Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Jaan Kristjan Kaasik

Lipschitzi-vaba ruumi peaaegu ruudu omadused

Matemaatika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Andre Ostrak

Tartu 2022

Lipschitzi-vaba ruumi peaaegu ruudu omadused

Magistritöö
Jaan Kristjan Kaasik

Lühikokkuvõte. Magistritöös tõestatakse, et Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on lokaalse peaaegu ruudu omadusega parajasti siis, kui meetriline ruum M on liinkaugusega ruum. Lisaks näidatakse, et mittetriviaalne Lipschitzi-vaba ruum ei ole peaaegu ruudu omadusega.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: funktsionaalanalüüs, Banachi ruumid, meetrilised ruumid, normeeritud ruumid, mittelineaarsed operaatorid.

Almost square properties of Lipschitz-free spaces

Master's thesis
Jaan Kristjan Kaasik

Abstract. In this master's thesis, we prove that M is a length space if and only if the Lipschitz-free space $\mathcal{F}(M)$ is locally almost square. We also show that nontrivial Lipschitz-free spaces are never almost square.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
Keywords: functional analysis, Banach spaces, metric spaces, normed spaces, nonlinear operators.

Sisukord

Sissejuhatus

Magistritöö on funktsionaalanalüüsi valdkonda kuuluv teaduslik uurimus Lipschitzi-vabade ruumide kirjeldamisega tegelevast aktiivsest ja populaarsest harust.

Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on Banachi ruum, mille aluseks on meetriline ruum M, kusjuures M on loomulikul viisil vaadeldav ruumi $\mathcal{F}(M)$ osahulgana. Meetriliste ruumide vahel tegutsev Lipschitzi funktsioon on jätkatav pidevaks lineaarseks operaatoriks vastavate Lipschitzi-vabade ruumide vahel, kusjuures nii, et jätku norm on täpselt algse kujutuse Lipschitzi konstant. See võimaldab (mittelineaarse) Lipschitzi funktsiooni asemel vaadelda (tavaliselt lihtsamat) lineaarset funktsiooni, mis tegutseb (tavaliselt keerukamate) Lipschitzi-vabade ruumide vahel.

Magistritöö lähtekohaks on järgmine teoreem.

Teoreem 1 ([AM, teoreem 1.5])**.** *Olgu M täielik meetriline ruum. Järgnevad väited on samaväärsed:*

(1) *ruum M on liinkaugusega ruum;*

(2) *ruumil $\operatorname{Lip}_0(M)$ on Daugaveti omadus;*

(3) *ruumil $\mathcal{F}(M)$ on Daugaveti omadus;*

(4) *ruumil $\mathcal{F}(M)$ on tugev diameeter 2 omadus;*

(5) *ruumil $\mathcal{F}(M)$ on diameeter 2 omadus;*

(6) *ruumil $\mathcal{F}(M)$ on lokaalne diameeter 2 omadus;*

(7) *ruumil $\mathcal{F}(M)$ pole ühtegi tugevalt eksponeeritud punkti.*

On teada, et lokaalse peaaegu ruudu omadusega Banachi ruumil on lokaalne diameeter 2 omadus. Sellest tekib loomulik küsimus: kas eelnevate väidetega on samaväärne ka väide, et ruum $\mathcal{F}(M)$ on lokaalse peaaegu ruudu omadusega. Teisalt on lahtine, kas Lipschitzi-vaba ruum saab olla peaaegu ruudu omadusega, mis on üldiselt tugevam omadus kui tugev diameeter 2 omadus (näiteks ruum $\mathcal{F}([0,1])$ ei ole peaaegu ruudu omadusega [ALL, järeldus 3.11]).

Bakalaureusetöös [Ka] näidati, et meetrilise ruumi $\mathbb{R}^m$ täieliku alamruumi M korral on Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ lokaalse peaaegu ruudu omadusega parajasti siis, kui M on liinkaugusega ruum. Magistritöö esimese põhiteoreemiga parendame eelnevat tulemust ning näitame, et Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on lokaalse peaaegu ruudu omadusega parajasti siis, kui

M on liinkaugusega ruum. Magistritöö teine põhiteoreem ütleb, et Lipschitzi-vaba ruum ei ole peaaegu ruudu omadusega.

Magistritöö koosneb kolmest peatükist. Esimeses peatükis tutvume vajalike põhimõistetega: Lipschitzi funktsioonide ruumid, Lipschitzi-vabad ruumid, peaaegu ruudu omadustega Banachi ruumid ja liinkaugusega ruumid. Teises ja kolmandas peatükis esitame ja tõestame töö põhitulemused (teoreem 2.1 ja järeldus 3.4).

Magistritöös vaatleme ainult reaalseid mittetriviaalseid normeeritud ruume. Töös kasutatud tähistused on standardsed. Kui X on mingi hulk ja A on tema osahulk, siis osahulga A karakteristlik funktsioon on $\chi_A \colon X \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Meetrilises ruumis tähistame sümboliga $B(p, r)$ lahtist kera keskpunktiga p ja raadiusega r. Olgu X normeeritud ruum. Ruumi X kinnist ühikkera, ühiksfääri ja kaasruumi tähistame vastavalt B_X, S_X ja X^*. Kui $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$, siis tähistame ühikkera B_X viilu $\{x \in B_X \colon x^*(x) > 1 - \alpha\}$ tähisega $S(x^*, \alpha)$.

1 Vajalikud eelteadmised

Peatüki esimeses kahes alapunktis toome sisse Lipschitzi funktsioonide ruumi ja Lipschitzi-vaba ruumi mõisted. On teada, et Lipschitzi funktsioonide ruum on vastava Lipschitzi-vaba ruumi kaasruum. Nende Banachi ruumide kohta võib täiendavalt lugeda allikatest [N], [O] ja [We]. Magistritöös uurime Lipschitzi-vaba ruumi peaaegu ruudu omadusi, need omadused toome sisse kolmandas alapunktis. Lipschitzi-vaba ruum saab olla (mingi meie poolt vaadeldava) peaaegu ruudu omadusega ainult siis, kui selle Lipschitzi-vaba ruumi aluseks olev meetriline ruum on liinkaugusega ruum. Liinkaugusega ruumi mõiste toome sisse neljandas alapunktis.

1.1 Lipschitzi funktsioonide ruum

Definitsioon 1.1. Olgu (X, d_X) ja (Y, d_Y) meetrilised ruumid ning $f\colon X \to Y$. Öeldakse, et kujutus f rahuldab *Lipschitzi tingimust*, kui leidub $L \geq 0$ nii, et iga $p, q \in X$ korral

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq L d_X(p, q).$$

Vähimat sellist arvu L nimetatakse kujutuse f *Lipschitzi konstandiks* ja tähistatakse $\mathrm{Lip}(f)$.

Definitsioon 1.2. Meetrilist ruumi koos selles fikseeritud elemendiga nimetatakse *nullpunktiga meetriliseks ruumiks.* Fikseeritud elementi nimetatakse *nullpunktiks* ja tähistatakse sümboliga 0.

