TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

III

TARTU 1980

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

III

Teist järku jooned

TARTU 1980

Koostanud L. Tuulmets

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 26. septembril 1979. a.

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ III. Составитель
Лейда Т у у л м е т с. На эстонском языке. Тартуский
государственный университет. ЭССР, г.Тарту, ул.Юли-
кооли, 18. Vastutav toimetaja H. Kilp. Korrektor V.
Lang. Paljundamisele antud 26.03.1980. Rotaatoripa-
ber 30x42 1/4. Trükipoognaid 12,0. Tingtrükipoognaid
11,16. Arvestuspoognaid 10,18. Trükiarv 600. TRÜ trü-
kikoda, ENSV, Tartu, Pälsoni t. 14. Tell. nr. 377.
Hind 35 kop.

E e s s õ n a

Käesolev analüütilise geomeetria praktikum on koostatud eeskätt TRÜ matemaatikateaduskonna vajadusi arvestades ning on mõeldud kasutamiseks koos Ü. Lumiste ja K. Ariva õpikuga "Analüütiline geomeetria", kuid suurt osa sellest saab kasutada ka teistes teaduskondades, kus õpitakse analüütilist geomeetriat iseseisva ainena või kõrgema matemaatika osana. Lihtsamad ülesanded on kasutatavad täiendava materjalina keskkooli matemaatika tundides, eriti aga matemaatika ringis.

Varem ilmunud analüütilise geomeetria praktikumi I osa sisaldab valiku ülesandeid vektoralgebrast, II osa valiku ülesandeid sirgete ja tasandite kohta. Käesolev, III osa sisaldab valiku ülesandeid teist järku kõverate kohta.

Ülesannete kogu kasutamist lihtsustavad vajaliku teoreetilise materjali lühiesitused üksikute ainelõikude ees ja ülesannete vastuste juures esitatud näpunäited.

R I N G J O O N   J A   E L L I P S

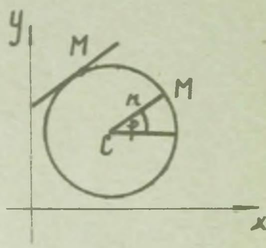
§ 1. Ringjoon

Definitsioon. Ringjooneks nimetatakse selliste punktide hulka tasandil, mis asetsevad võrdsel kaugusel samal tasandil asetsevast kindlast punktist, nn. keskpunktist (tsentrist). Seda võrdset kaugust nimetatakse ringjoone raadiuseks. Olgu ringjoone keskpunkt $C(a,b)$, raadius r ja $M(x,y)$ ringjoone suvaline punkt, siis $|\overrightarrow{CM}| = r$,

$$\overrightarrow{CM}^2 = r^2$$

ehk väljakirjutatuna koordinaatides mingi ristreeperi suhtes, saame ringjoone normaalvõrrandi

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 . \quad (8.1)$$



Joon. 8.1.

Ruutvõrrand kahest muutujast afiinse reeperi suhtes

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

määrab ringjoone parajasti siis, kui ruutliikmete kordajad on võrdsed ($a_{11} = a_{22}$) ja võrrandist puudub muutujate korrutisega liige ($a_{12} = 0$), s. t. ringjoone üldvõrrand omab kuju

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0 . \quad (8.2)$$

Ringjoone (8.1) parameetrilised võrrandid omavad kuju

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + a , \\ y = r\sin\varphi + b , \end{cases} \quad (8.3)$$

kus φ on x-telje ja ringjoone raadiusvektori $\overrightarrow{OM}$ vaheline nurk. Kui ringjoone keskpunkt asetseb ristreeperi alguspunktis, saame võrrandist (8.1) ringjoone <u>kanoonilise</u> võrrandi

$$x^2 + y^2 = r^2 . \tag{8.4}$$

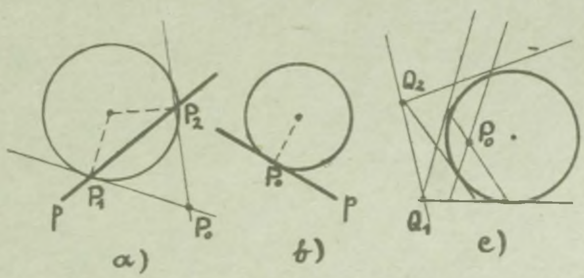
Ringjoone puutuja võrrandi saame kergesti leida nn. <u>pooliti asendusvõttega</u>, s. t. asetame ringjoone võrrandis (8.1) pooled tundmatud puutepunkti $M_0(x_0,y_0)$ koordinaatidega

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = r_2 . \tag{8.5}$$

Kui ringjoon on määratud võrrandiga (8.2), siis puutepunkti M_0 läbiva ringjoone puutuja võrrandi võime esitada kujul

$$a_{11}x_0x + a_{11}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0. \tag{8.6}$$

<u>Poolus ja polaar ringjoone suhtes</u>



Joon. 8.2.

Punkti P_0 <u>polaariks</u> p ringjoone suhtes nimetatakse punktist P_0 ringjoonele tõmmatud puutujate puutepunkte ühendavat sirget $p = P_1P_2$ (punkt P_0 asetseb väljaspool ringjoont) (vt. joon. 8.2_a). Kui punkt P_0 asetseb ringjoonel, siis punkti P_0 polaariks antud ringjoone suhtes on punkti P_0 läbiv ringjoone puutuja (joon. 8.2_b). Kui punkt P_0 asetseb ringjoone sees, siis punkti polaari leidmiseks antud ringjoone suhtes tõmmatakse läbi antud punkti P_0 vabalt kaks ringjoone kõõlu. Kõõlude otspunktidest ringjoonele tõmmatud puutujate lõikepunktid Q_1 ja Q_2 määravad otsitava polaari $p = Q_1Q_2$ (joon. 8.2_c).

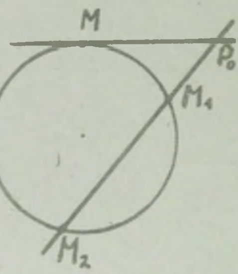
Punkti P_0 nimetatakse sirge p pooluseks antud ringjoone suhtes.

Punkti $P_0(x_0,y_0)$ polaar p ringjoone $x^2 + y^2 = r^2$ suhtes määratakse võrrandiga

$$x_0x + y_0y = r^2 . \tag{8.7}$$

Punkti potents ringjoone suhtes

Kui punktist P_0 tõmmatud suvaline sirge lõikab ringjoont punktides M_1 ja M_2 (joon. 8.3), siis punkti P_0 kauguste korrutis punktidest M_1 ja M_2 on konstantne suurus (ei sõltu sirge valikust), mida nimetatakse punkti P_0 potentsiks (ehk astmeks) antud ringjoone suhtes. Kui ringjoon on määratud võrrandiga (8.1) ja $d_1 = P_0M_1$, $d_2 = P_0M_2$, siis punkti $P_0(x_0,y_0)$ potents ringjoone (8.1) suhtes määratakse seosega



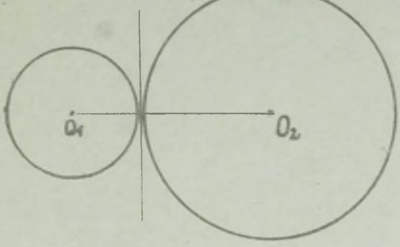
Joon. 8.3.

$$\delta = d_1d_2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 . \tag{8.8}$$

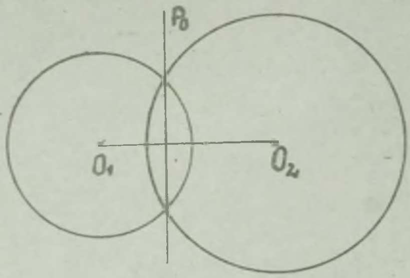
Punkti P_0 potents ringjoone suhtes on positiivne, kui punkt asetseb väljaspool ringjoont; punkti potents on null, kui punkt P_0 on ringjoone punkt, ja punkti potents on negatiivne, kui punkt P_0 on ringjoone sisemine punkt. Kui $d_1 = d_2$, siis punkti P_0 läbiv sirge on ringjoone puutuja $\delta = d^2$, $d = |\overrightarrow{P_0M}|$, kus M on puutepunkt (joon. 8.3). Seega punkti P_0 potents ringjoone suhtes on võrdne punktist P_0 ringjoonele tõmmatud puutuja lõõlu pikkuse ruuduga punktist P_0 kuni puutepunktini.

Radikaalteljeks (ehk potentssirgeks ehk kordaaliks) kahe antud ringjoone suhtes nimetatakse sirget, mille mistahes punkti potentsid mõlema ringjoone suhtes on võrdsed. Ringjoonte radikaaltelg on risti ringjoonte keskpunkte ühendava sirgega (keskjoonega).

Kui ringjooned puutuvad, siis on radikaaltelg nende ühiseks puutujaks ringjoonte puutepunktis (joon. 8.4_a). Kui ringjooned lõikuvad, siis radikaaltelg on ringjoonte lõikepunkte ühendavaks sirgeks.(joon. 8.4_b).

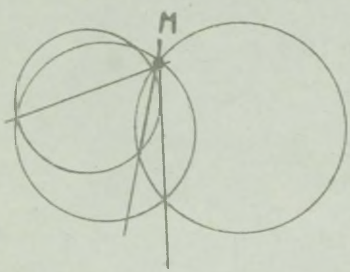


Joon. 8.4a.



Joon. 8.4b.

Radikaaltsenter (ehk potentspunkt). Kolme ringjoone korral tekib kolm radikaaltelge. Nende radikaaltelgede lõikepunkti M nimetatakse antud ringjoonte radikaaltsentriks ehk potentspunktiks (joon. 8.5).



Joon. 8.5.

Märkus. Tuletame meelde juba ülesannete kogu eelmistes osades tehtud kokkulepet: kui ülesande tingimustes ei ole nimetatud reeperit, siis eeldatakse, et antud reeper on ristreeper.

8.1. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib reeperi alguspunkti ja ringjoone keskpunkt asetseb punktis K :
1) K(10,4);
2) K(-3,4).

8.2. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt asetseb punktis C ja ringjoon läbib punkti Q :
1) C(6,-2), Q(7,-5); 2) C(0,4), Q(5,-8).

8.3. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoone ühe diameetri otspunktid on

1) $P = (-3,2)$ ja $Q = (1,4)$;

2) $A = (1,4)$ ja $B = (-3,2)$.

8.4. Leida antud ringjoone keskpunkt ja raadius:

1) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 4x = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$;

4) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$;

5) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 6y - 15 = 0$.

8.5. Milliseks teiseneb ringjoone võrrand $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$, kui reeperi alguspunkt kanda punkti 1) $A(-1,3)$, 2) $B(-4,3)$? Kuidas asetsevad punktid A ja B antud ringjoone suhtes?

8.6. Milliseks teiseneb ringjoone võrrand $x^2 + y^2 + 4x - 12y - 9 = 0$, kui reeperi alguspunkt kanda ringjoone keskpunkti?

8.7. Kirjeldada ringjoone eriasendeid reeperi suhtes, kui osa kordajatest ringjoone üldvõrrandis

$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$$

on võrdsed nulliga.

8.8. Leida antud ringjoonte lõikepunktid reeperi telgedega.

1) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$;

2) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$;

3) $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$;

4) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

8.9. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib kolme punkti.

1) $A(0,2)$, $B(1,1)$, $C(2,-2)$;

2) $P(1,2)$, $Q(-5,2)$, $R(4,2)$.

8.10. Koostada kolmnurga ümber joonestatud ringjoone võrrand, kui kolmnurga tipud on

1) $A(3, 0)$, $B(1, 2)$, $C(3, -2)$;
2) $P(7, 7)$, $Q(0, 8)$, $R(-2, 4)$;
3) $M(1, 3)$, $N(-2, 1)$, $L(-1, -3)$;
4) $S(0, 4)$, $T(1, 2)$, $U(3, -2)$.

8.11. On antud kolmnurga ABC tipud: $A(-3,6)$, $B(9,-10)$, $C(-5,4)$. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkt ja raadius.

8.12. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone võrrand, kui kolmnurga küljed on $x + 3y - 11 = 0$, $4x - 3y + 16 = 0$ ja $x - 2y - 1 = 0$.

8.13. Ringjoone keskpunkt asetseb x-teljel ja ringjoon läbib punkte $A(2,3)$ ja $B(5,2)$. Leida ringjoone keskpunkt ja koostada ringjoone võrrand.

8.14. Ringjoone keskpunkt asetseb sirgel $x - y + 2 = 0$ ja ringjoon läbib punkte $A(3,0)$, $B(-1,2)$. Koostada ringjoone võrrand.

8.15. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkte $P_1 = (3,-2)$ ja $P_2 = (-9,4)$ ning tema keskpunkt asetseb sirgel $x + 2y - 10 = 0$.

8.16. Leida ringjoonel $x^2 + y^2 = 1$ punkt, mille kaugused punktidest $P(1,3)$ ja $Q(-2,2)$ on võrdsed.

8.17. Leida ringjoonel $5x^2 + 5y^2 + 2x - 12 = 0$ punkt, mille kaugused reeperi telgedest on võrdsed.

8.18. Leida punkt, mille kaugused punktidest $P_1 = (0{,}5;\, 3)$, $P_2 = (0,2)$ ja $P_3 = (1,-1)$ on võrdsed.

8.19. Leida ringjoone $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ puutuja, mis läbib punkti $P(5,5)$.

8.20. Koostada ringjoone $x^2 + y^2 = 10$ puutujate võrrandid, kui puutepunktideks on ringjoone ja sirge $x - 3y = 0$ lõikepunktid.

8.21. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon puutub x-telge punktis $A(5,0)$ ja lõikab y-teljest välja 10 ühiku pikkusega lõigu.

8.22. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon puutub x-telge reeperi alguspunktis ja lõikab y-telge punktis B(0,4).

8.23. Ringjoon läbib punkti A(-4,2) ning puutub x-telge punktis B(2,0). Leida ringjoone keskpunkt.

8.24. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon puutub y-telge punktis B(0,-3) ja ringjoone raadius on 2.

8.25. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P = (-12,-11)$ ja puutub y-telge punktis $y = -9$.

8.26. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkte $A = (3,6)$ ja $B = (-3,4)$ ning puutub x-telge.

8.27. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon puutub sirget $Ax + By + C = 0$ ja ringjoone keskpunktiks on reeperi alguspunkt.

8.28. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon puutub sirget $x - y = 0$ ja ringjoone keskpunktiks on punkt K(1,3).

8.29. Koostada reeperi telgi puutuvate ringjoonte võrrandid.

8.30. Ringjoon puutub mõlemat reeperi telge ja läbib punkti A. Leida ringjoone keskpunkt ja raadius, kui punkti A koordinaadid on: 1) A(2, -1); 2) A(4, 2); 3) A(2, 9).

8.31. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$ puutujate võrrandid, kui puutujad läbivad reeperi alguspunkti.

8.32. Koostada ringjoone $x^2 + y^2 = 13$ puutuja võrrand, kui puutuja läbib punkti P(-1, 5).

8.33. Ringjoone keskpunkt on punktis C(6, 7) ning raadius $r = 5$. Punktist A(7, 14) on joonestatud ringjoonele puutujad. Leida punkti A kaugus ringjoonest.

8.34. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P = (1,2)$ ja puutub reeperi telgi.

8.35. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P = (1,1)$, puutub sirgeid $x + 7y = 3$ ja $7x + y = 3$.

8.36. Läbi punkti $M_1(1,-2)$ on joonestatud ringjoon, mille raadius on 5 ning ta puutub x-telge. Leida ringjoone keskpunkt.

8.37. Koostada ringjoone $x^2 + y^2 = 5$ puutuja võrrand, kui puutuja on paralleelne sirgega
1) $2x - y + 1 = 0$;
2) $x - y - 1 = 0$.

8.38. Mingi jõu toimel punkt M pöörleb mööda ringjoont $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$. Jõu toime lakkab sel momendil, kui punkt M on punktis A(2,1). Määrata punkti edasine trajektoor.

8.39. Punkt M liikus mööda ringjoont $(x-4)^2 + (y-8)^2 = 2$; teatud momendil punkt kiskus end ringjoonest lahti ja jätkates vaba liikumist, läbis x-telje punktis Q(-2,1). Leida ringjoone punkt, milles punkt kiskus end lahti ringjoonest.

8.40. Millise nurga all näeme ringjoont $x^2 + y^2 = 16$ vaadatuna punktist P(8,0) ?

8.41. Leida sirgel $x + 2y - 1 = 0$ punkt, millest vaadatuna ringjoon $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ on nähtav 60° nurga all.

8.42. Leida punktide hulk, millest ringjoon $x^2+y^2 = r^2$ on nähtav täisnurga all.

8.43. On antud ringjoon $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ ja punkt C(5,4). Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoone keskpunkt asetseb punktis C ja ringjoon puutub väliselt antud ringjoont.

Märkus. Kui kaks ringjoont puutuvad väliselt, siis ringjoonte raadiuste summa on võrdne keskpunktidevahelise kaugusega.

8.44. Ringjoone punktist M on tõmmatud kõik võimalikud ringjoone kõõlud. Leida punktide hulk, mis jagavad vaadeldud kõõlud antud suhtes λ . Ringjoone raadius $r = a$.

8.45. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punkti $P = (2,1)$, puutub ringjoont $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 19 = 0$ ja tema raadius on 1.

8.46. Koostada ringjoonte $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ja $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ühiste puutujate võrrandid.

8.47. Leida antud ringjoonte vaheline nurk:
1) $(x - 3)^2 + y^2 = 8$, $x^2 + (y + 1)^2 = 10$;
2) $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 5)^2 + y^2 = 9$.

8.48. Leida tingimus, mille korral ringjooned

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2,$$
$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$$

on ortogonaalsed, s. t. lõikuvad täisnurga all.

8.49. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoone raadius $r = 3$, ringjoon läbib punkti $M(2,3)$ ja lõikab ortogonaalselt ringjoont $x^2 + y^2 = 1$.

8.50. Leida ringjoonte

$$3x^2 + 3y^2 - 6y + 2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - x + 8y + 13 = 0$$

keskpunktide vaheline kaugus.

8.51. Leida ringjoonte
1) $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 43 = 0$,
$x^2 + y^2 + 2x + 20y + 1 = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$,
$x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$

kesksirge võrrand ja keskjoone kaugus reeperi alguspunktist.

Märkus. Kahe ringjoone kesksirgeks nimetatakse ringjoonte keskpunkte ühendavat sirget.

8.52. Leida punkti $P_o = (5,-3)$ polaar ringjoone $x^2 + y^2 = 16$ suhtes. Teha joonis.

8.53. Leida punkti $P_o = (-2,5)$ polaar ringjoone $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ suhtes.

8.54. Leida sirge $2x - 3y - 6 = 0$ poolus ringjoone $x^2 + y^2 = 9$ suhtes.

8.55. Ringjoone $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 14$ puutuja läbib punkti $P = (7,8)$. Leida puutepunkti kaugus punktist P.

8.56. Leida antud punkti potents antud ringjoone suhtes:

1) $P_0(2,7)$, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$;
2) $P_0(-1,0)$, $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$;
3) $P_0(-2,-3)$, $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 57 = 0$;
4) $P_0(2,6)$, $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$;
5) $P_0(1,-1)$, $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$.

8.57. Leida selliste tasandi punktide M hulk, et punktist M ringjoonele $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 9$ tõmmatud puutujate kõõlude pikkused punktist P puutepunktini on konstantse pikkusega $e = 4$.

8.58. Leida tasandi punktide hulk, mille punktide potentside suhe kahe antud ringjoone

$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ ja
$x^2 + y^2 - 10y = 0$

suhtes on konstant λ:

1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = \frac{3}{2}$; 3) $\lambda = 1$.

8.59. Leida kahe antud ringjoone radikaaltelg:

1) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$, $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 25$;
2) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$, $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 36$;
3) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 25 = 0$;
4) $x^2 + (y - 1)^2 = 5$, $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$;
5) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$,
$x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 = 0$.

8.60. Tõestada, et kahe ringjoone radikaaltelg läbib ringjoonte lõikepunkte, on risti ringjoonte kesksirgega ja on antud ringjooni ortogonaalselt lõikavate ringjoonte keskpunktide hulgaks.

8.61. Leida ringjoon, mis läbib punkti $A(5, -4)$ ja lõikab ortogonaalselt kahte antud ringjoont $(x-3)^2 + y^2 = 2$ ja $x^2 + (y+1)^2 = 16$.

8.62. Leida kolme antud ringjoone radikaaltsenter:

1) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$,
$x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$,
$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$;

2) $x^2 + y^2 + x + 2y = 0$,
$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$,
$x^2 + y^2 + 3x + y - 1 = 0$.

8.63. Leida ringjoon, mis on ortogonaalne kolme antud ringjoonega:

1) $x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$,
$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$,
$x^2 + y^2 + 3x - 1 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + x + 2y = 0$,
$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$,
$x^2 + y^2 + 3x + y - 1 = 0$.

8.64. Tõestada, et võrrand

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 + \lambda\left[(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2\right] = 0$$

määrab ringjoonte parve, mille ringjooned läbivad kahe antud parve pearingjoonte

$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$,
$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0$

lõikepunkte, parve kõikide ringjoonte keskpunktid asetsevad ühel ja samal sirgel ning parameetri λ väärtus on võrdne suhtega, milles vastava ringjoone keskpunkt jagab parve pearingjoonte keskpunktide vahelise lõigu.

8.65. Leida ringjoon, mis läbib punkti Q(-3,1) ja omab sama radikaaltelge kahe antud ringjoone $(x-5)^2 + y^2 = 5$, $x^2 + (y-10)^2 = 13$ suhtes.

Märkus. Otsitav ringjoon kuulub kahe antud ringjoonega määratud ringjoonte kimpu (vt. eelnev ülesanne).

8.66. Leida kahe antud ringjoone
$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$,

$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$
sarnasuskeskpunktid.

Märkus. Kahe antud ringjoone sarnasuskeskpunktiks nimetatakse punkti Q, mida läbiva suvalise sirge lõigud punktist Q kuni mõlema ringjoone lõikepunktideni on võrdelised ringjoonte raadiustega. Iga kahe ringjoone korral eksisteerib kaks sarnasuskeskpunkti: nad jagavad keskpunktidevahelise lõigu siseselt ja väliselt suhteks, mis on võrdne antud ringjoonte raadiuste suhtega.

8.67. Varras libiseb mööda tasandit nii, et varda üks ots Q joonestab ringjoone raadiusega a, aga varras ise kogu aeg läbib ringjoonel mitteasetsevat fikseeritud punkti P. Koostada lõikude PQ keskpunktide hulga võrrand.

8.68. Kaldpind moodustab horisontaaltasandiga nurga α. Sellel kaldpinnal asub keha kaaluga P ning selle keha tasakaalus hoidmiseks on vaja jõudu $Q = P\sin\alpha$. Jõud Q sama koormuse P puhul sõltub kaldenurgast α. Määrata see sõltuvus graafiliselt, kasutades polaarkoordinaate.

§ 2. Ellips

Definitsioon. Ellipsiks nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille kauguste summa tasandi mingist kahest fikseeritud punktist F_1 ja F_2 on konstantne ning suurem punktide F_1 ja F_2 vahelisest kaugusest.

Punkte F_1 ja F_2 nimetatakse ellipsi fookusteks.

Võttes sirge F_1F_2 x-teljeks (fokaalteljeks) ja lõigu F_1F_2 keskristsirge y-teljeks, saame $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c>0$. Tasandi punkt $M(x,y)$ asetseb ellipsil parajasti siis, kui

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a, \quad a > c .$$

Minnes üle koordinaatidele ja lihtsustades antud võrrandit, saame antud võrrandiga ekvivalentse ellipsi kanoonilise võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 , \qquad (\mathcal{E})$$

kus

$$a^2 = b^2 + c^2 . \qquad (8.8)$$

Ellipsi parameetrilised võrrandid omavad kuju

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi , \\ y = b\sin\varphi , \end{cases} \qquad (8.9)$$

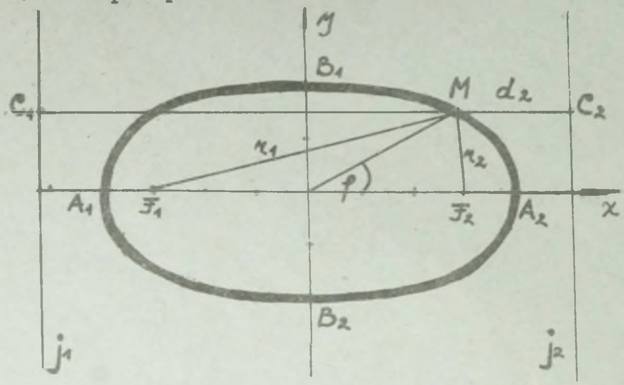
kus φ on x-telje ja raadiusvektori OM vaheline nurk (joon. 8.6). Ellipsi parameetrilised võrrandid (8.9) on ekvivalentsed ellipsi vektorvõrrandiga

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} , \qquad (8.10)$$

ehk

$$\vec{x} = (a\cos\varphi , b\sin\varphi) ,$$

kus $\vec{x}$ on ellipsi punkti kohavektor.



Joon. 8.6.

Kõvera sümmeetriatelgi nimetatakse kõvera peatelgedeks ehk telgedeks ning kõvera sümmeetriakeskpunkti nimetatakse kõvera keskpunktiks ehk tsentriks. Kui kõveral eksisteerib üheselt määratud tsenter, siis kõverat nimetatakse tsentraalseks kõveraks. Kõvera lõikepunkte kõvera telgedega nimetatakse kõvera tippudeks.

Ellips on kinnine tsentraalne kõver. Vaadeldud kanoonilise reeperi telgedeks on valitud ellipsi teljed. Ellipsil on neli tippu (joon. 8.6 A_1, A_2, B_1, B_2). Fokaalteljel asuvaid tippe A_1 ja A_2 nimetatakse fokaaltippudeks. Suurusi a ja b ($a > b$) ellipsi kanoonilises võrrandis nimetatakse ellipsi pooltelgedeks: a - fokaalpooltelg ehk pikem pooltelg ja b - lühem pooltelg. Fokaalpooltelg a on võrdne poolega fokaaltippude vahelisest kaugusest $a = \frac{1}{2}A_1A_2$ ja $b = \frac{1}{2}B_1B_2$. Ellipsi fookuste vaheline kaugus on $2c$. Kui $c = 0$, siis ellipsi fookused ühtivad ja ellips osutub ringjooneks. Seega ellipsite hulka kuuluvad erijuhul ka ringjooned.

Suurust

$$e = \frac{c}{a}, \quad 0 \leq e < 1 \tag{8.11}$$

nimetatakse ellipsi <u>ekstsentrilisuseks</u>. Kui $M(x,y)$ on ellipsi suvaline punkt ning $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ ja $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ ellipsi <u>fokaalraadiused</u>, s. t. fokaalraadiusvektorite pikkused (punkti kaugused fookustest), siis

$$r_1 = a + ex, \quad r_2 = a - ex. \tag{8.12}$$

Sirgeid

$$x = \pm \frac{a}{e} \tag{8.13}$$

nimetatakse ellipsi <u>juhtsirgeteks</u> ehk direktrissideks. Iga ellipsi punkti $M(x,y)$ korral kehtib seos

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e,$$

kus d_1 ja d_2 ($d_1 = MC_1$, $d_2 = MC_2$) on punkti M kaugused vastavast juhtsirgest j_1 ja j_2 (joon. 8.6). Fookust ja juhtsirget loetakse vastavaiks, kui nad asetsevad samal pool ellipsi tsentrit.

Ellipsi <u>parameetriks</u> nimetatakse suurust

$$p = eq = \frac{b^2}{a}, \tag{8.14}$$

kus q on ellipsi fookuse kaugus vastavast juhtsirgest

$$q = \frac{b^2}{c}.$$

Ellipsi <u>fokaallaiuseks</u> nimetatakse ellipsi fookust läbiva ja fokaalteljega ristuva ellipsi kõõlu pikkust. Ellipsi fokaallaius on $2p$.

Ellipsi $(\mathcal{E})$ poolt piiratud tasandilise kujundi pindala on

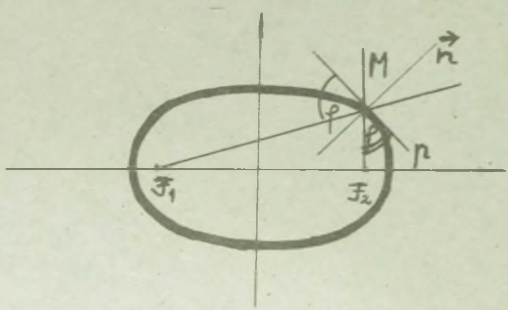
$$S = \pi ab. \tag{8.15}$$

Ellipsi ($\mathcal{E}$) puutuja ellipsi punktis $M_0(x_0,y_0)$ määratakse võrrandiga

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 , \tag{8.16}$$

s. t. saadakse ellipsi võrrandist ($\mathcal{E}$) pooliti asendusvõtega (pooled tundmatud asendatakse puutepunkti koordinaatidega).

Ellipsi puutuja ellipsi punktis M_0 moodustab võrdsed nurgad sirgetega F_1M_0 ja F_2M_0 (joon. 8.7).



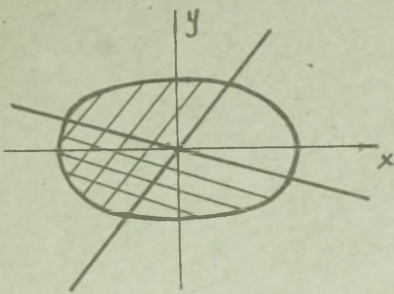
Joon. 8.7.

Ellipsi normaaliks ellipsi punktis M_0 nimetatakse sirget, mis läbib ellipsi punkti M_0 ja on risti puutujaga.

Ellipsi kaht punkti ühendavat sirglõiku nimetatakse ellipsi kõõluks. Sirge sihti, millel asetsevad ellipsi paralleelsete kõõlude keskpunktid, nimetatakse kõõlu sihi (kõõlude ühise sihi) kaassihiks ehk konjugeeritud sihiks antud ellipsi suhtes. Ristuvaid kaassihte nimetatakse ellipsi peasihtideks. Sirget, millel asetsevad ellipsi paralleelsete kõõlude keskpunktid, nimetatakse ellipsi diameetriks (joon. 8.8), täpsemalt kõõlude sihi kaasdiameetriks. Ellipsi kaht diameetrit, milledest kumbki poolitab teisega paralleelsed kõõlud, nimetatakse kaasdiameetriteks. Ellipsi kaasdiameetrite sihid on kaassihid. Ellipsi diameeter läbib alati ellipsi tsentrit. Peasihilisi kaasdiameetreid nimetatakse peadiameetriteks ja nad ühtivad ellipsi sümmeetriatelgedega.

Kui ellipsi $(\mathcal{E})$ kõõlu tõus on k, siis tema kaasdiameetri võrrand omab kuju

$$\frac{x}{a^2} + k\frac{y}{b^2} = 0 . \tag{8.17}$$



Joon. 8.8.

Kui k_1 ja k_2 on ellipsi kaasdiameetrite tõusud, siis

$$k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2} . \tag{8.18}$$

Kui ellipsi keskpunkt asetseb punktis $M_0(x_0,y_0)$ ja ellipsi peateljed on paralleelsed reeperi telgedega, siis ellipsi võrrand omab kuju

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 . \tag{8.19}$$

<u>Ellipsi polaarvõrrand</u>. Kui polaarteljeks valida ellipsi fokaaltelg suunaga juhtsirgest fookuse poole ja pooluseks ellipsi vasakpoolne fookus, siis ellipsi võrrand polaarreeperi suhtes omab kuju

$$\rho = \frac{p}{1-e\cos\varphi} , \tag{8.20}$$

kus ρ ja φ on ellipsi punkti polaarkoordinaadid: p - ellipsi parameeter, e - ekstsentrilisus.

<u>8.69</u>. Leida ellipsi võrrand, kui ta pooltelјed on

1) $a = 3$, $b = 2$;
2) $a = 6$, $b = 4$;
3) $a = 2{,}6$, $b = 1{,}5$;
4) $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{2}{9}$;
5) $a = 0{,}5$, $b = 0{,}2$;
6) $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$;
7) $a = 7$, $b = \sqrt{7}$;
8) $a = 1$, $b = \sqrt{0{,}1}$;

8.70. Leida ellipsi pooltelgede pikkused, fookuste koordinaadid ja ekstsentrilisus, kui ellips on antud võrrandiga

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$;

b) $9x^2 + y^2 = 36$.

8.71. Koostada ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi

1) fookuste vaheline kaugus on 8 ja suur telg on 10;
2) fookuste vaheline kaugus on 6 ja väiksem pooltelg on 2;
3) fookuste vaheline kaugus on 8 ja pooltelgede summa on 8;
4) fookuste vaheline kaugus on 6 ja suurem pooltelg on 5;
5) fookuste vaheline kaugus on $4\sqrt{5}$ ja pooltelgede summa on 10;
6) fookuste vaheline kaugus on 10 ja väiksem telg on 24.

8.72. Koostada ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi

1) suurem pooltelg on 10 ja ekstsentrilisus on 0,8;
2) suurem telg on 10 ja ekstsentrilisus on 0,6;
3) väiksem pooltelg on 3 ja ekstsentrilisus on $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) fookuste vaheline kaugus on 8 ja ekstsentrilisus on 0,8;
5) fookuste vaheline kaugus on 6 ja ekstsentrilisus on $\frac{3}{5}$;
6) väiksem telg on 10 ja ekstsentrilisus on $\frac{12}{13}$.

8.73. On antud ellips $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Koostada antud ellipsi juhtsirgete võrrandid.

8.74. Koostada ellipsi kanooniline võrrand, kui ellipsi

1) juhtsirgete vaheline kaugus on 5 ja fookuste vaheline kaugus on 4;
2) juhtsirgete vaheline kaugus on 16 ja suur telg on 8;
3) juhtsirgete vaheline kaugus on 13 ja väike telg on 6;
4) juhtsirgete vaheline kaugus on 32 ja ekstsentrilisus $e = \frac{1}{2}$;
5) juhtsirgete vaheline kaugus on $10\frac{2}{3}$ ja ekstsentrilisus on $\frac{3}{4}$;

6) juhtsirgete vaheline kaugus on $16\frac{2}{3}$ ja fookuste vaheline kaugus on 6.

8.75. Koostada ellipsi võrrand, kui on antud ellipsi väiksem pooltelg ja juhtsirgete võrrandid:

1) $b = 4$, $x = \pm 8$;

2) $b = 2\sqrt{6}$, $x = \pm 10$.

8.76. Ellipsi juhtsirgete vaheline kaugus on 36. Leida selle ellipsi võrrand, teades, et tema mingi punkti fokaalraadiused on 9 ja 15.

8.77. Koostada ellipsi juhtsirgete võrrandid, teades, et juhtsirged on risti fokaalteljega ja lõikavad teda punktides, mis osutuvad fookuste neljandateks harmoonilisteks punktideks tippude suhtes.

8.78. On antud ellipsi ekstsentrilisus e. Leida tema pooltelgede suhe. Kuidas ekstsentrilisus iseloomustab ellipsit?

8.79. Määrata ellipsi ekstsentrilisus, teades, et

a) tema väiksem telg on näha fookusest täisnurga all;

b) fookustevaheline kaugus on võrdne erinevate telgede otspunktide vahelise kaugusega;

c) juhtsirgetevaheline kaugus on neli korda suurem fookustevahelisest kaugusest.

8.80. Määrata ellipsi ekstsentrilisus, kui

1) fookustevaheline lõik on vaadatuna väikese telje tipust nähtav 60° nurga all;

2) kaugus ellipsi erinevatel telgedel asetsevate ellipsi kahe tipu vahel on kaks korda suurem kui fookustevaheline kaugus;

3) fookustevaheline kaugus on telgede pikkuste aritmeetiline keskmine.

8.81. Ellipsi ekstsentrilisus $e = \frac{1}{2}$, tema keskpunkt ühtib reeperi alguspunktiga ja üks juhtsirge on antud võrrandiga $x = 16$. Arvutada ellipsi sellise punkti M_1, mille abstsiss on -4, kaugus fookusest, mis on antud juhtsirgega samal pool tsentrit.

8.82. Ellips läbib punkte $M(\sqrt{3},-2)$ ja $N(-2\sqrt{3},+1)$. Koostada ellipsi võrrand, võttes tema peatelgedeks reeperi teljed.

8.83. Maa meridiaan on ellipsikujuline. Arvutada tema ekstsentrilisus, kui tema telgede suhe on $\frac{299}{300}$.

8.84. Maa meridiaan on ellipsikujuline. Arvutada tema ekstsentrilisus, teades, et täpsusega 0,5 km on Maa telje pikkus 12 714 km ja ekvaatori diameeter 12 756 km.

8.85. Arvutada Maa meridiaanlõike pindala, võttes Maa telje pikkuseks 12 714 km ja ekvaatori diameetriks 12 756 km.

8.86. Maa ja Kuu ühine raskuskese (asub 4635 km kaugusel Maa tsentrist) tiirleb ümber Päikese mööda ellipsit, mille pikem pooltelg on ligikaudu 149,6 milj. km. (astronoomiline ühik) ja ekstsentrilisus on 0,0167. Arvutada pöörlemisellipsi fookustevaheline kaugus, lühem pooltelg ja perimeeter (ümbermõõt).

Märkus. Ellipsi perimeeter

$$L \approx \pi\left[1,5(a + b) - \sqrt{ab}\right] \text{ ehk}$$

$$L \approx \pi(a + b)\,\frac{64 - 3\lambda^4}{64 - 16\lambda^2}, \quad \text{kus} \quad \lambda = \frac{a - b}{a + b}.$$

8.87. Maa tiirleb ümber Päikese ellipsit mööda, mille ühes fookuses asub Päike. Selle ellipsi suur telg on 300 000 000 km ja Päikese kaugus ellipsi keskpunktis 2 600 000 km. Kui suur on nimetatud ellipsi lühem telg ja parameeter?

Erinevad punktid

8.88. Tõestada, et iga ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sees asetseva punkti $P(x_1, y_1)$ korral kehtib võrratus $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, aga iga väljaspool oleva punkti $Q(x_2, y_2)$ korral kehtib võrratus $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} > 1$.

8.89. Määrata antud punktide $A_1(-2, 3)$, $A_2(2, -2)$, $A_3(2, -4)$, $A_4(-1, 3)$, $A_5(-4, -3)$, $A_6(3, -1)$, $A_7(3, -2)$, $A_8(2,1)$, $A_9(0, 15)$ ja $A_{10}(0, -16)$ asend ellipsi $8x^2+5y^2 = 77$ suhtes.

8.90. Määrata punktide $A(6;-3)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -6)$, $D(\sqrt{50}, 0)$, $E(-4, 2\sqrt{6})$ ja $G(1, \sqrt{26})$ asend ellipsi $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ suhtes.

8.91. Leida ellipsil $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ punkt, mis asetseb viie ühiku kaugusel ellipsi lühemast teljest.

8.92. Leida ellipsil $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ punkt, mille kaugus paremast fookusest on neli korda suurem kui tema kaugus vasakust fookusest.

8.93. Ellipsi ekstsentrilisus $e = 0,4$ ja ellipsi punkti M kaugus juhtsirgest on 20. Leida punkti M kaugus fookusest, mis on selle juhtsirgega samal pool keskpunkti.

8.94. Leida ellipsil $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ punkt, mille fokaalraadiusvektorite skalaarkorrutis on võrdne väiksema pooltelje ruuduga.

8.95. Leida ellipsil $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ punkt, mille fokaalraadiusvektorid on risti.

8.96. Ellipsil, mille üks fookus asetseb punktis $F(3,0)$, on võetud punkt $M(4;2,4)$. Leida selle punkti kaugus vastavast juhtsirgest, teades, et ellipsi keskpunkt ühtib reeperi alguspunktiga.

8.97. Leida ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sellise punkti, mille abstsiss ja ordinaat on võrdsed, kaugus ellipsi tsentrist.

8.98. Leida punktide hulk, millest ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ on näha täisnurga all.

8.99. Leida ellipsi $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ ja sirge $2x - y - 9 = 0$ lõikepunktid.

8.100. Ringjoone keskpunkt ühtib ellipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ fokaaltelje kaasteljel asetseva tipuga ja ringjoon läbib antud ellipsi fookusi. Leida antud ellipsi ja ringjoone lõikepunktid.

8.101. Joonestada ellips, lähtudes tema järgnevast definitsioonist. Ellipsi punktideks on ühisele alusele, mille pikkuseks on ellipsi fookuste vaheline kaugus (2c), joonestatud kolmnurkade tipud, kui ülejäänud kahe külje summa on konstant (2a).

8.102. On antud ellips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Leida graafiliselt ellipsi fookused nende koordinaate arvutamata.

8.103. On antud elliptiline kontuur. Konstrueerida tema keskpunkt ja fookused.

Ellipsi puutujad

8.104. Määrata antud sirge asend antud ellipsi suhtes.

1) $2x - y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $3x + 2y - 20 = 0$, $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$;.

8.105. Leida sirge, mis puutub ellipsit $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ punktis (2,-3).

8.106. Mitu ellipsi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ puutujat läbib antud punkti: 1) A(1,1); 2) B(3,1); 3) C(0,2) ?

8.107. On teada, et sirge $4x - 5y - 40 = 0$ puutub ellipsit $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$. Leida puutepunkt.

8.108. Sirge $y = 3x - 7$ puutub ellipsit punktis A(2,-1). Koostada ellipsi võrrand.

8.109. Koostada sellise ellipsi võrrand, mille fookused asetsevad abstsissteljel sümmeetriliselt reeperi alguspunkti suhtes, kui on teada ellipsi puutuja $3x + 10y - 25 = 0$ ja tema väiksem pooltelg $b = 2$.

8.110. Ellips puutub abstsisstelge punktis A(7,0) ja ordinaattelge punktis B(0,4). Ellipsi teljed on paralleelsed reeperi telgedega. Koostada ellipsi võrrand.

8.111. Ellips puutub ordinaattelge punktis (0,5), lõikab abstsisstelge punktides (5,0) ja (11,0). Koostada ellipsi võrrand, kui on teada, et tema teljed on paralleelsed reeperi telgedega.

8.112. Ellips lõikab x-telge punktides A(3,0) ja B(7,0) ja puutub y-telge punktis C(0,3). Ellipsi teljed on paralleelsed reeperi telgedega. Koostada ellipsi võrrand.

8.113. Ellips läbib punkti $P(3, \frac{12}{5})$ ja puutub sirget $4x + 5y = 25$. Koostada ellipsi võrrand ja leida punkt, milles ta puutub antud sirget. Reeperi teljed ühtivad ellipsi sümmeetriatelgedega.

8.114. Leida ellipsi $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{9} = 1$ puutujad, mis läbivad punkti $A(-6,3)$.

8.115. Leida sirge ja ellipsi puutumise tarvilik ja piisav tingimus.

8.116. Leida ellipsi $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ puutujad, mis on paralleelsed sirgega $2x - y + 17 = 0$.

8.117. Leida ellipsi $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ puutujad, mis on paralleelsed sirgega $6x - 2y - 5 = 0$.

8.118. Leida antud ellipsi normaal, mis on paralleelne antud sirgega.

1) $\frac{x^2}{676} + \frac{y^2}{169} = 1$, $24x - 5y = 0$;

2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $3x - y + 5 = 0$.

8.119. Leida ellipsi $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ sirgega $4x - 2y + 23 = 0$ paralleelsete puutujate vaheline kaugus.

8.120. Leida ellipsi $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ puutujad, mis on risti sirgega $13x + 12y - 115 = 0$.

8.121. Leida ellipsi $3x^2 + 8y^2 = 45$ puutujad, mille kaugus ellipsi tsentrist on 3.

8.122. Leida ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ puutuja, mille kauguste sune ellipsi fookusteni on 9.

8.123. Ellips puutub ordinaattelge reeperi alguspunktis ja tema keskpunkt asetseb punktis Q(5,0). Koostada ellipsi võrrand, teades, et ellipsi ekstsentrilisus on
1) $e = 0{,}8$;
2) $e = 0{,}6$.

8.124. Ellips puutub kahte sirget $x + y = 5$ ja $x - 4y = 10$. Reeperi telgedeks on valitud ellipsi sümmeetriateljed. Koostada ellipsi võrrand.

8.125. Leida kahe antud ellipsi ühised puutujad:
1) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ ja $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$;
2) $\frac{x^2}{6} + y^2 = 1$ ja $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;
3) $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$ ja $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$.

8.126. Tõestada, et ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutuja lõik, mis jääb ellipsi fokaaltelje tippudest tõmmatud puutujate vahele, on nähtav fookustest täisnurga all.

8.127. Tõestada, et ellipsi iga puutuja moodustab võrdsed nurgad puutepunktist tõmmatud fokaalraadiusvektoritega.

8.128. Ellipsi $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ vasakust fookusest on x-telje suhtes nürinurga α all suunatud valguskiir. Jõudes ellipsini, kiir peegeldub. Leida sirge, millel asetseb peegeldunud kiir.

8.129. Tõestada, et ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutujad lõikavad fokaaltelje otspunktidesse asetatud kahel puutujal ära lõigud, millede korrutis on jääv suurus ning võrdne konstandiga b^2.

8.130. Tõestada, et puutujad ühe ja sama diameetri otspunktides on omavahel paralleelsed ja vastupidi, kui kaks ellipsi puutujat on paralleelsed, siis puutepunktid asuvad ühel ja samal diameetril.

8.131. Tõestada, et ellipsi suvalise puutuja kauguste korrutis tema fookusteni on jääv suurus, mis on võrdne väiksema pooltelje ruuduga.

8.132. Leida punktidest $M_1(x_1,y_1)$ ja $M_2(x_2,y_2)$ ellipsile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ tõmmatud puutujate lõikepunktide koordinaadid.

8.133. Tõestada, et võrrandit $\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = 1$ võib mistahes φ puhul vaadelda mingi ellipsi puutuja võrrandina. Koostada selle ellipsi võrrand.

8.134. On antud ellipsi fookused $F_1(x_1,y_1)$, $F_2(x_2,y_2)$ ja puutuja normaalvõrrandiga $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$. Tõestada, et $(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p)(x_2\cos\varphi + y_2\sin\varphi - p) > 0$. Koostada ellipsi võrrand.

Ellipsi kõõlud ja diameetrid

8.135. Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kõõl läbib ellipsi fookust $F(c,0)$ ja on risti ellipsi fokaalteljega. Leida selle kõõlu pikkus (ellipsi fokaallaius).

8.136. On antud ellips $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$. Leida sirge, millel asetsev ellipsi kõõl poolitub punktis A, kui
1) A(1,1) ;
2) A(1,2) .

8.137. On antud ellips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Leida sirge, millel asetsev ellipsi kõõl poolitub punktis E(1,1).

8.138. Sirge s läbib punkti A(1,-3) ja on ellipsi $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{12} = 1$ diameetri $2x + 5y = 0$ kaassihiline. Koostada sirge s võrrand.

8.139. Leida ellipsi $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ diameetril asetseva kõõlu pikkus, kui diameetri siht ühtib reeperi telgede poolt moodustatud teise veerandi nurga poolitaja sihiga.

8.140. Leida ellipsi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ sümmeetriatelgede vaheliste nurkade nurgapoolitajate sihiliste kõõlude pikkused.

8.141. Leida ellipsi $x^2 + 2y^2 = 1$ diameetril asetseva kõõlu pikkus, kui diameeter on kaasdiameetriks reeperi telgede vahelise nurga poolitajale.

8.142. Leida ellipsi $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ kaasdiameetrite vaheline nurk, kui üks neist moodustab ellipsi fokaalteljega nurga 30°.

8.143. Leida ellipsi $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{3}=1$ kaasdiameetritel asetsevate kõõlude pikkused, kui kaasdiameetritevaheline nurk on $\frac{\pi}{3}$.

Märkus. Antud ülesande korral on otstarbekas kasutada Apollouiuse teoreemi: $a^2+b^2=a'^2+b'^2$ ja $ab=a'b'\sin\varphi$, kus a ja b on ellipsi pooltteljed, $2a'$ ja $2b'$ kaasdiameetritel asetsevate kõõlude pikkused ja φ kaasdiameetritevaheline nurk.

8.144. Koostada ellipsi $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ selliste diameetrite võrrandid, millel asetsevate kõõlude pikkuseks on $2\sqrt{5}$ cm.

