

ABHANDLUNGEN DES HERDER-INSTITUTS ZU RIGA

ERSTER BAND Nr. 5



RUDOLF MEYER

HALOERSCH EINUNGEN

THEORETISCHE BEITRÄGE ZUR
METEOROLOGISCHEN OPTIK

VERLAG DER BUCHHANDLUNG G. LÖFFLER

R I G A . 1 9 2 5



Haloerscheinungen

Theoretische Beiträge
zur meteorologischen Optik

von

Rudolf Meyer

Die zahlreichen neuen Arbeiten über Haloerscheinungen veranlassen mich, eine Untersuchung fortzusetzen, die ich vor 12 Jahren zu einem gewissen Abschluss gebracht hatte, ohne sie den Fachleuten in Mittel- und Westeuropa zugänglich zu machen*). Der letztgenannte Umstand macht es vielfach notwendig, hier auch auf den Inhalt der früheren Arbeit einzugehen.

I. Statistisches.

1. Ein wenig benutztes Hilfsmittel zur Untersuchung der Entstehungsbedingungen einer bestimmten Haloerscheinung ist die Statistik der beobachteten Kombinationen dieser Erscheinung mit anderen.

Schon H u y g h e n s (66) schliesst aus dem gleichzeitigen Auftreten verschiedener Haloerscheinungen auf eine Ähnlichkeit ihrer Entstehungsursachen. In der Tat werden offenbar solche Erscheinungen, die häufig gleichzeitig beobachtet werden, auf gleiche oder ähnliche Ursachen zurückgeführt werden müssen; solche aber, die nie oder selten zugleich sichtbar sind, werden unter Bedingungen entstehen, die sich gegenseitig ausschliessen oder mindestens voneinander unabhängig sind. Darum muss es auch als Irrtum bezeichnet werden, wenn einige Forscher meinten, aus einer Zusammenstellung aller Haloerscheinungen, auch solcher, die nie gleichzeitig beobachtet wurden, ihre „wahre Ursache“ ermitteln zu können (51, 121).

Einige schon früher veröffentlichte statistische Zusammenstellungen der Häufigkeit von verschiedenen Kombinationen von Haloerscheinungen werden im weiteren erwähnt und als Vergleichsmaterial herangezogen werden.

*) Die Arbeit wurde als Magisterdissertation vorschriftsmässig in russischer Sprache veröffentlicht (die Promotion fand an der damals russischen Universität Warschau statt), und war deshalb nur wenigen Interessenten verständlich (88; die in Klammern gestellten Zahlen beziehen sich auf den Literaturnachweis am Ende des Aufsatzes).

Einen erfreulichen Anstoss zur Fortsetzung der Arbeiten auf diesem Gebiet hat A. Wegener (150) durch die Prägung der Ausdrücke „verschwisterte“ und „vergesellschaftete“ Halos gegeben. Wenn ich im folgenden an Stelle des ersten Ausdrucks „verwandt“ setze, so geschieht das einerseits, weil sich dann leichter ein entsprechendes Hauptwort bilden lässt, andererseits, weil die von Wegener vorgeschlagene Definition der verschwisterten Halos als Halos, die von ein und derselben Kristallform erzeugt werden, nicht glücklich ist. Wegener sieht sich selbst wenige Zeilen später veranlasst, von dieser Definition abzuweichen, indem er die Ringe von 22° Halbmesser und die dazu gehörigen Nebensonnen nicht als verschwistert, sondern nur als vergesellschaftet bezeichnet, obgleich beide in Kristallen von der gleichen Form entstehen können; bloss die Fallstellung der Kristalle muss eine verschiedenartige sein. Auch die von Wegener aufgestellte Forderung gleicher Lichtstärke für verschwisterte Halos kann aus mehr als einem Grunde nicht aufrechterhalten werden, und wird tatsächlich auch von ihm selbst gleich bei der ersten Anwendung der neuen Bezeichnung auf eine Haloerscheinung stark eingeschränkt.

Im folgenden soll das Problem von der empirischen Seite angefasst werden, und darum solche Erscheinungen als verwandt bezeichnet werden, die häufig gleichzeitig zu beobachten sind. Je nach der Häufigkeit des gleichzeitigen Erscheinens kann ein mehr oder weniger enger Grad der Verwandtschaft unterschieden werden. Zwei Halos werden um so näher verwandt sein, je gleichartiger die Bedingungen sind, unter denen sie entstehen, wobei unter den Bedingungen ausser der Form noch vieles andere zu verstehen ist, z. B. Grösse und Fallstellung der Kristalle, sowie die Dichte der Wolke und die Höhe der Sonne oder des Mondes.

Es bedeute $N(x)$ die Anzahl der Fälle, wo ein bestimmter Halo x allein oder in Verbindung mit anderen beobachtet wurde, $N(xo)$ — die Zahl der Fälle isolierten Auftretens dieses Halos und $N(xy)$ — die Zahl der Fälle, wo x in Verbindung mit einem bestimmten zweiten Halo y (und daneben vielleicht auch noch anderen) beobachtet wurde.

Das Verhältnis $N(xo) : N(x)$ gibt ein Mass der Selbstständigkeit der Erscheinung, das Verhältnis $N(xy) : (N(x)$

ein Mass ihrer Abhängigkeit von der Erscheinung y . Die Abhängigkeit der Erscheinung x von y wird im allgemeinen nicht gleich der Abhängigkeit der Erscheinung y von x sein.

Wenn wir den Grad der Verwandtschaft in Anlehnung an Wegener als eine kommutative Grösse definieren wollen, die nicht davon abhängig ist, ob wir das eine Element in seiner Beziehung zum anderen betrachten, oder umgekehrt, das andere Element in seiner Beziehung zum ersten, so bietet sich als geeignetes Mass der Ausdruck $N(xy)^2 / N(x) N(y)$.

Abhängigkeit und Verwandtschaft in dieser Auffassung geben ein keineswegs ideales Prinzip der Zuordnung einzelner Haloerscheinungen zueinander; es ist aber wohl das einzige praktisch brauchbare Prinzip, während Wegeners vom theoretischen Standpunkt sehr berechtigter Vorschlag bei unserer noch immer sehr mangelhaften Kenntnis der Haloerscheinungen kaum eine Anwendung finden dürfte.

2. Als kurze und übersichtliche Bezeichnung der verschiedenen Haloerscheinungen empfehlen sich Ziffern und Buchstaben, wobei zur Nachhilfe für das Gedächtnis auf die Art der Entstehung der Erscheinung nach dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis Rücksicht genommen werden kann. In der Spalte I auf folgender Seite stehen die Erscheinungen, deren Entstehen an das Vorhandensein von Kristallen in der Gleichgewichtslage gebunden ist; in der Spalte II stehen die, welche Pendelungen um die Gleichgewichtslage zur notwendigen Voraussetzung haben; schliesslich in der Spalte III — die in regellos liegenden Kristallen entstehenden Ringe. A bedeutet eine Brechung des Lichts in einem optischen Prisma von 60° , B — in einem Prisma von 90° , C — eine Brechung mit zweifacher totaler innerer Reflexion, D — eine Spiegelung an den Grundflächen und E — eine solche an den Seitenflächen des sechseckigen Prismas; mit F sind Erscheinungen bezeichnet, deren Erklärung noch recht unsicher ist. Ein kleines a bedeutet, dass die Hauptachse senkrecht oder fast senkrecht steht, und ein kleines b bedeutet eine horizontale oder fast horizontale Lage der Hauptachse. Dabei sind die senkrechten Lichtsäulen aufgefasst als Spiegelungen an den nahezu horizontalen Endflächen der

Kristalle der Gruppe a, da sich gegen die neue Theorie von Stuchtey (136), wie weiter ausgeführt werden wird (Abschn. III), gewichtige Einwände machen lassen.

	I	II	III
A.			
a)	Nebensonnen in 22° Entfernung	Seitliche Berührungsbögen zum gew. Halo	} Gewöhnlicher Halo von 22°
b)	Umschriebener Halo; oberer und unterer Berührungsbogen zum gew. Halo und Parrys Bogen		
B.			
a)	Zirkumzenithal- und Zirkumhorizontalkreis in 46° Entfernung	Oberer und unterer Berührungsbogen zum Halo von 46°	} Grosser Halo von 46°
b ₁)	Nebensonnen in 46° Entfernung		
b ₂)	Seitliche untere Berührungsbögen zum Halo von 46°		
C.			
a)	Nebensonnen in 90° Entfernung		Hevels Halo von 90°
D.			
a)	Spiegelbild (Unter-sonne)	Senkrechte Säule	
E.			
a)	Horizontalkreis		
F.			
a)	Nebengegensonnen in 120° Entfernung		
b)	Gegensonne	Schiefe Bögen der Gegensonne	Bouguers Halo

Die obige Liste verschiedener Haloerscheinungen liesse sich leicht durch eine Reihe von seltenen Erscheinungen vervollständigen; doch hätte das hier nicht viel Wert, da nicht

nur die geringe Zahl der Beobachtungen gegen eine statistische Bearbeitung spricht, sondern auch verschiedene Erscheinungen schwer auseinanderzuhalten sind. In gewissem Masse kann dieser Einwand auch gegen einige der oben genannten Halos geltend gemacht werden.

Unter Nebensonne, Nebengegensonne und Gegensonne sind natürlich auch die entsprechenden Erscheinungen zu verstehen, wenn sie durch den Mond erzeugt wurden.

Ein reichhaltiges Material zur Statistik geben die „*On w e d e r s, optische verschijnselen enz. in Nederland*“. Benutzt wurden die Jahrgänge 1891—1907, die mir vor bald 15 Jahren in liebenswürdigster Weise von Herrn Prof. Dr. C. S c h o u t e zugesandt wurden. In den genannten 17 Jahrgängen sind von den 10420 eingelaufenen Berichten über Haloerscheinungen nur 471 so vollständig abgedruckt worden, dass sie für die Zwecke einer Statistik verschiedener Kombinationen verwertbar waren. Da zumeist seltenere und schönere Erscheinungen genau beschrieben worden sind, die gewöhnlichen aber beiseite gelassen worden sind, ist die Zusammenstellung mit einem systematischen Fehler behaftet.

Vermutlich macht sich dieser Fehler in etwas geringerem Masse in einer zweiten Zusammenstellung von Beobachtungen geltend, die aus den verschiedensten Quellen, aus Büchern, Zeitschriften, z. T. aus meinen eigenen Beobachtungsheften zusammengetragen worden sind; in ihr sind vor allem die Beobachtungsreihen von G a l l e (56) in Berlin (1836—1839), vom Observatorium auf dem B e n N e v i s (93) und von der Antarktischen Expedition der B e l g i c a (11) enthalten. Nahezu die Hälfte der gesammelten Beobachtungen musste wegen ungenauer Angaben beiseite gelassen werden, nur 688 waren für unsere Zwecke zu verwenden.

In der folgenden kleinen Tabelle, in der die Häufigkeit der einzelnen Haloerscheinungen angegeben ist, bedeutet N die Reihe der Niederländischen Beobachtungen und V die zweite Reihe von Beobachtungen, von verschiedenen Personen und Organisationen herstammend.

	N	V		N	V		N	V
IAa	162	217	ICa	—	5	IIDa	88	140
IAb	222	139	IDa	—	5	IIFb	2	8
IBa	112	62	IEa	41	98	IIIA	304	448
IIBa			IFa	1	21	IIIB	75	63
IBb ₁	—	14	IFb	4	12	IIIC	—	2
IBb ₂	2	11	IIAa	—	5	IIIF	—	41

1013 1291

Der Parallelismus in beiden Reihen ist keineswegs vollständig. So treten z. B. in der Reihe N die Erscheinungen IAb und IBa sehr stark hervor, weil ihnen in den „Onweders“ eine besondere Aufmerksamkeit zugewandt wird. Aus den Angaben über die Lichtsäulen (IIDa) und den gewöhnlichen Ring (IIIA) ist selten zu entnehmen, ob sie nicht in Verbindung mit anderen Erscheinungen beobachtet wurden; in Fällen einer solchen Ungewissheit wurden die Beobachtungen nicht in die Statistik aufgenommen.