Olgu M nullpunktiga meetriline ruum. Tähistame sümboliga $\mathrm{Lip}_0(M)$ kõigi selliste Lipschitzi tingimust rahuldavate kujutuste $f\colon M \to \mathbb{R}$ hulka, mille korral $f(0) = 0$. On teada, et $\mathrm{Lip}_0(M)$ on Banachi ruum punktiviisi defineeritud vektorruumi tehete ja normi $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f)$ suhtes. Seda Banachi ruumi nimetatakse *Lipschitzi funktsioonide ruumiks.*

Lause 1.3 (vt nt [O, laused 1.3 ja 1.4])**.** *Hulk* $\mathrm{Lip}_0(M)$ *on vektorruum üle reaalarvude korpuse punktiviisi defineeritud tehete suhtes ja Banachi ruum normiga*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f).$$

On teada (vt nt [O, lk 8]), et ruum $\mathrm{Lip}_0(M)$ ei sõltu tegelikult meetrilises ruumis M nullpunkti valikust. Täpsemalt, kui esialgse nullpunkti 0 asemel lugeda meetrilise ruumi M uueks nullpunktiks element $0'$ ja $\mathrm{Lip}_{0'}(M)$ on vastav Lipschitzi funktsioonide ruum, siis $\mathrm{Lip}_0(M)$ ja $\mathrm{Lip}_{0'}(M)$ on isomeetriliselt isomorfsed. Vastav isomeetriline isomorfism on $T\colon \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathrm{Lip}_{0'}(M)$,

$$(Tf)(p) = f(p) - f(0'), \qquad f \in \mathrm{Lip}_0(M),\ p \in M.$$

1.2 Lipschitzi-vaba ruum

Olgu M meetriline ruum.

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et funktsioon $m\colon M \to \mathbb{R}$ on *molekul*, kui tema kandja $\{p \in M\colon m(p) \neq 0\}$ on lõplik ja $\sum\limits_{p\in M} m(p) = 0$.

Tähistame kõikide selliste molekulide hulka $\mathcal{M}(M)$.

Lause 1.5 (vt nt [O, lause 1.6]). *Hulk $\mathcal{M}(M)$ on vektorruum üle reaalarvude korpuse punktiviisi defineeritud tehete suhtes.*

Tähistame $p, q \in M$ korral

$$m_{p,q} = \frac{\chi_{\{p\}} - \chi_{\{q\}}}{d(p,q)},$$

kui $p \neq q$, ja $m_{p,q} = 0$, kui $p = q$, ning nimetame elementi $m_{p,q}$ *elementaarmolekuliks.* On teada (vt nt [O, lk 9–10]), et iga molekuli $m \in \mathcal{M}(M)$ saab esitada kujul

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{p_i,q_i},$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ning iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $p_i, q_i \in M$ ja $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Lause 1.6 (vt nt [O, laused 1.7 ja 1.8]). *Kujutus $\|\cdot\|\colon \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}$,*

$$\|m\| = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \colon m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{p_i,q_i} \Big\},$$

kus infiimum on võetud üle molekuli m kõikide esituste, on norm vektorruumil $\mathcal{M}(M)$.

Lause 1.7 (vt nt [O, lause 1.12]). *Iga $p, q \in M$, $p \neq q$, korral*

$$\|\chi_{\{p\}} - \chi_{\{q\}}\| = d(p,q),$$

seega $\|m_{p,q}\| = 1$.

Definitsioon 1.8. Normeeritud ruumi $\mathcal{M}(M)$ täieldit $\mathcal{F}(M)$ nimetatakse *Lipschitzi-vabaks ruumiks.*

Lause 1.9. *Iga $x \in B_{\mathcal{F}(M)}$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub molekul $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{p_i,q_i} \in B_{\mathcal{M}(M)}$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $\alpha_i > 0$ ja $p_i \neq q_i$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$ ja*

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{p_i,q_i} \Big\| < \varepsilon.$$

Tõestus. Piisab märgata, et $B_{\mathcal{M}(M)}$ on kõikjal tihe keras $B_{\mathcal{F}(M)}$. $\square$

Lemma 1.10 (vt nt [P, lk 16])**.** *Olgu $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ kumer kombinatsioon elementidest $x_1, \ldots, x_n \in S_{\mathcal{F}(M)}$ ning $\varepsilon > 0$. Siis leiduvad $m \in \mathbb{N}$ ja $y_1, \ldots, y_m \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ nii, et $\|x - y\| < \varepsilon$ ja $y = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} y_i$.*

Lause 1.9 ja lemma 1.10 vahetu järeldusena saame järgmise tulemuse.

Järeldus 1.11. *Iga $x \in B_{\mathcal{F}(M)}$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} m_{p_i, q_i} \in B_{\mathcal{M}(M)}$ nii, et $\|x - y\| < \varepsilon$.*

Teoreem 1.12 (vt nt [We, teoreem 3.3])**.** *Olgu M nullpunktiga meetriline ruum. Banachi ruumid $\mathcal{F}(M)^*$ ja $\mathrm{Lip}_0(M)$ on isomeetriliselt isomorfsed. Vastav isomeetriline isomorfism on $T\colon \mathrm{Lip}_0(M) \to \mathcal{F}(M)^*$,*

$$(Tf)(\chi_{\{p\}} - \chi_{\{q\}}) = f(p) - f(q), \qquad f \in \mathrm{Lip}_0(M),\ p, q \in M.$$

Teoreem 1.13 (vt nt [GPR, lk 3])**.** *Olgu M meetriline ruum ja A tema kõikjal tihe alamruum. Banachi ruumid $\mathcal{F}(M)$ ja $\mathcal{F}(A)$ on isomeetriliselt isomorfsed.*

Järeldus 1.14. *Kui M on meetriline ruum ja $\widehat{M}$ tema täield, siis Banachi ruumid $\mathcal{F}(M)$ ja $\mathcal{F}(\widehat{M})$ on isomeetriliselt isomorfsed.*

Teoreem 1.15 (McShane'i jätkamisteoreem, vt nt [We, teoreem 1.33])**.** *Olgu M meetriline ruum, M' tema alamruum ja rahuldagu $f'\colon M' \to \mathbb{R}$ Lipschitzi tingimust. Leidub funktsiooni f' jätk $f\colon M \to \mathbb{R}$ nii, et $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(f')$.*

1.3 Peaaegu ruudu omadustega Banachi ruumid

Töö eesmärgiks on kirjeldada peaaegu ruudu omadusi Lipschitzi-vabades ruumides. Käesolevas alapunktis toomegi sisse meid huvitavad peaaegu ruudu omadused.

Definitsioon 1.16. Öeldakse, et Banachi ruum X on

1) *lokaalse peaaegu ruudu omadusega* (*LASQ*, ingl. k. *locally almost square*), kui iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et $\|x \pm y\| \leq 1 + \varepsilon$;

2) *nõrgalt peaaegu ruudu omadusega* (*WASQ*, ingl. k. *weakly almost square*), kui iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub ühikkera B_X elementide jada (y_i) nii, et $\|x \pm y_i\| \to 1$, $\|y_i\| \to 1$ ja $y_i \xrightarrow{w} 0$;

3) *peaaegu ruudu omadusega* (*ASQ*, ingl. k. *almost square*), kui iga $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\|x_i \pm y\| \leq 1 + \varepsilon$;

4) *s-peaaegu ruudu omadusega* (*s-ASQ*, ingl. k. *s-almost square*), kui $s \in (0, 1]$ ja iga $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ning $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\|x_i \pm sy\| \leq 1 + \varepsilon$.