8.145. On antud ellipsi kahel kaasdiameetril asetsevate kõõlude pikkused $2a'=18$ ja $2b'=14$ ning nendevaheline nurk $\varphi=\arcsin\frac{11}{21}$. Leida ellipsi pooltelgede pikkused.

8.146. Leida ellipsi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ kaasdiameetrid, milledel asetsevad võrdse pikkusega kõõlud.

8.147. Ellipsi $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ diameeter läbib punkti A(4,2). Leida antud diameetri ja tema kaasdiameetri tõusud ja neil asetsevate kõõlude pikkused.

8.148. Leida ellipsi $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$ kahe kaasdiameetri tõusud ja nendel asetsevate kõõlude pikkused, kui üks diameetritest läbib punkti B(2,3).

8.149. OA ja OB on ellipsi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ kaks kaasdiameetritel asetsevat poolkõõlu, M on kõõlu AB keskpunkt, C on kiire OM lõikepunkt ellipsiga. Määrata suhe $\frac{OM}{OC}$.

8.150. Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kaasdiameetritel asetsevate kõõlude otspunktid on ühendatud kõõludega. Koostada vaadeldud kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

8.151. Veenduda, et kaks ellipsit $n^2x^2 + m^2y^2 - m^2n^2 = 0$, $m^2x^2 + n^2y^2 - m^2n^2 = 0$ $(m \neq n)$ lõikuvad neljas punktis, mis asetsevad ringjoonel, mille keskpunkt on reeperi alguspunktis. Leida selle ringjoone raadius R.

8.152. Koostada ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ vasakut fookust läbivate kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

8.153. Koostada ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ fokaalteljel mitteasetsevast tipust lähtuvate kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

8.154. Ellipsi kõõlud lõikavad ellipsist välja antud pindalaga segmendid. Koostada selliste kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

8.155. Tõestada, et kolmnurga pindala, kui kolmnurga tippudeks on ellipsi tsenter ja kaasdiameetrite lõikepunktid ellipsiga, ei sõltu kaasdiameetrite paari valikust.

Ellipsisse ja tema ümber joonestatud kujundid

8.156. Antud ellipsisse joonestada ruut.

8.157. Arvutada ellipsisse joonestatud ruudu külje pikkus.

8.158. Ümber antud ellipsi joonestada ruut.

8.159. Koostada ellipsi $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ ümber joonestatud ruudu külgede võrrandid.

8.160. Tõestada, et ellipsi ümber joonestatud rombi tipud on ellipsi sümmeetriatelgedel.

8.161. Ellipsisse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ on joonestatud korrapärane kolmnurk, mille üks tipp ühtib parempoolse fokaaltipuga. Leida kolmnurga kahe ülejäänud tipu koordinaadid.

8.162. Ellipsisse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ on joonestatud ristkülik, mille kaks vastaskülge läbivad fookusi. Arvutada selle ristküliku pindala.

8.163. Rombi külje pikkus on 5 cm ja kõrgus on 4,8 cm. Kahte rombi vastastippu läbib ellips, mille fookused ühtivad rombi kahe ülejäänud tipuga. Koostada ellipsi võrrand, võttes rombi diagonaalid reeperi telgedeks.

8.164. Määrata antud rööpkülikusse joonestatud suurima pindalaga ellips.

8.165. Tõestada, et suvalisest kolmnurgast, kolmnurga sisse joonestatud ellipsist ja viimasega sarnasest, sama keskpunktiga lähtekolmnurga ümber joonestatud ellipsist koosneva konfiguratsiooni raskuskese on ellipsite keskpunktis.

Reeper on nihutatud

8.166. Ellipsit pooltelgedega a ja b on nihutatud nii, et tema keskpunkt ühtib punktiga $C(x_0, y_0)$, aga teljed on paralleelsed reeperi telgedega. Missugune võrrand määrab ellipsi uues asendis?

8.167. Kirjeldada võimalikult täpselt antud võrranditega määratud kõveraid, teisendades eelnevalt nende võrrandid lihtsamale kujule:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$;
2) $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$;
3) $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$.

8.168. Ellipsi fokaalteljeks on sirge $y + 6 = 0$ ja ellipsi üheks tipuks punkt $B_1(3,-1)$. Koostada ellipsi võrrand, teades, et tema ekstsentrilisus $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

8.169. Leida ellips, mis on sümmeetriline ellipsiga $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ punkti $S_0(x_0, y_0)$ suhtes. Koostada ellipsi telgede võrrand.

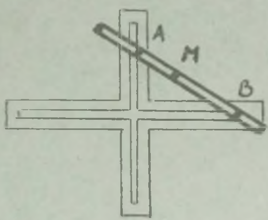
Liikumised

8.170. Määrata punkti M trajektoor, kui ta oma liikumisel jääb punktile F(-1,0) kaks korda lähemale kui sirgele $x = -4$.

8.171. Konstantse pikkusega lõik AB libiseb oma otstega mööda täisnurga haarasid. Võtta lõigul suvaline punkt M ja leida punkti M trajektoor lõigu kirjeldatud liikumisel.

8.172. Leida punkti M trajektoor eelmises ülesandes kirjeldatud liikumisel, kui punkt M asetseb lõigu AB pikendusel.

8.173. Joonisel (8.9) on kujutatud elliptiline sirkel, millel on võimalik kruvide abil muuta joonlaua AB pikkust ja pliiatsi kinnituskohta M. Kuidas seada sirkel, et joonestada ellipsid:



Joon. 8.9.

1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

2) $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$;

3) $x^2 + y^2 = 25$?

8.174. Liikumatu alusega kolmnurga tipp muutub nii, et kolmnurga ümbermõõt säilib. Leida tipu trajektoor tingimusel, et alus on 24 cm ja ümbermõõt 50 cm.

8.175. Liikuv punkt P joonestab ringjoone. Milline on teise liikuva punkti M trajektoor, kui punktide M ja P abstsissid on võrdsed ja ordinaatide suhe λ = const?

8.176. Ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sisse on joonestatud kolmnurk ABM, mille üks külg AB ühtib ellipsi fokaalkõõluga. Tipp M liigub mööda ellipsit. Leida trajektoor, mille joonestab kolmnurga ABM raskuskese.

8.177. Kolmnurga ABC tipud on A(0,0), B(2,2) ja C(-2,2). Punkt M liigub nii, et punkti M kauguste ruutude summa kolmnurga ABC kolmest küljest jääb konstantseks ja võrdub 16 ühikuga. Leida punkti M trajektoor.

8.178. Koostada punkti A(3,0) läbivate ja ringjoont $x^2 + y^2 = 25$ puutuvate ringjoonte keskpunktide hulga võrrand. Teha joonis.

8.179. Reeperi alguspunkti ümber pöörleb varras OP = p nurkkiirusega ω, ümber punkti P pöörleb teine varras PQ = q nurkkiirusega ω. Leida punkti Q trajektoor, teades, et algmomendil mõlemad vardad ühtivad x-teljega ja punkt P asub O ja Q vahel. Vaadelda eraldi juhte, kui $p > q$, $p < q$ ja $p = q$.

8.180. Ruudu küljed on määratud võrranditega $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Ruudu tippe läbivatele ellipsitele on tõmmatud puutujad punktist $M_0(x_0, y_0)$. Koostada puutepunktide hulga võrrand.

8.181. Antud ellipsi üks fookus liigub mööda täisnurga üht külge ja ellips puutub selle täisnurga teist külge. Määratakse ellipsi keskpunkti trajektoor.

8.182. Ellips, mille väiksem pooltelg on b, osutub ringjoone (raadiusega R = 12) projektsiooniks. Määrata nurk φ, mis on nende tasandite vahel, kus asuvad ellips ja ringjoon.

8.183. Püstpöördsilinder, mille alusel diameeter on 12 cm, on läbi lõigatud tasandiga, mis moodustab nurga 30°. Leida lõike-ellipsi teljed ja ekstsentrilisus.

8.184. Näidata, et pöördkoonuse lõige tasandiga, mis ei ole paralleelne alusega, on ellips juhul, kui ta on kinnine joon.

HÜPERBOOL

Definitsioon. Hüperbooliks nimetatakse tasandi kõigi selliste punktide hulka, mille kauguste vahe tasandi mingist kahest fikseeritud punktist F_1 ja F_2 on absoluutväärtuse poolest konstantne nullist erinev suurus, mis on väiksem punktide F_1 ja F_2 vahelisest kaugusest.

Punkte F_1 ja F_2 nimetatakse hüperbooli fookusteks.

Valime ristreeperi tasandil nii, et x-teljeks on valitud sirge F_1F_2 ja y-teljeks lõigu F_1F_2 keskristsirge. Sel korral fookuste koordinaadid on $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $F_1F_2 = 2c$, $c > 0$.

Tasandi punkt $X(x,y)$ asetseb hüperboolil parajasti siis, kui

$$\left| |\overrightarrow{F_1X}| - |\overrightarrow{F_2X}| \right| = 2a , \tag{9.1}$$

kus $2a$ on definitsioonis esinev konstant ning on täidetud tingimus

$$a < c . \tag{9.2}$$

Valitud reeperis võrrand (9.1) omab kuju

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right| = \pm 2a .$$

Viies teise liidetava paremale poole ja võttes ruutu, saame

$$a^2 + cx = \pm a \sqrt{(x+c)^2 + y^2} .$$

Võttes veel kord ruutu, saame

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) .$$

Kuna $c > a$, siis leidub reaalarv

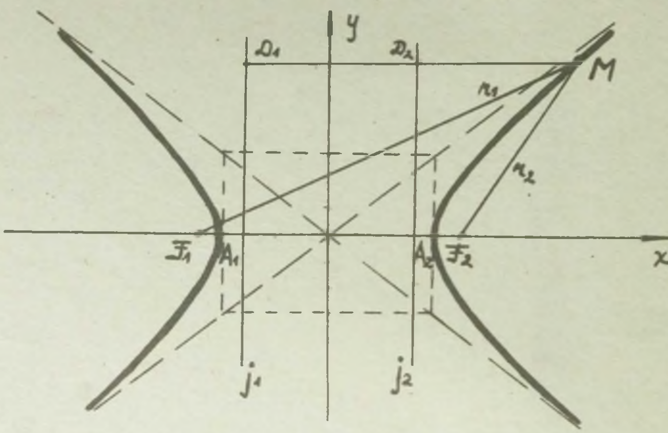
$$b^2 = c^2 - a^2 , \tag{9.3}$$

mille asendamisel eelmisesse võrrandisse saame

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{H}$$

Võrrandit (H) nimetatakse hüperbooli kanooniliseks võrrandiks, sest võrrandid (H) ja (9.1) on ekvivalentsed, s. t. (H) $\leftrightarrow$ (9.1).

Hüperboolil on kaks sümmeetriatelge, nn. hüperbooli telge, mis valitud reeperi korral on võetud selle telgedeks. Telge, millel asetsevad fookused, nimetatakse fokaalteljeks ehk reaalteljeks. Teise teljega (y-teljega) hüperboolil ei ole reaalseid lõikepunkte ja seda telge nimetatakse imaginaarteljeks. Reaalseid tippe (fokaaltippe) on kaks: $A_1(-a,0)$



Joon. 9.1.

ja $A_2(a,0)$. Arve a ja b hüperbooli kanoonilises võrrandis (H) nimetatakse vastavalt reaal- (ehk fokaal-) ja imaginaarpooltelgedeks. Sirgeid

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{9.4}$$

nimetatakse hüperbooli asümptootideks.

Suurust

$$e = \frac{c}{a}, \quad e > 1 \tag{9.5}$$

nimetatakse hüperbooli ekstsentrilisuseks. Sirgeid

$$x = \pm \frac{a}{e} \tag{9.6}$$

nimetatakse hüperbooli juhtsirgeteks ehk direktrissideks (vt. joon. 9.1 sirged j_1 ja j_2).

Kui M on hüperbooli suvaline punkt, siis

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e\,, \tag{9.7}$$

kus r_1 ja r_2 on punkti M fokaalraadiused, s. t. fokaalraadius vektorite $\overrightarrow{F_1M}$ ja $\overrightarrow{F_2M}$ pikkused

$$r_1 = |\overrightarrow{F_1M}| = ex + a\,,\ r_2 = |\overrightarrow{F_2M}| = ex - a \tag{9.8}$$

ja d_1 ja d_2 on punkti M kaugused vastavatest juhtsirgetest j_1 ja j_2 ($d_1 = MD_1$; $d_2 = MD_2$).

Hüperbooli parameetriks nimetatakse suurust

$$p = eq = \frac{b^2}{a}\,, \tag{9.9}$$

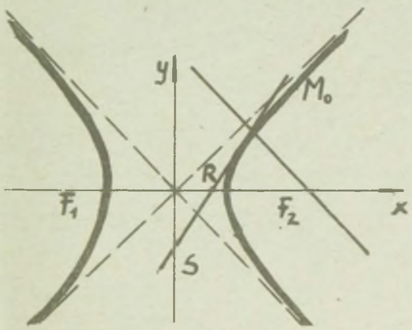
kus q on hüperbooli fookuse kaugus vastavast juhtsirgest

$$q = \frac{b^2}{c}\,. \tag{9.10}$$

Kui hüperbool on määratud kanoonilise võrrandiga (H), siis hüperbooli puutuja võrrandi saame pooliti asendusvõttega

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1\,, \tag{9.11}$$

kus $M_0(x_0, y_0)$ on puutepunkt. Hüperbooli punkti M_0 läbivat sirget nimetatakse hüperbooli normaaliks, kui ta on risti punkti M_0 läbiva hüperbooli puutujaga. Hüperbooli (H) normaali võrrand on



Joon. 9.2.

$$\frac{y_0}{b^2}x + \frac{x_0}{a^2}y = \frac{c^2}{a^2b^2}x_0y_0\,. \tag{9.12}$$

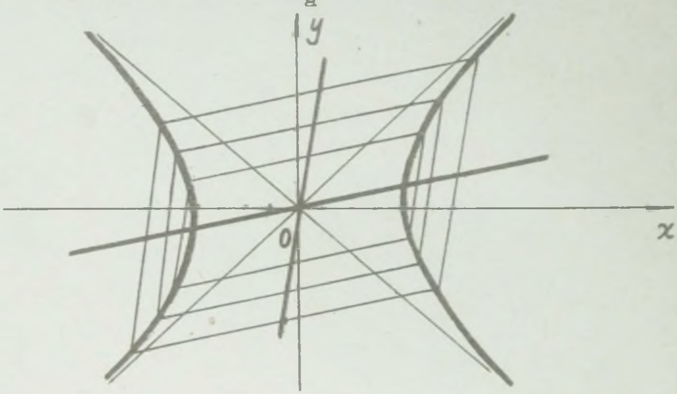
Sirge sihti, millel asetsevad hüperbooli paralleelsete kõõlude keskpunktid, nimetatakse kõõlu sihi kaassihiks ehk konjugeeritud sihiks antud hüperbooli suhtes. Ristuvaid kaassihte nimetatakse hüperbooli peasihtideks. Enese kaassihti nimetatakse hüperbooli asümptootiliseks sihiks. Iga hüperbooli korral eksisteerib parajasti üks paar peasihte ja üks paar asümptootilisi sihte.

Sirget, millel asetsevad hüperbooli paralleelsete kõõlude keskpunktid, nimetatakse hüperbooli diameetriks, täpsemalt - kõõlude sihi kaasdiameetriks ehk kõõlude sihiga konjugeeritud kaasdiameetriks. Kui hüperbooli paralleelsete kõõlude tõus on k, siis kõõlude sihiga konjugeeritud diameetri võrrand omab kuju

$$y = \frac{b^2}{a^2k} x . \qquad (9.13)$$

Kaht diameetrit, milledest kumbki poolitab teisega paralleelsed kõõlud (vt. joon. 9.3), nimetatakse kaasdiameetriteks ehk konjugeeritud diameetriteks. Kaasdiameetrite tõusud k_1 ja k_2 on seotud võrdusega

$$k_1k_2 = \frac{b^2}{a^2} . \qquad (9.14)$$



Joon. 9.3.

Peasihilisi diameetreid nimetatakse hüperbooli peadiameetriteks ja nad ühtivad hüperbooli sümmeetriatelgedega (telgedega). Hüperbooli fokaalteljega ühtivat peadiameetrit nimetatakse ka fokaaldiameetriks. Fokaaldiameetril asetsevat hüperbooli kõõlu nimetatakse fokaalkõõluks. Fokaalkõõlu pikkus on 2p.

Hüperbooli <u>fokaallaiuseks</u> nimetatakse hüperbooli fookust läbiva ja fokaalteljega ristuva kõõlu pikkust.

Võrrandid

$$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t}, \\ y = b\tan t \end{cases} \tag{9.15}$$

on ekvivalentsed hüperbooli kanooniliste võrranditega (H) ja neid nimetatakse hüperbooli <u>parameetrilisteks</u> võrranditeks. Parameetrilised võrrandid on ekvivalentsed vastavate <u>vektorvõrranditega</u>

$$\vec{x} = (a\,\mathrm{ch}\,t,\ b\,\mathrm{sh}\,t)$$

ja (9.16)

$$\vec{x} = \left(\frac{a}{\cos t},\ b\tan t\right),$$

kus t on parameeter.

Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <u>kaashüperbooliks</u> nimetatakse hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$.

Punkti $P_0(x_0, y_0)$ <u>polaariks</u> hüperbooli (H) suhtes nimetatakse punktist P_0 hüperboolile tõmmatud puutujate puutepunkte P_1 ja P_2 ühendavat sirget P_1P_2 (punkt P_0 asetseb väljaspool hüperbooli). Punkt P_0 on sirge P_1P_2 <u>poolus</u> antud hüperbooli suhtes.

Hüperbooli iga punkti P_0 polaariks on hüperpooli puutuja selles punktis ja hüperbooli iga puutuja <u>pooluseks</u> on puutepunkt. Kui punkt P_0 on hüperbooli sees, siis sellest punktist ei saa tõmmata hüperboolile ühtegi puutujat. Sel korral võrrand

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1 \tag{9.17}$$

määrab punkti P_0 polaari, mis asetseb väljaspool hüperbooli.

<u>9.1.</u> Leida hüperbooli võrrand, kui ta reaal- ja imaginaarpooltelljed on

1) $a = 5$, $b = 3$;
2) $a = 4$, $b = 6$;
3) $a = 3{,}2$, $b = 2{,}3$;
4) $a = 2\sqrt{5}$, $b = 3\sqrt{5}$;
5) $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{7}$;
6) $a = 1$, $b = \sqrt{0{,}1}$.

9.2. Joonestada hüperbooli $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ fookused ja asümptoodid.

9.3. Leida võrdhaarse hüperbooli teljed, teades, et hüperbool $x^2 - y^2 = a^2$ läbib punkti
1) (10,6);
2) (3,1).

9.4. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, teades, et ta läbib punkte
1) $A(8,-6)$, $B(6,-3)$;
2) $K(6,-1)$, $L(-8, 2\sqrt{2})$;
3) $P(-5,2)$, $Q(2\sqrt{5}, \sqrt{2})$.

9.5. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = -1$ fookuste koordinaadid ja koostada asümptootide võrrandid.

9.6. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ pooltelјed, fookuste koordinaadid, ekstsentrilisus ja asümptootide võrrandid.

9.7. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, kui hüperbooli fookusteks on punktid $F_1(-10,0)$, $F_2(10,0)$ ja hüperbool läbib punkti $M(12, 3\sqrt{5})$.

9.8. Leida antud hüperbooli pooltelјed, fookused, ekstsentrilisus ja parameeter:
1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$;
2) $4x^2 - 9y^2 = 36$;
3) $3x^2 - y^2 = 12$;
4) $3x^2 - 8y^2 = 6$;
5) $-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$;

6) $25y^2 - 4x^2 = 4$;
7) $y^2 - x^2 = 1$;
8) $15y^2 - 8x^2 = 40$;
9) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$;
10) $-6x^2 + 10y^2 = 60$;
11) $-\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{81} = 1$.

9.9. Leida hüperbooli asümptoodid:
1) $x^2 - 2y^2 = 1$;
2) $x^2 - y^2 = 3$;
3) $2x^2 - 3y^2 = 8$;
4) $5x^2 - y^2 = 1$;
5) $3y^2 - 5x^2 = 12$;
6) $4y^2 - x^2 = 18$.

9.10. Hüperbooli teljed ühtivad reeperi telgedega. Koostada hüperbooli võrrand, kui
1) fookustevaheline kaugus on 10 ja tippudevaheline kaugus on 8;
2) fokaalpooltelg on 5 ning tipud poolitavad keskpunkti ja fookustevahelised lõigud;
3) fokaalpooltelg on 6 ja hüperbool läbib punkti A(9,-4);
4) ekstsentrilisus on $\sqrt{2}$ ja B(-5,3) on hüperbooli punkt.

9.11. Leida hüperbooli kanooniline võrrand, kui
1) $a + b = 50$, $c = 10\sqrt{13}$;
2) $a - b = 1$, $c = \sqrt{221}$;
3) $c^2 = 70$, $p = 3$;
4) $c = 5$, $p = 24$;
5) $a = 2{,}5$, $p = 4{,}5$.

9.12. On antud hüperbool $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Leida
1) fookuste koordinaadid;
2) ekstsentrilisus;
3) asümptootide ja juhtsirgete võrrandid;
4) kaashüperbooli võrrand ja selle ekstsentrilisus.

9.13. Koostada hüperbooli võrrand, kui on teada tema ekstsentrilisus $e = \frac{5}{4}$, üks fookus $F(5,0)$ ja vastav juhtsirge $5x - 16 = 0$.

9.14. Koostada hüperbooli võrrand, võttes reaalteljeks x-telje, imaginaarteljeks y-telje ning teades kaht parameetrit:

a) $a = 8$, $e = 1{,}25$;

b) $b = 5$, $e = 1\frac{1}{12}$;

c) $c = 3\sqrt{5}$, $e = 0{,}5\sqrt{5}$;

d) $a = \sqrt{5}$, $e = 0{,}6\sqrt{5}$;

e) $c = 2$, $e = 2$.

9.15. Leida hüperbooli poolteljed, kui

1) fookustevaheline kaugus on 8 ja juhtsirgetevaheline kaugus on 6;
2) fookustevaheline kaugus on 6 ja juhtsirgetevaheline kaugus on 10;
3) fookused asetsevad 5 ühiku kaugusel tsentrist ja asümptootide võrrandid on $y = \pm 2x$;
4) fookustevaheline kaugus on 10 ja asümptootide võrrandid on $x = \pm 2y = 0$.

9.16. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, kui on antud hüperbooli asümptootide võrrandid ja hüperbool läbib punkti M_0:

1) $5y = \pm 3x$, $M_0(10,-3\sqrt{3})$;
2) $2y = \pm x = 0$, $M_0(12,3\sqrt{3})$;
3) $y = \pm \frac{5}{3}x$, $M_0(6,9)$;
4) $5x \pm 12y = 0$, $M_0(24,5)$;
5) $y = \pm \frac{2}{3}x$, $M_0(\frac{9}{2}, -1)$.

9.17. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, teades et hüperbooli fookused asetsevad x-teljel ja

1) hüperbool on võrdhaarne ning juhtsirgete võrrandid on $x = \pm 2$;
2) juhtsirged on määratud võrrandiga $x = \pm 3\sqrt{2}$ ja asümptoodid on risti;

3) asümptootide võrrandid on $3x \pm 4y = 0$ ning juhtsirgete võrrandid on $5x \pm 16 = 0$;

4) juhtsirgete võrrandid on $3x = \pm 4$ ning $M_1(-3, \frac{5}{2})$ on hüperbooli punkt.

9.18. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, kui

1) juhtsirgetevaheline kaugus on $\frac{32}{5}$ ja ekstsentrilisus $e = \frac{5}{4}$;

2) asümptootidevaheline nurk on 60° ja $c = 2\sqrt{3}$.

9.19. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, kui tema fookused asetsevad ordinaatteljel sümmeetriliselt reeperi alguspunkti suhtes ning

1) fookustevaheline kaugus on $2c = 10$ ja ekstsentrilisus $e = \frac{5}{3}$;

2) asümptootide võrrandid on $y = \pm \frac{12}{5} x$ ja tippudevaheline kaugus on 48;

3) juhtsirgetevaheline kaugus on $7\frac{1}{7}$ ja ekstsentrilisus $e = \frac{7}{5}$.;

4) asümptootide võrrandid on $y = \pm \frac{4}{3}$ ja juhtsirgetevaheline kaugus on $6\frac{2}{5}$.

9.20. Arvutada hüperbooli $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ asümptootide ja sirge $9x + 2y - 24 = 0$ poolt moodustatud kolmnurga pindala.

9.21. Kirjutada hüperbooli asümptootide võrrandid ja arvutada asümptootidevaheline nurk, mille sees on hüperbool:

a) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1$;

b) $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$;

c) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1$;

d) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

9.22. 1) Leida sõltuvus hüperbooli ekstsentrilisuse ja tema asümptootide vahelise nurga vahel;

2) väljendada hüperbooli pooltelgede suhe ekstsentrilisuse abil. Kuidas ekstsentrilisuse suurus avaldab mõju hüperbooli kujule?

9.23. Leida hüperbooli asümptootide vaheline nurk, kui
1) ekstsentrilisuse $e = 2$;
2) fookustevaheline kaugus on kaks korda suurem juhtsirgetevahelisest kaugusest.

9.24. Leida hüperbooli ekstsentrilisus, kui
1) asümptootidevaheline nurk on 60°;
2) asümptoodid on risti;
3) reaaltelg on näha antud hüperbooli fookusest 60° nurga all.

9.25. Leida sirged, mis läbivad punkti $A(2,-5)$ ja on paralleelsed hüperbooli $x^2 - 4y^2 = 4$ asümptootidega.

9.26. Reeperi teljed ühtivad hüperbooli telgedega. Koostada hüperbooli võrrand, kui on antud hüperbooli ühe asümptoodi ja ühe juhtsirge lõikepunkt $P(3,2;\ 2,4)$.

9.27. On antud võrdhaarne hüperbool $x^2 - y^2 = 8$. Leida punkti $M(-5,3)$ läbiv konfokaalne hüperbool.

Märkus. Teist järku kõveraid nimetatakse konfokaalseteks ehk kaasfokaalseteks, kui nende fookused ühtivad.

9.28. Koostada kahe kaashüperbooli võrrand, teades, et esimese hüperbooli juhtsirgete vaheline kaugus on 7,2 ja tema kaashüperbooli juhtjoonte vaheline kaugus on 12,8.

9.29. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbool läbib ellipsi fookusi ja hüperbooli fookused ühtivad ellipsi tippudega: 1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$; 2) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

9.30. Hüperbooli fookused ühtivad ellipsi fookustega. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, kui on antud ellipsi kanooniline võrrand ja hüperbooli ekstsentrilisus:
1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $e = 2$; 2) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$, $e = 1,25$.

9.31. Veenduda, et ellipsi $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ ja hüperbooli $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ lõikepunktid on ristküliku tippudeks. Koostada selle ristküliku külgede võrrandid.

9.32. Tõestada, et hüperbooli suvalise punkti M kaugus fookusest F on võrdne seda punkti läbiva asümptootilise sihiga sirgel asetseva lõigu pikkusega, mis on piiratud punktiga M ja fookusele F vastava juhtsirgega.

Antud tingimusi rahuldavad hüperbooli punktid

9.33. Leida hüperbooli ja sirge lõikepunktid:

1) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} = 1$, $y = x + 1$;

2) $2x^2 - 3y^2 = 15$, $y = x - 1$;

3) $x^2 - 3y^2 = 1$, $x + 2y - 1 = 0$;

4) $y^2 - 4x^2 = 9$, $y = 2x - 4$;

5) $x^2 - y^2 = 6$, $y = 3$;

6) $y^2 - x^2 = 7$, $y = 2$.

9.34. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$ ja järgmiste sirgete lõikepunktid:

1) $x - 5y = 0$;

2) $2x + y - 18 = 0$;

3) $x - y + 5 = 0$;

4) $\sqrt{10x} - 5 + 15 = 0$.

9.35. Tõestada, et hüperbooli asümptootidega ja puutujaga piiratud kolmnurga pindala ei sõltu puutepunkti asendist hüperboolil.

9.36. Joonestada hüperbool, lähtudes järgmisest definitsioonist.

Hüperbooliks nimetatakse tasandil asetseva kolmnurkade parve kolmnurkade F_1F_2M tippude M hulka, kui kolmnurkadel on ühine alus $F_1F_2 = 2c$ ja ülejäänud külgede vahe absoluutväärtus on konstantne (2a).

9.37. Tõestada, et hüperbooli suvalise punkti kauguste korrutis hüperbooli asümptootideni on konstantne suurus.

9.38. Punkti nimetame hüperbooli suhtes sisemiseks, kui iga sirge, mis läbib seda punkti ja ei ole paralleelne kummagagi asümptootidest, lõikab hüperbooli kahes (erinevas) punktis. Missuguse tarviliku ja piisava tingimuse korral punkt $M_0(x_0, y_0)$ on hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ suhtes sisepunkt?

9.39. Missuguse tarviliku ja piisava tingimuse korral on kõik lõigu $M_1M_2\left(M_1(x_1,y_1)\text{ ja } M_2(x_2,y_2)\right)$ punktid hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sisepunktid?

9.40. Leida punktide $A(4,1)$, $B(1,-2)$, $C(\sqrt{2},1)$ asend hüperbooli $x^2 - y^2 = 1$ suhtes.

9.41. Missuguses punktis on hüperbooli $25x^2 - 9y^2 = 225$ abstsiss ja ordinaat võrdsed?

9.42. Hüperbooli $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ punkti M_0 abstsiss on 10 ja ordinaat on positiivne. Arvutada punktist M_0 lähtuvate raadiusvektorite pikkused ja nendevaheline nurk.

9.43. Määrata hüperbooli $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ punktid, mille kaugused vasaku fookuseni on 7.

9.44. Hüperboolil $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ leida punkt, mille korral

1) fokaalraadiusvektorid on risti;
2) punkti kaugus vasaku fookuseni on kaks korda suurem punkti kaugusest parema fookuseni.

9.45. Arvutada hüperbooli $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ punkti, mille abstsiss on

1) 10;
2) 1;

fokaalraadiusvektorite pikkused.

9.46. Hüperboolil $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$ on antud punkt $M_1(10, -\sqrt{5})$. Koostada võrrandid sirgetele, milledel asetsevad punkti M_1 fokaalraadiused.

9.47. Leida hüperboolil $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ punkt, mis on ühest asümptoodist kolm korda kaugemal kui teisest.

9.48. Millist tingimust peab rahuldama hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ekstsentrilisus selleks, et tema paremal harul eksisteeriks punkt, mis asetseb võrdsel kaugusel paremast fookusest ja vasakust juhtsirgest.

9.49. Hüperbooli ekstsentrilisus $e = \frac{3}{2}$, keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis, üks juhtsirge on antud võrrandiga $x = -8$. Arvutada antud juhtsirgele vastava fookuse kaugus punktist M_1, mille abstsiss on 10.

9.50. Tõestada, et hüperbooli juhtsirge läbib vastavast fookusest asümptoodile tõmmatud ristsirge ja asümptoodi lõikepunkti. Leida fookuse kaugus asümptoodist.

9.51. Leida valem, mis seob kahe kaashüperbooli ekstsentrilisusi. Selle valemi põhjal määrata võrdhaarse hüperbooli ekstsentrilisus.

9.52. Tõestada, et hüperbooli juhtsirgete poolt väljalõigatud asümptootide lõigud on võrdsed hüperbooli fokaaltippude vahelise kaugusega 2a. Kasutades toodud omadust, konstrueerida hüperbooli juhtsirged.

Puutujad

9.53. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutuja ja normaali võrrandid hüperbooli punktis $M_0(x_0, y_0)$.

9.54. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ punkti A(5,-4) läbiva puutuja võrrand.

9.55. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ puutujad tema lõikepunktides sirgega $3x - 5y = 0$.

9.56. Millist tingimust peab rahuldama kordaja m, et sirge $y = \frac{5}{2}x + m$ oleks hüperboolile $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

1) lõikajaks;

2) puutuks teda;

3) ei omaks hüperbooliga ühiseid punkte.

9.57. Milliste tingimuste korral on võimalik punktist $M_0(x_0, y_0)$ tõmmata hüperboolile $\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
1) kaks puutujat;
2) ainult üks puutuja.
Koostada mõlemal juhul puutujate võrrandid.

9.58. Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ juhtsirgete ja reaaltelje lõikepunktidest on tõmmatud puutujad antud hüperboolile. Koostada puutujate võrrandid ja leida puutepunktid.

9.59. Koostada punkti M(1,4) läbivate hüperbooli $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ puutujate võrrandid.

9.60. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ puutujad, mis läbivad antud punkti: 1) A(2,0); 2) B(-4,3); 3) C(5-1).

9.61. Koostada antud hüperbooli puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib antud punkti P :
1) $x^2 - 2y^2 = 8$, P(1,1) ;
2) $4y^2 - x^2 = 20$, P(-8,-1) .

9.62. Leida antud sirge poolus antud hüperbooli suhtes:
1) $x = 4$, $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$;
2) $2x - y - 6 = 0$, $x^2 - y^2 = 9$.

9.63. Leida punkti A(2,0) polaar hüperbooli $9x^2 - 8y^2 = 72$ suhtes.
Leida antud punkti polaar hüperbooli suhtes:
1) P(2,0), $9x^2 - 8y^2 = 72$;
2) P(-8,-8), $4y^2 - x^2 = 20$;
3) P(1,-10), $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$.

9.64. Tõestada, et iga sirge, mille poolus asetseb hüperbooli asümptoodil, on paralleelne asümptoodiga ja ühtib asümptoodiga, kui asümptoodil asetsev poolus on lõpmata kaugel.

9.65. Tõestada, et hüperbooli puutuja hüperbooli punktis X moodustab võrdsed nurgad sirgetega F_1X ja F_2X, kus F_1 ja F_2 on hüperbooli fookused.

9.66. Leida punktist (x_0, y_0) hüperboolile $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tõmmatud puutujate vaheline nurk.

9.67. Tõestada, et kui ellips ja hüperbool on kaasfokaalsed, siis on nad ortogonaalsed.

Märkus. Kahte teist järku kõverat nimetatakse kaasfokaalseteks, kui nende fookused ühtivad. Nurgaks kahe kõvera vahel nimetatakse nende kõverate puutujate vahelist nurka nende kõverate lõikepunktis. Kui kahe kõvera vaheline nurk on $\frac{\pi}{2}$, siis kõneldakse, et kõverad on ortogonaalsed.

9.68. Tõestada, et kaks võrdhaarset hüperbooli on ortogonaalsed, kui nende keskpunktid ühtivad ja ühe hüperbooli asümptoodid on teise hüperbooli sümmeetriatelgedeks.

9.69. Leida hüperboolil $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$ punkt, mida läbiv puutuja moodustab abstsissteljega nurga $\frac{\pi}{3}$.

9.70. Leida tarvilik ja piisav tingimus hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ja sirge

1) $Ax + By + C = 0$;

2) $y = kx + m$

puutumiseks.

9.71. Missuguse tarviliku ja piisava tingimuse korral punktist $M_0(x_0, y_0)$ hüperboolile $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tõmmatud puutujad puutuvad erinevaid hüperbooli harusid?

9.72. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ puutujad, mis on

1) paralleelsed sirgega $x + y - 7 = 0$;

2) paralleelsed sirgega $x - 2y = 0$;

3) risti sirgega $x - 2y = 0$.

9.73. Koostada hüperbooli $5x^2 - 4y^2 = 20$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on paralleelne sirgega $3x - 2y = 0$.

9.74. Leida hüperbooli $x^2 - 4y^2 = 12$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on risti sirgega $x + y - 1 = 0$.

9.75. Leida sirgega $2x + 4y = 5$ paralleelsed hüperbooli $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ puutujad ja arvutada puutujatevaheline kaugus d.

9.76. Leida normaal hüperboolile

1) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$ paralleelselt sirgega $18x - 10y + 7 = 0$;

2) $x^2 - y^2 = 1$ risti sirgega $13x - 12y = 0$.

9.77. On antud hüperbooli fookused $F_1(4,2)$, $F_2(-1,-10)$ ja puutuja $3x + 4y - 5 = 0$. Leida hüperbooli pooltelјed.

9.78. Hüperbool puutub sirget s punktis M_o. Koostada hüperbooli võrrand:

1) (s) $x - y - 2 = 0$, $M_o(4,2)$;

2) (s) $x - y - 3 = 0$, $M_o(5,2)$.

9.79. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookused asuvad abstsissteljel sümmeetriliselt reeperi alguspunkti suhtes, sirge $15x + 16y - 36 = 0$ on hüperbooli puutuja ja fokaaltippudevaheline kaugus $2a = 8$.

9.80. Koostada hüperboolil kanooniline võrrand, kui on antud hüperbooli asümptootide võrrandid $y = \pm 0{,}5x$ ja hüperbooli ühe puutuja võrrand $5x - 6y - 8 = 0$.

9.81. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ selline puutuja, mis asetseb võrdsel kaugusel keskpunktist ja paremast fookusest.

9.82. Tõestada, et hüperbooli suvalise puutuja lõik, mis on piiratud asümptootidega, poolitub puutepunktis.

9.83. Tõestada, et hüperbooli suvalise punkti fokaalraadiuste korrutis on jääv suurus.

9.84. Tõestada, et hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fookuste kauguste korrutis puutujast on b.

9.85.

1) Leida hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ fookuste kaugus asümptoodist.

2) Tõestada, et hüperbooli suvalise punkti kauguste korrutis asümptootideni on jääv suurus.

9.86. Koostada täisnurkade tippude hulga võrrand, kui täisnurkade küljed puutuvad antud hüperbooli.

9.87. Leida hüperbooli fookuse projektsioonide hulk hüperbooli puutujatele.

9.88. Kas antud hüperboolil $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ eksisteerivad puutujad kõikides sihtides? Eitava vastuse korral leida tingimused, mida peab rahuldama hüperbooli puutuja tõus.

9.89. On antud hüperbool ja puutepunkt:

1) $xy = m$, $M_0(x_0, y_0)$;
2) $xy = 8$, $M_0(2,4)$;
3) $xy = 12$, $M_0(3,4)$.

Koostada puutuja võrrand.

Diameetrid

9.90. Leida hüperbooli fokaallaius.

Märkus. Hüperbooli fokaallaiuseks nimetatakse hüperbooli fookust läbiva ja fokaalteljega ristuva kõõlu pikkust.

9.91. Tõestada, et hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ paralleelsete kõõlude keskpunktide hulk on sirge.

9.92. Hüperbooli $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ kõõl, mis läbib punkti $A(3,-1)$; poolitub selles punktis. Koostada vaadeldavat kõõlu kandva sirge võrrand.

9.93. Leida sirgega $3x - 4y + 6 = 0$ paralleelsete hüperbooli $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ kõõlude sihiga konjugeeritud diameetri võrrand.

9.94. Kontrollida, et hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ teljed osutuvad ainsateks diameetriteks, mis on risti nende kõõludega, mida nad poolitavad.

9.95. Näidata, et hüperbooli kõõlu otspunktidest tõmmatud puutujad läbivad ühte ja sama punkti diameetril, mis poolitab kõõlu.

9.96. On antud hüperbooli asümptoodid ja üks tema diameetritest CD. Joonestada selle diameetri kaasdiameeter.

9.97. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kaks kaasdiameetrit, mis moodustavad omavahel nurga α.

9.98. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = 1$ kaasdiameetrite vaheline nurk, kui on teada, et reaalsel diameetril asetsev kõõl on kaks korda suurem fokaalkõõlu pikkusest (fokaalkõõlu pikkus on 2a).

9.99. Leida hüperbooli

1) $x^2 - y^2 = 1$;

2) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$

kaasdiameetrid, millede vaheline nurk on 45°.

9.100. Leida hüperbooli $9x^2 - 16y^2 = 576$ diameeter, millel asetseva kõõlu pikkus on 20 cm.

9.101. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ diameeter, millel asetseva kõõlu pikkus on $2\sqrt{29}$.

9.102. Tõestada, et hüperbooli puutuja on puutepunkti läbiva diameetri kaassihiline sirge.

9.103. Hüperbooli tasandil on fikseeritud kaks punkti A ja B. Koostada sirgete AM ja BM lõikepunktide M hulga võrrand, kui sirged AM ja BM on hüperbooli kaassihilised.

9.104. Tõestada, et iga kolmnurk, mille tipud asetsevad hüperboolil $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, on täisnurkne.

9.105. Ruudu tipud asetsevad hüperboolil $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Leida ruudu tipud. Uurida, millistesse hüperboolidesse on võimalik joonestada ruutu.

9.106. Antud diameetril asetseva kõõlu AB ja diameetrile vastava kaassihilise kõõlu DE järgi joonestada hüperbool.

9.107. Koostada punkti A(a,0) läbivate hüperboolide $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kõikvõimalike kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

9.108. Tõestada, et kui rööpküliku küljed puutuvad hüperbooli, siis tema diagonaalid on hüperbooli kaasdiameetriteks.

9.109. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ paremast fookusest lähtuvate fokaalraadiuste keskpunktide hulga võrrand.

9.110. Läbi hüperbooli kahe suvaliselt fikseeritud punkti A ja B on tõmmatud asümptootidega paralleelsed sirged. Tõestada, et nii tekkinud rööpküliku

1) üks diagonaalidest läbib hüperbooli keskpunkt;
2) keskpunkti läbival diagonaalil asetseva kõõlu pool pikkust on keskmine võrdeline rööpküliku keskpunkti kaugusega punktist, kus vaadeldud diagonaal lõikab punkti A läbivat hüperbooli puutujat, ja rööpküliku keskpunkti kaugusega hüperbooli tsentrist;
3) keskpunkti läbival diagonaalil asetseva kõõlu pool pikkust on keskmine võrdeline rööpküliku keskpunkti kaugustega punktidest, kus rööpküliku teine diagonaal lõikab hüperbooli.

9.111. Läbi tasandi punkti A on pandud sirge, nii et lõikab hüperbooli punktides P ja Q. Tõestada, et $\frac{AP.AQ}{r^2} =$ $=$ const, kusjuures r on vaadeldava lõikajaga paralleelne hüperbooli fokaalraadiusvektori pikkus.

Teljed on teisendatud

9.112. Koostada hüperbooli võrrand, kui on teada tema pooltteljed a ja b, keskpunkt $C(x_0y_0)$ ja fookused asuvad sirgel,

1) mis on paralleelne x-teljega;
2) mis on paralleelne y-teljega.

9.113. Teisendada antud hüperbooli võrrandid kanoolilisele kujule:

1) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$;
2) $5x^2 - 6y^2 + 10x - 12y - 31 = 0$;
3) $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$;
4) $3x^2 - y^2 + 12x - 4y - 4 = 0$;
5) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 7 = 0$;
6) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

Määrata hüperboolide keskpunktid ja poolteljed.

9.114. Veenduda, et igaüks järgnevaist võrrandeist määrab hüperbooli, ja leida tema keskpunkti C koordinaadid, pooltelјed, ekstsentrilisus, asümptootide võrrandid ja juhtsirge võrrandid:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

9.115. Hüperbooli tsenter asetseb punktis Q(-15,0) ja üks fookustest ühtib reeperi alguspunktiga. Koostada hüperbooli võrrand, kui on teada, et ta lõikab ordinaatteljelt lõigu pikkusega 32 ühikut.

9.116. On antud võrdhaarse hüperbooli võrrand $x^2 - y^2 = a^2$. Leida tema võrrand uues reeperis, võttes reeperi telgedeks tema asümptoodid.

Liikumine

9.117. Määrata punkti M(x,y) trajektoor, kui ta jääb oma liikumisel sirgele $x = 1$ kaks korda lähemale kui punktile F(4,0) .

9.118. On antud punktid A(-1,0) ja B(2,0). Punkt M liigub nii, et kolmnurgas AMB nurk B jääb kaks korda suuremaks nurgast A . Määrata trajektoor.

9.119. Sirge liigub nii, et sirge ja reeperi telgede poolt moodustatud kolmnurga pindala jääb kogu liikumise jooksul konstantseks. Punkt M asub sirgel ning jagab sirge ja reeperi telgede vahelise lõigu suhtes λ. Koostada punkti M hulga võrrand.

9.120. Täisnurk liigub nii, et tema küljed kogu aeg puutuvad hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Leida täisnurga tippude hulga võrrand.

9.121. Koostada ringjoonte keskpunktide hulga võrrand, kui ringjooned lõikavad kahelt ristuvalt sirgelt välja antud pikkusega lõigud (2a ja 2b).

9.122. Tõestada, et ringjoonte keskpunktide hulk on hüperbool, kui ringjooned puutuvad väliselt antud ringjoont ja läbivad fikseeritud punkti.

9.123. Võrdetegur tasandi ühtlasel kokkusurumisel y-telje sihis on $\frac{4}{5}$. Teha kindlaks, milliseks kõveraks teiseneb sellel kokkusurumisel hüperbool $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

9.124. Määrata võrdetegur q tasandi ühtlasel kokkusurumisel x-telje sihis, kui hüperbool $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$ teiseneb hüperbooliks $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

9.125. Hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutuja s puutub hüperbooli punktis M_0. Koostada hüperbooli fookusest puutujale s tõmmatud ristsirge ja hüperbooli tsentrist puutepunktiga M_0 ühendava sirge lõikepunktide hulga võrrand.

9.126. Kaks sirget pöörlevad kahe liikumatu punkti ümber vastassuundades ja ühesuguse nurkkiirusega. Liikumise algul üks sirgetest ühtib punkte ühendava sirgega ning teine on sellega risti. Koostada nende sirgete lõikepunktide hulga võrrand.

9.127. Kaks varrast, mis pöörlevad vastassuundades kahe liikumatu punkti A ja B ümber, moodustavad kogu aeg sirgega AB nurgad, mis täiendavad teineteist täisnurgani. Leida varraste lõikepunktide hulk.

9.128. Tõestada, et sirged AM ja BM, mis ühendavad hüperbooli kahte fikseeritud punkti A ja B sama hüperbooli suvalise punktiga M, lõikavad hüperbooli asümptoodist välja konstantse pikkusega lõigud, mis on võrdsed samal asümptoodil asetsevate lõikudega, mis on välja lõigatud teise asümptoodiga paralleelsete ja antud punkte A ja B läbivate sirgete poolt.

9.129. Leida rööpküliku pindala, kui üks rööpküliku tipp on hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ punkt ja kaks külge asuvad hüperbooli asümptootidel.

9.130. Leida hüperboolide teiste fookuste hulk, kui hüperboolidel on sama fookus F ja hüperboolid läbivad kahte antud punkti A ja B.

9.131. Ellipsitel (hüperboolidel) on ühised üks fookus ja kaks puutujat. Koostada nende teiste fookuste hulga võrrand. Lahendada analoogiline ülesanne juhul, kui on antud fookus, üks punkt ja puutuja.

9.132. Sirged MM_1 ja MM_2 on hüperbooli puutujad ja M_1 ja M_2 puutepunktid. Tõestada, et

1) $$\frac{MM_1^2}{M_1F_1\cdot M_1F_2} = \frac{MM_2^2}{M_2F_1\cdot M_2F_2} = \frac{R^2}{b^2},$$

kus R — nelja sirget M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1 ja M_2F_2 puutuva ringjoone raadius, b — hüperbooli imaginaarne pooltelg;

2) $$\frac{MF_1^2}{F_1M \cdot FM_2} = \frac{MF_2^2}{F_2M_1 \cdot F_2M_2};$$

3) lõigud MM_1 ja MM_2 suhtuvad nagu nende sirgetega paralleelsed hüperbooli fokaalraadiusvektorite pikkused.

9.133. On antud kaks ristuvat sirget AB ja CD. Koostada hüperboolide fookuste hulga võrrand, kui hüperboolide asümptootideks on sirge AB ja nad puutuvad sirget CD punktis P.

9.134. ABC on hüperbooli sisse joonestatud kolmnurk, mille kaks tippu on liikumatud. Leida kolmanda külje keskpunktide hulga võrrand.

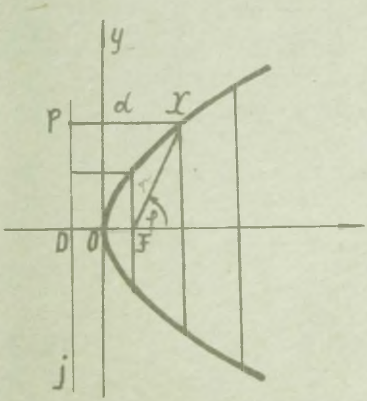
9.135. Joonestada graafik, mis kujutab 1 tonni hapniku ruumala ja rõhu vahelist sõltuvust 15 °C juures.