Zu dieser Übersicht von 17 Halos ist noch folgendes zu bemerken: Die Erscheinungen IBa und IIBa, die vielleicht beide vorkommen, aber jedenfalls schwer voneinander zu unterscheiden sind, wurden unter einer Bezeichnung IBa zusammengefasst; als Spiegelbild der Sonne wurde nur die Untersonne berücksichtigt, weil die vielen Beobachtungen von doppelten Sonnen oder Monden nahe am Horizont immer die Erklärung durch eine abnorme Strahlenbrechung zulassen; zur Entscheidung der Frage, ob ein heller Kreis um den Gegenpunkt der Sonne als Halo oder als weisser Regenbogen zu gelten hat, benutzte ich das von Pernter (95) aufgestellte Kriterium. In Fällen sehr ausgesprochener Änderungen eines Systems gleichzeitig beobachteter Halos wurden die einzelnen Phasen als getrennte Erscheinungen betrachtet; eine allmähliche Entwicklung aber oder ein allmähliches Verblassen, wobei die lichtschwächeren Elemente zuerst verschwanden, wurde nicht berücksichtigt. Beobachtungen über irdischen Lichtquellen*) oder in Eiskristallen, die auf dem Boden lagen, wurden ausgeschlossen (52, 74, 78, 82, 122, 157, 164).

*) Solche Erscheinungen sind bei tiefen Temperaturen nicht sehr selten. Die Meteorologische Optik von Pernter·Exner erwähnt sie erst in der 2. Auflage (Beobachtungen von senkrechten Säulen über den Lichtern von

3. Unterscheidet man 17 verschiedene Halos, so kann man sich 260474 verschiedene Kombinationen von ihnen denken. Unter den hier behandelten 1159 Erscheinungen finden wir nur 108 solcher Kombinationen, von denen einige sehr häufig sind, so dass die Elemente dieser Kombinationen als nahe verwandt bezeichnet werden müssen.

Wenn man die Beziehungen je zweier Halos zueinander untersucht, so findet man, dass von den möglichen 136 Kombinationen nur 98, d. h. 72% vertreten sind. Als Ergebnis der Untersuchung sind in der Tabelle 1 die Masszahlen der Selbständigkeit und der Abhängigkeit zweier Erscheinungen voneinander in Prozenten angegeben.

Acht von den untersuchten Haloerscheinungen sind nicht ohne andere Begleiterscheinungen beobachtet worden. Das Mass der Selbständigkeit der übrigen in absteigender Reihenfolge ist:

IIIF	98	IIIA	37	IBa	14
IDa	80	IAa	19	IFb	12
IIDa	61	IAb	16	IIIB	4

Die sehr grosse Zahl für IIIF (den Bouguerschen Halo) ist wohl zum Teil durch seine Lage am Himmel, weit von den meisten anderen hellen Flecken und Bögen, zu erklären. Die auffallende Höhe der Zahl legt es aber zum mindesten sehr nahe, anzunehmen, dass das von Pernter (95) vorge-

Kasan in Russland durch H. v. Ficker (107). Am 12. Februar 1906 und am 14. Januar 1907 habe ich dieselbe Erscheinung in und bei Dorpat beobachtet (86) und A. Richter (120) sah sie in Riga am 3. April 1907. Galle (6c) berichtet über eine ähnliche Säule über einem Brande und erwähnt eine ebensolche Beobachtung von Bessel. In der russischen Meteorologischen Zeitschrift sind mehrfach solche Lichtsäulen beschrieben worden (2).

Die Erklärung der Lichtsäulen über irdischen Lichtquellen ist nicht genau die gleiche wie die Erklärung der Säulen über Sonne und Mond, da im ersten Fall die Strahlen, die von der Lichtquelle ausgehen, nicht als parallel gelten können. Doch habe ich das eine Mal gleichzeitig mit den Lichtsäulen über den Strassenlaternen eine über dem Monde gesehen.

Andere Haloerscheinungen sind an irdischen Lichtquellen kaum beobachtet worden, was wohl dadurch zu erklären ist, dass die meisten von ihnen nur durch parallele Strahlen erzeugt werden können; die Ringe (von 22?), die Arctowski (12) im Licht einer Laterne beobachtete, entstanden in dem durch eine Linse parallel gemachten Strahlenbündel.

T a b e l l e I.

$\begin{matrix} \diagup \\ y \\ \diagdown \end{matrix}$	IAa	IAb	IBa	IBb ₁	IBb ₂	ICa	IDa	IEa	IFa	IFb	IIAa	IIDa	IFb	IIA	IIb	IIc	IIF	N(x)
IAa	19	38	31	3	3	2	—	27	5	3	1	10	2	71	24	1	0	378
IAb	41	16	29	2	2	1	—	17	4	20	1	8	2	79	24	1	—	361
IBa	67	41	14	5	1	2	—	16	5	3	2	5	2	76	39	1	1	173
IBb ₁	79	50	64	—	—	—	—	64	29	—	—	43	—	93	86	—	—	14
IBb ₂	92	66	8	—	—	8	—	92	66	33	25	—	33	92	42	—	—	12
ICa	100	83	67	—	17	—	—	100	17	67	33	—	17	100	67	33	—	6
IDa	—	—	—	—	—	—	80	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20	5
IEa	73	45	18	6	8	4	—	—	15	10	3	29	7	84	27	1	—	139
IFa	82	73	41	18	36	5	—	95	—	18	14	9	14	96	50	—	—	22
IFb	62	62	31	—	25	25	—	88	25	12	25	12	50	81	62	6	—	16
IIAa	100	60	60	—	60	40	—	80	60	80	—	20	60	80	60	—	—	5
IIDa	17	12	4	3	—	—	—	18	1	1	0	61	—	26	5	—	—	228
IFb	60	60	30	—	40	10	—	100	30	30	30	—	—	90	70	—	—	10
IIA	36	38	17	2	1	1	—	16	3	2	1	8	1	37	16	0	—	751
IIb	64	63	49	9	4	3	—	28	8	7	2	8	5	87	4	1	—	138
IIc	100	100	100	—	—	100	—	100	—	50	—	—	—	100	100	—	—	2
IIF	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98	40

schlagene Temperatur-Kriterium zur Unterscheidung von Halos und Regenbogen ungenügend ist, indem auch bei tiefen Temperaturen Wassertropfen in der Luft schweben können;

diese Auffassung findet eine wesentliche Stütze in den neuen Untersuchungen von Hilding Köhler (75). Für IDa (das Spiegelbild der Sonne) müsste ein bedeutend kleineres Mass der Selbständigkeit gefunden werden, wenn die Erscheinungen in der Nähe des Horizontes mitgezählt werden könnten; in diesen Fällen tritt als begleitende Erscheinung häufig IIDA (die Lichtsäule) auf. Diese letzte Erscheinung und IIIA (Säule und gewöhnlicher Halo) werden in einer Statistik, die allen Erscheinungen das gleiche Mass von Aufmerksamkeit zuwendet, viel selbständiger hervortreten. Schon Brandes (30) betont die grosse Selbständigkeit der Vertikalsäulen im Vergleich zum Horizontalkreis, der, wie es scheint, nie allein beobachtet wurde. Besson (21) findet, dass der Zirkumzenithalkreis IBa häufiger allein auftritt, als das unserer Statistik entspricht, nämlich in 23 Fällen auf 100.

Es kann sehr wohl geschehen, dass ein Halo nur dann auftritt, wenn ein bestimmter zweiter Halo auch da ist, während dieser auch unabhängig vom ersten auftreten kann. So sind die schiefen Bögen der Gegen Sonne IIFb in allen Fällen, wo sie sich sicher als solche nachweisen liessen, zugleich mit dem Horizontalkreis IEa aufgetreten (Mass der Abhängigkeit 100), während der Horizontalkreis nur in 7% aller Fälle von den schiefen Bögen begleitet wurde. Offenbar verlangen die letzten ausser den allgemeinen Bedingungen, unter denen der Horizontalkreis entsteht, noch weitere besondere Verhältnisse.

Ganz allgemein muss betont werden, dass neben den Mängeln dieser Statistik, die durch das Fehlen einer einheitlichen, genügend umfangreichen Beobachtungsreihe bedingt werden, noch weitere unvermeidliche Fehler dadurch zustandekommen, dass die einzelnen Elemente der zusammengesetzten Haloerscheinungen eine verschiedene Lage am Himmelsgewölbe haben, so dass sie bei ungleichmässiger Bewölkung verschiedenen Bedingungen unterliegen. Wohl sind nicht selten auf einem weiten Gebiet gleichartige Haloerscheinungen beobachtet worden: offenbar besass die Wolkendecke auf Entfernungen bis zu Hunderten von Kilometern einen gleichartigen Bau*). Aber viel öfter ist das Gegenteil

*) Einige Fälle der Art beschreibt Kämtz (70). Doch ist nicht immer die Wolkendecke allein massgebend für das Auftreten zahlreicher Halo-

beobachtet worden. Man findet in den „Onweders“ 1894–1907 neben 259 Mitteilungen über das Auftreten der beiden gewöhnlichen Nebensonnen nicht weniger als 371 Berichte über das Erscheinen nur einer Nebensonne. Solche Tatsachen scheinen jeden Versuch einer Statistik zur Ermittlung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Haloerscheinungen von vornherein zur Erfolglosigkeit zu verurteilen. Die Erfahrung zeigt aber, dass die Lage der Dinge doch nicht ganz so schlimm ist; oben sind ja schon einige, auf dem Wege der Statistik gefundene Beziehungen erwähnt worden. Doch wird der Wert der Häufigkeitszahlen durch die vielfache Ungleichmässigkeit der Bewölkung stark beeinträchtigt, indem die Verteilung einer rein zufälligen nähergebracht wird: ein sehr grosses Mass der Abhängigkeit oder der Selbständigkeit wird verringert erscheinen, ein sehr kleines Mass dagegen — vergrössert. So werden z. B. die beiden Fälle, wo IFb ganz isoliert auftrat, nur durch ungleiche Beschaffenheit der Wolken am Himmelsgewölbe zu erklären sein (147).

Diese Beeinflussung der Masszahlen ist natürlich von der Entfernung der Haloerscheinungen voneinander und von der Grösse der Fläche, die sie am Himmelsgewölbe einnehmen, abhängig. Ob eine rechnerische Berücksichtigung dieser Umstände durchführbar ist, und ob der Erfolg die dabei aufgewandte Arbeit rechtfertigen kann, scheint fraglich.

4. In Bezug auf die folgende Tabelle II, auf der das Mass der Verwandtschaft der Haloerscheinungen in dem oben bezeichneten Sinne in Prozenten angegeben ist, lässt sich ziemlich dasselbe sagen, wie in Bezug auf die Tabelle I.

Im allgemeinen wird das Mass der Abhängigkeit eines Halo von einem anderen die Entstehungsbedingungen der Erscheinungen besser beurteilen lassen als das Mass der Verwandtschaft.

5. Ia. Dass die gewöhnlichen Nebensonnen im 71% aller Fälle von dem gewöhnlichen Ring IIIA begleitet sind, beweist, dass in der Mehrzahl der Fälle nur ein Teil der vor-

erscheinungen auf ausgedehntem Gebiet. Sresnewsky (134) konnte nachweisen, dass in den Tagen kurz vor dem Vollmond dank den günstigen Beobachtungsbedingungen in den Abendstunden besonders viel Haloerscheinungen verzeichnet werden.

T a b e l l e II.