Peaaegu ruudu omadused LASQ, WASQ ja ASQ toodi sisse artiklis [ALL], omaduse ASQ üldistus s-ASQ toodi sisse artiklis [OSZ]. On selge, et Banachi ruum on ASQ parajasti siis, kui ta on 1-ASQ. Osutub, et iga ASQ Banachi ruum on ka WASQ (vt nt [ALL, teoreem 3.10],). Vastupidine implikatsioon üldiselt ei kehti, näiteks $\mathcal{F}([0, 1]) = L_1([0, 1])$ on WASQ, kuid ei ole ASQ (vt nt [ALL, järeldus 3.11]). Kui Banachi ruum on WASQ, siis ilmselt on ta ka LASQ. Vastupidise implikatsiooni kehtivus ei ole teada (vt nt [ALL, küsimus 3.12]).

Lemma 1.17. *Olgu X Banachi ruum ja $s \in (0, 1]$. Kui ruum X on ASQ, siis X on ka s-ASQ.*

Tõestus. Olgu $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Kui ruum X on ASQ, siis leidub $y \in S_X$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\|x_i + y\| \leq 1 + \varepsilon$, mistõttu

$$\|x_i \pm sy\| = \|s(x_i \pm y) + (1 - s)x_i\| \leq s\|x_i \pm y\| + (1 - s)\|x_i\| \leq 1 + \varepsilon.$$

□

1.4 Liinkaugusega ruum

Olgu M meetriline ruum. Olgu $x, y \in M$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sellised, et $\alpha < \beta$. Pidevat funktsiooni $\gamma\colon [\alpha, \beta] \to M$ nimetame *liiniks* (ingl. k. *path*) punktist x punkti y, kui $\gamma(\alpha) = x$ ja $\gamma(\beta) = y$. Tavaliselt tähistame liini punktist x punkti y sümboliga $\gamma_{x,y}$ ja ütleme, et punktid x ja y on selle liini *otspunktid*. Liini $\varphi\colon [\alpha, \beta] \to M$ nimetame liini γ *pöördliiniks*, kui iga $t \in [\alpha, \beta]$ korral $\varphi(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$.

Olgu $\vartheta\colon [\zeta, \eta] \to M$ veel üks liin. Ütleme, et liinid γ ja ϑ on *lõikumatud*, kui nende liinide kujutishulgad on lõikumatud, st $\operatorname{Im}\gamma \cap \operatorname{Im}\vartheta = \varnothing$. Ütleme, et liinid γ ja ϑ *võivad lõikuda ainult otspunktides*, kui $\gamma(s) = \vartheta(t)$ korral $s \in \{\alpha, \beta\}$ ja $t \in \{\zeta, \eta\}$.

Kuna mis tahes kaks mittekidunud reaalarvude lõiku on homöomorfsed, siis eeldame edasises vaikimisi, et liini lähtehulgaks on lõik $[0, 1]$.

Definitsioon 1.18. Punktide $x, y \in M$ korral defineerime liini $\gamma_{x,y}$ *pikkuse*

$$L(\gamma_{x,y}) = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma_{x,y}(t_{i-1}), \gamma_{x,y}(t_i))\colon n \in \mathbb{N},\ 0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n \leq 1 \Big\}.$$

Definitsioon 1.19. Meetriline ruum M on *liinkaugusega ruum*, kui iga $x, y \in M$ korral

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma_{x,y})\colon \gamma_{x,y} \text{ on liin punktist } x \text{ punkti } y\}.$$

Järgnev tulemus võimaldab meil edasises liinkaugusega ruumis vaadelda erinevate otspunktide vahel ainult injektiivseid liine.

Lause 1.20. *Olgu $x, y \in M$ sellised, et $x \neq y$ ja olgu $\gamma_{x,y}$ liin. Leidub injektiivne liin φ punktist x punkti y nii, et* $\operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{Im}\gamma_{x,y}$ *ja* $L(\varphi) \leq L(\gamma_{x,y})$.

Selle lause tõestame järgmise „folkloorse“ tulemuse abil.

Lemma 1.21 (vt nt [B])**.** *Olgu $x, y \in M$ sellised, et $x \neq y$ ja olgu $\gamma_{x,y}$ liin. Leidub kinnine hulk $A \subset [0, 1]$, pidev monotoonne funktsioon $q\colon [0, 1] \to [0, 1]$ ja injektiivne liin φ punktist x punkti y nii, et*

(1) $\varphi \circ q|_A = \gamma_{x,y}|_A$,

(2) $q|_A$ *on sürjektiivne.*

Lause 1.20 tõestus. Lemmast 1.21 leiame vastava q ja φ nii, et tingimused (1) ja (2) kehtiksid. Jääb näidata, et $L(\varphi) \leq L(\gamma_{x,y})$. Olgu $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_l \leq 1$. Piisab näidata, et leiduvad $s_0, s_1, \ldots, s_l \in A$ nii, et $s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_l$

ja $\varphi(t_i) = \gamma_{x,y}(s_i)$ iga $i \in \{0, \dots, l\}$ korral. Kuna $q|_A$ on sürjektiivne, siis iga $i \in \{0, \dots, l\}$ korral leidub $s_i \in \left(q|_A\right)^{-1}(t_i)$. Need $s_0, \dots, s_l$ on sobivad, sest q on monotoonne ja iga $i \in \{0, \dots, l\}$ korral

$$\varphi(t_i) = \varphi(q(s_i)) = \gamma_{x,y}(s_i).$$

$\square$

2 Lokaalse peaaegu ruudu omadusega Lipschitzi-vaba ruum

Käesolevas peatükis esitame ja tõestame magistritöö esimese põhitulemuse.

Teoreem 2.1. *Olgu M meetriline ruum. Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on LASQ parajasti siis, kui M on liinkaugusega ruum.*

Selle teoreemi tõestamisel kasutame järgnevat abitulemust.

Lemma 2.2. *Olgu M liinkaugusega ruum, $n \in \mathbb{N}$ ja $C_n = (4^n - 1)/3$. Iga $\varepsilon > 0$ ja $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{p_i,q_i} \in \mathcal{M}(M)$ korral, kus $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ ja $\sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1$, leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et $m \leq C_n$ ja leiduvad $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$, $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in M$ ja injektiivsed liinid $\gamma_{a_1,b_1}, \dots, \gamma_{a_m,b_m}$ nii, et*

(a) $\|x - \sum_{j=1}^m \alpha_j m_{a_j,b_j}\| < \varepsilon$;

(b) $\sum_{j=1}^m \alpha_j < \sum_{i=1}^n \lambda_i + \varepsilon$;

(c) *liinid $\gamma_{a_1,b_1}, \dots, \gamma_{a_m,b_m}$ võivad paarikaupa lõikuda ainult otspunktides;*

(d) *iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral*

$$L(\gamma_{a_j,b_j}) < d(a_j, b_j) + \varepsilon\delta_j,$$

kus $\delta_j = \min\{1, \frac{d(a_j,b_j)}{C_n\alpha_j}\}$.

