphi_j(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)]\end{aligned} \tag{10}$$

есть функция только одной переменной x_i, причем $f_{ji}(x_i^0) = 1$. Если вместо функции $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рассматривать функцию $\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \beta_j$ (перемещение нулевой точки для φ_j) или функцию $\overline{\varphi}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_j[\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \beta_j]$ (кроме того, изменение масштаба), то ее аналитическое представление целесообразно искать в виде произведения

$$\overline{y}_j = \overline{\varphi}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{j1}(x_1)f_{j2}(x_2)\ldots f_{jn}(x_n). \tag{11}$$

Обратно, функция $\overline{\varphi}_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая представима как произведение функций одной переменной, точно удовлетворяет принципу полилинейности.

Показано (см. [3, 4]), что принцип полилинейности в определенных случаях выполняется практически точно. А это значит, что соответствующее соотношение между факторами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их следствием y_j может быть представлено в виде (11). Напоминаем, что и большинство законов классической физики выражается именно в таком виде.

Возможность представления многих соотношений между факторами x_i и их следствиями y_j в виде (11) делает в некоторых случаях актуальным вопрос об отыскании аналитических формул функций $f_{ji}(x_i)$. Экспериментальное определение каждой из функций $f_{ji}(x_i)$ с точностью до постоянного множителя, а также определение постоянной α_j, может быть проведено, например, так, как рекомендуется в [3] и [4]. Приближенные аналитические формулы функций $f_{ji}(x_i)$ могут быть определены по полученным таблицам методами, выработанными для подбора эмпирических формул и определения их параметров.

В силу (9) условия (5) могут быть заменены условиями (3) (соответственно условиями $F_j(\boldsymbol{x}) \geqslant c_j$), где $c_j = \alpha_j(\mu_j - \beta_j)$. При этом знак $\leqslant$ (или $\geqslant$) некоторого неравенства (5) заменяется, может быть, противоположным знаком $\geqslant$ (или $\leqslant$). Максимизируемая (минимизируемая) функция (4) заменяется максимизируемой или минимизируемой функцией (2).

Относительно функций $f_{ji}(x_i)$ ($j = 0, 1, \ldots, r$; $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$) предполагаем (во многих случаях это является обоснованным предположением), что они сохраняют знак при $a_i \leqslant \leqslant x_i \leqslant b_i$. Так как $f_{ji}(x_i^0) = 1$, где $x_i^0 \in [a_i, b_i]$, то все множители в (2) и (3), а значит, и сами произведения (2) и (3) положительны. Учитывая сохранение знака этих произведений, можем условие $F_j(\boldsymbol{x}) \geqslant c_j$ всегда заменить условием $\overline{F}_j(\boldsymbol{x}) \leqslant \overline{c}_j$, где $\overline{F}_j(\boldsymbol{x}) = \overline{f}_{j1}(x_1)\overline{f}_{j2}(x_2) \ldots \overline{f}_{jn}(x_n)$, $\overline{f}_{ji}(x_i) = 1/f_{ji}(x_i)$ и $\overline{c}_j = = 1/c_j$, а задачу минимизации произведения (2) заменить задачей максимизации произведения $\overline{F}(\boldsymbol{x}) = \overline{f}_{01}(x_1)\overline{f}_{02}(x_2) \ldots \overline{f}_{0n}(x_n)$, где $\overline{f}_{0i}(x_i) = 1/f_{0i}(x_i)$.

В силу сказанного достаточно рассмотреть задачу, поставленную в начале статьи.

В дальнейшем предполагаем еще, что все функции $f_{ji}(x_i)$ ($j = 0, 1, \ldots, r$; $i = 1, 2, \ldots, n$) строго монотонны и, кроме того, функции $f_{0i}(x_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) возрастающие[1]. Если последнее условие первоначально для некоторой функции $f_{0k}(x_k)$ не выполнено, то пусть будет проделана линейная замена переменной $x_k = d_k - x_k'$, где $d_k \geqslant b_k$. После этого получается функция $\tilde{f}_{0k}(x_k') = f_{0k}(d_k - x_k')$, уже возрастающая на отрезке $[a_k', b_k']$, где $a_k' = d_k - b_k \geqslant 0$, $b_k' = d_k - a_k > a_k'$.

Отметим две эквивалентные формулировки поставленной задачи. Чтобы получить первую из них, обозначим

$$u_i = f_{0i}(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

В силу строгой монотонности[2] существуют обратные функции

$$x_i = g_i(u_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

также строго монотонные. Функции $f_{ji}(x_i)$ в этом случае выражаются как строго монотонные функции от u_i:

$$f_{ji}(x_i) = f_{ji}(g_i(u_i)) = \psi_{ji}(u_i), \tag{14}$$

где через $\psi_{ji}(u_i)$ обозначена сложная функция $f_{ji}(g_i(u_i))$ от u_i. Пусть

$$\gamma_i = \min_{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i} f_{0i}(x_i), \qquad \delta_i = \max_{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i} f_{0i}(x_i); \tag{15}$$

---

[1] Есть основание предполагать, что обычно на практике условие строгой монотонности выполнено. Если это не так, то отрезки (1) можно разбить на участки, где функции $f_{ji}(x_i)$ уже строго монотонны или постоянны, а задачу заменить несколькими задачами, где условие строгой монотонности уже выполнено (в случае постоянства некоторой функции число переменных уменьшается). Если задача разбивается на несколько задач, то пусть рассматриваемая задача будет одной из них.

[2] Возрастания функций (12) в данном случае не требуется.

тогда

$$\gamma_i \leqslant u_i \leqslant \delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

где, в силу неотрицательности $f_{0i}(x_i)$, $\gamma_i \geqslant 0$. Таким образом, в случае строгой монотонности функций (12) задача может быть заменена следующей: найти вектор $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, максимизирующий произведение

$$u_1 u_2 \ldots u_n \tag{17}$$

и удовлетворяющий условиям (16) и неравенствам

$$\psi_{j1}(u_1)\psi_{j2}(u_2)\ldots\psi_{jn}(u_n) \leqslant c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{18}$$

После решения задачи (16)—(18) компоненты решения исходной задачи находятся по формулам (13).

Чтобы получить вторую эквивалентную формулировку, прологарифмируем произведения $F(\boldsymbol{x})$ и $F_j(\boldsymbol{x})$ по некоторому основанию a $(a > 1)$ и обозначим

$$\chi_{ji}(x_i) = \log f_{ji}(x_i) \qquad (j = 0, 1, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

После этого исходная задача заменяется следующей: найти вектор $\boldsymbol{x}$, максимизирующий сумму

$$X_0(\boldsymbol{x}) = \chi_{01}(x_1) + \chi_{02}(x_2) + \ldots + \chi_{0n}(x_n) \tag{20}$$

и удовлетворяющий условиям (1) и неравенствам

$$X_j(\boldsymbol{x}) = \chi_{j1}(x_1) + \chi_{j2}(x_2) + \ldots + \chi_{jn}(x_n) \leqslant \bar{c}_j \qquad (j = 1, \ldots, r), \tag{21}$$

где $\bar{c}_j = \log c_j$.

Аналогичный вид задачи получается после логарифмирования целевой функции (17) и условий (16) и (18). Последние формулировки, хотя и содержат более простую целевую функцию (17) или суммы (20) и (21) вместо произведений, имеют тот недостаток, что требуют предварительного преобразования исходной задачи. Отметим, что в силу монотонности функций $f_{0i}(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ целевая функция во всех формулировках достигает своего наибольшего значения на граничной поверхности области, определенной ограничениями. Эта область, вообще говоря, невыпукла.

§ 2. Предпочтительный порядок изменения переменных при $r = 1$

В настоящей статье выводится алгоритм решения поставленной задачи в частном случае $r = 1$. Получить удовлетворительный алгоритм в общем случае до сих пор не удавалось. Описываемый ниже алгоритм позволяет находить все точки локальных максимумов и путем сравнения значений $F(\boldsymbol{x})$ в этих точках выделить из них оптимальное решение. При этом нахождение всех максимумов обычно не является необходимым. Для небольших значений n алгоритм вероятно эффективен при ручном счете; его программирование, за счет сложной логической структуры, является трудоемким.

Предпочитая в дальнейшем ту из формулировок нашей задачи, которая не требует предварительного преобразования заданных функций, рассмотрим такую задачу: найти вектор $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, максимизирующий произведение

$$F(\boldsymbol{x}) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \tag{22}$$

при условиях[3]

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

$$F_1(\boldsymbol{x}) = f_{11}(x_1) f_{12}(x_2) \ldots f_{1n}(x_n) \leqslant c. \tag{24}$$

От функций $f_i(x_i)$ и $f_{1i}(x_i)$ требуем, как и раньше, положительности и строгой монотонности, а от функции $f_i(x_i)$, кроме того, возрастания на отрезке $[a_i, b_i]$. Дополнительно предполагаем, что все функции $f_i(x_i)$ и $f_{1i}(x_i)$ дифференцируемы. Тогда производные $f'_i(x_i)$, $f'_{1i}(x_i)$ сохраняют знак, причем $f'_i(x_i) > 0$ для всех $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В дальнейшем важную роль играет понятие *предпочтения переменных.* Чтобы ввести это понятие, обозначим

$$\Delta_i F(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_i) - F(\boldsymbol{x}), \quad \Delta_i F_1(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_i) - F_1(\boldsymbol{x}),$$

где $\Delta \boldsymbol{x}_i = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1}, \Delta x_i, 0, \ldots, 0)$. Если для некоторых приращений Δx_i и Δx_j, удовлетворяющих условию

$$\Delta_i F_1(\boldsymbol{x}) = \Delta_j F_1(\boldsymbol{x}) \neq 0, \tag{25}$$

выполняется неравенство

$$\Delta_i F(\boldsymbol{x}) > \Delta_j F(\boldsymbol{x}), \tag{26}$$

то при отыскании максимума естественно предпочесть приращение Δx_i приращению Δx_j. Соотношения (25) и (26) особенно интересуют нас при бесконечно малых приращениях. В соответствии с этим пользуемся нижеследующим определением.

Будем говорить, что в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменная x_i *предпочитается* переменной x_j в направлении возрастания (убывания) $F_1(\boldsymbol{x})$, и писать $x_i \prec x_j$, если (соответственно)

$$\lim_{\substack{\Delta_i F_1(\boldsymbol{x}) \to +0 \\ (-0)}} \frac{\Delta_i F(\boldsymbol{x})}{|\Delta_i F_1(\boldsymbol{x})|} > \lim_{\substack{\Delta_j F_1(\boldsymbol{x}) \to +0 \\ (-0)}} \frac{\Delta_j F(\boldsymbol{x})}{|\Delta_j F_1(\boldsymbol{x})|}. \tag{27}$$

[3] Для краткости обозначено $f_i(x_i) = f_{0i}(x_i)$ и $c = c_1$ $(c \geqslant 0)$.

В силу дифференцируемости $F(\boldsymbol{x})$ и $F_1(\boldsymbol{x})$ пределы в (27) существуют. При этом

$$\lim_{\substack{\Delta_i F_1(\boldsymbol{x})\to+0\\(-0)}} \frac{\Delta_i F(\boldsymbol{x})}{|\Delta_i F_1(\boldsymbol{x})|} = \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \bigg/ \frac{\partial F_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \operatorname{sgn} \Delta_i F_1(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \frac{f'_i(x_i) f_{1i}(x_i)}{f_i(x_i) f'_{1i}(x_i)} \frac{F(\boldsymbol{x})}{F_1(\boldsymbol{x})} \operatorname{sgn} \Delta_i F_1(\boldsymbol{x}). \tag{28}$$

Соотношение $x_i \prec x_j$ будем называть *соотношением предпочтения переменных* в точке $\boldsymbol{x}$. Если в точке $\boldsymbol{x}$ в данном направлении не выполняется ни соотношение $x_i \prec x_j$, ни соотношение $x_j \prec x_i$, то будем говорить, что переменные x_i, x_j *эквивалентны* в точке $\boldsymbol{x}$, и писать $x_i \sim x_j$. Если известно, что имеет место одно из двух соотношений $x_i \prec x_j$ или $x_i \sim x_j$, то будем писать $x_i \preceq x_j$.

Из определения вытекают следующие свойства соотношения предпочтения переменных.

1° Соотношения $x_i \prec x_j$, $x_i \sim x_j$ и $x_i \preceq x_j$ транзитивны.

2° Если в точке $\boldsymbol{x}$ имеет место соотношение $x_i \prec x_j$ в направлении возрастания (убывания) $F_1(\boldsymbol{x})$, то для достаточно малых по абсолютной величине приращений Δx_i и Δx_j, удовлетворяющих равенству (25) при положительном (отрицательном) $\Delta_i F_1(\boldsymbol{x})$, имеет место неравенство (26).

3° Если в некоторой точке $\boldsymbol{x}$ в данном направлении $x_i \prec x_j$, то при достаточно малых по абсолютной величине приращениях Δx_i и Δx_j в точке $\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_i + \Delta \boldsymbol{x}_j$ имеет место соотношение $x_i + \Delta x_i \prec x_j + \Delta x_j$ в том же направлении.

Последнее свойство верно благодаря непрерывности функций $F_1(\boldsymbol{x})$ и $F(\boldsymbol{x})$.

4° Если в точке $\boldsymbol{x}$ имеет место соотношение $x_i \prec x_j$ в направлении, определенном знаком приращения $\Delta_i F_1(\boldsymbol{x})$, то при достаточно малых по абсолютной величине приращениях Δx_i и Δx_j, удовлетворяющих условиям $x_i + \Delta x_i \preceq x_j + \Delta x_j$ и

$$F_1(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_i + \Delta \boldsymbol{x}_j) = F_1(\boldsymbol{x}), \tag{29}$$

имеет место неравенство

$$F(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_i + \Delta \boldsymbol{x}_j) > F(\boldsymbol{x}). \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим точку $\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_j$ и придадим ей, во-первых, приращение $-\Delta \boldsymbol{x}_j$ и, во-вторых, приращение $\Delta \boldsymbol{x}_i$. В обоих случаях $F_1(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_j)$ получает одинаковое приращение $\Delta_i F_1(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_j)$. Так как $\operatorname{sgn} \Delta_i F_1(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_j) = \operatorname{sgn} \Delta_i F_1(\boldsymbol{x})$, то $x_i \prec x_j + \Delta x_j$ в направлении, определенном знаком приращения $\Delta_i F_1(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}_j)$, и по свойству 2° имеет место (30).

Учитывая транзитивность только что определенных соотношений, в каждой точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можем выписать цепь следующего вида

$$x_{i_1} \sim x_{i_2} \sim \ldots \sim x_{i_p} \prec x_{j_1} \sim \ldots \sim x_{j_q} \prec \ldots \prec x_{l_1} \sim \ldots \sim x_{l_s},$$

где $p + q + \ldots + s = n$ и соотношения предпочтения понимаются в определенном направлении. Эту цепь будем называть порядком предпочтения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в точке $\boldsymbol{x}$.

Введем в рассмотрение функции

$$G_i(x) = \frac{f_{1i}(x) f'_i(x)}{f_i(x) f'_{1i}(x)} = \frac{(\log f_i(x))'}{(\log f_{1i}(x))'}, \tag{31}$$

которые, в силу сделанных выше предположений, сохраняют знак на соответствующих отрезках определения $[a_i, b_i]$. При этом, знак $G_i(x_i)$ совпадает со знаком $f'_{1i}(x_i)$.

Примечание. Из соотношений (19)—(21) следует, что $G_i(x_i)$ является отношением i-го компонента градиента функции $X_0(\boldsymbol{x})$ к i-му компоненту градиента функции $X_1(\boldsymbol{x})$.

Учитывая (28), можем соотношение (27) заменить следующим, эквивалентным с ним неравенством

$$G_i(x_i) \operatorname{sgn} \Delta_i F_1(\boldsymbol{x}) > G_j(x_j) \operatorname{sgn} \Delta_j F_1(\boldsymbol{x}), \tag{32}$$

где $\operatorname{sgn} \Delta_i F_1(\boldsymbol{x}) = \operatorname{sgn} \Delta_j F_1(\boldsymbol{x})$. Таким образом, мы получаем следующие критерии предпочтения переменных: *в направлении возрастания* $F_1(\boldsymbol{x})$ $x_i \prec x_j$ *тогда и только тогда, когда* $G_i(x_i) > G_j(x_j)$; *в направлении убывания* $F_1(\boldsymbol{x})$ *будет* $x_i \prec x_j$ *тогда и только тогда, когда* $G_i(x_i) < G_j(x_j)$. Легко видеть, что $x_i \sim x_j$ *тогда и только тогда, когда* $G_i(x_i) = G_j(x_j)$.

Из сказанного следует, что если в точке $\boldsymbol{x}$ в данном направлении $x_i \prec x_j$, то в противоположном направлении $x_j \prec x_i$.

§ 3. Условия максимума

Нахождение точки глобального максимума функции (22) только при условиях (23) — задача тривиальная. Если в такой точке, т. е. в точке $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, условие (24) выполнено, то $\boldsymbol{b}$ и является оптимальным решением задачи (22)—(24). Поэтому рассмотрим случай, где условие (24) в точке $\boldsymbol{b}$ не выполнено. Предположим, что задача разрешима. Тогда искомый глобальный максимум и все локальные максимумы достигаются на граничной поверхности области (23), (24), и точки локальных максимумов $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ удовлетворяют условию $F_1(\boldsymbol{x}^*) = c$. Это значит, что необходимые условия локального максимума могут быть найдены с помощью функции Лагранжа

$$L(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}) + \lambda F_1(\boldsymbol{x}). \tag{33}$$

Для их получения найдем частные производные

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial F(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} \left[1 + \frac{\lambda}{G_i(x_i)} \frac{F_1(\boldsymbol{x})}{F(\boldsymbol{x})} \right]. \tag{34}$$

Чтобы облегчить выписывание получаемых отсюда условий, для каждой фиксированной точки локального максимума (и для других критических точек $\boldsymbol{x}^*$, точное определение которых следует ниже) введем в рассмотрение следующие подмножества индексов:

$$\begin{gathered} I = \{i: x_i^* \in (a_i, b_i)\}, \quad I_a = \{i: x_i^* = a_i\}, \\ I_b = \{i: x_i^* = b_i\}, \quad I_b^+ = \{i: x_i^* = b_i,\ G_i(x_i) \geqslant 0\}, \\ I_b^- = \{i: x_i^* = b_i, G_i(x_i) \leqslant 0\}. \end{gathered} \tag{35}$$

Если $i \in I$, то $\dfrac{\partial L(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} = 0$, откуда

$$\lambda = -G_i(x_i^*) F(\boldsymbol{x}^*) / F_1(\boldsymbol{x}^*) \tag{36}$$

и для любых $i, j \in I$

$$G_i(x_i^*) = G_j(x_j^*).$$

Докажем, что если для точки локального максимума $i \in I$, то $G_i(x_i) \geqslant 0$. Действительно, если бы было $G_i(x_i) \leqslant 0$, то $f'_{1i}(x_i) < 0$. Тогда функция $f_{1i}(x_i)$ убывает, а $f_i(x_i)$ возрастает, и приращение $\Delta x_i > 0$ уменьшает значение $F_1(\boldsymbol{x})$ и увеличивает $F(\boldsymbol{x})$. Итак, если $F_1(\boldsymbol{x}^*) = c$, то в допустимой точке $\boldsymbol{x}^* + \Delta \boldsymbol{x}_i$ имеем $F_1(\boldsymbol{x}^* + \Delta \boldsymbol{x}_i) < c$ и $F(\boldsymbol{x}^* + \Delta \boldsymbol{x}_i) > F(\boldsymbol{x}^*)$, так что $\boldsymbol{x}^*$ не является точкой максимума.

Если $k \in I_a$, $l \in I_b$, то в точке локального максимума

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_k} \leqslant 0, \qquad \frac{\partial L(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_l} \geqslant 0,$$

откуда, с учетом (34), (35) и условия $G_i(x_i^*) \geqslant 0$, для любых $m \in I_b^-$, $k \in I_a$, $i, j \in I$, $p \in I_b^+$ получим

$$G_m(x_m^*) \leqslant 0 \leqslant G_k(x_k^*) \leqslant G_i(x_i^*) = G_j(x_j^*) \leqslant G_p(x_p^*). \tag{37}$$

Примечание. Те же самые условия получим, применяя необходимые условия теоремы Куна—Таккера (см. [2]) к задаче {(20), (1), (21)} при $r = 1$, эквивалентной рассматриваемой здесь задаче.

В силу отмеченных выше критериев предпочтения переменных, в каждой точке локального максимума имеем ($m \in I_b^-$, $k \in I_a$, $i, j \in I$, $p \in I_b^+$)

$$x_m^* \prec x_k^* \precsim x_i^* \sim x_j^* \precsim x_p^* \tag{38}$$

в направлении убывания $F_1(\boldsymbol{x})$ и

$$x_p^* \preceq x_i^* \sim x_j^* \preceq x_k^* \prec x_m^* \qquad (39)$$

в направлении возрастания $F_1(\boldsymbol{x})$. При этом координаты x_m^* $(m \in I_b^-)$ и x_k^* $(k \in I_a)$ не могут получить допустимого ограничениями (23) приращения, уменьшающего значение $F_1(\boldsymbol{x})$, а x_p^* — приращения, увеличивающего значение $F_1(\boldsymbol{x})$.

Точки $\boldsymbol{x}^*$, где для любых $i, j \in I$, $k \in I_a$, $m \in I_b^-$, $p \in I_b^+$ выполнено условие (37) или равносильные ему условия (38), (39), будем называть *точками типа* (t). Точки типа (t), где $F_1(\boldsymbol{x}^*) = c$, будем называть *критическими*. Таким образом, любая точка типа (t) является критической для некоторого значения c. Заметим, что в силу (37) в любой точке типа (t) $x_m = b_m$, если функция $G_m(x)$ неположительна.

Выделить из множества всех критических точек точки максимума позволяют следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ *есть критическая точка, в которой*

$$G_k(x_k^*) < G_{i_1}(x_{i_1}^*) = \ldots = G_{i_l}(x_{i_l}^*) < G_p(x_p^*) \qquad (40)$$

для всех $k \in I_a$ *и* $p \in I_b^+$, *не входящих во множество* $\{i_1, \ldots, i_l\} \subset I_a \cup I \cup I_b^+$. *Если функции*

$$G_{i_1}(x_{i_1}),\ G_{i_2}(x_{i_2}),\ \ldots,\ G_{i_l}(x_{i_l}) \qquad (41)$$

в окрестности соответствующей координаты критической точки не возрастают, то в критической точке существует локальный максимум.

Доказательство. В силу условия (40) в критической точке в направлении убывания $F_1(\boldsymbol{x})$ имеет место порядок предпочтения переменных

$$x_m^* \prec x_k^* \prec x_{i_1}^* \sim \ldots \sim x_{i_l}^* \prec x_p^*, \qquad (42)$$

где $m \in I_b^-$, $k \in I_a$, $p \in I_b^+$, $i_1, \ldots, i_l \in I_a \cup I \cup I_b^+$. Рассмотрим достаточно близкую к $\boldsymbol{x}^*$ произвольную, допустимую условиями (23) точку $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$, в которой $F_1(\boldsymbol{x}) = F_1(\boldsymbol{x}^*) = c$ и координаты которой удовлетворяют в направлении убывания $F_1(\boldsymbol{x})$ порядку предпочтения переменных

$$x_m \prec x_k \prec x_{j_1} \preceq \ldots \preceq x_{j_l} \prec x_p, \qquad (43)$$

где $j_1, \ldots, j_l \in \{i_1, \ldots, i_l\}$. Тогда, одновременно изменяя только две координаты и опираясь на свойство соотношения предпочтения переменных 4°, можем постепенно аннулировать все приращения Δx_i так, чтобы на каждом шаге порядок предпочтения (43) и значение $F_1(\boldsymbol{x})$ сохранялись, а значение $F(\boldsymbol{x})$ возрастало.