	IAa	IAb	IBa	IBb ₁	IBb ₂	ICa	IDa	IEa	IFa	IFb	IIAa	IIDa	IIFb	IIIA	IIIB	IIIC	IIIF	
IAa	100																	
IAb	16	100																
IBa	21	9	100															
IBb ₁	2	1	4	100														
IBb ₂	3	2	0		100													
ICa	2	1	2			1	100											
IDa								100										
IEa	19	8	3	4	7	4			100									
IFa	4	3	2	5	24	1			14	100								
IFb	2	2	1		8	17			9	4	100							
IIAa	1	0	1		15	13			2	8	20	100						
IIDa	2	1	0	1					5	0	0	0	100					
IIFb	1	1	0		13	2			7	4	40	18		100				
IIIA	26	30	13	2	1	1			13	3	1	0	2	1	100			
IIIB	15	15	19	1	2	2			8	4	4	1	0	1	14	100		
IIIC	0	1	1			33			1		3				0	2	100	
IIIF								0										100

handenen Kristalle eine mehr oder weniger bestimmte Fallstellung einnimmt, ein anderer Teil aber in seiner Stellung beträchtlich davon abweicht. Das Mass der Verwandtschaft zu IIIA ist sogar grösser als zum Zirkumzenithalkreis IBA, der doch die gleiche vertikale oder fast vertikale Stellung der

Hauptachse zur Voraussetzung hat. Nach den jährlich in den „Onw eders“ mitgeteilten Daten werden Nebensonnen (eine oder beide) in 60% aller Fälle von dem gewöhnlichen Ring begleitet. Bemerkenswert ist es auch, dass die Nebensonnen recht häufig gleichzeitig mit dem umschriebenen Halo IAb auftreten, nämlich in 38% aller Fälle, während die Abhängigkeit von IBa nur 31% beträgt; dabei verlangt IAb eine horizontale Stellung der Hauptachsen. Man wird wohl die gleichzeitige Anwesenheit zweier verschiedener Kristallformen annehmen müssen (150), im allgemeinen aber ist es deutlich zu erkennen, dass IAa viel häufiger mit den Halos der Gruppe a als mit denen der Gruppe b auftritt.

IAb. Auch der umschriebene Halo mit seinen Abänderungen tritt in den meisten Fällen (79%) mit IIIA gemeinsam auf; und in 41% aller Fälle wird er von IAa begleitet. Man kann aus diesen Zahlen die Schlussfolgerung ziehen, dass die horizontale Fallstellung der Kristalle weniger stabil ist als die vertikale. Nach den „Onw eders“ 1901—1907 kommt der obere Berührungsbogen, d. h. die Form, in der IAb am häufigsten beobachtet wird, in 15% aller Fälle isoliert vor, in 64% mit dem gewöhnlichen Ring, in 20% mit dem gewöhnlichen Ring und einer oder beiden Nebensonnen, in 1% mit einer oder beiden Nebensonnen. Die Zahlen stimmen gut mit unseren Ergebnissen überein, nur ist die Abhängigkeit von IAa nach den „Onw eders“ gleich 21%, nach unserer Statistik aber 41%; die Differenz wird wohl am ehesten dadurch zu erklären sein, dass in den Niederlanden auf den oberen Berührungsbogen besonders achtgegeben worden ist, und dass Erscheinungen als diese Bögen erkannt worden sind, die man andrerorts als oberen Teil des gewöhnlichen Ringes angesehen hat.

IBa. Der Zirkumzenithalkreis (und der Zirkumhorizontalkreis) zeigt eine etwas grössere Abhängigkeit von IIIA (76%) als von IAa (67%), obgleich ihn die gleiche Orientierung mit der zweiten Erscheinung verknüpft. Wie in vielen ähnlichen Fällen liegt die Erklärung wohl darin, dass IIIA überhaupt sehr häufig ist, IAa aber viel seltener; der Beweis dafür liegt in den Zahlen, die die Verwandtschaft ausdrücken: 13% für die Verwandtschaft mit IIIA und 21% für die mit IAa. Die Bedingungen, unter denen IBa entsteht, müssen überhaupt etwas

andere sein, als die, welche der Brechung des Lichtes in Prismenwinkeln von 60° günstig sind; das zeigt die grosse Masszahl der Abhängigkeit von IIIB und vor allem die grosse Masszahl der Verwandtschaft zwischen beiden Erscheinungen.

Nach den „Onweders“ 1901—1907 kam IBA in 30 % aller Fälle isoliert vor, in 19 % mit dem gewöhnlichen Ring, in 39 % mit dem gewöhnlichen Ring und einer oder beiden Nebensonnen, in 11 % mit einer oder beiden Nebensonnen; hiernach wäre das Mass der Selbständigkeit grösser als nach unserer Rechnung, das der Abhängigkeit von IIIA und IA aber kleiner. Auch Besson (21) fand nur in 51 % aller Fälle gleichzeitig oder fast gleichzeitig mit IBA die gewöhnlichen Nebensonnen; und noch viel auffallender ist es, dass er nur in 2 Fällen von 124 zugleich mit IBA auch IIIB beobachten konnte.

Das häufige Zusammengehen von Erscheinungen, die eine horizontale Lage der Hauptachse verlangen, mit denen, die nur bei vertikaler Lage der Hauptachse entstehen können, spricht sich in der grossen Abhängigkeit der Erscheinung IBA von IAB aus (41 %).

IBb₁. Die Nebensonnen des grossen Ringes zeigen eine auffällige Abhängigkeit von IIIA (93 %), von IAa (79 %), von IBA (64 %) und von IEa (64 %). Das kann als Stütze der Meinung gelten, dass diese Nebensonnen sekundäre Erscheinungen sind: Nebensonnen der Nebensonnen IAa. Doch treten sie längst nicht immer gemeinsam mit diesen auf und zeigen auch ein grosses Mass der Abhängigkeit von IAB (50 %) und von IIIB (86 %); das erste bedeutet, das beim Auftreten der Nebensonnen IBb₁ eine horizontale Lage der Kristallachsen oft auch durch eine zweite Erscheinung nachgewiesen werden kann, das zweite beweist, dass in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle die Kristallgestalt einer Brechung des Lichtes in Prismenwinkeln von 90° günstig war. Immerhin soll die Möglichkeit nicht ausser acht gelassen werden, dass die Nebensonnen in annähernd 46° von der Sonne vielleicht auf zwei verschiedene Arten entstehen können*).

*) Exner (104) hält im Anschluss an A. Wegener (152) die Entstehung sekundärer Haloerscheinungen für äusserst unwahrscheinlich

IBb₂. Die seitlichen Berührungsbögen des grossen Ringes zeigen im allgemeinen ein ebenso häufiges Zusammentreffen mit den Erscheinungen der Gruppe III und a wie IBb₁. Da für IBb₂ aber ausschliesslich die Erklärung auf der Grundlage horizontaler Kristallachsen angenommen wird, verfährt man nur folgerichtig, wenn man die Erklärung der oben besprochenen Nebensonnen auf dieser selben Grundlage aufbaut, es sei denn, dass sichere Beobachtungstatsachen dazu zwingen, die zweite erwähnte Entstehungsmöglichkeit ernstlicher in Betracht zu ziehen.

ICa. Die Nebensonnen von 90° sind nie anders als in Begleitung von IAa, IEa und IIIA beobachtet worden. Recht häufig wurde gleichzeitig IAb, IFb und IIIB beobachtet. Aber die Gesamtzahl der Beobachtungen ist gering.

IDa und **IIDa** besitzen beide eine grosse Masszahl der Selbständigkeit, was schon oben z. T. durch die Mängel der Statistik erklärt wurde. Das Spiegelbild und die senkrechte Säule kann aber auch aus dem Grunde eine so geringe Abhängigkeit von anderen Haloerscheinungen zeigen, weil die beiden Erscheinungen in Plättchen und in Plättchensternen entstehen können, welche im allgemeinen wohl wenig geeignet sind, andere Erscheinungen hervorzurufen.

IEa. Der Horizontalkreis zeigt nahe Beziehungen zu IAa und IIIA, aber auch zu IAb. Die Abhängigkeit von IAa ist bei uns gleich 73 %, während nach Brandes (30) der Horizontalkreis „nie allein, sondern immer mit ein oder zwei Nebensonnen in Verbindung, gewöhnlich auch noch mit mehreren Kreisen zugleich vorzukommen pflegt“.

wegen der Lichtschwäche. Leider gibt es bis heute kaum eine Messung der Helligkeitsverteilung am Himmel bei Haloerscheinungen (47); und eine zur Lösung dieser Frage geeignete theoretische Berechnung ist selbst bei Chr. Wiener (158) nicht zu finden. Im Abschnitt III dieses Aufsatzes wird eine derartige Berechnung versucht. Es sei hier auch darauf hingewiesen, dass Exner selbst in bezug auf eine besondere Erscheinung sagt: „Es scheint mir aber einfacher anzunehmen, dass intensive Nebensonnen durch Spiegelung“ in annähernd horizontalen Kristallflächen „ebenso Lichtsäulen erzeugen können“, womit die Möglichkeit einer sekundären Haloerscheinung wieder zugegeben wird (108). Auch in bezug auf die gewöhnlichen Lichtsäulen lehnt er die Möglichkeit mehrfacher Spiegelungen nicht ab (106).

Ifa. Die Nebengegensonnen zeigen eine grosse Abhängigkeit von IAa und IEa, was auf eine vertikale Hauptachse der erzeugenden Kristalle hinweist. Doch ist auch die Abhängigkeit von IIIA und von IAb auffallend gross. Dass die Abhängigkeit vom Horizontalkreis so gross ist, umgekehrt aber die Abhängigkeit dieses Kreises von den Nebengegensonnen so gering, kommt wohl daher, dass man von dem Kreise oft nur ein begrenztes Stück, weit von den Punkten, wo die Nebengegensonnen entstehen könnten, sieht; z. T mag es wohl auch durch die Lichtschwäche der Nebengegensonnen zu erklären sein. Da es vermutlich mehrere Arten von Nebengegensonnen gibt, und die Zahl der Beobachtungen recht gering ist, lassen sich sichere Folgerungen nicht ziehen.

Ifb. Die Gegensonne steht, wie es nach der Theorie anzunehmen ist, wirklich in ziemlich engen Beziehungen zu anderen Erscheinungen, die in Kristallen mit horizontaler Achse entstehen. Doch tritt auch hier eine grosse Abhängigkeit von IAa, IEa, IIIA und IIIB auf.

IIDa. Über das Mass der Selbständigkeit der senkrechten Lichtsäulen ist schon oben unter IDa einiges gesagt worden. Vergleicht man die Abhängigkeit von den anderen Haloerscheinungen der Gruppe a mit der Abhängigkeit von den Erscheinungen der Gruppe b, so findet man, dass die erste deutlicher ausgesprochen ist. Die Tabelle der Verwandtschaften zeigt dasselbe.

Hiermit soll die Diskussion der Beziehungen der einzelnen Erscheinungen untereinander abgeschlossen werden, obgleich noch manche interessante Andeutung daraus entnommen werden könnte.

6. Es wäre auch nicht ohne Interesse die statistischen Berechnungen noch bedeutend auszubauen, indem man die Abhängigkeit einer Kombination zweier Elemente von einem dritten untersucht usw. Hier muss darauf verzichtet werden; doch sei darauf hingewiesen, dass manche Kombinationen auffallend oft vorkommen: IAa + IAb + IIIA 132 mal, IAa + IBa + IIIA 102 mal, IAa + IEa + IIIA 83 mal, IAa + IIIA + IIIB 81 mal, IAb + IIIA + IIIB 80 mal, IAb + IBa + IIIA 69 mal.

Eine weitere Aufgabe ist es festzustellen, wie häufig die Erscheinungen der Klasse I, II und III einzeln oder gemeinsam vorkommen. Man findet:

I 197 mal,	I + II 12 mal,	I + II + III 57 mal
II 140 „	I + III 404 „	
III 333 „	II + III 15 „	

Die isoliert auftretenden Erscheinungen der Klasse II sind ausschliesslich Säulen.

Gruppirt man die Erscheinungen nach der Stellung der Hauptachse: ungeordnet (III), vorwiegend senkrecht (a) oder vorwiegend horizontal (b), so erhält man:

III 333 mal,	III + a 183 mal,	III + a + b 144 mal
a 277 „	III + b 149 „	
b 58 „	a + b 14 „	

Es bestätigt sich hier, was auch schon aus einer von Bravais (34) zusammengestellten viel geringeren Reihe von Beobachtungen abzuleiten ist, dass nämlich Kristalle mit horizontaler Achse viel seltener merklich werden als solche mit vertikaler Achse, und dass die Zahl der Fälle, wo die Kristalle mit horizontaler Achse zugleich mit solchen von vertikaler Stellung auftreten, viel grösser ist als die Zahl der Fälle, wo sie allein festzustellen sind. Auf eine geringe Stabilität der Fallstellung mit horizontaler Hauptachse kann man auch schon daraus schliessen, dass die Zahl der verschiedenen Arten von Halos der Gruppe b viel geringer ist als die der Gruppe a; doch kann das nach Abschnitt II 10 auch einen andern Grund haben.