Tõestus. Tõestame lemma induktsiooniga n järgi. Ilmselt lemma väide kehtib, kui $n = 1$. Eeldame, et lemma väide kehtib kindla n korral. Olgu $\varepsilon > 0$ ja $x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i m_{p_i,q_i} \in \mathcal{M}(M)$, kus $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} > 0$ ja $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \leq 1$. Võime eeldada, et $p_{n+1} \neq q_{n+1}$. Olgu

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon d(p_{n+1}, q_{n+1})}{C_{n+1}(1 + d(p_{n+1}, q_{n+1}))}$$

ja

$$x' = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_{p_i,q_i}.$$

Induktsiooni eelduse põhjal leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et $m \leq C_n$ ja leiduvad $\alpha'_1, \dots, \alpha'_m > 0$, $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in M$ ja injektiivsed liinid $\gamma_{a_1,b_1}, \dots, \gamma_{a_m,b_m}$ nii, et

(a′) $\|x' - \sum_{j=1}^m \alpha'_j m_{a_j,b_j}\| < \varepsilon'$;

(b′) $\sum_{j=1}^{m} \alpha'_j < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \varepsilon'$;

(c′) liinid $\gamma_{a_1,b_1} \dots, \gamma_{a_m,b_m}$ võivad paarikaupa lõikuda ainult otspunktides;

(d′) iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$L(\gamma_{a_j,b_j}) < d(a_j, b_j) + \varepsilon' \delta_j,$$

kus $\delta_j = \min\{1, \frac{d(a_j,b_j)}{C_n \alpha'_j}\}$.

Olgu

$$y = \sum_{j=1}^{m} \alpha'_j m_{a_j,b_j} + \lambda_{n+1} m_{p_{n+1},q_{n+1}}.$$

Siis $\|x - y\| = \|x' - \sum_{j=1}^{m} \alpha'_j m_{a_j,b_j}\| < \varepsilon' < \varepsilon$.

Kuna M on liinkaugusega ruum, siis leidub injektiivne liin $\gamma\colon [0,1] \to M$ punktist p_{n+1} punkti q_{n+1} nii, et

$$L(\gamma) < d(p_{n+1}, q_{n+1}) + \varepsilon\delta,$$

kus $\delta = \min\{1, \frac{d(p_{n+1},q_{n+1})}{C_{n+1}\lambda_{n+1}}\}$.

On võimalik, et mingi $j \in \{1, \dots, m\}$ korral

$$\operatorname{Im} \gamma \cap \operatorname{Im} \gamma_{a_j,b_j} \not\subset \{p_{n+1}, q_{n+1}\} \cap \{a_j, b_j\}$$

ehk liin γ lõikub mõne liiniga $\gamma_{a_1,b_1}, \dots, \gamma_{a_m,b_m}$ mujal kui otspunktides. Lahendame selle probleemi. Alustuseks leiame lõigule $[0,1]$ spetsiifilise alajaotuse $0 = t_0 < \dots < t_l = 1$ ja muudame γ definitsiooni alajaotuse osalõikudes $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{l-1}, t_l]$, kui vaja. Teeme seda induktiivselt. Olgu $t_0 = 0$ ja $u_0 = \gamma(t_0)$ ning oletame, et meil on leitud $t_{k-1} < 1$, kus $k \in \mathbb{N}$. Me leiame t_k ning seejärel tähistame $u_k = \gamma(t_k)$ ja

$$\beta_k = \lambda_{n+1} \frac{d(u_{k-1}, u_k)}{d(p_{n+1}, q_{n+1})}.$$

Iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral tähistame

$$T_j = \{t \in [0,1] \colon \gamma(t) \in \operatorname{Im} \gamma_{a_j,b_j}\}.$$

Kui $\{t \in \bigcup_{j=1}^{m} T_j \colon t > t_{k-1}\} = \varnothing$, siis tähistame $t_k = 1$ ja $l = k$. Paneme tähele, et $\operatorname{Im} \gamma|_{(t_{k-1},t_k)}$ ei lõiku hulgaga $\operatorname{Im} \gamma_{a_j,b_j}$ mitte ühegi $j \in \{1, \dots, m\}$ korral. Punktist u_{k-1} punkti u_k defineerime liini $\gamma_{u_{k-1},u_k} = \gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$. Liini γ valiku tõttu

$$L(\gamma_{u_{k-1},u_k}) < d(u_{k-1}, u_k) + \varepsilon\delta = d(u_{k-1}, u_k) + \varepsilon \min\left\{1, \frac{d(u_{k-1}, u_k)}{C_{n+1}\beta_k}\right\}.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\{t \in \bigcup_{j=1}^{m} T_j \colon t > t_{k-1}\} \neq \varnothing$. Olgu

$$J = \{j \in \{1, \ldots, m\} \colon t_{k-1} \in T_j\}.$$

Kui $\{t \in \bigcup_{j \in J} T_j \colon t > t_{k-1}\} = \varnothing$, siis võtame

$$t_k = \min \Big\{ t \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^{m} T_j \colon t > t_{k-1} \Big\}.$$

Näeme, et $\operatorname{Im} \gamma|_{(t_{k-1}, t_k)}$ ei lõiku hulgaga $\operatorname{Im} \gamma_{a_j, b_j}$ mitte ühegi $j \in \{1, \ldots, m\}$ korral. Punktist u_{k-1} punkti u_k defineerime liini $\gamma_{u_{k-1}, u_k} = \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$. Liini γ valiku tõttu

$$L(\gamma_{u_{k-1}, u_k}) < d(u_{k-1}, u_k) + \varepsilon\delta = d(u_{k-1}, u_k) + \varepsilon \min \Big\{ 1, \frac{d(u_{k-1}, u_k)}{C_{n+1} \beta_k} \Big\}.$$

Aga kui $\{t \in \bigcup_{j \in J} T_j \colon t > t_{k-1}\} \neq \varnothing$, siis võtame

$$t_k = \max\{t \in \bigcup_{j \in J} T_j \colon t > t_{k-1}\}.$$

Sellisel juhul leidub $j \in J$ nii, et $u_k \in \operatorname{Im} \gamma_{a_j, b_j}$. Fikseerime sellise j. Olgu $r = \gamma_{a_j, b_j}^{-1}(u_{k-1})$ ja $s = \gamma_{a_j, b_j}^{-1}(u_k)$. Kui $r < s$, siis olgu γ_{u_{k-1}, u_k} liini γ_{a_j, b_j} ahend lõigul $[r, s]$. Vastasel juhul olgu γ_{u_{k-1}, u_k} liini γ_{a_j, b_j} pöördliini ahend lõigul $[1-r, 1-s]$.

Järgnevalt tükeldame liine $\gamma_{a_1, b_1}, \ldots, \gamma_{a_m, b_m}$ vastavalt. Iga $j \in \{1, \ldots, m\}$ korral tähistame

$$S_j = \{t \in [0, 1] \colon \gamma_{a_j, b_j}(t) \in \{\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_l)\}\}$$

ja paneme tähele, et $|S_j| \leq 2$. Kui $S_j = \varnothing$, siis tähistame $c_j = a_j$ ja $d_j = a_j$. Kui $S_j \neq \varnothing$, siis olgu $c_j = \gamma_{a_j, b_j}(\min S_j)$ ja $d_j = \gamma_{a_j, b_j}(\max S_j)$ ning olgu γ_{a_j, c_j}, γ_{c_j, d_j} ja γ_{d_j, b_j} vastavalt liini γ_{a_j, b_j} ahendid lõikudele $[0, \min S_j]$, $[\min S_j, \max S_j]$ ja $[\max S_j, 1]$.