В первую очередь аннулируем приращения Δx_m $(m \in I_b^-)$, Δx_k $(k \in I_a)$ и Δx_p $(p \in I_b^+)$; получим точку $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$, удовлетворяющую как условиям (43), так и условиям $F_1(\tilde{\boldsymbol{x}}) = F_1(\boldsymbol{x}) = c$, $F(\tilde{\boldsymbol{x}}) > F(\boldsymbol{x})$, причем $\tilde{x}_i = x_i^*$ для $i \in I_a \cup I_b$. Если среди координат $\tilde{x}_{j_1}, \ldots \tilde{x}_{j_l}$ имеются неэквивалентные, то возможно их приблизить друг к другу так, чтобы значение $F_1(\boldsymbol{x}) = c$ сохранялось, но $F(\boldsymbol{x})$ не убывало. Приближение начинаем с x_{j_1} и x_{j_l}. Если при этом получим $x_{j_1} \sim x_{j_2}$ или $x_{j_l} \sim x_{j_{l-1}}$, то смещаем их так, что эквивалентность сохраняется и т. д. Наконец дойдем до точки $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, где $\bar{x}_i = x_i^*$ для $i \in I_a \cup I_b$, $\bar{x}_{j_1} \sim \ldots \sim \bar{x}_{j_l}$, а координаты точки $\bar{\boldsymbol{x}}$ удовлетворяют условию (42). Если среди функций (41) не более одной постоянна в окрестности точки $\boldsymbol{x}^*$, то, в силу неубывания этих функций, $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^*$. Если же среди функций (41) имеется больше одной постоянной в окрестности $\boldsymbol{x}^*$, то может быть $\bar{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}^*$. Пусть $\bar{x}_i \sim \bar{x}_j$ при всех $i, j \in \{i_1, \ldots, i_l\}$, а функции $G_i(x_i)$, $G_j(x_j)$ в окрестности точки $\boldsymbol{x}^*$ (и точки $\bar{\boldsymbol{x}}$) постоянны. Тогда изменение координат x_i, x_j, сохраняющее значение $F_1(\boldsymbol{x})$ и эквивалентность x_i и x_j, сохраняет также значение $F(\boldsymbol{x})$. Это значит, что $F(\bar{\boldsymbol{x}}) = F(\boldsymbol{x}^*)$ и локальный максимум в точке $\boldsymbol{x}^*$ не является строгим.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ есть критическая точка. Если существуют индексы $i \in I_a \cup I$ и $j \in I \cup I_b^+$ такие, что $G_i(x_i^*) = G_j(x_j^*)$ и обе функции $G_i(x_i)$, $G_j(x_j)$ возрастают в окрестностях соответствующих координат x_i^*, x_j^*, то в критической точке максимума не существует.*

Доказательство. Рассмотрим сколь угодно близкую к критической точке точку $\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}_j$ $(j \in I \cup I_b^+)$, где $\Delta x_j < 0$ и, таким образом, $F_1(\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}_j) < c$. Так как $G_i(x_i^*) > G_j(x_j^* + \Delta x_j)$, то в направлении возрастания $F_1(\boldsymbol{x})$ $x_i^* \prec x_j^* + \Delta x_j$. Придадим в точке $\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}_j$, во-первых, приращение $-\Delta x_j$ координате x_j^* и, во-вторых, такое приращение $\Delta x_i > 0$ координате x_i^*, что $F_1(\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}_j + \Delta\boldsymbol{x}_i) = F_1(\boldsymbol{x}^*) = c$. Так как в точке $\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}_j$ $x_i^* \prec x_j^* + \Delta x_j$ в направлении возрастания $F_1(\boldsymbol{x})$, то в силу свойства соотношения предпочтения переменных 4°, для достаточно малых по абсолютной величине приращений Δx_i, Δx_j имеет место неравенство $F(\boldsymbol{x}^* + \Delta\boldsymbol{x}_j + \Delta\boldsymbol{x}_i) > F(\boldsymbol{x}^*)$.

Теорема 3. *Пусть для координат критической точки $\boldsymbol{x}^*$ множество I содержит только один элемент i. Если в окрестности координаты x_i^* функция $G_i(x_i)$ — неубывающая, и для всех $k \in I_a$, $p \in I_b^+$*

$$G_k(x_k^*) < G_i(x_i^*) < G_p(x_p^*), \tag{44}$$

то в критической точке существует локальный максимум.

Доказательство аналогично доказательству первой части теоремы 1.

Отметим, что теоремы 1—3 не охватывают случая критических точек, в окрестности которых одна из функций $G_i(x_i)$ $(i \in I)$ неубывающая, а остальные — убывающие. В этих точках локальный максимум может как существовать, так и не существовать.

Будем называть *траекторией типа* $(t_{\max})$ всякую непрерывную кривую n-мерного пространства, все точки которой находятся в прямоугольном параллелепипеде (23) и являются точками типа (t), за исключением тех точек типа (t), где по теореме 2 максимума не существует ни для одного c. При этом рассмотрим траектории (обычно выбираются траектории по возможности большей длины), имеющие ровно два конца, один из которых будем называть начальной точкой траектории. Если рассматриваемые кривые имеют точки разветвления, то каждую такую точку считаем начальной точкой новой траектории. Нас интересуют траектории, проходящие через гиперповерхности $F_1(\boldsymbol{x}) = c$. Так как все отыскиваемые точки локальных максимумов находятся на траекториях типа $(t_{\max})$, то для их нахождения достаточно найти начальные точки всех траекторий и передвигаться по траекториям до точек, где $F_1(\boldsymbol{x}) = c$ (разумеется, на некоторых траекториях точки локальных максимумов могут отсутствовать, т. е. на них может не быть точек, где $F_1(\boldsymbol{x}) = c$). Вопрос о нахождении начальных точек рассматривается в следующем параграфе. Здесь отметим только, что в качестве начальной точки будем выбирать, как правило, конец траектории, находящийся вне допустимой области (23), (24). При этом с приближением к точке локального максимума значение $F_1(\boldsymbol{x})$ уменьшается [4].

Приближаясь к критической точке $\boldsymbol{x}^*$, мы в действительности не будем передвигаться непрерывно. Будем находить только некоторые точки траектории, передвигаясь наибольшими возможными шагами.

§ 4. Алгоритм решения задачи (22)—(24)

Рассмотрим решение задачи (22)—(24) в случае $F_1(\boldsymbol{b}) > c$. Если $F_1(\boldsymbol{b}) \leqslant c$, то $\boldsymbol{b}$ и есть оптимальное решение. Прежде чем приступить к решению задачи, проверим ее разрешимость. Для этого достаточно найти минимальное значение функции $F_1(\boldsymbol{x})$ в области (23). Очевидно, это значение достигается в точке $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, где $\bar{x}_i = a_i$ для $G_i(x_i) \geqslant 0$ и $\bar{x}_j = b_j$ для

[4] Возможен и алгоритм, при котором начальная точка и интересующая нас часть траектории находятся в области допустимых решений. В этом случае с приближением к локальному максимуму значение $F_1(\boldsymbol{x})$ увеличивается.

$G_j(x_j) \leqslant 0$. Если $F_1(\bar{\boldsymbol{x}}) > c$, то задача неразрешима. В дальнейшем предполагаем, что задача разрешима, т. е. что $F_1(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant c$.

Пусть нумерация индексов выбрана так, чтобы первые функции

$$G_1(x_1),\ G_2(x_2),\ \ldots,\ G_\nu(x_\nu) \qquad (\nu \leqslant n) \tag{45}$$

были неотрицательными, а остальные функции $G_{\nu+1}(x_{\nu+1}), \ldots$ $\ldots, G_n(x_n)$ — неположительными. Это значит, что функции $f_{11}(x_1), f_{12}(x_2), \ldots, f_{1\nu}(x_\nu)$ — возрастающие, а $f_{1,\nu+1}(x_{\nu+1}), \ldots$ $\ldots, f_{1n}(x_n)$ — убывающие. Пусть подмножества индексов I, I_a, I_b, $I_b^+ \subset \{1, 2, \ldots, \nu\}$ и $I_b^- = \{\nu+1, \ldots, n\}$ определены условиями (35) не только для критических точек $\boldsymbol{x}^*$, но и для любой текущей точки $\boldsymbol{x}$ траекторий типа $(t_{\max})$.

В соответствии с теоремами 1—3, внутренние точки траектории типа $(t_{\max})$ могут быть следующих трех типов.

1. В точке траектории $\boldsymbol{x}$ выполнено условие (40) и все функции (41) невозрастающие в окрестности точки $\boldsymbol{x}$ (теорема 1).

2. В точке траектории $\boldsymbol{x}$ выполнено условие (44) и функция $G_i(x_i)$ неубывающая в окрестности точки $\boldsymbol{x}$ (теорема 3).

3. В точке траектории $\boldsymbol{x}$ выполнено условие (40) и одна из функций (41) неубывающая, остальные невозрастающие в окрестности точки $\boldsymbol{x}$ (теорема 2).

Во всех случаях в точке $\boldsymbol{x}$ в направлении убывания $F_1(\boldsymbol{x})$ имеет место порядок предпочтения переменных

$$x_m \prec x_k \prec x_{i_1} \sim \ldots \sim x_{i_l} \prec x_p, \tag{46}$$

где $m \in I_b^-$, $k \in I_a$, $i_1, \ldots, i_l \in I_a \cup I \cup I_b^+$, $p \in I_b^+$ и во втором случае $l = 1$, $i_1 = i \in I$. Легко видеть, что в первом случае приближение к критической точке с убыванием $F_1(\boldsymbol{x})$ происходит по траектории типа $(t_{\max})$, если те переменные x_{i_k} из множества переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$, при которых $i_k \in I \cup I_b^+$, получают отрицательные приращения, сохраняющие их эквивалентность. Это значит, что допустимые условиями (23) приращения, уменьшающие значение $F_1(\boldsymbol{x})$, получают первые из тех эквивалентных переменных (46), которые такие приращения могут принимать. То же самое можно сказать о втором случае, только относительно одной переменной x_i, где $i \in I$. В третьем случае опять эквивалентные переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ получают допустимые условиями (23) приращения, сохраняющие их эквивалентность. Однако в этом случае направление передвижения по траектории выбираем так, чтобы переменная x_{i_k} $(k \in \{1, \ldots, l\})$, соответствующая неубывающей функции $G_{i_k}(x_{i_k})$, получала отрицательное приращение. Тогда остальные переменные получают положительные приращения. Отметим, что значение $F_1(\boldsymbol{x})$ может при этом как уменьшаться, так и увеличиваться.

В соответствии с упомянутыми тремя возможностями, ниже рассматриваются отдельно три частных случая отыскания всех нужных точек локальных максимумов и критических точек. Общий случай может быть исследован на основе этих частных случаев.

1. Все неотрицательные функции (45) убывающие (рис. 1). Тогда, в силу убывания всех функций (45), существует одна единственная точка локального максимума, ко-

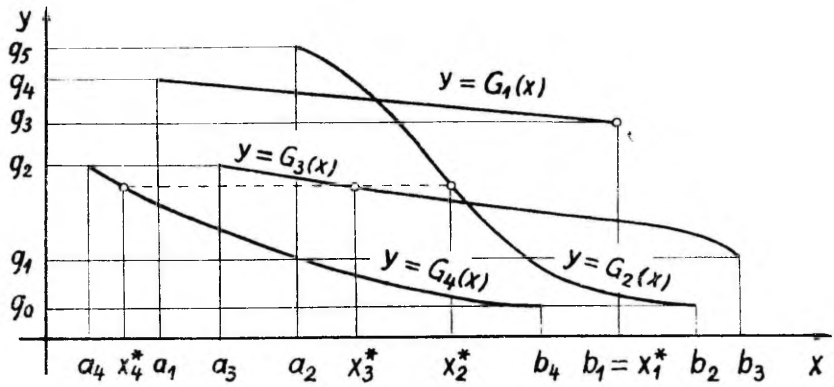


Рис. 1.

торая, следовательно, и является оптимальным решением (на рис. 1 отмечены координаты оптимального решения $\boldsymbol{x}^*$ при некотором значении c; так как для любой неположительной функции $G_m(x)$ имеем $x_m^* = b_m$, то графики неположительных функций не вырисованы).

Из множества неотрицательных чисел

$$G_1(b_1),\ \ldots,\ G_\nu(b_\nu),\ G_1(a_1),\ \ldots,\ G_\nu(a_\nu) \tag{47}$$

выделим все неравные между собой и обозначим их в порядке возрастания через

$$g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_\omega\quad (\omega \leqslant 2\nu - 1). \tag{48}$$

В качестве начальной точки берем точку $\boldsymbol{b}$. В этой точке имеет место по меньшей мере одно из равенств $G_i(b_i) = g_0$ ($i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$).

Пусть уже проделано s шагов алгоритма и получена точка $\boldsymbol{x}^s = (x_1^s, x_2^s, \ldots, x_n^s)$ типа (t), для которой $F_1(\boldsymbol{x}^s) > c$ и некоторые координаты которой удовлетворяют условию $G_l(x_l^s) = g_s$ ($l \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$). Среди координат x_l^s выделим те, которые удовлетворяют условиям

$$G_i(x_i^s) = \ldots = G_j(x_j^s) = g_s;\quad x_l^s \neq a_l,\ l = i,\ \ldots,\ j. \tag{49}$$

В силу теоремы 1 алгоритм отыскания оптимального решения в данном случае может быть описан следующими правилами.

1° Определяем точку $\boldsymbol{x}^{s+1}$ из условий

$$G_i(x_i^{s+1}) = \ldots = G_j(x_j^{s+1}) = g_{s+1}; \qquad (50)$$
$$x_l^{s+1} = x_l^s, \quad \text{если} \quad l \neq i, \ \ldots, \ l \neq j,$$

где индексы $i, \ldots, j$ определены условиями (49).

2° Проверяем неравенство $F_1(\boldsymbol{x}^{s+1}) \leqslant c$. Если оно не выполнено, то, увеличивая индекс s на единицу, возвращаемся к первому пункту. При этом предварительно исключаем из числа равенств (50) те, в которых $x_k^{s+1} = a_k$, $k \in \{i, \ldots, j\}$, и включаем новые равенства $G_p(b_p) = g_{s+1}$, $p \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$, если такие имеются.

Если $F_1(\boldsymbol{x}^{s+1}) = c$, то $\boldsymbol{x}^{s+1}$ — оптимальное решение. Если $F_1(\boldsymbol{x}^{s+1}) < c$, то переходим к третьему пункту.

3° Определяем оптимальное решение $\boldsymbol{x}^*$ из условий

$$G_i(x_i^*) = \ldots = G_j(x_j^*), \quad F_1(\boldsymbol{x}^*) = c; \qquad (51)$$
$$x_l^* = x_l^s, \quad \text{если} \quad l \neq i, \ \ldots, \ l \neq j.$$

В последнем случае определение оптимального решения требует решения системы уравнений (51). Приближенно это легко провести, например, следующим путем.

Разделим пополам некоторый из отрезков $[x_i^{s+1}, x_i^s]$, ..., $[x_j^{s+1}, x_j^s]$. Для определенности пусть это будет отрезок $[x_\alpha^{s+1}, x_\alpha^s]$, $\alpha \in \{i, \ldots, j\}$. Обозначим точку деления через x_α^{s+2}. Остальные координаты $\boldsymbol{x}^{s+2}$ определим из условий

$$G_i(x_i^{s+2}) = \ldots = G_j(x_j^{s+2}) = G_\alpha(x_\alpha^{s+2});$$
$$x_l^{s+2} = x_l^s, \quad \text{если} \quad l \neq i, \ \ldots, \ l \neq j.$$

Проверим выполнение условия $F_1(\boldsymbol{x}^{s+2}) \leqslant c$. Если оно не имеет места, то повторяем рассуждения с отрезками $[x_i^{s+1}, x_i^{s+2}]$, ..., $[x_j^{s+1}, x_j^{s+2}]$; если же $F_1(\boldsymbol{x}^{s+2}) < c$, то с отрезками $[x_i^{s+2}, x_i^s]$, ..., $[x_j^{s+2}, x_j^s]$. Деление отрезков проводим до тех пор, пока не получим требуемой точности. Очевидно, последовательность $\{\boldsymbol{x}^s\}$ сходится к точному оптимальному решению $\boldsymbol{x}^*$.

Описанный алгоритм легко обобщается на случай, когда функции (45) невозрастающие. Пусть $[u_\alpha, v_\alpha] \subset [a_\alpha, b_\alpha]$ является отрезком постоянства некоторой функции $G_\alpha(x_\alpha)$. Тогда в число значений (47) включаем значение $G_\alpha(v_\alpha)$. Затем определяем числа (48) так же, как раньше. Если получена точка $\boldsymbol{x}^s$, где $F_1(\boldsymbol{x}^s) > c$ и имеет место (49), а $g_s = G_\alpha(v_\alpha)$, то вначале под x_α^s следует понимать правый конец отрезка $[u_\alpha, v_\alpha]$, т. е. $x_\alpha^s = v_\alpha$. В данном случае, прежде чем приступить к пунктам 1°—3° алгоритма, проверим, не является ли некоторая точка $\bar{\boldsymbol{x}}^s$, для которой $\bar{x}_l^s = x_l^s$ $(l \neq \alpha)$ и $\bar{x}_\alpha^s \in [u_\alpha, v_\alpha]$, точкой максимума. Для этого решаем относительно x_α уравнение

$$(F_1(\boldsymbol{x}^s)/f_{1\alpha}(v_\alpha))f_{1\alpha}(x_\alpha) = c. \tag{52}$$

Если решение $\bar{x}_\alpha{}^s$ находится на отрезке $[u_\alpha, v_\alpha]$, то получим точку локального максимума $\bar{\boldsymbol{x}}^s$, в противном случае принимаем $x_\alpha{}^s = u_\alpha$ и приступаем к пункту 1° описанного выше алгоритма.

Здесь мы предполагали, что числу g_s соответствует отрезок постоянства только одной функции $G_\alpha(x_\alpha)$. Если числу g_s соответствуют отрезки постоянства нескольких функций $G_\alpha(x_\alpha), \ldots$ $\ldots, G_\beta(x_\beta)$, то вместо (52) рассмотрим неопределенное уравнение

$$[F_1(\boldsymbol{x}^s)/(f_{1\alpha}(v_\alpha)\ldots f_{1\beta}(v_\beta))]f_{1\alpha}(x_\alpha)\ldots f_{1\beta}(x_\beta) = c.$$

Если оно имеет такое решение $\bar{x}_\alpha{}^s, \ldots, \bar{x}_\beta{}^s$, что $\bar{x}_\alpha{}^s \in [u_\alpha, v_\alpha], \ldots$ $\ldots, \bar{x}_\beta{}^s \in [u_\beta, v_\beta]$, то каждое решение дает точку максимума $\bar{\boldsymbol{x}}^s$. Такие точки, вообще говоря, не являются изолированными, а определяют некоторую $(\mu - 1)$-мерную область, где μ — число индексов $\alpha, \ldots, \beta$.

2. Все неотрицательные функции (45) неубывающие (рис. 2). Дополнительно предполагаем, что функции (45) не имеют таких отрезков постоянства, где разные функции равны между собой. В данном случае по теореме 2 в точке локального максимума $\boldsymbol{x}^*$ только одна координата может быть внутренней точкой своего отрезка изменения. Но так как в каждой такой критической точке по теореме 3 максимум существует, то число локальных максимумов, вообще говоря, больше одного. Нетрудно проверить, что, например, в случае

$$G_1(a_1) = \ldots = G_\nu(a_\nu) \quad \text{и} \quad G_1(b_1) = \ldots = G_\nu(b_\nu)$$

максимально возможное число локальных максимумом не меньше, чем $\max\limits_k (\nu - k)C_\nu{}^k$.

Рассмотрим все точки $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, удовлетворяющие условиям $F_1(\boldsymbol{d}) > c$ и

$$G_k(d_k) < G_p(d_p), \quad k = i_1, \ldots, i_\lambda; \quad p = i_{\lambda+1}, \ldots, i_\nu, \tag{53}$$

где $d_k = a_k$ при $k = i_1, \ldots, i_\lambda$ и $d_p = b_p$ при $p = i_{\lambda+1}, \ldots, i_\nu$, $\nu + 1, \ldots, n$ $(i_\mu \in \{1, 2, \ldots, \nu\}, \mu = 1, 2, \ldots, \nu)$. Такие точки рассмотрим в порядке возрастания числа λ: первой испытываемой точкой выбираем $\boldsymbol{b}$ $(\lambda = 0)$, затем рассмотрим точки $\boldsymbol{d}$, где $\lambda = 1$ и т. д. На рис. 2 точка $(b_1, a_2, b_3, b_4, \ldots, b_n)$ является одной из точек $\boldsymbol{d}$ при $\lambda = 1$ (здесь $\nu = 4$).

Исходя из $\boldsymbol{d}$, в качестве начальных точек траекторий принимаем точки $\boldsymbol{d}^i = (d_1{}^i, d_2{}^i, \ldots, d_n{}^i)$, где $d_l{}^i = d_l$ $(l \neq i)$, а $d_i{}^i$ $(i \in \{i_{\lambda+1}, \ldots, i_\nu\})$ удовлетворяет условиям

$$G_i(d_i^i) = \min_{p=i_{\lambda+1},\dots,i_\nu} G_p(b_p) \quad \text{и} \quad a_i < d_i^i \leqslant b_i.$$

Число таких точек не превосходит $\nu-\lambda$. Это число меньше $\nu-\lambda$, если для некоторого индекса $l \in \{i_{\lambda+1}, \dots, i_\nu\}$ $G_l(a_l) > \min G_p(b_p)$. В случае точки $\boldsymbol{d}=(b_1, a_2, b_3, b_4, \dots, b_n)$, изображенной на рис. 2, в качестве начальных подходят $\boldsymbol{d}^1$ и $\boldsymbol{d}^3=\boldsymbol{d}$. Отметим, что среди начальных всегда имеется точка $\boldsymbol{d}$.

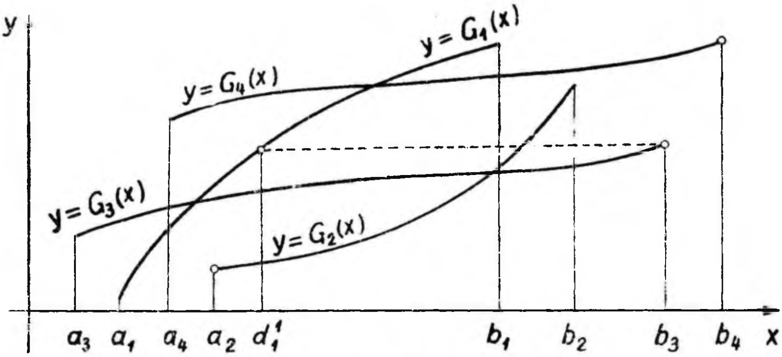


Рис. 2.

В действительности определять начальные точки нет необходимости. Вместо этого проверим сразу, существует ли на отрезке $[a_i, b_i]$ решение x_i^* уравнения

$$(F_1(\boldsymbol{d})/f_{1i}(b_i))f_{1i}(x_i) = c \qquad (i = i_{\lambda+1}, \dots, i_\nu) \tag{54}$$

и в утвердительном случае находим его. Если, кроме того,

$$\max_{k=i_1,\dots,i_\lambda;\ k\neq i} G_k(a_k) < G_i(x_i^*) < \min_{p=i_{\lambda+1},\dots,i_\nu} G_p(b_p), \tag{55}$$

то $\boldsymbol{d}+\Delta\boldsymbol{d}$, где $\Delta\boldsymbol{d} = (0, \dots, 0, x_i^*-b_i, 0, \dots, 0)$, есть по теореме 3 одна из точек локального максимума.

Остальные случаи можно исключить из рассмотрения, так как они приводят или к точкам, где максимума не существует, или к новым исходным точкам[5] $\boldsymbol{d}'$. После рассмотрения всех уравнений (54) ($i = i_{\lambda+1}, \dots, i_\nu$) берем новую исходную точку $\boldsymbol{d}$. Очевидно, что если в точке $\boldsymbol{d}+\Delta\boldsymbol{d}$ имеется локальный максимум, то рассмотрение точки $\boldsymbol{d}' = (d_1', d_2', \dots, d_n')$, где $d_j' = d_j$ $(j \neq i)$ и $d_i' = a_i$, в качестве исходной уже не нужно: она дает траектории, на которых максимума не существует.

Чтобы не было необходимости находить все максимумы, вычисляем значения $F(\boldsymbol{x})$ в исходных точках $\boldsymbol{d}$. Если оказывается,

[5] При некоторых положениях концов графиков функций (45) траектория типа $(t_{\max})$ продолжается за точки $\boldsymbol{d}'$ без разветвления, но в данном случае удобнее считать точку $\boldsymbol{d}'$ начальной точкой новой траектории.

что значение $F(\boldsymbol{x})$ в некоторой исходной точке $\boldsymbol{d}$ меньше наибольшего значения уже найденных максимумов, то такую точку $\boldsymbol{d}$, и, тем самым, все траектории, получаемые исходя из нее, можно исключать из рассмотрения.