7. Da die Höhe der Sonne über dem Horizont in manchen Fällen für das Entstehen einer Haloerscheinung von grosser Bedeutung ist, wurde diese Höhe für alle Sonnenhalos, wo die nötigen Grundlagen dazu vorhanden waren, berechnet. Das Ergebnis wurde aus praktischen Gründen in der Statistik nicht in dem Masse verwandt, wie das grundsätzlich erwünscht gewesen wäre: die Zahl der Erscheinungen, die bestimmten Höhenstufen der Sonne entspricht, wird zu klein. Eine Übersicht über die Sonnenhöhen, bei denen die verschiedenen Einzelhalos beobachtet wurden, ist in der Tabelle III gegeben. Das Maximum der Häufigkeit ist dort, wo es sich einigermassen sicher feststellen liess, durch fetten Druck hervorgehoben. Die Übereinstimmung mit den nieder-

ländischen, bei Pernter Exner (101) veröffentlichten Beobachtungsergebnissen betreffend die Zirkumzenithalkreise, die Nebensonnen und die Berührungsbögen des gewöhnlichen Halos ist sehr gut; allerdings ist das benutzte Beobachtungsmaterial zum Teil das gleiche.

Diese Zusammenstellungen der Häufigkeit von Halos nach der Sonnenhöhe bedürfte einer wesentlichen Ergänzung durch Berücksichtigung der Dauer des Verweilens der Sonne in verschiedenen Höhen über dem Horizont. Im vorliegenden Fall war eine solche Berechnung unmöglich, weil die Beobachtungen aus verschiedenen Ländern stammen; nur, wenn die Beobachtungen alle an einem Ort, oder wenigstens nahezu auf einer bestimmten geographischen Breite gemacht worden sind, hat diese Berechnung einen Sinn.

8. Zum Schluss sei noch einmal betont, dass diese Aus-

T a b e l l e III.

Sonnenhöhe	IAa	IAb	IBa	IBb ₁	IBb ₂	ICa	IDa	IEa	IFa	IFb	IJAa	IJDa	IIFb	IIIA	IIIB	IIIC	IIIF	
0-5	26	9	1	—	—	—	—	—	—	—	—	106	—	21	1	—	4	168
5-10	33	15	8	4	—	—	—	7	—	—	—	18	—	37	11	—	3	136
10-15	53	40	23	2	1	—	—	8	—	1	—	11	—	75	16	—	2	232
15-20	49	46	44	3	1	1	—	6	1	—	1	4	—	80	30	—	6	272
20-25	51	42	48	3	1	2	—	14	5	3	1	5	2	70	34	1	1	282
25-30	20	23	14	—	—	1	—	5	1	2	—	1	1	42	8	1	1	120
30-35	13	20	2	—	3	—	1	8	6	1	1	1	1	35	4	—	—	96
35-40	15	24	—	—	2	—	1	8	2	1	—	1	1	37	2	—	—	94
40-45	10	18	—	—	2	1	—	9	2	1	1	1	1	26	1	—	—	72
45-50	1	21	—	—	1	—	1	1	1	1	1	—	1	23	1	—	1	54
50-55	1	15	1	—	—	—	—	2	—	—	—	—	—	26	—	—	—	45
55-60	—	4	1	—	—	—	—	4	—	1	—	—	—	15	—	—	—	26
60-65	—	1	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	5	1	—	—	8
85-90	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1
	272	278	142	11	11	5	3	73	18	11	5	148	7	493	109	2	18	1606

führungen nur als ein erster Versuch einer eingehenderen Statistik der verschiedenen vorkommenden Kombinationen von Haloerscheinungen aufgefasst werden wollen; ausschliesslich die einheitlichen Beobachtungen an einem Ort oder auf einem engen Gebiet können, wenn sie ausserdem zahlreich genug sind, weitergehenden Ansprüchen genügen; die Bearbeitung eines solchen Materials könnte aber zweifellos zu sehr interessanten Ergebnissen führen.

II. Die Fallbewegung der atmosphärischen Eiskristalle.

1. Die Tatsache, dass ausser den hellen Ringen, die zur Sonne oder zum Mond konzentrisch angeordnet sind, häufig andere Haloerscheinungen beobachtet werden, die offenbar in denselben oder ähnlichen Wolken als einzelne helle Flecke oder Bögen auftreten und zu dem Gestirn, das die Erscheinung hervorruft, nicht konzentrisch gelegen sind, verlangt eine besondere Erklärung und hat schon früh die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt. Die herrschende, jedoch auch heute nicht ganz unbestrittene Meinung ist, dass die Haloerscheinungen dieser Art in atmosphärischen Eiskristallen entstehen, die bei ihrer Fallbewegung unter dem Einfluss des Luftwiderstandes eine bestimmte Stellung einnehmen oder um eine solche als Gleichgewichtslage hin und her pendeln. Die Theorie der Fallbewegung ist aber trotz mancher sehr bedeutsamer experimenteller und theoretischer Untersuchungen noch nicht soweit durchgearbeitet, dass sie in allen Beziehungen befriedigen könnte. Dadurch wird auch die Grundaufgabe der Halotheorie, den Zusammenhang zwischen der Menge, Gestalt und Grösse der Kristalle einerseits und der Helligkeitsverteilung am Himmelsgewölbe nach Art und Stärke andererseits zu bestimmen, merklich beeinträchtigt.

Die Geschichte der meteorologischen Optik zeigt uns, dass durch viele Jahrzehnte falsche vorgefasste Meinungen über die Gestalt der Kristalle und ihre Fallbewegung den Fortschritt der Forschung hindern konnten; und auch heute noch kann der Mangel einer strengen Theorie der Bewegung fallender Eiskristalle zu wesentlichen Irrtümern verleiten.

Diese Unsicherheit kommt wohl hauptsächlich daher, dass es nur selten möglich ist, die theoretischen Annahmen an der Hand der unmittelbaren Beobachtung der in der Luft schwebenden Eiskristalle zu prüfen. Um so wichtiger ist es überall, wo sich Voraussetzungen in der Theorie nicht vermeiden lassen, diese deutlich als solche zu kennzeichnen.

2. Schon *Aristoteles* (14) legte sich die Frage vor, warum die Nebensonnen immer nur in gleicher Höhe mit der Sonne zu sehen sind, aber seine Antwort auf diese Frage kann uns ebensowenig befriedigen wie die weiteren Untersuchungen dieses Problems bis zu *Descartes* (43) einschliesslich. Es hat auch später nicht an völlig unannehmbaren Erklärungsversuchen gefehlt; so verlegte z. B. *Aepinus* (9) die Entstehungsursache der Haloerscheinungen in das Innere des menschlichen Auges.

Doch sind einige andere Forscher, die ebenfalls von der Annahme einer Vorzugsstellung der Kristalle beim Fall in der Luft absehen, ernster zu nehmen.

Mehrfach ist die Vermutung ausgesprochen worden, dass parallele schmale Wolkenstreifen durch Beugung einige von den besprochenen Haloerscheinungen erzeugen können. So sucht *de la Hire* (65) die Erklärung für eine von ihm beobachtete Säule über der Sonne in Analogie zu dem hellen Streifen, der bei Betrachtung eines Lichtpunktes durch ein nicht ganz sauberes Glas entsteht, nachdem man mit der Hand darüber gewischt hat. Damals wusste man noch wenig von der Beugung des Lichts, aber fast dieselben Gedanken wiederholen sich noch viel später, so bei *Hess* (64).

Auch *Kämtz* (72) neigt zu einer ähnlichen Ansicht, obgleich ihm die Beugungstheorie von *Fraunhofer* bekannt war, und auch die noch heute in vielen Punkten anerkannte Theorie der Haloerscheinungen von *Brandes*.

Fraunhofer (55) selbst beherrschte die Beugungstheorie zu gut, um anzunehmen, dass schmale Wolkenstreifen Veranlassung zur Bildung von Lichtsäulen geben könnten: die parallelen Streifen der Wolken müssten nicht nur scheinbar, sondern tatsächlich sehr schmal sein, ihre Breite vergleichbar mit der Länge einer Lichtwelle, wenn eine Beugung um einen beträchtlichen Winkel stattfinden soll. Er setzt an Stelle dessen voraus, dass die Tröpfchen in den Wolken in einer

bestimmten räumlichen Anordnung verteilt sind. In solcher Weise sollen die Vertikalsäulen, der Horizontalkreis und z. T. auch die Nebensonnen erklärt werden. Schmidt (125) und Collins (41) schlossen sich ganz Fraunhofer an. Kämtz dagegen sah die regelmässige Anordnung der Tröpfchen als unnatürlich an und erkannte, dass durch Tröpfchen nur kleine Kränze, nicht aber Lichtsäulen entstehen könnten. Die Annahme regelmässiger Zwischenräume zwischen den Tröpfchen oder Eiskristallen ist in hohem Masse unwahrscheinlich, doch haben ausser den Genannten auch ein Newton (91) und Pernter (94) ähnliches vorausgesetzt.

Zweckmässig dürfte es aber sein, eine bestimmte räumliche Anordnung von Eiskristallen (oder Tröpfchen) in der Atmosphäre erst dann zur Erklärung der optischen Erscheinungen heranzuziehen, wenn eine solche Anordnung, sei es auch nur ein einziges Mal, unmittelbar nachgewiesen werden konnte, oder wenn es ganz ausgeschlossen erscheint, auf anderem Wege zum Ziel zu kommen. Diese Bedingungen sind bis jetzt nicht erfüllt.

Eine sehr interessante Idee ist kürzlich von Schmauss (124) ausgesprochen worden. Wie man bei der Durchstrahlung von Kristallen mit Röntgenstrahlen Interferenzbilder erhält, auch in dem Fall, dass viele kleine Kristalle ohne jede Ordnung durcheinander liegen, könnten auch die atmosphärischen Eiskristalle, selbst wenn sie völlig ungeordnet sind, eine bestimmte Verteilung der interferierenden Lichtstrahlen bedingen, nur müssen an Stelle der Netzebenen der Kristalle ihre Oberflächen treten. Anstatt vorauszusetzen, „dass die Kriställchen durch den Luftwiderstand orientiert sind, braucht man nur anzunehmen, dass gleich gelegene Reflexionsebenen in gleichem Tiefenabstand sich folgen, was in einer homogenen Mischung aus Gründen der Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf“. Es wird nicht klar gesagt, ob hier gleiche Entfernungen zwischen den verschiedenen Kristallen angenommen werden (Entfernungen, die bis auf den Bruchteil einer Lichtwellenlänge gleich sein müssten!), oder ob vielleicht nur die parallel zueinander gelegenen Flächen je eines Kristalls gemeint sind, was sich nicht ohne Zwang aus oben angeführten Worten herauslesen lässt, was aber den Verhältnissen bei Versuchen mit Röntgenstrahlen entspricht, da auch hier die Netzebenen

einzelner Kristalle die starke Reflexion bedingen. Doch kommen nur bei gefiederten Sternchen und gestreiften Bildungen mehr als zwei oder drei parallele reflektierende Flächen in Betracht. Abgesehen von anderen Schwierigkeiten entgeht es aber Schmauss, dass die Versuche von Debye und Scherrer (42), auf die er sich beruft (nur nach einem Referat in der Umschau), in Übereinstimmung mit der Theorie bloss konzentrisch zum primären Strahl gelegene Kreise ergeben, oder genauer, eine Strahlung auf Kreiskegelmänteln, deren Achse mit dem primären Strahl zusammenfällt; es kommt hierbei niemals eine nichtkonzentrische Verteilung der Strahlung zustande wie bei den Röntgendiagrammen an orientierten Kristallen. Damit fällt jede Veranlassung, der auf den ersten Blick bestechenden Idee nachzugehen, fort.