Iga $j \in \{1, \ldots, m\}$ korral tähistame

$$\alpha_j = \alpha'_j \frac{d(a_j, c_j)}{d(a_j, b_j)}, \qquad \alpha_{m+j} = \alpha'_j \frac{d(c_j, d_j)}{d(a_j, b_j)}, \qquad \alpha_{2m+j} = \alpha'_j \frac{d(d_j, b_j)}{d(a_j, b_j)}.$$

Paneme tähele, et

$$y = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j m_{a_j, c_j} + \alpha_{m+j} m_{c_j, d_j} + \alpha_{2m+j} m_{d_j, b_j}) + \sum_{k=1}^{l} \beta_k m_{u_{k-1}, u_k}.$$

Eeldame, et $a_j \neq c_j$, $c_j \neq d_j$ ja $d_j \neq b_j$ iga $j \in \{1, \ldots, m\}$ korral, sest vastasel juhul on vastav elementaarmolekul m_{a_j,c_j}, m_{c_j,d_j} või m_{d_j,b_j} võrdne nullelemendiga ja me jätame temaga liikme (tema kordse) elemendi y esitusest ära.

Saadud liinid $\gamma_{a_1,c_1}, \ldots, \gamma_{a_m,c_m}$, $\gamma_{c_1,d_1}, \ldots, \gamma_{c_m,d_m}$, $\gamma_{d_1,b_1}, \ldots, \gamma_{d_m,b_m}$, $\gamma_{u_0,u_1}, \ldots, \gamma_{u_{l-1},u_l}$ võivad paarikaupa lõikuda ainult otspunktides, välja arvatud juhul kui γ_{u_{k-1},u_k} ja γ_{c_j,d_j} on samad liinid või teineteise pöördliinid mingi k ja j korral. Kui γ_{u_{k-1},u_k} ja γ_{c_j,d_j} on samad liinid, siis $m_{u_{k-1},u_k} = m_{c_j,d_j}$ ja me võtame need elementaarmolekulid elemendi y esituses kokku, arvestades, et

$$(\alpha_{m+j} + \beta_k)m_{c_j,d_j} = \alpha_{m+j}m_{c_j,d_j} + \beta_k m_{u_{k-1},u_k}.$$

Kui γ_{u_{k-1},u_k} ja γ_{c_j,d_j} on üksteise pöördliinid, siis $m_{u_{k-1},u_k} = -m_{c_j,d_j}$ ja me võtame need elementaarmolekulid elemendi y esituses kokku, arvestades, et

$$(\alpha_{m+j} - \beta_k)m_{c_j,d_j} = \alpha_{m+j}m_{c_j,d_j} + \beta_k m_{u_{k-1},u_k},$$

kui $\alpha_{m+j} \geq \beta_k$, ja

$$(\beta_k - \alpha_{m+j})m_{d_j,c_j} = \alpha_{m+j}m_{c_j,d_j} + \beta_k m_{u_{k-1},u_k},$$

kui $\alpha_{m+j} < \beta_k$.

Molekuli y saadud esitusest tuleneb hinnang $4m + 1 \leq C_{n+1}$. Järgnevalt näitame, et saadud elemendi y esitus koos saadud liinidega rahuldab lemma tingimusi (a)–(d). Eelnevast teame, et $\|x - y\| < \varepsilon$ ja seda, et kaks erinevat liini võivad lõikuda ainult otspunktides.

Hinnangust $L(\gamma_{a_j,b_j}) < d(a_j, b_j) + \varepsilon'\delta_j$, kus $\delta_j = \min\{1, \frac{d(a_j,b_j)}{C_n\alpha'_j}\}$, saame, et

$$\begin{aligned}
L(\gamma_{a_j,c_j}) &< d(a_j, c_j) + \varepsilon'\delta_j, \\
L(\gamma_{c_j,d_j}) &< d(c_j, d_j) + \varepsilon'\delta_j, \\
L(\gamma_{d_j,b_j}) &< d(d_j, b_j) + \varepsilon'\delta_j.
\end{aligned}$$

Tahame näidata, et

$$\begin{aligned}
L(\gamma_{a_j,c_j}) &< d(a_j, c_j) + \varepsilon\delta_j^1, \\
L(\gamma_{c_j,d_j}) &< d(c_j, d_j) + \varepsilon\delta_j^2, \\
L(\gamma_{d_j,b_j}) &< d(d_j, b_j) + \varepsilon\delta_j^3,
\end{aligned}$$

kus

$$\delta_j^1 = \min\Big\{1, \frac{d(a_j, c_j)}{C_{n+1}\alpha_j}\Big\},$$

$$\delta_j^2 = \min\Big\{1, \frac{d(c_j, d_j)}{C_{n+1}(\alpha_{m+j} + \beta_k)}\Big\},$$

$$\delta_j^3 = \min\Big\{1, \frac{d(d_j, b_j)}{C_{n+1}\alpha_{2m+j}}\Big\}.$$

Paneme tähele, et $\varepsilon > C_{n+1}\varepsilon'$, $C_{n+1}\delta_j^1 \geq \delta_j$ ja $C_{n+1}\delta_j^3 \geq \delta_j$. Seega piisab näidata, et $\varepsilon'\delta_j \leq \varepsilon\delta_j^2$ ehk

$$\frac{\varepsilon d(p_{n+1}, q_{n+1})}{C_{n+1}(1 + d(p_{n+1}, q_{n+1}))} \min\Big\{1, \frac{d(a_j, b_j)}{C_n\alpha'_j}\Big\} \leq \varepsilon \min\Big\{1, \frac{d(c_j, d_j)}{C_{n+1}(\alpha_{m+j} + \beta_k)}\Big\}.$$

Kui viimane miinimum on 1, siis ilmselt võrratus kehtib. Jääb tõestada, et

$$\frac{d(p_{n+1}, q_{n+1})}{1 + d(p_{n+1}, q_{n+1})} \min\Big\{1, \frac{d(a_j, b_j)}{C_n\alpha'_j}\Big\} \leq \frac{d(c_j, d_j)}{\alpha_{m+j} + \beta_k} = \frac{1}{\frac{\alpha'_j}{d(a_j,b_j)} + \frac{\lambda_{n+1}}{d(p_{n+1},q_{n+1})}}.$$

Kui $1 \geq \frac{d(a_j,b_j)}{C_n\alpha'_j}$, siis

$$\frac{\alpha_j}{d(a_j, b_j)} + \frac{\lambda_{n+1}}{d(p_{n+1}, q_{n+1})} \leq \Big(1 + \frac{1}{d(p_{n+1}, q_{n+1})}\Big)\frac{C_n\alpha'_j}{d(a_j, b_j)}.$$

Kui $1 \leq \frac{d(a_j,b_j)}{C_n\alpha'_j}$, siis

$$\frac{\alpha'_j}{d(a_j, b_j)} + \frac{\lambda_{n+1}}{d(p_{n+1}, q_{n+1})} \leq \frac{1}{C_n} + \frac{1}{d(p_{n+1}, q_{n+1})} \leq 1 + \frac{1}{d(p_{n+1}, q_{n+1})}.$$