3. Все неотрицательные функции (45) монотонны (рис. 3). Пусть функции $G_1(x_1), \dots, G_\varkappa(x_\varkappa)$ неубывающие, а $G_{\varkappa+1}(x_{\varkappa+1}), \dots, G_\nu(x_\nu)$ — невозрастающие. В качестве начальных точек траекторий берем точки $\boldsymbol{d}^0 = (d_1^0, d_2^0, \dots, d_n^0)$, удовлетворяющие условиям

$$G_k(d_k^0) < G_p(d_p^0), \quad k = i_1, \dots, i_\lambda; \quad p = i_{\lambda+1}, \dots, i_\varkappa,$$

где $d^0{}_k = a_k$ при $k = i_1, \dots, i_\lambda$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant \varkappa)$ и $d_p{}^0 = b_p$ при $p = i_{\lambda+1}, \dots, i_\varkappa, \nu+1, \dots, n$ $(i_\mu \in \{1, 2, \dots, \varkappa\}, \mu = 1, 2, \dots, \varkappa)$, а $d^0{}_{\varkappa+1}, \dots, d_\nu{}^0$ определены условиями $(i = \varkappa+1, \dots, \nu)$:

$$d_i^0 = \begin{cases} a_i & \text{при } G_i(a_i) < g_0, \\ b_i & \text{при } G_i(b_i) \geqslant g_0 \end{cases}$$

и

$$G_i(d_i^0) = g_0 \quad \text{при} \quad G_i(b_i) < g_0 \leqslant G_i(a_i),$$

где $g_0 = \max\limits_{k = i_1, \dots, i_\lambda} G_k(a_k)$. В случае семи неотрицательных функ-

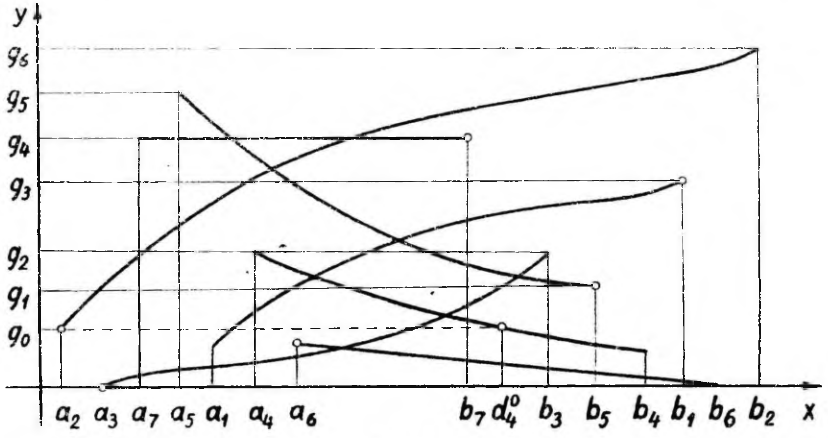


Рис. 3.

ций (45) и при $\varkappa = 3$, $\lambda = 2$ на рис. 3 отмечена одна такая начальная точка $\boldsymbol{d}^0 = (b_1, a_2, a_3, d_4^0, b_5, a_6, b_7, \dots, b_n)$, где $G_4(d_4^0) = g_0 = G_2(a_2)$.

Для фиксированной начальной точки определяем числа (48) упорядочением неравных среди чисел

$$G_{i_{\lambda+1}}(b_{i_{\lambda+1}}), \dots, G_{i_\varkappa}(b_{i_\varkappa}) \tag{56}$$

и тех чисел g_0, $G_{i_{\lambda+1}}(a_{i_{\lambda+1}}), \dots, G_{i_\varkappa}(a_{i_\varkappa}), G_{\varkappa+1}(a_{\varkappa+1}), \dots$

$\ldots, G_\nu(a_\nu), G_{\varkappa+1}(b_{\varkappa+1}), \ldots, G_\nu(b_\nu)$, которые не меньше g_0. Затем применяем алгоритм первого пункта к невозрастающим функциям $G_{\varkappa+1}(x_{\varkappa+1}), \ldots, G_\nu(x_\nu)$. Если при этом доходим до точки $\boldsymbol{x}^{s+1}$, определенной условиями (50), где $F_1(\boldsymbol{x}^{s+1}) > c$, то проверяем, равно ли g_{s+1} какому-то числу $G_\alpha(b_\alpha)$ из множества чисел (56). Если нет, то продолжаем, как в алгоритме первого пункта. Если же[6] $g_{s+1} = G_\alpha(b_\alpha)$, то нужно проверить, не является ли критической точка $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, некоторые координаты которой удовлетворяют одному из условий

$$g_{s-l} \leqslant G_{i_l}(x_{i_l}) = \ldots = G_{j_l}(x_{j_l}) = G_\alpha(x_\alpha) < g_{s+1-l}, \tag{57}$$

$$l = 0, 1, \ldots, t \quad (t \leqslant s),$$

где $g_{s-t} = \max\{g_0, G_\alpha(a_\alpha)\}$, а остальные координаты $x_\beta = d_\beta{}^0$. Здесь $i_l, \ldots, j_l$ — те индексы, при которых значения невозрастающих функций $G_i(x_i)$ могут соответственно изменяться в полуинтервалах $[g_{s-l}, g_{s+1-l})$ (число этих индексов зависит от l); $i_0 = i, \ldots, j_0 = j$. Для этого нужно проверить, имеют ли некоторые из систем

$$G_{i_l}(x_{i_l}) = \ldots = G_{j_l}(x_{j_l}) = G_\alpha(x_\alpha), \quad F(\boldsymbol{x}) = c, \tag{58}$$

$$l = 0, 1, \ldots, t,$$

решения, удовлетворяющие соответствующим условиям (57).

Для решения систем (58) метод деления отрезка пополам, вообще говоря, уже не годится. При проверке разрешимости, а также при приближенном решении систем (58) можно, например, с достаточно малым постоянным шагом $\Delta x_\alpha < 0$ найти значения переменных $x_\alpha, x_{i_l}, \ldots, x_{j_l}$, удовлетворяющие условиям (58) без требования $F(\boldsymbol{x}) = c$ (остальные переменные получают значения $x_\beta = d_\beta{}^0$). Если в найденных таким образом соседних точках $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ разности $F_1(\boldsymbol{x}) - c$, $F_1(\boldsymbol{x}') - c$ имеют обратные знаки, то максимум существует и может быть найден путем дальнейшего деления отрезка $[x_\alpha, x_\alpha']$. Если все такие критические точки найдены или же не существует критических точек, удовлетворяющих условиям (57), то мы дошли до точки $\boldsymbol{d}'$, где для индексов $\beta = i_t, \ldots, j_t$, а координаты d_β' определены из условия $G_\beta(d_\beta') = g_{s-t}$, а остальные координаты $d_\gamma' = d_\gamma{}^0$. Теперь возьмем начальную точку новой траектории и повторим вычисления[7].

---

[6] В такой точке траектория может быть продолжена так, что значения функций $G_i(x_i), \ldots, G_j(x_j), G_\alpha(x_\alpha)$ уменьшаются.

[7] Отметим, что если $G_\alpha(a_\alpha) \geqslant g_0$, то $\boldsymbol{d}'$ является одной из новых начальных точек траекторий. Так как разветвлений нет, то новую траекторию с начальной точкой $\boldsymbol{d}'$ можно считать и продолжением только что рассмотренной траектории и продолжать передвижение по ней. Если $G_\alpha(a_\alpha) < g_0$, то $\boldsymbol{d}'$ является концом траектории.

Нужно иметь в виду, что в данном случае даже тогда, когда в начальной точке $F_1(\boldsymbol{d}) < c$, следует проходить часть траектории, где с удалением от начальной точки функции $G_\beta(x_\beta)$ $(\beta = i_l, \ldots, j_l, a)$ уменьшаются.

4. В общем случае, если все или некоторые из неотрицательных функций (45) немонотонны[8], каждая траектория типа $(t_{\max})$ разбивается на части рассмотренных выше трех видов. На каждой части применим алгоритм соответствующего пункта.

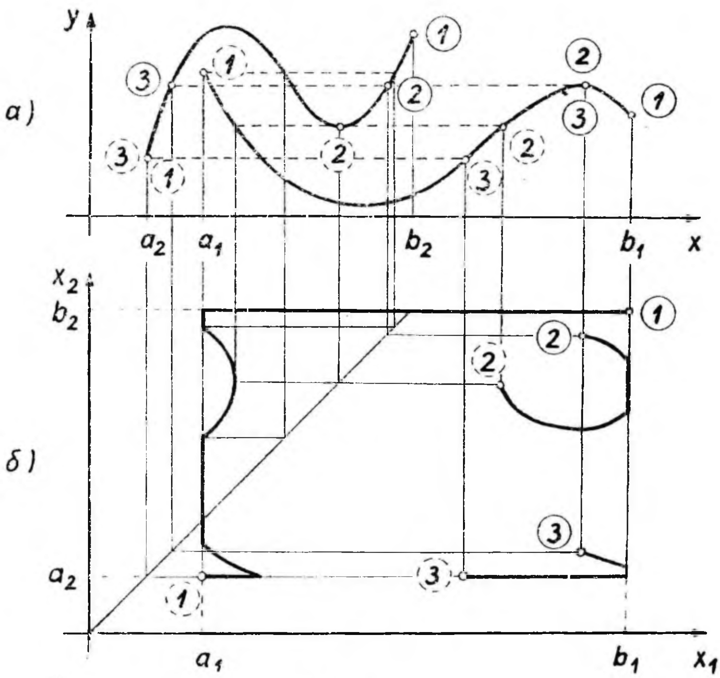


Рис. 4.

Чтобы число траекторий не было слишком большим, рассмотрим траектории по возможности большой длины. Начальные точки определяем так же, как в пунктах 1—3, учитывая вид участка траектории. Напоминаем, что начальные точки, как и все точки траектории, должны удовлетворять условию (37).

Удаление от начальной точки происходит во всех внутренних точках траектории так, что те переменные, при которых соответствующие неотрицательные функции (45) имеют наименьшее

[8] На практике немонотонность маловероятна.

значение, получают приращение, допустимое условиями (23) и сохраняющее равенство значений тех из функций (45), которые еще не достигли конца своего отрезка изменения.

В качестве примера рассмотрим случай двух неотрицательных функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$, графики и отрезки определения которых изображены на рисунке 4а. Нас не интересуют графики отрицательных функций $G_3(x), \ldots, G_n(x)$ и они не вырисованы. В данном случае имеется три траектории, которые находятся на двумерной плоскости $x_3 = b_3, \ldots, x_n = b_n$ (рис. 4б). На рис. 4а отмечены точки графиков $G_1(x)$, $G_2(x)$, соответствующие координатам x_1, x_2 начальных точек и концов траекторий. Точка графика, абсцисса которой соответствует начальной точке траектории, обозначена номером траектории в круге; точка, соответствующая концу траектории, обозначена номером в пунктирном круге.

Литература

1. Кивистик Л., Об одной задаче нелинейного планирования, связанной с многочленом. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 135—137.
2. Кюнци Г. П., Крелле В., Нелинейное программирование, Москва, 1965.
3. Пальм В. А., Принцип парциальной линейности и его некоторые применения. Реакционная способн. органич. соединений, Тарту, 1964, **1**, № 1, 7—32.
4. Пальм В. А., Основы количественной теории органических реакций, Ленинград, 1967.

Поступило
7 III 1968

ÜHEST MITTELINEAARSEST PLANEERIMISÜLESANDEST

L. Kivistik

Resümee

Artiklis vaadeldakse mittelineaarset planeerimisülesannet, mis seisneb korrutise

$$F(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)$$

maksimumi otsimises tingimustel, et $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ ja

$$F_j(x) = f_{j1}(x_1)f_{j2}(x_2)\ldots f_{jn}(x_n) \leqslant c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots r),$$

kus $f_i(x_i)$ ja $f_{ji}(x_i)$ on monotoonsed funktsioonid. Selle ülesande lubatavate lahendite piirkond ei ole üldiselt kumer, mistõttu võib esineda palju lokaalseid maksimume. Erijuhu $r = 1$ jaoks esitatakse artiklis algoritm, mis võimaldab leida kõiki lokaalseid maksimume ja sellega ka optimaalset lahendit.

Vaadeldavale ülesandele taandub teatud juhtudel eksperimendi optimaalset tulemust kindlustavate faktorite väärtuste otsimise probleem.

ON A NON-LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

L. Kivistik

Summary

In the present paper the following problem is considered: determine a vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maximizing function

$$F(x) \equiv f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)$$

and satisfying restrictions

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

$$F_j(x) \equiv f_{j1}(x_1) f_{j2}(x_2) \ldots f_{jn}(x_n) \leqslant c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots r),$$

where $f_i(x_i)$ and $f_{ji}(x_i)$ are monotonous functions. In general the set of feasible solutions is not convex and therefore many local maximums may exist.

For the particular case $r = 1$ an algorithm is presented which permits one to find all local maximum points.

О НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА

Л. Рыбаков

Кружок СНО при кафедре математического анализа

В приложениях классическое вариационное исчисление чаще всего используется для вывода дифференциальных уравнений и сопутствующих им граничных условий. И те и другие отражают необходимое условие экстремума функционала — условие обращения его первой вариации в нуль. Между видом исследуемого функционала и пространством, на котором он достигает экстремума, имеется тесная связь. В существующей литературе рассмотрены некоторые частные случаи. Когда исследуют на экстремум функционалы иного вида, при нахождении его первой вариации прибегают к неоднократному интегрированию по частям. Это вызывает определенные неудобства. Во-первых, указанная операция — трудоемкий, кропотливый процесс и при всей ее однообразности несложно допустить ошибку. Во-вторых, невозможно обозреть закономерности, существующие в граничных условиях. Наконец, вариационное исчисление в этом отношении, как математическая теория, носит несколько незаконченный характер.

В настоящей работе сделана попытка устранить эти недостатки. В первом разделе выводится выражение для первой вариации функционала достаточно общего вида, определенного в классе функций одного независимого переменного. Как следствие получены необходимые условия его экстремума для целого ряда известных по постановке вариационных задач. Во втором разделе рассматривается общее выражение для первой вариации функционала, определенного в пространстве функций многих независимых переменных. Вид функционала предполагается произвольным, а граница области интегрирования — свободной. В качестве примера рассмотрен случай фиксированной границы. В дополнении указана другая форма представления полученных результатов.

1. Необходимое условие экстремума функционала в пространстве функций одного аргумента

Пусть $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ — некоторый вектор. Будем говорить, что вектор-функция $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$ принадлежит функциональному пространству $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}[t_0, t_1]$ и писать $\boldsymbol{u}(t) \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}[t_0, t_1]$, если $u_i(t) \in C^{k_i}[t_0, t_1]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, где $C^{k_i}[t_0, t_1]$ — пространство скалярных функций, имеющих на отрезке $[t_0, t_1]$ непрерывные производные до порядка k_i включительно. В частности $C^0[t_0, t_1] = C[t_0, t_1]$ (соответственно $\boldsymbol{C}^0[t_0, t_1] = \boldsymbol{C}[t_0, t_1]$) — пространство непрерывных скалярных (соответственно векторных) функций.

Условимся символами D^j и D^j_* обозначать обычную и формально сопряженную производные скалярных функций порядка j, то есть

$$D^j = d^j/dt^j, \qquad D^j_* = (-1)^j d^j/dt^j.$$

Очевидно, что $D^j_{**} = D^j$.

В дальнейшем важную роль будет играть

Лемма. *Пусть даны скалярные функции* $f_j(t) \in C^j[t_0, t_1]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$, *и пусть*

$$I[\eta(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{k} f_j D^j \eta \, dt = 0 \tag{1.1}$$

для любой скалярной функции $\eta(t) \in C^k[t_0, t_1]$, *удовлетворяющей условиям*

$$D^j \eta(t_0) = D^j \eta(t_1) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, k-1. \tag{1.2}$$

Тогда на всем отрезке $[t_0, t_1]$ *справедливо равенство*

$$\sum_{j=0}^{k} D^j_* f_j = 0.$$

Доказательство. Обозначим первообразную порядка n функции $f_j(t)$ через $\Phi_{jn}(t)$, т. е.

$$\Phi_{jn}(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} dt \ldots \int_{t_0}^{t}}_{n \text{ раз}} f_j(t) \, dt.$$

Отсюда при любых целых m и n

$$D^m \Phi_{jn} = \begin{cases} \Phi_{j,n-m} & \text{при} \quad n > m \\ D^{m-n} f_j & \text{при} \quad n \leqslant m. \end{cases} \tag{1.3}$$

После $(k-j)$-кратного интегрирования по частям под знаком суммы выражения (1.1) с учетом условий (1.2) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \Phi_{j,k-j} \right] D^k \eta \, dt = 0.$$

Из этого равенства по обобщенной лемме Дю-Буа-Реймонда (см. [1], стр. 208) следует

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \Phi_{j,k-j} = \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i,$$

где c_i — постоянные, $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Принимая во внимание формулу (1.3) и дифференцируя обе части последнего выражения k раз, приходим к доказываемому уравнению

$$\sum_{j=0}^{k} D_*^j f_j = 0.$$

1.1. Одна рекуррентная формула. Пусть даны две скалярные функции $u(t)$, $v(t) \in C^k[t_0, t_1]$, $k > 0$. Из очевидных соотношений

$$uD^k v = D(uD^{k-1}v) - DuD^{k-1}v =$$
$$= D(uD^{k-1}v - DuD^{k-2}v) + D^2uD^{k-2}v = \ldots$$

индуктивным рассуждением приходим к рекуррентной формуле

$$uD^k v = D \sum_{j=1}^{k} D_*^{j-1} u D^{k-j} v + v D_*^k u. \tag{1.4}$$

Опираясь на свойства дифференциальных операторов D^j и D_*^j, получаем такие рекуррентные соотношения

$$uD_*^k v = D_* \sum_{j=1}^{k} D^{j-1} u D_*^{k-j} v + v D^k u, \tag{1.5}$$

$$D \sum_{j=1}^{k} D_*^{j-1} u D^{k-j} v = D \sum_{j=1}^{k} D^{j-1} v D_*^{k-j} u, \tag{1.6}$$

$$uD^k v = D \sum_{j=1}^{k} D^{j-1} v D_*^{k-j} u + v D_*^k u. \tag{1.7}$$

Обратимся к пространству вектор-функций. Пусть $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}[t_0, t_1]$, где $\boldsymbol{k} = (k, k, \ldots, k)$. Условимся обозначать производную вектор-функции порядка j и скалярное произведение двух вектор-функций символами

$$D^j \boldsymbol{u} = (D^j u_1, D^j u_2, \ldots, D^j u_m), \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} u_i v_i,$$

соответственно. С помощью формулы (1.7) нетрудно убедиться в справедливости следующей рекуррентной зависимости

$$\boldsymbol{u}\cdot D^k\boldsymbol{v}=D\sum_{j=1}^{k}D^{j-1}\boldsymbol{v}\cdot D_*^{k-j}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\cdot D_*^k\boldsymbol{u}. \tag{1.8}$$

В последующем изложении основное применение находит формула (1.8).

1.2. Основная формула для первой вариации функционала. Рассмотрим функционал произвольного вида

$$I[\boldsymbol{u}(t)]=\int_{t_0}^{t_1}F(t,\boldsymbol{u},D\boldsymbol{u},D^2\boldsymbol{u},\ldots,D^k\boldsymbol{u})\,dt=\int_{t_0}^{t_1}F(t,D^j\boldsymbol{u})\,dt, \tag{1.9}$$

где

$$\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\ldots,u_m(t))\in\boldsymbol{C}^{2\boldsymbol{k}}[t_0,t_1],\ \boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_m),$$

$$D^j\boldsymbol{u}=(D^ju_1,D^ju_2,\ldots,D^ju_m),\quad j=0,1,2,\ldots,k,\quad k=\max_{1\leqslant i\leqslant m}k_i.$$

Принятые обозначения предполагают, что относительно некоторых аргументов D^ju_i подынтегральная функция F может быть постоянной. Потребуем, чтобы при всех значениях $t\in[t_0,t_1]$ функция F имела непрерывные по совокупности всех своих аргументов частные производные до порядка $k+1$ включительно.

Обозначая приращения функций $D^j\boldsymbol{u}$ соответственно через $D^j\boldsymbol{h}$, запишем полное приращение функционала (1.9) с учетом варьирования концов интервала интегрирования:

$$\Delta I=\int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1}F(t,D^j\boldsymbol{u}+D^j\boldsymbol{h})\,dt-\int_{t_0}^{t_1}F(t,D^j\boldsymbol{u})\,dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[F(t,D^j\boldsymbol{u}+D^j\boldsymbol{h})-F(t,D^j\boldsymbol{u})]\,dt+$$

$$+\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1}F(t,D^j\boldsymbol{u}+D^j\boldsymbol{h})\,dt-\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0}F(t,D^j\boldsymbol{u}+D^j\boldsymbol{h})\,dt.$$

Воспользовавшись теперь формулой Тейлора и сохраняя только линейные относительно $D^j\boldsymbol{h}$, δt_0 и δt_1 члены, приходим к следующему выражению для первой вариации

$$\delta I(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=0}^{k}\boldsymbol{F}_j\cdot D^j\boldsymbol{h}\,dt+F\delta t\Big|_{t_0}^{t_1}, \tag{1.10}$$

где обозначено

$$\boldsymbol{F}_j = (F_{1j}, F_{2j}, \ldots, F_{mj}), \qquad F_{ij} = \partial F / \partial D^j u_i.$$

Отметим, что вектор-функции $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{h}$ определены, вообще говоря, на различных интервалах: $[t_0, t_1]$ и $[t_0 + \delta t_0, t_1 + \delta t_1]$ соответственно. Однако, их можно непрерывно продолжить (например, с помощью линейных экстраполяционных формул) на интервал $[t_0, t_1] \cup [t_0 + \delta t_0, t_1 + \delta t_1]$.

Отвлекаясь от общей постановки задачи, найдём необходимое условие экстремума исследуемого функционала с фиксированными концами интервала интегрирования. В этом случае

$$\delta t_0 = \delta t_1 = 0, \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered} D^j u_i(t_0) = a_{ij}, \quad D^j u_i(t_1) = b_{ij}, \\ j = 0, 1, 2, \ldots, k_i - 1; \quad i = 1, 2, \ldots, m, \end{gathered} \tag{1.12}$$

где a_{ij} и b_{ij} — заданные постоянные, а приращение $\boldsymbol{h}$ должно удовлетворять условиям

$$\begin{gathered} D^j h_i(t_0) = D^j h_i(t_1) = 0, \\ j = 0, 1, 2, \ldots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Тогда формула (1.10) принимает вид

$$\delta I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{k} \boldsymbol{F}_j \cdot D^j \boldsymbol{h}\, dt.$$

В силу независимости функций h_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, условие $\delta I = 0$ возможно, когда при каждом i

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{k} F_{ij} D^j h_i\, dt = 0.$$

Применяя доказанную выше лемму, приходим к системе уравнений типа Эйлера—Пуассона

$$\sum_{j=0}^{k} D_*^j F_{ij} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.14}$$

или в векторной форме

$$\sum_{j=0}^{k} D_*^j \boldsymbol{F}_j = 0. \tag{1.15}$$

Вектор-функции, удовлетворяющие системе (1.15), образуют семейство экстремалей. Так как решение любой вариационной задачи ищется среди этого семейства, то можно всегда считать, что вектор-функции $\boldsymbol{F}_j$ имеют непрерывные производные порядка j соответственно.

Возвращаясь теперь к общему выражению (1.10), применим рекуррентную формулу (1.8), полагая в ней $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}_j$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{h}$, $k=j$. В результате получим

$$\delta I(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{h}\cdot\sum_{j=0}^{k}D_*^j\boldsymbol{F}_j\,dt+\left[F\delta t+\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j}D^{l-1}\boldsymbol{h}\cdot D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j\right]\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{1.16}$$

С помощью линейных экстраполяционных формул функции $D^j\boldsymbol{h}$ на концах интервала интегрирования представляем в виде

$$D^j\boldsymbol{h}(t_0)\sim\delta(D^j\boldsymbol{u})_0-(D^{j+1}\boldsymbol{u})_0\delta t_0,$$
$$D^j\boldsymbol{h}(t_1)\sim\delta(D^j\boldsymbol{u})_1-(D^{j+1}\boldsymbol{u})_1\delta t_1,$$

где $\delta(D^j\boldsymbol{u})_0$ и $\delta(D^j\boldsymbol{u})_1$ — вариации функций $D^j\boldsymbol{u}$ в точках t_0 и t_1 соответственно. Подставляя эти выражения в уравнение (1.16), приходим к основной формуле для первой вариации функционала (1.9)

$$\delta I(\boldsymbol{u},\boldsymbol{h})=\int_{t_0}^{t_1}\boldsymbol{h}\cdot\sum_{j=0}^{k}D_*^j\boldsymbol{F}_j\,dt+\Bigg[\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j}\delta(D^{l-1}\boldsymbol{u})\cdot D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j+$$
$$+\delta t\left(F-\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j}D^l\boldsymbol{u}\cdot D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j\right)\Bigg]\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{1.17}$$

Как показывается в следующем пункте, необходимые условия экстремума большинства (если не всех) функционалов, определенных в пространстве функций одного аргумента, могут быть выведены из равенства (1.17).