Eine weitere grosse Schwierigkeit, die sich der Entwicklung der Theorie in der Richtung der aufgezählten Hypothesen entgegengestellt, kommt durch die ungleiche Wellenlänge in den verschiedenen Teilen des Spektrums zustande: die tatsächlich beobachtete Verteilung der Farben in den Haloerscheinungen lässt sich nicht in Einklang mit diesen Hypothesen bringen.

Es ergibt sich also, dass alle diese Versuche, die nicht konzentrisch zur Sonne gelegenen Haloerscheinungen zu erklären, auf wenig wahrscheinlichen Voraussetzungen beruhen und in ihrer Durchführung auf Schwierigkeiten stossen.

3. Eine weitere Verbreitung haben die Theorien gefunden, die alle nichtkonzentrischen Haloerscheinungen durch Eiskristalle erklären, deren Hauptachse in einer bestimmten Richtung oder wenigstens in einer bestimmten Ebene liegt, während über die Entfernungen der Kristalle voneinander keine Voraussetzungen gemacht werden. Die Annahmen, die man dabei über die Form der Kristalle, über die Vorzugsrichtung der Hauptachse beim Schweben in der Luft und über die Ursache dieser Vorzugsrichtung machte, sind ausserordentlich mannigfaltig. Zumeist wurden sie weder durch Versuche noch durch Beobachtungen gestützt. Die bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts vertretenen wichtigsten Meinungen seien hier in gedrängtester Kürze wiedergegeben:

	Richtung der langen Achse der Nadeln	Richtung der kurzen Achse der Platten	
Huyghens (67, 68)	vertikal und horizontal	—	Vertikal dank der Entstehung im aufsteigenden Luftstrom; horizontal in Übereinstimmung mit Versuchen.
Newton (90)	horizontal	—	
du Fay (51)	horizontal	—	
Marlotte (83)	vertikal	—	Asymmetrischer Bau.
Arago (10)	vertikal	—	
Young (163)	(vertikal)	horizontal	„Verschiedene Ursachen“, Schwere.
Venturi (148)	vertikal (horizontal.)	vertikal	Nadeln unsymmetrisch gebaut, Platten können sich nur flach in der Luft halten.
Brandes (29)	vertikal	horizontal	Minimum des Widerstands.
Kantiz (73)	vertikal	vertikal	Symmetriegründe.
Babinet (15)	vertikal	vertikal	
Galle (58)	vertikal	vertikal	
Bravais (33, 35)	vertikal	horizontal	(Minimum des Widerstandes) Asymmetrischer Bau.

Bravais hatte die Theorie soweit ausgearbeitet, dass sie für mehr oder weniger abgeschlossen galt. Und mit dieser Theorie pflanzte sich auch das von ihm anfangs vertretene Prinzip des kleinsten Widerstandes in alle Lehrbücher fort*).

*) Dieses Prinzip ist nicht, wie Besson (22) annimmt, zum erstenmal von Babinet ausgesprochen worden, sondern dieser zweifelhafte Ruhm gebührt Brandes (32), und Babinet hat, wie viele andere, den falschen Gedanken nachgesprochen.

Dabei hatte Bravais (40) selbst später angefangen an der Richtigkeit des Prinzipes zu zweifeln: seine Versuche ergaben aber keine eindeutige Antwort, und seine Absicht, aus den Beobachtungen von Barral und Bixio (17) im Ballon die Antwort zu finden, scheiterte daran, dass diese von „Eisnadeln“ berichteten, vielleicht ohne die Gestalt der Kristalle genauer bestimmt zu haben. Doch wurden die Zweifel wenig bekannt, während das früher geschriebene grosse Werk von Bravais eine weite Verbreitung fand, und das Prinzip des kleinsten Widerstands als Grundlage der Halotheorie gelten blieb. Ausser Bravais hat von den genannten Forschern nur Huyghens (68) und zwar mit besserem Erfolg als Bravais Versuche über den Fall kleiner Körper ausgeführt.

Die bunte Mannigfaltigkeit dieser Anschauungen aus älterer Zeit zeigt zur Genüge, dass die Frage nach der Fallbewegung der atmosphärischen Eiskristalle nicht einfach zu lösen ist. Genauere theoretische Untersuchungen, vor allem aber Experimente, und noch besser unmittelbare Beobachtung von Eiskristallen, die, in der Luft schwebend, die Haloerscheinungen veranlassen, können das Problem einwandfrei lösen.

4. Neben Beobachtungen von atmosphärischen Kristallen, die keine vorherrschende Richtung der Hauptachse erkennen liessen, sind auch solche gemacht worden, wo die flachen Kristalle eine „absolute Horizontalität“ bewahrten (54) oder um eine horizontale Lage schwankten (46, 133). Diese Beobachtungen sind wichtig genug, um erwähnt zu werden, obgleich sie zu Zeiten gemacht wurden, wo keine Halos sichtbar waren.

Es sind dann weiter andere Beobachtungen über die Form der Eiskristalle gemacht worden, während Haloerscheinungen sichtbar waren. Galle (57) beobachtete gleichzeitig mit den gewöhnlichen Nebensonnen sechseckige Eisplättchen. Auf dem Ben Nevis (8) wurden gleichzeitig mit einer Säule unter der Sonne, die vor den Bergen erschien, sternförmige Kristalle in der Luft beobachtet. Auf der Expedition der Belgica (13) wurden gleichzeitig mit einem Nebenmond Plättchen beobachtet. Vom Ballon aus beobachtete W Schmidt (126) ausser einem Ringe gegenüber der Sonne ein Spiegelbild unter ihr; dabei war die Luft mit Plättchensternen erfüllt. Auch bei einer zweiten Beobachtung der Untersonne konnte er Plättchensterne feststellen. Schliesslich habe ich selbst

dreimal Gelegenheit gehabt Lichtsäulen durch den Mond und über Strassenlaternen zu sehen, während Eisplättchen oder Plättchensterne fielen (86).

In allen diesen Fällen lässt sich aus der beobachteten Haloerscheinung mit grosser Sicherheit die Richtung der Hauptachse ermitteln: wir finden, dass sie immer vertikal war. Da es sich aber ausschliesslich um Beobachtungen von Plättchen und Plättchensternen handelt, kann die Fallstellung nur dieser Kristalle als zuverlässig bekannt gelten, und in Bezug auf Nadeln, Prismen im engeren Sinne des Wortes und andere Kristallformen ist höchstens ein Analogieschluss möglich. Nach *Stuchtey* könnten die genannten Erscheinungen, wenigstens zum Teil, durch rollende flache Kristalle hervorgerufen werden; doch lässt sich vieles gegen diese Annahme einwenden (Abschnitt III 5).

5. Nach den ersten Versuchen, die schon *Huyghens* (68) zur Ermittlung der Gleichgewichtslage fallender kleiner Zylinder (Eisnadeln) gemacht, und die erkennen liessen, dass die Gleichgewichtslage horizontal ist, hatte erst *Bravais* (40) wieder einen Versuch zur experimentellen Lösung des Problems gemacht; doch hatte er dabei, wie oben berichtet, keinen Erfolg.

Es mag mehr als einmal vorgekommen sein, dass einzelne Personen sich durch einfache Versuche von der Unrichtigkeit des Prinzipes des kleinsten Widerstandes überzeugten, bei der Mehrzahl der Fachleute blieb es weiter in Geltung. *Th. Grönberg* (62) zeigte 1884, dass fallende Körper sich nicht nach dem Prinzip des kleinsten Widerstandes einstellten, und *G. Schweder* (132) führte später Versuche mit demselben Ergebnis aus.

Die Unzulänglichkeit des Prinzips wurde erst dann allgemein anerkannt, als *Wood* (162) in einer Besprechung der Meteorologischen Optik von *Pernter* darauf hinwies und einige einfache Versuche angab: Glimmerplatten im Wasser, fallende Blätter und Fichtennadeln, ein Pfeil ohne Federn am Ende usw. Dass *Wood* daraus ein Prinzip des grössten Widerstandes herleitete, war übereilt.

Die gründlichsten Versuche über den Fall kleiner Körper von der Gestalt der atmosphärischen Eiskristalle, die einzigen gründlichen überhaupt, stammen von *Besson* (20, 22); er liess (meist hölzerne) Modelle in einer Flüssigkeit sinken.

Bei einer sehr langsamen sinkenden Bewegung, also bei geringem Dichteunterschied von Flüssigkeit und sinkendem Körper, oder bei grosser innerer Reibung der Flüssigkeit haben die Körper entweder keine ausgesprochene Gleichgewichtslage, oder sie fallen mit einem Ende oder der scharfen Kante voraus. Die Ursache dieser letzten Erscheinung ist wohl in einer äusseren oder inneren Asymmetrie zu suchen. Auch von den atmosphärischen Eiskristallen weiss man ja, dass sie häufig asymmetrisch gelegene Hohlräume enthalten, oder dass sie auch äusserlich asymmetrisch gebaut sind. Besonders kommen Kristalle vor, deren Gestalt an Tischchen oder Pilze, nach A. Wegener (151) an Kragenknöpfe erinnert. In diesem Fall scheint es, dass die Fallbewegung in Übereinstimmung mit dem Prinzip des kleinsten Widerstandes erfolgt.

Ist aber der Dichteunterschied von Flüssigkeit und fallendem Körper grösser, die innere Reibung geringer, so fallen längliche Prismen und ebenso auch Platten horizontal (grösster Widerstand) und die pilzförmigen Körper verschieden: wenn die Durchmesser des dicken Teiles (des Hutes) und des dünneren Teiles (des Stengels) annähernd gleich sind, oder wenn der erste Teil sehr lang ist und der zweite kurz, so macht das Ganze den Eindruck eines länglichen Zylinders, und sinkt auch wie dieser mit horizontaler Längsachse; nur wenn das ganze Gebilde im Vergleich zu dem Durchmesser des Hutes eine geringe Länge hat, fällt es mit vertikaler Achse. Ist der Unterschied zwischen den Durchmessern der beiden Teile bedeutend, dabei der dünnere Teil viel länger als der kurze dickere Teil, so ist dieser letztere nach oben gerichtet; bei etwas grösserer Länge des Hutes wieder ist dieser nach unten gerichtet; beidemal aber ist die Achse vertikal. Es gibt ein Grenzgebiet, wo beide Gleichgewichtslagen möglich sind, die mit dem Hut nach unten ist aber weniger stabil und mit stärkeren Schwankungen verbunden. Es lässt sich auch ein dreifacher Punkt finden, wo ausserdem noch die horizontale Lage als dritte Gleichgewichtslage möglich ist; ebenso kann es geschehen, dass die horizontale und eine vertikale Lage gleich möglich sind. Natürlich ist in diesen Fällen keine der Gleichgewichtslagen sehr stabil. Die Versuche Bessons beschränken

sich nicht auf diese besonders wichtigen Fälle, und die Ergebnisse sind hier nur in ganz summarischer Form wiedergegeben. Am wesentlichsten ist es, dass bei grosser Fallgeschwindigkeit der hydrodynamische Druck für die Fallstellung massgebend ist und dass es bei kleiner Fallgeschwindigkeit nur dann eine Vorzugsstellung gibt, wenn eine innere oder starke äussere Asymmetrie vorhanden ist.

Besson stellte auch Versuche über die Fallbewegung in der Luft an; da es praktisch kaum möglich ist, Modelle von genügend kleinen Massen und regelmässiger Gestalt herzustellen, wurden verhältnismässig grosse Versuchskörper benutzt, die recht schnell fielen und schwer zu beobachten waren. Doch gelang es Besson nachzuweisen, dass die Fallstellung ähnlich war wie in einer Flüssigkeit bei schnellem Fall.