Viimaseks tuleb näidata, et

$$\sum_{j=1}^{3m} \alpha_j + \sum_{k=1}^{l} \beta_k \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i + \varepsilon.$$

Märkame, et

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3m}\alpha_j &= \sum_{j=1}^{m}\alpha'_j\Big(\frac{d(a_j,c_j)}{d(a_j,b_j)}+\frac{d(c_j,d_j)}{d(a_j,b_j)}+\frac{d(d_j,b_j)}{d(a_j,b_j)}\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{m}\alpha'_j\frac{d(a_j,c_j)+d(c_j,d_j)+d(d_j,b_j)}{d(a_j,b_j)}\\
&\le \sum_{j=1}^{m}\alpha'_j\frac{L(\gamma_{a_j,b_j})}{d(a_j,b_j)} < \sum_{j=1}^{m}\alpha'_j\frac{d(a_j,b_j)+\varepsilon'\delta_j}{d(a_j,b_j)}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\alpha'_j+\varepsilon'\sum_{j=1}^{m}\frac{\alpha'_j\delta_j}{d(a_j,b_j)}\\
&\le \sum_{j=1}^{m}\alpha'_j+\varepsilon' m < \sum_{i=1}^{n}\lambda_i+(C_n+1)\varepsilon'\\
&< \sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\frac{C_n+1}{C_{n+1}}\varepsilon < \sum_{i=1}^{n}\lambda_i+\frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{l}\beta_k &= \lambda_{n+1}\sum_{k=1}^{l}\frac{d(\gamma(t_{k-1}),\gamma(t_k))}{d(p_{n+1},q_{n+1})} \le \frac{\lambda_{n+1}L(\gamma)}{d(p_{n+1},q_{n+1})}\\
&< \lambda_{n+1}+\frac{\lambda_{n+1}\varepsilon\delta}{d(p_{n+1},q_{n+1})} \le \lambda_{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\sum_{j=1}^{3m}\alpha_j+\sum_{k=1}^{l}\beta_k<\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i+\varepsilon.$$

□

Teoreemi 2.1 tõestus. Järelduse 1.14 põhjal võime eeldada, et M on täielik. On teada (vt nt [Ku, lause 2.5]), et kui ruum $\mathcal{F}(M)$ on LASQ, siis ruumil $\mathcal{F}(M)$ on lokaalne diameeter 2 omadus, järelikult teoreemi 1 põhjal on M liinkaugusega ruum.

Oletame nüüd, et M on liinkaugusega ruum. Fikseerime $x \in S_{\mathcal{F}(M)}$ ja $\varepsilon > 0$. Lemmade 1.9 ja 2.2 tõttu leiduvad $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_m > 0$, $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_m \in M$ ja injektiivsed liinid $\gamma_{a_1,b_1},\dots,\gamma_{a_m,b_m}$ nii, et

(a) $\|x-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j m_{a_j,b_j}\|<\varepsilon/5$;

(b) $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j < 1 + \varepsilon/5$;

(c) liinid $\gamma_{a_1,b_1} \dots, \gamma_{a_m,b_m}$ võivad paarikaupa lõikuda ainult otspunktides;

(d) iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral $L(\gamma_{a_j,b_j}) < d(a_j, b_j) + \varepsilon\delta_j/5$, kus $\delta_j = \frac{d(a_j,b_j)}{m\alpha_j}$.

Teoreemi tõestuseks piisab leida $y_1, \dots, y_m \in \mathcal{F}(M)$ ja Lipschitzi funktsioon $g \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ (elemendi $0 \in M$ fikseerime hiljem) nii, et iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral $g(y_j) = 1$ ja

$$\|m_{a_j,b_j} \pm y_j\| \le 1 + \frac{\varepsilon}{5m\alpha_j}.$$

Tõepoolest, eeldame, et sellised $y_1, \dots, y_m$ ja g leiduvad. Olgu $y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$, siis

$$\|y\| \ge g\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j g(y_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j > 1 - \frac{\varepsilon}{5}$$

ja

$$\begin{aligned}
\|y\| &\le \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \|y_j\| = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{2} \|m_{a_j,b_j} + y_j - m_{a_j,b_j} + y_j\| \\
&\le \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{2} \big(\|m_{a_j,b_j} + y_j\| + \|m_{a_j,b_j} - y_j\|\big) \\
&\le \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \Big(1 + \frac{\varepsilon}{5m\alpha_j}\Big) < 1 + \frac{2\varepsilon}{5},
\end{aligned}$$

seega

$$\begin{aligned}
\Big\|x \pm \frac{y}{\|y\|}\Big\| &\le \Big\|x - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j m_{a_j,b_j}\Big\| + \Big\|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j m_{a_j,b_j} \pm y\Big\| + \big|\|y\| - 1\big| \\
&< \frac{\varepsilon}{5} + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \|m_{a_j,b_j} \pm y_j\| + \frac{2\varepsilon}{5} \le 1 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Iga $j \in \{1, \dots, m\}$ korral defineerime $K \in \mathbb{N}$ ja lõpliku osahulga $\{u_0, \dots, u_{2K}\} \subset \operatorname{Im} \gamma_{a_j,b_j}$, seejärel defineerime y_j kui lineaarse kombinatsiooni $\sum_{k=1}^{2K} \lambda_k m_{u_k,u_{k-1}}$ spetsiifiliste kordajatega $\lambda_1, \dots, \lambda_{2K} \in \mathbb{R}$ ja viimaks defineerime g hulgal $\{u_0, \dots, u_{2K}\}$.

Olgu

$$A = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m\}.$$

Valime $R > 0$ nii, et

(1) iga $p, q \in A$, $p \neq q$, korral $d(p,q) > 2R$;

(2) iga $j \in \{1, \ldots, m\}$ ja $p \in A \setminus \{a_j, b_j\}$ korral

$$B(p,R) \cap \operatorname{Im} \gamma_{a_j,b_j} = \varnothing.$$

Tähistame $B = \bigcup_{p \in A} B(p,R)$.

Hulgad $\operatorname{Im} \gamma_{a_1,b_1} \setminus B, \ldots, \operatorname{Im} \gamma_{a_m,b_m} \setminus B$ on paarikaupa lõikumatud ja kompaktsed, seega leidub $r \in (0,R)$ nii, et iga $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, korral

$$d(\operatorname{Im} \gamma_{a_i,b_i} \setminus B, \operatorname{Im} \gamma_{a_j,b_j} \setminus B) > 2r.$$

Esiteks leiame hulga $\operatorname{Im} \gamma_{a_1,b_1}$ teatud lõpliku osahulga. Olgu $K \in \mathbb{N}$ selline, et

$$2(K-2)r > d(a_1,b_1) - 2R$$

ja olgu

$$s = \frac{d(a_1,b_1) - 2R}{2(K-2)}.$$

Siis $0 < s < r$.