1.3. Конкретные классы задач. Решения рассматриваемых ниже вариационных задач ищутся среди $2(k_1+k_2+\ldots+k_m)$-параметрического семейства экстремалей. Цель настоящего пункта — выявить в каждом конкретном случае граничные соотношения, необходимые для обращения в нуль первой вариации функционала и достаточные для определения всех постоянных интегрирования — параметров семейства экстремалей.

Следует отметить, что согласно (1.15) порождающая семейство экстремалей система уравнений типа Эйлера—Пуассона имеет порядок $2k\geqslant 2(k_1+k_2+\ldots+k_m)$, в то время как число граничных соотношений не может превосходить величину $2(k_1+k_2+\ldots+k_m)$. Кажущееся несоответствие порядка системы и числа граничных условий разрешается принятым выше соглашением о постоянстве функции F относительно некоторых аргументов D^ju_i.

А. Задача с закрепленными концами. Эта задача без использования выражения (1.17) была решена ранее. Необходимое условие экстремума функционала свелось к системе дифференциальных уравнений (1.15) порядка $2(k_1+k_2+\ldots+k_m)$.

Приравнивая правую часть выражения (1.17) нулю и учитывая, что

$$\delta(D^{l-1}u_i)_0 = \delta(D^{l-1}u_i)_1 = \delta t_0 = \delta t_1 = 0.$$
$$l = 1, 2, \ldots, k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

приходим к тому же результату. Граничные условия (1.12) позволяют определить все постоянные интегрирования.

Б. Задача со свободными концами. В этом случае имеет место условие (1.11), а $\delta(D^{l-1}u_i)_0$ и $\delta(D^{l-1}u_i)_1$ независимы и произвольны. Согласно (1.17) первая вариация функционала обращается в нуль на экстремали, удовлетворяющей следующим $2(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)$ условиям

$$\sum_{j=l}^{k} D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j\Big|_{t_0,t_1} = \boldsymbol{0}, \quad l = 1, 2, \ldots, k.$$

Символ $\Big|_{t_0,t_1}$ указывает на наличие двух одинаковых систем уравнений на концах t_0 и t_1 соответственно.

В. Задача с подвижными концами. Задачи этого класса возникают из предыдущего случая, если отбросить условие (1.11).

Когда в формуле (1.17) величины $\delta(D^{l-1}u_i)_0$, $\delta(D^{l-1}u_i)_1$, δt_0 и δt_1 независимы и произвольны, то δI обращается в нуль на экстремали, удовлетворяющей $2(k_1 + k_2 + \ldots + k_m) + 2$ соотношениям

$$\begin{gathered}\sum_{j=l}^{k} D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j\Big|_{t_0,t_1} = \boldsymbol{0}, \quad l = 1, 2, \ldots, k,\\ \Big[F - \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j} D^l\boldsymbol{u}\cdot D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j\Big]\Big|_{t_0,t_1} = 0.\end{gathered} \tag{1.18}$$

Встречаются задачи, в которых величины $D^{l-1}u_i$ на концах интервала интегрирования определены с помощью систем независимых функций $\xi_{il}(t_0)$ и $\eta_{il}(t_1)$. В этом случае

$$\delta(D^{l-1}u_i)_0 = D\xi_{il}(t_0)\delta t_0, \quad \delta(D^{l-1}u_i)_1 = D\eta_{il}(t_1)\delta t_1,$$

а соответствующие условия, налагаемые на экстремаль, сводятся к системе уравнений

$$\begin{gathered}D^{l-1}u_i\big|_{t_0} = \xi_{il}(t_0), \quad D^{l-1}u_i\big|_{t_1} = \eta_{il}(t_1),\\ l = 1, 2, \ldots, k_i, \quad i = 1, 2, \ldots m,\\ \Big[F - \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j}(D^l\boldsymbol{u} - D\xi_l)\cdot D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j\Big]\Big|_{t_0} = 0,\\ \Big[F - \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j}(D^l\boldsymbol{u} - D\eta_l)\cdot D_*^{j-l}\boldsymbol{F}_j\Big]\Big|_{t_1} = 0,\end{gathered} \tag{1.19}$$

где $\xi_l = (\xi_{1l}, \ldots, \xi_{ml})$ и $\eta_l = (\eta_{1l}, \ldots, \eta_{ml})$.

Последние два соотношения в системах (1.18), (1.19) позволяют исключить параметры t_0 и t_1 из предыдущих уравнений и известны как условия трансверсальности.

Не останавливаясь на других случаях задач с подвижными концами, отметим, что единственная экстремаль, доставляющая экстремум исследуемому функционалу, может быть выделена в тех случаях, когда на каждом конце поставлено по $(k_1+k_2+ + \ldots + k_m)$ незавасимых условий относительно $D^{l-1}u_i|_{t_0}$, $D^{l-1}u_i|_{t_1}$, t_0 и t_1. Недостающими уравнениями для исключения параметров t_0 и t_1 являются условия трансверсальности.

2. Необходимые условия экстремума функционала в пространстве функций многих переменных

Пусть $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — точка n-мерного евклидова пространства E^n, а G — некоторая область в E^n с границей Γ. Будем говорить, что вектор-функция $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ принадлежит функциональному пространству $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}[G]$ и писать $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}[G]$, если $u_i(\boldsymbol{x}) \in C^{k_i}[G]$, где $C^{k_i}[G]$ — пространство скалярных функций, имеющих в области G непрерывные частные производные до порядка k_i включительно. Здесь $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ — некоторый m-мерный вектор. Если окажется, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = k$, то вместо $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{k}}[G]$ будем писать $\boldsymbol{C}^k[G]$.

Условимся частную производную первого порядка по переменной x_j обозначать символом $\mathfrak{D}_j$. Тогда для обыкновенной и формально сопряженной частных производных порядка k естественна символика

$$\mathfrak{D}^k = \prod_{j=1}^{n} \mathfrak{D}_j^{k_j}, \qquad \mathfrak{D}_*^k = (-1)^k \mathfrak{D}^k,$$

где $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, причем $\mathfrak{D}_{**}^k = \mathfrak{D}^k$. Если принять, что

$$k_{0j} = k_1 + k_2 + \ldots + k_j, \quad k_{jn} = k_{j+1} + k_{j+2} + \ldots + k_n, \quad k_{00} = 0, \quad k_{0n} = k,$$

то

$$\mathfrak{D}^{k_{0j}} = \prod_{l=1}^{j} \mathfrak{D}_l^{k_l}, \quad \mathfrak{D}^{k_{jn}} = \prod_{l=j+1}^{n} \mathfrak{D}_l^{k_l}, \quad \mathfrak{D}^k = \mathfrak{D}^{k_{0j}} \mathfrak{D}^{k_{jn}},$$
$$\mathfrak{D}_*^{k_{0j}} = (-1)^{k_{0j}} \mathfrak{D}^{k_{0j}}, \quad \mathfrak{D}_*^{k_{jn}} = (-1)^{k_{jn}} \mathfrak{D}^{k_{jn}}, \quad \mathfrak{D}_*^k = \mathfrak{D}_*^{k_{0j}} \mathfrak{D}_*^{k_{jn}}. \tag{2.1}$$

2.1. Обобщение рекуррентной **формулы** (1.7). Возвращаясь к пункту 1.1, перепишем формулу (1.7) в виде

$$uD^k v = DR[u, v; k-1] + vD_*^k u, \quad k > 0, \tag{2.2}$$

где для сокращения записи выражений настоящего раздела введено обозначение

$$R[u, v; k-1] = \sum_{j=1}^{k} D^{j-1} v D_*^{k-j} u. \tag{2.3}$$

Аналогично

$$\boldsymbol{u} \cdot D^k \boldsymbol{v} = DR[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; k-1] + \boldsymbol{v} \cdot D_*^k \boldsymbol{u}, \tag{2.4}$$

где

$$R[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}; k-1] = \sum_{i=1}^{m} R[u_i, v_i; k-1] = \sum_{j=1}^{k} D^{j-1} \boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{D}_*^{k-j} \boldsymbol{u}. \tag{2.5}$$

Обобщим формулы (2.2) и (2.4) на случай функций многих аргументов. Пусть в области G евклидова пространства E^n заданы две скалярные функции $u(\boldsymbol{x})$ и $v(\boldsymbol{x})$, имеющие в этой области частные производные до порядка k включительно. Применяя к очевидному соотношению

$$\mathfrak{D}_*^{k\,oj} u \mathfrak{D}^{k\,jn} v = \mathfrak{D}_*^{k\,oj} u \mathfrak{D}_{j+1}^{k\,j+1} (\mathfrak{D}^{k\,j+1,n} v)$$

(см. обозначения (2.1)) формулу (2.2) по аргументу x_{j+1}, получим

$$\mathfrak{D}_*^{k\,oj} u \mathfrak{D}^{k\,jn} v = \mathfrak{D}_{j+1} R[\mathfrak{D}_*^{k\,oj} u, \mathfrak{D}^{k\,j+1,n} v; k_{j+1} - 1] + \\ + \mathfrak{D}_*^{k\,o,j+1} u \mathfrak{D}^{k\,j+1,n} v.$$

Преобразовывая с помощью этой формулы выражение

$$u \mathfrak{D}^k v = \mathfrak{D}_*^{k\,00} u \mathfrak{D}^{k\,0n} v$$

n раз, приходим к искомому обобщению формулы (2.2) (ср. (1.7))

$$u \mathfrak{D}^k v = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{D}_j R[\mathfrak{D}_*^{k\,0,j-1} u, \mathfrak{D}^{k\,jn} v; k_j - 1] + v \mathfrak{D}_*^k u \tag{2.6}$$

В случае вектор-функций $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, $v(\boldsymbol{x}) \in C^k[G]$, последнее соотношение (или соотношение (2.4)) позволяет получить его векторный аналог в виде

$$\boldsymbol{u} \cdot \mathfrak{D}^k \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{D}_j R[\mathfrak{D}_*^{k\,0,j-1} \boldsymbol{u}, \mathfrak{D}^{k\,jn} \boldsymbol{v}; k_j - 1] + \boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{D}_*^k \boldsymbol{u}, \tag{2.7}$$

где как и ранее

$$\mathfrak{D}^k \boldsymbol{u} = (\mathfrak{D}^k u_1, \mathfrak{D}^k u_2, \ldots, \mathfrak{D}^k u_m).$$

Формула (2.7) обобщает рекуррентное соотношение (2.4) ((1.8)) на случай пространств вектор-функций многих аргументов.

2.2. Первая вариация функционала. Необходимое условие его экстремума в случае фиксированной границы. Рассмотрим функционал общего вида

$$I[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})] = \int\limits_G F(\boldsymbol{x}, \mathfrak{D}^j \boldsymbol{u})\, do, \tag{2.8}$$

где

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in C^{2\boldsymbol{k}}[G], \quad u_i(\boldsymbol{x}) \in C^{2k_i}[G], \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$
$$do = dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \quad \boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_m), \quad k = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} k_i,$$

причем подынтегральная функция F относительно некоторых аргументов $\mathfrak{D}^j u_i$ может быть постоянной. Так как для функции n переменных можно составить

$$C^j_{n+j-1} = \binom{n+j-1}{j} = \frac{n(n+1)\ldots(n+j-1)}{j!}$$

всевозможных частных производных порядка j, то максимально возможное число аргументов исследуемого функционала равно

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{k_i} \binom{n+j-1}{j}.$$

Пусть $M(i, j)$ — множество всевозможных частных производных функции $u_i(\boldsymbol{x})$ порядка j, а $\boldsymbol{M}(j)$ — множество всевозможных частных производных вектор-функции того же порядка. Условимся писать, что $\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{M}(j)$, если $\mathfrak{D}^j u_i \in M(i, j)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Предположим, что подынтегральная функция по совокупности всех своих аргументов имеет непрерывные частные производные до порядка $k+1$ включительно. Рассмотрим приращение функционала в случае свободной границы, вызванное приращениями $\mathfrak{D}^j \boldsymbol{h}$ вектор-функций $\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$,

$$\Delta I = \int\limits_G [F(\boldsymbol{x}, \mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} + \mathfrak{D}^j \boldsymbol{h}) - F(\boldsymbol{x}, \mathfrak{D}^j \boldsymbol{u})]\, do.$$

Выделяя с помощью формулы Тейлора линейную относительно $\mathfrak{D}^j \boldsymbol{h}$ часть приращения ΔI, получим

$$\delta I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}) = \int\limits_G \sum_{j=0}^{k} \sum_{\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{M}(j)} \boldsymbol{F}_j \cdot \mathfrak{D}^j \boldsymbol{h}\, do. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\boldsymbol{F}_j = (F_{1j}, F_{2j}, \ldots, F_{mj}), \qquad F_{ij} = \partial F / \partial \mathfrak{D}^j u_i.$$

С помощью рекуррентного соотношения (2,7), полагая в нем $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_j$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}$, $k = j$, преобразуем подынтегральное выражение первой вариации (2.9). В результате получим

$$\delta I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}) = \int\limits_G \boldsymbol{h} \cdot \sum_{j=0}^{k} \sum_{\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{M}(j)} \mathfrak{D}_*^j \boldsymbol{F}_j\, do +$$
$$+ \int\limits_\Gamma \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{M}(j)} R[\mathfrak{D}_*^{j_{0,l-1}} \boldsymbol{F}_j, \mathfrak{D}^{j_{ln}} \boldsymbol{h}; j_l - 1]\, do_l, \tag{2.10}$$

где $do_l = dx_1 dx_2 \ldots dx_{l-1} dx_{l+1} \ldots dx_n$.

Исследование большинства (если не всех) функционалов со свободной границей на необходимое условие экстремума можно осуществить с помощью формулы (2.10).

В качестве примера найдем необходимые условия экстремума функционала с фиксированной границей области интегрирования. В этом случае на Γ заданы значения функций u_i и их всевозможных частных производных до порядка $k_i - 1$ включительно, а соответствующие им приращения $\mathfrak{D}^j h_i$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, при $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ должны тождественно обращаться в нуль. Необходимое условие экстремума $\delta I = 0$ принимает вид (см. формулу (2.10))

$$\int_G \boldsymbol{h} \cdot \sum_{j=0}^{k}{}' \sum_{\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{M}(j)} \mathfrak{D}_*{}^j \boldsymbol{F}_j \, do = 0.$$

Применяя аналог леммы Лагранжа для n-мерной области (см. [1] стр. 116), приходим к уравнениям типа Эйлера—Остроградского

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{M}(j)} \mathfrak{D}_*{}^j \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{0}.$$

Решения этой системы образуют семейство экстремалей, среди которых отыскиваются решения других более сложных задач.

3. Дополнение

Не вдаваясь в подробности, дадим другое представление основным результатам, полученным в разделах 1 и 2.

Из очевидных соотношений

$$\begin{aligned} uDv &= D(uv) - vDu, \\ uD^2v &= D(uDv - vDu) + vD^2u = \\ &= D^2(uv) - 2D(vDu) + vD^2u \end{aligned}$$

и т. д., индукцией приходим к выражению

$$uD^k v = \sum_{j=0}^{k} C_k{}^j D^j (v D_*{}^{k-j} u), \tag{3.1}$$

эквивалентному формуле (1.7). В пространстве вектор-функций ему соответствует соотношение

$$\boldsymbol{u} \cdot D^k \boldsymbol{v} = \sum_{j=0}^{k} C_k{}^j D^j (\boldsymbol{v} \cdot D_*{}^{k-j} \boldsymbol{u}). \tag{3.2}$$

Последнее позволяет преобразовать первую вариацию функционала (1.9) к виду

$$\delta I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{j} C_j{}^l D^l (\boldsymbol{h} \cdot D_*{}^{j-l} \boldsymbol{F}_j) + F\delta t \Big|_{t_0}^{t_1}. \tag{3.3}$$

В случае функций многих переменных

$$u\mathfrak{D}^k v = \sum_{j=0}^{k}{}' C_k{}^j \mathfrak{D}^j (v \mathfrak{D}_*{}^{k-j} u), \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{u} \cdot \mathfrak{D}^k \boldsymbol{v} = \sum_{j=0}^{k}{}' C_k{}^j \mathfrak{D}^j (\boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{D}_*{}^{k-j} \boldsymbol{u}). \tag{3.5}$$

В отличие от (3.1) и (3.2) в последних формулах (и в последующем выражении) примененные символы имеют смысл

$$\sum_{j=0}^{k}{}' (\ldots) = \sum_{j_1=0}^{k_1} \sum_{j_2=0}^{k_2} \ldots \sum_{j_n=0}^{k_n} (\ldots),$$

$$j = j_1 + j_2 + \ldots + j_n, \quad k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n,$$

$$C_k{}^j = \prod_{l=1}^{n} C_{k_l}^{j_l}, \quad \mathfrak{D}^j = \prod_{l=1}^{n} \mathfrak{D}_l^{j_l}, \quad \mathfrak{D}_*{}^{k-j} = (-1)^{k-j} \prod_{l=1}^{n} \mathfrak{D}_l^{k_l - j_l}.$$

Первая вариация функционала (2.8) со свободной границей с помощью формул (3.4), (3.5) преобразуется к виду

$$\delta I(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{h}) = \int_G \sum_{j=0}^{k} \sum_{\mathfrak{D}^j \boldsymbol{u} \in M(j)} \sum_{l=0}^{j}{}' C_j{}^l \mathfrak{D}^l (\boldsymbol{h} \cdot \mathfrak{D}_*{}^{j-l} \boldsymbol{F}_j)\, do. \tag{3.6}$$

Выражения (3.3) и (3.6) позволяют рассматривать первую вариацию функционала с единой точки зрения, не выделяя отдельно члены, из которых вытекают уравнения типа Эйлера—Пуассона—Остроградского, и члены, порождающие естественные граничные условия.

Литература

1. Ахиезер Н. И., Лекции по вариационному исчислению. Москва, 1955.

Поступило
6 V 1968

FUNKTSIONAALI EKSTREEMUMI TARVILIKUST TINGIMUSEST

L. Rõbakov

Resümee

Artiklis tuletatakse diferentseerimisoperaatori jaoks rekurrentsed seosed, mille abil leitakse võrdlemisi üldkujuliste funktsionaalide esimeste variatsioonide avaldised. Nimetatud funktsionaalide ekstreemumi tarvilikud tingimused, mis on esitatud Euler-Poisson-Ostrogradski võrrandite ja neile kaasnevate loomulike rajatingimuste kujul, üldistavad teadaolevaid klassikaliste variatsioonülesannete tingimusi. Lisas on näidatud saadud tulemuste teistsugune esitusviis.

ON A NECESSARY CONDITION OF THE EXTREMUM OF FUNCTIONALS

L. Rybakov

Summary

This paper is devoted to some extensions of classic calculus of variations.

Section 1 deals with functionals in space of functions of one variable. Recurrence relations that have been established for ordinary derivative operators are utilized for deriving the first variation of an arbitrary functional. Necessary conditions of the extremum of functionals in the form of Euler-Poisson type equations and of natural boundary conditions generalized well-known necessary conditions of classic calculus of variations.

In Section 2 the preceding results are generalized for the case of functions of n variables space. Functionals with a free boundary are discussed.

Obtained results in other terms are presented in the Appendix.

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ИНФОРМАЦИИ

Р. Тамместе

Кафедра вычислительной математики

В настоящей статье рассматривается некоторый класс характеристик зависимости случайных векторов в конечномерных вещественных пространствах. По многим свойствам эти характеристики близки к информации Шеннона, которая оказывается вместе с коэффициентом корреляции основным представителем этого класса.

Цель статьи — уточнение и совместное описание многих статистических методов. Введенные для этого понятия квазиэнтропии, по-видимому, не имеют самостоятельного значения в теории информации, но могут быть полезными при изучении некоторых вопросов статистики.

Сначала введем следующие обозначения. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех случайных векторов (коротко сл. в.) на фиксированном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Элементы из $\mathfrak{S}$ обозначаются через X, Y, Z, U с индексами или без индексов, а их функции распределения (коротко ф. р.) обозначаются как обычно, через F_x, F_y, F_z, F_v соответственно. Пусть $F_x/_y$ будет условная ф. р. случайного вектора X при данном Y. Для сл. в., составленного из всех компонентов X и Y, ниже воспользуемся символом XY. Множество всех ф. р. обозначается буквой $\mathfrak{F}$. Буквы i с индексами, n, N и r — неотрицательные целые числа. Все пределы берутся при $n \to \infty$. Пусть $M_r(F)$ есть множество всех целочисленных моментов до порядка r данной ф. р. $F(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, т. е.

$$M_r(F) = \{m_{i_1 i_2 \ldots i_N}; \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_N \leqslant r\};$$

где

$$m_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \int x_1^{i_1} \ldots x_N^{i_N} \, dF(x_1, \ldots, x_N),$$

если интеграл в R^N абсолютно сходится и

$$m_{i_1 i_2 \ldots i_N} = \infty$$

в противном случае.

Если сл. в. X имеет ф. р. F, то символы $M_r(X)$ и $M_r(F)$ эквивалентны.

§ 1. Квазиэнтропия и её свойства

Квазиэнтропией называется функционал H, определенный на множестве ф. р. $\mathfrak{F}$, если выполняются следующие условия:

1.1. $H(F_{xy}) \leqslant H(F_x) + H(F_y)$, причем равенство имеет место, когда $F_{xv} = F_x \times F_y$;

1.2. $H(F_x) = H(F_U) + \ln|\det C|$, если $X = CU + m$, где C — регулярная квадратная матрица, m — постоянный вектор, U — некоторый сл. в., имеющий ф. р. F_U и F_x — ф. р. сл. вектора X;

1.3. $H(F) \leqslant \frac{1}{2}\ln(2\pi e)$ при одномерных ф. р. с дисперсией, 1, причем для гауссовой ф. р. $F(x) = N(0, 1, x)$ достигается равенство;

1.4. $H(F_x) \geqslant EH(F_x/_y)$ при всех пар сл. X и Y, где среднее значение берётся по всем значениям Y.

Система условий 1.1—1.4 неполная и не определяет квазиэнтропию единственным образом. Более того, класс всех квазиэнтропий довольно обширный и многообразный. Ниже мы докажем некоторые теоремы для уяснения свойств квазиэнтропии.

Напомним, что случайный вектор X является вектором второго порядка, если все его компоненты имеют конечные вторые моменты. Из этого вытекает конечность всех элементов множества $M_2(X)$.

Теорема 1. *Для квазиэнтропии N-мерного сл. в. X второго порядка с матрицей ковариации B имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} &H(X) \leqslant \frac{N}{2}\ln(2\pi e) + \frac{1}{2}\ln\det B, && \text{если} \quad \det B \neq 0, \\ &H(X) = -\infty, && \text{если} \quad \det B = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Если X — невырожденный гауссовский вектор, то в первом из соотношений (1) *имеет место равенство.*

Доказательство. Утверждение теоремы для одномерных сл. в. непосредственно следует из условий 1.2. и 1.3. В частности, если случайная величина S вырождена, т. е. если $S = a$ ($a \in R$) почти наверно (коротко п. н.), то из равенства $S = cS + (1 - c)a$ п. н. для всех $c \in R$ и из условия 1.2 следует

$$H(s) = H(s) + \ln|c|,$$

что не имеет смысла при конечном $H(S)$. Бесконечное значение $+\infty$ исключается условиями 1.3 и 1.4, следовательно,

$$H(s) = -\infty.$$

В общем случае воспользуемся вектором главных компонент U, квазиэнтропия которого равна квазиэнтропии исходного сл. в. X по условию 1.2 в силу ортогональности матрицы преобразования. Обозначим через λ_i, $i=1, 2, \ldots, N$, дисперсии главных компонент и напомним известное равенство

$$\prod_{i=1}^{N} \lambda_i = \det B.$$

Принимая главные компоненты за независимые (при гауссовом распределении так и есть), мы из-за условия 1.1 не уменьшаем их совместную квазиэнтропию. Если учесть, что теорема доказана для одномерного случая, то получим соотношения:

$$H(X) = H(U) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln \lambda_i \right] =$$

$$= \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln \det B$$

при $\det B \neq 0$ и

$$H(X) = H(U) = -\infty,$$

если ранг матрицы В меньше N. В частности, если X — гауссовский сл. вектор, то все знаки неравенства переходят на знаки равенства, после чего заключаем, что

$$H(X) = \frac{N}{2} \ln(2\pi e) + \frac{1}{2} \ln \det B$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть H есть квазиэнтропия на множестве $\mathfrak{F}$ и $p \geqslant 2$. Функционал H_p, определённый для ф. р. F равенством*

$$H_p(F) = \sup H(G),$$

где G пробегает такое множество ф. р., что

$$M_p(G) = M_p(F),$$

является квазиэнтропией.