Ein besonderer mechanischer Vorgang, dessen mögliche Bedeutung für die Haloerscheinungen von Köppen (76) betont wurde, ist die Rotation eines fallenden Körpers um seine Horizontalachse. Solch eine Rotation wurde auch von Besson beobachtet, jedoch nur in der Luft und nur bei grösseren Körpern, also bei schnellem Fall; einige Forscher (102, 137) nehmen mit Köppen an, dass solche Rotationen auch bei den atmosphärischen Eiskristallen nicht selten sind. Wenn sie wirklich stattfinden sollten, so kann die Folge nicht die sein, die Köppen erwartet, dass nämlich ein rotierendes Prisma optisch einem Zylinder gleichzusetzen ist. Hier vertritt Besson (23) zweifellos den richtigeren Standpunkt, „dass es optisch gleichwertig ist vorauszusetzen, dass Prismen mit horizontaler Achse um diese rotieren, oder dass jede von ihnen bei horizontaler Achse dauernd in einer bestimmten Stellung verbleibt, dass diese aber für die einzelnen Prismen verschieden ist“

Besson nimmt an, dass die Haloerscheinungen, die auf Eiskristalle in besonderen Stellungen zurückgeführt werden, grösserer Kristalle bedürfen die schnell fallen, was man aus der meist sehr kurzen Dauer dieser Erscheinungen schliessen kann, auch daraus, dass die Nebensonnen, die Berührungsbögen usw. in den Fallstreifen der Cirruswolken beobachtet werden, oder in einer Cirrostratusdecke, die merklich dichter wird und sich senkt.

Während Besson ein besonderes Gewicht auf die Kristalle von Pilzform legt, meint Pinkhof (110, 112), dass die hemimorphen Säulen wohl die wichtigste Rolle spielen: sie fallen bei grossem Hohlraum in dem stumpfen Ende vertikal, bei kleinem Hohlraum aber horizontal.

6. Ein in der Luft fallender Körper ist der Einwirkung folgender Kräfte unterworfen: 1) die Schwere; 2) der hydrostatische Druck der Luft; 3) der hydrodynamische Druck der Luft; 4) die Reibung; 5) elektrostatische Kräfte.

Während die beiden ersten Kräfte äusserst einfach zu behandeln sind, machen die dritte und vierte, da sie von der Gestalt des Körpers abhängen und von seiner Geschwindigkeit, die mathematische Behandlung der Fallbewegung sehr schwierig. Die elektrostatischen Kräfte sind neuerdings von Pinkhof (112, 115), aber schon früher von Nordenskjöld (92) und Ekama (47), als mögliche Ursache einer besonderen Stellung der Kristalle genannt worden; eine mathematische Formulierung der Einwirkung dieser Kräfte fehlt noch, und es fehlen auch alle Vorbedingungen dazu: Kenntnis der Grösse und Verteilung der elektrischen Ladung auf hemimorphen atmosphärischen Eiskristallen und Kenntnis des elektrischen Feldes in höheren Schichten der Atmosphäre. Es bleibt vorläufig nichts anderes übrig, als diese elektrische Kraft ganz ausser acht zu lassen. In der Regel vernachlässigt man auch die dritte oder die vierte Kraft, um nur überhaupt eine Lösung der Aufgabe zu ermöglichen. R. Gans (61) hat die Untersuchungen von Stokes über den Fall eines kugelförmigen Körpers in einer zähen Flüssigkeit auf die Fallbewegung von Platten und Stäben ausgedehnt. Die von ihm gefundenen Gesetze gelten nur bei langsamer Bewegung, wenn die Trägheit des umgebenden Mittels und damit auch der hydrodynamische Druck vernachlässigt werden kann. Mathematisch kann diese Bedingung nach Gans so formuliert werden: der Wert von Vl muss klein gegen μ/s sein; hier bedeutet V die Fallgeschwindigkeit, l die lineare Ausdehnung des fallenden Körpers, s die Dichte der Flüssigkeit und μ den Koeffizienten der inneren Reibung.

Wenden wir diese Formel auf den Fall eines Eiskristalls in der Luft von normaler Dichte an, so ist s gleich 0,00129

und μ gleich 0,00017; der hydrodynamische Druck ist demnach zu vernachlässigen, wenn V klein ist im Vergleich zu 0,1 cm² sec: unter dieser Bedingung haben Platten und Stäbe mit drei zueinander senkrechten Symmetrieachsen kein Bestreben, sich in eine besondere Richtung einzustellen. In der Annahme, dass der kleinste Durchmesser von Eiskristallen, in denen Haloerscheinungen im allgemeinen entstehen können, gleich 0,005 cm ist (85), bedarf es also einer nicht wesentlich unter 20 cm/sec liegenden Fallgeschwindigkeit, damit die kleinsten halobildenden Kristalle eine bestimmte Gleichgewichtslage erhalten. Sowohl in Bezug auf diesen Grenzwert der Kristallgrösse als auch in Bezug auf die tatsächliche Fallgeschwindigkeit ist in Ermangelung von genauen Messungen der Vermutung noch viel Spielraum gelassen. Wassertröpfchen von 0,005 cm Durchmesser fallen mit einer grösseren als der genannten Geschwindigkeit; Plättchensterne mit dem viel grösseren Durchmesser von 0,2 cm und einer Dicke von 0,004 cm scheinen gerade 20 cm in der Sekunde zu fallen (Abschnitt II 7). Es ist wohl anzunehmen, dass beliebig geformte Eiskristalle von einer Grössenordnung von 0,005 cm die kritische Geschwindigkeit nicht erreichen.

Diese theoretischen Betrachtungen finden eine Stütze in dem häufigen Auftreten des gewöhnlichen Ringes von 22°, das sehr dafür spricht, dass Kristalle, die gross genug sind, um Haloerscheinungen zu erzeugen, dennoch ihrer geringen Grösse wegen keine bestimmte Gleichgewichtslage zu besitzen brauchen.

In grösserer Höhe, z. B. in der Cirrus-Region ist die Dichte der Luft geringer. Dadurch wird: 1) der hydrostatische Auftrieb geringer, was aber bei dem ohnehin grossen Dichteunterschied von Eis und Luft belanglos ist; 2) der hydrodynamische Widerstand (bei unveränderter Geschwindigkeit) — kleiner; 3) die Reibung — kleiner. Die Verringerung der beiden letztgenannten Kräfte bedingt eine vergrösserte Fallgeschwindigkeit.

Besson (24) schliesst aus der Vergrösserung der Fallgeschwindigkeit in der dünnen Luft hoher Schichten auf eine stabilere Gleichgewichtslage, bemerkt aber nicht, dass diese durch den Widerstand der Luft bedingt wird, der mit abnehmender Luftdichte ebenfalls abnimmt. Wenn man annehmen

darf, dass die Fallgeschwindigkeit umgekehrt proportional der Dichte der Luft ist, kann man aus der Formel folgern, dass das Kriterium von Gans unverändert bestehen bleibt, da nur das Produkt Vs ausschlaggebend ist, nicht der Wert von s allein.

Aus dem vorhergehenden folgt, dass kleine Kristalle ohne asymmetrische Dichteverteilung im Innern keine bestimmte Gleichgewichtslage haben, dass sie also geeignet sind, die zur Sonne konzentrischen Haloerscheinungen zu erzeugen. Besitzen sie aber bestimmte Hohlräume, oder sind sie in andrer gesetzmässiger Weise von ungleicher Dichte in verschiedenen Teilen, so werden sie eine ganz bestimmte Fallstellung einnehmen und zu den Haloerscheinungen der nichtkonzentrischen Art Veranlassung geben. Grössere Kristalle erhalten dank dem hydrodynamischen Druck eine besondere Fallstellung, falls sie eine solche nicht schon dank einer Asymmetrie besitzen, doch wächst mit zunehmender Grösse auch die Neigung, um die Gleichgewichtslage hin- und herzupendeln. Daraus folgt, dass die grösseren Kristalle geeignet sind die Haloerscheinungen nichtkonzentrischer Art zu erzeugen, und zwar die grössten von ihnen — besonders solche Erscheinungen, die eine pendelnde Bewegung erfordern (die II. Gruppe der Haloerscheinungen nach dem Abschnitt I 2 dieser Arbeit).

Eine nicht immer genügend beachtete Folge kleiner Dimensionen der Kristalle, die Beugung des Lichtes bei Brechung und Spiegelung, muss die Bildung von lichtstarken, scharf begrenzten Haloerscheinungen sehr erschweren. Aus diesem Grunde ist es durchaus anzunehmen, dass die schönsten Haloerscheinungen in grossen Kristallen entstehen; da diese aber zum Pendeln neigen, muss die Frage aufgeworfen werden, ob dieselben Kristalle imstande sind auch solche Haloerscheinungen zu erzeugen, die eine genaue Einstellung der Kristalle in die Gleichgewichtslage zur Voraussetzung haben; diese Frage wird im Abschnitt II 10 behandelt werden.

Die obigen Ausführungen über den Zusammenhang von Grösse und Art des Fallens können nicht den Charakter eines strengen Gesetzes für sich beanspruchen. Die zahlenmässigen Beziehungen zwischen der Grösse der Kristalle und der Art ihrer Fallbewegung müssen von der Gestalt der Kristalle abhängig sein und können sich nicht in eine gemeinsame

Formel zwingen lassen. Ausserdem wird die Wahrscheinlichkeit, dass die Kristalle sämtlich oder zum grossen Teil eine bestimmte Gleichgewichtslage einnehmen, um so geringer, je grösser die Turbulenz der Luft ist.

Während nun in einer Arbeit über Haloerscheinungen nur Plättchen, in einer anderen die Eisnadeln und Prismen, in einer dritten wieder Kombinationen von Säulen und Plättchen „benutzt“ werden, wie es bezeichnenderweise gesagt worden ist (III), ist es doch klar, dass wir hier in zu weitem Masse auf Vermutungen angewiesen sind, und dass es eine der dringendsten Aufgaben der Haloforschung ist, die Kristalle, in denen sich bestimmte Erscheinungen bilden, zu beobachten. Bei dem gegenwärtigen Stand der Flug- und Luftfahrttechnik ist das keineswegs aussichtslos. Dann erst wird man sagen können, ob die Kristallformen, die wir voraussetzen, und die vielleicht auch wirklich beobachtet worden sind, in genügenden Mengen vorkommen, um diese oder jene Erscheinung zu veranlassen. Ein Versuch, die wenigen bisherigen Beobachtungen dieser Art zu sammeln, führte nur zu einem sehr bescheidenen Ergebnis (87). Dabei sind die Beobachtungen meist an der Erdoberfläche ausgeführt worden, und es erscheint sehr wohl möglich, dass sich die Verhältnisse in der Höhe der Cirruswolken als wesentlich anders erweisen. Jedenfalls aber ist es ungerechtfertigt, die Plättchen als ganz ungeeignet zur Erzeugung von Halos zu betrachten, wie das jetzt nicht selten geschieht (110). Die endgültige Lösung der Frage nach der Gestalt der halobildenden Kristalle ist nur auf dem Wege der unmittelbaren Beobachtung zu erwarten.

7. Mehrfach sind schiefe Haloerscheinungen beobachtet worden, die zur Annahme drängen, dass unter Umständen die Hauptachsen der atmosphärischen Eiskristalle nach einer bestimmten schiefen Richtung, statt wie sonst nach der vertikalen, geordnet sind*).

*) Literarnachweis Nr. 1, 3, 4, 5, 6, 7, 16, 18, 26, 28, 45, 53, 63, 77, 79, 81, 116, 117, 123, 131, 135, 153, 156.

Unter schiefen Haloerscheinungen sollen hier solche verstanden werden, deren Lage und Gestalt gegenüber den gewöhnlichen Beobachtungen mehr oder weniger verschoben und verdreht ist. Die sog. schiefen Bögen von Lowitz und die schiefen Bögen der Gegen Sonne gehören nicht hierher.

Die Hauptachsen kleiner Kristalle können nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes sehr wohl eine schiefe Lage im Raume haben, aber es liegt gar kein Grund vor anzunehmen, dass unter solchen Umständen irgendeine besondere Stellung bevorzugt sein wird. In Ausnahmefällen können aber auch grössere Kristalle unter dem Einfluss der im vorigen Abschnitt genannten Kräfte eine schiefe Lage einnehmen, dabei in bestimmter Weise geordnet, wobei die Hauptachsen entweder alle einer bestimmten schiefen Linie parallel sind, oder alle zu einer bestimmten schiefen Richtung senkrecht stehen und somit in einer schiefen Ebene liegen. Dabei lassen wir die elektrostatische Hypothese vorläufig wieder ausser acht, weil man auf diesem Gebiet ausschliesslich auf Vermutungen angewiesen ist.