Leiame lõigu $[0,1]$ spetsiifilise alajaotuse ja sellele vastavad punktid hulgas $\operatorname{Im} \gamma_{a_1,b_1}$. Tähistame $t_0 = 0$ ja $t_{2K} = 1$ ning $u_0 = a_1$ ja $u_{2K} = b_1$. Olgu

$$t_1 = \max\bigl\{t \colon d(\gamma_{a_1,b_1}(t), a_1) = R\bigr\}$$

ja

$$t_{2K-1} = \min\bigl\{t \colon d(\gamma_{a_1,b_1}(t), b_1) = R\bigr\}$$

ning olgu $u_1 = \gamma_{a_1,b_1}(t_1)$ ja $u_{2K-1} = \gamma_{a_1,b_1}(t_{2K-1})$. Eeldame, et oleme leidnud mingid t_k ja u_k, kus $1 \leq k \leq 2K-4$. Võtame

$$t_{k+1} = \max\bigl\{t \colon d(\gamma_{a_1,b_1}(t), u_k) = s\bigr\}$$

ja $u_{k+1} = \gamma_{a_1,b_1}(t_{k+1})$.

Märkame, et $t_{2K-3} \leq t_{2K-1}$. Olgu t_{2K-2} selline reaalarv, et $t_{2K-3} \leq t_{2K-2} \leq t_{2K-1}$ ja

$$d\bigl(u_{2K-3}, \gamma_{a_1,b_1}(t_{2K-2})\bigr) = d\bigl(u_{2K-1}, \gamma_{a_1,b_1}(t_{2K-2})\bigr),$$

ja tähistame $u_{2K-2} = \gamma_{a_1,b_1}(t_{2K-2})$. Siis $0 = t_0 \leq \cdots \leq t_{2K} = 1$ ja $\{u_0, \ldots, u_{2K}\}$ on hulga $\operatorname{Im} \gamma_{a_1,b_1}$ lõplik osahulk, kusjuures $u_k = \gamma_{a_1,b_1}(t_k)$ iga $k \in \{0, \ldots, 2K\}$ korral. Ruumi M nullpunktiks võtame u_1.

Defineerime

$$y_1 = \sum_{k=1}^{K} \Big(\frac{d(u_{2k-2}, u_{2k-1})}{d(a_1, b_1)} m_{u_{2k-2}, u_{2k-1}} - \frac{d(u_{2k-1}, u_{2k})}{d(a_1, b_1)} m_{u_{2k-1}, u_{2k}} \Big).$$

Näitame, et

$$\|m_{a_1,b_1} + y_1\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{5m\alpha_1}.$$

Iga Lipschitzi funktsiooni $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ korral

$$\begin{aligned}
&d(a_1, b_1)\big|f(m_{a_1,b_1} + y_1)\big| \\
&\quad = \Big| f(u_0) - f(u_{2K}) + \sum_{k=1}^{K} \big(f(u_{2k-2}) - f(u_{2k-1}) - f(u_{2k-1}) + f(u_{2k}) \big) \Big| \\
&\quad = 2 \Big| \sum_{k=1}^{K} \big(f(u_{2k-2}) - f(u_{2k-1}) \big) \Big| \leq 2 \sum_{k=1}^{K} d(u_{2k-2}, u_{2k-1}) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{2K} d(u_{k-1}, u_k) \leq L(\gamma_{a_1,b_1}) \leq d(a_1, b_1) + \frac{\varepsilon\delta_1}{5},
\end{aligned}$$

seega

$$\|m_{a_1,b_1} + y_1\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{5m\alpha_1}.$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$\|m_{a_1,b_1} - y_1\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{5m\alpha_1}.$$

Defineerime funktsiooni g hulgal $\{u_0, \dots, u_{2K}\}$ järgmiselt

$$g(p) = \begin{cases} R, & \text{kui } p = u_0 \text{ või } p = u_{2K}; \\ 0, & \text{kui } p = u_k, \text{ kus } k \text{ on paaritu või } p = u_{2K-2}; \\ s & \text{mujal.} \end{cases}$$

Märkame, et funktsiooni g Lipschitzi konstant hulgal $\{u_0, \dots, u_{2K}\}$ on 1 ja

$$\begin{aligned}
g(y_1) &= \frac{1}{d(a_1, b_1)} \sum_{k=1}^{K} \big(g(u_{2k-2}) - g(u_{2k-1}) - g(u_{2k-1}) + g(u_{2k}) \big) \\
&= \frac{1}{d(a_1, b_1)} (2R + 2(K-2)s) = 1.
\end{aligned}$$

Iga $i \in \{2, \dots, m\}$ korral defineerime analoogiliselt hulga $\operatorname{Im} \gamma_{a_i,b_i}$ teatud lõpliku osahulga, elemendi $y_i \in \mathcal{F}(M)$ ja laiendame g definitsiooni sellele lõplikule osahulgale. Olgu C kõikide punktide hulk, millel g on pärast seda protsessi defineeritud. Funktsioon g on hulgal C korrektselt defineeritud, sest liinid $\gamma_{a_1,b_1}, \ldots, \gamma_{a_m,b_m}$ võivad paarikaupa lõikuda ainult otspunktides, kus g on väärtusega R. McShane'i teoreemiga 1.15 laiendame funktsiooni g definitsiooni tervele ruumile M nii, et g säilitab oma Lipschitzi konstanti.

Tõestuse lõpetuseks jääb veenduda, et funktsiooni $g|_C$ Lipschitzi konstant on 1. Olgu $p, q \in C$ erinevad. Kui $p \in B \cap C$ või $q \in B \cap C$, siis $d(p,q) \geq R$, sest $B \cap C = A$, ja seega $0 \leq g(p) \leq R$ ja $0 \leq g(q) \leq R$ ning järelikult

$$|g(p) - g(q)| \leq R \leq d(p,q).$$

Eeldame nüüd, et $p, q \in C \backslash B$. Siis leiduvad üheselt määratud $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ nii, et $p \in \operatorname{Im} \gamma_{a_i,b_i} \backslash B$ ja $q \in \operatorname{Im} \gamma_{a_j,b_j} \backslash B$. Piisab vaadelda juhtu $i \neq j$. Sellisel juhul kehtib arvu r valiku tõttu $d(p,q) > 2r$ ning kuna $0 \leq g(p) < r$ ja $0 \leq g(q) < r$, siis

$$|g(p) - g(q)| < r < d(p,q).$$

□

Jätkuvalt on teadmata, kas WASQ ja LASQ on erinevad omadused, seega tekib järgmine loomulik küsimus.

Küsimus 2.3. Kas meetriline ruum M on liinkaugusega ruum parajasti siis, kui $\mathcal{F}(M)$ on WASQ?

3 Peaaegu ruudu omadusega Lipschitzi-vaba ruum

Selles peatükis esitame ja tõestame magistritöö teise põhitulemuse. Selle jaoks vajame järgnevaid abitulemusi.