Доказательство. Выведем для каждой ф. р. F из $\mathfrak{F}$ такую последовательность ф. р. $\{F^*{}_m\}$, что удовлетворяются соотношения:

$$M_p(F_m{}^*) = M_p(F),$$
$$\lim_{m\to\infty} H(F_m) = H_p(F).$$

Последовательности, которые аналогично соответствуют ф. р. F_x, F_y, F_{xy}, F_n, F_v и $F_{x/y}$, обозначим соответственно через $\{F_{xm}\}$, $\{F_{ym}\}$, $\{F_{xym}\}$, $\{F_{nm}\}$, $\{F_{vm}\}$ и $\{F_{x/ym}\}$. Аргументы ф. р. соединяем по надобности в векторы t и v. Ниже покажем, что функционал H_p удовлетворяет всем условиям определения квазиэнтропии, начиная с 1.1.

Напоминаем, что имеют место равенства:

$$F_x(t) = \sup_v F_{xy}(t, v),$$
$$F_y(v) = \sup_t F_{xy}(t, v),$$

если векторы t и v соответствуют сл. векторам X и Y по размерности. Введя обозначения:

$$F^*_{mx}(t) = \sup_v F^*_{xym}(t, v),$$
$$F^*_{my}(v) = \sup_t F^*_{xym}(t, v),$$

и учитывая, что все элементы множеств $M_p(F_x)$, $M_p(F_y)$, $M_p(F_{mx})$ и $M_p(F_{my})$ включаются в $M_p(F_{xy})$, имеем:

$$M_p(F^*_{mx}) = M_p(F_x),$$
$$M_p(F^*_{my}) = M_p(F_y),$$
$$H_p(F_x) + H_p(F_y) \geqslant H(F^*_{mx}) + H(F^*_{my}) \geqslant H(F^*_{xym}), \quad m = 1, 2, \ldots,$$
$$H_p(F_x) + H_p(F_y) \geqslant \lim_{m\to\infty} H(F^*_{xym}) = H_p(F_{xy}).$$

Если же выполняется равенство:

$$F_{xy}(t, v) = F_x(t) \cdot F_y(v),$$

то соотношения:

$$M_p[F_{xy}(t, v)] = M_p[F^*_{xm}(t) \cdot F^*_{ym}(v)], \qquad m = 1, 2, \ldots,$$
$$H_p(F_{xy}) \geqslant \lim_{m\to\infty} H[F^*_{xm}(t) \cdot F^*_{ym}(v)] =$$
$$= \lim_{m\to\infty} [H(F^*_{xm}) + H(F^*_{ym})] =$$
$$= H_p(F_x) + H_p(F_y),$$

обеспечивают справедливость равенства:

$$H_p(F_{xy}) = H_p(F_x) + H_p(F_y).$$

Для проверки условия 1.2. предположения, что U_m есть любой сл. в. с функцией распределения F_{Um} и пусть F_{mx} будет ф. р. такого сл. в. X_m, что

$$X_m = CU_m + m.$$

Из очевидного равенства

$$M_p(F_{mx}) = M_p(F_x)$$

вытекают неравенства:

$$H_p(F_x) \geqslant \limsup_{m\to\infty} H(F_{mx}) = \lim_{m\to\infty} \{H(F^*_{Um}) + \ln|\det C|\},$$
$$H_p(F_x) \geqslant H_p(F_U) + \ln|\det C|.$$

Знак неравенства заменяется равенством, если учесть, что преобразование $X = CU + m$ имеет обратное.

Выполнимость условия 1.3. очевидна.

Из соотношения

$$M_p[EF^*_{x/ym}] = M_p[F_x]$$

вытекают неравенства:

$$H_p(F_x) \geqslant \limsup_{m\to\infty} H(EF_{x/ym}) \geqslant \lim_{m\to\infty} EH(F^*_{x/ym}),$$

$$H_p(F_x) \geqslant EH_p(F_{x/y}),$$

откуда вытекает, что условие 1.4. выполнено. Теорема доказана.

Теорема 2 указывает на возможность получения новых квазиэнтропий при помощи уже существующих.

Теорема 3. *Множество квазиэнтропий выпукло.*

Доказательство опускаем из-за тривиальности проверки выполнимости всех условий квазиэнтропии относительно функционала $\beta H + (1-\beta)H'$ при $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

С точки зрения практического использования, особую роль играют те квазиэнтропии, которые представляются функциями моментов. Ниже мы покажем, что квазиэнтропия, выражаемая функцией моментов до порядка 2, единственна. Однако, такая единственность теряется, если будут учтены моменты более высокого порядка.

§ 2. Разные понятия информации

Квазиинформация определяется через квазиэнтропию следующей формулой

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(XY). \tag{5}$$

Из определения непосредственно следует, что $I(X, Y)$ имеет неотрицательные значения. Если с. векторы независимы, то квазиинформация между ними нулевая; однако, из равенства $I(X, Y) = 0$ не следует независимости X и Y. Иногда, когда в правой части соотношения (5) имеется выражение вида $\infty - \infty$, значение квазиинформации можно найти косвенным путем. Именно, если сл. вектор U выражается п. н. линейным преобразованием невырожденного сл. в. X, то положим:

$$I(U, Y) = I(X, Y).$$

Для квазиэнтропий могут быть определены условные значения при помощи условных ф. р. Итак, обозначим через $H_y(X)$

условную квазиэнтропию X при данном Y, и назовем величину

$$I_y(X) = H(X) - H_y(X)$$

условной информацией X при данном Y.

Квазиинформацией порядка α сл. в. X относительно Y называется величина $I_\alpha(X/Y)$, определяемая равенствами:

$$\begin{aligned} I_\alpha(X/Y) &= -\frac{1}{\alpha}\ln Ee^{-\alpha I_y(X)} \qquad \text{при} \quad \alpha \neq 0, \\ I_\alpha(X/Y) &= EI_y(X) \qquad\qquad\quad \text{при} \quad \alpha = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

если правые части этих равенств вообще имеют смысл. Значениями α могут быть все действительные числа. Определение $I_\alpha(X/Y)$ при $\alpha = 0$ получается из общего выражения путем предельного перехода. Как правило, $I_\alpha(X/Y)$ и $I_\alpha(Y/X)$ отличаются друг от друга. Ниже мы везде предполагаем, что соотношения (3) определяют $I_\alpha(X/Y)$.

Лемма 1. *При фиксированных сл. в. X и Y величина $I_\alpha(X/Y)$ есть невозрастающая функция относительно аргумента α.*

Доказательство. Имея в виду выпуклость функции $|t|^{1+\beta}$ относительно t при $\beta \geqslant 0$, при помощи неравенства Иенсена получим:

$$e^{-\alpha(1+\beta)I_{\alpha(1+\beta)}(X/Y)} = E\,|e^{-\alpha I_y(X)}|^{1+\beta} \geqslant$$
$$\geqslant |Ee^{-\alpha I_y(X)}|^{1+\beta} = e^{-\alpha(1+\beta)I_\alpha(X/Y)},$$
$$\alpha I_{\alpha(1+\beta)}(X/Y) \leqslant \alpha I_\alpha(X/Y),$$

а из последнего неравенства следует утверждение леммы, так как $I_\alpha(X/Y)$ — непрерывная функция относительно α в своей области определения.

Из определения квазиинформации порядка α следует, что при независимости X и Y равенство $I_\alpha(X/Y) = 0$ имеет место при всех α. В общем случае величина $I_\alpha(X/Y)$ может иметь любые конечные или бесконечные значения. Если число α такое, что все величины $I_\alpha(X/Y)$ неотрицательны, то в таком случае независимые пары сл. в. оказываются в некотором смысле граничными относительно значений информации порядка α; для них реализуется минимальное значение соответствующей информации — нуль. Из леммы 1 следует, что такое свойство распространяется и на квазиинформацию более низкого порядка. Такое обстоятельство позволяет нам ввести понятие порядковой функции.

Порядковой функцией квазиэнтропии H называется функция натурального аргумента N, где α пробегает такое множество действительных чисел, что неравенство $I_\alpha(X/Y) \geqslant 0$ удовлетворяется при всех Y и N-мерных сл. в. X

$$\alpha(N) = \sup \alpha.$$

Из определения квазиэнтропии вытекает, что $\alpha(N) \geqslant 0$ (условие 1.4). Другие свойства порядковой функции излагаются в следующих леммах.

Лемма 2. *Пусть H — некоторая квазиэнтропия и $\alpha(N)$ — соответствующая ей порядковая функция. Тогда имеет место неравенство*

$$\frac{1}{M}\alpha(N) \geqslant \alpha(NM),$$

где M и N натуральные числа.

Доказательство. По определению функции $\alpha(N)$ для любого M и $\varepsilon > 0$ найдется такой сл. в. Y и N-мерный сл. в. X, что выполняется неравенство:

$$I_{\alpha(N)+\varepsilon M}(X/Y) < 0.$$

Пусть X_i, $i = 1, 2, \ldots, M$ — такие сл. векторы, которые при всех реализациях сл. в. Y имеют независимые условные распределения, совпадающие с условным распределением X. Теперь составим из этих сл. в. NM-мерный сл. в. $Z = X_1X_2\ldots X_M$ и оценим его энтропию и условную информацию:

$$\begin{aligned} &H(Z) \leqslant H(X_1) + \ldots + H(X_M) = MH(X), \\ &H_y(Z) = H_y(X_1) + \ldots + H_y(X_M) = MH_y(X), \\ &I_y(Z) \leqslant MI_y(X). \end{aligned}$$

Имея в виду равенство (3), получим:

$$I_{\alpha/M}(Z/Y) \leqslant MI_{\alpha}(X/Y),$$

$$I_{\alpha(N)/M+\varepsilon}(Z/Y) \leqslant MI_{\alpha(N)+M\varepsilon}(X/Y) < 0.$$

Так как ε произвольное положительное число, то из полученного неравенства следует, что $\alpha(NM)$ не может превышать величину $\alpha(N)/M$.

Лемма 3. *Порядковая функция любой квазиэнтропии удовлетворяет неравенству:*

$$0 \leqslant \alpha(N) \leqslant \frac{2}{N}.$$

Доказательство. Достаточно установить неравенство $\alpha(1) \leqslant 2$, после чего утверждение леммы следует из леммы 2. Пусть случайные величины второго порядка (одномерные сл. в.) X и Y имеют такое совместное распределение, что условная ф. р. X при заданном Y глауссова со средним значением ноль и дисперсией $|Y|$, а случайная величина $|Y|$ не вырождена в константу. Дисперсия X в данном случае равна $E|Y|$. Учитывая свойства квазиэнтропии, выводим соотношения:

$$H_y(X) = \frac{1}{2}\ln(2\pi e) + \frac{1}{2}\ln|Y|,$$

$$I_y(X) = H(X) - H_y(X) \leqslant \frac{1}{2}\ln E|Y| - \frac{1}{2}\ln|Y|,$$

$$I_\alpha(X/Y) \leqslant -\frac{1}{2}\ln E|Y| - \frac{1}{2}\ln E|Y|^{\alpha/2}.$$

Так как $|Y|$ не вырождена, то функция $\alpha^{-1}\ln E|Y|^{\alpha/2}$ строго возрастает по аргументу α, и, следовательно,

$$I_\alpha(X/Y) < 0, \qquad \text{если } \alpha > 2.$$

Лемма доказана.

Информационный коэффициент корреляции $\varrho(X, Y)$ *и информационное корреляционное отношение* $\eta(X/Y)$ между X и Y определяются следующими равенствами:

$$\varrho(X, Y) = \sqrt{1 - e^{-2I(X,Y)}},$$

$$\eta(X/Y) = \sqrt{1 - e^{-2I_{\alpha(N)}(X/Y)}},$$

где N — число компонент у вектора X.

Величины $\varrho(X, Y)$ и $\eta(X/Y)$ входят в отрезок $[0, 1]$ и равняются нулю для независимых X и Y. Следует напомнить, что информационный коэффициент корреляции введен еще Линфутом для информации Шеннона. Выбранная нами терминология обосновывается результатами следующего параграфа.

При использовании данных выше понятий в качестве характеристик зависимости возникают некоторые трудности. Именно, в случае если квазиэнтропия имеет бесконечные значения, а квазиинформация выражается разностью двух бесконечностей. Чтобы избегать такую ситуацию, было бы разумнее определить понятие информации, не прибегая к понятию квазиэнтропии. Такой подход совершен в теории информации Шеннона. Как поступить в остальных случаях — это решается отдельно в каждой конкретной ситуации.

§ 3. Некоторые примеры

В данном параграфе исследуются два типа квазиинформации. Первый из них связан с понятием корреляции, а другой есть информация Шеннона.

Сначала докажем некоторые вспомогательные неравенства.

Матрица $A = (a_{ik})$ называется *случайной*, если ее элементы — случайные величины. Случайная матрица называется неотрицательно определенной, если она неотрицательно определена п. н. Под средним значением матрицы A подразумевается постоянная матрица (Ea_{ik}), которая в дальнейшем обозначается символом EA.

Лемма 4. *Пусть $A = (a_{ik})$ — неотрицательно определенная матрица порядка n и пусть $A^* = EA$. Тогда матрица A^* неотрицательно определена и имеет место неравенство:*

$$E(\det A)^{1/n} \leqslant (\det A^*)^{1/n}. \qquad (4)$$

Доказательство. Матрица A^*, эрмитова. Поэтому существуют ортогональная матрица C и диагональная матрица D^*, такие, что $C^T A^* C = D^*$.

Учтем, что сл. матрица $C^T AC = D = (d_{ik})$ неотрицательно определена и $ED = D^*$ из-за линейности оператора E. Ввиду того, что диагональные элементы d_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$, неотрицательны почти наверно, все диагональные элементы матрицы D^* неотрицательны и вместе с D^* неотрицательно определена матрица A^*. Как известно, определитель неотрицательно определенной матрицы не превышает произведения ее диагональных элементов, а неравенство Гельдера завершает вывод соотношения:

$$E(\det A)^{1/n} = E(\det D)^{1/n} \leqslant E(d_{11}d_{22}\ldots d_{nn})^{1/n} \leqslant$$
$$\leqslant E^{1/n}d_{11}E^{1/n}d_{22}\ldots E^{1/n}d_{nn} = (\det D^*)^{1/n} = (\det A^*)^{1/n}.$$

Следствие 1. *Если в условиях леммы 4 матрица EA вырождена, то случайная матрица A вырождена почти наверно.*

Следствие 2. *В условиях леммы 4 выполняется неравенство:*

$$\ln \det A^* \geqslant E \ln \det A. \qquad (5)$$

Доказательство следует из неравенства (4) и из неравенства Енсена.

Следствие 3. *Если B и C — действительные неотрицательно определенные матрицы и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то выполняется неравенство Фань Цзы:*

$$\det(\lambda B + (1-\lambda)C) \geqslant (\det B)^{\lambda}(\det C)^{1-\lambda}. \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть случайная матрица A представляется в виде $A = I_\lambda B + (1 - I_\lambda)C$, где I_λ — индикатор некоторого события, вероятность которого равна λ. Условия леммы 4 выполнены и к матрице A применимо неравенство (5), из которого непосредственно вытекает неравенство (6). Другое доказательство этого неравенства можно найти в монографии [1], стр. 95.

Рассмотрим семейство всех квазиэнтропий на множестве $\mathfrak{F}$. Мы докажем, что среди них существует максимальный элемент H_2 такой, что при любой ф. р. F и при любой квазиэнтропии H имеет место неравенство: $H_2(F) \geqslant H(F)$. Квазиэнтропии ф. р. второго порядка ограничены и имеют верхнюю грань, равную

$$H_2(F) = \frac{N}{2}\ln(2\pi e) + \frac{1}{2}\ln\det B, \qquad (7)$$

где B ковариационная матрица ф. р. F. Это следует из теоремы 1. Тот факт, что эта верхняя грань сама является квазиэнтропией, вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. *Квазиэнтропия, которая представляется функцией моментов первого и второго порядка ф. р. F, определяется единственным образом равенством* (7); *если в множестве $M_2(F)$ имеется хотя бы один бесконечный элемент, то значение соответствующей квазиэнтропии равно $+\infty$.*

Доказательство. При доказательстве того, что функционал H_2, данный равенством (7), является квазиэнтропией, мы опускаем его бесконечные значение; при тех значениях условия определения квазиэнтропии выполняются тривиально. Ковариационная матрица $B = (b_{ik})$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ неотрицательно определена и к ней применимо неравенство Беккенбаха

$$\det B \leqslant \det B_{1j} \cdot \det B_{j+1,N},$$

где

$$B_{1j} = (b_{ik}), \qquad i, k = 1, \ldots, j,$$
$$B_{j+1,N} = (b_{ik}) \qquad i, k = j+1, \ldots, N, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N,$$

а из этого следует выполнимость условия 1.1.

Если случайный вектор U имеет ковариационную матрицу B_U и $X = CU + m$, то ковариационная матрица B_x сл. вектора X определяется равенством $B_x = CB_UC^T$ и, следовательно, второе условие определения выполнено. Третье и четвертое условия определения квазиэнтропии выполняются соответственно из-за соотношений (7) и (5). По теореме 1 квазиэнтропия гауссовых сл. в. определяется единственным образом. Однако по моментам первого и второго нельзя различать гауссовых и негауссовых сл. в. поэтому единственность определения распространяется на все распределения. Теорема доказана.

Лемма 5. *Пусть B^* и B обозначают ковариационные матрицы распределения X и условного распределения X при данном Y. Тогда имеет место неравенство:*

$$E(\det B)^{1/N} \leqslant (\det B^*)^{1/N} \qquad (8)$$

где N — размерность сл. в. X.

Доказательство. Обозначим компоненты X через x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ и составим симметричную случайную матрицу $A = (a_{ik})$, $i, k = 0, 1, 2, \ldots, N$, элементы которой определим следующими равенствами:

$$a_{00} = 1,$$
$$a_{0i} = E(X_i/Y),$$
$$a_{ik} = E(X_iX_k/Y), \qquad i, k = 1, \ldots, N.$$

Неотрицательная определенность случайной матрицы A вытекает из неотрицательной определенности ковариационной матрицы $B = (b_{ik})$, и из очевидных соотношений:

$$b_{ik} = a_{ik} - a_{0i} \cdot a_{0k}, \qquad i,\ k = 1,\ \ldots,\ N,$$

вытекает, что соответствующие главные определители матриц A и B равны. В частности, из этого следует, что $\det A = \det B$. Аналогично выводится равенство $\det(EA) = \det B^*$. Не нарушая общности, предположим, что $Ea_{0i} = EX_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, в противном случае мы X предварительно центрируем. Матрицы ковариации B и B^*, как известно, инвариантны относительно сдвига X. Учитывая неотрицательную определенность матрицы A, имеем:

$$\det A \leqslant a_{00} \det A_{1N} = \det A_{1N},$$

где $A_{1N} = (a_{ik},\ i, k = 1, 2, \ldots, N)$ главный минор матрицы A. Учтем, что при сделанных предположениях $EA_{1N} = B^*$, и, применяя к матрице A_{1N} лемму 4, находим

$$E(\det A_{1N})^{1/N} \leqslant (\det EA_{1N})^{1/N},$$

после чего имеем:

$$E(\det B)^{1/N} \leqslant (\det B^*)^{1/N}.$$

Лемма доказана.

Теорема 5. *Порядковая функция квазиэнтропии H_2 выражается равенством:*

$$\alpha(N) = \frac{2}{N}.$$

Доказательство. Пусть Y — любой сл. вектор и X — N-мерный сл. в. второго порядка с регулярной ковариационной матрицей. Для доказательства теоремы достаточно показать, что неравенство

$$I_{2/N}(X/Y) \geqslant 0 \tag{9}$$

удовлетворяется при всех таких X, Y и N. Этим обеспечивается неравенство $\alpha(N) \geqslant 2/N$, а обратное неравенство $\alpha(N) \leqslant 2/N$ следует из леммы (4). Имея в виду соотношения (3) и (7), переформулируем условие (9) следующим образом:

$$-\frac{N}{2} \ln Ee^{-1/N(\ln \det B^* - \ln \det B)} \geqslant 0,$$

где B и B^* обозначают те же матрицы, что и в лемме 5, а затем учтем неравенство (8). Следовательно, соотношение (9) имеет место всегда, когда информация $I_{2/N}(X/Y)$ вообще определена. Теорема доказана.

Обозначим информационные корреляционный коэффициент и корреляционное отношение при заданной квазиэнтропии H_2 через ϱ_2 и η_2, а обобщение дисперсии (определители ковариационных матриц) сл. в. X, Y и XY, и обобщенную дисперсию условного распределения X при данном Y через D_x, D_y, D_{xy} и $D_{x}/_{y}$ соответственно. В силу равенства (7) и теоремы (5) имеем:

$$\varrho_2(X, Y) = \sqrt{1 - \frac{D_{xy}}{D_x D_y}}$$

и

$$\eta_2(X/Y) = \sqrt{1 - \frac{E^N D_{x/y}{}^{1/N}}{D_x}}.$$

Если X одномерный, то величины $\varrho_2(X, Y)$ и $\eta_2(X/Y)$ совпадают со множественными корреляционным коэффициентом и корреляционным отношением. Это обстоятельство оправдывает введенную нами терминологию.

Ниже мы изучим некоторые свойства энтропии и информации Шеннона. Пусть символы F_{ac} и p обозначают соответственно абсолютно непрерывную составляющую и ее функцию плотности ф. р. F. Во всех теоремах, следующих ниже, символом H обозначается энтропия Шеннона.

Теорема 6. *Энтропия Шеннона, определяемая равенствами*

$$\begin{aligned} H(F) &= -\int p(x)\ln p(x)\,dx, && \text{при} \quad \operatorname{var} F_{ac} = 1, \\ H(F) &= -\infty, && \text{при} \quad \operatorname{var} F_{ac} < 1. \end{aligned}$$

является квазиэнтропией на $\mathfrak{F}$.

Все условия определения квазиэнтропии совпадают с известными свойствами энтропии, доказанными еще К. Шенноном в своей фундаментальной работе ([3], стр. 296—298).

По теореме 2 имеется целое множество квазиэнтропий, которые все равны верхней грани энтропии в классе распределений с заданными моментами до порядка $p = 2, 3, 4, \ldots$. Первую из них (при $p = 2$) мы рассмотрели выше. Представление остальных рассмотрено в статье [2] автора. Приступим к изучению некоторых свойств информации Шеннона.

Теорема 7. *Порядковая функция энтропии Шеннона тождественно равна нулю.*

Доказательство. Из известной формулы

$$I(X, Y) = H(X) - EH_y(X)$$

вытекают соотношения

$$I_0(X/Y) = I_0(Y/X) = I(X, Y). \tag{10}$$

Напомним, что функция $\alpha(N)$ неотрицательна. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\alpha(1) = 0$ и затем применить лемму 3. Итак, докажем, что при любом $a > 0$ существует такая ф. р. одномерных сл. в. X и Y, при которой справедливо неравенство:

$$I_\alpha(X/Y) < 0.$$

Определим последовательность функций плотности совместного распределения X и Y следующими условиями

$$p_n(X, Y) = \begin{cases} \frac{3}{8} & \text{при} \quad -1 \leqslant X < 0 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant Y < 1, \\ \frac{1}{8} & \text{при} \quad -1 \leqslant X < 0 \quad \text{и} \quad -1 \leqslant Y < 0, \\ \frac{3}{8n} & \text{при} \quad 0 \leqslant X < n \quad \text{и} \quad -1 \leqslant Y < 0, \\ \frac{1}{8n} & \text{при} \quad 0 \leqslant X < n \quad \text{и} \quad 0 \leqslant Y < 1, \\ 0 & \text{вне указанных областей.} \end{cases}$$

Вычисляя энтропии, получаем

$$H(X) = \frac{1}{2}\ln(4n),$$

$$H_y(X) = \begin{cases} \frac{3}{4}\ln\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\ln(4n) & \text{при} \quad 0 \leqslant Y < 1, \\ \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{3}{4}\ln\frac{4n}{3} & \text{при} \quad -1 \leqslant Y < 1, \end{cases}$$

$$I_\alpha(X/Y) = -\frac{1}{\alpha}\ln\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{4}\ln n\right) + \frac{3}{4}\ln 3 - \ln 2.$$

Отсюда вытекает, что для любого $\alpha > 0$ можно выбрать такое n, что величина $I_\alpha(X/Y)$ станет меньше любого заданного числа и, в частности, нуля.