10. p e a t ü k k

P A R A B O O L

§ 1. Parabool

1. Definitsioon. Parabooliks nimetatakse tasandi selliste punktide hulka, mille kaugused ühest kindlast punktist F – fookusest – ja ühest kindlast sirgest j – juhtsirgest – on võrdsed (joon. 10.1).



Joon. 10.1.

Seome parabooliga ortonormeeritud kanoonilise reeperi järgmiselt: x-teljeks valime juhtsirgega ristuva sirge, mis läbib fookust F, y-teljeks valime lõigu FD keskristsirge, kus D on x-telje ja juhtjoone lõikepunkt. Telgede suunad valime joonisel (10.1) näidatud viisil. Tähistades fookuse kauguse juhtsirgest tähega p – parabooli parameeter $(p > 0)$ on valitud reeperis parabooli fookuseks punkt $F(\frac{p}{2}, 0)$ ja juhtsirge (e. direktrissi) võrrand omab kuju $x = -\frac{p}{2}$. Olgu $X(x,y)$ parabooli suvaline punkt, $r = XF$ punkti X kaugus fookusest ja $d = XP$ punkti kaugus juhtsirgest, lähtudes definitsioonist saame siis

$$r = d. \qquad (10.1)$$

Kuna $r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, $d = \left|x + \frac{p}{2}\right|$,

siis, asendades seosesse (10.1) ja lihtsustades, saadakse parabooli kanooniline võrrand[1]

$$y^2 = 2px. \qquad (P)$$

2. Parabooli kuju uurimine. Parabool on mittetsentraalne kõver (pinnal keskpunkti ei eksisteeri). Paraboolil on ainult üks sümmeetriatelg, mis valitud kanoonilise reeperi korral on võetud x-teljeks. Paraboolil on ainult üks tipp (kõvera lõikepunkt sümmeetriateljega) $O(0,0)$.

Poolintervallis $0 \leq x < +\infty$ on y kasvav funktsioon, kusjuures $\lim_{x \to +} y = +\infty$. Parabool $y^2 = 2px$ $p > 0$ ei oma x-telje negatiivsel osal ühtegi punkti. Parabool (P) on sümmeetriline parabooliga $y^2 = -2px$ ja mõlemaid paraboole võib esitada ühtse võrrandiga

$$y^2 = ax, \quad a \neq 0. \qquad (10.2)$$

3. Parabool on kumer kõver, sest ta asetseb tervikuna ühel pool iga oma puutuja suhtes. Parabooli (P) puutuja võrrand parabooli punktis $X_0(x_0, y_0)$ omab kuju

$$y_0 y = p(x + x_0). \qquad (10.3)$$

Parabooli puutuja parabooli punktis X_0 moodustab võrdsed nurgad parabooli teljega ja sirgega FX_0, kus F on parabooli fookus. Viimast omadust nimetatakse sageli parabooli optiliseks omaduseks: kui valgusallikas on parabooli fooku-

---

[1] Võrrandid (10.1) ja (P) on ekvivalentsed, kuna võrrandist (10.1) järeldub võrrand (P) ja viimasest võrrand (10.1).

ses, siis paraboolilt peegeldunud kiired on kõik paralleelsed parabooli teljega.

4. Sirget, millel asetsevad parabooli paralleelsete kõõlude keskpunktid, nimetatakse parabooli diameetriks ehk täpsemalt kõneldes paralleelsete kõõlude sihi kaasdiameetriks. Kõõlu sihti ja kaasdiameetri sihti nimetatakse kaassihtideks ehk konjugeeritud sihtideks antud parabooli suhtes.

Parabooli kõik diameetrid moodustavad teljega paralleelsete sirgete ebakimbu.

Parabooli diameetri võrrandi võib üldjuhul esitada kujul

$$my - pl = 0 \, , \tag{10.4}$$

kus $\bar{s} = (l,m)$ on paralleelsete kõõlude sihivektor ehk

$$y = \frac{p}{k} \, , \tag{10.5}$$

kus $k = \frac{m}{l}$ on paralleelsete kõõlude tõus.

Suhet $e = \frac{r}{d}$ nimetatakse koonuselõike ekstsentrilisuseks, kui r on punkti kaugus fookusest ja d on punkti kaugus vastavast juhtsirgest. Parabooli kui koonuselõike ekstsentrilisus $e = 1$.

Tasandi punkti M nimetatakse antud parabooli suhtes sisepunktiks, kui punkti M läbiv suvaline sirge, mille suund erineb parbooli telje sihist, lõikab parabooli kahes erinevas punktis.

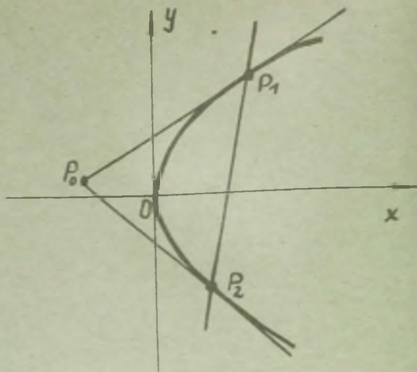
Kuna punkt P_o asetseb väljaspool parabooli, siis punkti P_o polaariks antud parabooli suhtes on antud punktist paraboolile tõmmatud puutujate puutepunkte ühendav sirge P_1P_2 (vt. joon. 10.2). Punkti $P_o(x_o, y_o)$ polaar määratakvõrrandiga

$$y_o y = p(x + x_o) \, . \tag{10.6}$$

Sirge P_1P_2 poolus on punkt P_o . Kui poolus P_o on paraboolil, siis on polaar parabooli puutuja selles punktis P_o.

Kui punkt P_0 on parabooli sees, siis võrrand (10.6) esitab punkti P_0 polaari, mis asetseb väljaspool parabooli.

Polaari on lihtne konstrueerida kahe vabalt võetud lõikaja abil (analoogiliselt ringjoone juhuga, vt. joon. 8.2).



Joon. 10.2.

10.1. Määrata parabooli $x^2 = 4y$ fookuse koordinaadid.

10.2. Koostada parabooli kanooniline võrrand, kui on antud parabooli parameeter:

1) $p = 4$; 2) $p = 3$; 3) $p = 2\frac{1}{2}$; $p = 3{,}2$.

10.3. Koostada parabooli $y^2 = 6x$ juhtsirge võrrand.

10.4. Leida fookuse koordinaadid ja juhtsirge võrrand paraboolidel:

1) $y^2 = 5x$; 3) $y = x^2$;

2) $y^2 = -2x$; 4) $x^2 = -3y$.

10.5. Koostada parabooli võrrand, kui on antud fookuse koordinaadid $F(3,0)$ ja juhtsirge võrrand $x = -1$.

10.6. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli tipp asetseb reeperi alguspunktis, parabool on sümmeetriline x-telje suhtes ja

1) läbib punkti $A(9,6)$;
2) läbib punkti $B(-1,3)$;
3) läbib punkti $C(2,-4)$;
4) läbib punkti $D(-2,4)$;
5) fookuse ja tipu vaheline kaugus on 4 pikkusühikut;
6) fookuse ja tipu vaheline kaugus on 3 pikkusühikut;
7) fookus asetseb punktis $F(5,0)$.

10.7. Koostada parabooli võrrand, kui parabool on sümmeetriline y-telje suhtes, parabooli tipp asetseb reeperi alguspunktis ja parabool

1) läbib punkti $A(1,1)$;
2) läbib punkti $B(4,-8)$;
3) läbib punkti $C(4,2)$;
4) läbib punkti $D(-4,-2)$;
5) fookus asetseb punktis $F(0,3)$;
6) fookus asetseb punktis $F(0,2)$.

10.8. Määrata parabooli $y^2 = 2px$ parameeter, teades, et fookusest kuni punktini, kus $x = 3$, tõmmatud fokaalraadius on 5.

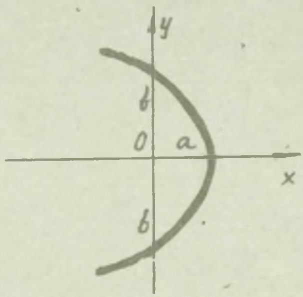
Reeper on nihutatud

10.9. Koostada parabooli võrrand, kui on antud tema fookus $F(4,3)$ ja juhtsirge $y + 1 = 0$.

10.10. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli juhtsirge on võetud ordinaatteljeks ja fookus asetseb punktis F:
1) $F(5,0)$;   2) $F(3,0)$.

10.11. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli juhtsirge on valitud abstsissteljeks ja fookus asetseb punktis $F(0,3)$.

10.12. Parabool on sümmeetriline x-telje suhtes, lõikab x-teljest välja lõigu a ja y-teljest lõigud b (joon. 10.3). Koostada parabooli võrrand.



Joon. 10.3.

10.13. Koostada parabooli võrrand, teades, et tema tipp asetseb punktis $A(a,b)$, parameeter on p , telg on paralleelne x-teljega ja parabool ulatub lõpmatusse
1) x-telje positiivses suunas;
2) x-telje negatiivses suunas.

10.14. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli telg on paralleelne y-teljega, telje suund ühtib y-telje suunaga, tipp asetseb punktis $A(a,b)$ ja parameeter on p. Lahendada ülesanne ka erijuhul, kui $A(1,-2)$ ja $p = 3$.

10.15. Parabool on sümmeetriline y-telje suhtes, lõikab abstsissteljest välja lõigud $\pm a$ ja ordinaatteljest lõigu b. Koostada parabooli võrrand.

10.16. Parabool on sümmeetriline x-telje suhtes, tema tipp asetseb punktis $A(-5,0)$ ja parabool lõikab ordinaatteljest välja kõõlu pikkusega $l = 12$. Koostada parabooli võrrand).

10.17. Koostada parabooli võrrand, teades, et tema tipp on punktis $C(-2,1)$, sümmeetriatelje suund ühtib y-telje negatiivse suunaga ning parameeter p on võrdne ellipsi $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$ juhtsirgete vahelise kaugusega.

10.18. Antud on parabooli tipp $A(6,-3)$ ja juhtsirge võrrand $3x - 5y + 1 = 0$. Leida selle parabooli fookus F.

10.19. Veenduda, et igaüks järgnevatest võrranditest määrab parabooli ning leida tema tipu A koordinaadid, parameeter p ja juhtsirge võrrand:

1) $y^2 = 4x - 8$; 2) $y^2 = 4 - 6x$;
3) $x^2 = 6y + 2$; 4) $x^2 = 2 - y$.

10.20. Määrata tipp, A, lõikepunktid x-teljega ja harade suund järgmistel paraboolidel:

1) $y = x^2 - 7x + 10$;
2) $y = 5 + 4x - x^2$;
3) $y = 2x^2 - 3x - 8$;
4) $y = 3x^2 + 5x + 4$;
5) $y = 5x - 3 - 2x^2$.

Kindlaid tingimusi rahuldavad punktid

10.21. Paraboolil $y^2 = 8x$ leida punkt, mille fokaalkaugus on 20.

10.22. Arvutada parabooli $y^2 = 20x$ punkti M fokaalkaugus, kui punkti M abstsiss on 7.

10.23. Paraboolil $y^2 = 4x$ leida punktid, mille abstsiss ja ordinaat on võrdsed.

10.24. Parabooli $y^2 = 4,5x$ punkti $M(x,y)$ kaugus juhtsirgest on $d = 9,125$. Arvutada punkti M kaugus parabooli tipust.

10.25. Leida tunnus, mille järgi võib määrata punkti $M_0(x_0, y_0)$ asendi parabooli $y^2 = 2px$ suhtes.

10.26. Määrata punktide $A(3,1)$, $B(4,2)$, $C(2,2)$ asend parabooli $x^2 = 8y$ suhtes.

10.27. Missuguse tarviliku ja piisava tingimuse puhul sirge $Ax + By + C = 0$

1) lõikab parabooli $y^2 = 2px$?
2) ei lõika parabooli $y^2 = 2px$?

10.28. Leida parabooli $y^2 = 18x$ ja antud sirgete lõikepunktid:

1) $6x + y - 6 = 0$;
2) $9x - 2y + 2 = 0$;
3) $4x - y + 5 = 0$;
4) $y - 3 = 0$.

10.29. Leida parabooli ja sirge lõikepunktid:

1) $y^2 = 9x$, $y = 2x - 2$;
2) $y^2 = 4x$, $12y - 16x = 9$;
3) $y^2 = -6x$, $y = -3x + 0,5$;
4) $x^2 = 25y$, $y - x + 4 = 0$;
5) $y^2 = 6x$, $3x - 2y + 6 = 0$.

10.30. Määrata hüperbooli $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$ ja parabooli $y^2 = 3x$ lõikepunktid.

10.31. Leida parabooli $y^2 = 12x$ ja ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ lõikepunktid.

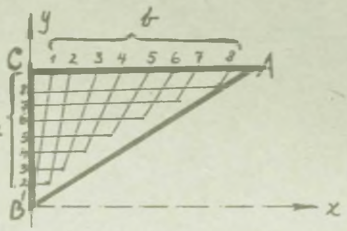
10.32. On antud parabool ja tema teljega ristuv sirge l . Leida paraboolil niisugune punkt P , et parabooli suvaline punkti M kauguste ruutude vahe sellest punktist ja sirgest l ei sõltuks punkti M valikust.

10.33. Ringjoone keskpunkt asetseb parabooli $y^2 = 4x + 2$ fookuses ja ringjoon puutub parabooli juhtsirget. Leida ringjoone ja parabooli lõikepunktid.

Parabooli joonestamine

10.34. Joonestada parabool, lähtudes tema definitsioonist.

10.35. On antud täisnurkne kolmnurk ABC kaatetitega a ja b. Mõlemad kaatetid on jagatud n võrdseks osaks. Jaotuspunktid kaatetitel on nummerdatud, kaatetil a alates teravnurga tipust ja kaatetil b alates täisnurga tipust (vt. joon. 10.4). Läbi kaateti a jaotuspunktide on tõmmatud kaatetiga b paralleelsed sirged; kaateti b jaotuspunktid on ühendatud kaateti a sama numbriga jaotuspunktiga. Koostada sama numbrit kandvate jaotuspunktidega määratud sirgete lõikepunktide hulga võrrand.



Joon. 10.4.

10.36. Milliseid kolmnurki peaks kasutama, et kooskõlas eelneva ülesandega konstrueerida parabooli $y^2 = 5x$. Kuidas täiendada konstruktsiooni, et saada punkte väljaspool kolmnurka.

10.37. Joonestada paraboolile $y^2 = 2px$ normaal väljaspool kõverat asuvast punktist M.

Parabooli puutuja

10.38. Leida parabooli $y^2 = 10x$ puutujad, mis läbivad antud parabooli ja sirge $4x - y - 5 = 0$ lõikepunkte.

10.39. Koostada antud punkti $M_0(x_0, y_0)$ läbivate parabooli $y^2 = 2px$ puutujate võrrandid, kui 1) M_0 on parabooli punkt; 2) M_0 on parabooli suhtes väline punkt.

10.40. Tõestada, et parabooli $y^2 = 2px$ puutuja, mis puutub parabooli punktis $X_0(x_0, y_0)$, lõikab abstsisstelge punktis $A(-x_0, 0)$ ja ordinaattelge punktis $B(0, \frac{y_0}{2})$.

10.41. Tõestada, et parabooli $x^2 = 2px$ puutuja parabooli punktis X_0 moodustab võrdsed nurgad parabooli teljega ja sirgega X_0F, kus F on parabooli fookus.

10.42. Sirge $x + 3y + 9 = 0$ on parabooli $y^2 = 4x$ puutuja. Leida puutepunkt.

10.43. Leida parabooli $y^2 = 2px$ parameeter, kui parabool puutub antud sirget

1) $x - 3y + 9 = 0$; 2) $x - 2y + 5 = 0$.

10.44. Leida antud parabooli puutujad, mis läbivad antud punkti P:

1) $y^2 = 8x$, $P(5, -7)$;
2) $y^2 = 36x$, $P(2, 9)$;
3) $y^2 = 6x$, $P(0, 3)$;
4) $y^2 = 6x$, $P(2, -2\sqrt{3})$;
5) $y^2 = 6x$, $P(5, 5)$.

10.45. Punktist $P(-3, 12)$ on asetatud paraboolile $y^2 = 10x$ puutujad. Arvutada puutepunkte ühendava kõõlu kaugus punktist P.

10.46. Leida parabooli $y^2 = 2px$ suvalist punkti $X_0(x_0, y_0)$ läbiva normaali ja parabooli telje lõikepunkt.

10.47. Leida parabooli $y^2 = 9x$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib punkti $P_0(-8,3)$.

10.48. Leida parabooli $x^2 = 6y$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja läbib punkti $P_0 = (5,-4)$.

10.49. On antud parabool $y^2 = 12x$. Leida tema puutujad, mis

1) läbivad punkti, mille abstsiss $x = 3$;
2) on paralleelsed sirgega $3x - y + 5 = 0$;
3) on risti sirgega $2x + y - 7 = 0$;
4) moodustavad sirgega $4x - 2y + 9 = 0$ nurga $\frac{\pi}{4}$.

10.50. Leida parabooli $y^2 = 12x$ sirgega $3x - 2y + 30 = 0$ paralleelne puutuja ning arvutada antud sirge ja leitud puutuja vaheline kaugus.

10.51. Leida parabooli $y^2 = 16x$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on risti sirgega $x - y - 7 = 0$.

10.52. Leida parabooli $y^2 = 2x$ puutuja ja normaali võrrandid, kui puutuja on paralleelne sirgega $2x - y - 2 = 0$.

10.53. Leida parabooli

1) $y^2 = 3x$ puutuja, mis on paralleelne vektoriga $\vec{s} = (1,-6)$;
2) $y^2 = 16x$ puutuja, mis on paralleelne sirgega $2x - y + 5 = 0$;
3) $y^2 = 2x$ puutuja, mis on risti sirgega $2x + y - 1 = 0$.

10.54. Leida tingimus, mille korral sirge $y = kx + b$ puutub parabooli $y^2 = 2px$.

10.55. Leida paraboolil $y^2 = 12x$ niisugune punkt, kus puutuja moodustaks parabooli sümmeetriateljega nurga $\frac{\pi}{6}$.

10.56. Parabooli $3y^2 = 8x$ puutuja tõus on $1\frac{1}{3}$. Leida puutepunkt, puutuja ja normaal.

10.57. Leida parabooli $y^2 = 12x$ puutuja võrrand, kui puutuja tõusunurk on $\frac{\pi}{6}$.

10.58. Leida antud ellipsi ja antud parabooli ühised puutujad:

1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$, $\quad y^2 = 4x$;

2) $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$, $\quad y^2 = \frac{20}{3}x$.

10.59. Kirjeldada antud sirge ja parabooli vastastikust asendit:

1) $x - y + 2 = 0$, $\quad y^2 = 8x$;
2) $8x + 3y - 15 = 0$, $\quad x^2 = -3y$;
3) $5x - y - 15 = 0$, $\quad y^2 = -5x$.

10.60. Leida parabooli $y^2 = 64x$ ja sirge $4x + 3y + 36 = 0$ vaheline lühim kaugus.

10.61. Tõestame, et parabooli suvalise puutuja lõik puutepunktist kuni puutuja ja juhtsirge lõikepunktini on nähtav fookusest täisnurga all.

10.62. Tõestada, et juhtsirge punktist paraboolile tõmmatud puutujate vaheline nurk on $\frac{\pi}{2}$.

10.63. Tõestada, et parabooli $y^2 = 2px$ fookusest puutujale tõmmatud ristsirge lõikab puutujat y-teljel.

10.64. Leida punkti $P_o = (1.1)$ polaar parabooli $y^2 = 2x$ suhtes.

10.65. Leida sirge $2x - y - 2 = 0$ poolus parabooli $y^2 = 9x$ suhtes.

10.66. Tõestada, et parabooli diameetril asetsevate punktide polaarid on paralleelsed ja diameetri poolus asetseb seega lõpmatuses.

10.67. Leida sirgete, millel asetsevate parabooli kõõlude otspunktidest võetud normaalid lõikuvad paraboolil, pooluste hulk.

10.68. Tõestada, et parabooli fookus ja juhtsirge suvalisest punktist paraboolile tõmmatud puutujate puutepunktid on kollineaarsed.

10.69. Täisnurk liigub nii, et tema kaatetid kogu liikumise jooksul puutuvad parabooli. Määrata täisnurga tipu trajektoor.

10.70. Paraboolil $y^2 = 12x$ on võetud 3 punkti A, B, C, mille ordinaadid on vastavalt $y_1 = 6$, $y_2 = 2$, $y_3 = -3$. Arvutada kolmnurga ABC ja antud punkte läbivate puutujate poolt moodustatud kolmnurga pindalade suhe.

10.71. Tõestada, et parabooli suvaline puutuja lõikab juhtsirget ja teljega ristuvat fokaalkõõlu punktides, mis on võrdsel kaugusel fookusest.

10.72. Tõestada, et parabooli fookusest puutujale tõmmatud ristsirgete ja puutujate lõikepunktide hulk on parabooli tippu läbiv parabooli puutuja.

10.73. Tõestada, et paraboolid, mille fookused ühtivad, teljed on samasihilised, kuid vastassuunalised, lõikuvad risti.

10.74. Leida täisnurga tippude geomeetriline koht, kui selle küljed puutuvad vastavalt kahte konfokaalset parabooli.

Märkus. Kahte parabooli nimetatakse konfokaalseteks, kui nende fookused ühtivad ja teljed on samasihilised, kuid vastassuunalised.

Parabooli kõõlud ja diameetrid

10.75. Leida sirge, millel asetseb parabooli $y^2 = 18x$ ja ringjoone $(x + 6)^2 + y^2 = 100$ ühine kõõl.

10.76. Tõestada, et parabooli kõik diameetrid moodustavad parabooli teljega paralleelsete sirgete ebakimbu.

10.77. Tõestada, et parabooli ja diameetri lõikepunktist tõmmatud puutuja on paralleelne kõõludega, mida diameeter poolitab.

10.78. Tõestada, et parabooli kõõlu otspunktidest tõmmatud puutujad lõikuvad kõõlu poolitaval diameetril.

10.79. Parabooli $y^2 = 2px$ kõõl moodustab parabooli teljega nurga 45°. Leida vaadeldud kõõlu kaasdiameeter.

10.80. Leida parabooli $y^2 = 8x$ diameetri võrrand, kui diameeter moodustab kõõludega, mida ta poolitab, nurga 45°.

10.81. Leida sirgega $4x - y - 5 = 0$ konjugeeritud parabooli $x^2 = 6y$ diameeter.

10.82. Leida sirge, millel asetsev parabooli kõõl poolitub punktis
1) $A(2,1)$; 2) $B(3,1)$.

10.83. Leida sirge, millel asetseva parabooli $y^2 = 6x$ kõõlu keskpunkt on
1) $K(4,1)$; 2) $L(5,5)$.

10.84. Leida parabooli $y^2 = 8x$ kõõlu kandva sirge võrrand, kui kõõl läbib punkti $P_0(5,2)$ ja teda poolitab diameeter $y = -3$.

10.85. Paralleelsete sirgete kimbu sirgetel asetsevaid parabooli $y^2 = 3,5x$ kõõle poolitab diameeter $y = 2,5$. Koostada sirgete kimbu võrrand.

10.86. Koostada parabooli $y^2 = 3x$ diameetri võrrand, kui diameeter poolitab sirgel $3x - 7y + 2 = 0$ asetseva parabooli kõõlu.

10.87. Leida parabooli $y^2 = 2px$ joonestatud võrdkülgse kolmnurga külje pikkus.

10.88. Parabooli $y^2 = 8x$ on joonestatud kolmnurk, mille üks tipp ühtib parabooli tipuga ja kolmnurga kõrgused lõikuvad parabooli fookuses. Koostada kolmnurga külgede võrrandid.

10.89. Leida parabooli parameetrilised võrrandid, kui muutuvaks parameetriks võtta parabooli diameetri kaugus t x-teljest.

10.90. Koostada parabooli fookust läbivate kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

10.91. Leida parabooli $y^2 = 2px$ ordinaatide keskpunktide hulk.

10.92. Tõestada, et parabooli suvalise fokaalkõõlu otspunktidest parabooli teljele langetatud ristlõikude pikkuste korrutis on konstantne suurus.

10.93. Tõestada, et parabooli ja tema kõõlu vahelise segmendi pindala on võrdne kõõlu otspunktidest tõmmatud puutujate ja selle kõõlu vahelise kolmnurga $\frac{2}{3}$ pindalaga.

Mitmesuguseid ülesandeid

10.94. Leida punktide hulk, kus iga punkti kauguste summa või vahe antud punktist ja antud sirgest on kindel suurus.

10.95. Silla kaarel on parabooli kuju. Määrata parabooli parameeter, kui silla kaare alus on 24 m ja kõrgus 6 m.

10.96. Autolambi paraboolse peegli diameeter on 20 cm ja sügavus 15 cm. Leida peegli läbilõikes saadava parabooli võrrand.

10.97. Parabooli punkti M fokaalraadius on r. Avaldada parabooli punktis M võetud normaalil asetseva parabooli kõõlu pikkus parameetri p ja fokaalraadiuse r kaudu.

10.98. Kivi visatakse horisontaaltasandi suhtes teravnurga all. Kivi trajektoor on parabool. Kivi kukub 16 m kaugusele lähtepunktist ja kivi lennu maksimaalne kõrgus on 12 cm. Määrata parabooli trajektoori parameeter.

10.99. Purskkaevust väljuval veejoal on parabooli kuju, mille parameeter p = 0,1 m. Määrata veejoa kõrgus, kui ta langeb basseini 2 m kaugusel lähtepunktist.

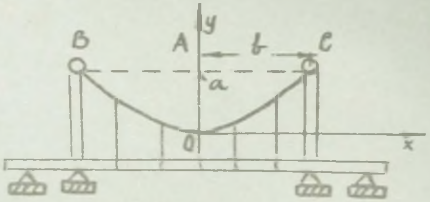
10.100. Täisnurga tipp ühtib parabooli tipuga. Täisnurk pöörleb ümber oma tipu parabooli tasandil. Tõestada, et sellise pöörlemise korral sirge, mis ühendab parabooli ja täisnurga haarade lõikepunkte, pöörleb samuti ümber parabooli teljel asuva punkti.

10.101. Leida ringjoonte keskpunktide hulk, kui ringjooned läbivad antud punkti ja puutuvad antud sirget.

10.102. Leida ringjoonte keskpunktide hulk, kui ringjooned puutuvad ordinaattelge ja ringjoont $x^2 + y^2 = 1$.

10.103. Parabooli $y^2 = 12$ fookusest on suunatud valguskiir, mis moodustab parabooli teljega nurga α (α - teravnurk). Jõudnud paraboolini, kiir peegeldub sellelt. Leida sirge võrrand, kus asub peegeldunud kiir.

10.104. Rippsilla tross on paraboolikujuline. Kirjutada tema võrrand joonisel 10.5 näidatud telgede suhtes, kui OA = a ja kaare pikkus BC = 2b.



Joon. 10.5.

10.105. Terastross on riputatud kahest otsast sama kõrgusega sammaste külge, mille kaugus teineteisest on 20 m. (vt. joon. 10.5). Samba alusest 2 m kaugusel, mõõtes mööda horisontaali, on trossi läbipaine 14,4 cm. Määrata trossi maksimaalne läbipaine, arvestades, et tross on ligikaudu parabooli kaare kujuline.

10.106. Tõestada, et parabooli diameetriga paralleelsete valguskiirte kimbu kiired peale peegeldumist paraboolilt koonduvad parabooli fookusesse.

10.107. Prožektori peegelpind on moodustatud parabooli pöörlemisega ümber tema sümmeetriatelje. Peegli diameeter on 80 cm ja tema sügavus on 10 cm. Kui kaugele parabooli tipust tuleb asetada valgusallikas, et paraboolilt peegeldunud kiired moodustaksid paralleelsete kiirte kimbu.

§ 2. Koonuselõike polaarvõrrand

Ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrandid omavad polaarkoordinaatides ühesugust kuju

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \tag{10.7}$$

mida nimetatakse koonuselõike polaarvõrrandiks. Siin ρ ja φ on kõvera suvalise punkti X polaarkoordinaadid, p - kõvera fokaalparameeter, mis on võrdne poolega kõvera fokaallaiusest (s. t. teljega ristuva fokaalkõõlu pikkus on 2p) ehk

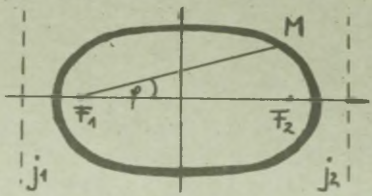
$$p = eq, \tag{10.8}$$

kus q on fookuse kaugus vastavast juhtsirgest ja e on koonuselõike ekstsentrilisus

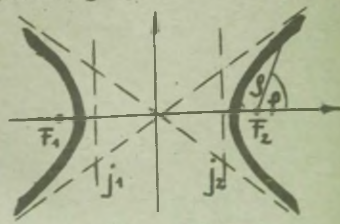
$$e = \frac{r}{d},$$

kus r on punkti kaugus vastavast juhtsirgest.

Polaarreeper on valitud nii, et pooluseks on võetud üks fookustest: ellipsi korral vasakpoolne (vt. joon. 10.6), hüperbooli korral parempoolne (vt. joon. 10.7). Polaarteljeks on võetud vaadeldud koonuselõike fokaaltelg. Valime polaartelje positiivseks suunaks suuna juhtsirge poolt vastava foo-

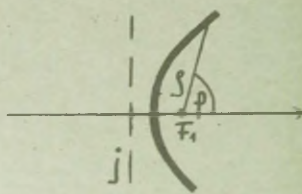


Joon. 10.6.



Joon. 10.7.

kuse poole (vt. joon. 10.8). Kui koonuselõike fokaalvõrrandis (10.7) e = 0 , siis saadud võrrand määrab ringjoone keskpunktiga F ja raadiusega ρ . Ringjoon on seejuures vaadeldav ellipsi piirjuhuna, kui ellipsi fookused ühtivad ellipsi keskpunktiga.



Joon. 10.8.

10.108. Koostada ellipsi polaarvõrrand, võttes fokaaltelje polaarteljeks ja paigutades pooluse ellipsi
1) vasakusse fookusesse;
2) paremasse fookusesse.

10.109. Koostada ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ polaarvõrrand, kui ellipsi keskpunkt asetseb pooluses ja ellipsi fokaaltelg ühtib polaarteljega (polaartelje suund ellipsi keskpunktist parema fookuse poole).

10.110. Koostada ringjoone võrrand polaarreeperi suhtes, kui ringjoone raadius on a ja keskpunkt asetseb
1) pooluses;
2) punktis A(a,0) ;
3) punktis $B(\rho_0, \varphi_0)$.

10.111. On antud ellipsi võrrand $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Koostada tema polaarvõrrand, kui polaartelje suund ühtib abstsisstelje suunaga ning poolus asub

1) ellipsi vasakus fookuses;

2) paremas fookuses.

10.112. Leida ellipsi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ polaarvõrrand.

10.113. Leida ellipsi $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2-\cos\varphi}$ poolteljed ja fookuste vaheline kaugus.

10.114. Veenduda, et võrrand $\rho = \frac{144}{13-5\cos\varphi}$ määrab ellipsi ja leida tema poolteljed.

10.115. Ellipsil $\rho = \frac{12}{3 - \sqrt{2}\cos\varphi}$ leida punktid, milledel polaarraadius on 6.

10.116. Millise nurga moodustab fokaalteljega ellipsi $\rho^2 = \frac{288}{16 - 7\cos^2\varphi}$ kõõl, mille pikkus on 10 ühikut.

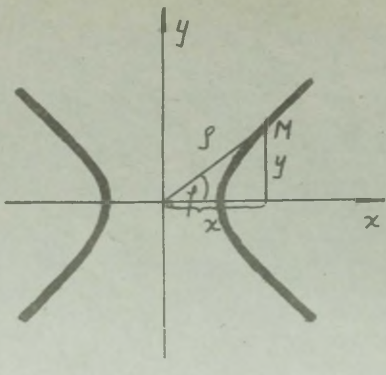
10.117. Koostada hüperbooli polaarvõrrand, võttes polaarteljeks hüperbooli fokaaltelje ja paigutades pooluse hüperbooli parempoolsesse fookusesse (polaartelg suunata parempoolsest fookusest vastava juhtsirge poole).

10.118. Koostada ellipsi ja hüperbooli polaartippvõrrandid.

Märkus. Koonuselõike polaartippvõrrandiks nimetatakse koonuselõike polaarvõrrandit juhul, kui poolus asetseb koonuselõike tipus.

10.119. Leida hüperbooli polaarvõrrand, kui pooluseks võtta üks fookustest ja polaartelg suunata fookusest hüperbooli keskpunkti poole.

10.120. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ polaarvõrrand, kui ta keskpunkt ühtib poolusega ja reaaltelg - polaarteljega, valides polaartelje suunaks suuna hüperbooli keskpunktist parempoolse fookuse poole (vt. joon. 10.9).



Joon. 10.9.

10.121. Koostada hüperbooli $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ polaarvõrrand.

10.122. Koostada antud ellipsite ja hüperboolide tippvõrrandid:

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$.

10.123. Koostada hüperbooli kanooniline võrrand, kui on antud tema polaarvõrrand $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$.

10.124. Koostada hüperbooli $\rho = \frac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}$ asümptootide ja juhtsirgete võrrandid.

10.125. Koostada parabooli polaarvõrrand, võttes pooluseks parabooli fookuse, polaarteljeks parabooli telje ning valides polaartelje suunaks suuna

1) juhtsirge poolt fookuse poole;

2) fookuse poolt tipu poole.

10.126. Koostada parabooli polaarvõrrand, võttes hüperbooli fokaaltelje polaarteljeks ja paigutades pooluse hüperbooli tippu.

10.127. Leida parabooli polaarvõrrand, kui pooluseks võtta juhtsirge ja sümmeetriatelje lõikepunkt ning polaartelg suunata sellest punktist parabooli tipu poole.

10.128. Koostada võrrandiga $\rho = \frac{6}{1 - \cos\varphi}$ määratud parabooli kanooniline võrrand.

10.129. Paraboolil $\rho = \frac{8\cos}{\sin^2\varphi}$ leida punkt, mille fokaalraadius on võrdne selle punkti kaugusega juhtsirgest.

10.130. Leida järgmiste kõverate kanoonilised võrrandid kanoonilise ortonormeeritud reeperi suhtes:

1) $\rho = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi}$; 2) $\rho = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}$;

3) $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; 4) $\rho = \frac{4}{\sqrt{5} - \cos\varphi}$.

11. p e a t ü k k

T E I S T J Ä R K U J O O N E
Ü L D I N E T E O O R I A

§ 1. Teist järku joone keskpunkt. Teist järku joone võrrandi lihtsustamine reeperilükke teel

Teist järku joone (koonuselõike) üldvõrrand üldise afiinse reeperi suhtes omab kuju

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (11.1)$$

ehk lühidalt

$$F(x,y) = 0\,. \qquad (11.1)$$

Kuna võrrandi poolt määratud kõver ei muutu, kui võrrandit korrutada mistahes nullist erineva arvuga ja $a_{ik} = a_{ki}$, $i,k = 1,2,3$, siis võrrand (11.1) sisaldab 5 sõltumatut kordajat a_{ik}. Teist järku joon määratakse viie tingimusega (näiteks viie kõveral asetseva erineva punkti abil).

10

Võrrandi (11.1) kordajatest moodustatud sümmeetriline maatriks omab kuju

$$F = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{Vmatrix} .$$

Maatriksit F nimetatakse võrrandiga (11.1) määratud teist järku <u>kõvera maatriksiks</u> antud reeperi korral.

Determinanti

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nimetatakse teist järku joone <u>diskriminandiks</u> ehk teist järku joone determinandiks.

Determinanti

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

nimetatakse ruutliikmete <u>diskriminandiks</u> ehk ruutliikmete determinandiks.

Kandes reeperi alguspunkti reeperi lükke (rööplükke) teel punkti $O'(x_1, y_1)$ reeperi telgede suundi muutmata, s. t. teostades teisenduse $x = x' + x_1$, $y = y' + y_1$, teiseneb teist järku joone võrrand (11.1) järgmiseks:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2F_{x'}x' + 2F_{y'}y' + 2F' = 0 , \tag{11.2}$$

kus

$$2F = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33},$$

$$2F_{x_1} = 2(a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}), \tag{11.3}$$

$$2F_{y_1} = 2(a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}),$$

s. t. võrrandi (11.1) ruutliikmete osa $(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)$ kordajad ei muutu, lineaarsete liikmete kordajateks on võrrandi (11.1) parema poole osatuletised vastava muutuja järgi, kus suvalise punkti koordinaadid on asendatud reeperi uue alguspunkti koordinaatidega; võrrandi (11.2) vabaliige on võrdne võrrandi (11.1) vasaku poolega, kus suvalise punkti koordinaadid on asendatud reeperi uue alguspunkti koordinaatidega.

Kui teist järku joonel (11.1) eksisteerib sümmeetria keskpunkt - joone tsenter - ja reeperi alguspunkt on viidud kõvera tsentrisse $M_o(x_o, y_o)$, siis teisendatud võrrand ei või sisaldada lineaarseid liikmeid ja omab kuju

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2F_o = 0 . \qquad (11.4)$$

Kuna keskpunkti koordinaadid muudavad nulliks avaldised $2F_{x_o}$ ja $2F_{y_o}$, siis keskpunkti koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_{13} = 0 , \\ a_{12}x_o + a_{22}y_o + a_{23} = 0 . \end{cases} \qquad (11.5)$$

Märkasime, et teist järku joone keskpunkti määrava süsteemi kordajateks on joone maatriksi kahe esimese rea elemendid. Lahendades süsteemi (11.5), saadakse

$$x_o = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} ,$$

$$y_o = \frac{a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} , \qquad (11.6)$$

$\delta \neq 0$.

Teist järku joont nimetatakse <u>tsentraalseks</u> jooneks, kui tal on üheselt määratud keskpunkt. Seega joon on tsentraalne joon, kui võrrandisüsteem (11.5) omab ühese lahendi, s. t.

$$\delta \neq 0 .$$

Teist järku joont, mille korral ei eksisteeri üheselt määratud keskpunkti, nimetatakse <u>mittetsentraalseks</u> jooneks.

Mittetsentraalse joone korral

$$\delta = 0 .$$

Mittetsentraalseid teist järku jooni on kahte tüüpi:

a) $\delta = 0$ ja süsteem (11.5) pole kooskõlas. Sel korral joonel ei eksisteeri keskpunkti ja kõver on parabool.

b) $\delta = 0$ ja süsteem (11.5) on kooskõlas:

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} .$$

Sel korral süsteemi võrrandid on lineaarselt sõltuvad ja joonel on lõpmata palju keskpunkte, mis asuvad ühel sirgel. Keskpunktidest koosnevat sirget

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 ,$$

nimetatakse joone keskeirgeks, sest iga antud sirge punkt on antud joone sümmeetriakeskpunktiks. Vaadeldud teist järku joon on kollineaarsete sirgete paar.

Kui reeperi alguspunkt asetseb teist järku tsentraalse joone keskpunktis, siis

$$2F_o = \frac{\Delta}{\delta}$$

ja joone võrrand (11.1) omab kuju

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 , \qquad (11.8)$$

kus ruutliikmete osa võrdub lähtevõrrandi (11.1) ruutliikmete osaga ja ka vabaliikme võib otseselt arvutada lähtevõrrandist diskriminantide kaudu.

Teist järku jooned e. koonuselõiked jagatakse kahte rühma.

I. Teist järku kõverad (e. kidumata teist järku jooned): ellips, hüperbool ja parabool.

II. Sirgete paarid (e. kidunud teist järku jooned):
   a) lõikuvate sirgete paar (reaalsed või imaginaarsed);
   b) kollineaarsete sirgete paar (paralleelsed või ühtivad).

11.1. Leida kõvera

$$x^2 + xy + 2y^2 - 7x - 12y + 10 = 0$$

ja reeperi telgede lõikepunktid.

11.2. Leida kõvera

$$x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

lõikepunktid sirgetega:

1) $5x - y - 5 = 0$;

2) $x + 2y + 2 = 0$;

3) $x + 4y - 1 = 0$;

4) $x - 3y = 0$.

11.3. Millise nurga moodustavad abstsissteljega sirged, mis lõikavad kõverat

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

ainult ühes punktis?

11.4. Millisel parameeter λ väärtusel lõikab kõver

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 5x - 9 = 0$$

sirget $2x - y + 7 = 0$ ainult ühes punktis?

11.5. Milline on teist järku joone võrrand, kui teda lõikavad ühes punktis

1) sirged, mis on paralleelsed x-teljega;

2) sirged, mis on paralleelsed y-teljega;

3) sirged, mis on paralleelsed ühe reeperi teljega?

11.6. Leida sirged, mis läbivad reeperi alguspunkti ja lõikavad kõverat

$$6x - xy - y^2 + 5x - 3y + 2 = 0$$

ainult ühes punktis.

11.7. Leida sirged, mis läbivad punkti $A(2,0)$ ja lõikavad kõverat

$$3x^2 - 7xy + 2y^2 + 6x - 4y - 5 = 0$$

ainult ühes punktis. Leida nende sirgete vaheline nurk.

11.8. Leida viit antud punkti läbiva teist järku kõvera võrrand

1) $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(2,-5)$, $D(-5,2)$;

2) $O(0,0)$, $K(0,2)$, $L(-1,0)$, $M(-2,1)$, $N(-1,3)$;

3) $O(0,0)$, $P(0,3)$, $Q(6,0)$, $R(2,2)$, $S(-2,1)$.

11.9. Leida punkte (0, 0), (0, 3), (6, 0), (2, 2) ja (4, 1) läbiva teist järku joone võrrand.

11.10. Leida teist järku kõvera võrrand, kui kõver läbib punkte $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, 1)$ ja $P_3 = (1, 0)$ ning kui keskpunktiks on $K = (2, 3)$.

11.11. On antud neli punkti (0, 15), (3, 0), (5, 0) ja (2, 3). Leida antud punkte läbiv paraboolset tüüpi kõver.

11.12. Teist järku joon läbib punkte (0, 0), (0, 2), (2, 4) ning lõikab sirgeid $3x - 2y + 1 = 0$ ja $2x + y - 5 = 0$ ühes punktis. Koostada selle kõvera võrrand.

11.13. Koostada teist järku kõvera võrrand, kui kõver läbib punkti A(2,-1), B(-2,2) ja lõikab reeperi telgi ainult reeperi alguspunktis.

11.14. Milliseks teiseneb antud teist järku kõvera võrrand, kui reeperi alguspunkt kanda punkti O' :

1) $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x + 1 = 0$, O' (1,0) ;
2) $xy - 6x + 2y - 3 = 0$, O' (2,6) ;
3) $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$, O' (-3,-1) .

11.15. Kontrollida, kas antud kõverad on tsentraalsed kõverad ja leida iga kõvera keskpunkt:

1) $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$;
2) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$;
3) $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$;
4) $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

11.16. Kontrollida, kas järgmised võrrandid on tsentraalsete teist järku kõverate võrrandid. Milliseks teisenevad antud kõverate võrrandid, kui reeperi alguspunkt kanda kõvera keskpunkti:

1) $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 2y - 10 = 0$;
2) $3x^2 - 6xy + 2y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$;
3) $6x^2 + 4xy + y^2 + 4x - 2y + 2 = 0$;
4) $4x^2 + 6xy + y^2 - 10x - 10 = 0$;
4) $4x^2 + 2xy + 6y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$.

11.17. Leida antud teist järku kõverate keskpunktid:

1) $5x^2 - 3xy + y^2 + 4 = 0$;
2) $3x^2 - 2xy + 4 = 0$;
3) $7xy - 3 = 0$;
4) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 1 = 0$.

11.18. Leida antud teist järku kõverate keskpunktid:
1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
3) $2x^2 - 3xy - y^2 + 3x + 2y = 0$;
4) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
5) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$;
6) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$;
7) $x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
8) $x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$;
9) $9x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 7 = 0$;
10) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 20y + 25 = 0$;
11) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 11 = 0$;
12) $2xy - 4x + 2y + 11 = 0$;
13) $4x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 5y + 6 = 0$;
14) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 2y - 11 = 0$.

11.19. Selgitada, millised antud teist järku joontest on tsentraalsed jooned (s. t. omavad üheselt määratud keskpunkti), millised joontest ei oma keskpunkti ja millised joontest omavad lõpmatu palju keskpunkte:
1) $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12y - 7 = 0$;
2) $4x^2 + 5xy + 3y^2 - x + 9y - 12 = 0$;
3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$;
4) $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$;
5) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$;
6) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$;
7) $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$;
8) $4x^2 - 6xy - 9y^2 + 3x - 7y + 12 = 0$.

11.20. Kontrollida, kas kõik antud teist järku jooned omavad lõpmata palju keskpunkte. Koostada keskpunktide hulga võrrand:
1) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 36y + 20 = 0$;

2) $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$;

3) $25x^2 - 10xy + y^2 + 40x - 8y + 7 = 0$.

11.21. Milliste a ja b väärtuste korral võrrand

1) $x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + by - 4 = 0$;

2) $ax^2 + 12xy + 9y^2 + 4x + by - 13 = 0$

määrab

a) tsentraalse teist järku joone;

b) tsentrita teist järku joone (parabooli);

c) lõpmata palju keskpunkte omava teist järku joone (kollineaarsete sirgete paari).

11.22. Kasutades reeperi nihet, lihtsustada antud kõverate võrrandeid:

1) $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 40x - 32y + 5 = 0$;

2) $x^2 - 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$;

3) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$.

11.23. Leida kõigi teist järku joonte, mille keskpunkt on (x_0, y_0), üldvõrrand.

11.24. Teist järku kõver läbib reeperi alguspunkti ning punkte $A(0, 1)$ ja $B(1, 0)$. Kõvera keskpunkt on $C(2, 3)$. Leida selle kõvera võrrand.

11.25. Teist järku kõvera keskpunkt asetseb punktis $(0,-1)$, kõver läbib punkti $(3, 0)$ ning lõikab sirgeid

$$2x - 3y + 1 = 0 \qquad \text{ja} \qquad x + y - 5 = 0$$

ainult ühes punktis. Leida selle kõvera võrrand.

11.26. Koostada antud kolmnurga ümber joonestatud võrdhaarsete hüperboolide keskpunktide hulga võrrand.

11.27. Koostada hüperboolide keskpunktide hulga võrrand, kui hüperboolid läbivad kaht fikseeritud punkti ja neil on samad asümptoodid.

11.28. Koostada teist järku joone

$$x^2 + 2xy - y^2 - 2ax + 4ay + 1 = 0$$

keskpunktide hulga võrrand, kui a on muutuv parameeter.

11.29. Leida kõigi tsentraalsete teist järku joonte keskpunktide hulga võrrand, kui need kõverad läbivad nelja punkti (0, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 2).

11.30. On antud kõver

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0 .$$

Leida selle kõvera tippvõrrand.

Märkus. Kõvera **kanoonilist** reeperit nimetatakse tipp-kanooniliseks reeperiks, kui kõvera telgedest üks on võetud abstsissteljeks, reeperi alguspunkt asetseb ühes abstsissteljel asetsevas tipus ning ordinaatteljeks on võetud tippu läbiv kõvera puutuja. Teist järku kõvera võrrandit tipp-kanoonilise reeperi suhtes nimetatakse kõvera tippvõrrandiks.

11.31. Leida antud teist järku kõverate tippvõrrandid:

1) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;

2) $x^2 + 2y^2 - 16 = 0$;

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

11.32. Koostada ellipsi võrrand, kui x-teljeks valida ellipsi fokaaltelg ja reeperi alguspunkt asetseb ellipsi parempoolses fokaaltipus.

11.33. Koostada ellipsi võrrand, kui abstsissteljeks valida ellipsi fokaaltelg ja reeperi alguspunkt asetseb ellipsi vasaku juhtsirge ja fokaaltelje lõikepunktis. (Abstsisstelje positiivseks suunaks valida suund vasakust juhtsirgest vastava fookuse poole.)