Lemma 3.1. *Olgu M täielik meetriline ruum ja $s \in (0,1]$. Kui Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on s-ASQ, siis on M liinkaugusega ruum.*

Tõestus. Olgu $s \in (0,1]$ ja eeldame, et Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(M)$ on s-ASQ. Sellisel juhul on iga ruumi $\mathcal{F}(M)$ ühikkera viil vähemalt diameetriga $2s$ (vt nt [OSZ, laused 1.6 ja 1.7]). Järelikult ei ole ühikkeras $B_{\mathcal{F}(M)}$ ühtegi tugevalt eksponeeritud punkti (meenutame, et ühikkera punkt on tugevalt eksponeeritud, kui ta sisaldub ühikkera kuitahes väikse diameetriga viilus). Teoreemi 1 põhjal on M liinkaugusega ruum. $\square$

Lemma 3.2. *Olgu M liinkaugusega ruum. Iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $p_1, q_1, \dots, p_n, q_n \in M$ nii, et iga $y \in B_{\mathcal{F}(M)}$ korral kehtib*

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} \|m_{p_i,q_i} + y\| > 1 + \|y\| - \varepsilon. \tag{1}$$

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Valime $n \in \mathbb{N}$ nii, et $8/n \leq \varepsilon$ ja olgu $\theta > 0$ selline, et $8\theta \leq \varepsilon$. Olgu $p, q \in M$ erinevad, $r = d(p,q)/(2n)$ ja γ lõpliku pikkusega liin punktist p punkti q. Defineerime punktid $p_1, \dots, p_n \in M$ induktiivselt. Olgu $p_1 = p$. Kui oleme fikseerinud p_i mingi $i \in \{1, \dots, n-1\}$ korral, siis olgu $p_{i+1} = \gamma(\max A_i)$, kus

$$A_i = \{t \in [0,1] \colon d(\gamma(t), p_i) = d(p,q)/n\}.$$

Olgu $q_1, \dots, q_n \in M$ sellised, et $q_i \in B(p_i, \theta r) \setminus \{p_i\}$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral.

Olgu $y \in B_{\mathcal{F}(M)}$. Väite tõestamiseks piisab järelduse 1.11 põhjal kontrollida võrratuse (1) kehtivust juhul, kui $y = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m} m_{u_j,v_j}$. Olgu $f \in S_{\mathrm{Lip}_0(M)}$ selline, et $f(y) = \|y\|$. Iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral tähistame $B_i = B(p_i, r)$. Paneme tähele, et hulgad $B_1, \dots, B_n$ paarikaupa lõikumatud.

Fikseerime sellise $i \in \{1, \dots, n\}$, mille korral hulgas

$$J = \{j \in \{1, \dots, m\} \colon u_j \in B_i \text{ või } v_j \in B_i\}$$

on ülimalt $2m/n$ elementi. Defineerime $g \in \mathrm{Lip}_0(M)$ järgmiselt: $g|_{M \setminus B_i} = f|_{M \setminus B_i}$, $g(q_i) = f(q_i)$, $g(p_i) = f(q_i) + d(p_i, q_i)$ ja McShane'i teoreemiga 1.15 laiendame funktsiooni g definitsiooni kogu ruumile M Lipschitzi konstanti säilitavalt. Siis $\|g\| \leq 1 + 2\theta$, sest iga $a \notin B_i$ korral

$$\begin{aligned} |g(a) - g(p_i)| &= |f(a) - f(q_i) + d(p_i, q_i)| \leq d(a, q_i) + d(p_i, q_i) \\ &\leq d(a, p_i) + 2d(p_i, q_i) \leq d(a, p_i) + 2\theta r \leq (1 + 2\theta) d(a, p_i). \end{aligned}$$

Märkame, et

$$\begin{aligned}(f-g)(y) &= (f-g)\Big(\sum_{j\in J}\frac{1}{m}m_{u_j,v_j}\Big) \le \big(\|f\|+\|g\|\big)\sum_{j\in J}\frac{1}{m}\|m_{u_j,v_j}\| \\ &\le (2+2\theta)\frac{2m}{mn} = \frac{4(1+\theta)}{n}.\end{aligned}$$

Seega

$$g(y) = f(y) - (f-g)(y) \ge \|y\| - \frac{4(1+\theta)}{n}$$

ja järelikult

$$\begin{aligned}\|m_{p_i,q_i}+y\| &\ge \frac{g}{\|g\|}(m_{p_i,q_i}+y) \ge \frac{1}{1+2\theta}\Big(\frac{g(p_i)-g(q_i)}{d(p_i,q_i)}+g(y)\Big) \\ &\ge \frac{1}{1+2\theta}\Big(1+\|y\|-\frac{4(1+\theta)}{n}\Big) \\ &> 1+\|y\|-2\theta-\frac{4}{n} \ge 1+\|y\|-\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Teoreem 3.3. *Olgu M meetriline ruum. Siis $\mathcal{F}(M)$ ei ole s-ASQ mitte ühegi $s\in(0,1]$ korral.*

Tõestus. Olgu $s\in(0,1]$. Järelduse 1.14 ja lemma 3.1 põhjal võime eeldada, et M on liinkaugusega ruum. Lemma 3.2 põhjal leiduvad $n\in\mathbb{N}$ ja $y_1,\dots,y_n\in S_{\mathcal{F}(M)}$ nii, et iga $y\in S_{\mathcal{F}(M)}$ korral

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}}\|y_i+y\| > 2-\frac{s}{2}, \tag{2}$$

seega mingi $i\in\{1,\dots,n\}$ korral

$$\|y_i+sy\| \ge \|y_i+y\| - \|(1-s)y\| > 2-\frac{s}{2}-(1-s) = 1+\frac{s}{2}.$$

□

Järeldus 3.4. *Lipschitzi-vaba ruum ei ole ASQ.*

Kasutatud kirjandus

[ALL] T. A. Abrahmasen, J. Langemets, V. Lima, *Almost square Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), lk 1549–1565.

[AM] A. Avilés, G. Martínez-Cervantes, *Complete metric spaces with property* (Z) *are length metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. **473** (2019), lk 334–344.

[B] R. Börger, *How to make a path injective*, Recent developments of general topology and its applications (Berlin, 1992), lk 57–59, Math. Res. **67**, 1992.

[GPR] L. García-Lirola, A. Procházka, A. Rueda Zoca, *A characterisation of the Daugavet property in spaces of Lipschitz functions*, J. Math. Anal. Appl. **464** (2018), lk 473–492.

[Ka] J. K. Kaasik, *Ligilähedase keskpunkti omadusega meetrilise ruumi Lipschitzi-vaba ruum*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, 2020. `http://hdl.handle.net/10062/68605`

[Ku] D. Kubiak, *Some geometric properties of the Cesàro function spaces*, J. Convex Anal. **21** (2014), lk 189–200.

[N] H. Niglas, *Lipschitzi kujutused ja M-ideaalid*, magistritöö, Tartu Ülikool, 2014. `http://hdl.handle.net/10062/42888`

[OSZ] E. Oja, N. Saealle, I. Zolk, *Quantitative versions of almost squareness and diameter* 2 *properties*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **24** (2020), lk 131–145.

[O] A. Ostrak, *Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisus*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, 2016. `http://hdl.handle.net/10062/53789`

[P] K. Pirk, *Diametral diameter two properties, Daugavet-, and* Δ*-points in Banach spaces*, doktoritöö, Tartu Ülikool, 2020. `http://hdl.handle.net/10062/68458`

[We] N. Weaver, *Lipschitz algebras*, teine väljaanne, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2018.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Jaan Kristjan Kaasik,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Lipschitzi-vaba ruumi peaaegu ruudu omadused“,

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Andre Ostrak, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Jaan Kristjan Kaasik

17.05.2022