Следствие. *Информационное корреляционное отношение и информационный корреляционный коэффициент энтропии Шеннона равны.*

Доказательство следует из равенства (10).

Особенно просто выражаются квазиэнтропии гауссовых распределений. По замечанию к теореме 1 все квазиэнтропии гауссовых распределений равны между собой и поэтому к ним применимо равенство (10).

Как известно, условные распределения, полученные из совместного гауссового распределения, также гауссовы с ковариациями, независимыми от значений фиксированных сл. величин. Итак, если сл. в. XY гауссовый, то $H_y(X)$ является постоянной случайной величиной и $I_\alpha(X/Y)$ — постоянной функцией относительно α. Следовательно, какая бы ни была порядковая функция $\alpha(N)$ данной квазиэнтропии, всегда имеют место равенства

$$I_{\alpha(N)}(X/Y) = I_0(X/Y) = I(X, Y),$$

и величины $\eta(X/Y)$, $\varrho(X, Y)$, $\eta(Y/X)$ совпадают. Собственно говоря, при изучении гауссовых распределений понятием квазиэнтропии не вводится ничего нового. Полезность квазиэнтропий и квазиинформаций разных типов может выявляться при подходе к негауссовым распределениям.

Литература

1. Беккенбах Э., Беллман Р., Неравенства. Москва, 1965.
2. Тамместе Р., Вычисление энтропии распределения при помощи моментов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 104—120.
3. Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике. Москва, 1963.

Поступило
25 III 1968

ÜKS INFORMATSIOONI MÕISTE ÜLDISTUS

R. Tammeste

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse ühte võimalust entroopia ja informatsioonihulga mõiste üldistamiseks tõenäosusjaotuste jaoks lõplikudimensionaalsetes eukleidilistes ruumides. Aksiomaatiliselt tuuakse sisse kvaasientroopia, kvaasiinformatsioon, informatsiooniline korrelatsioonikordaja ja informatsiooniline korrelatsioonisuhe. Viimasena nimetatud suurused on juhuslike vektorite sõltuvuse karakteristikuteks ja erijuhul langevad kokku mitmese korrelatsioonikordaja ja korrelatsioonisuhtega.

EINE VERALLGEMEINERUNG DES INFORMATIONSBEGRIFFES

R. Tammeste

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird eine Verallgemeinerungsmöglichkeit von Entropie- und Informationsbegriffen für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in mehrdimensionalen eukleidischen Räumen betrachtet. Quasientropie, Quasiinformation, informatorischer Korrelationskoeffizient und informatorischer Korrelationsquotient werden axiomatisch eingeführt. Zwei letzte Größen sind Charakteristiken für die Abhängigkeit der zufälligen Vektoren und im Sonderfall fallen sie mit dem Korrelationskoeffizient bzw. Korrelationsquotient zusammen.

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

К. Соонетс

Кафедра теоретической механики

1. На базе теории малых упруго-пластических деформаций изучается поведение круговых цилиндрических оболочек под действием равномерного внешнего или внутреннего давления. Равновесные положения считаются осесимметричными. Постановка задачи и геометрически и физически нелинейная. Материал считается нежимаемым.

2. В статье приняты следующие обозначения: l, r, h — соответственно длина, радиус и толщина оболочки; u_ξ, u_φ, u_z — перемещения точек срединной поверхности; ε_ξ, ε_φ, $\varkappa_\xi$ — компоненты деформации и искривление элементов срединной поверхности; e_i, σ_i —интенсивности деформаций и напряжений; λ — параметр упрочнения; e_s — интенсивность деформаций на пределе пропорциональности; p — интенсивность нагрузки; σ_ξ, σ_φ — компоненты напряжения; T_ξ, T_φ, M_ξ — усилия. Геометрия и физические свойства характеризуются параметрами: E — модуль упругости,

$$a = \frac{l^2}{rh}, \quad \mu = \sqrt{3}\, e_s \left(\frac{l}{h}\right)^2.$$

Вводятся и безразмерные величины

$$x = \frac{\xi}{l} \qquad t = \frac{2}{h} w, \qquad w = \frac{u_z}{h}, \qquad u = \frac{l}{h^2} u_\xi,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{l^2}{h^2} \varepsilon_\xi, \qquad \varkappa = \frac{h}{l^2} \varkappa_\xi, \qquad e = \frac{e_i}{e_s}, \qquad \sigma_1 = \frac{3l^2}{2Eh^2} \sigma_\xi,$$

$$T_1 = \frac{bl^2}{Eh^3} T_\xi, \quad T_2 = \frac{bl^2}{Eh^3} T_\varphi, \quad M = \frac{bl^2}{Eh^4} M_\xi,$$

параметр нагрузки $\qquad q = \dfrac{bl^4}{Eh^4} p.$

3. Уравнения равновесия представляются в виде

$$T_\xi = \mathrm{const}, \quad \frac{d^2 M_\xi}{d\xi^2} + \frac{1}{r} T_\varphi + p = 0. \tag{1}$$

Деформационное состояние элементов оболочки определяется зависимостями

$$e_{\xi\xi} = \varepsilon_\xi + z\varkappa_\xi, \quad e_{\varphi\varphi} = \varepsilon_\varphi, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_\xi = \frac{du_\xi}{d\xi} + \frac{1}{2}\left(\frac{du_z}{d\xi}\right)^2, \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{u_z}{r}, \quad \varkappa_\xi = -\frac{d^2 u_z}{d\xi^2}. \tag{3}$$

Напряженное состояние описываем уравнениями

$$\sigma_\xi = \frac{4}{3} E(1-\omega)(e_{\xi\xi} + 0{,}5 e_{\varphi\varphi}), \tag{4}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{4}{3} E(1-\omega)(e_{\varphi\varphi} + 0{,}5 e_{\xi\xi}),$$

где функция пластичности $\omega = 1 - \dfrac{\sigma_i}{e_i}$.

4. Переходим в дифференциальном уравнении равновесия к прогибам. С этой целью вычислим усилия

$$T_1 = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} \sigma_\xi\, dt, \quad T_2 = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} \sigma_\varphi\, dt, \quad M = \frac{h^2}{4}\int_{-1}^{1} \sigma_\xi t\, dt, \tag{5}$$

учитывая зависимости (2)—(4). Граничные поверхности между упругими и пластическими зонами в безразмерных координатах

$$t_1 = t_1(x), \quad t_2 = t_2(x).$$

В безразмерных координатах получим (штрихи обозначают производные по координате x)

$$\begin{aligned} T_1 &= 2R_1 w'' + 2(2-R_0)(2\varepsilon_1 - a w), \\ T_2 &= 0{,}5T_1 - 3(2-R_0) a w, \\ M &= \frac{1}{3}(3R_2 - 2) w'' - R_1(2\varepsilon_1 - a w). \end{aligned} \tag{6}$$

Символами R_i ($i = 1, 2, 3$) обозначены интегралы

$$R_i = \int_{-1}^{t_1} \omega t^i\, dt + \int_{t_2}^{1} \omega t^i\, dt. \tag{7}$$

С помощью формул (6) уравнения равновесия (1) преобразуются к виду

$$w^{\mathrm{IV}} + 9a^2 w - 1{,}5q = 0{,}75aT + 1{,}5[TA'' + (Bw'')'' + 3a^2 R_0 w], \tag{8}$$

где

$$A=\frac{R_1}{2(R_0-2)}, \quad B=R_2-\frac{R_1^2}{R_0-2}.$$

Усилие $T_1=\mathrm{const}$ можно определить из условия, что сближение концов цилиндра имеет заданное значение. В дальнейшем рассматриваются случаи, где, или концы могут свободно сближаться ($T_1=0$), или сближение концов отсутствует полностью. В последнем случае получим уравнение

$$T_1\int_0^1\frac{dx}{2-R_0}=2\int_0^1\left(w'^2-aw-\frac{R_1\varkappa}{2-R_0}\right)dx. \tag{9}$$

5. Определим распределение пластических деформаций по толщине цилиндра. Введем обозначения

$$t_\varepsilon=2\sqrt{\frac{P_\varepsilon}{P_\varkappa}}, \quad t_0=-2\frac{P_{\varepsilon\varkappa}}{P_\varkappa} \quad t_s=\frac{\mu}{\sqrt{P_\varkappa}}, \tag{10}$$

где квадратичные формы, введенные Ильюшиным, имеют для цилиндра вид

$$P_\varepsilon=\varepsilon_\xi^2+\varepsilon_\varphi^2+\varepsilon_\xi\varepsilon_\varphi, \quad P_{\varepsilon\varkappa}=\varepsilon_\xi\varkappa_\xi+0{,}5\varepsilon_\varphi\varkappa_\xi, \quad P_\varkappa=\varkappa_\xi^2.$$

Интенсивность деформаций

$$e_i=\frac{e_s}{t_s}\sqrt{t_\varepsilon^2-2t_0t+t^2}. \tag{11}$$

Граничные поверхности между упругими и пластическими зонами определим из условия текучести $e=e_i:e_s=1$; получим

$$t_{1,2}=t_0\mp\sqrt{t_0^2+t_s^2-t_\varepsilon^2}. \tag{12}$$

Величины t_i $(i=1,2)$ должны удовлетворять условиям $|t_i|\leqslant 1$.

Если вычисления дадут или $t_1<-1$ или $t_2>1$, то следует взять или $t_1=-1$ или $t_2=1$ и у соответствующего края возникнут упругие деформации (если одновременно $t_1=-1$, $t_2=1$, то сечение полностью упругое).

Если $t_0^2+t_s^2-t_\varepsilon^2\leqslant 0$, то все сечения в пластической области и величины t_i выбираются следующим образом

$t_1=t_2=t_0,$ если $|t_0|<1$

$t_1=t_2=-1,$ если $t_0\leqslant -1$ и $t_1=t_2=1$ если $t_0\geqslant 1$.

Зная t_j, можно определить R_i по формуле (7). В общем случае приходится прибегать к численному интегрированию. Но если считать материал линейно упрочняющимся, то

$$\omega=\begin{cases}0 & \text{при} \quad e_i\leqslant e_s,\\ \lambda\left(1-\dfrac{e_s}{e_i}\right) & \text{при} \quad e_i\geqslant e_s,\end{cases}$$

и величины R_i выражаются в элементарных функциях

$$\frac{1}{\lambda}R_0 = 2 + t_1 - t_2 - t_s\Phi,$$

$$\frac{1}{\lambda}R_1 = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2) - t_s[f(t_1) - f(t_2) + f(1) - f(-1) + t_0\Phi], \tag{13}$$

$$\frac{1}{\lambda}R_2 = \frac{1}{3}(2 + t_1^3 - t_2^3) - \frac{1}{2}t_s[(t_1 + 3t_0)f(t_1) - (t_2 + 3t_0)f(t_2) + $$
$$+ (1 + 3t_0)f(1) - (-1 + 3t_0)f(-1) + (3t_0^2 - t_\varepsilon^2)\Phi],$$

где

$$f(t) = \sqrt{t^2 - 2t_0 t + t_\varepsilon^2}, \quad \Phi = \ln\frac{[f(1) + 1 - t_0][f(t_1) + t_1 - t_0]}{[f(-1) - 1 - t_0][f(t_2) + t_2 - t_0]}.$$

Если $|t_0| = |t_\varepsilon|$, то $\Phi = \ln\frac{1 - t_0^2}{(t_2 - t_0)(t_0 - t_1)}$.

6. При чисто упругих деформациях в уравнении (8) выражение в квадратных скобках равняется нулю и получается известное уравнение упругих осесимметричных круговых цилиндрических оболочек. При изучении упруго-пластического поведения оболочки уравнение (8) нелинейное, так как коэффициенты в правой части зависят от функции прогиба w.

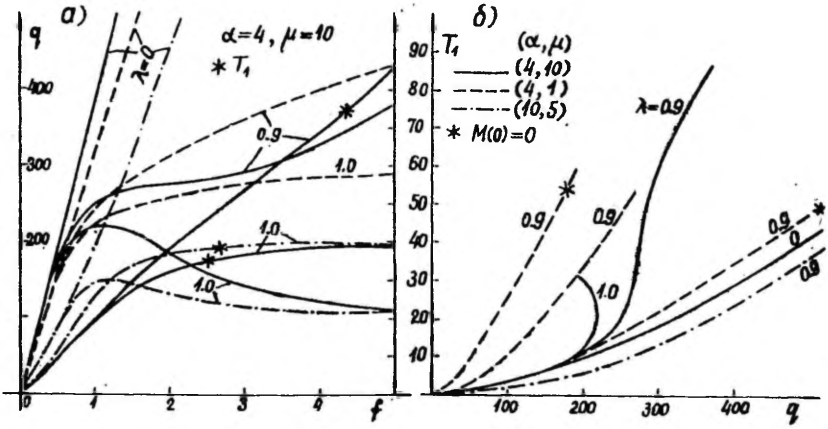


Рис. 1.

Ниже следует использованная схема решения. Рассматривались оболочки под внешним ($q > 0$) и внутренним давлением 1) с жестко-заделанными и 2) шарнирно опертыми краями. Для решения уравнения (8) применялся метод конечных разностей. Участок [0, 1] был разбит на $2n$ частей с шагом $\Delta = 1 : (2n)$. Благодаря симметрии достаточно рассмотреть участок [0; 0,5]. Уравнение (8) заменилось системой

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + 3(2 + 3\alpha^2\Delta^4)w_i - 4w_{i+1} - 1{,}5\Delta^4 q = F_i \tag{14}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где F_i означает правую часть уравнения (8) в узле i. Для получения нулевого приближения было принято $F_i = 0$ (т. е. оболочка в упругом состоянии и $T = 0$). В дальнейшем при нахождении приближений $w_i^{(k+1)}$ в правые части подставлялись приближения $w_i^{(k)}$. После решения системы (14) находим из условия (9) усилие T путем численного интегрирования, затем с помощью формул (10), (12) и (13) величины, характеризующие упруго-пластическое состояние оболочки.

Для решения системы (14) была применена одна разновидность метода исключения

$$w_j = k_j w_{j+1} + l_j w_{j+2} + n_j \Delta^4 q + m_j \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (15)$$

где

$$\begin{aligned} k_j &= l_j[l_{j-1}(k_{j-2} - 4) - 4], \\ l_j &= -[k_{j-1}(k_{j-2} - 4) + l_{j-2} + 3(2 + 3\alpha^2\Delta^4)]^{-1}, \\ m_j &= l_j[m_{j-1}(k_{j-2} - 4) + m_{j-2} - F_j], \\ n_j &= l_j[n_{j-1}(k_{j-2} - 4) + n_{j-2} - 1{,}5], \\ &(j = 2, 3, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

Коэффициенты с порядковым номером 0 и 1 определяются из краевых условий и уравнения (14) в узле $j = 1$. Из (14) для узлов $j = n - 1$ и $j = n$ при заданном условии $w_n = f$ находим w_{n-1} и параметр нагрузки q. Затем по (15) вычисляются все w_j.

Итерационный процесс решения (14) при фиксированном $w_n = f$ продолжался до тех пор, пока $|w_j^{(k+1)} - w_j^{(k)}| < 0{,}001$ и $|1 - q^{(k+1)}/q^{(k)}| < 0{,}001$.

При переходе к следующему значению прогиба в центре $w_n = f + \Delta f$ были приняты за начальные значения необходимых величин результаты при предыдущем шаге $w_n = f$. Это является видоизмененной формой метода упругих решений. Благодаря использованному приему, значительно сокращалось число итераций для достижения заданной точности. Оно колебалось в пределах 2—4 при шаге $\Delta f = 0{,}1$ и достигало иногда 7—10 при шаге $\Delta f = 1$.

7. Численный расчет был проведён для оболочек с разными параметрами.

На рис. 1а приведены зависимости внутреннего давления q и осевого усилия T_1 (линии обозначены звездочкой) от прогиба на середине f для оболочки с параметрами $\alpha = 4$, $\mu = 10$. Сплошные линии соответствуют жесткой заделке с неперемещающимися краями, прерывные линии — жесткая заделка и $T_1 = 0$, пунктирные линии — шарнирное опирание без сближения краев. При значении $\lambda = 0$ имеем упругое решение. Некоторые характерные кривые зависимости осевого усилия T_1 от нагрузки q даны на рис. 1б. Влияние упрочнения сказывается тем сильнее, чем больше в оболочке распространяются пластические зоны. С ростом пластических деформаций при идеально пластическом материале влияние вида закрепления краев уменьшается. При $\lambda = 1$ с момента возникновения чисто пластического сечения на середине оболочки начинается уменьшение нагрузки с незначительным ростом осевого усилия. Если сближение краев не ограничено, то максимальная нагрузка достигается значительно позже, причем с определенного значения нагрузки происходит рост прогибов почти при постоянной нагрузке.

При несмещающихся краях возникают пластические зоны обычно впервые у одной поверхности оболочки, затем появляется и вторая зона. При $T_1 = 0$ распределение пластических зон относительно срединной поверхности симметричное [1]. Жесткая заделка обуславливает появление первичных пластических зон у краев. Затем возникают пластические зоны и на середине, причём они распространяются в сторону краев значительно быстрее, чем от края к середине. Чисто пластические сечения появляются на середине раньше, чем на концах [2].

У шарнирно-опертых оболочек достигается предел текучести сначала в серединных сечениях и пластические зоны распространяются довольно быстро по длине и глубине оболочки, охватывая серединное сечение полностью до того, как и у края вообще возникает пластический режим.

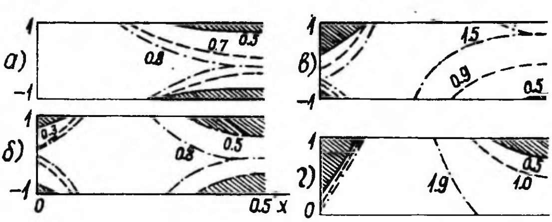


Рис. 2

Под внутренним давлением распределение пластических зон относительно срединной поверхности явно несимметричное (кроме случая $T_1 = 0$), под внешним давлением близкое к симметричному. На рис. 2 видно распространение пластических зон в глубину оболочки. Варианты а (шарнирное закрепление) и б (жесткая заделка) соответствуют оболочке с параметрами $\lambda = 1$, $\alpha = 4$, $\mu = 5$ при внешнем давлении. Линиям раздела упругой и пластической зон приписаны значения прогиба в центре. Следующие варианты для оболочки с $\alpha = 4$, $\mu = 10$ при $\lambda = 1$ в случае внутреннего давления при жесткой заделке. Схема г соответствует случаю $T_1 = 0$ и показана только половина оболочки по высоте. Заштриховка показывает, откуда начинается распространение пластических областей.

В таблице 1 приведены для сравнения значения интенсивности деформаций при некоторых прогибах для оболочки с параметрами $\alpha = 4$, $\mu = 10$ (жесткая заделка). В левой части данные в случае внутреннего давления, в правой части — случай внешнего давления. В верхнем ряду у каждого значения f интенсивность деформаций на внешней поверхности.

У материалов, не обладающих упрочнением, начинается уменьшение максимального изгибающего момента до того, как достигается максимальная нагрузка (при жесткой заделке $M_1(0)$ и шарнирном опирании $M_1(0.5)$. При жестко заделанных свободно перемещающихся краях $M_{1\max}$ достигает определенного предела и почти не меняется в ходе увеличения нагрузки. С увеличением длины оболочки все больше сказывается влияние краевого эффекта на распределение $M_1(x)$. В случае шарнирного закрепления концов у длинных оболочек достигается максимальный изгибающий момент до середины оболочки.

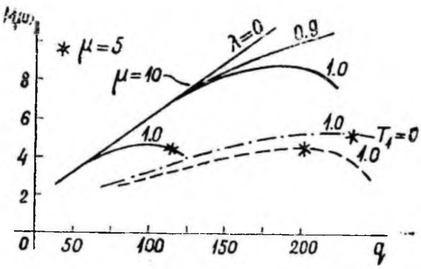


Рис. 3

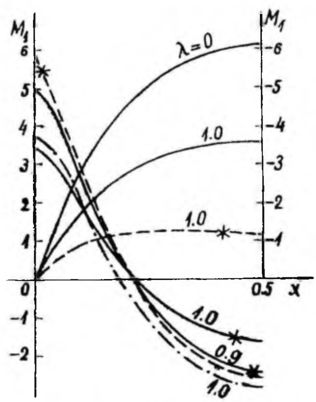


Рис. 4

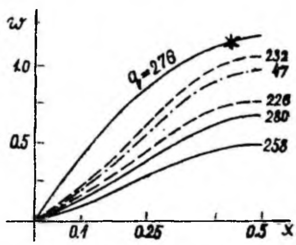


Рис. 5

На рис. 3 сплошные линии соответствуют оболочке с параметром $\alpha = 4$, пунктир и прерывистая линия — $\alpha = 10$. Звездочками отмечены линии, где $\mu = 5$; линиям без звездочки соответствует $\mu = 10$. Пунктиром отмечен случай $T_1 = 0$. Все кривые относятся к оболочкам под внутренним давлением при жестко заделанных концах.

Кривые на рис. 4 описывают распределение $M_1(x)$ по длине оболочки в случае внутреннего давления. Звездочками обозначены кривые для оболочки с параметрами $\alpha = 10$, $\mu = 5$. В случае жесткой заделки ($f = 0{,}9$) пунктиром нарисован график для оболочки $\alpha = 4$, $\mu = 5$, прерывистой линией распределение момента при условии $T_1 = 0$. Восходящие графики описывают распределение момента для шарнирно опертых оболочек ($T_1 \neq 0$) при стреле прогиба $f = 1{,}0$. Сплошные линии соответствуют варианту $\alpha = 4$, $\mu = 10$. Разница в распределении $M_1(x)$ и $T_1(x)$ при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0{,}9$ не существенна, пока интенсивности деформаций не различаются больше чем в 1,5—2 раза. Неупрочняющиеся оболочки с значительными прогибами все больше приближаются к безмоментному состоянию

Рисунок 5 описывает изменение прогиба оболочки под внутренним давлением. Сплошные линии отвечают параметрам $\lambda = 0{,}9$, $\alpha = 1{,}0$, $\mu = 5$. Звездочкой отмечена кривая прогиба при шарнирном закреплении концов ($T_1 \neq 0$). Прерывистые линии являются линиями прогиба при $\lambda = 1$, $\alpha = 10$, $\mu = 5$, причем нижняя отвечает жесткой заделке со свободно сближающимися краями. Пунктиром отмечен прогиб для оболочки с параметрами $\lambda = 1$, $\alpha = 10$, $\mu = 1$. Кривым приписаны значения нагрузки.

У жестко заделанных оболочек с неперемещающимися концами была отмечена некоторая разгрузка у края при очень развитых пластических деформациях. Если $\lambda = 1$, то разгрузка началась после достижения максимальной нагрузки, при $\lambda = 0{,}9$ во время уменьшения интенсивности деформаций рост нагрузки почти прекратился. При продолжающемся деформировании

Таблица 1

f	$e = e_i : e_s$							
	$\lambda = 1{,}0$		$\lambda = 0{,}9$		$\lambda = 0{,}9$		$\lambda = 1$	
	$x = 0$	$x = 0{,}5$	$x = 0$	$x = 0{,}5$	$x = 0$	$x = 0{,}5$	$x = 0$	$x = 0{,}5$
0,3	1,09	0,41	1,09	0,41	0,99	0,53	0,99	0,49
	0,87	0,61	0,87	0,61	0,95	0,53	0,95	0,53
0,5	2,08	0,64	2,04	0,65	2,05	0,83	1,88	0,84
	1,48	1,05	1,47	1,06	2,08	0,82	1,91	0,83
0,7	5.22	0,81	4,32	0,83	3,92	1,16	3,39	1,19
	2,84	1,51	2,56	1,53	4,35	1,05	3,73	1,06
1,0	10,48	1,02	7.06	1,04	6,46	1,87	5,03	1,94
	4,07	2,46	3,45	2,49	8,53	1,40	6,51	1,44
1,3	15,98	1,13	9,02	1,17	8.05	2,81	6,11	2,88
	4,38	3,61	3,65	3,56	13,21	1,70	8,85	1,74
1,5	19,47	1,18	10,04	1,22				
	4,17	4,46	3.56	4,29				
				1,41				
2,0	28,97	1,39	11,62	6,09				
	3,06	6,77	3.00	2,29				
3,0	38,44	3,06	16,85	10,33				
	2,72	12,08	2,63					

снова началось возрастание интенсивности деформаций. Так как разгрузка происходит в ограниченной области у края, то можно полагать, что неучет разгрузки причиняет несущественную ошибку.