Vielfach findet man die Meinung ausgesprochen, dass Luftströmungen die Stellung der Eiskristalle (besonders der „Eisnadeln“) beeinflussen (31, 71, 80, 135, 146). Doch ist diese Meinung, wenn sie ohne Erläuterung ausgesprochen wird, zum mindesten missverständlich. Nicht die Bewegung der Luft an sich, sondern bloss die Bewegung relativ zu den Eiskristallen kann auf ihre Fallstellung von Einfluss sein (128). Solche Überlegungen haben wohl nicht selten zu der Vermutung geführt, dass eine Neigung der Kristallachsen durch eine Änderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe hervorgerufen wird, weil dann das obere und das untere Ende des Kristalls sich in verschieden schnell bewegter Luft befindet. Weidert und Berson (154) sprechen diesen Gedanken wohl am klarsten aus: „dadurch, dass die Geschwindigkeit der Luftbewegung nach den oberen Schichten hin im allgemeinen zunimmt, werden alle in der Luft schwebenden Eisprismen ein gewisses Drehmoment erfahren“ „Im allgemeinen wird nun die Differenz der Windgeschwindigkeiten am oberen und unteren Ende der Eisprismen eine sehr geringe sein; schweben aber die Prismen einmal zufällig in einer Schicht, in der der Gradient der Windgeschwindigkeit ein grosser ist, so können wohl merkbare Neigungen gegen die Vertikale auftreten.“ Vermutlich ist eine Bemerkung von Berson (19) aus älterer Zeit ebenso zu verstehen; er betont dabei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Cirrusschleier an einer Schichtgrenze verbunden mit einem

Windsprung entsteht. Möglicherweise ist auch Exner (109) durch ähnliche Gedanken beeinflusst worden. Auch ich selbst habe früher die Lösung des Problems der schiefen Haloerscheinungen hier gesucht, aber diesen Gedanken schon 1913 abgelehnt, weil die Differenz der Windgeschwindigkeiten am oberen und am unteren Ende eines fallenden Kristalls doch wohl gar zu klein sein wird. Meist fallen ja die Kristalle so, dass in der vertikalen Richtung gerade ihre geringste Ausdehnung liegt; aber selbst, wenn man pilzförmige Kristalle annimmt, und ihnen in senkrechter Richtung eine Länge von 2 mm zuschreibt, beträgt bei einem starken Windsprung von 0,05 m/sec. auf 1 m Höhe*) die erwähnte Differenz der Windgeschwindigkeiten bloss 0,0001 m/sec. Es liegt leider keine Möglichkeit vor, das durch eine solche Differenz bedingte Drehmoment zu berechnen und mit dem andern Drehmoment, das den Kristall in seine normale Lage zurückzubringen sucht, zu vergleichen; man ist auch hier auf Vermutungen angewiesen. Die oben gefundene Zahl lässt einen Erklärungsversuch auf dieser Grundlage ziemlich hoffnungslos erscheinen. Weidert und Berson (155) berichten auch, dass gerade in der Nacht, als sie eine schiefe Lichtsäule beobachteten, die Windrichtungen und Geschwindigkeiten in verschiedenen Höhen sehr ungleich waren; nach der von ihnen gegebenen graphischen Darstellung ist die den Windsprung messende Vektordifferenz auch nicht annähernd 0,05 m/sec auf 1 m Höhe gewesen.

In neuerer Zeit hat man den Versuch gemacht, eine relative Bewegung zwischen Kristall und Luft, und damit auch eine Schiefstellung der Kristallachse, wahrscheinlich zu machen, ohne eine an den beiden Enden des Kristalls verschiedene Geschwindigkeit der Luftströmungen vorauszusetzen. Dabei muss beachtet werden, dass eine relative Bewegung der Luft sehr bald aufhören wird, wenn nicht fortdauernd eine beschleunigende Kraft auf die Luft (nicht aber auf die Eiskristalle) oder umgekehrt auf die Eiskristalle (nicht aber auf die Luft) wirkt. Nur unter der Bedingung einer solchen relativen Beschleunigung kann eine dauernde relative Bewegung trotz entgegenwirkender Reibung zustandekommen. So findet die Fallbewegung der Kristalle durch die ruhende Luft ja auch

*) Linke (Aeronaut. Meteorologie Bd. I, 67, 83) erwähnt noch grössere Gradienten (0,25). Sollte die Luftbewegung dann noch laminar bleiben?

nur deshalb statt, weil die Schwerebeschleunigung dauernd auf die Kristalle wirkt und sie anfangs mit zunehmender Geschwindigkeit und danach, wenn die Reibung der Beschleunigung die Wage hält, mit gleichförmiger Geschwindigkeit sinken lässt, während die Schwerebeschleunigung auf die umgebende Luft durch den archimedischen Auftrieb aufgehoben wird.

Die besondere Bedeutung der vertikalen Richtung für die Stellung der Kristalle kommt also nur dadurch zustande, dass die Kristalle sich in dieser Richtung relativ zur Luft bewegen, und diese Bewegung kann wieder nur durch eine dauernd wirkende Beschleunigung in dieser Richtung aufrechterhalten werden. Die Frage nach der Ursache ausserordentlicher Fallstellungen der Kristalle läuft deshalb auf die andere Frage hinaus, ob es beim Fall der Kristalle in der Luft ausser der Schwerebeschleunigung noch andere relative Beschleunigungen geben kann, die mehr oder weniger dauernd zur Wirkung kommen, nicht in der Vertikalen liegen, und ihrer Grössenordnung nach nicht gegen die Schwerebeschleunigung verschwinden.

Nehmen wir den einfachsten Fall: Die Luftmasse, die die Eiskristalle trägt, wird einer horizontalen Beschleunigung unterworfen; das ist gleichwertig einer ebenso grossen, aber umgekehrt gerichteten Beschleunigung der Kristalle in Bezug auf die Luft. Ausser der Schwerebeschleunigung g wirkt also auf die Kristalle noch eine horizontale, der ungleichförmigen Luftbewegung gleichwertige Beschleunigung dv/dt . Die resultierende Beschleunigung ist um den Winkel α gegen die Vertikale geneigt, wobei $\operatorname{tg}\alpha = dv/dt : g$. Welche horizontalen Beschleunigungen kommen nun wirklich vor? Nimmt man als Anfangsgeschwindigkeit 0, als Endgeschwindigkeit 25 m/sec. an und als Dauer der Geschwindigkeitsänderung 10 Minuten = 600 Sekunden, so wird $\operatorname{tg}\alpha$ gleich 0,004, und α etwas weniger als $14'$, eine Abweichung von der Vertikalen, die an den Haloerscheinungen kaum wahrgenommen werden kann. Beschleunigungen von der angegebenen Grössenordnung dürften aber wohl schon eine seltene Ausnahme sein; berücksichtigt man weiter, dass eine deutliche Haloerscheinung in einer solchen beschleunigten Luftmasse nur dann zustandekommen kann, wenn zugleich noch andere Bedingungen erfüllt sind: Vorhandensein von Eiskristallen erforderlicher Grösse und Gestalt in genügender Anzahl innerhalb der beschleunig-

ten Luftmasse, Abwesenheit von solchen Kristallen in der nicht beschleunigten Luft (da sonst eine Störung und Überdeckung zweier verschiedener Haloerscheinungen eintreten müsste), wirbelfreie Bewegung, Gleichförmigkeit der Beschleunigung während genügend langer Zeit und in genügend ausgedehntem Raum, so erscheint es kaum glaublich, dass solche Fälle wirklich zur Beobachtung gelangen können.

Ein ähnliches Ergebnis erhält man unter der Voraussetzung, dass die Kristalle aus einer Luftschicht in eine andere herabsinken, in der eine andere horizontale Geschwindigkeit herrscht. Die Fallgeschwindigkeit sei dh/dt (kleiner als 0), die horizontale Geschwindigkeit in der Höhe h sei v , in der Höhe $h+dh$ aber sei sie $v+dv$. Während der Zeit dt kommt also der Kristall aus Luftmassen mit der Geschwindigkeit $v+dv$ in solche mit der Geschwindigkeit v . Die relative Beschleunigung der umgebenden Luft in Bezug auf den Kristall ist gleich $dv/dt = dv/dh \times dh/dt$, sie ist also negativ bei positivem dv . Die relative Beschleunigung des Kristalls in Bezug auf die ihn umgebende Luft hat denselben Wert mit dem umgekehrten Vorzeichen. Setzen wir grosse Werte der Differentialquotienten voraus: dv/dh gleich $0,05 \text{ m/sec:m}$, und dh/dt gleich $-0,5 \text{ m/sec}^*$), so erhalten wir den Wert $0,025 \text{ m/sec}^2$ für die relative horizontale Beschleunigung des Kristalls. Die Neigung der resultierenden Beschleunigung zur Vertikalen $\alpha = 9'$ findet man aus $\text{tg}\alpha = dv/dt : g = 0,0025$. Es ist so gut wie ausgeschlossen, dass eine so geringe Neigung in den Haloerscheinungen zum merklichen Ausdruck kommt. Wie

*) Am 9. Februar 1924 wurde von mir, nach Fertigstellung des Manuskripts, $0,2 \text{ m/sec}$ als Fallgeschwindigkeit von Plättchensternen ermittelt, die vom Luftzug durch eine Ventilationsöffnung in einen kalten geschlossenen Raum getrieben wurden, und dort in ruhiger Luft herabsanken. Der Durchmesser der Plättchensterne (an anderen Exemplaren gemessen) betrug durchschnittlich 2 mm , die Dicke $0,03 \text{ mm}$ (Abschnitt III 8). Hin und wieder verfielen die flach schwebenden Sterne vorübergehend in eine „Rollbewegung“ um eine horizontale Achse; doch war das eine Ausnahme, die sich schätzungsweise auf einige Prozent der gleichzeitig fallenden Kristalle erstreckte. Richardson (119) berechnet als Fallgeschwindigkeit der Elemente der Cirruswolken $0,08$ bis $1,3 \text{ cm/sec}$; er benutzt dabei die Stokes'sche Formel in der für Wassertropfchen und normale Luftdichte geltenden Gestalt.

im vorigen Fall müssen natürlich auch noch weitere Bedingungen erfüllt sein, damit wirklich eine schiefe Haloerscheinung zustandekommt.

Bei einem nach oben hin an Stärke zunehmenden Westwinde wird die horizontale relative Beschleunigung auf die Kristalle nach Ost gerichtet sein. In diesem Fall sinken also die Kristalle nach unten und bewegen sich zugleich auch nicht nur mit der umgebenden Luft, sondern auch in Bezug auf sie, nach Ost. Durch den Widerstand der Luft muss dabei das untere, bei der Bewegung vorauseilende Ende der Kristalle etwas nach Ost verschoben werden, das obere nach West geneigt werden. Genau unter denselben Windverhältnissen muss aber, wie oben nach Weidert und Berson ausgeführt wurde, das obere Ende der Kristalle durch den stärkeren Wind nach Ost und das untere Ende nach West verschoben werden, also gerade in der umgekehrten Richtung. Es ist charakteristisch für die unsicheren Grundlagen der Hypothesen über die Ursachen der schiefen Haloerscheinungen, dass man je nach Belieben aus den gleichen Voraussetzungen entgegengesetzte Schlüsse ziehen kann. In Wirklichkeit darf natürlich nur die Differenz der beiden Drehmomente in Rechnung gezogen werden; soweit sich das beurteilen lässt, ist schon jedes einzelne von diesen Drehmomenten zu klein, um eine merkliche Wirkung auszuüben, ihre Differenz muss also erst recht zu vernachlässigen sein.