§ 2. Teist järku kõvera puutuja

Teist järku kõver

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \qquad (11.9)$$

ja sirge

$$Ax + By + C = 0$$

üldiselt kõneldes omavad **kaks** lõikepunkti, mis võivad olla reaalsed, imaginaarsed või ühtivad. Kui teist järku kõvera ja sirge lõikepunktid ühtivad, siis sirget nimetatakse kõvera <u>puutujaks</u> antud punktis ja ühtivaid lõikepunkte nimetatakse **puutepunktiks**. Teist järku kõvera (11.9) puutuja kõvera punktis $M_0(x_0, y_0)$ määratakse võrrandiga

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{13})y + \\ + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0 , \qquad (11.10)$$

mille me saame antud teist järku kõvera võrrandist (11.9) kergesti pooliti asendusvõtte abil. Pooliti asendusvõtte korral tuleb asendada pooled tundmatud kõvera võrrandis puutepunkti koordinaatidega, s. t. teostada asendused $x^2 \to x.x_0$; $y^2 \to y.y_0$; $2xy \to x_0y + xy_0$; $2x \to x + x_0$; $2y \to y + y_0$.

<u>11.34</u>. Koostada antud koonuselõigete

1) $b^2x^2 + a^2y^2 - ab = 0$;
2) $b^2x^2 - a^2y^2 - ab = 0$;
3) $y^2 - 2px = 0$;
4) $xy = m$

puutujate võrrandid.

<u>11.35</u>. Leida kõvera

$$x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$$

puutujad selle kõvera ja reeperi telgede lõikepunktides.

<u>11.36</u>. Leida kõvera

$$x^2 - 2y^2 - 5x + 4y + 6 = 0$$

puutujad, mis läbivad kõvera ja abstsisstelje lõikepunkte.

<u>11.37</u>. Millist tingimust peavad rahuldama teist järku kõvera võrrandi kordajad, et kõver puutuks

1) x-telge;
2) y-telge;
3) x- ja y-telge.

<u>11.38</u>. On antud teist järku kõver

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0 .$$

Kontrollida, millise kordaja k väärtuse korral sirge $y = kx$

1) lõikab antud kõverat ühes punktis;
2) puutub antud kõverat;
3) lõikab antud kõverat kahes erinevas punktis;
4) ei lõika antud kõverat.

11.39. Uurida antud kõverate asendit reeperi telgede suhtes

1) $x^2 + 4xy - 4x - y + 4 = 0$;
2) $x^2 - 4x - y + 3 = 0$;
3) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 18y = 0$.

11.40. Leida kõvera

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

puutujad kõvera punktides, mille abstsiss on -2.

11.41. Koostada kõvera

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 6y - 3 = 0$$

puutuja võrrand, kui puutuja läbib punkti $P(3, 4)$.

11.42. Koostada antud punkti läbivate kõverate puutujate võrrandid:

1) $O(0, 0)$, $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$;
2) $A(3, 4)$, $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

11.43. Leida kõvera

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

puutujate hulgast abstsissteljega paralleelsed puutujad.

11.44. On antud teist järku joon

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 4y + 2 = 0 .$$

Leida selle joone puutujad, mis on paralleelsed y-teljega.

11.45. Leida kõvera

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

puutujad, mis on paralleelsed sirgega $3x + 3y - 5 = 0$.

11.46. Leida antud teist järku joonte

1) $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$;
2) $2x^2 - xy - y^2 - 15x - 3y + 18 = 0$

puutujad, mis läbivad punkti $A(-2,1)$, ning selgitada, miks me kummalgi juhul võime saada ainult ühe puutuja.

11.47. Koostada teist järku kõvera võrrand, kui kõvera keskpunkt asetseb reeperi alguspunktis, kõver läbib punkti $M(6, -2)$ ja puutub sirget $x - 2 = 0$ punktis $N(2, 0)$.

11.48. Punkt $P(1, -2)$ on teist järku kõvera keskpunkt, kõver läbib punkti $Q(0, -3)$ ja puutub x-telge reeperi alguspunktis. Koostada kõvera võrrand.

11.49. Leida reeperi alguspunkti läbivat, sirget

$$4x + 3y + 2 = 0$$

punktis $(1, -2)$ ja sirget

$$x - y - 1 = 0$$

punktis $(0,-1)$ puutuva teist järku joone võrrand.

11.50. Koostada teist järku kõverate, mis puutuvad abstsisstelge punktis $(2, 0)$ ning ordinaattelge punktis $(0, 1)$, keskpunktide hulga võrrand.

§ 3. Teist järku joone diameetrid, peateljed ja asümptoodid

Olgu teist järku joon määratud üldvõrrandiga (11.1). Kui teist järku joone paralleelsete kõõlude tõus on k, siis kõõlude poolt määratud diameetri (s. t. sirge, millel asetsevad kõõlude keskpunktid) määrab võrrand

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + k(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) = 0 \qquad (11.11)$$

ehk

$$F_x + kF_y = 0 . \qquad (11.11')$$

Tsentraalse teist järku joone kõik diameetrid läbivad kõvera tsentrit. Parabooli diameetrid on paralleelsed parabooli teljega.

Teist järku kõvera kõõlude sihti ja kõõlude poolt määratud diameetri sihti nimetatakse kaas- ehk konjugeeritud sihtideks antud teist järku kõvera suhtes. Kaassihtide tõusud rahuldavad tingimust

$$a_{11} + a_{12}(k + k') + a_{22}kk' = 0 . \qquad (11.12)$$

Enese kaassihte nimetatakse asümptootilisteks sihtideks. Kaassihilisi diameetreid nimetatakse kaasdiameetriteks. Ristuvaid kaasdiameetreid nimetatakse peadiameetriteks.

Ristreeperi korral teist järku kõvera peasihid määratakse võrrandist

$$a_{11}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \qquad (11.13)$$

ehk

$$\tan 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} , \qquad (11.14)$$

kus φ on x-telje ja ühe peasihi vaheline nurk.

Kaldreeperi korral teist järku kõvera peasihid määratakse võrrandist

$$(a_{12} - a_{22}\cos\omega)k^2 + (a_{11} - a_{22})k - (a_{12} - a_{11}\cos\omega) = 0 . \qquad (11.15)$$

Iga teist järku kõver omab kaks ristuvat peasihti. Erandi moodustab ainult ringjoon, mille korral peasihid on määramata.

Parabooli kõigi diameetrite tõus määratakse seosest

$$k = - \frac{a_{11}}{a_{12}} = - \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad (11.16)$$

ehk

$$k = -\frac{\alpha}{\beta}, \tag{11.17}$$

kus $a_{11} = \alpha^2$, $a_{12} = \alpha\beta$, $a_{22} = \beta^2$.

Parabooli peatelg määratakse võrrandist

$$F_x + \frac{\beta}{\alpha} F_y = 0 . \tag{11.18}$$

Parabooli teine peasiht on risti peadiameetriga, teist peatelge paraboolil ei ole.

Kui reeperi teljed on kaassihilised, siis teist järku kõvera võrrandis ei eksisteeri tundmatute korrutisega liiget (s. t. $a_{12} = 0$). Lisaks kaob parabooli korral ka üks tundmatu ruuduga liige (s. t. $a_{11} = 0$ või $a_{22} = 0$) .

Kui teist järku tsentraalse kõvera korral reeperi telgedeks on peateljed, siis kõvera võrrand omab kuju

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 . \tag{11.19}$$

Teist järku joone võrrandi leidmist, kus reeperi telgedeks on peateljed, nimetatakse kõvera võrrandi taandamiseks peatelgedele.

Parabooli lihtsama võrrandi saame, kui paigutame reeperi alguspunkti parabooli tippu, s. t. telje ja barabooli lõikepunkti ($a'_{33} = 0$), võtame parabooli telje abstsissteljeks ($a'_{23} = 0$ $a'_{12} = 0$ ja $a'_{11} = 0$) ja ordinaatteljeks parabooli puutuja parabooli tipus. Saame

$$a'_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 . \tag{11.20}$$

Kui tsentraalse kõvera korral fokaaltelg valida abstsissteljeks ja ordinaatteljeks kõvera puutuja tipus, siis kõvera nn. tippvõrrand omab kuju

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0 . \tag{11.21}$$

Teist järku joone asümptootiliste sihtide (enese kaassihtide) tõusud määratakse seosest

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0 . \tag{11.22}$$

Teist järku kõvera asümptoote võib vaadelda kui asümptootilise sihiga diameetreid. Asümptoodid võivad eksisteerida ainult tsentraalsete joonte korral. Hüperboolil on kaks reaalset asümptooti, ellipsil kaks imaginaarset asümptooti, lõikuvad sirged osutuvad ise asümptootideks.

Kui asümptoodid valida hüperbooli korral reeperi telgedeks, siis hüperbooli võrrand omab kuju

$$2a_{12}xy + a'_{22} = 0 . \qquad (11.23)$$

Hüperbooli võrrandit (11.23) nimetatakse hüperbooli asümptootiliseks võrrandiks. Hüperbooli võrrandi (11.23) leidmist, kus reeperi telgedeks on asümptoodid, nimetatakse hüperbooli taandamiseks asümptootidele.

11.51. On antud kõver

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0 .$$

Leida abstsissteljel asetseva kõõlu pikkus.

11.52. Millisel parameeter λ väärtusel kõver

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + \lambda y + 4 = 0$$

1) eraldab ordinaatidel kõõlu pikkusega 3 ühikut;
2) puutub ordinaattelge.

11.53. Leida teist järku kõvera

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$$

diameeter, mis läbib selle kõvera ja sirge $x - 2y - 1 = 0$ lõikumisel tekkinud kõõlu keskpunkti.

11.54. On antud teist järku kõver

$$4xy - 5y^2 + 2x + 6y + 1 = 0 .$$

Leida selle kõvera diameeter, mis läbib punkti $(-4, 2)$.

11.55. Leida antud teist järku kõvera diameeter, mis on paralleelne antud sirgega:

1) $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x = 0 , \quad 2x - 3y = 0 ;$
2) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0 , \quad 2x - y + 5 = 0 .$

11.56. Leida kõvera

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$$

diameeter, mis moodustab abstsissteljega nurga 45°.

11.57. Leida kõvera

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$$

diameeter, mis läbib selle kõvera poolt sirgest $x - 2y - 1 = 0$ välja lõigatud kõõlu keskpunkti.

11.58. Leida antud kõvera

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 3y = 0$$

poolt sirgest $x + 3y - 12 = 0$ välja lõigatud kõõlu keskpunkt.

11.59. Leida kõvera

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

kaks kaasdiameetrit, kui üks neist läbib reeperi alguspunkti.

11.60. Kõvera

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$$

diameeter läbib punkti $A(1, -2)$. Koostada diameetri ja tema kaasdiameetri võrrandid.

11.61. On antud kõver

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0 .$$

Leida selle kõvera abstsissteljega paralleelne diameeter ning selle kaasdiameeter.

11.62. Leida kõvera

$$xy - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$$

kaks kaasdiameetrit, kui üks neist on paralleelne ordinaatteljega.

11.63. On antud parabool

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0 .$$

Koostada selle parabooli diameetri võrrand, kui diameeter

1) läbib reeperi alguspunkti;
2) on x-telje sihilise kõõlu kaassihiline;
3) on y-telje sihilise kõõlu kaassihiline;
4) moodustab oma kaassihiga nurga $\pm \frac{\pi}{4}$;
5) on risti oma kaassihiga.

11.64. On antud kõver

$$3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$$

ning ta üks diameeter

$$x + 2y - 2 = 0 .$$

Leida selle diameetri kaasdiameeter.

11.65. Leida kõvera

$$3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$$

kaasdiameetrid, mis moodustavad omavahel nurga 45°.

11.66. On antud teist järku joon

$$5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$$

ja kaks punkti: $A(2, 1)$ ja $B(1, 4)$. Leida selle joone kõõl, mis läbib punkti B ja on punkti A läbiva diameetri kaasdiameeter.

11.67. On antud kõver

$$3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0 .$$

Leida

1) x-teljega,

2) y-teljega,

3) sirgega $x + y + 1 = 0$ paralleelsete kõõlude keskpunktide võrrandid.

11.68. Leida nelja punkti $A(1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(0, 2)$ ja $D(0, -2)$ läbiva teist järku joone võrrand, kui kõõlude AB ja CD sihid on teineteise kaassihid.

11.69. On antud parabooli võrrand

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 ,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Leida parabooli puutuja võrrand suvalises punktis (x_0, y_0) ning vastava kaasdiameetri võrrand.

11.70. Leida antud teist järku joonte peateljed (sümmeetriateljed):

1) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$;
2) $5x^2 + 24xy - 2y^2 + 4x - 1 = 0$;
3) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$;
4) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18y + 9 = 0$;
5) $2xy - 4x + 2y - 3 = 0$;
6) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 10y + 6 = 0$;
7) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5y - 2 = 0$;
8) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5x + 6 = 0$.

11.71. Leida parabooli

$$x^2 - 2xy + y^2 + x - 2y + 3 = 0$$

telg.

11.72. Tõestada, et üldvõrrandiga määratud parabooli telje võrrandi võib esitada kujul

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} & a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0 .$$

11.73. Leida parabooli sümmeetriatelg ning tipp:

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$;
2) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 8x = 0$;
3) $3y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$.

Märkus. Parabooli tippu võib vaadelda kui parabooli ja ta telje lõikepunkti.

11.74. Leida kidunud tsentraalse teist järku joone (lõikuvate sirgete paari) peateljed.

11.75. Leida tingimus, mille korral kahel üldvõrrandiga määratud teist järku joonel on ühed ja samad peasihid.

11.76. Leida kahe antud kõvera ühine diameeter:

1) $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$ ja $x^2 + 2xy + y^2 - x + y = 0$;
2) $x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y = 0$ ja $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$.

11.77. On antud kaks teist järku joont:

$$3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 10 = 0 ,$$
$$3x^2 - 2xy - y^2 + 6y - 10 = 0 .$$

Leida mõlema kõvera kaasdiameetrite paar, nii et ühe paari diameetrid oleksid paralleelsed teise paari diameetritega.

11.78. Leida reeperi alguspunkti läbiva teist järku joone võrrand, kui on teada selle kaks paari kaasdiameetreid:

$$\begin{cases} x - 3y - 2 = 0 \\ 5x - 5y - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 5y + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}.$$

11.79. On antud kaks paari sirgeid

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases},$$

mis on teist järku joone kaasdiameetriteks. Leida selle joone võrrand, kui ta läbib punkti (1, 1).

11.80. Tõestada, et kui kolmnurga

1) ümber joonestatud,

2) sisse joonestatud

teist järku joone keskpunkt ühtib kolmnurga raskuskeskmega, siis teist järku joon on ellips.

11.81. Tõestada, et teist järku joone ümber joonestatud rööpküliku diagonaalid on selle kõvera kaasdiameetrid.

11.82. Teist järku joone

$$x^2 - 6xy + y^2 + 4 = 0$$

sisse on joonestatud rööpkülik, mille üheks küljeks on sirge $x - 1 = 0$. Leida ülejäänud külgede võrrandid.

11.83. Tõestada, et rööpküliku 1) ümber, 2) sisse joonestatud teist järku joon on alati tsentraalne ning ta keskpunkt ühtib rööpküliku diagonaalide lõikepunktiga.

Hüperbooli asümptoodid

11.84. Leida järgmiste hüperboolide asümptoodid:

1) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$;

2) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$;

3) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$;

4) $2x^2 - 3xy - x + 3y + 4 = 0$;

5) $10x^2 + 21xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$;
6) $x^2 - 3xy - 10y^2 + 6x - 8y = 0$;
7) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y - 14 = 0$;
8) $3x^2 + 7xy + 4y^2 + 5x + 2y - 6 = 0$;
9) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y + 11 = 0$.

11.85. Koostada teist järku joone võrrand, kui ta osutub hüperbooli

$$3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

asümptootide paariks ning leida need asümptoodid.

11.86. Tõestada, et

1) kõigil teist järku kõveratel, mille võrrandid erinevad üksteisest ainult vabaliikme poolest, on ühised asümptoodid;

2) kui kahel kõveral on ühised asümptoodid, siis nende võrrandite kõikide liikmete, välja arvatud vabaliikmed, vastavad kordajad on võrdelised.

Leida kõvera

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + 11y + \lambda = 0$$

asümptoodid erinevate λ väärtuste korral.

11.87. Kahe hüperbooli üldvõrrandid on

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 ,$$
$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + b_{33} = 0 .$$

Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et need hüperboolid asetseksid nende ühiste asümptootide poolt moodustatud erinevates tippnurkades.

11.88. Leida kõverate, mille asümptootideks on

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{ja}$$
$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 ,$$

üldvõrrand.

11.89. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookus asetseb punktis $F(-2, x)$ ja hüperbooli asümptootideks on sirged

$$2x - y + 1 = 0 \quad \text{ja}$$
$$x + 2y - 7 = 0\,.$$

11.90. Teist järku joon läbib punkti (1, -1) ning ta asümptootideks on kaks sirget:

$$2x + 3y - 5 = 0 \quad \text{ja}$$
$$5x + 3y - 8 = 0\,.$$

Leida selle joone võrrand.

11.91. Koostada hüperbooli võrrand, kui ta asümptootideks on sirged

$$x - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad 2x - y + 1 = 0$$

ning ta puutub sirget

$$4x + y + 5 = 0\,.$$

11.92. Leida hüperbooli võrrand, kui fookus on F(-2,2) ning sirged

$$2x - y + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad x + 2y - 7 = 0$$

on asümptootideks.

11.93. Millist tingimust peavad rahuldama hüperbooli üldvõrrandi kordajad, et hüperbool oleks võrdhaarne?

11.94. Tõestada, et võrrand

$$(A_1x + B_1y + C_1)^2 - (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1\,,$$

kui $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, määrab hüperbooli ning leida ta asümptoodid.

§ 4. Teist järku joone võrrandi lihtsustamine reeperi pöörde abil

Olgu teist järku tsentraalne joon määratud mingi ristreeperi suhtes võrrandiga

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0\,. \qquad (11.8)$$

Kui teostada ristreeperi pööre nurga α võrra, siis punkti koordinaadid teisenevad järgmiste valemite järgi:

$$\begin{cases} x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha\,, \\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha\,. \end{cases} \qquad (11.24)$$

Asendades seosed (11.24) joone võrrandisse (11.8), saame tundmatute korrutisega liikme kordajaks

$$a_{12}' = (a_{22} - a_{11})\cos\alpha\sin\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha \;\; \sin^2\alpha)$$

ehk

$$a_{12}' = \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sin 2\alpha + a_{12}\cos 2\alpha\,.$$

Kui reeperi teljed on kaassihilised, siis teist järku kõvera võrrandis ei eksisteeri tundmatute korrutisega liiget (s. t. $a_{12}' = 0$).

Kuna enne pööret ei ole teljed kõvera peasihilised, s. t. $a_{12} \neq 0$, siis on alati võimalik valida nurka φ nii, et peale pööret $a_{12}' = 0$, s. t. tuleb võtta

$$\cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\,. \qquad (11.25)$$

Kui teist järku tsentraalse joone korral reeperi telgedeks on peateljed, siis joone võrrand omab kuju

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0\,. \qquad (11.26)$$

Saadud võrrand on peaaegu kanooniline võrrand, millest üleminek kanoonilisele võrrandile on väga lihtne.

Ruutliikmete kordajad λ_1 ja λ_2 võime leida ka vahetult teist järku joone <u>karakteristlikust</u> võrrandist.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (11.27)$$

ehk

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0\,, \qquad (11.28)$$

kus $S = a_{11} + a_{22}$.

Kordajad λ_1 ja λ_2 on karakteristliku võrrandi lahendid, nad on alati reaalsed ja neid on võimalik arvutada vahetult lähtevõrrandist.

<u>Märkus</u>. x^2 kordajaks võib võtta ükskõik kumma lahendi-

test λ_1 või λ_2. Valik sõltub ainult sellest, kumba telge me nimetame x-teljeks ja kumba y-teljeks, mis on aga ebaoluline.

Pöördenurga α leidsime valemi (11.25) võib teisendada kujule

$$k = \tan\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \qquad (11.29)$$

kus k on esimese peatelje (sümmeetriatelje) tõus.

Parabooli lihtsama võrrandi saame, kui paigutame reeperi alguspunkti parabooli tippu, s. t. telje ja parabooli lõikepunkti ($a'_{33} = 0$) ja võtame parabooli telje abstsissteljeks ($a'_{23} = 0$, $a'_{12} = 0$ ja $a'_{11} = 0$) ning ordinaatteljeks parabooli puutuja parabooli tipus. Saame

$$a'_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0 . \qquad (11.30)$$

Kui tsentraalse kõvera korral fokaaltelg valida abstsissteljeks, reeperi alguspunktiks üks fokaaltipp ja ordinaatteljeks kõvera puutuja tipus, siis kõvera nn. tippvõrrand omab kuju

$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x = 0 . \qquad (11.31)$$

Ellipsi või hüperbooli asend määratakse lähtereeperi suhtes järgmiselt:

a) kõvera keskpunkt leitakse võrrandisüsteemist

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 , \quad a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 ,$$

b) kõvera fokaaltelje (uue x-telje) tõus leitakse seosest

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}},$$

kus λ_1 on karakteristliku võrrandi lahend (ellipsi korral absoluutväärtuselt väiksem lahend, hüperbooli korral see lahend, mille märk ühtib Δ märgiga). Kõvera peaaegu kanooniline võrrand omab kuju

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 .$$

Parabooli asendi määramiseks leiame parabooli tipu kui parabooli telje

$$a_{11}x + a_{12}y + \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{a_{11} + a_{22}} = 0$$

või

$$a_{12}x + a_{22}y + \frac{a_{22}a_{23} + a_{12}a_{13}}{a_{11} + a_{22}} = 0$$

ja parabooli lõikepunkti.

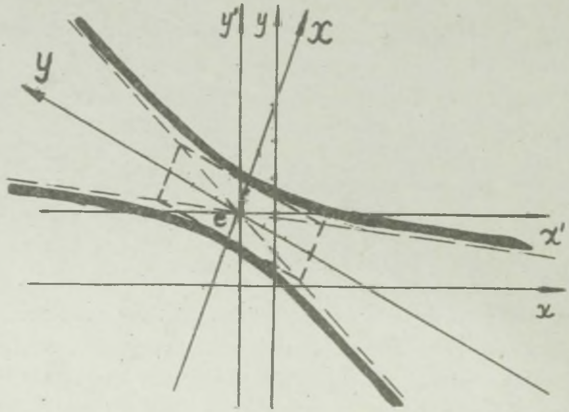
Vektor $\bar{q} = \left(\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \right)$ on paralleelne parabooli teljega ja on suunatud tema nõgususe poole (positiivne suund). Parabooli parameeter määratakse valemist

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}.$$

<u>Näide 1.</u> Leida järgmise ruutvõrrandiga määratud koonuselõike tüüp, asend ja kanooniline võrrand

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0 .$$

<u>Lahendus.</u> $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81 \neq 0$, $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9 < 0.$



Joon. 11.1

Leiame karakteristliku võrrandi $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$. Seega selle lahendid on $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -1$. Tema peaaegu kanooniliseks võrrandiks on

$$9X^2 - Y^2 + \frac{81}{-9} = 0$$

ja kanooniliseks võrrandiks

$$X^2 - \frac{Y^2}{9} = 1 .$$

Keskpunkti määrab võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3y - 6 = 0 , \\ 3x + 8y - 13 = 0 . \end{cases}$$

Keskpunktiks on punkt C(-1, 2), fokaaltelje tõus

$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{9}{3} = 3$, s.t. $\tan\alpha = 3$.

Näide 2. Leida koordinaatide teisendusvalemid, mis teisendavad 1. näites antud hüperbooli võrrandi kanooniliselê kujule.

Lahendus. Hüperbooli keskpunkt asetseb punktis G(-1, 2) ja fokaaltelje tõus k = 3 (näide 1). Seega

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} , \quad \sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}} .$$

Järelikult koordinaatide teisendusvalemid on

$$x = \frac{X - 3Y}{\sqrt{10}} - 1 , \qquad y = \frac{3X + Y}{\sqrt{10}} + 2$$

ning

$$X = \frac{x + 3y - 5}{\sqrt{10}} , \qquad Y = \frac{-3x + y - 5}{\sqrt{10}} .$$

Näide 3. Leida koonuselõike

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$$

fookused ja juhtsirged.

Lahendus. Kõver on hüperbool, mille kanooniline võrrand on $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$. Koordinaatide teisendusvalemid üleminekuks kanooniliselt võrrandilt lähtevõrrandile on

$$X = \frac{x + 3y - 5}{\sqrt{10}}, \quad Y = \frac{-3x + y - 5}{\sqrt{10}} .$$

Fookuste koordinaadid kanoonilises reeperis on

$$X_{F_1} = -\sqrt{10}, \quad Y_{F_2} = 0 , \quad X_{F_2} = \sqrt{10} , \quad Y_{F_2} = 0 .$$

Juhtjoonte võrrandid kanoonilise reeperi suhtes on

$$Y = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ning lähtereeperi suhtes

$$\frac{x + 3y - 5}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ehk

$$x + 3y - 4 = 0 , \quad x + 3y - 6 = 0 .$$

<u>Näide 4</u>. Leida ruutvõrrandiga

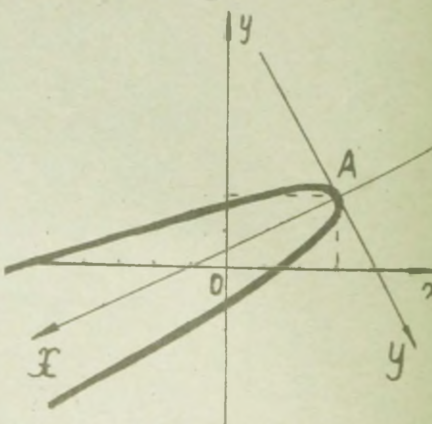
$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

määratud koonuse lõike tüüp, asend ja kanooniline võrrand.

<u>Lahendus</u>. $\delta = 0$, $\Delta = -\frac{25}{4}$. Järelikult kõver on parabool. Parameeter $p = \frac{25}{4 \cdot 5^3} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ ning kanooniline võrrand $Y^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} X$. Telje võrrand on $x - 2y + 1 = 0$. Parabooli tipu määrab süsteem

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 , \\ 4x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

ja tipp on $A(3, 2)$. Parabooli nõgususe poole suunduva parabooli peatelje sihivektoriks on $\bar{q} = (-2, -1)$. Joonise tegemisel on kasulik arvestada, et kui $X = \sqrt{5}$, siis $Y = \pm 1$.



Joon. 11.2.

Näide 5. Leida parabooli

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

fookus ja juhtsirge.

Lahendus. Antud parabooli tipp on $A(3, 2)$, parameeter $p = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ ja telje sihivektor $\overline{q} = (-2, -1)$ (positiivses sihis). Siis

$$\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

kus φ on x-telje ja X-telje vaheline nurk. Järelikult reeperiteisendusvalemid on

$$x = \frac{-2X + Y}{\sqrt{5}} + 3, \quad y = \frac{-X - 2Y}{\sqrt{5}} + 2$$

ehk

$$X = \frac{-2x - y + 8}{\sqrt{5}}, \quad Y = \frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}}.$$

Fookuse koordinaadid kanoonilises reeperis on

$$X = \frac{1}{4\sqrt{5}}, \quad Y = 0$$

ja lähtereeperis $x = 2{,}9$; $y = 1{,}95$. Juhtsirge võrrand kanoonilises reeperis on

$$X = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$$

ja lähtereeperis $8x + 4y - 33 = 0$.

Näide 6. Leida ruutvõrrandiga

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$$

määratud koonuselõike tüüp ja asend.

Lahendus. $\delta = -\frac{9}{4} < 0$, $\Delta = 0$. Võrrand määrab lõikuvate sirgete paari. Kasutades rühmitamise võtet, saame nende sirgete võrrandid:

$$x - y - 1 = 0, \quad x - 4y + 2 = 0.$$

11.95. Teist järku kõvera võrrand on

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Tõestada, et see võrrand määrab hüperbooli. Leida lähtereeperi suhtes fookuste ja tippude koordinaadid, juhtsirgete võrrandid ja hüperbooli tippe läbivate puutujate võrrandid.

11.96. Leida antud teist järku kõverate kanoonilised võrrandid, kasutades reeperiteisendusi. Kirjeldada antud kõverate asendeid lähtereeperi suhtes:

1) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$;
2) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$;
3) $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$;
4) $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$;
5) $2x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 2 = 0$;
6) $2x^2 + 6x + 3y + 6 = 0$;
7) $4y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$;
8) $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$;
9) $xy + x + y = 0$.

11.97. On antud teist järku jooned:

1) $3x^2 + 2xy + y^2 - 7 = 0$;
2) $5x^2 + 3y^2 + x - 2 = 0$;
3) $x^2 + 3y^2 + 4x - 5y = 0$;
4) $x^2 - 2y^2 + 3 = 0$;
5) $3x^2 - 4y^2 + 2y + 5 = 0$;
6) $8x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1 = 0$.

Selgitada kõverate asendite iseärasusi reeperi telgede suhtes.

11.98. Leida antud teist järku joonte kanoonilised võrrandid, kasutades reeperiteisendusi. Kirjeldada teist järku joonte asendeid vana ja uue reeperi suhtes.

1) $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$;
2) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$;
3) $17x^2 - 12{-}y + 8y^2 = 0$;
4) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$;
5) $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0$.

11.99. Joonestada antud tsentraalsed koonuselõiked. Leida koordinaatide teisendusvalemid üleminekuks antud reeperilt teist järku joone kanoonilisele reeperile:

1) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;
2) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;
3) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
4) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;
5) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;
6) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

11.100. Joonestada antud mittetsentraalsed teist järku jooned. Leida koordinaatide teisendusvalemid üleminekuks antud reeperilt teist järku joone kanoonilisele reeperile:

1) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$;
2) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$;
3) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$.

11.101. On antud kõver

$$2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0 .$$

Leida kõvera võrrand, kui reeperi telgedeks on kõvera sümmeetriateljed.

11.102. On antud kõverad

1) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;
2) $32x^2 + 60xy + 7y^2 - 16x - 2y + 1 = 0$;
3) $2xy + 3x - y - 2 = 0$;
4) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
5) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

Leida nende kõverate võrrandid, kui reeperi telgedeks on kõvera peateljed.

11.103. Leida iga järgmise võrrandiga määratud tsentraalse teist järku kõvera keskpunkt, fokaaltelje tõus ja kanooniline võrrand:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
2) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
3) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
4) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
5) $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$;
6) $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$.

11.104. Kasutades reeperiteisendusi, kontrollida, et iga järgnev võrrand määrab lõikuvate sirgete paari. Leida sirgete võrrandid lähtereeperis:

1) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$;
2) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$.

11.105. Teisendada antud parabooli võrrandid lihtsamale kujule:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;
2) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$.

11.106. Määrata antud kõverate tüüp ja asend, lihtsustades eelnevalt kõverate võrrandeid reeperiteisenduste abil

1) $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 5 = 0$;

11.107. Leida iga järgneva võrrandiga määratud parabooli tipp Q , parameeter ja telje siht:

1) $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$;
2) $y^2 - 6x + 14y + 49 = 0$;
3) $y^2 + 8x - 16 = 0$;
4) $x^2 - 6x - 4y + 29 = 0$;
5) $y = Ax^2 + Bx + C$; $A \neq 0$
6) $y = x^2 - 8x + 15$;
7) $y = x^2 + 6x$.

11.108. Leida antud paraboolide kanooniline võrrand, tipu koordinaadid ja sümmeetriatelje sihivektor:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
3) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$;
4) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;
5) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

11.109. Selgitada reeperi telgede paiknemist antud parabooli suhtes:

1) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$;
2) $2x^2 + 6x - y - 1 = 0$;

3) $3x^2 - 4y + 5 = 0$;
4) $4y^2 - 2x - 3 = 0$.

11.110. Teades parabooli parameetrit, koostada parabooli võrrand, kui reeperi telgedeks on parabooli fokaalkõõlu otspunkti läbivad puutuja ja normaal.

11.111. Parabooli parameeter on p . Koostada parabooli võrrand, kui reeperi telgedeks on parabooli fokaalkõõlu otspunktides võetud puutujad.

11.112. Näidata, et kõver

$$y = ax^2 + 2bx + c \qquad (a \neq 0)$$

on parabool, mille telg on paralleelne y-teljega.

11.113. Leida antud parabooli

$$(x \cos t + y \sin t)^2 = 2p(x \sin t - y \cos t + q) ,$$

$(q > 0,\ 0 < t < \frac{\pi}{2})$ kanooniline sõrrand. Kirjeldada parabooli asendit antud reeperi suhtes. Koostada antud parabooli telje võrrand ja puutuja võrrand parabooli tipus.

11.114. Tõestada, et võrrand

$$(A_1x + B_1y + C_1)^2 + (A_2x + B_2y + C_2)^2 = 1 ,$$

kus $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 1$ ja $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, määrab ellipsi. Koostada selle ellipsi kanooniline võrrand ning määrata ta asend lähtereeperi suhtes.

11.115. Tõestada, et võrrand

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = e\,\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} ,$$

kus $0 < e < 1$, määrab ellipsi. Leida fookuste koordinaadid ning juhtsirge võrrand.

11.116. Tõestada, et võrrand

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = e\,\frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} ,$$

kus $e > 1$, määrab hüperbooli. Leida fookuste koordinaadid ja juhtsirge võrrand.

11.117. Kui palju teise astme liikmeid ja millised kuuluvad 1) ellipsi; 2) hüperbooli; 3) parabooli võrrandisse?

11.118. Leida kõvera

$$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 12x + 6y = 0$$

fookused ja juhtsirged.

11.119. Leida parabooli

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 16x - 12y - 4 = 0$$

fookus ja juhtsirge.

11.120. Leida iga järgneva teist järku joone keskpunkt, sümmeetriateljed, fookused, juhtsirged, puutujad kõvera tippudes, hüperboolide asümptoodid ja iga kõvera kanooniline võrrand:

1) $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 18x - 18y + 9 = 0$;
2) $5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0$;
3) $2xy - 4x - 2y + 3 = 0$;
4) $8y^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$;
5) $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 170x + 310y - 1025 = 0$;
6) $x^2 + y^2 + 2xy - 8x + 4 = 0$;
7) $x^2 + y^2 - xy - 1{,}3x + 6{,}8y + 13{,}03 = 0$;
8) $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 8x + 8y + 20 = 0$;
9) $x^2 - y^2 + xy = 0$;
10) $20xy - 15y^2 - 8x + 16y - 4 = 0$;
11) $4x^2 - 9y^2 - 12xy - 8x + 12y - 60 = 0$;
12) $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 16x - 16y - 16 = 0$;
13) $13x^2 + 4y^2 + 12xy - 50x - 28y - 11 = 0$;
14) $x^2 + 7y^2 - 8xy + 6x - 6y + 9 = 0$;
15) $4xy + 4y - 1 = 0$;
16) $9x^2 + 16y^2 + 24xy - 230x + 110y = 0$;
17) $4x^2 + 9y^2 + 12xy + 2x - 10y - 1 = 0$.

11.121. Leida hüperbooli

1) $2xy - 6x + 4y - 1 = 0$;
2) $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0$

asümptootiline võrrand.

Märkus. Kui reeperi telgedeks on hüperbooli asümptoodid, siis hüperbooli võrrandit nimetatakse asümptootiliseks võrrandiks.

11.122. Leida reeperiteisendus ja koordinaatide teisendusvalemid, mille tulemusena hüperbooli kanooniline võrrand teiseneb hüperbooli asümptootiliseks võrrandiks.

11.123. Kaldreeperis on koonuselõiked määratud järgmiste võrranditega:

1) $3x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$; $\omega = 120^\circ$.
2) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$; $\omega = 60^\circ$.

Leida antud koonuselõike võrrandid, kui reeperi telgedeks võtta koonuselõigete peateljed.

11.124. Kui reeperi telgedeks on kõvera kaks diameetrit, mis moodustavad teineteisega nurga $\frac{\pi}{3}$, siis kõvera võrrand on

$$x^2 + y^2 = 4 .$$

Leida kõvera võrrand juhul, kui reeperi telgedeks on kõvera peateljed.

11.125. Paraboolid on määratud kaldreeperi suhtes järgmiste võrranditega:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$; $\omega = 60^\circ$.
2) $x^2 + y = 0$; $\omega = 120^\circ$.

Leida antud paraboolide võrrandite lihtsamad kujud.

11.126. Afiinses reeperis ($g_{11} = 9$, $g_{12} = 36$, $g_{22} = 169$) on teist järku kõver määratud ruutvõrrandiga

$$18x^2 + 189xy + 418y^2 - 3x - 17y - 1 = 0 .$$

Leida kõvera peateljed.

11.127. Leida teist järku joone

$$50x^2 - 2y^2 - 5x + 5y - 1 = 0$$

peateljed, kui $g_{11} = 25$, $g_{12} = 3$, $g_{22} = 1$.

11.128. Koostada parabooli

$$4x^2 + 28xy + 49y^2 + 12x - 1 = 0$$

telje võrrand, kui $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

11.129. Leida parabooli

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 4y = 0$$

sümmeetriatelg ja tipp, kui $g_{11} = 1$, $g_{12} = -\frac{1}{2}$, $g_{22} = 1$.

§ 5. Invariantide kasutamine teist järku joone üldises teoorias

Olgu teist järku joon (kvadrik) määratud üldvõrrandiga (11.1). Kõik teist järku jooned jagatakse kõigepealt kahte rühma.

I. Teist järku kõverad ehk kidumata teist järku jooned: ellips, hüperbool, parabool.

II. Sirgete paarid ehk kidunud teist järku jooned.

Kõvera tüüpi on kõige lihtsam kindlaks teha, kasutades teist järku joone invariante.

Iga polünoomi, mis on koostatud teist järku joone võrrandi kordajatest ning mis jääb muutmatuks üleminekul ühest ristreeperist teisele, nimetatakse teist järku joone ortogonaalseks invariandiks. Invarianti $F(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33})$ iseloomustab seega võrdus

$$F(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}) = F(a'_{11}, a'_{12}, \ldots, a'_{33}),$$

kui a'_{ik} on sama teist järku joone võrrandi kordajad uue ristreeperi suhtes.

Teist järku joone ortogonaalseteks invariantideks on
1) teist järku joone diskriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

2) ruutliikmete diskriminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

3) ruutliikmete diskriminandi jälg

$$S = a_{11} + a_{22} .$$

Teist järku joone tüübi määramiseks invariantide abil võib kasutada järgmist tabelit:

	Teist järku kõverad $\Delta \neq 0$	Sirgete paarid $\Delta = 0$
$\delta > 0$	ellips (reaakne või imaginaarne)	imaginaarsed sirged, mis lõikuvad reaalses punktis
$\delta = 0$	parabool	kollineaarsed sirged (paralleelsed või ühtivad, reaalsed või imaginaarsed)
$\delta < 0$	hüperbool	reaalsed lõikuvad sirged

Invariantide kõrval tuleb mõnikord kasutada ka nn. semiinvariante, s. t. selliseid polünoome teist järku joone võrrandi kordajatest, mis jäävad muutmatuteks ristbaasi pööramisel sama alguspunkti ümber, kuid mis reeperi alguspunkti nihkel üldjuhul muutuvad. Teist järku joone puhul on selliseks semiinvariandiks näiteks

$$\sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Kui teist järku joon on määratud üldvõrrandiga afiinse reeperi $R = \{0, \bar{e}_i\}$ suhtes ning $g_{ij} = \bar{e}_i \bar{e}_j$, siis teist järku joone afiinseteks invariantideks on

$$\Delta = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} ,$$

$$\delta = \frac{1}{g} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} ,$$

$$S = \frac{1}{g} \left(\begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} \\ a_{12} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} \\ g_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \right) ,$$

kus $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

Afiinsed invariandid ei muutu üleminekul ühelt afiinselt reeperilt teisele.

Afiinseks semiinvariandiks on

$$\delta = \frac{1}{g}\left(\begin{vmatrix} g_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & g_{12} & a_{13} \\ a_{12} & g_{22} & a_{23} \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}\right).$$

Teist järku joonte klassifikatsioon koos kanooniliste võrranditega:

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Teist järku kõverad
$\Delta \neq 0$</td><td colspan="3">Sirgete paarid
$\Delta = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta > 0$</td><td colspan="2">ellips</td><td rowspan="2" colspan="3">kaks imaginaarset lõikuvat sirget, mis lõikuvad reaalses punktis $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$</td></tr>
<tr><td>$S\Delta < 0$
reaalne ellips
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</td><td>$S\Delta > 0$
imaginaarne ellips
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta = 0$</td><td rowspan="2" colspan="2">parabool
$Y^2 = 2pX$</td><td colspan="3">Kollineaarsed sirged:</td></tr>
<tr><td>$\kappa < 0$
kaks paralleelset sirget
$x^2 = a^2 = \kappa$</td><td>$\kappa = 0$
kaks ühtivat sirget
$x^2 = 0$</td><td>$\kappa > 0$
kaks imag. paralleelset sirget
$x^2 = -a^2$</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$</td><td colspan="2">hüperbool
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$</td><td colspan="3">kaks lõikuvat sirget
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$</td></tr>
</table>

Vaatame lähemalt ortogonaalset invariantide kasutamist teist järku joone kanoonilise kuju leidmiseks. Invariandid arvutame alati lähtevõrrandist.

1) $\Delta \neq 0$, $\delta \neq 0$. Järelikult on meil tegemist tsentraalse teist järku kõveraga (ellipsi või hüperbooliga). Mõlemal juhul võime peaaegu kanoonilise võrrandi kirjutada kujul

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33} = 0.$$

Leides invariandid ka saadud võrrandist, saame kordajate a'_{11}, a'_{22} ja a'_{33} leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix}. \quad S = a'_{11} + a'_{22}$$

ehk

$$\begin{cases} a'_{11}\, a'_{22}\, a'_{33} = \Delta, \\ a'_{11}\, a'_{22} = \delta, \\ a'_{11} + a'_{22} = S, \end{cases}$$

kus Δ, δ ja S on antud arvud (leitud lähtevõrrandist). Lahendades süsteemi, leiame, et $a'_{33} = \frac{\Delta}{\delta}$ ja a'_{11} ja a'_{22} on karakteristliku võrrandi $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ lahendid.

2) $\Delta \neq 0$ $\delta = 0$, s. t. kõver on parabool. Parabooli peaaegu kanoonilise võrrandi võime kirjutada kujul

$$a'_{22}y^2 - 2a'_{13}x = 0 .$$

Analoogiliselt juhuga 1)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ -a'_{13} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad S = a'_{22} \neq 0 .$$

Siit $a'_{22} = S$, $a'^2_{13} = \frac{\Delta}{S}$ ning kanoonilisele võrrandile üleminek ei paku enam raskusi.

3) Kui reeperi telgedeks võtta hüperbooli asümptoodid, siis hüperbooli <u>asümptootiline kanooniline võrrand</u> ehk lühemalt <u>asümptootiline võrrand</u> omab kuju

$$x'y' = a \qquad (11.32)$$

ehk $2a'_{12}\,xy - a'_{33} = 0$.

Kuju (11.32) leidmiseks saame võrrandisüsteemi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a'_{12} & 0 \\ a'_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta = -a'^2_{12},$$

millest leiame

$$a'^2_{12} = -\delta > 0 ; \quad a'_{33} = \frac{\Delta}{\delta} .$$

<u>11.130</u>. Kasutades invariante, määrata järgmiste teist järku joonte tüübid:

1) $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$;
2) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$;
3) $x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$;
4) $y^2 + 5xy - 14x^2 = 0$;
5) $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$;
6) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$;
7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$;
8) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$;
9) $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$;
10) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y = 0$;
11) $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

11.131. Kasutades invariante, määrata järgmiste teist järku joonte tüübid:

1) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
2) $3x^2 - 8xy + 7y^2 + 8x - 15y + 20 = 0$;
3) $5x^2 + 14xy + 11y^2 + 12x - 7y + 19 = 0$;
4) $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 16x - 12y + 3 = 0$;
5) $6x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 18y + 14 = 0$;
6) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
7) $2x^2 + 10xy + 12y^2 - 7x + 18y - 15 = 0$;
8) $3x^2 - 2xy - 3y^2 + 12y - 15 = 0$;
9) $(x + 2y)^2 - 3y^2 = 1$;
10) $(2x - y)(x - y) - 1 = 0$;
11) $x^2 + 2xy + y^2 + y = 0$;
12) $x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
13) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 7x - 12 = 0$;
14) $25x^2 - 20xy + 4y^2 - 12x + 20y - 17 = 0$;
15) $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x + 10y = 0$;
16) $x^2 - 2xy - 2y^2 - 4x - 6y - \frac{13}{3} = 0$;
17) $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$;
18) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25 = 0$;
19) $9x^2 + 30xy + 25y^2 = 0$;
20) $4x^2 - 4xy + y^2 + 12x - 6y + 9 = 0$;
21) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 29 = 0$;
22) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.

11.132. Kasutades invariante, teisendada antud tsentraalsete teist järku kõverate võrrandid kanoonilisele kujule:

1) $x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 4y - 8 = 0$;
2) $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$;
3) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
4) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

11.133. Kasutades invariante, teisendada antud teist järku kõverate võrrandid kanoonilisele kujule:

1) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;
2) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$;
3) $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$;
4) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;
5) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$.

11.134. Tõestada, et suvalise teist järku elliptilise võrrandi ($\delta > 0$) korral kumbki kordajatest a_{11} ja a_{22} ei või muutuda nulliks ja nad on sama märgiga arvud.

11.135. Tõestada, et teist järku elliptiline võrrand ($\delta > 0$) määrab

1) reaalse ellipsi parajasti siis, kui a_{11} ja Δ on erimärgilised arvud;

2) imaginaarse ellipsi parajasti siis, kui a_{11} ja Δ on samamärgilised arvud;

3) kidunud ellipsi (punkti) parajasti siis, kui $\Delta = 0$.

11.136. Kontrollida kasutamata reeperi teisendusi, et iga järgnev võrrand määrab ellipsi. Leida ellipsite peateljed:

1) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$;
2) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$;
3) $13x^2 + 18xy + 37y^2 - 26x - 18y + 3 = 0$;
4) $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 46x + 62y + 13 = 0$.

11.137. Reeperiteisendust kasutamata kontrollida, et iga järgnev võrrand määrab ainult ühe reaalse punkti (imaginaarsete sirgete paari, mis lõikuvad reaalses punktis).

Leida punktide koordinaadid:

1) $5x^2 - 6xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$;
3) $5x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 2y + 2 = 0$;
4) $x^2 - 6xy + 10y^2 + 10x - 32y + 26 = 0$.

11.138. Tõestada, et teist järku hüperboolne võrrand ($\delta < 0$) määrab

1) hüperbooli parajasti siis, kui $\Delta \neq 0$;
2) lõikuvate sirgete paari parajasti siis, kui $\Delta = 0$.

11.139. Kontrollida, et iga järgnev võrrand määrab hüperbooli, kasutamata reeperiteisendusi. Leida hüperboolide poolteljed:

1) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;
2) $12x^2 + 26xy + 12y^2 - 52x - 48y + 73 = 0$;
3) $3x^2 + 4xy - 12x + 16 = 0$;
4) $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x - 36y + 23 = 0$.

11.140. Tõestada, et võrrand

$$y = \frac{k_1x + b_1}{k_2x + b_2}$$

määrab hüperbooli.

11.141. Milline on hüperbooli võrrand, kui üks ta telgedest või mõlemad teljed on paralleelsed asümptootidega?

11.142. Invariante kasutades leida antud hüperboolide asümptootilised võrrandid:

1) $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 8x - 11y = 0$;
2) $4x^2 - 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$;
3) $y^2 - 2xy - 4x - 2y - 2 = 0$;
4) $8y^2 + 6xy - 12x - 26x - 26y + 11 = 0$.

11.143. Kahe hüperbooli üldvõrrandid erinevad ainult vabaliikmete poolest. Leida sellele faktile geomeetriline sisu.

11.144. Tõestada, et kui hüperbooli üldvõrrandis asendada vabaliige arvuga Q , mis on määratud tingimusest

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & Q \end{vmatrix} = 0 ,$$

siis saame antud hüperbooli asümptootide paari võrrandi.

11.145. Tõestada, et suvalises teist järku paraboolses võrrandis ($\delta = 0$) ruutudega liikmete kordajaid a_{11} ja a_{22} ei ole võimalik teisendada samaaegselt nullideks.

11.146. Tõestada, et suvaline teist järku paraboolne võrrand ($\delta = 0$) määrab parabooli parajasti siis, kui $\Delta \neq 0$ ja parabooli parameeter leitakse valemist

$$p = \sqrt{\frac{-\Delta}{(a_{11} + a_{22})^2}} .$$

11.147. Reeperiteisendusi kasutamata tõestada, et iga järgnev võrrand määrab parabooli, ja leida parabooli parameeter:

1) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0$;
2) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 54x - 178y + 181 = 0$;
3) $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$;
4) $9x^2 - 6xy + y^2 - 50x + 50y - 275 = 0$.