В таблице 1 те значения прогиба подчеркнуты, где происходит уменьшение интенсивности деформаций.

Литература

1. Ширко И. В., Упруго-пластический изгиб цилиндрической оболочки. Прикл. механика, 1968, 4, № 12, 66—74.
2. Lee, S. D., On the axisymmetric collapse of cylindrical shells under external hydrostatic pressure. Chalmers Texniska Högskolas Handlingar. 1967, No 314, 19—45.

Поступило
15 I 1969

RINGSILINDRILISE KOORIKU TELGSÜMMEETRILISEST ELASTSEST-PLASTSEST PAINDEST

K. Soonets

Resümee

Uuritakse lõpliku pikkusega silindrilise kooriku käitumist ühtlase sise- või välisrõhu mõjul. Silindri otsad on kinnitatud kas šarniirselt või jäigalt.

Lähtutakse deformatsiooniteooria põhivõrrandeist, koormuse langust ei arvestata, materjal loetakse kas ideaalselt plastseks või lineaarselt kalestuvaks. Saadud mittelineaarne diferentsiaalvõrrand lahendatakse lõplike vahede meetodil, kusjuures süsteemi kordajad leitakse järkjärgulise lähendamise teel.

On määratud kooriku läbipainde w, pikijõu T_1 ja koormusparameetri q seos, samuti on leitud ringjõu T_2, paindemomendi M_1 jaotus. On uuritud plastsete deformatsioonide ja normaalpingete jaotust silindris.

Arvutused on tehtud TRÜ arvutil «Ural 4».

ELASTISCH-PLASTISCHE BIEGUNG DER KREISZYLINDERSCHALEN

K. Soonets

Zusammenfassung

Es wird die Durchbiegung der Kreiszylinderschalen im Falle einer gleichmässigen inneren oder äusseren Druckwirkung betrachtet. Die Enden der Schale sind entweder fest eingespannt oder frei aufgestützt. Als Grundlage werden die Hauptgleichungen der kleinen elastisch-plastischen Deformationen für das idealplastische Material, bzw. für das Material mit linearer Verfestigung genommen. Die Deformationen werden nur als aktive gehalten.

Die erhaltene Differentialgleichung vierter Ordnung wird mit Hilfe des Differenzverfahrens und Iterationverfahrens gelöst. Es wird die Verteilung der Normaldeformationen, des Biegungsmoments und plastischen Gebiete bestimmt. Es wird auch die Wirkung der Verfestigung betrachtet.

Die Berechnungen wurden auf der Rechenmaschine «Ural 4» der Tartuer Staatlichen Universität durchgeführt.

КРУГЛАЯ ПОДКРЕПЛЕННАЯ ПЛАСТИНА С ЖЕСТКОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ВТУЛКОЙ ИЗ ПЛАСТИЧЕСКИ-УПРУГО-ВЯЗКОГО МАТЕРИАЛА

И. Вайникко

Кафедра теоретической механики

В настоящей работе рассматривается деформирование круглых подкрепленных пластин из пластически-упруго-вязкого материала [1]. Найдены общие зависимости между обобщенными усилиями и главными скоростями деформаций для различных видов подкрепления. В качестве примера решена задача о деформировании круглой пластины с жесткой центральной втулкой.

1. Для повышения прочности круглых пластин их усиливают радиальными ребрами, которые делят пластину на равномерные секторы, и кольцевыми ребрами, расположенными на равных расстояниях. Считается, что число подкрепляющих элементов достаточно велико, как это предложено в работе [2].

Рассмотрим три типа подкрепленных пластин:

1) двухслойные, в которых ребра соединяют два тонких листа обшивки;

2) однослойные симметрично подкрепленные, имеющие один лист обшивки и расположенные симметрично относительно срединной поверхности его ребра;

3) однослойные несимметрично подкрепленные, имеющие лист обшивки, подкрепленный с одной стороны ребрами.

Предполагаем, что подкрепляющие элементы имеют вид брусьев прямоугольного поперечного сечения. При этом ребра расположены весьма часто, так что, если вырежем малый элемент пластинки $drds$, то на него приходятся одно ребро в радиальном направлении с площадью поперечного сечения $\omega_1 Hds$ и одно ребро в кольцевом направлении с площадью $\omega_2 Hdr$, где $\omega_1 = d_1/ds$, $\omega_2 = d_2/ds$, d_i — ширина ребра, H — его высота, $(i = 1, 2)$.

Для исследования напряженного состояния, считаем, что нагрузка и условия опирания приняты осесимметричными, а толщина обшивки мала по сравнению с ее радиусом. Таким образом, поле напряжений в обшивке будет двумерным и, если пользоваться первоначально условием пластичности Треска, имеем для пластически-упруго-вязкого материала условие

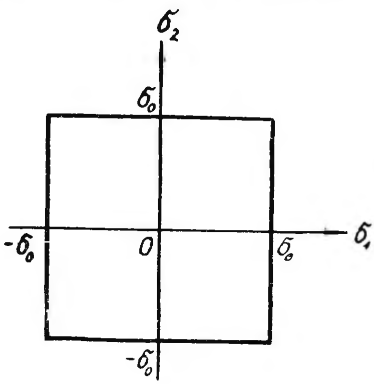
$$\max|(\sigma_i-\sigma_j)-\alpha(s_i-s_j)|=\sigma_0 \qquad (i\neq j;\ i,\ j=1,2,3)$$
$$\sigma_3=0, \qquad s_1+s_2+s_3=0, \tag{1}$$

где

$$s_i=[c\int_0^t \varepsilon_i\exp(\lambda\tau)\,d\tau+s_i^0]\exp(-\lambda t).$$

Здесь σ_0 — предел текучести материала при простом растяжении, σ_i — главные напряжения, ε_i — главные скорости деформаций, s_i — соответствующие микронапряжения; λ — отношение коэффициента жесткости c на коэффициент вязкости μ, $\alpha=1$ (при $\alpha=0$ имеем дело с идеально-пластическим материалом).

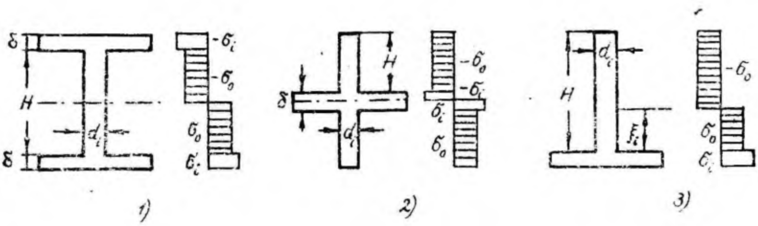
Предполагаем, что ребра из жестко-пластического материала и подчиняются кусочно-линейному условию пластичности (фиг. 1). Так как упругими деформациями пренебрегаем, то



Фиг. 1

часть пластинки, в которой не выполняется условие пластичности (1), следует считать жесткой. Но пластическое деформирование обшивки возможно лишь после того, как все ребра какого-либо одного или обоих направлений перейдут в пластическое состояние.

Предположим, что напряжения по толщине обшивки распределены равномерно или кусочно-постоянно (для однослойной несимметрично подкрепленной пластинки). Вырежем в продольном или поперечном направлении пластинки полоску с одним подкрепляющим ребром. Согласно принятым гипотезам, эпюры напряжений в поперечном сечении подкрепленных пластин будут иметь вид, изображенный на фиг. 2.



Фиг. 2

Найдем изгибающие моменты M_1 и M_2 по формулам

$$M_1 = \int \sigma_1 z\, dz, \qquad M_2 = \int \sigma_2 z\, dz, \tag{2}$$

где интегрирование проводится по всей пластине. Учитывая, что σ_1 и σ_2 должны удовлетворять условию пластичности (1), а главные скорости деформаций для круглой пластины связаны с главными скоростями кривизн $\dot{\varkappa}_1$ и $\dot{\varkappa}_2$ соотношениями

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varkappa}_1 z, \qquad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varkappa}_2 z, \tag{3}$$

где z — расстояние слоя до срединной поверхности, получим условие текучести в следующем виде:

1) для двухслойной пластинки [1]

$$\max \left| M_i - \frac{a\zeta_i}{12}\left[(H+2\delta)^3 - H^3\right] - M_j + \frac{a\zeta_j}{12}\left[(H+2\delta)^3 - H^3\right]\right| = \sigma_0\left[\frac{H^3}{4}(\omega_i - \omega_j) + (H\delta + \delta^2)\right], \tag{4}$$

$$i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad M_3 = 0; \quad \zeta_3 = -\zeta_1 - \zeta_2, \quad \omega_3 = 0;$$

2) для однослойной симметрично подкрепленной пластинки [1]

$$\max \left| M_i - \frac{a\delta^3}{12}\zeta_i - M_j + \frac{a\delta^3}{12}\zeta_j \right| = \sigma_0\left[\frac{\delta^2}{4} + (\omega_i - \omega_j)(H^2 + H\delta)\right], \tag{5}$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad M_3 = 0, \quad \zeta_3 = -\zeta_1 - \zeta_2, \quad \omega_3 = 0.$$

3) для однослойной несимметрично подкрепленной пластинки [1]

$$\max \left| M_i - \frac{a\zeta_i}{3}\left[(\xi+\delta)^3 - \xi^3\right] - M_j + \frac{a\zeta_j}{3}\left[(\xi+\delta)^3 - \xi^3\right]\right| = \sigma_0\left\{\frac{\delta}{2}(\delta + 2\xi) + \frac{\omega_i - \omega_j}{2}\left[2\xi^2 + H(H - 2\xi)\right]\right\} \tag{6}$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad M_3 = 0, \quad \zeta_3 = -\zeta_1 - \zeta_2, \quad \omega_3 = 0,$$

[1] В правой части равенства следует брать ту пару индексов i и j, на которой в левой части достигается максимум.

где ξ расстояние нейтральной поверхности от обшивки, M_i в случаях 1) и 2) — моменты относительно срединной поверхности подкрепленных пластин, а в случае 3) — моменты относительно нейтральной поверхности.

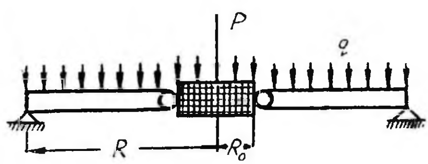
Из условия пластичности для однослойной несимметрично подкрепленной пластины (6) можно исключить расстояние нейтральной поверхности от обшивки ξ, если учитывать, что ξ удовлетворяет уравнению

$$\sigma_i\delta - \omega_i\sigma_0(H - 2\xi) = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Но так как напряжения σ_1 и σ_2 зависят от времени, то зависит от времени и ξ. Этот факт усложняет решения задач такого типа.

Заметим, что если в (4)—(6) положить $\alpha = 0$, приходим к результатам, полученным в работе [2]. Найденные зависимости для двухслойных подкрепленных пластин (4) и для однослойных симметрично подкрепленных пластин при $\omega_1 = \omega_2 = 0$ сводятся к зависимостям для гладких пластин. Полагая один из параметров $\omega_i = 0$, будем иметь случай пластинки, подкрепленной ребрами в одном направлении.

2. Рассмотрим двухслойную покрепленную или однослойную симметрично подкрепленную круглую, свободно опертую пластину с жесткой центральной втулкой, нагрузка на которую имеет вид, изображенный на фиг. 3. Пусть q — интенсивность



Фиг. 3

равномерно распределенной нагрузки, P — нагрузка, приложенная в центр втулки. Введем обозначения

$$\varrho = \frac{r}{R}, \quad \varrho_0 = \frac{R_0}{R}, \quad p = \frac{4qR^2}{\sigma_0\delta^2}, \quad S_{\varrho_0} = \frac{2P}{\pi\sigma_0\delta^2} + \frac{p\varrho_0^2}{2},$$

$$m_i = \frac{4M_i}{\sigma_0\delta^2}, \quad h = \frac{H}{\delta}, \quad \dot{k}_i = \dot{\varkappa}_i R \qquad (i = 1, 2).$$

(см. также фиг. 2, 3).

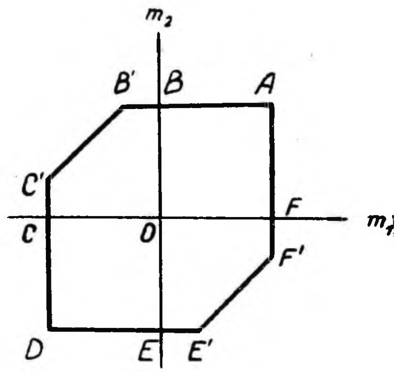
Уравнение равновесия для круглой пластинки при такой нагрузке имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}(\varrho m_1) - m_2 = -\frac{p}{2}(\varrho^2 - \varrho_0^2) - S_{\varrho_0}. \qquad \textbf{(7)}$$

Для безразмерных скоростей кривизн в данном случае справедливы соотношения

$$\dot{k}_1 = -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \varrho^2}, \qquad \dot{k}_2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varrho}. \tag{8}$$

Условия пластичности для рассматриваемых видов подкрепления даны формулами (4) и (5) (фиг. 4). Так как под влиянием нагрузки рассматриваемого типа m_1 и m_2 по всей пластинке



Фиг. 4

будут положительными, то возможными являются состояния AB или AF (фиг. 4). Предположим, что вся пластина находится в состоянии AB. Условия пластичности (4) и (5) для режима AB примут вид

$$m_2^* = \eta^* + \nu^* \zeta_2, \tag{9}$$

где

$$\zeta_2 = [c \int_0^t \dot{k}_2 \exp(\lambda\tau)\,d\tau + \zeta_2^0]\exp(-\lambda t)$$

звездочкой отмечены величины, которые зависят от вида подкрепления, а именно:

1) для двухслойной подкрепленной пластины

$$\eta^* = h^2\omega_2 + 4(h+1), \qquad \nu^* = \frac{2\delta\alpha}{3\sigma_0 R}[(h+2)^3 - h^3]; \tag{10}$$

2) для однослойной симметрично подкрепленной пластины

$$\eta^* = 1 + 4\omega_2 h(h+1), \qquad \nu^* = \frac{2\delta\alpha}{3\sigma_0 R}. \tag{11}$$

В нашей постановке $\alpha = 1$.

Чтобы определить ζ_2^0, решим в начальный момент времени задачу анизотропного упрочнения. Пусть в момент времени $t = 0$ кривизны следующие:

$$k_1^0 = 0, \qquad k_2^0 = \zeta_2^0.$$

Соотношения (8) (они справедливы и для кривизн) дают прогиб в виде

$$w = w_0 \frac{1-\varrho}{1-\varrho_0}, \tag{12}$$

если $w(\varrho_0) = w_0$, а $w(1) = 0$. Из формул (12) и (8) следует, что

$$\zeta_2 = \frac{w_0}{\varrho(1-\varrho_0)}. \tag{13}$$

По формуле (18) моменты m_2^*, соответствующие двум видам подкреплений, имеют вид

$$m_2^* = \eta^* + \frac{\nu^* w_0^*}{\varrho(1-\varrho_0)}. \tag{14}$$

Подставим (14) в уравнение равновесия (7) и решим полученное дифференциальное уравнение при условии, что $m_1 = 0$ при $\varrho = 1$. Получим момент m_1^* в виде

$$m_1^* = (\eta^* - S_0\varrho_0)\frac{\varrho-1}{\varrho} - \frac{p_0}{6}\left(\varrho^2 - 3\varrho_0^2 - \frac{1-3\varrho_0^2}{\varrho}\right) + \\ + \frac{\nu^* w_0^* \ln\varrho}{\varrho(1-\varrho_0)}, \tag{15}$$

где $S_0 = S(0)$ и $p_0 = p(0)$ в начальный момент времени. С помощью условия, $m_1 = 0$ при $\varrho = \varrho_0$ отсюда находим

$$w_0^* = -\frac{(1-\varrho_0)^2}{\nu^* \ln\varrho_0}\left(\eta^* - S_0\varrho_0 - \frac{p_0}{p_0^{\text{т}}}\right), \tag{16}$$

где

$$p_0^{\text{т}} = \frac{6}{(1-\varrho_0)(1+2\varrho_0)}.$$

При $t > 0$ из ассоциированного закона течения следует, что $\dot{k}_1 = 0$. Из (8) найдем при краевых условиях $\dot{w}(1, t) = 0$ и $\dot{w}(\varrho_0, t) = \dot{w}_1(t)$, что

$$\dot{w} = \dot{w}_1 \frac{1-\varrho}{1-\varrho_0}. \tag{17}$$

Подставив найденную скорость прогиба (17) в соотношение (9) и используя выражение (13) величины ζ_2^0, находим

$$m_2^* = \eta^* + \frac{\nu^* \exp(-\lambda t)}{\varrho(1-\varrho_0)}\left[c\int_0^t \dot{w}_1^*(\tau)\exp(\lambda\tau)d\tau + w_0^*\right]. \tag{18}$$

Решим уравнение равновесия (7), когда момент m_2^* дан в виде (18). При условии $m_1^*(1, t) = 0$ получаем

$$m_1^* = (\eta^* - S\varrho_0)\frac{\varrho-1}{\varrho} - \frac{p}{6}\left(\varrho^2 - 3\varrho_0^2 - \frac{1-3\varrho_0^2}{\varrho}\right) + \\ + \frac{\nu^* \exp(-\lambda t)\ln\varrho}{\varrho(1-\varrho_0)}\left[c\int_0^t \dot{w}_1^*(\tau)\exp(\lambda\tau)d\tau + w_0^*\right]. \tag{19}$$

Из условия $m_1^*(\varrho_0, t) = 0$ найдем функцию $w_1^*(t)$, которая характеризует движение втулки:

1) для двуслойной подкрепленной пластины

$$\dot{w}_1^*(t) = \frac{3\sigma_0 R(1-\varrho_0)^2}{2\delta ac[(h+2)^3 - h^3]\ln\varrho_0}\left\{-\lambda S\varrho_0 - \frac{\partial S\varrho_0}{\partial t} - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{p_0^{\mathrm{T}}}\left(\lambda p + \frac{\partial p}{\partial t}\right) + \lambda[h^2\omega_2 + 4(h+1)]\right\}; \quad (20)$$

2) для однослойной симметрично подкрепленной пластины

$$w_1^*(t) = \frac{3\sigma_0 R(1-\varrho_0)^2}{2\delta ac\ln\varrho_0}\left\{-\lambda S\varrho_0 - \frac{\partial S\varrho_0}{\partial t} - \frac{1}{p_0^{\mathrm{T}}}\left(\lambda p + \frac{\partial p}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left. + \lambda[1 + 4\omega_2 h(h+1)]\right\}. \quad (21)$$

Подставив (16) и (20) или (21) в формулу момента (18) и проведя интегрирование, получим зависимости между моментами и наложенными нагрузками в виде:

1) для двухслойной подкрепленной пластины

$$m_2^* = h^2\omega_2 + 4(h+1) + \frac{1-\varrho_0}{\varrho\ln\varrho_0}\left[h^2\omega_2 + 4(h+1) - S\varrho_0 - \frac{p}{p_0^{\mathrm{T}}}\right]; \quad (22)$$

2) для однослойной симметрично подкрепленной пластины

$$m_2^* = 1 + 4\omega_2 h(h+1) + \frac{1-\varrho_0}{\varrho\ln\varrho_0}\left[1 + 4\omega_2 h(h+1) - S\varrho_0 - \frac{p}{p_0^{\mathrm{T}}}\right]. \quad (23)$$

Аналогичным образом можно переписать формулу (19), учитывая, что в случае 1)

$$c\int_0^t \dot{w}_1^*(\tau)\exp(\lambda\tau)d\tau + w_0^* =$$
$$= \frac{3\sigma_0 R(1-\varrho_0)^2\exp(\lambda t)}{2\delta a[(h+2)^3 - h^3]\ln\varrho_0}\left[h^2\omega_2 + 4(h+1) - S\varrho_0 - \frac{p}{p_0^{\mathrm{T}}}\right], \quad (24)$$

а в случае 2)

$$c\int_0^t \dot{w}_1^*(\tau)\exp(\lambda\tau)d\tau + w_0^* =$$
$$= \frac{3\sigma_0 R(1-\varrho_0)^2\exp(\lambda t)}{2\delta a\ln\varrho_0}\left[1 + 4\omega_2 h(h+1) - S\varrho_0 - \frac{p}{p_0^{\mathrm{T}}}\right]. \quad (25)$$

Найденные зависимости содержат решение гладкой круглой пластины толщины δ с жесткой центральной втулкой, если в случае 2) взять $\omega_2 = 0$:

$$\dot{w}(\varrho, t) = \frac{3\sigma_0 R(1-\varrho_0)(1-\varrho)}{2\delta c \ln \varrho_0} \times$$

$$\times \left[\lambda S_{\varrho_0} - \frac{\partial S_{\varrho_0}}{\partial t} - \frac{1}{p_0^{\text{т}}} \left(\lambda p + \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \lambda \right],$$

$$m_1(\varrho, t) = (1 - S_{\varrho_0}) \frac{\varrho - 1}{\varrho} - \frac{p}{6} \left(\varrho^2 - 3\varrho_0^2 - \frac{1 - 3\varrho_0^2}{\varrho} \right) +$$

$$+ \frac{(1-\varrho_0) \ln \varrho}{\varrho \ln \varrho_0} \left(1 - S_{\varrho_0} - \frac{p}{p_0^{\text{т}}} \right),$$

$$m_2(\varrho, t) = 1 + \frac{1 - \varrho_0}{\varrho \ln \varrho_0} \left(1 - S_{\varrho_0} - \frac{p}{p_0^{\text{т}}} \right).$$

При $\alpha = 0$ получим решение для подкрепленной пластины из жестко-пластического материала.

Литература

1. Вайникко И., О деформировании пластически-упруго-вязких пластин и оболочек. Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1968, 220, 226—235.
2. Немировский Ю. В., Несущая способность круглых подкрепленных пластин. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1963, № 2, 163—167.

Поступило
15 I 1969

PLASTNE-ELASTNE-VISKOOSNE ÜMMARGUNE RIBIDEGA TUGEVDATUD PLAAT JÄIGA SÜDAMIKUGA

I. Vainikko

Resümee

Töös leitakse üldised seosed üldistatud pingete ja deformatsiooni kiiruste vahel ümmarguse plastse-elastse-viskoosse plaadi jaoks. Plaat on tugevdatud ribidega. Näitena on lahendatud ülesanne jäiga südamikuga ümmarguse plaadi deformeerumisest.

THE PLASTIC-ELASTIC-VISCOUS ANNULAR CONFIRMED PLATE WITH RIGID CENTRAL BUSH

I. Vainikko

Summary

In the paper the dependences between generalized stresses and deformation rates for annular plastic-elastic-viscous plates are derived. Plates are confirmed with ribs. As an example the problem of the deformation of an annular plate with a rigid central bush is solved.

О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН II

Э. Вирма

Кафедра теоретической механики

§ 1. Постановка задачи

В данной статье рассматриваются прямоугольные равномерно нагруженные пластины, изготовленные из жестко-пластического материала.

Для определения несущей способности применяются приближенные методы теории предельного равновесия, на основе которых значение несущей способности находится между определенными границами. Нижней границей является такое значение нагрузки, при котором удовлетворены уравнения равновесия пластины, условие текучести и краевые условия.

Если начало координат выбрать в центре пластины и ось направить параллельно большой стороне пластины, то уравнение равновесия принимает вид

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 6p = 0, \tag{1}$$

где

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_0}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_0},$$

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad p = \frac{PL^2}{6M_0},$$

$2L$ — длина пластины,
M_0 — максимальный момент,
P — интенсивность нагрузки.
Условие пластичности Мизеса (см. [1], гл. 10—11) имеет вид

$$m_x + m_y - m_x m_y + 3m^2_{xy} \leqslant 1. \tag{2}$$

Краевые условия для свободно опертой пластины следующие:

$$\begin{aligned} m_y &= 0, \quad \text{если} \quad y = \pm\eta, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ m_x &= 0, \quad \text{если} \quad x = \pm 1, \quad -\eta \leqslant y \leqslant \eta, \end{aligned} \tag{3a}$$

где η — отношение сторон пластины. Вследствие симметрии

$$m_{xy}=0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad -\eta\leqslant y\leqslant \eta, \qquad\qquad \text{и} \quad y=0, \quad -1\leqslant x\leqslant 1. \tag{3b}$$

§ 2. Свободно опертая прямоугольная пластина

Выразим m_x и m_y в виде следующих степенных рядов

$$m_x=\sum_{m=1}^{k} C_m(1-x^{2m}), \qquad m_y=\sum_{n=1}^{l} D_n\left(1-\frac{y^{2n}}{\eta^{2n}}\right), \tag{4}$$

где C_m и D_n пока неизвестные параметры. Подставляя (4) в формулу (1) и учитывая (2) и (3), получим[1] неравенства для определения p:

$$p\leqslant \frac{\sqrt{3}}{9xy}\sqrt{1-m_x^2-m_y^2+m_xm_y}+\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{k} C_m m x^{2m-2}+$$

$$+\frac{1}{3\eta^2}\sum_{n=1}^{l} D_n n\left(\frac{y}{\eta}\right)^{2n-2}=F(x,y,C_m,D_n), \tag{5}$$

$$\sum_{m=1}^{k} C_m\leqslant 1, \qquad \sum_{n=1}^{l} D_n\leqslant 1. \tag{6}$$

Вследствие симметрии рассматривается только первый квадрант пластины, т. е.

$$0\leqslant x\leqslant 1, \qquad 0\leqslant y\leqslant \eta.$$

Итак, расчет нижней оценки сводится к нахождению такой системы параметров C_m и D_n, при которой удовлетворяются соотношения (6) и при которой минимальное значение функции $F(x,y,C_m,D_n)$ достигает максимума, т. е.

$$p^- = \max_{C_m, D_n}\left[\min_{x,y} F(x,y,C_m,D_n)\right], \tag{7}$$

где p^- — нижняя оценка несущей способности.