11.148. Kontrollida, et iga järgnev võrrand määrab parabooli. Invariante kasutades leida nende paraboolide kanoonilised võrrandid:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
2) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;
3) $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0$;
4) $4x^2 - 4xy + y^2 - x - 2 = 0$.

11.149. Tõestada, et suvalist teist järku paraboolset võrrandit ($\delta = 0$) võib viia kujule:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + F = 0$$

ja tema diskriminant avaldub valemiga $\Delta = -(a_{13}\beta - a_{23}\alpha)^2$. Tõestada samuti, et elliptilist ja hüperboolset võrrandit sellisele kujule teisendada ei ole võimalik.

11.150. On antud võrrand

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + 2(Ax + By + C) = 0 , \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ B & A \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Tõestada, et

1) see võrrand määrab parabooli;

2) sirge $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ on parabooli diameetriks;

3) sirge $Ax + By + C = 0$ on parabooli puutujaks parabooli ja diameetri lõikepunktis.

11.151. Teisendada järgnevad teist järku paraboolsed võrrandid eelmises ülesandes toodud kujule.

1) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + y - 15 = 0$;
2) $9x^2 - 6xy + y^2 - x + 2y - 14 = 0$;
3) $25x^2 - 20xy + 4y^2 + 3x - y + 11 = 0$;
4) $16x^2 + 16xy + 4y^2 - 5x + 7y = 0$;
5) $9x^2 - 42xy + 49y^2 + 3x - 2y - 24 = 0$.

11.152. Tõestada, et paraboolse teist järku võrrandi

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + F = 0$$

võib teisenduse

$$\begin{cases} x + x' \cos\varphi - y' \sin\varphi , \\ y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi , \end{cases} \qquad \tan\varphi = -\frac{\alpha}{\beta}$$

abil viia kujule

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + F' = 0 ,$$

kus

$$a'_{22} = \alpha^2 + \beta^2 , \qquad a'_{13} = \pm\sqrt{\frac{-\Delta}{\alpha^2 + \beta^2}} .$$

11.153. Milliseid tingimusi peab rahuldama teist järku võrrand $a_{ij}x^iy^j = 0$, $i,j = 1,2$, et ta määraks parabooli, mille telg on paralleelne 1) x-teljega, 2 y-teljega.

11.154. Tõestada, et kui teist järku joone üldvõrrand määrab parabooli, siis võrrandi vabaliikme muutumisel saame uue parabooli, kusjuures sümmeetriatelje siht ja nõgususe suund ei muutu.

11.155. Tõestada, et võrrand $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ määrab parabooli.

11.156. Tõestada, et iga homogeenne teist järku võrrand kahest muutujast

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

määrab reeperi alguspunkti läbivate sirgete paari.

11.157. Reeperiteisendusi kasutamata kontrollida, et iga järgnev võrrand määrab lõikuvate sirgete paari. Leida nende sirgete võrrandid:

1) $3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$; 2) $x^2 - 6xy + 8y^2 - 4y - 4 = 0$;
3) $x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$; 4) $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$.

11.158. Milliste parameetrite a väärtuste korral võrrand

1) $x^2 + 2ay^2 - x + y = 0$; 2) $x^2 + 2axy + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$

määrab a) parabooli; b) sirgete paari.

11.159. Millised teist järku jooned määratakse võrrandiga

$$x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 4x - 6y + 3 = 0 ,$$

parameetri λ erinevate väärtuste korral?

11.160. Milliseid kõveraid kujutab võrrand

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 - 3x + \lambda y - 2 = 0$$

parameetri λ erinevatel väärtustel?

11.161. Millise teist järku joone määravad tingimused

$$\Delta \neq 0 \text{ ja } S = 0 ?$$

11.162. Tõestada, et tingimused $S^2 = 4\delta$, $\Delta S < 0$ on tarvilikud ja piisavad selleks, et teist järku joone üldvõrrand määraks ringjoone.

11.163. Tõestada, et kui teist järku joone invariant $S = 0$, siis joon on tsentraalne.

11.164. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et hüperbool, mille üldvõrrand on $2F = 0$, asetseks tema asümptootide poolt moodustatud teravnurgas.

11.165. Ruutvormid, mis kuuluvad kahe hüperbooli üldvõrrandi vasakule poolele, erinevad konstantse kordaja poolest. Kuidas tõlgendada seda geomeetriliselt?

11.166. Tõestada, et ruutvõrrand kahest muutujast määrab sirgete paari parajasti siis, kui $\Delta = 0$.

11.167. Kasutamata reeperiteisendusi, kontrollida, et iga järgnev võrrand määrab paralleelsete sirgete paari. Leida sirgete võrrandid:

1) $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$;
2) $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 20x - 30y - 11 = 0$;
3) $25x^2 - 10xy + y^2 + 10x - 2y - 15 = 0$.

11.168. Teist järku joon, mille üldvõrrand on $2F = 0$, laguneb paralleelsete sirgete paariks. Milline on tarvilik ja piisav tingimus, et antud punkt $M_0(x_0, y_0)$ asetseks nende vahel?

11.169. Teist järku joone üldvõrrand määrab kaks paralleelset sirget. Leida nende sirgete vaheline kaugus d .

11.170. Kasutamata reeperiteisendusi, veenduda, et iga järgnev võrrand määrab ühe sirge (ühtivate sirgete paari). Leida sirge võrrand:

1) $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$;
2) $9x^2 + 30xy + 25y^2 + 42x + 70y + 49 = 0$;
3) $16x^2 - 16xy + 4y^2 - 72x + 36y + 81 = 0$.

11.171. Teist järku joon, mille üldvõrrand on $2F = 0$, laguneb lõikuvate, kuid mitte ristuvate sirgete paarike. Leida tarvilik ja piisav tingimus, et antud punkt $M_0(x_0, y_0)$ asetseks nende sirgete poolt moodustatud teravnurgas.

11.172. Teist järku joon, mille üldvõrrand on $2F = 0$, laguneb lõikuvate sirgete paariks. Milline on tarvilik ja piisav tingimus nende sirgete ristumiseks?

11.173. Milline konstant tuleb lisada võrrandi

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$$

vasakule poolele, et saadav uus võrrand määraks sirgete paari.

11.174. Milliste parameetrite a ja b väärtuste korral võrrand

$$x^2 + 4xy + ay^2 - 3x + 2by = 0$$

määrab paralleelsete sirgete paari.

11.175. Kasutades võrrandi vasaku poole teguriteks lahutamist, selgitada geomeetriline sisu:

1) $xy - bx - ay + ab = 0$;
2) $x^2 - 2xy + 5x = 0$;
3) $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
4) $2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0$;
5) $10x^2 - 7xy + y^2 = 0$;
6) $5x^2 - 4xy + y^2 = 0$.

11.176. Kasutades teise astme hulkliikme ruutude summaks teisendamise Lagrange'i meetodit, määrata järgnevate võrranditega määratud teist järku kõverate tüübid:

1) $x^2 - 4xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + 4y^2 + 2x - 2y - 4 = 0$;
3) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y = 0$;
4) $2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y - 1 = 0$;
5) $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 6y - 2 = 0$;
6) $2xy - 4y^2 + 6x + 6y + 1 = 0$.

11.177. Kasutades Lagrange'i teise astme hulkliikme ruutude summaks teisendamise meetodit, näidata, et igaüks allpool toodud võrranditest määrab sirgete paari. Leida nende sirgete võrrandid:

1) $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;
2) $3x^2 + xy - 2y^2 - 5x + 5y - 2 = 0$;
3) $4x^2 + 16xy + 15y^2 - 8x - 22y - 5 = 0$;
4) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

11.178. Võrrand $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ määrab lõikuvate sirgete paari $(a_{11}a_{12} - a_{12} < 0)$. Tõestada, et ristreeperi korral antud sirgete vahel asuvate nurgapoolitajate paari võrrand on järgmine:

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{21}x + a_{22}y \\ x & y \end{vmatrix} = 0 ,$$

afiinse reeperi korral

$$\begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y & a_{21}x + a_{22}y \\ g_{11}x + g_{12}y & g_{21}x + g_{22}y \end{vmatrix} = 0 .$$

11.179. Kaldreeperis on teist järku jooned määratud järgmiste võrranditega:

1) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$, $\omega = 60^\circ$;
2) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$, $\omega = 60^\circ$;
3) $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$, $\omega = 120^\circ$.

Kasutades afiinseid invariante, lihtsustada antud teist järku joonte võrrandid. Määrata joone tüüp.

11.180. Kaldreeperis (reeperinurk $\omega = \frac{\pi}{3}$) on teist järku kõver määratud võrrandiga $x^2 + y^2 = 4$. Leida antud kõvera peakanooniline võrrand (kanda antud kõver peatelgedele).

11.181. Leida teist järku joone

$$20x^2 + 124xy + 221y^2 - 36x - 126y + 9 = 0$$

kanooniline võrrand, kui $g_{11} = 4$, $g_{12} = 25$. Määrata joone asend afiinse lähtereeperi suhtes.

11.182. Teist järku kõvera võrrand afiinses reeperis ($g_{11} = 1$, $g_{12} = 0{,}5$, $g_{22} = 1$) on

$$x^2 - 3xy + y^2 + 5 = 0 .$$

Leida kõvera kanooniline võrrand.

11.183. Teist järku kõvera võrrand afiinses reeperis ($g_{11} = 4$, $g_{12} = 1$) on

$$2xy - 4x + 2y + 1 .$$

Leida antud kõvera kanooniline võrrand, keskpunkt ja fokaaltelje tõus.

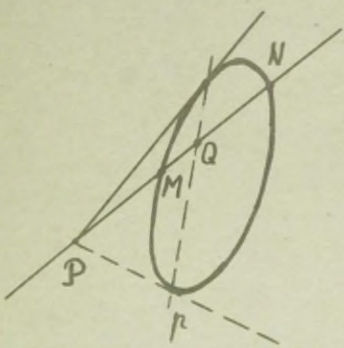
11.184. Leida parabooli

$$49x^2 + 112xy + 64y^2 + 30x + 30y + 6 = 0$$

kanooniline võrrand, kui $g_{11} = 25$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 4$.

§ 6. Poolus ja polaar

Punkte P ja Q nimetatakse <u>polaarselt konjugeeritud punktideks</u> ehk polaarselt kaaspunktideks ehk kaaspunktideks antud koonuselõike (teist järku kõvera) suhtes, kui neid punkte ühendav sirge PQ lõikab kõverat punktides M ja N, mis jagavad harmooniliselt antud punktipaari P ja Q (joon. 3).



Joon. 11.3.

Antud punktile P antud koonuselõike suhtes vastab lõpmata palju kaaspunkte, mis kõik asetsevad sirgel p , mida nimetatakse antud punkti (<u>pooluse</u>) P <u>polaariks</u> antud koonuselõike suhtes. Kaaspunktide paari korral kumbki asetseb teise polaaril. Kaassirgete paari korral kumbki läbib teise poolust. Punkti P(x', y') polaar üldvõrrandiga määratud koonuselõike suhtes määratakse võrrandiga

$$(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13})x + (a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23})y + \\ + (a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}) = 0 \qquad (11.32)$$

Kui punkt P on kõveral, siis tema polaariks on kõvera puutuja punktis P .

Igal sirgel

$$Ax + By + C = 0$$

on üheselt määratud poolus antud koonuselõike suhtes. Pooluse koordinaadid määratakse tingimusest

$$\frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}}{A} = \frac{a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23}}{B} = \\ = \frac{a_{13}x' + a_{23}y' + a_{33}}{C} . \qquad (11.33)$$

Kui kahest sirgest üks läbib teise poolust, siis ka teine läbib esimese poolust. Sellist sirgepaari nimetatakse **kaas- ehk konjugeeritud** sirgete paariks antud koonuselõike suhtes.

Kolmnurka, mille iga tipp on vastaskülje pooluseks, nimetatakse **autopolaarseks** kolmnurgaks antud teist järku kõvera suhtes.

11.185. Koostada punkti $P(2, -1)$ polaari võrrand kõvera $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ suhtes.

11.186. Leida antud punkti P polaar antud kõvera suhtes:

1) $P(-3, 5)$ $\quad 4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$;
2) $P(0, 1)$ $\quad 6x^2 - xy - 2y^2 + 4y = 0$;
3) $P(1, -2)$ $\quad 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$;
4) $P(7, 5)$ $\quad x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
5) $P(0, 0)$ $\quad x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$;
6) $P(0,0)$ $\quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$;
7) $P(x_1, y_1)$ $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
8) $P(5, 3)$ $\quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;
9) $P(-3, 2)$ $\quad y^2 = 12x$;
10) $P(1, 1)$ $\quad x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y = 0$.

11.187. Leida sirge $x - 6y + 8 = 0$ poolus kõvera

$$3x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 6y + 10 = 0$$

suhtes.

11.188. Leida antud sirge poolus antud kõvera suhtes:

1) $18x - 17y - 41 = 0$; $\quad 2x^2 - xy - 3y^2 - x - 6y - 15 = 0$;
2) abstsisstelg, $\quad 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$;
3) $15x + 4 = 0$, $\quad 9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;
4) $x + 3y + 1 = 0$, $\quad 3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$;
5) $x - y + 3 = 0$, $\quad 2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y - 5 = 0$;
6) $3x - 4y - 12 = 0$, $\quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;
7) $2x + 5y - 10 = 0$, $\quad y^2 = 6x$.

11.189. Kõvera $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0$ ja sirge $3x - y + 6 = 0$ lõikepunktidest on tõmmatud selle kõvera puutujad. Leida puutujate lõikepunkt.

11.190. Punktist $M(3, 1)$ on tõmmatud kaks puutujat kõverale $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$. Leida puutepunkti ühendava sirge võrrand.

11.191. Leida sirgel $4x + 3y - 12 = 0$ punkt, mis oleks reeperi alguspunkti kaaspunktiks kõvera

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$$

suhtes.

11.192. Leida sirgel

$$4x - y + 30 = 0$$

punkt, mis oleks punktiga $P(5, 1)$ polaarselt konjugeeritud punktiks järgmise võrrandiga määratud kõvera suhtes:

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0 .$$

11.193. Leida punkti $M(0,3)$ läbiva kõvera

$$2xy - 6x + 4y - 1 = 0$$

suhtes sirgega

$$x - 3y + 22 = 0$$

polaarselt konjugeeritud sirge.

11.194. Leida tingimus, mille korral kaks sirget

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{ja} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

on kaassirgeteks kõvera

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

suhtes. Milline on tingimus siis, kui kõver on määratud kanoonilise võrrandiga.

11.195. Tõestada, et punkti polaar ringjoone suhtes on risti sirgega, mis ühendab seda punkti ringjoone keskpunktiga.

11.196. Tõestada, et kui kaks punkti on kaaspunktideks ringjoone $x^2 + y^2 = R^2$ suhtes ning asetsevad samal raadiusel, siis nende kaugused ringjoone keskpunktist rahuldavad tingimust

$$\rho \cdot \rho_1 = R^2 .$$

11.197. Tõestada, et diameeter, mis jagab kõõlu pooleks, läbib selle kõõlu poolust, s. t., ta on selle kõõluga polaarselt konjugeeritud sirgeks.

11.198. Kontrollida, et teist järku kõvera juhtsirge mistahes punkti polaar läbib selle kõvera fookust.

Märkus. Kõvera võrrand võtta kanoonilisel kujul.

11.199. Tõestada, et iga kaks polaarset konjugeeritud sirget, mis läbivad fookust, on teineteisega risti.

Märkus. Kõvera võrrand võtta kanoonilisel kujul.

11.200. Tõestada, et hüperbooli asümptoodi mistahes punkti polaar on paralleelne selle asümptoodiga.

11.201. Ellipsi $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ lühema telje otspunktid on ühendatud ellipsi fookustega. Leida saadava rombiga polaarne kujund antud ellipsi suhtes.

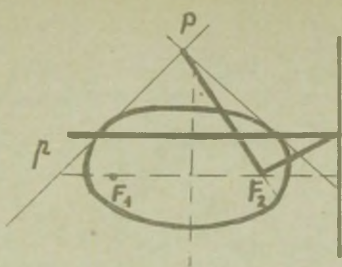
Märkus. Antud hulgaga polaarne kujund koosneb külgede poolustest ja tippude polaaridest.

11.202. Hüperbooli $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ sisse on joonestatud kolmnurk, mille tipud on $A(4, 6)$; $B(4, -6)$ ja $C(-2, 0)$. Leida selle kolmnurga polaarne kaaskujund antud hüperbooli suhtes.

11.203. Leida ringjoone $x^2 + y^2 = 9$ puutujate pooluste hulk ellipsi $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ suhtes.

11.204. Leida ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ puutujate pooluste hulk hüperbooli $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ suhtes.

11.205. Kui ühendada mistahes punkt $P(x_1, y_1)$ ellipsi fookusega F ning tõmmata punktist F sellele lõigule ristsirge, siis see ristsirge, punkti P polaar p ja fookusele F vastav juhtsirge lõikuvad ühes punktis. Tõestada see teoreem analüütiliselt ja geomeetriliselt (vt. joon. 11.4).



Joon. 11.4.

11.206. Leida teist järku kõver, mille keskpunkt asetseb punktis $M(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ning kolmnurk $O(0, 0)$, $A(-1, 1)$, $B(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ on autopolaarne otsitava teist järku kõvera suhtes.

11.207. Ordinaattelg on punkti $(5, 0)$ ja abstsisstelje punkti $(0, 3)$ polaariks teist järku kõvera suhtes. Leida selle kõvera võrrand, kui ta läbib punkte $M(1, 2)$ ja $N(0, \frac{3}{2})$.

11.208. Leida sirge

$$3x - y + 6 = 0$$

poolus kõvera

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 6y = 0$$

suhtes.

11.209. Leida punkti $P_0 = (7, 5)$ polaar kõvera

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 6y + 3 = 0$$

suhtes.

11.210. Leida punkti $P_2 = (1, -2)$ polaar kõvera

$$2x^2 + 5y^2 - 4xy - 8x + 6 = 0$$

suhtes.

§ 7. Teist järku kõvera võrrandi koostamine

11.211. Koostada teist järku kõvera võrrand, kui ta ekstsentrilisus $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ning fookused on $F_1(0, 0)$ ja $F_2(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$.

11.212. Ellipsi fookused on $F_1(1, 3)$, $F_2(-1, 2)$ ning üks ta puutujatest on $x - y + 4 = 0$. Koostada ellipsi võrrand.

11.213. Kas on võimalik leida eelmise ülesande põhjal hüperbooli?

11.214. Koostada ellipsi võrrand, kui ta keskpunkt on $C(2, 1)$ ning kaasdiameetrite otspunktid on $A(5, 1)$; $B(0, 3)$.

11.215. Rööpküliku kolm tippu asetsevad punktides $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(2, 2)$, kusjuures A ja B on vastastipud. Koostada rööpküliku sisse joonestatud ja külgede keskpunkte puutuva ellipsi võrrand.

11.216. Koostada ellipsi võrrand, kui ta keskpunkt asetseb punktis $C(2, 1)$ ning sirged

$$y - 2 = 0 \quad \text{ja} \quad x - y = 0$$

on puutujateks kaasdiameetrite otspunktides.

11.217. Koostada ellipsi võrrand, kui ta keskpunkt asub punktis $C(4, 3)$, üks tipp asetseb reeperi alguspunktis ja teine, sellega mitte kõrvuti olev tipp asetseb y-teljel.

11.218. Leida ellipsi, mille sümmeetriatelgedeks on sirged

$$x + y - 1 = 0 \text{ (fokaaltelg)} \quad \text{ja} \quad x - y + 1 = 0$$

ning mille pooIteljed on $a = 2$, $b = 1$.

11.219. Näidata, et kui teist järku joon puutub tema ümber joonestatud rööpküliku üht külge selle keskpunktis, siis ta puutub selle rööpküliku kõiki ülejäänud külgi nende keskpunktides ning see kõver on siis ellips.

11.220. Teist järku joone

$$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

ümber on joonestatud rööpkülik, mille üks tipp asetseb punktis $A(3, 4)$. Leida selle rööpküliku ülejäänud tipud.

11.221. Leida hüperbooli võrrand, kui on antud kaks fookust $F_1(x_1, y_1)$ ja $F_2(x_2, y_2)$ ning puutuja võrrand on

$$Ax + By + C = 0 .$$

11.222. Leida võrdhaarne hüperbool, mille juhtsirge on

$$x + y - 1 = 0$$

ning vastava fookuse koordinaadid on $x = 1$ ja $y = 1$.

11.223. Hüperbool läbib punkti $A(2, 0)$ ning ta fookused on $F_1(2, 3)$ ja $F_2(1, 0)$. Koostada hüperbooli võrrand.

11.224. Leida punkte $(2, 1)$, $(-1, -2)$ ja $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ läbiva hüperbooli võrrand tingimusel, et üks ta asümptootidest ühtiks abstsissteljega.

11.225. Koostada hüperbooli võrrand, kui hüperbool läbib punkti $A(0, 1)$, hüperbooli fookus asetseb reeperi alguspunktis ning sirge $x - 1 = 0$ on hüperbooli asümptoodiks.

11.226. Leida sirget

$$4x + y + 5 = 0$$

puutuva kõvera võrrand, kui selle kõvera asümptootideks on sirged $x - 1 = 0$ ja $2x - y + 1 = 0$.

11.227. Leida hüperbooli asümptoodid, kui ta keskpunkt asetseb punktis $C(2, 1)$ ja ta puutub x-telge punktis $A(3, 0)$ ning lõikab y-telge ebapunktis.

11.228. Koostada hüperbooli võrrand, kui ta puutub x-telge punktis $A(3, 0)$, y-telg on talle asümptoodiks ning ta läbib punkti $M(1, 1)$.

11.229. Koostada hüperbooli võrrand, kui on teada ta sümmeetriatelg $2x - y + 2 = 0$, asümptoot $y = 0$ ja ta punkt $(1, 1)$.

11.230. Koostada teist järku joone võrrand, kui on teada ta ekstsentrilisus $e = \sqrt{5}$, fookus $F(1, 1)$ ja vastav juhtsirge

$$x + 2y - 1 = 0 .$$

11.231. On antud kõvera kaks fookust $F_1(1, 1)$ ja $F_2(-2, -2)$ ning juhtsirge $x + y - 1 = 0$. Koostada kõvera võrrand.

11.232. Koostada parabooli võrrand, kui parabooli fookus asetseb punktis F ja parabooli juhtsirgeks on antud sirge:

1) $F(2, 1)$, $\quad 3x - 4 - 1 = 0$;
2) $F(-1, -2)$, $\quad x - y + 8 = 0$;
3) $F(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $\quad 3x - 3y + 8 = 0$.

11.233. Koostada parabooli võrrand, kui tipp asetseb koordinaatide alguspunktis ning fookus punktis $F(1, 1)$.

11.234. Leida parabool, mille teljeks on sirge

$$x + y + 1 = 0$$

ning mis läbib punkte $(0, 0)$ ja $(0, 1)$.

11.235. Sirge

$$2x - y + 1 = 0$$

on parabooli juhtsirgeks. Parabool läbib punkte $A(2, 0)$, $B(12, 0)$. Koostada parabooli võrrand.

11.236. Koostada parabooli võrrand, kui ta läbib punkti $A(2, 1)$ ning tema juhtsirgeks on $x - 2y - 5 = 0$ ning sümmeetriateljeks $2x + y - 1 = 0$.

11.237. Leida x-telge punktis $A(3, 0)$ ja y-telge punktis $B(0, 5)$ puutuva parabooli võrrand.

11.238. Koostada parabooli võrrand, kui sirged

$$x - y - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad x + 2y - 1 = 0$$

on parabooli puutujateks ja kui fookuseks on punkt $F(1, 1)$.

11.239. Koostada parabooli võrrand, kui parabool läbib punkti $A(0, 1)$, parabooli diameetriks on sirge $x - 2y = 0$ ja sirge $x + y = 0$ on parabooli puutujaks diameetri ja parabooli lõikepunktis.

11.240. Koostada parabooli võrrand, võttes x-teljeks tema mingi diameetri, y-teljeks puutuja diameetri ja parabooli lõikepunktist.

11.241. On antud kolmnurk ABC : A(4,2), B(8, 2), C(4, 5). Koostada selle kolmnurga ümber joonestatud parabooli võrrand, nii et tippu A läbiv kolmnurga mediaan oleks parabooli diameetriks.

11.242. Koostada kolme punkti O(0, 0), A(4,0), B(0, 2) läbiva parabooli võrrand, tingimusel, et punktid A ja B oleksid sümmeetrilised parabooli telje suhtes.

11.243. Leida punktide hulk, nii et nende punktide ühendamisel kahe antud punktiga saadud sirgete tõusud antud sihi suhtes oleksid võrdsed.

11.244. Teist järku kõver läbib reeperi alguspunkti, ta keskpunkt asub punktis C(1, 2) ja juhtsirgeks on sirge $x + 2y - 1 = 0$. Koostada kõvera võrrand.

11.245. Koostada teist järku kõvera võrrand, kui ta fookus on F , vastav juhtjoon j ja kõver läbib punkti M.

1) F(0, 1) , (j) : $x - y + 3 = 0$, M(7, 0) ;
2) $F(x_1, x_2)$, (j) : $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$, $M(x_2, y_2)$.

11.246. Teist järku joone võrrand on

$$3x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 9 = 0 .$$

Leida kõver, mille sümmeetriateljed ühtivad antud kõvera telgedega ning pooltelјed on kaks korda pikemad kui antud kõveral.

11.247. On antud kolmnurk AOB : O(0, 0) ; A(8, 0) ; B(0, 6) . Leida selle kolmnurga tippu O läbiva, külgi OA ja OB lõikava ning külge AB keskpunktis puutuva teist järku joone võrrand.

11.248. Teist järku joon, mille keskpunkt asetseb punktis (0, -1) , läbib punkti (3, 0) ja lõikab sirgeid

$$2x - 3y + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad x + y - 5 = 0$$

ebapunktides. Leida selle sirge võrrand.

11.249. Leida teist järku joone võrrand, kui ta lõikab x-telge punktis (1, 0) ja ebapunktis ning y-telge punktis (0, 1) ja ebapunktis ning läbib punkti (1, 1).

11.250. On antud kolmnurk ABC : A(6, 0) ; B(0, 4) ; C(6, 4) . Leida selle kolmnurga ümber joonestatud teist järku joone võrrand, kui keskpunkt asetseb punktis M(4, 3) .

11.251. Leida teist järku joon, mille sümmeetriatelgedeks on sirged

$$x + y + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad x - y + 1 = 0$$

ning mis läbib punkte $M_1(-2, -1)$; $M_2(0, -2)$.

11.252. Leida teist järku joone võrrand, kui ta ühel peateljel asetsevad tipud on $A_1(2, 1)$ ja $A_2(10, 7)$ ning ta läbib punkti B(0, 7) .

Erinevaid ülesandeid

11.253. Leida afiinne teisendus, mis jätab invariantseks antud ellipsi

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 .$$

11.254. Leida afiinne teisendus, mis jätab antud hüperbooli invariantseks.

11.255. Leida punktide hulk, mis võiksid olla antud kolmnurga ümber joonestatud ellipsi keskpunktideks.

11.256. Leida tasandi punktid, mis võiksid olla antud kolmnurga ümber joonestatud teist järku joone keskpunktideks erinevat tüüpi teist järku kõverate korral.

11.257. Leida antud üldvõrrandiga

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 ,$$

$\Delta \neq 0$, $\delta > 0$ määratud ellipsi pindala.

11.258. Läbi kahe koonuselõike

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 ,$$

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

lõikepunktide asetada parabool, mis läbib reeperi alguspunkti. Millal see on võimalik.

11.259. Sirgete kimbu $y = kx$ iga sirge jaoks määratakse kaasdiameetrid kahe erineva teist järku joone $2F = 0$, $2 \;\; = 0$ suhtes. Koostada diameetrite lõikepunktide hulga võrrand.

11.260. On antud teist järku joone võrrand $2F = 0$ ning punkt $S(x_0, y_0)$. Koostada kimbu S sirgete ja nende sirgete kaasdiameetrite lõikepunktide hulga võrrand.

11.261. Teist järku kõverate parve kõverad läbivad punkti $S_0(x_0, y_0)$ ja parve kõverad on määratud ühise võrrandiga $2F(x, y) = 0$. Koostada parve kõverate kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

11.262. On antud kaks teist järku joone võrrandit $2F=0$, $2\Phi = 0$ ning nende joonte teineteisega ristuvate puutujate tõusud k ja $-\frac{1}{k}$. Koostada nende puutujate kaasdiameetrite lõikepunktide hulga võrrand.

11.263. Lõikuvate sirgete kimbu tsenter on $S_0(x_0, y_0)$. Kimbu sirgetele kuuluvate lõikude otspunktid asetsevad sirgetel

$$A_i x + B_i y + C_i = 0 , \qquad i = 1, 2.$$

Koostada kõõlude keskpunktide hulga võrrand.

11.264. Kaks konstantse suurusega nurka pöörlevad vastavalt oma tippude ümber nii, et esimese nurga üks külg lõikub teise nurga ühe küljega antud sirge punktides. Koostada teiste külgede lõikepunktide hulga võrrand.

11. 265. Panna läbi antud teist järku kõvera (ellipsi, hüperbooli või parabooli) iga diameetri ja antud sirge lõikepunkti sirge, mille siht oleks paralleelne kaasdiameetri sihiga. Leida sel viisil konstrueeritud sirgete mähisjoon.

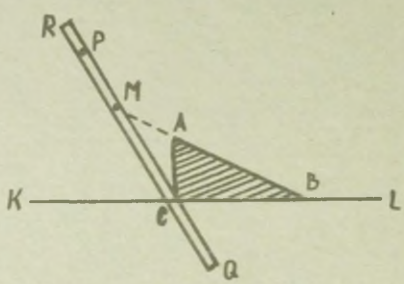
11.266. Tõestada, et kui kahe kolmnurga küljed puutuvad teist järku kõverat, siis läbi nende kolmnurkade kuue tipu võib panna teist järku joone.

11.267. Tõestada, et kui teist järku kõver läbib kolmnurga tippe ja kõrguste lõikepunkti, siis see kõver on võrdhaarne hüperbool.

11.268. Tõestada, et kui kaks võrdhaarset hüperbooli lõikuvad neljas punktis, siis iga punkt nendest on kolme ülejäänud punkti poolt moodustatud kolmnurga kõrguste lõikepunkt.

11.269. Samasse kimpu kuuluvate sirgete ja reeperi telgede lõikepunktidest on joonestatud ristsirged vastavatele telgedele. Koostada ristsirgete lõikepunktide hulga võrrand.

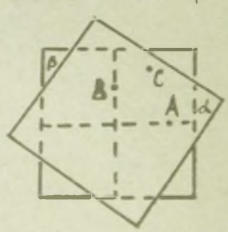
11.270. Varras pöörleb ümber liikumatu punkti P ja



Joon. 11.5.

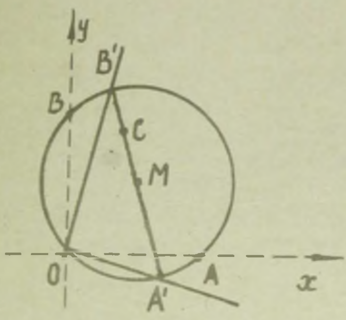
tõukab täisnurkset kolmnurka ABC , mis libiseb mööda sirget KL (joon. 11.5). Koostada varda RQ ja sirge AB, millel asetseb kolmnurga hüpotenuus, lõikepunktide M hulga võrrand. Uurida saadud võrrandiga määratud kõverat. Teha joonis. Teisendada saadud kõvera võrrand kanoonilisele kujule.

11.271. Tasand α liigub mööda liikumatut tasandit β nii, et tasandi α kaks punkti liiguvad mööda kaht ristuvat liikumatu tasandi sirget (vt. joon.11.6). Koostada liikuva tasandi mistahes punkti C trajektoori võrrand, uurida trajektoori geomeetrilist kuju.



Joon. 11.6.

11.272. Tõestada, et eelmises ülesandes punkti C poolt kirjeldatud ellipsi teljed ühtivad sirgetega OA' ja OB', mis ühendavad reeperi alguspunkti ringjoone OAB selle diameetri otspunktidega, mis läbib punkti C (joon. 11.7). Leida ellipsi pooolteljed. Millised liikuva tasandi punktid kirjeldavad ühtivate pooltelgedega ellipseid. Millised punktid moodustavad vastavalt võrdsete pooltelgedega ellipsid.



Joon. 11.7.

11.273. Ringjoon veereb libisemata teise liikumatu ringjoone sees, kusjuures viimase ringjoone raadius on kaks korda suurem pöörleva ringjoone raadiusest. Milline on pöörleva ringi suvalise punkti trajektoor?

11.274. Vaatleme kolme punkti, mis on sümmeetrilised kolmnurga külgede suhtes mingi punktiga M, mis asetseb selle kolmnurga tasandil. Olgu punkt M' neid kolme punkti läbiva ringjoone keskpunkt. Tõestada, et

1) kui punkt M kirjeldab sirge l, siis punkt M' kirjeldab teist järku kõvera C; leida sirge l asend, mille korral sirge l on kõvera C puutujaks, uurida kõvera C tüüpi (ellips, hüperbool, parabool) olenevalt sirge l asenditest;

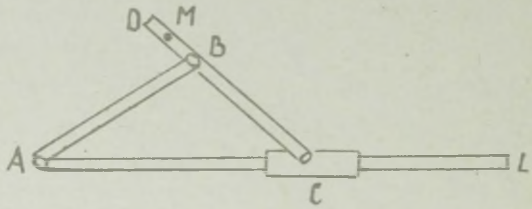
2) kui sirge l liigub paralleelselt iseendaga, siis kõvera C teljed jäävad paralleelseteks kahe antud sirgega.

Joone C keskpunktide geomeetriliseks kohaks on sel juhul samuti teist järku kõver C_1. Leida kõvera C_1 keskpunktide hulk sirgel l erinevate sihtide korral.

11.275. Kolmnurga ABC kaks külge CB = a ja CA = b on jaotatud punktidega M ja N suhtes λ ja $\frac{1}{\lambda}$ (arvates ühisest tipust). Leida sirgete AM ja BN lõikepunktide hulga võrrand muutuva λ korral.

11.276. Leida kolmnurga ümber joonestatud ringjoone keskpunkti trajektoor, kui üks kolmnurga tipp jääb liikumatuks ja vastaskülg, mille pikkus ei muutu, libiseb mööda sirget.

11.277. Liigendmehhanism (joon. 11.8) koosneb kahest liikuvast vardast AB ja CD ning liikumatust joonlauast AL. Varras AB on kinnitatud liigendi B abil varda CD

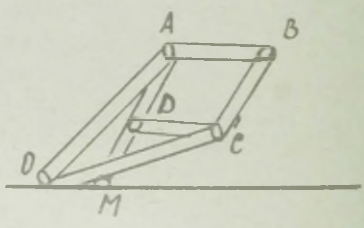


Joon. 11.8.

külge, kusjuures AB = CB ja pöörleb liikumatu punkti A ümber. Varda CD otspunkt C libiseb mööda liikumatut joonlauda AL. Leida vardal CD oleva suvalise punkti M trajektoor.

11.278. Tõestada, et liigendmehhanismi OABCDM (joon. 11.9) punkt B liigub sirgjooneliselt.

Selgituseks joonisele: punktid O ja M on liikumatud, nende ümber pöörlevad vardad OA, OC ja MD; kõik seitse varrast on omavahel ühendatud liigenditega. Varraste pikkused on OA = OC = = 1 ; AB = BC = CD = DA = a; MD = OM = b.



Joon. 11.9.

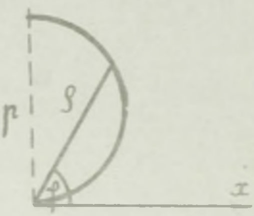
V a s t u s e d

8. peatükk

RINGJOON JA ELLIPS

8.1. 1) $x^2 + y^2 - 20x - 8y = 0$; 2) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. 8.2. 1) $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 30 = 0$; 2) $x^2 + (y - 4)^2 = 169$. 8.3. 1) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$; 2) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$. 8.4. 1) $C(4,-3)$, $r = 2$; 2) $C(2,0)$, $r = 2$; 3) $C(0,-3)$, $r = 4$; 4) $C(-1,5)$ $r = 5$; 5) $C(\frac{2}{3}, 1)$, $r = \frac{1}{3}\sqrt{58}$. 8.5. 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Punkt A on ringjoone keskpunkt. Punkt B asetseb ringjoonel. 8.6. $x^2 + y^2 = 49$. 8.7. Kui $F = 0$, siis rinjoon läbib reeperi alguspunkti. Kui $D = 0$ (või $E = 0$), siis ringjoon on sümmeetriline ordinaat- (või abstsiss-) telje suhtes, s. t. keskpunkt asetseb ühel reeperi teljel. Kui $A = 0$, siis antud võrrand ei kirjelda ringjoont. 8.8. 1) x-telg lõikab ringjoont punktides $A(0,0)$ ja $(B(8,0)$, y-telg lõikab ringjoont punktides $C(0,0)$ ja $D(0,-6)$; 2) $A(3,0)$ (puutub), $C(0,1)$, $D(0,9)$; 3) $A(2,0)$ (puutub), $C(0,-2)$ (puutub); 4) reaalseid lõikepunkte ei ole. 8.9. 1) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$; 2) nõutud omadustega ringjoont ei ole, sest punktid asetsevad ühel sirgel. Märkus. 1) Ringjoone keskpunkti võib leida kui kahe kõõlu, näit. AB ja AC keskristsirgete lõikepunkti; raadiuse kui keskpunkti kauguse ühest antud punktist; 2) Otsitava ringjoone võrrandi võib kirjutada kujul $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, mis sisaldab kolm otsitavat a, b ja r. Kõik kolm antud punkti peavad rahuldama antud võrrandit. Saame kolmest võrrandist koosneva süsteemi kolme tundmatu leidmiseks. 8.10. 1) $x^2 + (y + 1)^2 = 10$; 2) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$; 3) $7x^2 + 7y^2 - 15x + 5y - 70 = 0$; 4) punktid on ühel sirgel. 8.11. $C(3,-2)$, $R = 10$. 8.12. $x^2 + y^2 - 6y - 41 = 0$. 8.13. $C\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ $\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{85}{9}$. 8.14. $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$. 8.15. $5x^2 + 5y^2 + 8x + 54y - 197 = 0$. 8.16. $R(0,1)$, $S(0,6, -0,8)$. 8.17. $P(1,1)$, $Q(-1,2; -1,2)$. 8.18. $K(2,75; 1,25)$. 8.19. $4x + 3y - 35 = 0$. 8.20. $3x + y \pm 10 = 0$. 8.21. $(x - 5)^2 + (y \pm 5\sqrt{2})^2 = 50$. Märkus. Kui ringjoon puutub x-telge, siis keskpunkti abstsiss on võrdne puutepunkti abstsissiga, keskpunkti ordinaat on absoluutväärtuselt võrdne ringjoone raadiusega. Seega otsitava ringjoone võrrand omab kuju: $(x - 5)^2 + (y \pm r)^2 = r^2$. Ringjoone ja y-telje lõikepunktide ($x = 0$) leidmiseks saame võrrandi $y^2 \pm 2ry + 25 = 0$. Ülesande tingimuste järgi on saadud ruutvõrrandi lahendite vahe võrdne 10 ühikuga, s. t. $y_1 - y_2 = 10$ ehk $2\sqrt{r^2 - 25} = 10$, kust leiame ringjoone raadiuse. 8.22. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Märkus. Kuna ringjoon puutub x-telge reeperi alguspunktis, siis y-telg läbib ringjoone keskpunkti. 8.23. $M(2,10)$. 8.24. $(x - 2)^2 + (x - 3)^2 = 4$, $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$. 8.25. $3x^2 + 3y^2 + 37x + 54y + 243 = 0$. 8.26. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 28y + 1 = 0$; $4x^2 + 4y^2 + 244x + 772y + 3721 = 0$. 8.27. $x^2 + y^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}$. 8.28. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$., 8.29. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$. 8.30. 1) $C_1(1, -1)$, $r = 1$; $C_2(5,-5)$, $r_2 = 5$; 2) $C_1(2,2)$, $r = 2$; $C_2(10,10)$, $r = 10$; 3) $C_1(17,17)$, $r = 17$; $C_2(5,5)$, $r = 5$. 8.31. $20x - 21y = 0$, $y = 0$. 8.32. $2x + 3y - 13 = 0$; $3x - 2y + 13 = 0$. 8.33. 5. 8.34. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. 8.35. $(2x - 7)^2 + (2y - 7)^2 = 50$; $(18x - 13)^2 + (18y - 13)^2 = 50$. 8.36. $C_1(-3, -5)$; $C_2(5, -5)$. 8.37. 1) $x - y \pm 5 = 0$; 2) $x - y \pm \sqrt{10} = 0$. 8.38. $3x - 4y - 2 = 0$. Märkus. Jõu toime lakkamisel punkt M jätkab liikumist sirgjooneliselt selles sihis, mida ta omas jõu lakkamise momendil. Punkti M liikumisel mööda kõverat punkti liikumise suunas igal ajamomendil määrab kõvera puutuja. 8.39. A(-0,4; 8,8), kui punkt liikus mööda ringjoont vastupäeva, B(6,4), kui punkt M liikus päripäeva. Märkus. Ülesanne taandub ringjoone nende puutujate leidmisele, mis läbivad punkti Q (vt. eelnev ülesanne). 8.40. $\omega = 60^\circ$. 8.41. X(x,y), $5x = 1 - 4\sqrt{21}$, $5y = -2 + 2\sqrt{21}$. 8.42. $x^2 + y^2 = 2r^2$. 8.43. $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 37 = 0$. 8.44. Ringjoon, mis puutub siseselt antud ringjoont punktis M ja mille raadius $R = \lambda a(1 + \lambda)$. 8.45. $(x - 2^2 + (y - 2)^2 = 1$ ja $(x - 2,8)^2 + (y - 0,4)^2 = 1$. 8.46. $4x - 3y - 10 = 0$, $y - 2 = 0$; $3x + 4y - 5 = 0$, $x - 1 = 0$. 8.47. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Märkus. Ringjoontevaheliseks nurgaks nimetatakse ringjoonte puutujate vahelist nurka ringjoonte lõikepunktis. 8.48. $(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 = r_1^2 + r_2^2$. Märkus. Kui ringjooned on ortogonaalsed, siis ringjoonte keskjoon ja ringjoonte lõikepunkti kulgevad raadiused moodustavad täisnurkse kolmnurga. 8.49. $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$ ja $(x - \frac{41}{13})^2 + (y - \frac{3}{13})^2 = 9$. 8.50. $d \approx 5,02$. 8.51. 1) $16x - 5y - 34 = 0$, $d = \frac{34}{\sqrt{281}}$; 2) $5x + 2y - 7 = 0$, $d = \frac{7}{\sqrt{29}}$. 8.52. $5x - 3y - 16 = 0$. 8.53. $x - 2y - 4 = 0$. 8.54. $P_0(3, -4,5)$. Märkus. Sirge (polaari) pooluseks antud ringjoone suhtes on polaaril vabalt valitud kahe erineva punkti polaaride lõikepunkt. 8.55. $d = 6$. 8.56. 1) $\sigma = 1$; 2) $\sigma = -17$; 3) $\sigma = 14$; 4) $\sigma = 4$; 5) $\sigma = 0$. 8.57. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$ – antud ringjoonega kontsentriline ringjoon, mille raadius $R = \sqrt{r^2 + 4^2}$. 8.58. 1) $x^2 + y^2 + 8x - 26y = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 16x - 42y = 0$ – ringjoon, mis läbib antud ringjoonte lõikepunkte; 3) $x - 2y = 0$ – sirge nn. kahe antud ringjoonte potentsjoon (e. radikaaltelg). 8.59. 1) $x = 2$; 2) $x = -\frac{3}{7}$; 3) $2x + 7y + 8 = 0$;

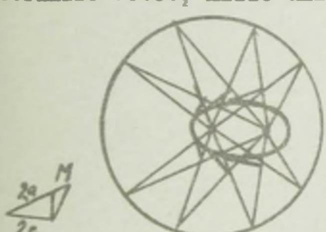
4) $4x + 4y + 5 = 0$; 5) $2(a_1 - a)x + 2(b_1 - b)y + a^2 - a_1^2 + b^2 - b_1^2 - r^2 + r_1^2 = 0$. Märkus. Kui ringjoonte võrrandid on esitatud kujul $F(x,y) = 0$ ja $F_1(x,y) = 0$, kus ruutliikmete kordajad on võrdsed ühega, siis potentsjoone võrrand omab kuju $F_1(x,y) - F(x,y) = 0$. 8.61. $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 13$. Märkus. Otsitava ringjoone keskpunkt asetseb ringjoonte potentsjoonel ja ringjoone raadiuse ruut on võrdne otsitava ringjoone keskpunkti potentsiga ühega antud ringjoonte suhtes. 8.62. 1) $M(-2,-2)$; 2) $M(-3,-7)$. 8.63. 1) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6$; 2) $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 41$. Märkus. Otsitava ringjoone keskpunkt ühtib antud ringjoonte potentspunktiga ja raadiuse ruut on võrdne potentspunkti potentsiga kõigi antud ringjoonte suhtes. 8.65. $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 50$. 8.67. Ringjoon, mille raadius $R = \frac{a}{2}$, keskpunkt asetseb punkti P ja kirjeldatava ringjoone keskpunkti ühendava lõigu keskpunktis. Punkt P on mõlema ringjoone sarnasustsenter. 8.68. Graafikuks on poolringjoon, mille diameeter on p (vt. joon. 8.10).



Joon. 8.10.

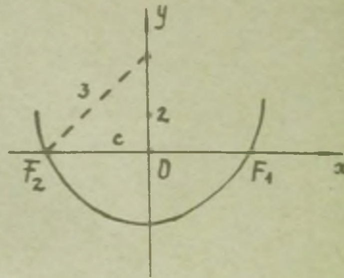
8.69. 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $225x^2 + 676y^2 = 1561$; 4) $100x^2 + 729y^2 = 36$; 5) $4x^2 + 25y^2 = 1$; 6) $2x^2 + 5y^2 = 10$; 7) $x^2 + 7y^2 = 49$; 8) $x^2 + 10y^2 = 1$. 8.70. 1) $a = 5$, $b = 4$, $F_1(3,0)$, $e = 0,6$; 2) $a = 12$, $b = 2$, $F_1(0,4\sqrt{2})$, $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 8.71. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$; 3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 5) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$; 6) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. 8.72. 1) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 5) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 6) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. Märkus. $a = 10$, $e = \frac{c}{a}$, $e = 0,8$, $c) = 0,8a = 8$, $b^2 = a^2 - c^2 =$

$= 100 - 64 = 36$. 8.73. $x = \pm 9$. 8.74. 1) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; 3) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$ või $\frac{4x^2}{117} + \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$; 5) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$; 6) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. 8.75. 1) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{24} = 1$ või $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$. 8.76. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{80} = 1$. 8.77. $cx \pm a^2 = 0$. 8.78. $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. 8.79. a) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $e = \frac{\sqrt{10}}{5}$; c) $e = \frac{1}{2}$. 8.80. 1) $e = \frac{1}{2}$; 2) $e = \sqrt{\frac{2}{17}}$; 3) $e = \frac{4}{5}$. 8.81. 10. 8.82. $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$. 8.83. $e \approx 0{,}08$. 8.84. $e \approx 0{,}08$. 8.85. $S = \pi ab \approx 127 \cdot 10^6 \text{ km}^2$. 8.86. $2c \approx 5$ milj. km, $b \approx 149{,}58$ milj. km. $L \approx 932{,}43$ milj. km. 8.87. $b = 149\,977\,465$ km; $p = 149\,954\,933$ km. 8.89. Punktid A_1 ja A_6 asetsevad ellipsil, A_2, A_4 ja A_8 asetsevad ellipsi sees ning punktid A_3, A_5, A_7, A_9 ja A_{10} asetsevad väljaspool ellipsit. 8.90. Punktid A ja E asetsevad ellipsil, B ja G asetsevad ellipsi sees, punktid C ja D asetsevad väljaspool ellipsit. 8.91. $(\pm 5, \pm 2)$. 8.92. $M_1(-\frac{15}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2})$ ja $M_2(-\frac{15}{2}; -\frac{3\sqrt{7}}{2})$. 8.93. 8. 8.94. Ellipsi fokaaltipud. 8.95. $(\pm 3, \pm 4)$. 8.96. $d = 4\frac{1}{3}$. 8.97. $\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 8.98. Ringjoon $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. 8.99. $M_1 = (3, -3)$ ja $M_2\ (\frac{69}{13}, \frac{21}{13})$. 8.100. $(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ ja $(0, -1)$. 8.101. Märkus. Kasutame sellise kolmnurga konstrueerimise võtet, mille üks külg on 2c, nurk φ ja kahe ülejäänud külje summa on 2a (vt. joon. 8.11). Kui nurk muutub, tipp M kirjeldab ellipsi. 8.102. $c^2 = a^2 - b^2$ (joon. 8.12). 8.103. Märkus. Võtame vabalt kaks paralleelset ellipsi kõõlu. Kõõlude keskpunkte ühendav sir-



Joon. 8.11.

ge on ellipsi diameeter. Analoogiliselt leiame veel mingi teise diameetri. Diameetrite lõikepunkt on ellipsi tsenter. Tõmbame ümber ellipsi tsentri sellise ringjoone, mis lõikab ellipsit neljas punktis. Ellipsi ja ringjoone lõikepunktid on sümmeetrilised ellipsi sümmeetriatelgede (ellipsi telgede) suhtes. Kui ellipsi teljed on leitud, on fookuste leidmine juba lihtne. 8.104. 1) Sirge lõikab ellipsit kahes erinevas punktis; 2) sirge on ellipsi puutuja, puutepunkt $M_0(6,1)$.



Joon. 8.12.

8.105. $x - 2y - 8 = 0$. 8.106. 1) Mitte ühtegi; 2) kaks; 3) üks. 8.107. $(5, -4)$. 8.108. $3x^2 + 2y^2 = 14$. 8.109. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. 8.110. $\frac{(x-7)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$. 8.111. $\frac{(x-8)^2}{64} + \frac{11(y-5)}{320} = 1$. 8.112. $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{7(y-3)^2}{75} = 1$. 8.113. Ülesandel on kaks lahendit: 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $(4, \frac{9}{5})$; 2) $\frac{16x^2}{225} + \frac{y^2}{16} = 1$; $(\frac{9}{4}, \frac{16}{5})$. 8.114. $y = 3$, $12x + 7y + 51 = 0$. Märkus. Esimene võimalus. Punkti A läbiva sirge kimbu võrrandi võib esitada kujul $y - 3 = k(x + 6)$. Kimbu sirge tõusu k saame leida tingimusest, et sirge lõikab ellipsit kahes ühtivas lõikepunktis (ruutvõrrandi diskriminant on võrdne nulliga). Teine võimalus. Võib kasutada ellipsi puutuja võrrandit $\frac{x_0x}{15} + \frac{y_0y}{9} = 1$ ja määrata puutepunkt $M_0(x_0, y_0)$ tingimustest, et ta 1) asetsel puutujal $(\frac{-6x_0}{15} + \frac{3y_0}{9} = 1)$; 2) asetseb ellipsil $(\frac{x_0^2}{15} + \frac{y_0^2}{9} = 1)$. 8.115. $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$. 8.116. 1) $2x - y \pm 12 = 0$. Märkus. Esimene võimalus. Iga antud sirgega paralleelse sirge võrrandi võib esitada kujul $2x - y + C = 0$. Parameeter tuleb valida nii, et sirge $2x - y + C = 0$ lõikaks antud ellipsit kahes ühtivas lõikepunktis (puutumise tingimus). Teine võimalus. Võib kasutada antud ellipsi puutuja võrrandit $\frac{x_0 x}{30} + \frac{y_0 y}{24} = 1$ ja määrata puutepunktid tingimustest, et puutuja on paralleelne antud sirgega $\left(\frac{x_0}{30 \cdot 2} = \frac{y_0}{24 \cdot (-1)}\right)$ ja puutepunktid asetsevad ellipsil $\left(\frac{x_0^2}{30} + \frac{y_0^2}{24} = 1\right)$. 8.117. $3x - y \pm 7 = 0$. 8.118. 1) $24x - 5y \pm 180 = 0$; 2) $17x + 51y \pm 3\sqrt{85} = 0$. 8.119. $d = \frac{24\sqrt{5}}{5}$. 8.120. $12x - 13y \pm 169 = 0$. 8.121. $\pm 3 \pm 4y + 15 = 0$ (neli puutujat). 8.122. $x \pm 5 = 0$. 8.123. 1) $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ või $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{9y^2}{625} = 1$; 2) $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ või $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{16y^2}{625} = 1$, sõltuvalt sellest, kas abstsissteljel asub ellipsi suurem või väiksem telg. 8.124. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. 8.125. 1) $x + y \pm 3 = 0$, $x - y \pm 3 = 0$; 2) $2x + y \pm 5 = 0$, $2x - y \pm 5 = 0$; 3) $x + 2y \pm 9 = 0$, $x - 2y \pm 9 = 0$. 8.128. $2x + 11y - 10 = 0$. 8.130. Märkus. Diameetri otspunktid on sümmeetrilised ellipsi tsentri suhtes. Kui ellips on määratav kanoonilise võrrandiga, siis ellipsi tsenter ühtib reeperi alguspunktiga ja diameetri otspunktide vastavad koordinaadid on absoluutväärtuselt võrdsed ja vastupidiste märkidega. 8.132.

$$Y = \frac{y_1 + y_2}{1 + \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2}}; \quad X = \frac{x_1 + x_2}{1 + \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2}}.$$

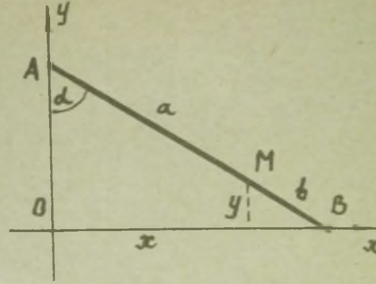
8.133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. 8.134. $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = 2\sqrt{c^2 + b^2}$, kus $2c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. 8.135. $M_1M_2 = \frac{2b^2}{a}$. 8.136. 1) $5x + 6y - 11 = 0$; 2) $5x + 12y - 29 = 0$.

Märkus. Otsitav sirge kuulub kimpu, mille keskpunktiks on punkt A, s.t., tema võrrand omab kuju $y - 1 = k_1(x - 1)$.

Jääb leida ainult sirge tõus k. Otsitava kõõlu kaasdiameeter läbib punkti A ja poolitab kõõlu. Kõõlule vastava kaasdiameetri võrrand on $x - y = 0$, s. t. $k_2 = 1$. Sirge läbib punkti A ja ellipsi keskpunkti $O(0, 0)$. Nagu teada, on kõõlu kaasdiameetri tõusud seotud tingimusega $k_1 = -\frac{b^2}{a^2k_2}$. Antud juhul $k_1 = -\frac{5}{6}$. Asendades kimbu võrrandisse, saamegi antud tulemuse. 8.137. $4x + 9 - 13 = 0$.
8.138. $2x - y - 5 = 0$. 8.139. $\frac{48\sqrt{2}}{5}$. 8.140. $e = \frac{24\sqrt{2}}{5}$.
8.141. $d = \frac{1}{3}\sqrt{30}$. Märkus. Kaasdiameetri tõusud on seotud tingimusega $k_2 = -\frac{b^2}{a^2k_1}$. Kuna kaasdiameetri tõus $k_1 = 1$ (nurga poolitaja), siis $k_2 = -\frac{1}{2}$ ning diameetri võrrand on $y = -\frac{1}{2}x$. Edasi tuleb leida diameetri ja ellipsi lõikepunktid, mis on otsitava kõõlu otspunktid. 8.142. $\varphi = 60^\circ$.
8.143. $2a' = 4\sqrt{2}$; $2b' = 2\sqrt{5}$. 8.144. $y = \pm 3x$. 8.145. $a = 11$. $b = 3$. 8.146. $y = \pm\frac{b}{a}x$. Märkus. Mõlemad diameetrid asetsevad sümmeetriliselt reeperi telgede suhtes. Järelikult $k_1 = -k_2$. Kuna $k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$, siis $-k_1^2 = -\frac{b^2}{a^2}$ ja $k_1 = \frac{a}{b}$, $k_2 = -\frac{b}{a}$. 8.147. $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = -1$; $4\sqrt{\frac{5}{3}}$; $\frac{8}{\sqrt{3}}$. 8.148. $k_1 = \frac{3}{2}$, $k_2 = -\frac{5}{12}$, $\frac{260}{23}$, $\frac{338}{23}$. 8.149. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Märkus. Teostame sellise afiinse teisenduse, mis teisendab antud ellipsi ringjooneks. Selle teisenduse tagajärjel kaasdiameetrid teisenevad ringjoone ristuvateks diameetriteks. Saame $\frac{OM}{OC} = \frac{O'M'}{O'C'} = \frac{R\frac{\sqrt{2}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 8.150. Kaasdiameetrite otspunktide koordinaadid on $M_1(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $M_2(a\sin\theta, -b\cos\theta)$. Keskpunktide jaoks saame: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a}{2}(\cos\theta + \sin\theta)$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{b}{2}(\sin\theta - \cos\theta)$. Siit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$. 8.151. $R =$

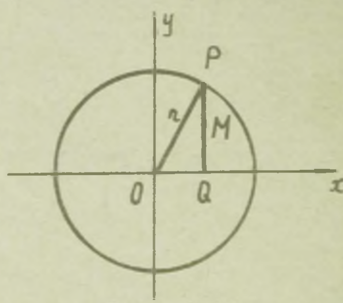
$= \frac{mn\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. 8.152. $\frac{x(x + 3}{25} + \frac{y^2}{16} = 0$. 8.153. Ellips $\frac{4x^2}{a^2} + \frac{(2y - b)^2}{b^2} = 1$. 8.154. $\frac{x^2}{(at)^2} + \frac{y^2}{(bt)^2} = 1$. 8.155. Märkus. Eksisteerib afiinne teisendus, mis viib ellipsi samaks ellipsiks, aga teisendab tema kaasdiameetrid telgedeks. 8.156. $OE = AC = \sqrt{a^2 + b^2}$, CG AE. OG on võrdne poolega otsitava ruudu küljest. 8.157. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 8.158. Ellipsi keskpunktist raadiusega $\sqrt{a^2 + b^2}$ joonistada ringjoon, mis lõikab telgi otsitava ruudu tippudes. 8.159. $x - y \pm 3 = 0$, $x + y \pm 3 = 0$. 8.161. $A(6,0)$, $B(\frac{6}{7}, \frac{12\sqrt{3}}{7})$, $C(\frac{6}{7}, -\frac{12\sqrt{3}}{7})$. 8.162. $S = 68\frac{4}{7}$. 8.163. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ või $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, sõltuvalt sellest, kas ellips läbib rombi suurema või väiksema diagonaali otspunkte. 8.165. Märkus. Ellipsite afiinsel teisendamisel ringjooneks teiseneb vaadeldav kolmnurk võrdkülgseks kolmnurgaks, mille keskpunkt ühtib ringjoonte keskpunktiga. 8.166. $\frac{(x-x')^2}{a^2} + \frac{(y-y')^2}{b^2} = 1$. 8.167. 1) $\frac{(x-1)^2}{15} + \frac{(y+3)^2}{15} = 1$, $x_1 = 1$, $y_1 = -3$, $a = b = \sqrt{15}$; 2) $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$, $x_1 = -2$, $y_1 = 1$, $a = 4$, $b = 2$, 3) $\frac{(x+4)^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1$, $x_1 = -4$; $y_1 = 0$, $a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{10}$. 8.168. $x^2 \div 2y^2 - 6x + 24y + 31 = 0$. 8.169. $\frac{(2x_0 - x')^2}{a^2} + \frac{(2y_0 - y')^2}{b^2} = 1$, $2x_0 - x' = 0$, $2y_0 - y' = 0$.

8.170. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. 8.171. Ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ või ringjoon $x^2 + y^2 = a^2$, kui punkt M on lõigu AB keskpunkt (joon. 8.13). Täisnurga haarad võetakse reeperi telgedeks ja AM = a, BM = b. $\frac{x}{a}$ = $\sin\alpha$, $\frac{x}{b} = \cos\alpha$, $\alpha = \angle OAB$. <u>8.172.</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. <u>8.173.</u> 1) AB = 5, AM = 3; 2) AB = 5, AM = 4; 3) AB = 10, AM = 5. <u>8.174.</u> Ellips pooltelgedega 13 cm ja 5 cm. Kolmnurga aluse juures olevad tipud on selle ellipsi fookusteks.



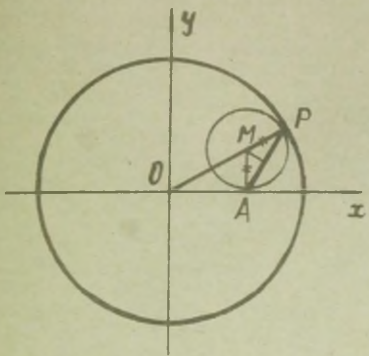
Joon. 8.13.

<u>8.175.</u> $\frac{x^2}{r^2} + \frac{(\lambda+1)^2}{r^2\lambda^2} y^2 = 1$. <u>Märkus.</u> Ülesande tingimuste järgi $\frac{OM}{MP} = \lambda$. (joon. 8.14). QP otspunktide koordinaadid on $Q(x, y_1)$, $P(x, y_2)$, kus $y_1 = 0$ ja y_2 leiame ringjoone võrrandist $y_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$. Kuna punkt M jagab lõigu PQ suhtes λ, siis $y = \frac{\lambda\sqrt{r^2 - x^2}}{r + \lambda}$. Viimase seose lihtsustamisest saamegi ellipsi võrrandi. <u>8.176.</u> $\frac{x^2}{(-\frac{a}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{3})^2} = 1$. <u>8.177.</u> Ellips tsentriga punktis Q(0,1) ja pooltelgedega $a = \sqrt{14}$, $b = \sqrt{7}$. Ellipsi teljed on paralleelsed reeperi telgedega.



Joon. 8.14.

<u>8.178.</u> (joon. 8.15). Ellips $\frac{(2x - 3)^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Ellipsi fookusteks on antud ringjoone keskpunkt ja punkt A.

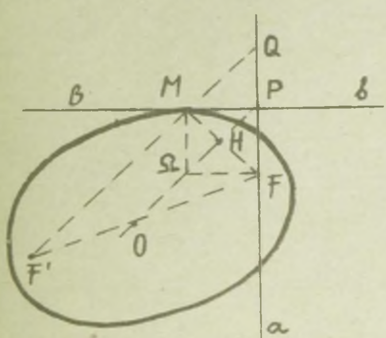


Joon. 8.15.

8.179. $\dfrac{x^2}{(p+q)^2} + \dfrac{y^2}{(p-q)^2} = 1$, s. t. ellips pooltelgedega $p + q$ ja $p - q$. Kui $p > q$, siis punkt Q joonestab ellipsi, liikudes vastukella; kui $p < q$, siis punkt Q liigub mööda ellipsit vastupidises suunas. Kui $p = q$, siis punkt Q varda OP täispöörde vältel läbib kaks korda x-telje lõigu pikkusega $2(p + q)$.

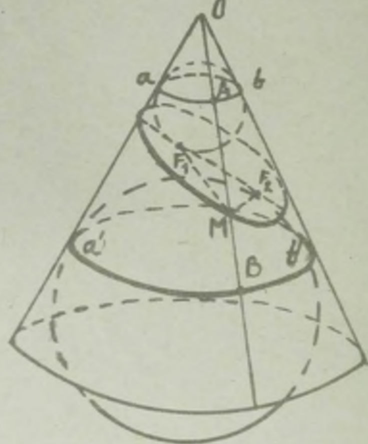
8.180. Ruudu tippu läbivate ellipsite jaoks kehtib seos $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$. Puutepunkti koordinaadid (x, y) rahuldavad võrrandeid $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Määrates siit $\dfrac{1}{a^2}$, $\dfrac{1}{b^2}$ ja asendades need tingimusse $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = 1$, saadakse $\dfrac{y_0 - y}{x(xy_0 - x_0 y)} + \dfrac{x - x_0}{y(xy_0 - x_0 y)} = 1$.

8.181. Liikugu ellipsi fookus F mööda sirget a, kusjuures ellips ise puutub sirgega b punktis M. Konstrueerime hetkelise keskpunkti Ω ning ühendame selle ellipsi keskpunktiga O. Sirge $O\Omega$ on otsitava trajektoori normaal. Tähistades sirgete a ja $F'M$ lõikepunkti tähega Q, saame, et $PQ = FP$, kuna MP poolitab nurga FMQ. Edasi $MH = FH$ ja $F'O = FO$. Järelikult sirge $O\Omega P$ on sirge $F'Q$ paralleelne sirge. Järelikult trajektoori normaal $O\Omega$ läbib liikumatut punk-



Joon. 8.16.

ti P , s. t. otsitav trajektoor on ringjoon. Et leida ringjoone raadiust, tarvitseb pöörata ellipsit nii, et tema teine fookus F' langeks sirgele a . Siis on kerge näha, et raadius võrdub suurema pooltelјega. 8.182. $\varphi = 60^{\circ}$. 8.183. $2a = 8\sqrt{3}$ cm $\approx 13{,}9$ cm; $2b = 12$ cm; $e = \frac{1}{2}$. 8.184. Kujundame koonusesse kaks sfääri, nii et üks puutub koonuse pinda mööda ringjoont ab ja lõikab tasandit α punktis F_1, teine puutub koonuse pinda mööda ringjoont a'b' ja lõikab tasandit α punktis F_2. Võtame lõikejoonel suvalise punkti M ja ühendame selle punktidega F_1 ja F_2 tasandil α ning asetame läbi selle punkti koonuse moodustaja lõikumiseni ringjoontega punktides A ja B. Saame $MF_1 + MF_2 = AB$, kus AB on konstant (vt. eelm. ül.). Seega koonuselõige on ellips, $MF_1 + MF_2 = AB$ (vt. joon. 8.17).

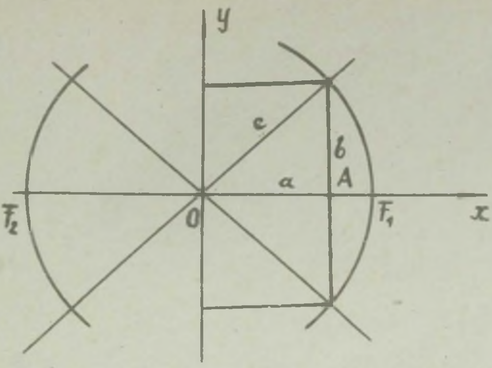


Joon. 8.17.

9. peatükk

HÜPERBOOL

9.1. 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$; 3) $\frac{x^2}{10{,}24} - \frac{y^2}{5{,}29} = 1$; 4) $225x^2 - 100y^2 = 36$; 5) $7x^2 - 3y^2 = 21$; 6) $x^2 - 10y^2 = 1$. 9.2. Vt. joon. 9.4. 9.3. 1) $2a = 16$; 2) $2a = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$. 9.4. 1) $27x^2 - 28y^2 = 720$; 2) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 3) $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$. 9.5. $F_1(0,\ 17)$, $F_2(0,\ -17)$, $8x \pm 15y = 0$. 9.6. $a = 12$, $b = 5$, $F_1(-13,\ 0)$, $F_2(13,\ 0)$, $e = \frac{13}{12}$, $5x \pm 12y = 0$. 9.7. $\frac{x^2}{64}$ -

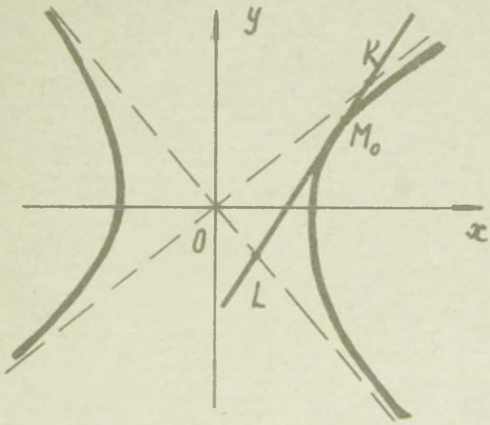


Joon. 9.4.

$-\frac{y^2}{36} = 1$. 9.8. 1) $a = 6$, $b = 4$, $c = 2\sqrt{13}$, $F_1(-2\sqrt{13}, 0)$, $F_2(2\sqrt{13}, 0)$, $e = \frac{1}{3}\sqrt{13}$, $p = 2\frac{2}{3}$; 2) $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{13}$, $e = \frac{1}{3}\sqrt{13}$, $p = \frac{4}{3}$; 3) $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$, $e = 2$, $p = 6$; 4) $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$, $c = \sqrt{3}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$; 5) $a = 5$, $b = 7$, $c^2 = 74$, $F_1(0; -8{,}6)$ $F_2(0; 8{,}6)$, $e = \frac{1}{5}\sqrt{74}$, $p = 9{,}8$; 6) $a = \frac{5}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{29}$, $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$, $p = \frac{2}{5}$; 7) $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{2}$, $e = \sqrt{2}$, $p = 1$; 8) $a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{5}$, $c^2 = \frac{23}{3}$, $e = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}$, $p = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 9) $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{2}$, $e = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $p = \frac{3}{\sqrt{5}}$; 10) $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{6}$, $c = 4$, $e = \frac{4}{\sqrt{10}}$, $p = \frac{6}{\sqrt{10}}$; 11) $a = 12$, $b = 9$, $c = 15$, $e = \frac{5}{4}$, $p = \frac{27}{4}$. 9.9. 1) $x \pm \sqrt{2}y = 0$; 2) $x \pm y = 0$; 3) $\sqrt{2}x \pm \sqrt{3}y = 0$; 4) $5x \pm y = 0$; 5) $\sqrt{5}x \pm \sqrt{3}y = 0$; 6) $x \pm 2y = 0$. 9.10. 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{75} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{2} = 1$; 4) $x^2 - y^2 = 16$.

9.11. 1) $\pm\frac{x^2}{900}\pm\frac{y^2}{400}=1$, $\pm\frac{x^2}{400}\pm\frac{y^2}{900}=1$; 2) $\pm\frac{x^2}{121}\pm\frac{y^2}{100}=1$; 3) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{21}=1$, $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{21}=1$; 4) $x^2-\frac{y^2}{24}=1$, $y^2-\frac{x^2}{24}=1$; 5) $\frac{x^2}{6{,}25}-\frac{y^2}{11{,}25}=1$. **Märkus.** $p=\frac{b^2}{a}$ ehk $p=e\Delta$, kus Δ on fookuse kaugus vastavast juhtsirgest ja e on ekstsentrilisus. 9.12. 1) $F_1(5, 0)$, $F_2(-5,0)$; 2) $e=\frac{5}{3}$; 3) $y=\pm\frac{4}{3}x$, $x=\pm\frac{9}{5}$; 4) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$; $e'=\frac{5}{4}$. 9.13. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. 9.14. 1) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 2) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$; 4) $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$; 5) $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. 9.15. 1) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$; 2) $a=\sqrt{15}$, $b=\sqrt{10}$; 3) $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$; 4) $a=2\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$. 9.16. 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$; 3) $\frac{25x^2}{171}+\frac{y^2}{19}=1$; 4) $\frac{x^2}{432}-\frac{y^2}{75}=1$; 5) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ ja $\frac{9x^2}{61}-\frac{10y^2}{305}=1$. 9.17. 1) $x^2-y^2=8$; 2) $x^2-y^2=36$; 3) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 4) $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{8}=1$. 9.18. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. 9.19. 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 2) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{570}=-1$; 3) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=-1$; 4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{10}=-1$. 9.20. 12 pinnaühikut. 9.21. 1) $x-y=0$ ja $x+y=0$, $2\varphi=90^\circ$; 2) $x-\sqrt{3}y=0$ ja $x\pm\sqrt{3}y=0$; $2\varphi=60^\circ$; 3) $2x-\sqrt{10}y=0$ ja $2x\pm\sqrt{10}y=0$, $2\varphi\approx 64^\circ 18'$; 4) $3x-\sqrt{15}y=0$ ja $3x+\sqrt{15}y=0$, $2\varphi\approx 98^\circ 14'$. 9.22. 1) $e\cos\frac{\alpha}{2}=1$; 2) $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$. 9.23. 1) $\alpha=120^\circ$; 2) $\alpha=90^\circ$. 9.24. 1) $e=\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $e=\sqrt{2}$; 3) $e=\sqrt{3}$. 9.25. $x-2y-12=0$ ja $x+2y+8=0$. 9.26. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ja

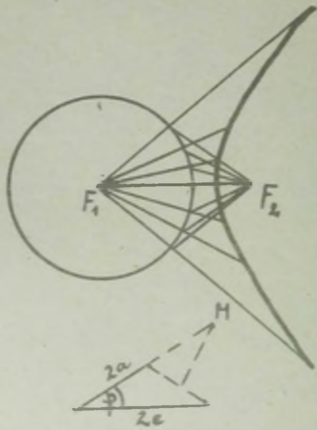
$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{\frac{256}{9}} = 1$. 9.27. $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$. 9.28. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ja $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$. 9.29. 1) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. 9.30. 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 9.31. $x = -4$, $x = 4$, $y = -1$ ja $y = 1$. 9.33. 1) $A(-6, -5)$; 2) ei lõiku; 3) $A_1(1, 0)$, $A_2(-7,4)$; 4) $A(\frac{7}{16}, -3\frac{1}{8})$; 5) $A_1(\sqrt{15}, 3)$, $A_2(-\sqrt{15}, 3)$; 6) ei lõiku. 9.34. 1) $A(10, 2)$, $B(-10, -2)$; 2) sirge puutub hüperbooli punktis $C(10, -2)$; 3) reaalseid lõikepunkte ei ole; 4) $D(-\frac{15\sqrt{10}}{4}); -\frac{9}{2})$, sirge on paralleelne ühe asümptoodiga ja teist lõikepunkti ei ole. 9.35. Vt. joon. 9.5. Leides tekkinud kolmnurga tipud ja arvutades



Joon. 9.5.

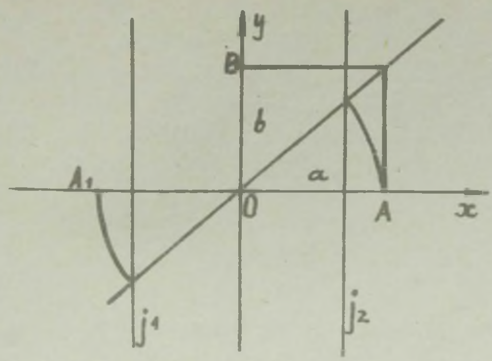
kolmnurga pindala, saame, et $S = ab$. 9.36. Joon. 9.6. Märkus. Kasutame kolmnurga konstrueerimise võtet aluse $2c$ järgi, kui kolmnurga üks nurk on φ ja kahe ülejäänud külgede vahe on $2a$. Korrates sama konstruktsiooni erinevate nurkade korral, saame leida erinevaid hüperbooli punkte. Hüperbooli vasaku haara saame, võttes parema fookuse kolmnurga suurima külje juures oleva nurga tipuks.

9.37. $\delta_1 \delta_2 = \frac{a^2b^2}{c^2}$. Märkus. Vaadeldud omadust võib võtta ka hüperbooli definitsiooniks: hüperbooliks nimetatakse punktide hulka tasandil, mille punktide kauguste korrutis kahe lõikuva sirgeni on konstantne. Vaadeldud sirged on hüperbooli asümptoodid.



Joon. 9.6.

9.38. $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1$. 9.39. $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} > 1$, $\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} > 1$, $x_1x_2 > 0$. 9.40. A – sisemine, B – välimine, C – hüperbooli punkt. 9.41. Punktides $(-\frac{15}{4}, -\frac{15}{4})$, $(\frac{15}{4}, \frac{15}{4})$. 9.42. $r_1 = 9$, $r_2 = 19$, $\tan\varphi = \frac{28\sqrt{2}}{41}$. 9.43. $(-6, 4\sqrt{3})$ ja $(-6, -4\sqrt{3})$. 9.44. 1) $x = \pm\frac{4}{5}\sqrt{34}$, $y = \pm 1,8$ (4 punkti); 2) $x = 9,6$; $y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$ (2 punkti). Märkus. Kui hüperbooli mingi punkti korral fokaalraadiused on risti, siis fokaalraadiused koos fookustevahelise lõiguga moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille korral kehtib seos $4c^2 = r_1^2 + r_2^2$. 9.45. 1) $r_1 = \frac{20\sqrt{6}}{3} + \sqrt{3}$, $r_2 = \frac{20\sqrt{6}}{3} - \sqrt{3}$; 2) antud hüperboolil ei ole niisugust punkti. 9.46. $x + 4\sqrt{5}y + 10 = 0$ ja $x - 10 = 0$. 9.47. $(\pm\frac{14\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{4\sqrt{3}}{3})$ – neli punkti. 9.48. $e \leq 1 + \sqrt{2}$. Märkus. Kuna $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$, siis $\frac{ex + a}{ex - a} = e$, kust $x = \frac{a(1+e)}{e^2 - e}$. Parema haru korral $x \geq a$, saame $\frac{1 + e}{e^2 - e} \geq 1$. Saadud seosest leiame e, arvestades, et $e > 1$. 9.49. 27. 9.50. d = b. 9.51. $\frac{1}{\ell_1^2} + \frac{1}{\ell_2^2} = 1$. 9.52. Vt. joon. 9.7. 9.53. Puutuja $\frac{xx_0}{a^2} -$



Joon. 9.7.

$-\frac{y_0 y}{b^2} = 1$, normaal $\frac{a^2 x}{x_0} + \frac{b^2 y}{y_0} = c^2$. 9.54. $x + y = 1$. 9.55. $x - y - 2 = 0$; $x - y + 2 = 0$. 9.56. 1) $|m| > 4{,}5$; 2) $m = \pm 4{,}5$, 3) $m < 4{,}5$. 9.57. 1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$, kuid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \neq 0$, puutujate paari võrrand $(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1)(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1) - (\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1)^2 = 0$; 2) a) $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, siis puutuja võrrand $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0$, b) $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, s. t. punkt asetseb asümptoodil, kuid ei ühti keskpunktiga, siis puutuja võrrand $(1 + \frac{x_0^2}{a^2})\frac{x}{a} + (1 - \frac{x_0^2}{a^2})\frac{y}{b} - \frac{2x_0}{a} = 0$, kuid $y_0 = \frac{b}{a} x_0$. 9.58. $\pm cx \pm ay = a^2$, $(\pm c; \pm \frac{b^2}{a})$. 9.59. 1) $x = 1$; 2) $5x - 2y + 3 = 0$. 9.60. 1) $3x \pm 2y - 6 = 0$; 2) $3x + 2y + 6$ ainult üks puutuja, kuna punkt asetseb hüperboolil; 3) reaalseid puutujaid ei eksisteeri, kuna punkt asetseb hüperbooli sees. 9.61. 1) $x + y - 2 = 0$, $5x - 7y + 2 = 0$, $x - y - 6 = 0$, $7x + 5y + 210 = 0$; 2) $x - 3y + 5 = 0$, $3x + 21y + 45 = 0$, $3x + y - 15 = 0$, $21x - 3y - 35 = 0$.

9.62. 1) P(2, 0). Märkus. Sirge pooluseks teist järku kõvera suhtes on sirge ja kõvera lõikepunkte läbivate puutujate lõikepunkt; 2) $P(3, \frac{2}{3})$. 9.63. 1) $x = 4$. Märkus. Punktist A hüperboolile tõmmatud puutujate puutepunktid on $M_1(4, 3)$, $M_2 = (4, -3)$ ja polaariks on punkte M_1 ja M_2 läbiv sirge; 2) $x + 4y - 16 = 0$, puutepunktid $M_1(4, 3)$, $M_2(\frac{4}{3}, -\frac{7}{3})$;

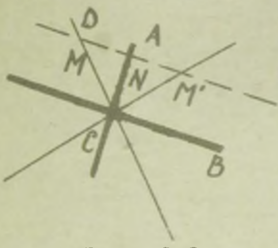
3) $2x + 5y - 16 = 0$. 9.66. $\tan\varphi = \dfrac{2a - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + 1}{x_0^2 + y_0^2 - a^2 + b^2}$.

9.67. Märkus. Ühtivate fookustega hüperboole ja ellipseid võib esitada järgmiste võrranditega: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$ ja $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 - C^2} = 1$. 9.69. $(\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{3\sqrt{15}}{5})$, $(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{3\sqrt{15}}{5})$. 9.70. $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$; 2) $k^2a^2 - b^2 = m^2$. 9.71. $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} < 0$.

9.72. 1) $x + y + 3 = 0$ ja $x + y - 3 = 0$; 2) antud sihis reaalseid puutujaid ei leidu. 9.73. Puutuja $3x - 2y \pm 4 = 0$. 9.74. Puutujad $x - y \pm 3 = 0$, normaalid $x + y \pm 5 = 0$. 9.75. $x + 2y - 4 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$, $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. 9.76. 1) $18x - 10y \pm 225 = 0$; 2) $12x + 13y \pm 312 = 0$. 9.77. $a = \frac{\sqrt{269}}{2\sqrt{5}}$, $b = \frac{12}{\sqrt{5}}$. 9.78. 1) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$.

9.79. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 9.80. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. 9.81. $8x \pm \sqrt{11}y - 20 = 0$. 9.83. $d_1 \cdot d_2 = b^2$ ehk hälvete kaudu $\delta_1 \cdot \delta_2 = -b^2$. Märkus. Miinusmärk näitab, et hüperbooli fookused asetsevad tema suvalise puutuja suhtes esinevates pooltasandites. 9.85. 1) b; 2) tähistades hüperbooli suvalise punkti koordinaadid (x, y) ja selle punkti kaugused asümptootidest d_1 ja d_2, saame $d_1 = \frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ja $d_2 = \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, kust $d_1 d_2 = \left|\frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2 + b^2}\right| = \frac{a^2b^2}{c^2}$. 9.86. $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

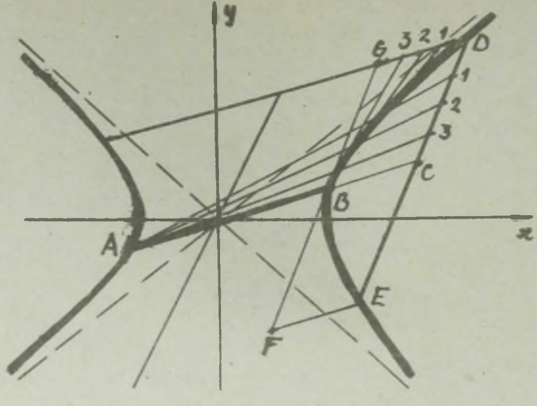
9.87. Ringjoon. 9.88. $|k| \geqslant \frac{b}{a}$. 9.89. 1) $mx + x_0^2 y = 2mx_0$; 2) $2x + y = 8$; 3) $4x + 3y = 24$. 9.90. $d = \frac{2b^2}{a}$. 9.91. $y = \frac{b^2}{a^2 k} x$, kus k on paralleelsete kõõlude tõus. 9.92. $3x - 4y - 5 = 0$. 9.93. $16x - 15y = 0$. Märkus. Kasutada valemit (9.12). 9.96. Olgu CA ja CB asümptoodid. Asetame sirge MN CB, see sirge lõikab asümptooti CA punktis N, antud diameetrit punktis M. Asetame M'N = MN; kaasdiameetriks CM'. 9.97. Otsitavate diameetrite tõusud on



Joon. 9.8.

$$k_{1,2} = \frac{(a^2 + b^2)\tan\alpha \pm \sqrt{(a^2 + b^2)\tan^2 \quad + 4a^2b^2}}{2a^2}.$$

9.98. $\varphi = \arcsin \frac{1}{7}$. Märkus. Hüperbooli korral kehtib järgmine Apolloniuse teoreem: $a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2$ ja $ab = a'b' \sin\varphi$, kus a ja b on hüperbooli pooltelјed ja $2a'$ ja $2b'$ kaasdiameetritel asetsevate kõõlude pikkused. 9.99. 1) $y = (\sqrt{2} \pm 1)x$ ja $y = (\sqrt{2} + 1)x$, $y = -(\sqrt{2} + 1)x$; 2) $2x - y = 0$, $x - 3y = 0$ ja $2x + y = 0$, $x + 3y = 0$. 9.100. $9x \pm 4\sqrt{34}y = 0$. Märkus. Määrame diameetril asetseva kõõlu otspunktid kahest tingimusest: a) need punktid asetsevad hüperboolil; b) punktid asetsevad 10 cm kaugusel hüperbooli tsentrist. 9.101. $5y \pm 2x = 0$. 9.102. Hüperbool. 9.105. $\left(\pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}; \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)$. Ülesanne on võimalik, kui $b > a$. 9.106. Asetame GF $\parallel$ DE, DG $\parallel$ AC (vt. joonist 9.9). Jaotame DG ja CD võrdseks arvuks osadeks. Punkti A ühendame CD jaotustega, punkti B ühendame DG jaotustega. Sirgete lõikepunktid on hüperboolil. 9.107. $\frac{(x - \frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} - \frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$. 9.109. $\frac{(x - \frac{c}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} -$

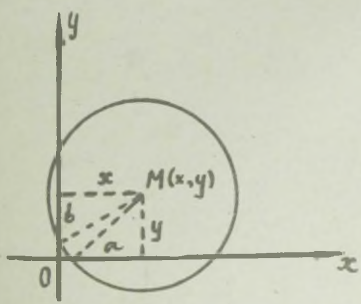


Joon. 9.9.

$-\frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$. <u>9.112</u>. 1) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(x - y_0)^2}{b^2} = 1$;

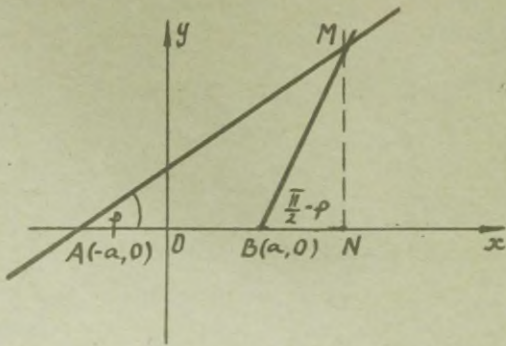
2) $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1$. <u>9.113</u>. 1) $\frac{(x-1)^2}{5^2} - \frac{(y+2)^2}{3^2} =$ $= 1$, $Q(1,2)$, $a = 5$ ja $b = 3$; 2) $\frac{(x + 1)^2}{6} - \frac{(y + 1)^2}{5} = 1$, $Q(-1, -1)$ $a = \sqrt{6}$ ja $b = \sqrt{5}$; 3) $\frac{(x + 3)^2}{4} - y^2 = 1$, $Q(-3, 0)$ $a = 2$ ja $b = 1$; 4) $\frac{(x + 2)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{12} = 1$, $Q(-2, -2)$ $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$; 5) $\frac{(y - 2)^2}{2} - \frac{(x + 1)^2}{8} = 1$; $Q(-1, 2)$, reaaltelg on paralleelne y-teljega $a = \sqrt{2}$ ja $b = 2\sqrt{2}$; 6) $(x - 2)^2 - (y - 3)^2 = 0$ – lõikuvate sirgete paar. <u>9.114</u>. 1) $C(2, -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = \frac{5}{3}$, juhtsirgete võrrandid on $5x - 1 = 0$, $5x - 19 = 0$, asümptootide võrrandid on $4x - 3y - 17 = 0$, $4x + 3y + 1 = 0$; 2) $C(-5; 1)$, $a = 8$, $b = 6$, $e = 1,25$, juhtsirgete võrrandid on $x = -11,4$ ja $x = 1,4$, asümptootide võrrandid on $3x + 4y + 11 = 0$ ja $3x - 4y + 19 = 0$; 3) $C(2, -1)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = 1,25$, juht-

sirgete võrrandid on $y = -4{,}2$, $y = 2{,}2$, asümptootide võrrandid on $4x + 3y - 5 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$. 9.115. $\frac{(x+15)^2}{9^2} - \frac{y^2}{12^2} = 1$. Märkus. Antud juhul on mugav kasutada fokaaltelјega ristuva fokaalraadiuse pikkuse avaldist $l = \frac{2b^2}{a}$. 9.116. $xy = \frac{a^2}{2}$ vana reeperi pööramisel -45° võrra, $xy = -\frac{a^2}{2}$ vana reeperi pööramisel 45° võrra. 9.117. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. 9.118. Hüperbooli $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ parempoolne haru. 9.119. Punktide hulk on hüperbool $(1+\lambda)^2 xy = 2\lambda S$, mille asümptoodid ühtivad reeperi telgedega ja S on kolmnurga pindala. 9.120. $x^2+y^2 = a^2 - b^2$. Märkus. Võrdhaarse hüperbooli korral vaadeldud hulk koosneb ainult ühest punktist – hüperbooli tsentrist. Kui $a < b$, siis hüperboolil ei eksisteeri ühtegi paari ristuvaid puutujaid. 9.121. Võrdhaarne hüperbool $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$. Vt. joon. 9.10. 9.122. Märkus. Antud ringjoone keskpunkt ja antud ringjoone suhtes väline punkt on otsitava hüperbooli fookusteks. Antud ringjoone raadius on võrdne hüperbooli fokaalkõõlu pikkusega $2a$. 9.123. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 9.124. $\varepsilon = \frac{2}{3}$. 9.125. Hüperbooli juhtjoon, mis vastab sellele fookusele, kust on tõmmatud ristsirged. 9.126. $x^2 - y^2 = a^2$, kui antud punktide koordinaadid on $(a, 0)$ ja $(-a, 0)$. 9.127. $x^2 - y^2 = a^2$, s. t. võrdhaarne hüperbool, mille tipud ühtivad punktidega A ja B. Määrame punkti M ordinaadi kahest kolmnurgast AMN ja BMN (joon. 9.11). $y = (x + a)\tan\varphi$ ja $y = (x - a)\cot\varphi$. Nendest ka-



Joon. 9.10.

20



Joon. 9.11.

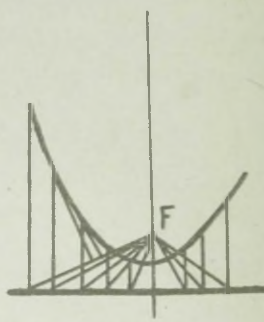
hest võrrandist elimineerime parameetri. 9.129. $\frac{ab}{2}$. 9.130. Fookuste hulk on hüperbool, kui $FA - FB \neq 0$. 9.131. Teine fookus on võrdsel kaugusel punktidest, mis on sümmeetrilised antud fookusega puutujate suhtes. Otsitav punktihulk on sirge. Kui on antud fookus F_0, punkt M_0 ja puutuja l_0, siis $F_0M_0 + M_0F = M_0'F$, kus M_0 on punkt, mis on punktiga F_0 sümmeetriline puutuja l_0 suhtes. Tähendab $FM_0' - FM_0 =$ $=$ const. Otsitav punktihulk on hüperbooli (fookustega M_0 ja M_0') haru. 9.133. Võtame puutujaks x-telje, asümptoodiks y-telje. Olgu punkti P abstsiss $x = a$. Siis võrrand $(x-\xi)^2 +$ $+ (y-\eta)^2 = (lx + my + n)^2$ määrab hüperbooli, mille fookuseks on punkt (ξ, η) ja me saame otsitava hulga võrrandi, kui elimineerime l, m, n neljast võrrandist $(a-\xi)^2 + \eta^2 =$ $= (la + n)^2$, $m = \pm 1$, $\eta = \pm n$, $l\alpha^2 + 2n\alpha + ln^2 = 0$.
9.134. Hüperbool. 9.135. $p \cdot v = nRT$, kus T on absoluutne temperatuur, R on gaasi universaalne konstant $R =$ $= 8{,}3 \cdot 10^3 \frac{Nm}{kg\text{-}mol}$. Arvestades, et $15^{\circ}C = 288{,}3K$ ja 1 tonn hapnikku on 31,25 kg-mol, saadakse $pv = 31{,}2 \cdot 8{,}3 \cdot 10^3 \cdot 288{,}3 \approx$ $\approx 7{,}5 \cdot 10^7$ Nm. Soovitatakse võtta rõhu teljeks (p) abstsisstelg 1 jaotus – $1 \cdot 10^3 \frac{N}{m}$ ja ruumala teljeks ordinaattelg 1 jaotus – $1 \cdot 10^4 m^3$.

10. peatükk

PARABOOL

10.1. (0,1). 10.2. 1) $y^2 = 8x$; 2) $y^2 = 6x$; 3) $y^2 = 5x$; 4) $y^2 = 6{,}4x$. 10.3. $x = -\frac{3}{2}$. 10.4. $(\frac{5}{4}, 0)$, $x = -\frac{5}{4}$; 2) $(-\frac{1}{2}, 0)$, $x = \frac{1}{2}$; 3) $(0, \frac{1}{4})$, $y = -\frac{1}{4}$; 4) $(0, -\frac{3}{4})$, $y = \frac{3}{4}$. 10.5. $y^2 = 8x - 8$. 10.6. 1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -9x$; 3) $y^2 = 8x$; 4) $y^2 = -8x$; 5) $y^2 = 16x$; 6) $y^2 = \pm 12x$; 7) $y^2 = 20x$. 10.7. 1) $x^2 = y$; 2) $x^2 = -2y$; 3) $x^2 = 8y$; 4) $x^2 = -8y$; 5) $x^2 = 12y$; 6) $x^2 = 8y$. 10.8. $p = 4$. 10.9. $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$. 10.10. 1) $y^2 = 10x - 25$; 2) $y^2 = 6x - 9$. 10.11. $x^2 = 6y - 9$. 10.12. $\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; võrdle sirge võrrandiga telglõikudes. Märkus. Kuna x-telg on parabooli teljeks ja tipp asetseb punktis A(a, 0), siis parabooli võrrand omab kuju $y^2 = 2p(x - a)$. Parameetri leidmiseks arvestame, et punkt B(0, b) on parabooli punkt. 10.13. 1) $(y - b)^2 = 2p(x - a)$; 2) $(y - b)^2 = -2p(x - a)$. Märkus. Kanname rööplükke teel reeperi alguspunkti punkti A(a, b). Uues reeperis parabooli võrrand omab kuju $y'^2 = 2x'$. Minnes tagasi lähtereeperisse, punkti koordinaatide teisendusvalemid omavad kuju $x' = x - a$, $y' = y - b$. Teostades asenduse, saamegi toodud kuju. 10.14. $(x-a)^2 = 2p(y-b)$, $(x-1)^2 = b(x+2)$. 10.15. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} = 1$. 10.16. $-\frac{x}{5} + \frac{y^2}{36} = 1$. 10.17. $(x + 2)^2 = -32(y - 1)$. 10.18. F(9, -8). 10.19. 1) A(2, 0), p = 2, $x - 1 = 0$, 2) $A(\frac{2}{3}, 0)$, p = 3, $6x - 13 = 0$, 3) $A(0, -\frac{1}{3})$, p = 3, $6y + 11 = 0$, 4) A(0, 2), $p = \frac{1}{2}$, $4y - 9 = 0$. 10.20. 1) $A(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$, $B_1(2, 0)$, $B_2(5, 0)$. y-telje positiivne suund; 2) $A(\frac{3}{4}, -\frac{73}{8})$, $B_1(-1, 0)$, $B_2(5, 0)$. y-telje negatiivne suund; 3) $A(\frac{3}{4}, -\frac{73}{8})$ $B_1(\frac{3 - \sqrt{73}}{4}, 0)$,

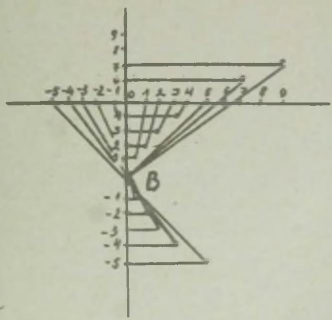
$B_2(\frac{3+\sqrt{73}}{4}, 0)$, y-telje positiivne suund; 4) $A(-\frac{5}{6}, \frac{23}{12})$, x-telge ei lõika, y-telje positiivne suund; 5) $A(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8})$, $B_1(1, 0)$, $B_2(\frac{3}{2}, 0)$, y-telje positiivne suund. 10.21. $A(18, 12)$, $B(18, -12)$. 10.22. 12. 10.23. $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 4)$. 10.24. $OM = 10$. 10.25. Kui punkt M_0 on parabooli punkt, siis tema koordinaadid peavad rahuldama parabooli võrrandit, s.t. $y_0^2 - 2px_0 = 0$. Kui punkt P kuulub parabooli sisepiirkonda, siis $y_0^2 - 2px_0 < 0$. Kui $y_0^2 - 2px_0 > 0$, siis punkt kuulub parabooli välispiirkonda. 10.26. B on parabooli punkt, A on sees- ja C väljaspool parabooli. 10.27. 1) $B^2p > 2AC$, 2) $B^2p < 2AC$. 10.28. 1) $M_1(2, -6)$, $M_2(\frac{1}{2}, 3)$; 2) $M_0(\frac{2}{9}, 2)$ sirge on parabooli puutuja; 3) reaalseid lõikepunkte ei eksisteeri; 4) $M(\frac{1}{2}, 3)$, sirge on paralleelne parabooli teljega. 10.29. 1) $A_1(4, 6)$, $A_2(\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$; 2) $A(\frac{9}{46}, \frac{3}{2})$; 3) $A(-\frac{1}{6}, 1)$; 4) $A_1(20, 16)$, $A_2(5, 1)$; 5) reaalseid lõikepunkte ei eksisteeri. 10.30. $(10, \sqrt{30})$, $(10, -\sqrt{30})$, $(2, \sqrt{6}$, $(2, -\sqrt{6})$. 10.31. $(\frac{5}{4}, \pm\sqrt{15})$ ja kaks imaginaarset lõikepunkti. 10.32. Kui $y^2 = 2px$ on antud parabool ja $x = k$ on antud sirge, siis otsitav punkt on $A(p+k, 0)$. 10.33. $(0, \pm 2)$. 10.34. Vt. joon. 10.10. Märkus. Otsime parabooli punkti parabooli teljega paralleelsete sirgete parve sirgetel. 10.35. Parabool $y^2 = \frac{a^2}{b}x$.