Поскольку здесь мы имеем сложную функцию многих переменных, применение классических методов связано с большими трудностями. Поэтому проблему целесообразно рассматривать как задачу математического программирования: с помощью соотношений (5) и (6) составить систему ограничений и целевой функцией выбрать переменную p.

Для составления системы ограничений разделим интервалы $[0,1]$ и $[0,\eta]$ на s и t элементарных интервалов

---

[1] Здесь и ниже $f(x,y,C_m,D_n)$ означает
$f(x,y,C_1,C_2 \ldots C_k, D_1, D_2, \ldots D_l)$.

$$0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_s = 1,$$
$$0 = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_t = \eta,$$

и вычислим из формулы (5) значения F при $x = x_i$, $y = y_i$, где $i = 1, 2, \ldots s$, $j = 1, 2, \ldots t$.

Для дальнейшего введем дополнительное условие, по которому минимальное значение функции $F(x, y, C_m, D_n)$ достигается в точке $x = 1$, $y = 0$. Такое допущение обосновано анализом вычислении при $k = l = 2$ и $k = l = 3$. Теперь систему ограничений можно представить в виде

$$F(1, 0, C_m, D_n) - F(x_i, y_j, C_m, D_n) \leqslant 0 \tag{8a}$$
$$(i = 1, 2, \ldots s, \quad j = 1, 2, \ldots t),$$
$$\sum_{m=1}^{k} C_m \leqslant 1, \qquad \sum_{n=1}^{l} D_n \leqslant 1, \tag{8b}$$

т. е. значения функции F в любой точке пластины не могут быть меньше, чем в точке $x = 1$, $y = 0$. Соответствующую задачу можно сформулировать следующим образом: найти

$$p^- = \max_{C_m, D_n} F(1, 0, C_m, D_n),$$

так, чтобы удовлетворялись ограничения (8).

Полученную нелинейную задачу можно приближенно решить методами линейного программирования. Оказывается, что соотношения (8a) принимают вид:

$$L_{ij}(C_m, D_n) \leqslant \varphi_{ij}(C_m, D_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots s, \ j = 1, 2, \ldots t),$$

где функции L_{ij} линейны, функции φ_{ij} нелинейны относительно C_m и D_n. Вычисления показывают, что при достаточно малых изменениях C_m и D_n значения функций φ_{ij} практически постоянны, в то время как функции L_{ij} изменяются сравнительно быстро. Итак, задачу можно решать последовательно: задать какие-либо значения $C^{(0)}{}_m$ и $D^{(0)}{}_n$, которые удовлетворяли бы двум последним неравенствам, и вычислить $\varphi_{ij} = b^{(0)}{}_{ij}$.

Дальше нужно бы решить задачу линейного программирования: найти $\max F(1, 0, C_m, D_n)$ так, чтобы

$$L_{ij}(C_m, D_n) \leqslant b^{(0)}{}_{ij},$$
$$\sum_{m=1}^{k} C_m \leqslant 1, \qquad \sum_{n=1}^{l} D_n \leqslant 1.$$

В результате получаем новые значения $C^{(1)}{}_m$ и $D^{(1)}{}_n$. С помощью функций φ_{ik} и найденных $C^{(1)}{}_m$, $D^{(1)}{}_n$ определяем новые свободные члены $b^{(1)}{}_{ij}$ и решаем новую задачу линейного программирования. Вычисления показывают, что в результате определенного количества шагов свободные члены оказываются практически постоянными. Можно полагать, что полученное таким путем решение является приближенным оптимальным решением задачи нелинейного программирования.

Численный расчет проведен нами для случая, где $k = l = 5$, $s = t = 20$. Для уточнения вычислений в окрестности оптимальной точки длина шага взята еще меньшей.

Возникшую погрешность можно оценить только приближенно. Оказывается, что при малых изменениях параметров C_m и D_n минимальное значение функции F весьма мало изменяется. Достаточно, если определить какую-либо точку

$$(C_1, C_2, \ldots C_k, D_1, D_2, \ldots D_l)$$

в окрестности искомой оптимальной точки. При определенных постоянных значениях параметров имеем дело с определением минимального значения функции двух переменных. Оценка погрешности такой задачи относительно проще.

Результаты вычислений представлены в таблице 1. Для вычисления верхней границы мы применили условие пластичности Мизеса и поле скоростей, предложенное Шуллем и Ху [2].

Таблица 1

η	p^-	p^+	разность в %-ах
0.5	2.287	2.723	8.7
0.6	1.771	2.111	8.8
0.7	1.448	1.726	8.8
0.8	1.232	1.471	8.8
0.9	1.082	1.290	8.8
1.0	0.968	1.155	8.8

§ 3. Свободно опертая квадратная пластина

Для квадратной пластины систему ограничений можно значительно упростить. Так как $\eta = 1$, то, вследствие симметрии $C_m = D_n$, и неравенство (5) преобразуется к виду

$$p \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9xy}\sqrt{1 - m^2_x - m^2_y + m_x m_y} + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{k} C_n n\left(x^{2n-2} + y^{2n-2}\right) =$$

$$= f(x, y, C_n),$$

где

$$m_x = \sum_{n=1}^{k} C_n(1 - x^{2n}), \quad m_y = \sum_{n=1}^{k} C_n(1 - y^{2n})$$

и $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$

Численные результаты для $k = 3, 5, 7$ приведены в таблице 2.

Вычисления показывают, что дальнейшее увеличение числа k, значительно увеличивая объем вычислительной работы, существенно нижней границы не изменяет.

Результаты, полученные здесь, значительно лучше чем в статье автора [3].

Таблица 2

k	p^-	p^+	разность в %-ах
1	0.860	1.155	14,6
3	0.959	1.155	9.3
5	0.968	1.155	8.8
7	0.971	1.155	8.6

Литература

1. Hodge, P. G. Jr., Plastic Analysis of Structures. New York, 1959.
2. Shull, H. E., Hu, L. W., Load-Carrying Capacities of Simply Supported Rectangular Plates. J. Appl. Mech., 1963, **30**, 617—622.
3. Вирма Э., О несущей способности прямоугольных пластинок, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 138—145.

Поступило
24 VI 1968

RISTKÜLIKUKUJULISTE PLAATIDE KANDEVÕIMEST II

E. Virma

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse jäikplastilisest materjalist, ühtlaselt koormatud ristkülikukujulist plaati. Plaadi kandevõime arvutamiseks kasutatakse piirtasakaalu teooria meetodeid [1], kusjuures painutavad momendid antakse ette astmerea kujul. Probleem taandatakse lineaarse planeerimisülesande lahendamisele. On leitud tulemused vabalt toetatud ristkülikukujulise plaadi jaoks, kusjuures saadud kandevõime alumise tõkke väärtused on tunduvalt paremad autori poolt varem saadud tulemustest [3].

ON LOAD-CARRYING CAPACITY OF RECTANGULAR PLATES II

E. Virma

Summary

In the present paper the rectangular plate of rigid plastic material is considered. The plate has been loaded with a uniformly distributed transverse load of intensity P. Using the theory of Limit Analysis [1], the lower bound of the load-carrying capacity for the simply supported rectangular plate has been found. The problem is connected with the theory of linear programming.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОГОЙ КРУГОВОЙ АРКИ

Э. Йыги

Кафедра теоретической механики

Настоящая работа является продолжением статьи [1] и уточняет методику расчета упруго-пластической шарнирно-опертой пологой круговой арки, если арка находится под влиянием равномерной радиальной нагрузки. В статье [1] получены общие уравнения задачи и решена как пример арка с прямоугольным поперечным сечением. Полученные уравнения решены путем сочетания метода Галеркина и метода упругих решений. Как показали вычисления на ЭЦВМ «Урал-4», эта методика не применима в случае, когда в арке возникают первые пластические деформации в ходе нагружения. Чтобы преодолеть эту трудность, пришлось выработать другой метод. Здесь мы предполагаем, что в арке возникает только одна зона пластических деформаций от сжатия. Как показали вычисления, такое условие при первых пластических деформациях выполнено.

Далее используем уравнения и обозначения работы [1]. Например, символ [1.10] означает, что формула (10) взята из работы [1].

На основе [1] определяем ξ_1, где начинается зона пластических деформаций, по формуле

$$\xi_1 = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{12n - k^2}{6\pi^2 w^*_0}. \tag{1}$$

При использовании метода упругих решений в начале появления пластических деформаций получилось, что $12n - k^2 > 6\pi^2 w^*_0$ и, следовательно, метод упругих решений не применим. По новой методике зададим ξ_1, α, λ и n. Из формулы (1) имеем

$$k^2 = 12n - 6\pi^2 w^*_0 \sin \pi\xi_1. \tag{2}$$

Координату z_1^*, определяющую границу упругих и пластических деформаций в данном сечении, можно определить по [1] в виде

$$z^*_1=\frac{2-\lambda}{2\lambda}-\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda^2}-\frac{k^2-12n}{6\lambda\pi^2w^*_0\sin\pi\xi}}\,, \tag{3}$$

а производные по формулам

$$z^{*\prime}_1=\frac{\left[(2-\lambda)z^*_1-\lambda z^{*2}_1-\frac{1}{4}\lambda\right]\pi\cot\pi\xi}{2\lambda z^*_1-2+\lambda}, \tag{4}$$

$$z^{*\prime\prime}_1=\frac{\pi^2\left[\lambda z^{*2}_1-(2-\lambda)z^*_1+\frac{1}{4}\lambda\right]-2\lambda(z^{*\prime}_1)^2}{2\lambda z^*_1-2+\lambda}-2\pi z^{*\prime}_1\cot\pi\xi. \tag{5}$$

Учитывая (2) и (3), выводим

$$z^*_1=\frac{2-\lambda}{2\lambda}-\sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda^2}+\frac{\sin\pi\xi_1}{\lambda\sin\pi\xi}}\,. \tag{6}$$

В арке, где возникает одна зона пластических деформаций $z^*_2=\frac{1}{2}$, $z^{*\prime}_2=z^{*\prime\prime}_2=0$, и из уравнения [1.10] находим

$$q^*=w^*_0\sqrt{3a}\left[\lambda\pi^2\left(\xi_1-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\xi_1-\frac{1}{2}\right)-6\lambda C+\pi^2-k^2\right]+k^2, \tag{7}$$

где

$$C=\int_{\xi_1}^{1/2}\left\{\left[(4z^{*2}_1-1)z^{*\prime\prime}_1+8z^*_1(z^{*\prime}_1)^2-\frac{\pi^2}{3}z^*_1(4z^{*2}_1-3)\right]\sin^2\pi\xi+\right.$$

$$\left.+\pi(4z^{*2}_1-1)z^{*\prime}_1\sin 2\pi\xi\right\}d\xi. \tag{8}$$

На основе таких же условий из [1.11] получаем

$$k^2=\frac{12\lambda B_2-3\pi^2w^*_0\left(\frac{1}{2}w^*_0-\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)}{2B_1+\xi_1}, \tag{9}$$

причем

$$B_1=\int_{\xi_1}^{1/2}\frac{d\xi}{2-\lambda-2\lambda z^*_1}\,,$$

$$B_2=\int_{\xi_1}^{1/2}\frac{2n\left(z^*_1+\frac{1}{2}\right)+\left(z^{*2}_1-\frac{1}{4}\right)w^*_0\pi^2\sin\pi\xi}{2-\lambda-2\lambda z^*_1}d\xi.$$

Имея в виду (2) и (9), выводим

$$w^*_0 = 2D + 2\xi_1 \sin \pi\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3a}} -$$

$$- \sqrt{\left(2D + 2\xi_1 \sin \pi\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{3a}} \right)^2 - \frac{4n}{\pi^2}},$$

где

$$D = \int_{\xi_1}^{1/2} \frac{\sin \pi\xi_1 + \lambda \left(z^{*2}_1 - \frac{1}{4} \right) \sin \pi\xi}{1 - \frac{\lambda}{2} - \lambda z^*_1} d\xi. \qquad (11)$$

После этого находим формулы, дающие возможность определить нагрузку и прогиб, при которых происходит переход из чисто упругого состояния в упруго-пластическое. Для этого в формулы (2), (7) и (10) подставляем $\xi_1 = {}^1/_2$ и получаем

$$\overline{w}^*_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3a}} - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3a}} \right)^2 - \frac{4n}{\pi^2}},$$

$$\overline{k^2} = 6(2n - \pi^2 \overline{w^*_0}),$$

$$\overline{q^*} = \overline{w^*_0}\sqrt{3a}\,(\pi^2 - \overline{k^2}) + \overline{k^2}.$$

Все необходимые зависимости получены и задачу можно решить по следующей схеме. Задаем ξ_1, λ, a и n. Чтобы найти интегралы (8) и (11), вычисляем z_1^* и производные по формулам (4)—(6). Согласно формуле (10), находим w^*_0, из (2) вычисляем k^2, а из (7) получаем q^*. При этом проверяем, выполнено ли условие z_2^* $(1/2) > 1/2$. Этому условию, учитывая [1.8] и [1.9], можно придать вид

$$24\lambda n(n - \pi^2 w^*_0) + \pi^2 w^*_0[k^2 + 12n - 6(1 - \lambda)\pi^2 w^*_0] > 0.$$

Если это условие выполнено, то в арке не возникает зоны пластических деформаций от растяжения.

Таким образом, учитывая последнюю и полученную ранее схемы метода упругих решений [1], мы можем довести решение до конца.

Вычисления проводились на ЭЦВМ «Урал-4». Результаты вычислений для случая $\lambda = 0{,}9$, $a = 0{,}7$ и $n = 2$ представлены на рис. 1 и в таблице 1 (индекс У означает чисто упругое решение, П — упруго-пластическое). Пунктирная кривая здесь (рис. 1) и в дальнейшем соответствует чисто упругому случаю, а сплошная — упруго-пластическому. Изменение пластических зон для случая $\lambda = 0{,}9$, $a = 0{,}7$ можно проследить по табл. 1 при $n = 2$ и по табл. 2 $n = 3$. Влияние изменения n на нагрузку q^*, если $\lambda = 0{,}9$, $a = 0{,}7$, можно проследить на рис. 1, где представлены случаи $n = 2; 3; 4$. При $n = 2$ и $n = 3$ пластическая

Таблица 1

w_0^*	q^*_y	q^*_n	k^2_y	k^2_n	ξ_1	ξ_2	$z^*_1\left(\frac{1}{2}\right)$	$z^*_2\left(\frac{1}{2}\right)$
0,2598	9,089	9,089	8,617	8,617	0,5000	—	—0,5000	—
0,2603	9,099	9,099	8,631	8,631	0,4750	—	—0,4985	—
0,2649	9,178	9,178	8,747	8,747	0,4250	—	—0,4861	—
0,2690	9,247	9,246	8,850	8,849	0,4000	—	—0,4753	—
0,2745	9,336	9,331	8,986	8,983	0,3750	—	—0,4613	—
0,2815	9,443	9,432	9,156	9,149	0,3500	—	—0,4440	—
0,2902	9,567	9,544	9,365	9,348	0,3250	—	—0,4237	—
0,3000	9,714	9,652	9,594	9,562	0,3020	—	—0,4020	—
0,3142	9,860	9,775	9,917	9,851	0,2750	—	—0,3730	—
0,3306	10,02	9,870	10,27	10,16	0,2500	—	—0,3423	—
0,3512	10,18	9,927	10,70	10,49	0,2250	—	—0,3083	—
0,4000	10,60	9,836	11,61	11,12	0,1830	—	—0,2420	—
0,5000	10,74	9,049	13,03	11,74	0,1359	—	—0,1528	—
0,6000	10,39	7,976	13,86	11,68	0,1127	—	—0,1022	—
0,7000	9,809	7,000	14,10	11,08	0,1009	—	—0,0743	—
0,8000	9,253	6,388	13,74	10,04	0,0952	0,3143	—0,0627	0,4439
0,9000	8,980	6,087	12,79	8,710	0,0926	0,2412	—0,0634	0,3869
1,000	9,247	6,241	11,26	7,163	0,0918	0,1924	—0,0725	0,3328
1,100	10,31	6,847	9,124	5,450	0,0919	0,1568	—0,0873	0,2811
1,200	12,43	7,931	6,400	3,604	0,0927	0,1297	—0,1061	0,2316
1,250	13,96	8,662	4,816	2,637	0,0932	0,1185	—0,1167	0,2076
1,300	15,87	9,521	3,084	1,643	0,0938	0,1086	—0,1278	0,1839
1,350	18,16	10,51	1,204	0,6251	0,0944	0,0997	—0,1395	0,1607

Таблица 2

w_0^*	ξ_1	ξ_2	$z^*_1\left(\frac{1}{2}\right)$	$z^*_2\left(\frac{1}{2}\right)$
0,4256	0,4000	—	—0,4753	—
0,4642	0,3250	—	—0,4237	—
0,5866	0,2250	—	—0,3082	—
0,6478	0,2000	—	—0,2701	—
0,7443	0,1750	—	—0,2280	—
0,9250	0,1532	0,3704	—0,1881	0,4691
0,9500	0,1517	0,3426	—0,1859	0,4540
0,9750	0,1504	0,3196	—0,1843	0,4392
1,000	0,1493	0,2999	—0,1834	0,4245
1,025	0,1483	0,2825	—0,1831	0,4100
1,050	0,1475	0,2670	—0,1833	0,3957
1,075	0,1469	0,2529	—0,1839	0,3816
1,100	0,1463	0,2400	—0,1851	0,3676
1,125	0,1459	0,2282	—0,1866	0,3538
1,150	0,1455	0,2173	—0,1885	0,3401
1,175	0,1452	0,2071	—0,1908	0,3266
1,200	0,1450	0,1977	—0,1935	0,3131
1,225	0,1449	0,1889	—0,1964	0,2999
1,250	0,1448	0,1807	—0,1996	0,2867
1,275	0,1448	0,1729	—0,2030	0,2737
1,300	0,1448	0,1657	—0,2068	0,2068
1,325	0,1449	0,1589	—0,2108	0,2480

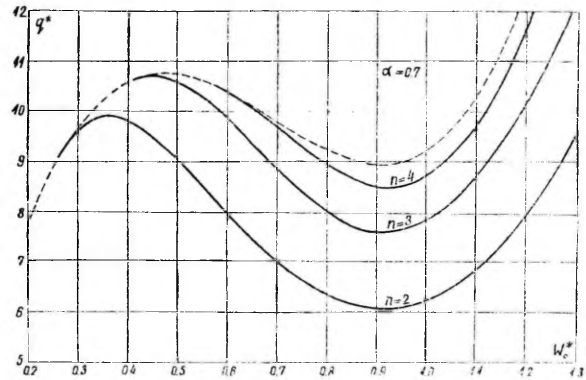


Рис. 1

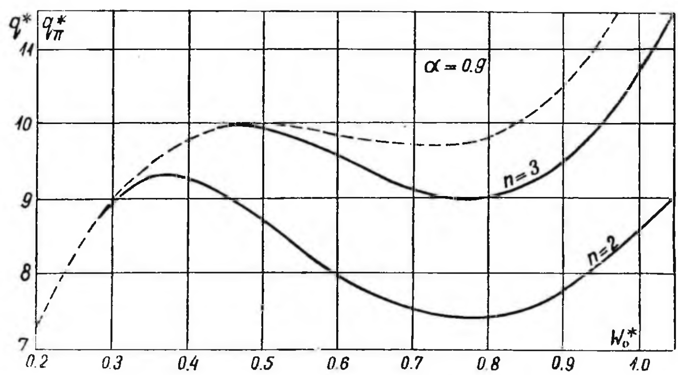


Рис. 2

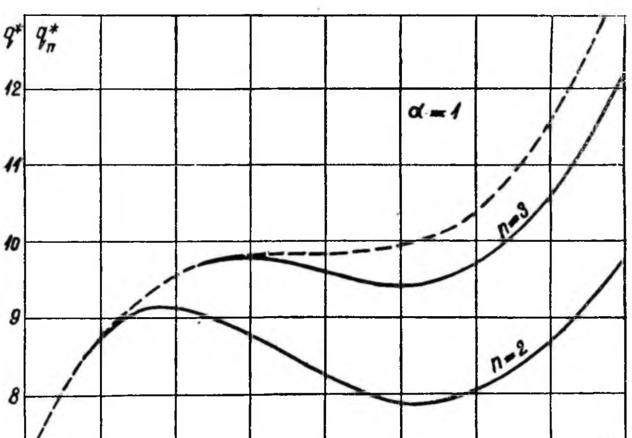


Рис. 3

зона от сжатия появляется уже до достижения верхней критической нагрузки упругой арки. С увеличением n пластические деформации появляются позднее, а при $n = 4$ — в области неустойчивого равновесия арки. Утверждение статьи [1], что зависимость $q^*_п = q^*_п(w^*_0)$ неоднозначная, неверно. Это показали контрольные вычисления на «Урал-4».

Для случая $\lambda = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}9$ зависимость между w^*_0 и $q^*_п$ показана на рис. 2; а для $\lambda = 0{,}9$, $\alpha = 1$ — на рис. 3. При чисто упругих деформациях прощелкивание не имеет места если $\alpha = 1$, но при упруго-пластических деформациях это явление наблюдается.

На основе вычислений мы вправе утверждать, что арка не теряет несущей способности, поскольку влияние пластических деформаций стесняется примыкающим упругим материалом. Ввиду упругой зоны при упругопластических деформациях имеет место явление прощелкивания. Деформации при этом имеют порядок упругих. Пластическая область зависит от геометрии арки и качества материала.

Литература

1. Йыги Э., Симметричная деформация упруго-пластической пологой круговой арки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 231—238.

Поступило
29 V 1968

ELASTSE-PLASTSE LAMEDA RINGKAARE UURIMISEST

E. Jõgi

Resümee

Käesolevas artiklis lihtsustatakse töös [1] esitatud vabalt toetatud elastse-plastse lameda ringkaare arvutamise metoodikat juhul, kui kaare ristlõikes tekib ainult üks plastsete deformatsioonide piirkond. Tuletatakse valemid, mis võimaldavad leida läbipainet ja koormust, mille puhul tekivad kaares esimesed plastsed deformatsioonid.

ÜBER DIE BETRACHTUNG EINES SCHWACH GEKRÜMMTEN ELASTISCHPLASTISCHEN STABES

E. Jõgi

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird die Methode für die Berechnung eines schwach gekrümmten kreisförmigen Stabes, die in der Arbeit [1] behandelt ist, vereinfacht, wenn im Stab nur eine Zone der plastischen Deformationen entsteht. Es werden die Formeln gegeben, aus denen die Durchbiegung und die Last berechnet werden können für den Fall, wo die plastischen Deformationen im gelenkig gelagerten Stab beginnen.

СОДЕРЖАНИЕ -- SISUKORD

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
IX

На русском языке. Резюме на
эстонском, английском и немецком языках
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Ответственный редактор С. Барон
Корректоры Л. Аболдуева, Э. Оя, О. Мутт,
Г. Кондас и Л. Отсмаа

Сдано в набор 4/III 1969 г. Подписано к печати 29/IX 1970 г. Бумага фабрики «Кохила». типографская № 2, 60 × 90. 1/16. Печ. листов 23,0. Учетн.-издат. листов 27,8. Тираж 500 экз. МВ 08164. Зак. № 1596.

Типография им. Ханса Хейдеманна.
ЭССР, г. Тарту. ул. Юликооли, 17/19 II

Цена 1 руб. 95 коп.

2—2

1 руб. 95 коп.