Joon. 10.10.

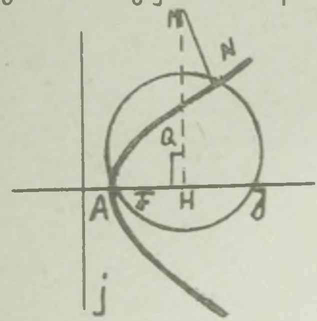
10.36. Vt. joon. 10.11. Konstruktsioonis võib kasutada erinevaid täisnurkseid kolmnurki, näiteks kaastelgedega $a = b = 5$ või $a = 10$, $b = 20$, või $a = 15$, $b = 45$ jne., kui ainult $\frac{a^2}{b} = 5$.

Joonis on tehtud 1. juhule. Punktide saamiseks väljaspool kolmnurka pikendatakse mõlemat kaatetit mõlemale poole ja kantakse pikendustele samad jaotused nagu kaatetitel. Punktide nummerdamist jätkatakse joonisel 10.11 näidatud viisil. 10.37. Märkus. Punktist M langetame ristlõigu MH parabooli teljele. Punktist H kanname teljele lõigu $HJ = p$ (p - parameeter). Läbi parabooli tipu A ja punkti J joonestame ringjoone, mille keskpunkti ordinaat on $QK = \frac{1}{4}HM$. Saadud ringjoon lõikab parabooli otsitavas punktis N. Sirge MN ongi otsitav parabooli normaal.

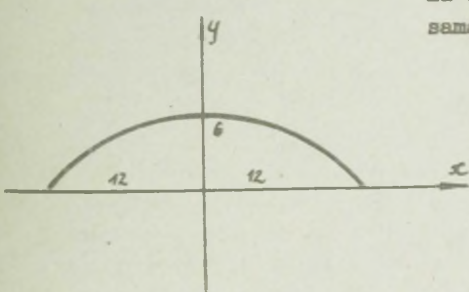


Joon. 10.11.

10.39. 1) $y_0 y = (p(x+x_0)$; 2) $(y^2-2px)(y_0^2-2px_0) - [y_0 y - p(x+x_0)]^2 = 0$, $y_1 y = p(x + x_1)$. 10.40. Märkus. Parabooli $y^2 = 2px$ puutuja omab kuju $y_0 y = p(x + x_0)$, kusjuures puutepunkt on parabooli punkt, s. t. $y_0^2 = 2px_0$. 10.41. Vt. joon. 10.13. 10.42. $M_0(9, -6)$. Märkus. Parabooli puutuja võrrandi saame pooleldi asendusvõttega, s. t. omab kuju $y_0 y = 2(x + x_0)$. Kuna ka sirge $x + 3y + 9 = 0$ on sama parabooli puutuja, siis



Joon. 10.12.



Joon. 10.13.

sirged peavad ühtima, s. t. tundmatute kordajad on võrdsed $2 = \frac{-y_0}{3} = \frac{2x_0}{-9}$. 10.43. 1) $p = 2$; 2) $p = \frac{5}{2}$. Märkus. Avaldame puutepunkti koordinaadid tundmatu parameetri p kaudu. Parameetri p leiame tingimusest, et puutepunkt on parabooli punkt. 10.44. 1) $x + y + 2 = 0$, $2x + 5y + 25 = 0$; 2) $3x - y + 3 = 0$, $3x - 2y + 12 = 0$; 3) $x = 0$, $x - 2y + 6 = 0$; 4) $3x + 2\sqrt{3}y + 6 = 0$; 5) ei eksisteeri. 10.45. $d = 13\frac{5}{13}$. 10.46. $Q(-\frac{y_0}{2}, 0)$. 10.47. $3x - 8y + 48 = 0$, $8x + 3y - 164 = 0$; $3x + 4y + 12 = 0$, $4x - 3y - 34 = 0$. 10.48. $4x - y - 24 = 0$, $x + 4y - 180 = 0$, $2x + 3y + 2 = 0$, $9x - 6y + 22 = 0$. 10.49. 1) $x + y \pm 3 = 0$; 2) $3x - y + 1 = 0$; 3) $x - 2y + 12 = 0$; 4) $3x + y + 1 = 0$. 10.50. $d = 2\sqrt{13}$. 10.51. $x + y + 4 = 0$; $x - y - 12 = 0$. 10.52. $8x - 4y + 1 = 0$; $8x + 16y - 9 = 0$. 10.53. 1) $x - 6y + 27 = 0$; 2) $2x - y + 2 = 0$; 3) $x - 2y + 2 = 0$. 10.54. $p = 2bk$. 10.55. $(9, 6\sqrt{3})$. 10.56. $A(\frac{3}{8}, 1)$, $8x - 6y + 3 = 0$, $24x + 32y - 41 = 0$. 10.57. $x - \sqrt{3}y + 9 = 0$. 10.58. 1) $x \pm 2y + 4 = 0$; 2) $x \pm 3y + 15 = 0$. Märkus. Puutujate koordinaadid on lihtne leida sirge ja kõvera puutumise tingimusest: puutuja omab kõveraga kaks ühtivat lõikepunkti. 10.59. 1) puutub parabooli; 2) lõikab parabooli kahes punktis; 3) asub väljaspool parabooli. 10.60. $d = 2$. Märkus. Kui sirge ei lõika parabooli, siis sirge ja parabooli vaheline lühim kaugus on võrdne sirge kaugusega parabooli punktist, mida läbiv puutuja on paralleelne antud sirgega (vt. joon. 10.13). 10.64. $x - y + 1 = 0$. 10.65. $P(-1, 2{,}25)$. 10.67. Sirge. Lahendus. Olgu $y^2 = 2px$ antud parabool, $P(\xi, \eta)$ otsitava hulga suvaline punkt, siis punktile P vastava polaari võrrand on $y\eta = p(x + \xi)$. Polaaril asetseva parabooli kõõlu otspunktist M_0 tõmmatud normaali võrrand omab kuju $x_0x + py - x_0y_0 - py_0 = 0$. Kuna normaal peab läbima paraboolil asetsevat kõõlu otspunktides võetud normaalide lõikepunkti $N(a,b)$, siis saame kõõlu otspunkti leidmiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_0 y_0 + y_0(p - a) - bp = 0, \\ y_0^2 = 2px_0, \\ b^2 = 2pa \end{cases}$$

tundmatute x_0 ja y_0 suhtes. Kuna punktid M_0 ja N on erinevad; siis $y_0 - b \neq 0$ ja peale suurusega $y_0 - b$ läbijagamist saame kõõlu otspunktide $M_1(x_1, y_1)$ ja $M_2(x_2, y_2)$ ordinaatide leidmiseks ruutvõrrandi $y_0^2 + by_0 + 2p^2 = 0$, millest $y_1 + y_2 = -b$, $y_1 y_2 = 2p_2$. Teiselt poolt, punkti P polaari võrrandi võime koostada kui punkte $M_1(x_1, y_1)$ ja $M_2(x_2, y_2)$ läbiva sirge võrrandi $\frac{Y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{X - x_1}{x_2 - x_1}$, millest $Y = \frac{2p}{y_1 + y_2} X = \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}$. Kuna üks ja sama sirge on määratud kahe võrrandiga, siis vastavate tundmatute kordajad peavad olema võrdelised. Saame $2\eta = y_1 + y_2$, $2p\xi = y_1 y_2$. Kokkuvõttes, arvestades eespool saadud seoseid y_1 ja y_2 korral, saame $\xi = p$, s. t. otsitav hulk on sirge. 10.69. Parabooli juhtsirge $x = -\frac{p}{2}$. 10.70. $S_1 : S_2 = 2$. Parabooli sisse joonestatud kolmnurga pindala on 2 korda väiksem vastava parabooli ümber joonestatud kolmnurga pindalast. 10.73. Märkus. Kõveratevaheliseks nurgaks nimetatakse kõverate puutujate vahelist nurka nende lõikepunktis. 10.74. Sirge, mis on paralleelne paraboolide tipus võetud puutujatega. 10.75. $x - 2 = 0$. 10.79. $y - p = 0$. 10.80. $y = \pm 4$. Märkus. Parabooli $y^2 = 2px$ diameetri võrrand on $y = \frac{p}{k}$, kus k on diameetrit poolitava parabooli kõõlude tõus. Kahe sirge vahelise nurga valemis $\tan\varphi = \pm \frac{k - k_1}{1 + kk_1}$, kus $\varphi = 45^\circ$ ja $k_1 = 0$ (diameeter on paralleelne parabooli teljega), saadakse: $k = \pm 1$. 10.81. $x - 12 = 0$. 10.82. 1) $2x - y - 3 = 0$;

2) $2x - y - 5 = 0$. 10.83. 1) $3x - y - 10 = 0$; 2) $3x - 5y + 10 = 0$. 10.84. $4x + 3y - 26 = 0$. 10.85. $y = 0{,}7x + t$. 10.86. $y = 3{,}5$. 10.87. $a = 4p\sqrt{3}$. Märkus. Kolmnurk asetseb sümmeetriliselt parabooli telje suhtes: üks kolmnurga tipp asetseb parabooli tipus ja tema vastakülg on risti parabooli teljega. 10.88. $x - 10 = 0$, $2x - y\sqrt{5} = 0$, $2x + y\sqrt{5} = 0$.
10.89. $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$. 10.90. Parabool, mille tipp asetseb antud parabooli fookuses ja parameeter on kaks korda väiksem antud parabooli parameetrist. 10.91. $y^2 = \frac{p}{2}x$. 10.92. $\delta_1 \cdot \delta_2 = p^2$. 10.94. Parabool. 10.95. $p = -12$. Vt. joon. 10.13.
10.96. $y^2 = \frac{20}{3}x$. 10.97. $\frac{(2p\rho)^{1,5}}{p(\rho - \frac{p}{2})}$. 10.98. $|p| = 2\frac{2}{3}$.

10.99. $h = 5$ m. 10.100. Sirge pöörleb ümber punkti $Q(2p, 0)$. 10.101. Parabool, mille fookus on antud punktis ja juhtsirgeks on antud sirge. 10.102. Kaks parabooli $y^2 = \pm 2x + 1$. 10.103. $y - 18 = 0$. $\exists$ J. 10.104. $y = \frac{a}{b^2}x^2$. 10.105. 40 cm.

10.107. 40 cm. 10.108. 1) $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$; 2) $= \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, kus $p = \frac{b^2}{a}$ on ellipsi parameeter. 10.109. $\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$.

10.110. 1) $\rho = a$; 2) $\rho = 2a\cos\varphi$; 3) $\rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = a^2 - \rho_0^2$. 10.111. 1) $\rho = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}$; 2) $\rho = \frac{16}{5 + 3\cos\varphi}$.
10.112. $\rho = \frac{4}{3 - \sqrt{5}\cos\varphi}$. 10.113. $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $2c = 2\sqrt{2}$. 10.114. 13, 12. 10.115. $(6, \frac{\pi}{4})$, $(6, -\frac{\pi}{4})$. 10.116. $\varphi = a \arccos(\pm\frac{4}{5})$. 10.117. $\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$, kus $p = \frac{b^2}{a}$.
10.118. $= \frac{2p\cos}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. Märkus. Lähtudes ellipsi kanoonilisest võrrandist ja kandes reeperi alguspunkti ellipsi tippu, saame $y'^2 = (e^2 - 1)x'^2 + 2px'$. Edasi tuleb minna üle polaarreeperi, kasutades seost $x' = \rho\cos\varphi$, $y' = \sin\varphi$.
10.119. $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$. 10.120. $\rho^2 = \frac{-b^2}{1 - e^2\cos^2\varphi}$. 10.121.

$\rho = \frac{25}{12 - 13\cos\varphi}$. 10.122. 1) $\rho = \frac{160\cos\varphi}{25 - 9\cos^2\varphi}$; 2) $\rho = \frac{72\cos\varphi}{16 - 25\cos^2\varphi}$; 3) $\rho = \frac{24\cos\varphi}{9 - 5\cos^2\varphi}$. Märkus. Vt. ül. 10.120, arvestades, et $p = \frac{b^2}{a}$, $e = \frac{c}{a}$. 10.123. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. 10.124. Asümptoodid: $\rho = \frac{2}{\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})}$ ja $\rho = \frac{2}{\sin(\varphi - \frac{3\pi}{4})}$, juhtsirged $\rho = -\frac{\sqrt{2}}{\cos\varphi}$ ja $\rho = -\frac{3\sqrt{2}}{\cos\varphi}$.

10.125. 1) $\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$; 2) $\rho = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$. 10.126. $\rho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. 10.127. $\rho = \frac{p(\cos\varphi \pm \sqrt{\cos\varphi})}{1 - \cos^2\varphi}$. 10.128. $y^2 = 12x$. 10.129. $M(3, \arccos\frac{1}{3})$ - kaks punkti, sümmeetrilised polaartelje suhtes. 10.131. 1) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $y^2 = \frac{2}{3}x$; 3) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

11. peatükk

TEIST JÄRKU JOONE ÜLDINE TEOORIA

11.1. (5, 0), (2, 0) ja (0, 5), (0, 1). 11.2. 1) (1, 0) ja $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$; 2) lõikepunktid on ebapunktid; 3) sirge puutub kõverat punktis (1, 0); 4) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$, sirge lõikab kõverat ainult ühes punktis. 11.3. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Märkus. Antud võrrand kujutab parabooli, kõik näidatud sirged on paralleelsed sümmeetriateljega ning järelikult üksteisega paralleelsed. 11.4. $\lambda = \frac{3}{4}$. 11.5. 1) $2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ ($k_1 = 0$, $a_{11} = 0$); 2) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ ($k_1 = \infty$, $a_{22} = 0$); 3) $2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

($k_1=0$ ja $k_2=\infty$, $a_{11}=0$ ja $a_{22}=0$). 11.6. $y=2x$ ja $y=-3x$. **Märkus.** Otsitavate sirgete tõusud võib määrata võrrandist $a_{11}+2a_{12}k+a_{22}k^2=0$. 11.7. $3x-y-6=0$ ja $x-2y-2=0$; $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 11.8. 1) $5x^2+16xy+5y^2-5x-5y=0$; 2) $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$; 3) $x^2+4xy+4y^2-6x-12y=0$. **Märkus.** Lähtume teist järku kõvera üldvõrrandist ($a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$). Kuna antud punktid asuvad kõveral, siis nende koordinaadid peavad rahuldama võrrandit. Saame viis tingimust, mida peavad rahuldama võrrandi kordajad a_{ik}. Saadud viiest seosest määrame viis kordajat kuuenda kaudu, asendame võrrandisse ja jagame läbi tundmatu kordajaga. 11.9. **Märkus.** Otsitav teist järku joon ei ole üheselt määratud, kuna neli viimast punkti asetsevad ühel sirgel $x+2y-6=0$. Järelikult otsitav teist järku joon saab olla ainult sirgete paar, millest üks on antud sirge ja teine sirge läbib reeperi alguspunkti. Tähistades $\frac{a_{11}}{a_{22}}=\lambda$, võime otsitava teist järku joone esitada järgmise võrrandiga: $2\lambda x^2+(4\lambda+1)xy+2y^2-12x-6y=0$ või $(x+2y-6)(2\lambda x+y)=0$. 11.10. $5x^2-5xy+2y^2-5x-2y=0$. 11.11. Ülesande tingimust rahuldavad kaks paraboolset tüüpi kõverat: $x^2-8x-y+15=0$, $9x^2+6xy+y^2-72x-24y+135=0$. 11.12. $6x^2-xy-2y^2+4y=0$. 11.13. $xy+4x+6y=0$. 11.14. 1) $x^2-4xy+3y^2-4y=0$; 2) $xy+15=0$; 3) $x^2-8y=0$. 11.15. 1) (3, -2); 2) (0, -5); 3) (0, 0); 4) (-1, 3). 11.16. 1) $2x^2-6xy+5y^2-11=0$; 2) $9x^2-18xy+6y^2+2=0$; 3) $6x^2+4xy+y^2-7=0$; 4) $4x^2+6xy+y^2-5=0$; 5) $4x^2+2xy+6y^2+1=0$. **Märkus.** Mugav on kasutada kõvera võrrandit juhul, kui reeperi alguspunkt on kõvera tsentris $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+\frac{\Delta}{\delta}=0$. Järelikult ruutliikmete osa võrrandis ei muutu $(2x^2 - 6xy + 5y^2)$, ära tuleb jätta lineaarsed liikmed ja vabaliikme leidmiseks on piisav arvutada kaks determinanti $\Delta = -11$, $\delta = 1$. 11.17. 1), 2), 3) Keskpunkt on reeperi alguspunktis; 4) keskpunktidest koosnev sirge $3x - 2y = 0$. 11.18. 1) (7, 5); 2) (-1, -1); 3) (0, 1); 4), 9), 14) keskpunkti ei eksisteeri; 5) $x + y + 1 = 0$ – keskpunktidest koosnev sirge; 6) $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$; 7) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$; 8) $x + 3y + 2 = 0$ – keskpunktidest koosnev sirge; 10) $x - 2y + 5 = 0$ – keskpunktidest koosnev sirge; 11) (1, 1); 12) (-1, 2); 13) $4x + 2y - 5 = 0$ – keskpunktidest koosnev sirge. 11.19. 1), 2), 5), 8) tsentraalsed kõverad; 3), 7) ei oma keskpunkti; 4), 6) omavad keskpunktidest koosneva sirge 11.20. 1 $x-3y-6=0$; 2) $2x + y - 2 = 0$; 3) $5x - y + 4 = 0$. 11.21. 1) võrrand määrab tsentraalse teist järku joone (juht (a)), kui $a \neq 9$, parabooli (juht (b)), kui $a = 9$, $b \neq 9$, joone korral eksisteerib keskpunktidest koosnev sirge $2x + 6y + 3 = 0$, kui $a = b = 9$; 2) (a) $a \neq 4$ iga b korral; (b) $a = 4$, $b \neq 6$, (c) $a = 4$, $b = 6$. Märkus. Ülesande lahendamine taandub keskpunkti määrava süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 6y + 3 = 0, \\ 6x + 2ay + b = 0 \end{cases}$$

lahendite olemasolu uurimisele.

11.22. 1) $7x^2 + 4xy + 4y^2 - 83 = 0$; 2) $x^2 - 2xy + 4 = 0$; 3) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 40 = 0$. 11.23. Märkus. Lähtuda võrrandist (11.8) ja minna tagasi esialgsesse koordinaatsüsteemi. 11.24. $5x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 2y = 0$. 11.25. $2x^2 - xy - 3y^2 - x - 6y - 15 = 0$. 11.26. Ringjoon. 11.27. Sirge. Märkus. Koostada hüperbooli võrrand reeperi suhtes, mille telgedeks on antud punkti läbivad ja antud asümptootidega paralleelsed sirged. 11.28. Sirge $3x + y = 0$. Märkus. Koostada võrrandid keskpunkti koordinaatide määramiseks. 11.29. $4x^2 - 8xy - 2y^2 + 9y - 4 \quad 0$. Märkus. Nelja antud punkti läbib lõpmatu teist järku joonte hulk, mis on esitatavad võrrandiga $2x^2 - 4\lambda xy + (4\lambda + 1)y^2 - 4x - (4\lambda + 1)y = 0$, kusjuures λ on muutuv parameeter. 11.30. $9x^2 - 4y^2 \pm 36x = 0$. Märkus.

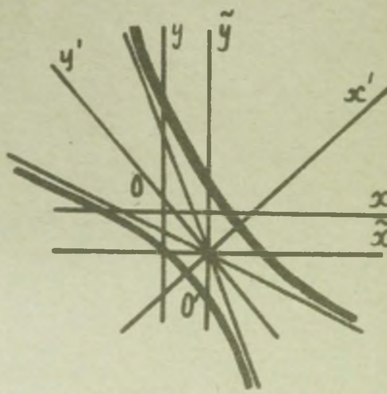
Viimase liikme märk sõltub sellest, millises hüperbooli tipus asetseb reeperi alguspunkt. 11.31. 1) $y^2 = x^2 + \sqrt{2}x$; 2) $x^2 + 2y^2 - 8x = 0$; 3) $y^2 = 2\frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$. **Märkus**. Antud joon on hüperbool. Tema peateljed on $x + y + 1 = 0$ ja $x - y - 2 = 0$. Teisel teljel on kaks reaalset tippu: (0, -2) ja (1, -1), kanname reeperi alguspunkti teise tippu ning pöörame reeperi telgi nurga $\alpha = \frac{\pi}{4}$ võrra. 11.32. $y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$. 11.33. $y^2 = 2qx + (e^2 - 1)x^2 - q^2$, kus q on fookuse kaugus vastavast juhtsirgest. 11.34. 1) $b^2x_0x + a^2y_0y - ab = 0$; 2) $b^2x_0x - a^2y_0y - ab = 0$; 3) $y_0y - p(x_0 + x) = 0$; 4) $x_0y + xy_0 = m$. 11.35. $5x + 8y - 24 = 0$; $5x - 8y - 8 = 0$; $x - 4y - 2 = 0$ ja $x + 4y - 3 = 0$. 11.36. $x - 4y - 2 = 0$ ja $x + 4y - 3 = 0$. 11.37. 1) $a_{11} = a_{13} = 0$; 2) $a_{22} = a_{23} = 0$; 3) $a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0$. 11.38. 1) $k = 2$; 2) $k_1 = -1$, $k_2 = 5$; 3) kõigi $k \neq 2$ korral, mis rahuldavad tingimust $-1 < k < 5$; 4) $k < -1$ ja $k > 5$. 11.39. 1) Kõver puutub abstsisstelge punktis (2,0) ning lõikab ordinaattelge ainult ühes punktis (0, 4); 2) abstsisstelg lõikab kõverat punktis (3, 0) ja (1, 0). Ordinaattelg on paralleelne selle parabooli teljega ning lõikab seda ainult punktis (0, 3); 2) kõver puutub x-telge reeperi alguspunktis ja lõikab y-telge reeperi alguspunktis ja punktis (0, 2). 11.40. $7x + 4y + 10 = 0$ punktis (-2, 1) ja $3x - 4y + 18 = 0$ punktis (-2, 3). 11.41. $7x - 2y - 13 = 0$, $x - 3 = 0$. 11.42. 1) $2x + 5y = 0$, $2x + y = 0$; 2) $x - 3 = 0$, $7x - 2y - 13 = 0$. 11.43. $y + 4 = 0$ ja $3y - 4 = 0$. **Märkus**. Puutepunkti koordinaadid määrame võrrandist $F_x = 0$ (x-teljega paralleelse puutuja võrrandis on abstsisskordaja null) ja $F_x = 0$ (puutepunkti koordinaadid rahuldavad kõvera võrrandit). 11.44. $7x + 1 = 0$. 11.45. $x + y - 1 = 0$, $3x + 3y + 13 = 0$. 11.46. 1) Punkt (-2, 1) asetseb antud kõveral ning seetõttu võime läbi selle punkti panna ainult ühe puutuja, mille võrrand on $7x + 4y + 10 = 0$; 2) antud võrrand määrab lõikuvate sirgete paari, mis lõikuvad punktis $(3, -3)$. Kõik selle joone puutujad, s. o. kõik sirged, mis lõikavad joont kahes ühtivas punktis, peavad läbima punkti $(3, -3)$. Seega läbi iga punkti võib antud joonele panna ainult ühe puutuja. Erandiks on ainult punkt $(3, -3)$, mida läbib lõpmatu arv puutujaid. Punkti $(-2, 1)$ läbiva ainsa puutuja võrrand on $4x + 5y + 3 = 0$. 11.47. $x^2 - 8y^2 - 4 = 0$. 11.48. $x^2 + xy + y^2 + 3y = 0$. 11.49. $6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0$. Märkus. Kuna otsitav kõver läbib reeperi alguspunkti, siis peab võrrandi vabaliige olema võrdne nulliga ($a_{33} = 0$). Kõvera ja sirge $4x + 3y + 2 = 0$ puutumise tõttu punktis $(1, -2)$, sama $\frac{a_{11} - 2a_{12} + a_{13}}{4} = \frac{a_{21} - 2a_{22} + a_{23}}{3} = \frac{a_{31} - 2a_{32}}{2}$. Kõvera ja sirge $x - y - 1 = 0$ puutumisest punktis $(0, -1)$ saame $\frac{-a_{12} + a_{13}}{1} = \frac{-a_{22} + a_{23}}{-1} = \frac{-a_{23}}{-1}$. Viiest võrrandist avaldame otsitava võrrandi viis kordajat kuuenda kaudu. 11.50. $x^2 - 4y^2 - 2x + 4y = 0$, s. o. teist järku kõver - lõikuvate sirgete paar $x - 2y = 0$ ja $x + 2y - 2 = 0$. Märkus. Ülesande tingimust rahuldab lõpmatu hulk kõveraid, kõik nad on esitatavad võrrandiga $x^2 + 2\lambda xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ parameeter λ erinevate väärtuste korral. 11.51. $1 = 2$. 11.52. 1) $\lambda = \pm 5$; 2) $\lambda = \pm 4$. 11.53. $17x - 4y - 4 = 0$. 11.54. $2x + y + 6 = 0$. 11.55. 1) $4x - 6y + 1 = 0$; 2) $2x - y - 8 = 0$. 11.56. $49x - 49y + 44 = 0$. 11.57. $17x - 4y - 4 = 0$. Märkus. Otsitav diameeter on antud sirge sihi kaassihiline. 11.58. $(-3, 5)$. Otsitavat punkti on lihtne leida kui antud sirge ja sirge kaasdiameetri lõikepunkti. 11.60. $x + 2y + 3 = 0$ ja $7x - 5y + 2 = 0$. 11.61. $y - 1 = 0$ ja $4x + 5y + 3 = 0$. 11.62. $x - 1 = 0$ ja $x - 2y + 3 = 0$. 11.63. 1) $x - 3y = 0$; 2) $x - 3y - 6 = 0$; 3) $3x - 9y - 7 = 0$; 4) $5x - 15y - 8 = 0$ ja $5x - 15y - 19 = 0$; 5) $10x - 30y - 27 = 0$. 11.64. $x + 1 = 0$. 11.65. Ülesande tingimust rahuldavad kaks paari kaasdiameetreid: $6x - 12y + 11 = 0$ ja $3x - y - 7 = 0$ või $2y - 5 = 0$ ja $3x - 3y - 2 = 0$. Märkus. Otsitavate diameetrite tõusud määratakse kahest võrrandist: $3 - 3(k + k_1) + 5kk_1 = 0$ (kaassihtide tõusude võrrand) ja $\frac{k - k_1}{1 + kk_1} = 1$ (diameetritevaheline nurk on $\frac{\pi}{4}$). 11.66. $7x - y - 3 = 0$. 11.67. 1) $6x + 7y + 4 = 0$; 2) $7x + 10 + 5 = 0$; 3) $x + 3y + 1 = 0$. 11.68. $(x - 2)^2 - (x - y)^2 = 0$ või sirged $2x - y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$. 11.69. Diameetri võrrand on $(a_{11}x + a_{12}y) - (a_{11}x_0 + a_{12}y_0) = 0$. Puutuja võrrand on $(a_{13} + a_{11}x_0 + a_{12}y_0)x + (a_{23} + a_{12}x_0 + a_{22}y_0)y + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}) = 0$, kus $a_{11} = \alpha^2$, $a_{12} = \alpha\beta$, $a_{22} = \beta^2$. 11.70. 1) $2x + 2y + 1 = 0$ ja $x - y + 2 = 0$; 2) $28x + 21y + 4 = 0$ ja $33x - 44y - 6 = 0$; 3) $x + y = 0$ ja $x - y = 0$; 4) $x + y - 2 = 0$ ja $x - y = 0$; 5) $x + y - 1 = 0$ ja $x - y + 3 = 0$; 6) $2x - 4y - 5 = 0$; 7) $3x + y - 1 = 0$ ja $x - 3y + 3 = 0$; 8) $2x - 4y - 1 = 0$. Märkus. Peatelgede tõusud võib määrata võrrandist $a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$. Asendades ühe telje tõusu diameetri võrrandisse $F_x + kF_y = 0$, saame teise telje (esimese kaastelje) võrrandi. 11.71. Kõigi antud parabooli diameetrite tõus on $k = 1$. Parabooli telg on diameeter, mis on kaasdiameetriks sellega ristuvatele kõõludele, s. o. kõõludele, mille tõus on $k_1 = -1$. Selle parabooli iga diameetri võrrand on $2x - 2y + 1 + k(-2x + 2y - 2) = 0$, kui $k = -1$, siis saame telje võrrandi $4x - 4y + 3 = 0$. 11.72. Antud võrrandi võib asendada järgmisega $(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \frac{\beta}{\alpha}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0$, $a_{11} = \alpha^2$, $a_{12} = \alpha\beta$, $a_{22} = \beta^2$. 11.73. 1) $x + 2y - 1 = 0$, $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$; 2) $39x - 26y - 12 = 0$, $(\frac{18}{169}, -\frac{51}{169})$; 3) $y - 1 = 0$, $(-1, 1)$. 11.74. Lõikuvate sirgete paari peateljed (sümmeetriateljed) ühtivad nende sirgete poolt moodustatud nurkade nurgapoolitajatega. 11.75. $\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{b_{11} - b_{22}}{2b_{12}}$. 11.76. $5x - 5y + 2 = 0$. Märkus. Esimene kõver on tsentraalne, diameetrite kimbu võrrand on $2x - x - 1 - k(x+2y+1) = 0$. Teine kõver on parabool, mille diameetrite tõusud $k_1 = -\frac{\alpha}{\beta} = -1$. Et leida kahe kõvera ühist diameetrit, on küllaldane leida ülaltoodud kimbust see diameeter, mille tõus on -1; 2) $y = x - 1$. 11.77. 1) $3x - y + 3 = 0$, $2y + 3 = 0$; 2) $3x - y = 0$, $4y - 9 = 0$. 11.78. Kaasdiameetrite tõusud rahuldavad võrrandit $a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1k_2 = 0$. Antud diameetrite tõusud on $k_1 = \frac{1}{3}$ ja $k_2 = 1$, $k_1' = 0$, $k_2' = 2$. Asetades need väärtused võrrandisse, saame $3a_{11} + 4a_{12} + a_{22} = 0$, $a_{11} + 2a_{12} = 0$. $a_{11} : a_{12} : a_{22} = 2 : (-1) : (-2)$. Otsitava kõvera keskpunktiks on kahe kaasdiameetri lõikepunkt $Q(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$. Need koordinaadid peavad rahuldama võrrandeid $F_{x_0} = 0$, $F_{y_0} = 0$, mis antud juhul on $2x_0 - y_0 + a_{13} = 0$ ja $-x_0 - 2y_0 + 2_{23} = 0$. Asetame x_0 ja y_0 asemele nende väärtused ning saame $a_{13} = -1$ ja $a_{23} = -1$. Kuna kõver läbib reeperi alguspunkti, siis $a_{33} = 0$ ning kõvera võrrand on $2x^2 - 2xy - 2y^2 - 2x - 2y = 0$ või $x^2 - xy - y^2 - x - y = 0$. 11.79. $19x^2 - 56xy + 43y^2 - 6 = 0$. 11.80. Märkus. Leiame selle kõvera võrrandi reeperi suhtes, kus reeperi alguspunkt ühtib kolmnurga raskuskeskmega, üks telg ühtib mediaaniga ning teine telg on paralleelne kaht ülejäänud tippu ühendava küljega. 11.82. $y = 3x + 2$, $y = 3x - 2$, $x + 1 = 0$. 11.83. 1) Sirged, mis ühendavad vastaskülgede keskpunkte, on kõvera diameetrid; 2) sirged, mis ühendavad vastaskülgede puutepunkte, on kõvera diameetrid. 11.84. 1) $6x - 2y + 19 = 0$ ja $2x + 2y - 1 = 0$; 2) $6x + 14y + 11 = 0$ ja $2x + 2y - 1 = 0$; 3) $5y + 3 = 0$ ja $25x - 5y + 13 = 0$; 4) $2x - 3y + 1 = 0$ ja $x - 1 = 0$; 5) $2x + 3y - 5 = 0$ ja $5x + 3y - 8 = 0$; 6) $7x - 35y - 22 = 0$ ja $7x + 14y + 20 = 0$; 7) $6x - 2y + 19 = 0$ ja $2x + 2y - 1 = 0$; 8) $3x + 4y + 14 = 0$ ja $x + y - 3 = 0$; 9) $5y + 3 = 0$ ja $25x - 5y + 13 = 0$. Märkus. Asümptootide võrrandid saame diameetrite kimbu võrrandist $F_x + kF_y = 0$, kui k on asümptootilise sihi tõus, mille me leiame võrrandist $a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$. 11.85. $12x^2 + 40xy + 28y^2 + 16x + 8y - 11 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$, $6x + 14y + 11 = 0$. 11.86. $2x - y + 5 = 0$ ja $x + 2y - 1 = 0$ kõigi parameetri väärtuste korral. Märkus. Ruutliikmete kordajate võrdelisus järeldub mõlema kõvera asümptootide paralleelsusest, esimese astme liikmete kordajate võrdelisus järeldub asümptootide ühtimisest. 11.87.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} < 0 .$$

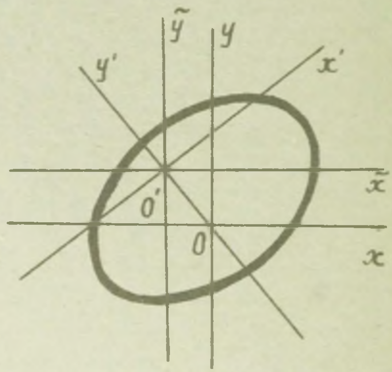
11.88. $(Ax + By + C) \cdot (A_1x + B_1y + C_1) + \lambda = 0$, kus λ on suvaline parameeter. Märkus. Ülesande lahendamisel kasutame esiteks asjaolu, et ühised asümptoote omavate kõverate võrrandid erinevad ainult vabaliikmete poolest (pärast korrutamist mingi konstantse teguriga) ja teiseks kaks sirget on teist järku joone erijuhuks, kusjuures need kaks sirget on selle joone asümptootideks. 11.89. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$. Märkus. Antud hüperbool on võrdhaarne, kuna asümptoodid on risti. Järelikult $e = \sqrt{2}$. Lihtne on näidata, et hüperbooli juhtsirge läbib hüperbooli fookusest asümptoodile tõmmatud ristsirge aluspunkti (asümptoodi ja ristsirge lõikepunkti). Ülesande edasiseks lahendamiseks võib kasutada sirgete kimbu võrrandit. Teine võimalus, ülesande tingimustest võime vahetult välja kirjutada keskpunkti koordinaadid, fokaaltelje võrrandi ja fookustevahelise kauguse. Kuna fookuse kaugus asümptoodist on võrdne imaginaarse pooltteljega b, on ekstsentrilisust lihtne leida. Juhtsirgete leidmiseks arvestame, et juhtsirged lõikavad asümptootidest välja lõigud, mille pikkus on $2a$. 11.90. $10x^2 + 12xy + 9y^2 - 41x - 39y + 4 = 0$. Märkus. On sobiv kasutada eelmise ülesande lahendust. 11.91. $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$. 11.92. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$. 11.93. $a_{11} - 2a_{12}\cos\omega + a_{22} = 0$. Märkus. Võrdhaarse hüperbooli asümptoodid on teineteisega risti. 11.94. $(A_1x + B_1y + C_1) \pm$

$\pm (A_2x + B_2y + C_2) = 0$. 11.95. Tipud $A_1(\frac{1}{\sqrt{10}} - 1, \frac{3}{\sqrt{10}} + 2)$, $A_2(\frac{1}{\sqrt{10}} - 1, \frac{-3}{\sqrt{10}} + 2)$, fookused on $F_1(0, 5)$, $F_2(-2, -1)$. Juhtsirge võrrandid on $x + 3y - 6 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$. Asümptootide võrrandid on $3x + 4y - 5 = 0$, $y - 2 = 0$. Tippude puutujate võrrandid $x + 3y - 5 \pm \sqrt{10} = 0$. 11.96. 1) Ellips $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$; keskpunkt on $O'(-2, 1)$, fokaaltelg on paralleelne x-teljega; 2) hüperbool $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{1} = -1$, keskpunkt on $O'(1, -3)$, reaaltelg on paralleelne y-teljega; 3) parabool $Y = -2X^2$, tipp on $O'(-\frac{1}{2}, 1)$, telg paralleelne y-teljega, paraboolil on kumerus ülespoole; 4) imaginaarne ellips; 5) hüperbool, mille keskpunkt on $O'(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, reaaltelg on paralleelne y-teljega, $a = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; 6) parabool, tipp on $O'(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, parabooli telg on paralleelne y-teljega, parabool on kumer ülespoole, parameeter on $\frac{3}{4}$; 7) parabool, mille tipp on $O'(-\frac{3}{16}, \frac{1}{4})$, telg on paralleelne x-teljega, on kumer paremale poole, parameeter on $\frac{1}{2}$; 8) kaks punktis $O'(-1, 1)$ lõikuvat sirget $\sqrt{3}(x + 1) + \sqrt{2}(y - 1) = 0$ ja $\sqrt{3}(x + 1) - \sqrt{2}(y - 1) = 0$; 9) hüperbool, mille keskpunkt on $O'(-1, -1)$, asümptoodid on paralleelsed reeperi telgedega. 11.97. 1) Reeperi alguspunkt ühtib kõvera keskpunktiga; 2) abstsisstelg ühtib ühe kõvera diameetriga, ordinaattelg on paralleelne kaasdiameetriga; 3) reeperi teljed on paralleelsed kahe kaasdiameetriga ja kõver läbib reeperi alguspunkti; 4) reeperi teljed ühtivad kahe kaasdiameetriga; 5) ordinaattelg ühtib ühe diameetriga ning abstsisstelg on paralleelne kaasdiameetriga; 6) reeperi teljed on paralleelsed kaasdiameetrite paariga. 11.98. 1) $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$, $\alpha = 45^\circ$; 3) $x'^2 + y'^2 = 0$, imaginaarsete lõikuvate sirgete paar, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $x'^2 - y'^2 = 0$, lõikuvate sirgete paar, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$;

5) $\frac{x'^2}{4}+y'^2=-1$, imaginaarne ellips, $\alpha=45^\circ$. 11.99. 1) $x'^2-\frac{y'^2}{4}=1$, hüperbool, $x=\tilde{x}+2$, $\tilde{y}=y-1$. $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$, (joon. 11.10); 2) ellips $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$, $x=\tilde{x}-1$, $y=\tilde{y}+1$, $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, (joon. 11.11); 3) hüperbool $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{36}=1$, $x=\tilde{x}+3$, $y=\tilde{y}-4$, $\tilde{x}=\frac{x'-2y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$ (joon. 11.12); 4) lõikuvate sirgete paar $x'^2-4y'^2=0$, $x=\tilde{x}-2$, $y=\tilde{y}$, $\tilde{x}=\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$, $\tilde{y}=\frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$ (joon. 11.13); 5) imaginaarne ellips $x'^2+2y'^2=-1$, $x=\tilde{x}-1$, $y=\tilde{y}$, $\tilde{x}=\frac{x'+3y'}{\sqrt{10}}$, $\tilde{y}=\frac{-3x'+y'}{\sqrt{10}}$; 6) imaginaarsete sirgete paar, mis lõikuvad reeperi alguspunktis $2x'^2+3y'^2=0$, $x=\tilde{x}$, $y=\tilde{y}-2$, $\tilde{x}=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $\tilde{y}=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$.

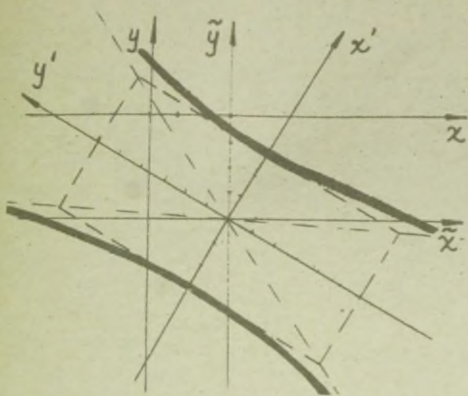


Joon. 11.10.

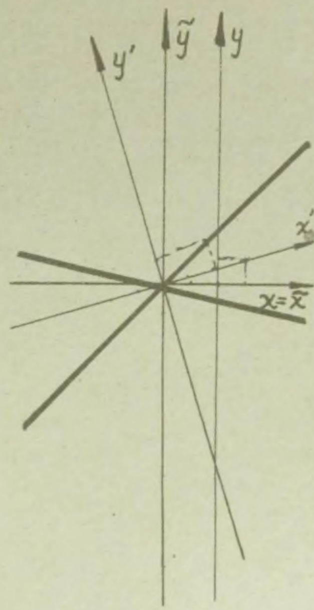


Joon. 11.11.

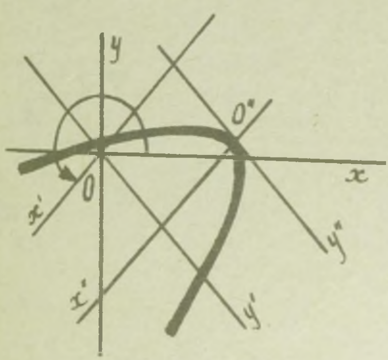
11.100. Parabool $y''^2=2x''$, teisendusvalemid $5x=-4x'+3y'$, $5y=-3x'-4y'$ ja $x'=x''-3$ $y'=y''+2$, (joon. 11.14); 2) paralleelsete sirgete paar $y''^2=1$, teisendusvalemid $\sqrt{13}x=3x'-2y'$, $\sqrt{3}\,y=2x'+3y'$ ja $x'=x''+\frac{4}{\sqrt{3}}$, $y'=y''$ (joon. 11.15);



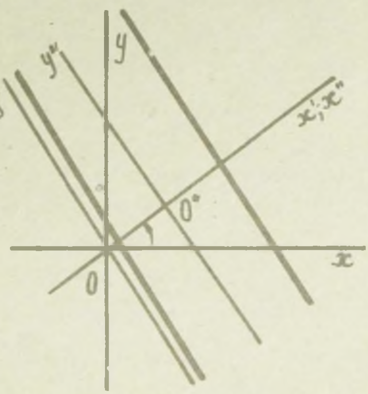
Joon. 11.12.



Joon. 11.13.



Joon. 11.14.



Joon. 11.15.

3) $y''^2 + 1 = 0$, s. t. mingit reaalset geomeetrilist objekti võrrand ei määra. Teisendusvalemid $5x = 3x' - 4y'$, $5y = 4x' + 3y'$ ja $x' = x''$, $y' = y'' - 4$. 11.101. $10x^2 - 5y^2 - 1 = 0$. Märkus. Paigutame reeperi alguspunkti kõvera keskpunkti, võrrand on siis $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 1 = 0$. Seejärel leiame kõvera telgede peasihid võrrandist $a_{12}a^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0$, mis antud juhul on $2k^2 - 3k - 2 = 0$. Leides $k_1 = 2$ ja $k_2 = -\frac{1}{2}$, on küllaldane pöörata reeperi telge nurga $x = \text{arc tg } 2$ võrra, et nad ühtiksid kõvera peatelgedega. Vastavad koordinaatide teisendusvalemid on $x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}$ ja $y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}$, kasutades neid valeteisendame kõvera keskpunkti kantud kõvera võrrandi peatelgedele kantud kõvera võrrandiks. 11.102. 1) $5x^2 + 10y^2 = 1$; 2) $13y^2 - 52x^2 = 1$; 3) $2x^2 - 2y^2 = 11$; 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 5) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. 11.103. 1) $C(2, 3)$, $k = -\frac{1}{2}$, $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 2) $C(1, 1)$, $k = -1$, $\frac{X^2}{9} + Y^2 = 1$; 3) $C(1, 1)$, $k = -1$, $\frac{X^2}{16} + \frac{Y^2}{4} = 1$; 4) $C(-1, 2)$, $k = 3$, $X^2 - \frac{Y^2}{9} = 1$; 5) $C(1, 0)$, $k = \frac{9}{4}$, $\frac{X^2}{9} - \frac{Y^2}{25} = 1$; 6) $C(1, -1)$, $k = \frac{4}{3}$, $\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1$. 11.104. 1) $x - y - 1 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$; 2) $2x - 3y + 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$. 11.105. 1) $y^2 = 2x$. Märkus. Leiame peatelje tõusu: $k = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{3}{4}$. Peatelje võrrandi saame diameetrite kimbust $9x + 12y - 20 + k'(12x + 16y + 15) = 0$, kui asendame $k' = -\frac{1}{k} = \frac{4}{3}$. Lahendades parabooli ja peatelje võrrandi, veendume, et parabóoli tipp ühtib reeperi alguspunktiga, seega ülesande lihtsustamiseks on küllaldane pöörata reeperi telge nurga $\alpha = \text{arctg } (-\frac{3}{4})$ võrra. Vastavad koordinaatide teisendusvalemid on $x = \frac{4x' + 3y'}{5}$ ja $y = \frac{-3x' + 4y'}{5}$; 2) $y^2 = 2\sqrt{2}x$. 11.106. 1) Parabool, tipp $Q(1\frac{3}{4}, 2)$ $p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, teljeks on sirge $4x - 4y + 1 = 0$; 2) parabool, tipp $Q(1, 2)$, $p = -\sqrt{2}$, teljeks

on sirge $x - y + 1 = 0$. 11.107. 1) $Q(-2, 1)$, $p = 5$; 2) $Q(0,-7)$, $p = 3$; 3) $Q(2, 0)$, $p = -4$; 4) $Q(3, 5)$, $p = 2$; 5) $Q(-\frac{B}{2A}, \frac{4AC - B^2}{4A})$, $p = \frac{1}{2|A|}$; 6) $Q(4, -1)$, $p = 0,5$; 7) $Q(-3, -9)$, $p = 0,5$. 1) - 3) telg on paralleelne x-teljega; 4)- 7) telg on paralleelne y-teljega. 11.108. 1) $Y^2 = 10X$, tipp $A(-1, 2)$, $\vec{s} = (4, -3)$; 2) $Y^2 = 4\sqrt{2}X$, tipp $A(2,1)$, $\vec{s} = (1, 1)$; 3) $Y^2 = 2X$, tipp $Q(0, 0)$, $\vec{s} = (4, -3)$; 4) $Y^2 = 2\sqrt{2}X$, tipp $A(1, 1)$, $\vec{s} = (1, -1)$; 5) $Y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}} X$, tipp $A(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$, $\vec{s} = (1, 2)$.

11.109. 1) Parabool läbib reeperi alguspunkti; 2) ordinaattelg on paralleelne parabooli teljega; 3) ordinaattelg ühtib parabooli teljega, parabooli tipp asetseb punktis $Q(0, \frac{5}{4})$; 4) abstsisstelg ühtib parabooli teljega, tipp asetseb punktis $Q(-\frac{3}{2}, 0)$. 11.110. $(x + y)^2 + 4\sqrt{2}\, py$. Märkus. Parabooli puutuja fokaalkõõlu otspunktis moodustab teljega nurga 45°. Otsitava võrrandi saame parabooli kanoonilisest võrrandist, kandes esiteks reeperi alguspunkti punkti $Q(\frac{p}{2}, p)$, s.t. võrrand omab kuju $y'^2 + 2py' = 2px'$, ning seejärel teostades reeperi pöörde nurga $\frac{\pi}{4}$ võrra. 11.111. $(x - y)^2 - 2\sqrt{2}\, p(x + y) + 2p^2 = 0$. 11.112. Antud võrrandi võib kirjutada kujul $y = a(x + \frac{b}{a})^2 + c - \frac{b^2}{a}$ või $y - \beta = a(x - \alpha)^2$, kus $\beta = c - \frac{b^2}{a}$, $\alpha = -\frac{b}{a}$. Kandes rööplükke teel reeperi alguspunkti punkti $O'(\alpha, \beta)$, antud võrrand teiseneb kujule $y' = ax'^2$ või $x'^2 = \frac{1}{a} y'$. Järelikult antud võrrand määrab parabooli. 11.113. $Y^2 = 2pX$, $x \cos t + y \sin t = 0$ on telje võrrand; $x \sin t - y \cos t + q = 0$ on puutuja võrrand tipus. Tipp on $(q \sin t, -q \cos t)$. Vektor $\vec{a} = (\sin t, -\cos t)$ on paralleelne teljega. 11.114. Kanooniline võrrand on $(A_1^2 + B_1^2)X^2 + (A_2^2 + B_2^2)Y^2 = 1$. Peatelgede võrrandid on $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. 11.115. Üks fookustest on $F(x_0, y_0)$ ning vastava juhtsirge võrrand on $Ax + By + C = 0$. 11.116. Üks fookustest on $F(x_0, y_0)$ ning vastava juhtsirge võrrand on $Ax + By + C = 0$. 11.117. 1) Ellipsi võrrandisse võivad kuuluda kõik kolm teise astme liiget või kaks koordinaatide ruutu (kui reeperi teljed on kaassihilised). Ühe teise astme liikmega võrrand ei saa olla ellipsi võrrandiks. 2) Hüperbooli võrrandisse võivad kuuluda kõik kolm teise astme või kaks neist mistahes kombinatsioonis; mõlemad liikmed on koordinaatide ruudud, kui reeperi teljed on kaassihilised või üks on ruutliige ja teine koordinaatide korrutis, kui üks reeperi telg on paralleelne hüperbooli asümptoodiga. Lõpuks hüperbooli võrrand võib sisaldada ainult üht teise astme liiget, koordinaatide korrutist, kui mõlemad reeperi teljed on paralleelsed asümptootidega. 3) Parabooli võrrand sisaldab kas kolm teise astme liiget või ühe koordinaadi ruudu, kui üks reeperi telg on paralleelne parabooli teljega. 11.118. $F_1(4, 3)$, $F_2(0, -1)$; $2x - 2y - 15 = 0$ ja $2x + 2y + 3 = 0$. 11.119. $F(0, 0)$; $4x + 3y + 2 = 0$. 11.120. 1) $O'(1, 1)$, sümmeetriateljed: $x - y = 0$ ja $x + y - 2 = 0$, $F_1(3, -1)$, $F_2(-1, 3)$, juhtsirged: $2x - 2y + 9 = 0$, puutujad: $x + y - 2 \pm \sqrt{2} = 0$, $x - y \pm 3\sqrt{2} = 0$, kanooniline võrrand $x''^2 + \frac{y''^2}{9} = 1$; 2) $O'(2, 3)$, sümmeetriateljed: $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$, $F_1(2, 4)$, $F_2(0, 4)$, juhtsirged: $2x - y - 1 \pm 9 = 0$, puutujad: $x + 2y - 8 \pm 2\sqrt{5} = 0$, $2x - y - 1 \pm 3\sqrt{5} = 0$, kanooniline võrrand $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$; 3) $O'(1, 2)$, sümmeetriateljed: $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $F_1(0, 1)$, $F_2(2, 3)$, juhtsirged: $x + y - 3 \pm 1 = 0$, puutujad: $x + y - 3 \pm \sqrt{6} = 0$, asümptoodid: $x - 1 = 0$, $y - 2 = 0$, kanooniline võrrand $x''^2 - y''^2 = 1$; 4) $O'(-1, 2)$, sümmeetriateljed: $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 5 = 0$, $F_1(-2, -1)$, $F_2(0,5)$, juhtsirged $x + 3y - 5 \pm 1 = 0$, puutujad: $x + 3y \pm \sqrt{10} = 0$, asümptoodid: $3x + 4y - 5 = 0$, $y - 2 = 0$, kanooniline võrrand $x''^2 - \frac{y'^2}{9} = 1$; 5) $O'(-2{,}6; 1{,}8)$ sümmeetriatelg: $4x + 3y + 5 = 0$, $F(-0,5; -1)$, juhtsirge: $6x - 8y + 65 = 0$, puutuja: $3x - 4y + 15 = 0$, kanooniline võrrand $y''^2 = 14x''$; 6) $O'(1,1)$, sümmeetriatelg: $x + y - 2 = 0$, $F(1,5; 0,5)$, juhtsirge $x - y + 1 = 0$, puutuja: $x - y = 0$, kanooniline võrrand $y''^2 = 2\sqrt{2}x''^2$; 7) $O'(-1,4; -4,1)$, sest pöörde $\alpha = 45^\circ$ korral on kanooniline võrrand $x''^2 + 3y''^2 = 0$; 8) $O'(-2, -2)$ ja pöörde $\alpha = 45^\circ$ korral on kanooniline võrrand $10x''^2 + y''^2 = -2$, s. t. mingit reaalset punktide hulka ei määra; 9) nullpunktis lõikuvate sirgete paar $(3 - \sqrt{5})x - (1 - \sqrt{5})y = 0$, $(x - \sqrt{5})x + (3 - \sqrt{5})y = 0$; 10) punktis $O'(-0,2; 0,4)$ lõikuvate sirgete paar $4x - 3y + 1 = 0$, $25y - 7 = 0$; 11) paralleelsete sirgete paar $2x - 3y - 2 \pm 8 = 0$; 12) $O'(1, 1)$, sümmeetriateljed $x + y - 2 = 0$, $x - y = 0$, $F_1(1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6})$, $F_2(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$, juhtsirged $3x + 3y \pm \sqrt{6} = 0$, puutujad: $x - y \pm 4\sqrt{2} = 0$, $x + y - 2 \pm 2\sqrt{2} = 0$, kanooniline võrrand $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{16} = 1$; 13) $O'(1, 2)$, sümmeetriateljed $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $F_1(1 + 2\sqrt{3}, 2 - 4\sqrt{3})$, $F_2(1 - 2\sqrt{3}, 2 + 4\sqrt{3})$, juhtsirged $3x - 6y + 9 \pm 36\sqrt{3} = 0$, puutujad $x - 2y + 3 \pm 8\sqrt{5} = 0$, $2x + y - 4 \pm 2\sqrt{5} = 0$, kanooniline võrrand $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{64} = 1$; 14) $O'(1, 1)$, sümmeetriateljed $x - 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$, $F_1(1 - 2\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, $F_2(1 + 2\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, juhtsirged $4x + 2y - 6 \pm 9\sqrt{2} = 0$, puutujad $2x + y - 3 \pm 2\sqrt{5} = 0$, asümptoodid $x - y = 0$, $x - 7y + 6 = 0$, kanooniline võrrand $\frac{x''^2}{9} - y''^2 = 1$, 15) $O'(-1, 0)$, sümmeetriateljed $x \pm y + 1$, $F_1(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$, $F_2(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, juhtsirged $2x + 2y + 2 \pm \sqrt{2} = 0$, puutujad $x + y = 0$, $x + y + 2 = 0$, asümptoodid $x + 1 = 0$, $y = 0$, kanooniline võrrand $\frac{x''^2}{0,5} - \frac{y''^2}{0,5} = 1$; 16) tipp $(0,52; 0,86)$, sümmeetriatelg $3x + 4y - 5 = 0$, $F(2{,}52; -0{,} 64)$, juhtsirge $4x - 3y + 13 = 0$; puutuja $8x - 6y + 1 = 0$; kanooniline võrrand $y''^2 = 10x''$; 17) tipp $(\frac{5}{13}, \frac{1}{13})$, sümmeetriatelg $2x + 3y - 1 = 0$, $F(\frac{7}{26}, \frac{2}{13})$, juhtsirge $6x - 4y - 3 = 0$, puutuja $3x - 2y - 1 = 0$, kanooniline võrrand $y''^2 = -\frac{2}{\sqrt{13}} x''$.

11.121. $2xy + 11 = 0$. Märkus. Kuna antud võrrandil puuduvad koordinaatide ruutudega liikmed, siis reeperi teljed on paralleelsed asümptootidega. Ülesande lahendamiseks piisab reeperi alguspunkti kandmisest hüperbooli keskpunkti; 2) $40xy = 3$. 11.122. $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Märkus. Uuteks reeperi telgedeks on asümptoodid. Reeperi teisenduseks on x-telje pööre nurga $\alpha = \arctan(-\frac{b}{a})$ ja y-telje pööre nurga $\beta = \arctan(\frac{b}{a})$ võrra. Vastavad teisendusvalemid $x = \frac{a(x' + y')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ja $y = \frac{-b(x' - y')}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 11.123. 1) Ellips $\frac{8}{3}x^2 + 4y^2 = 1$; 2) ringjoon $x^2 + y^2 = 16$. Märkus. Ülesandes 2) pole peasihid määratavad, peatelgedeks võib valida mistahes teineteisega ristuvad diameetrid. 11.124. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. Märkus. Kuna kõvera keskpunkt ühtib reeperi alguspunktiga, siis ülesande lahendamiseks on küllaldane teostada reeperi pööre. Leides peasihtide tõusud ning arvutades leitud tõusude järgi peatelgede kaldenurgad abstsisstelgede suhtes ning leides koordinaatide teisendusvalemid, tuleb meeles pidada, et esialgne reeper oli kaldreeper ($\omega = \frac{\pi}{3}$). Lõplikud teisendusvalemid on järgmised: $x = \frac{x' - y'\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ ja $y = \frac{x' + y'\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. 11.125. 1) $y^2 = 6x$; 2) $y^2 = \frac{3}{4}x$. Märkus. Lahendus on analoogiline eelneva ülesande lahendamisega. Kanname algul reeperi alguspunkti parabooli tippu, seejärel pöörame reeperi teljed peasihilisteks. Tähelepanu tuleb pöörata asjaolule, et meil on tegemist kaldreeperiga. 11.126. $45x + 205y - 4 = 0$, $15x - 15y - 2 = 0$. 11.127. $15x + y - 2 = 0$, $5x + 3y - 4 = 0$. 11.128.

$2x + 7y - \frac{1}{2} = 0$. 11.129. Sümmeetriatelg $x - 2y + 1 = 0$, tipp $S(-\frac{1}{6}, \frac{5}{12})$. 11.130. 1) Hüperbool ($\Delta = 16$, $\delta = -8$); 2) ellips ($\Delta = -64$, $\delta = 8$); 3) reaalsete lõikuvate sirgete paar ($\Delta = 0$, $\delta = -1$); 4) reaalsete lõikuvate sirgete paar ($\Delta = 0$, $\delta = -\frac{81}{4}$); 5) hüperbool ($\Delta = -\frac{1}{4}$, $\delta = -\frac{5}{4}$); 6) ellips ($\Delta = -13$, $\delta = 1$); 7) parabool ($\Delta = -4a^2$, $\delta = 0$); 8) parabool ($\Delta = -1$, $\delta = 0$); 9) parabool ($\Delta = -32$, $\delta = 0$); 10) reaalsete paralleelsete sirgete paar ($= 0$, $= 0$); 11) ühtivate sirgete paar ($\Delta = 0$, $\delta = 0$).
11.131. 1) - 4) ellips; 5) imaginaarne ellips; 6) - 10) hüperbool; 11) - 14) parabool; 15) - 16) lõikuvad sirged; 17) - 18) paralleelsete sirgete paar; 21) - 22) imaginaarsete lõikuvate sirgete paar, mis lõikuvad reaalses punktis.

11.132. 1) $x^2 - y^2 = 11\sqrt{2}$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; 4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. 11.133. 1) $x^2 + 6y^2 = 30$; 2) $9x^2 - 16y^2 = 5$; 3) $4x^2 + 9y^2 = 36$; 4) $x^2 - 4y^2 = 4$; 5) $x^2 + 9y^2 = 9$.
11.136. 1) 3 ja 1; 2) 3 ja 2; 3) 1 ja $\frac{1}{2}$; 4) 3 ja 2.
11.137. A(2, 3); 2) B(3, -3); 3) C(1, -1); 4) D(-2, 1).
11.139. 1) 2 ja 1; 2) 5 ja 1; 3) 4 ja 2; 4) 1 ja $\frac{1}{2}$.
11.141. Ühe koordinaadi ruutliige puudub ($a_{11} = 0$ või $a_{22} = 0$) või puuduvad mõlemad koordinaadi ruutliikmed ($a_{11} = a_{22} = 0$). 11.142. 1) $xy = 1{,}2$; 2) $xy = \frac{\sqrt{29}}{25}$ 3) $xy = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; 4) $xy = \frac{5}{2}$. 11.143. Hüperboolidel on ühised asümptoodid. 11.144. Märkus. Antud Q korral $\Delta = 0$. 11.147. 1) 3; 2) 3; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$. 11.148. 1) $y^2 = 4\sqrt{2}x$; 2) $y^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}x$; 3) $y^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}x$; 4) $y^2 = \frac{1}{5\sqrt{5}}x$. 11.150. Afiinsel teisendamisel $x' = \alpha x + \beta y + \gamma$, $y' = Ax + By + C$,

joone võrrand saab järgmise kuju: $x'^2 + 2y'^2 = 0$. <u>11.151.</u> 1) $(x + 2y)^2 + 4x + y - 15 = 0$; 2) $(3x - y)^2 - x + 2y - 14 = 0$; 3) $(5x - 2y)^2 + 3x - y + 11 = 0$; 4) $(4x + 2y)^2 - 5x + 7y = 0$; 5) $(3x - 7y)^2 + 3x - 2y - 24 = 0$. <u>11.157.</u> 1) $x + y - 1 = 0$; $3x + y + 1 = 0$; 2) $x - 4y - 2 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$; 3) $x + y - 3 = 0$, $x + 3y + 3 = 0$; 4) $x - y = 0$, $x - 3y = 0$. <u>11.158.</u> 1a) $a = 0$, 1b) $a = -\frac{1}{2}$; 2a) $a_1 = \frac{5}{3}$ ja $a_2 = \frac{5}{4}$, 2b) $a_1 = 1$ ja $a_2 = -1$. <u>11.159.</u> Võrrand määrab ellipsi, kui $\lambda > 1$, parabooli, kui $\lambda = 1$, hüperbooli, kui $\lambda < 1$, $\lambda \neq -24$, lõikuvate sirgete paari $x - 6y - 3$ ja $x + 4y - 1$, kui $\lambda = -24$. <u>11.160.</u> Võrrand kujutab hüperbooli parameetri λ kõikidel väärtustel; juhul $\lambda_1 = 5$ ja $\lambda_2 = -12{,}5$ hüperboolid lagunevad lõikuvate sirgete paariks. <u>11.161.</u> Võrdhaarne hüperbool. <u>11.162.</u> <u>Märkus.</u> Kuna $\Delta \neq 0$, $S \neq 0$, $\delta \neq 0$, siis on meil tegemist teist järku tsentraalse kõveraga (kidumata teist järku joonega), mille karakteristliku võrrandi lahendid on võrdsed. Kõver on reaalne kõver, kuna $\Delta S < 0$. <u>11.164.</u> $S\Delta < 0$. <u>11.165.</u> Hüperboolidel on ühised asümptootide sihid. <u>11.167.</u> 1) $2x + y - 5 = 0$, $2x + y - 1 = 0$; 2) $2x - 3y - 1 = 0$, $2x - 3y + 11 = 0$; 3) $5x - y - 3 = 0$, $5x - y + 5 = 0$. <u>11.168.</u> $2F(x_0, y_0) S < 0$. <u>11.169.</u> $d^2 = -\frac{4\delta}{S^2}$. <u>11.170.</u> 1) $x - 3y + 2 = 0$; 2) $3x + 5y + 7 = 0$; 3) $4x - 2y - 9 = 0$. <u>11.171.</u> $2F(x_0, y_0) S < 0$. <u>11.172.</u> $S = 0$. <u>11.173.</u> $a_{33} = -5$. <u>11.174.</u> $a = 4$, $b = -3$. <u>11.175.</u> Kaks reeperi telgedega paralleelset sirget $x - a = 0$ ja $y - b = 0$; 2) ordinaattelg $x = 0$ ja sirge $x - 2y + 5 = 0$; 3) sirge $x - 2y = 0$ (kaks ühtivat sirget); 4) lõikuvate sirgete paar $x - y = 0$ ja $2x + 5y = 0$; 5) lõikuvate sirgete paar $5x - y = 0$ ja $2x - y = 0$; 6) imaginaarsete sirgete paar, mis lõikuvad reeperi alguspunktis; 7) paralleelsete sirgete paar $x + y \pm 1 = 0$. 11.176. 1), 6) hüperbool; 2), 4) ellips; 3), 5) parabool. 11.177. 1) $2x + 3y - 5 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$; 3) $2x + 5y + 1 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$; 4) $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 4 = 0$. 11.179. 1) $15x^2 - y^2 + 3 = 0$; 2) $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$; 3) $y^2 = \sqrt{3}x$. 11.180. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$. 11.181. Ellips $\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{9} = 1$, keskpunkt $O'(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, x-telje tõus $k = 2$. 11.182. Hüperbool $\frac{Y^2}{15} - X^2 = 1$, keskpunkt ühtib reeperi alguspunktiga $O(0, 0)$, x-telje tõus on -1. 11.183. Hüperbool $\frac{X^2}{5} - \frac{Y^2}{15} = 1$, keskpunkt $O'(-1, 2)$, x-telje tõus $k = -2$. 11.184. $Y^2 = \frac{1}{25}X$. 11.185. $x + 3y + 2 = 0$. 11.186. 1) $4x + 7y + 1 = 0$; 2) $x - 4 = 0$; 3) $x - 6y + 1 = 0$; 4) kõvera keskpunkt ei oma polaari; 5) $2x + 3y - 3 = 0$; 6) $a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$; 7) $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$; 8) $\frac{5x}{9} - \frac{3y}{4} = 1$; 9) $3x - y - 9 = 0$; 10) polaar on määramata, kuna kõver kidub sirgete paariks: $x - y = 0$ ja $x - 3y + 2 = 0$ ning antud punkt $(1, 1)$ on sirgete lõikepunkt. 11.187. $P(1, 0)$. 11.188. 1) $P(5, 1)$; 2) $P(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Märkus. Kuna x-telje võrrand on $y = 0$, siis pooluse koordinaatide leidmise võrrandi süsteem $a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13} = 0$, $a_{12}x' + a_{22}y' + a_{23} = 0$; 3) $P(-2, 0)$; 4) sirge on kõvera diameeter ja reaalset poolust ei ole (diameetri otspunktides võetud puutujad on paralleelsed; 5) poolus on määramata. Pooluseks võib võtta sirge $9x - y + 19 = 0$ mistahes punkti. Antud koonuselõige on sirgete paar, mis koos antud ja leitud sirgega moodustavad harmooniliste sirgete neliku; 6) P(4, -3); 7) (-5; -7,5). 11.189. (-3, 1). Märkus. Otsitav punkt on antud sirge poolus. 11.190. $5x + y + 2 = 0$. Märkus. Otsitav kõõl on punkti M polaar. 11.191. $(\frac{3}{2}, 2)$. Märkus. Otsitav punkt on antud sirge ja reeperi alguspunkti polaari lõikepunkt. 11.192. Sirge $4x - y + 30 = 0$ iga punkt on punkti (5, 1) kaaspunktiks, kuna see sirge on antud punkti polaariks. 11.193. $x + 5y - 15 = 0$. Märkus. Otsitav sirge läbib punkti M(0, 3) ja antud sirge $x - 3y + 22 = 0$ poolust P(-5, 4). 11.194. Üldjuhul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & C \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kui ellips on antud kanoonilise võrrandiga, siis $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, siis tingimus on järgmine: $AA_1a^2 + BB_1b^2 = CC_1$.

Märkus. Esimese sirge pooluse koordinaadid peavad rahuldama tingimust $\frac{a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13}}{A} = \frac{a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23}}{B} = \frac{a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33}}{C} = \lambda$ ehk $a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} - A\lambda = 0$, $a_{21}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} - B\lambda = 0$, $a_{31}x_1 + a_{32}y_1 + a_{33} - C\lambda = 0$. Peale selle vastavalt ülesande tingimustele peab esimese sirge poolus asetsema teisel sirgel, s. o. samad koordinaadid (x_1, y_1) peavad rahuldama veel neljandat võrrandit: $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$. Saadud neljast võrrandist koosnev süsteem peab olema kooskõlas. Viimane nõue annab otsitava tingimuse. 11.195. Märkus. Tõestus lihtsustub, kui kasutada ristreeperit, mille alguspunkt asetseb ringjoone keskpunktis. 11.201. Ristkülik, mis koosneb kahest lühema pooltelje otspunkti puutujast ($y = \pm 4$) ning kahest ellipsi juhtjoonest ($x = \pm 10$). 11.202. Kolmnurk, mille külgedeks on hüperbooli kolm puutujat: $2x - y - 2 = 0$, $2x + y - 2 = 0$ ja $x + 2 = 0$. 11.203. Ellips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Olgu $M_0(x_0, y_0)$ ringjoone punkt. Ringjoone puutuja võrrand selles punktis on $xx_0 + yy_0 - 9 = 0$. Leiame selle sirge pooluse $P(x_1, y_1)$ ellipsi suhtes. Punkti polaar antud ellipsi suhtes peab olema järgmine: $6x_1x + 9y_1y - 54 =$

$= 0$. Seega on ühel ja samal sirgel (punkti polaaril) kaks võrrandit. Järelikult võrrandite kordajad peavad olema võrdelised $\frac{6x_1}{x_0} = \frac{9y_1}{y_0} = \frac{54}{9}$, millest $x_1 = x_0$ ja $y_1 = \frac{2}{3} y_0$. Kuna M_0 on ringjoone punkt, siis $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Asendades viimasesse võrrandisse seosed $x_1^2 = x_0^2$, $y_0^2 = \frac{9}{4} y_1^2$, saame lõplikult pooluste hulga võrrandi $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$. 11.204. Sama ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kusjuures ellipsi mistahes puutuja pooluseks on sama ellipsi punkt, mis on sümmeetriline puutepunktiga abstsisstelje suhtes. 11.206. $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$. Märkus. Tingimusest, et reeperi alguspunkt on sirge $2x + 3y - 1 = 0$ pooluseks, järeldub, et $\frac{a_{13}}{2} = \frac{a_{23}}{3} = \frac{a_{33}}{-1}$. Tingimus, et punkt $(-1, 1)$ on sirge $2x + y = 0$ pooluseks, annab ainult ühe uue võrrandi: $\frac{-a_{11}+a_{12}+a_{13}}{2} = \frac{-a_{12} + a_{22} + a_{23}}{1}$. Peale selle keskpunkti koordinaadid $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ peavad rahuldama võrrandeid $F_x = 0$ ja $F_y = 0$. Seega $3a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = 0$ ja $3a_{12} + a_{22} + 2a_{23} = 0$. Saadud viiest võrrandist avaldame otsitava joone võrrandi 5 kordajat kuuenda kaudu. Asendame võrrandisse ja jagame läbi. 11.207. $7x^2 + 2xy - 6x - 10y + 15 = 0$. 11.208. $P(-3, 1)$. 11.209. Polaar on lõpmatus. 11.210. $x - 6y + 1 = 0$. 11.211. $9x^2 + 4xy + 6y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$. Märkus. Otsitav kõver on ellips ($e < 1$). Võrrandi koostamisel lähtume definitsioonist $r_1 + r_2 = 2a$, kus r_1 ja r_2 on ellipsi suvalise punkti fokaalraadiuste pikkused. Fokaalpooltelje aga leiame ekstsentrilisuse ja fookuste vahelise kauguse kaudu. 11.212. $5x^2 - 4yx + 8y^2 + 10x - 40y + 41 = 0$. Märkus. Leiame kõigepealt antud puutuja ja otsitava ellipsi puutepunkti. Kasutame asjaolu, et puutepunktist lähtuvad fokaalraadiusvektorid moodustavad puutujaga võrdsed nurgad ehk teisiti öeldes, ühest fookusest puutepunkti tõmmatud raadiusvektor läbib punkti, mis on sümmeetriline teise fookusega puutuja suhtes. 11.213. Ei saa, kuna mõlemad fookused $F_1(1, 3)$ ja $F_2(-1, 2)$ asuvad samal poolel puutujast $x - y + 4 = 0$, mis on võimalik ainult ellipsi puhul. 11.214. $4x^2 + 8xy + 13y^2 - 24x - 42y + 9 = 0$. 11.215. $x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$. 11.216. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 1 = 0$. 11.217. $337x^2 + 168xy + 288y^2 - 3200x - 2400y = 0$. 11.218. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$. 11.220. $B(2, \frac{1}{2})$, $C(2, 0)$, $D(3, \frac{7}{2})$. 11.221.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - 4\frac{(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2+By_2+C)}{A^2 + B^2}}.$$

11.222. $xy = \frac{1}{2}$. Märkus. Võrdhaarse hüperbooli ekstsentrilisus on $e = \sqrt{2}$. 11.223. $3x^2 - 6xy - 5y^2 + 24y - 12 = 0$. Märkus. Kasutame hüperbooli definitsiooni $|r_1 - r_2| = 2a$. 11.224. $35xy - 34y^2 - 34y - 2 = 0$. 11.225. $3x^2 + 4xy - 8x - 4y + 4 = 0$. 11.226. $2x^2 - xy - x + y + 5 = 0$. 11.227. $x - 2 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$. 11.228. $x^2 - 4xy - 6x + 9 = 0$. 11.229. $4xy + 3y^2 + 4y - 11 = 0$. 11.230. $4xy + 3y^2 - 2y - 1 = 0$. Märkus. Kasutame teist järku joone järgmist omadust: $r : d = e$. 11.231. $x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$. Märkus. Arvutame fookuste kaugused antud juhtsirgest $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\delta_2 = -\frac{5}{\sqrt{2}}$. Kuna δ_1 ja δ_2 on erinevate märkidega, siis fookused asuvad erineval poolel juhtsirgest, järelikult otsitav kõver on hüperbool. Arvestades, et $|\delta_1| < |\delta_2|$, võime järeldada, et antud juhtsirge on konjugeeritud esimese fookusega. Kõvera võrrandi koostamiseks on vaja teada veel ta ekstsentrilisust ja fokaaltelge. Mõlemad suurused saame arvutada, teades fookustevahelist kaugust ning fookuse ja vastava juhtsirge vahelist kaugust. <u>11.232</u>. 1) $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 94x - 58y + 124 = 0$; 2) $x^2 + 2xy + y^2 - 12x + 24y - 54 = 0$; 3) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$. <u>Märkus</u>. Kasutada vahetult parabooli definitsiooni. <u>11.233</u>. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$. <u>11.234</u>. $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$. <u>11.235</u>. Ülesande tingimust rahuldavad kaks parabooli: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 14x + 22y + 24 = 0$ ja $x^2 + 4xy + 4y^2 - 14x - 18y + 24 = 0$. <u>11.236</u>. Ülesande tingimust rahuldavad kaks parabooli: $4x^2 + 4xy + y^2 - 10y - 15 = 0$ ja $4x^2 + 4xy + y^2 + 12x - 34y - 15 = 0$. <u>11.237</u>. $25x^2 \pm 30xy + 9y^2 - 150x - 90y + 225 = 0$ (kaks parabooli). <u>11.238.</u> $9x^2 + 6xy + y^2 - 16x - 32y + 16 = 0$. <u>11.239</u>. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 4y = 0$. <u>11.240</u>. $y^2 = 2px$. <u>11.241</u>. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 60x - 16y + 256 = 0$. <u>11.242</u>. $4x^2 - 4xy + y^2 - 16x - 2y = 0$. <u>11.243</u>. Võrdhaarne hüperbool. <u>11.244</u>. $11x^2 - 20xy - 4y^2 + 18x + 36y = 0$. <u>Märkus</u>. Otsitav kõver on hüperbool, mis nähtub sellest, et keskpunkt ja joone punkt asetsevad antud juhtsirgest erinevatel pooltel. Kirjutades reaaltelje võrrandi, veendume, et ta läbib reeperi alguspunkti, s. t. reeperi alguspunkt on üheks otsitava hüperbooli tipuks. <u>11.245</u>. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 7 = 0$.

$$\frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \left| \frac{x \cos\theta + y \sin\theta - p}{x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta - p} \right| .$$

<u>11.246</u>. $6x^2 - 4xy + 2y^2 + 12x - 99 = 0$. <u>Märkus</u>. $\Delta^* : \Delta = 4$. <u>11.247</u>. $9x^2 + 16y^2 - 36x - 48y = 0$. <u>11.248</u>. $2x^2 - xy - 3y^2 - x - 6y - 15 = 0$. 11.249. $xy - x - y + 1 = 0$. <u>11.250</u>. $x^2 + 2xy + 2y^2 - 14x - 20y + 48 = 0$. <u>11.251</u>. $x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0$. <u>11.252</u>. $66x^2 + 24xy + 59y^2 - 648x - 436y + 161 = 0$. <u>11.253</u>. Olgu otsitav afiinne teisendus esitatud

kujul $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2$. Asendades seosed võrrandisse, saame $\frac{(a_{11}x+a_{12}y+a_1)^2}{a^2} + \frac{(a_{21}x+a_{22}y+a_2)^2}{b^2} =$

$= 1$ ehk $\left(\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{21}^2}{b^2}\right) x^2 + 2\left(\frac{a_{11}a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}a_{22}}{b^2}\right) xy +$

$+\left(\frac{a_{12}^2}{a^2} + \frac{a_{22}^2}{b^2}\right) y^2 + 2\left(\frac{a_1a_{11}}{a^2} + \frac{a_2a_{21}}{b^2}\right) x + 2\left(\frac{a_1a_{12}}{a^2} + \frac{a_2a_{22}}{b^2}\right) y +$

$+ \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{b^2} = 1$. Kuna saadud võrrand määrab sama ellipsi, siis võrrandite kordajad peavad olema võrdelised: $\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{21}^2}{b^2} = \lambda\frac{1}{a^2}$,

$\frac{a_{11}a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}a_{22}}{b^2} = 0$, $\frac{a_{12}^2}{a^2} + \frac{a_{22}^2}{b^2} = \lambda\frac{1}{b^2}$, $\frac{a_1a_{11}}{a^2} + \frac{a_2a_{21}}{b^2} = 0$,

$\frac{a_1a_{12}}{a^2} + \frac{a_1a_{12}}{b^2} = 0$, $\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{b^2} - 1 = -\lambda$. Neljandast ja viiendast võrrandist järeldub, et $a_1 = a_2 = 0$, kuna süsteem on homogeenne ja determinant erineb nullist

$$\begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{a^2} & \frac{a_{21}}{b^2} \\ \frac{a_{12}}{a^2} & \frac{a_{22}}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kuuendast seosest saame, et $\lambda = 1$. Nii otsitav teisendus omab kuju $x' = a_{11}x + a_{12}y$, $y' = a_{21}x + a_{22}y$ ja süsteem omab kuju $\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{21}^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}$, $\frac{a_{11}a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}a_{22}}{b^2} = 0$, $\frac{a_{12}^2}{a^2} + \frac{a_{22}^2}{b^2} = \frac{1}{b^2}$ ehk $a_{11}^2 + (\frac{a}{b}a_{21})^2 = 1$, $(\frac{b}{a}a_{12})^2 + a_{22}^2 = 1$, $a_{11}\frac{b}{a}a_{12} + \frac{a}{b}a_{21}a_{22} = 0$. Ilmneb, et maatriks $\begin{Vmatrix} a_{11} & \frac{a}{b}a_{21} \\ \frac{b}{a}a_{12} & a_{22} \end{Vmatrix}$ on ortogonaalmaatriks. Tähendab, võime võtta $a_{11} = \cos\varphi$, $\frac{a}{b}a_{21} = -\sin\varphi$, $\frac{b}{a}a_{12} = \sin\varphi$, $a_{22} = \cos\varphi$ või $a_{11} = \cos\varphi$,

$\frac{a}{b}a_{21} = \sin\varphi$, $\frac{b}{a}a_{12} = \sin\varphi$, $a_{22} = -\cos\varphi$. Seega otsitav teisendus on $x' = x\cos\varphi - \frac{b}{a}y\sin\varphi$, $y' = \frac{a}{b}x\sin\varphi + y\cos\varphi$ või $x' = x\cos\varphi + \frac{a}{b}y\sin\varphi$, $y' = \frac{b}{a}x\sin\varphi - y\cos\varphi$. Saadud teisendust võib vaadelda kui kolme teisenduse ϑ, ψ ja χ korrutist, kui

$$\vartheta: \begin{cases} x_1 = \frac{x}{a}, \\ y_1 = \frac{y}{b}, \end{cases} \quad \psi: \begin{cases} x_2 = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y_2 = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi, \end{cases} \chi: \begin{cases} x_3 = ax_2, \\ y_3 = by_2. \end{cases}$$

Teisendus ϑ teisendab antud ellipsi ringjooneks raadiusega 1, mille keskpunkt ühtib ellipsi tsentriga. Teisendus ψ on pööre nurga φ võrra ümber ringjoone tsentri (ringjoon teiseneb pööratud ringjoone lähteellipsiks. Teisendust $x' = \cos\varphi + \frac{a}{b}y\sin\varphi$ $y' = \frac{b}{a}x\sin\varphi - y\cos\varphi$ võib vaadelda kui nelja teisenduse korrutist.

$$\vartheta: \begin{cases} x_1 = \frac{x}{a}, \\ y_1 = \frac{y}{b}, \end{cases} \mu: \begin{cases} x_2 = x_1, \\ y_2 = -y_1, \end{cases} \psi: \begin{cases} x_3 = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi, \\ y_3 = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi, \end{cases}$$

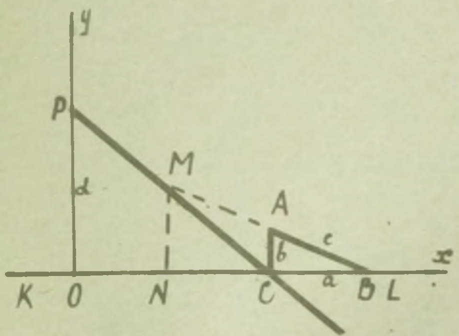
$$\chi: \begin{cases} x_4 = ax_3, \\ y_4 = by_3. \end{cases}$$

Teisendus ϑ teisendab antud ellipsi ühikringjooneks, mille keskpunkt ühtib antud ellipsi keskpunktiga. Teisendus μ on sümmeetria x-telje suhtes ja teisendab ringjoone S iseeneseks. Teisendus ψ on pööre nurga φ võrra ümber ringjoone keskpunkti ja teisendab ringjoone S iseeneseks. Teisendus χ teisendab ringjoone S antud ellipsiks. 11.254. Olgu $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_1$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + a_2$ otsitav afiinne teisendus. Kui hüperbooli kujutis on antud asümptootilise võrrandiga $x'y' = C$ (1), siis originaali invariantsuse tõttu saame hüperbooli, mille võrrandiks on $(a_{11}x + a_{12}y + a_1)\cdot(a_{21}x + a_{22}y + a_2) = 0$ ehk $a_{11}a_{21}x^2 + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})xy + (a_1a_{21} + a_2a_{11})x + (a_2a_{12} + a_1a_{22})y + a_1a_2 = 0$ (2). Kuna võrrandid (1) ja (2) määravad sama hüperbooli, siis võrrandi kordajad peavad olema võrdelised. Saame $a_{11}a_{21} = 0$, $a_{12}a_{22} = 0$, $a_1a_{21} + a_2a_{11} = 0$, $a_1a_{22} + a_2a_{21} = 0$, $a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} = \lambda$, $a_1a_2 - C = -\lambda C$. Kuna teisendus on regulaarne, siis $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ja saame, et $a_1 = a_2 = 0$. Järelikult $\lambda = 1$ ja viimane süsteem lihtsustub $a_{11}a_{21} = 0$, $a_{12}a_{22} = 0$, $a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} = 1$. Vaatame erinevaid võimalusi: a) $a_{21} = 0$, siis $a_{21}a_{22} = 0$, $a_{11}a_{22} = 1$, siit järeldub, et $a_{22} \neq 0$, tähendab $a_{12} = 0$. Võttes $a_{11} = k$, saame $a_{22} = \frac{1}{k}$ ja vaadeldud teisendus omab kuju $x' = kx$, $y' = \frac{1}{k}x$, kus k on suvaline nullist erinev reaalarv; b) olgu $a_{12} = 0$, siis $a_{11}a_{21} = 0$, $a_{11}a_{22} = 1$, kust $a_{11} \neq 0$. Tähendab $a_{21} = 0$ ja saame sama teisenduse; c) kui $a_{11} = 0$, siis $a_{12}a_{22} = 0$, $a_{12}a_{21} = 1$. Tähendab $a_{12} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$. Järelikult $a_{22} = 0$. Võttes $a_{12} = k$, saame $x' = ky$, $y' = \frac{1}{k}x$; d) $a_{22} = 0$ taandub juhule c). 11.255. Keskpunktide hulk koosneb sellise kolmnurga sisepunktidest, mille külgedeks on antud kolmnurga kesksirged, ja viimase kolmnurga nurkade tippnurkade sisepunktidest. 11.257. $S = \frac{\pi\Delta}{S\sqrt{S}}$. 11.258. Märkus. Olgu antud kõverate võrrandid = 0 ja $_1 = 0$. Siis otsitava koonuselõike leidmiseks saame kolm võrrandit: $\Phi - k\Phi_1 = 0$, $F - kF_1 = 0$, $(A - kA_1)(C - kC_1) - (B - kB_1)^2 = 0$. Otsitav koonuselõige eksisteerib, kui saadud süsteem on kooskõlaline. 11.259. $\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ x & y \end{vmatrix} = 0$. 11.260. $(x - x_0)F_x - (y - y_0)F_y = 0$. 11.261. $(x - x_0)F_x + (y - y_0)F_y = 0$. 11.262. $F_x\Phi_x + F_y\Phi_y = 0$. 11.263. Võrrand on

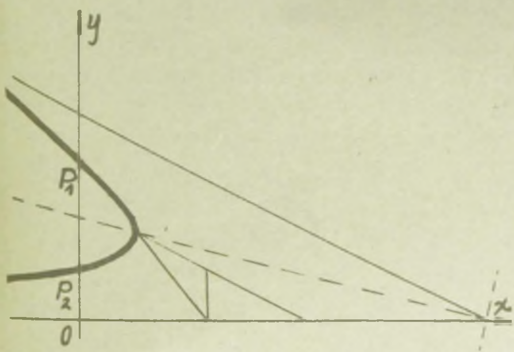
$$\begin{vmatrix} A_1(A_2x + B_2y + C_2) + A_2(A_1x + B_1y + C_1) & y - y_0 \\ B_1(A_2x + B_2y + C_2) + B_2(A_1x + B_1y + C_1) & -(x - x_0) \end{vmatrix} = 0 .$$

11.264. Teist järku joon. 11.265. Teist järku joon. 11.269. $xy - y_1x - x_1y = 0$, kus (x_1, y_1) on sirgete kimbu keskpunkt. Otsitav hulk on hüperbool, mille keskpunkt ühtib kimbu keskpunktiga ning asümptoodid on paralleelsed reeperi telgedega.

11.270. $ay^2 + bxy - a(b + d)y + abd = 0$. Märkus. Reeperi telgedeks võtame sirge KL ja punktist P sirgele KL joonestatud ristsirge. Tähistame punkti P kauguse sirgest KL tähega d. Otsitava võrrandi koostamiseks kasutame kaht paari sarnaseid kolmnurki, nimelt OPC ~ NMC ja ABC ~ MNB (joon. 11.16). Uurime. Otsitav kõver on hüperbool. Abstsisstelg on üheks asümptoodiks (joon. 11.17). Teine asümptoot on paralleelne liikuva kolmnurga hüpotenuusiga $k_2 = -\frac{b}{a}$. Hüperbool lõikab ordinaattelge kahes punktis P(0, d) ja P_1(0, b). Kõvera keskpunkti koordinaadid on $x_0 = \frac{a(b + d)}{b}$, $y = 0$. Hüperbooli kanooniline võrrand on $(c - a)x^2 - (c + a)y^2 - 2abd = 0$. Hüperbooli asümptootiline võrrand on $bxy = -acd$.

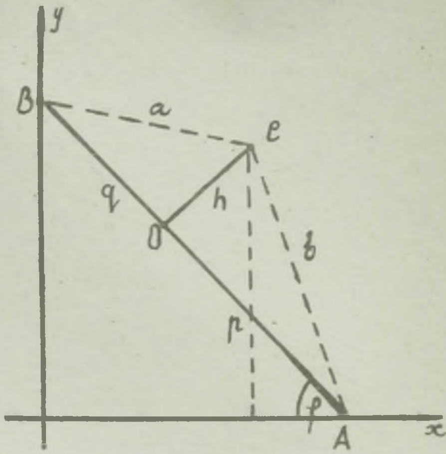


Joon. 11.16.



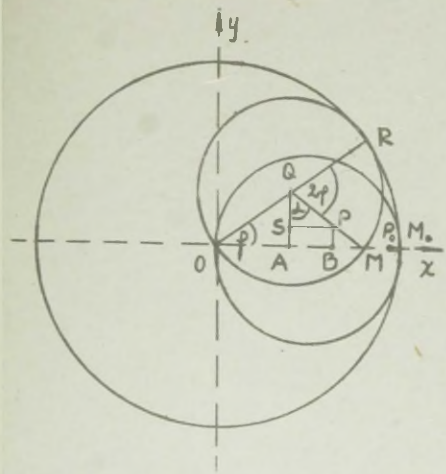
Joon. 11.17.

11.271. $b^2x^2 + a^2y^2 - 2ch \cdot xy = (pq - h^2)^2$. Märkus. Reeperi telgedeks valime liikumatu tasandi ristuvad sirged. Kõvera parameetriteks võivad olla punkti C ja sirge AB vaheline kaugus h ning ristsirge CD poolt sellel sirgel eraldatud lõigud p ja q (joon. 11.18). Otsitava trajektoori võrrand on $(p^2 + h^2)x^2 + (q^2 + h^2)y^2 - 2h(p + q)xy = (pq-h^2)^2$. Kui a, b ja c on kolmnurga ABC küljed, saame vastuses toodust tunduvalt lihtsama võrrandi. Uurime. Liikuva tasandi iga punkt C joonestab ellipsi, mille keskpunkt asetseb reeperi alguspunktis. Erandiks on ainult ringjoone, mille lõik AB on diameetriks, punktid. Need punktid paiknevad sirgete kimbu, tsentriga reeperi alguspunktis, sirgetel. Kui punkt C asetseb samal sirgel punktiga A ja B (h = 0, a = q, b = p), siis vastava ellipsi teljed ühtivad reeperi telgedega ning poolteljed on võrdsed liikuva punkti kaugustega põhipunktidest A ja B. Vaadeldavat tasandi liikumist nimetatakse elliptiliseks. 11.272. Pikem pooltelg on $\frac{c}{2} + m$ ja lühem $\frac{c}{2} - m$, kus m on punkti C kaugus lõigu AB keskpunktist. Lõigu AB keskpunkti läbival sirgel asetsevad punktid kirjeldavad ühtivate telgedega ellipsid. Punktid, mis asetsevad samal kaugusel lõigu AB keskpunktist, moodustavad vastavalt võrdsete pooltelgedega ellipsi. Märkus. Tasandi elliptilisel liikumisel punktid A' ja B' libisevad mööda sirgeid OA' ja OB' ja punkti C trajektoori võib vaadelda kui lõigu A'B', mille otspunktid libisevad mööda kaht ristsirget, mingi punkti trajektoori. 11.273. Kõik ringi punktid kirjeldavad ellipsid, välja arvatud veereva ringjoone punk-



Joon. 11.18.

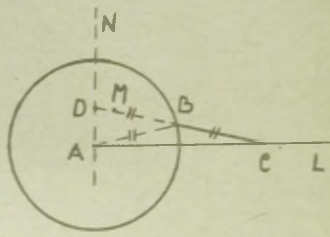
tid, mis libisevad liikumatu ringjoone diameetreid mööda. Märkus. Ülesandes kirjeldatud liikumine määrab antud tasandi elliptilise liikumise. Selles veendumiseks koostame tasandi suvalise punkti $P(x, y)$ liikumise trajektoori parameetrilised võrrandid. Valime ristreeperi alguspunktiks liikumatu ringjoone keskpunkti (vt. joon. 11.19) ja parameetriks pöördenurga $\varphi = QOP_0$, kus P_0 on punkti P algasend x-teljel. Kuna liikumine toimub ilma libisemata, siis $\overset{\frown}{M_0R} = \overset{\frown}{MR}$ ja liikumatu ringjoone raadius on kaks korda suurem veereva



Joon. 11.19.

ringjoone raadiusest, siis $\angle MQR = 2\varphi$. Kui $QP = \lambda r$, kus r on veereva ringjoone raadius, siis $x = OA + AB$, $y = r - SQ$. Kolmnurgast PQS leiame, et $AB = \lambda r \sin \alpha$, $SQ = \lambda r \cos \alpha$, $\alpha = \pi - 2\varphi - (\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Asendades saame punkti P liikumisel kirjeldatud ellipsi parameetrilised võrrandid: $x = r(1 + \lambda) \cos \varphi$, $y = r(1 - \lambda) \sin \varphi$. Erijuhul, kui punkt P on liikumatu ringjoone punkt $\lambda = 1$, $P = M$. 11.275. $b^2x^2 + a^2y^2 + abxy - 2ab^2x - 2a^2by + a^2b^2 = 0$, kui reeperi telgedeks on võetud CB ja CA. Otsitav kõver on ellips, mis puutub kolmnurga külgi CB ja AB tippudes B ja A. 11.276. Parabool $4x^2 - 8hy + (4h^2 - a^2) = 0$, kus a on kolmnurga alus ja h - kõrgus. Märkus. Ristreeperi abstsissteljeks on võetud sirge, mida mööda libiseb kolmnurga alus, ordinaattelg läbib liikumatut punkti. 11.277. Ellipsi kaar, mille keskpunkt asub punktis A ning üks telg on suunatud mööda sirget AL. Pooltelgede pikkused on MC ja $|MC - 2AB|$. Märkus. Osal vardast CD, mis asetseb liikumatu joonlaua AL ja sellega risti oleva sirge AN vahel, on jääv pikkus, mis on võrdne 2AB. Seega tasandi elliptiline liikumine leiab aset, kui jääva pikkusega lõigu BC üks ots libiseb mööda sirget ja teine mööda ringjoont, mille keskpunkt asetseb samal sirgel ja raadius on võrdne libiseva lõigu pikkusega (vt. joon. 11.20).

11.278. Lahendus. Kuna võrdhaarsetel kolmnurkadel AOC, ADC, ABC on ühine alus AC, siis kolm tippu O, D, B asetsevad samal sirgel. Edasi näeme, et $OD \cdot OB = l^2 - a^2 = \text{const.}$ kui punkti O aste ringjoone suhtes, mille keskpunkt on A ja raadius a. Punkt D kirjeldab ringjoone, mille keskpunkt on M ja raadius MD = b, mille võrrand polaarreeperis (võttes O pooluseks ja OM polaarteljeks) on $\rho = 2b \cos \varphi$. Punkti B trajektoor määratakse polaarreeperis järgmiselt: $\rho = \dfrac{l^2 - a^2}{2b \cos \varphi}$ (võrdusest $OB = \dfrac{l^2 - a^2}{OD}$) või ristreeperis, kuna $\rho \cos \varphi = x$. Saame $x = \dfrac{l^2 - a^2}{2b}$, s. o. abstsiss on jääv; vastav joon on sirge, mis on risti polaarteljega.



Joon. 11.20.

Sisukord