Die beiden letzten Hypothesen über die schiefen Achsenstellungen als Folge einer relativen Bewegung der Kristalle in der Luft stammen von Pinkhof (111, 112). Er behandelt das Problem qualitativ zweifellos richtig bis auf die Annahme eines Prinzips des grössten Widerstandes und die Vernachlässigung des Drehmoments durch verschiedene Geschwindigkeit der Luft am oberen und unteren Ende der Kristalle; aber er macht keinen Versuch, die Wirkung horizontaler Luftströmungen auch ihrer Grösse nach zu bestimmen. Exner (109) macht einen solchen Versuch, scheint aber von Voraussetzungen auszugehen, die anfechtbar sind: es ist nicht klar, ob unter der „Differenz der Windgeschwindigkeit oben und unten“ die Geschwindigkeitsdifferenz am oberen und unteren Ende eines Kristalls oder die am Anfang und Ende

einer vom Kristall beim Fallen zurückgelegten Strecke zu verstehen ist. Nur zu berechtigt ist dagegen der Hinweis E x n e r s darauf, dass man die Fallgeschwindigkeit der Kristalle kennen müsste, um zu entscheiden, ob eine bestimmte Neigung sonst senkrechter Haloerscheinungen möglich ist oder nicht.

8. Wenn nun die Luftbewegung nur unter Bedingungen, deren Unwahrscheinlichkeit an die Unmöglichkeit grenzt, schiefe Haloerscheinungen erzeugen kann, so wird es zu einem schwierigen Problem, die beobachteten schiefen Erscheinungen zu erklären. Es bleibt vorläufig die elektrostatische Hypothese von N o r d e n s k j ö l d E k a m a P i n k h o f (92, 48, 112, 115); wird sie sich bei einer genaueren Prüfung bewähren?

Einige Beobachtungen, besonders aus älterer Zeit, sind nicht zuverlässig genug, als dass man nach Erklärungen für sie suchen müsste. So kann z. B. die Angabe, dass der Mittelpunkt eines hellen Kreises n a h e beim Zenit lag, wegen der Schwierigkeit der Beobachtung noch nicht als Beweis dafür angesehen werden, dass der Kreis nicht horizontal verlief.

In anderen Fällen lässt sich ungezwungen eine Erklärung finden, ohne dass man zu einer schiefen Stellung der Kristalle seine Zuflucht zu nehmen braucht. So sind mehrfach Nebensonnen in grösserer oder kleinerer Höhe als die Sonne selbst gesehen worden (4, 7, 28, 77, 89). Die Erklärung wird nahegelegt durch Beobachtungen wie die von B r a c k e (28, 89), wo auf einer Seite der Sonne gleichzeitig zwei Nebensonnen übereinander sichtbar wurden: von dem stark entwickelten gewöhnlichen Halo oder seinen seitlichen Berührungsbögen werden einige Teile durch dichtere Wolken verdeckt, oder es sind umgekehrt die Wolken im allgemeinen zu dünn, um starke Lichterscheinungen zu geben, und nur an einigen Stellen sind sie so dicht, dass helle Flecke entstehen, die dann als Nebensonnen bezeichnet werden; bei einer scheinbar horizontalen Streifung der Wolken, wie sie ja häufig vorkommt, können nun leicht zwei „Nebensonnen“ übereinander sichtbar werden.

Am 22. April 1910 beobachtete ich um 6 Uhr abends eine schwache Nebensonne links, 40 Minuten später ausserdem rechts ein Stück des gewöhnlichen Ringes, beides leicht

gefärbt. Gegen 7 Uhr war das Bogenstück rechts zu einer schwachen Nebensonne zusammengeschrumpft, links sah man zwei schmale Nebensonnen, annähernd in der Höhe des unteren und des oberen Randes der Sonne, und, etwa $\frac{1}{2}$ Grad höher, auf derselben Seite eine dritte Nebensonne von der Breite der Sonnenscheibe; auch diese hatte einen horizontalen Schweif von 1 bis 2 Grad Länge. Die Erscheinung dieser dreifachen Nebensonnen auf einer Seite deutete ich während der Beobachtung so, dass eine zufällige horizontale Gliederung der Wolken nur Ausschnitte aus einem vertikalen Bogenelement erkennen liess.

Dass auch bei anderen Gelegenheiten die zufällige Anordnung der Wolken und ihre verschiedene Dichtigkeit von Bedeutung sein kann, ist von Everdingen (49) gezeigt worden. Auch Pernter (98) will einige schiefe Erscheinungen auf diese Weise erklären*).

Zweifellos sind nicht alle schiefen Erscheinungen auf diese Art zu erklären. Der schiefe Nebensonnenring von Hall (63) und eine ähnliche Erscheinung aus neuerer Zeit (6) müssen wohl in der von Bravais (36) angegebenen Art durch Kristallflächen erklärt werden, die unter einem bestimmten Winkel zu der vertikal stehenden Hauptachse der Kristalle gelegen sind.

Ausser den genannten Beobachtungen können aber noch die von Barkow (16), Süring (135) und Weidert und Berson (153) als besonders beachtenswert angeführt werden.

Die Überzeugung, dass es ganz unmöglich ist, den hellen Fleck, den Barkow als eine um 70° nach oben gedrehte (horizontale) Nebensonne ansah, in der oben besprochenen Weise durch einen Windsprung zu erklären oder, wie Barkow selbst andeutet, durch vertikale Luftströmungen, kann die Tatsache der Beobachtung nicht aus der Welt schaffen; doch wäre es nach dem früheren nicht ausgeschlossen, dass

*) In letzter Zeit sind mir neuere Bände der Onweders zugänglich geworden (in der Bibliothek des Meteorologischen Instituts der Universität Dorpat). Es findet sich dort im Jahrgang 1911 S. 79 eine Beobachtung aus Zuphen, wo eine Nebensonne in einer offenen Stelle zwischen dichten Str oder CiStr ungefähr $\frac{1}{2}$ Grad höher als die Sonne beobachtet wurde. Die Möglichkeit einer optischen Wirkung der Wolkenverteilung in diesem Sinne wird auch noch auf S. 100 im Jahrgang 1910 erwähnt.

ein Cirrus-Streifen in entsprechender Stellung am Himmel den hellen Fleck und die helle Lichtsäule von der Sonne bis zur scheinbaren Nebensonne und über sie hinaus erzeugt hat, wobei die Nebensonne wie in den oben besprochenen Fällen als Ausschnitt aus dem gewöhnlichen Ringe zu erklären wäre.

Auch die Beobachtung von Süring scheint eine ähnliche Deutung nicht auszuschliessen. Die seitliche Verschiebung der hellsten Stelle, wo sich der gewöhnliche Ring und der obere Berührungsbogen treffen, kann sehr leicht durch ungleichmässige Verteilung der Wolken bedingt sein. Ich erinnere mich, am Himmel ähnliches gesehen zu haben, allerdings unter Umständen, die diese Deutung nahelegten. Der Liebenswürdige von Herrn Geheimrat Süring verdanke ich Abzüge der Halophotographien vom 18. Juni 1913 und vom 4. September 1915. Diese Abzüge lassen die genannte Abweichung von der normalen Gestalt der Halos nicht scharf erkennen; doch hat das wenig zu sagen. Dagegen kann es nicht abgeleugnet werden, dass die photographische Platte, genau so wie das Auge, wohl Helligkeitsunterschiede wahrnehmen kann, aber niemals imstande ist festzustellen, ob die Helligkeitsunterschiede durch die verschiedene Stellung der überall in gleicher Dichtigkeit verteilten Kristalle entstanden sind, oder, bei gleicher Fallstellung, durch eine verschiedene Dichtigkeit der Wolken. Der am 4. September 1915 beobachtete Horizontalkreis, der „gegen alle Regeln der meteorologischen Optik nicht durch die Sonne geht“ bleibt auch unter der Annahme geneigter Kristallachsen völlig unverständlich, könnte aber durch ungleiche Verteilung der Wolken am Himmel leicht eine Erklärung finden. Teilweise wurden die von Süring beobachteten Absonderlichkeiten schon früher gesehen (5, 7).

Noch mehr Eindruck als die genannten schiefen Erscheinungen macht auch auf den Zweifler die von Weidert und Berson beobachtete und photographierte schiefe Säule an Sonne und Mond. Nach der veröffentlichten Wiedergabe der Photographie kann man nicht urteilen; die unabhängige Schätzung zweier Beobachter, die übereinstimmend die Neigung der Säule zu 3 bis 4 Grad bestimmten, und der Hinweis darauf, dass das Negativ die Neigung der Sonnensäule deutlicher erkennen lässt, genügt, um die Tatsache einer schiefen Lichtsäule mit aller nur wünschenswerten Sicherheit festzulegen.

Dieser Bericht war es auch, der mich mehr als alle anderen zur Überzeugung drängte, dass unter Umständen eine gleichartig schiefe Stellung der Kristallachsen vorkommen kann. Eine Beobachtung, die ich am 20. Oktober 1923 in Riga machte, hat auch hier dem Zweifel neue Nahrung gegeben.

Um 9 Uhr 17 Minuten morgens nach Ortszeit war ein grosser Teil des Himmels, besonders auch die Umgebung der Sonne, mit CiCu, ACu und AStr bedeckt. Ungefähr 5° rechts von der Sonne und in gleicher Höhe mit ihr lag das untere Ende einer hellen Säule, die, um $20''$ nach rechts von der Vertikalen geneigt, sich als etwa sonnenbreites Band scheinbar scharf und geradlinig begrenzt bis 15° nach oben (und rechts) erstreckte. Die Helligkeit der Säule war auffallend, aber nicht blendend; eine Stelle, etwas unterhalb der Mitte, war heller als die anderen Teile. Die eigentümliche Lage der Säule liess mich von vornherein nicht daran zweifeln, dass es eine Zufallserscheinung war, doch konnte ich beim besten Willen in der Anordnung der Wolken keine Veranlassung zur Bildung der Erscheinung finden. Erst nach längerer Zeit, als Veränderungen im Wolkenbilde stattgefunden hatten, gelang es mir, noch zwei weitere, nur sehr leicht angedeutete Streifen zu erkennen, die parallel zum ersten lagen, und offenbar ebenso wie dieser als Polarbanden anzusprechen waren. Noch einige Minuten später war die Erscheinung verblasst, und das Vorhandensein einer streifigen Struktur der Wolken war nicht mehr zu erkennen. Eine wesentliche Abweichung dieser Säule von der am 19. Mai 1910 beobachteten wird man in ihrer kurzen Dauer sehen wollen. Leider ist es nicht genau angegeben worden, ob die letztgenannte Säule wirklich während der ganzen Dauer ihrer Erscheinung schief war. Können es nicht auch damals Polarbanden gewesen sein, solche, die nur durch die Säule merklich wurden? Oder kann nicht die Wolkenbank am Horizont, die auf der Photographie zu erkennen ist, die Lichtverteilung, wie bei der Entstehung der Dämmerungsstrahlen, beeinflusst haben? Die Möglichkeit solcher Deutungen kann wohl nicht ganz abgelehnt werden.

Es ist bekannt, welch wunderliche Gestalten die Ci häufig annehmen. Es liegt kein Grund dazu vor, dass sie nicht auch gelegentlich als geradlinige Streifen und auch als Kreisbögen erscheinen; dabei spielt unsere Neigung, eine nahezu gerade

Linie als vollkommene Gerade, eine irgendwie gekrümmte als Stück eines Kreisbogens anzusehen, eine nicht unwichtige Rolle. Die Photographie kann hier helfen; aber die doch immer sehr schwachen Lichterscheinungen werden auf der Platte nie scharfe Grenzen haben. Das Auge sieht viel mehr, fügt aber leider auch manches nicht Vorhandene hinzu. Vielleicht werden einmal genaue Untersuchungen der Helligkeit, Farbe und Polarisation des Lichtes die Antwort auf die Frage geben können, ob eine Stelle am Himmel hell erscheint, bloss weil mehr (unter Umständen auch weniger) Wolken-elemente an dieser Stelle vorhanden sind als anderwärts, oder weil eine besondere Brechung und Spiegelung an der betreffenden Stelle dank besonderen Umständen (Grösse, Gestalt, Fallstellung der Eiskristalle) unabhängig von der Dichte der Wolken-elemente eine grössere Helligkeit verursacht. Einstweilen bleiben uns nur subjektiv gefärbte Schlüsse über die mehr oder weniger grosse Wahrscheinlichkeit dieser oder jener Annahme übrig. Und solange sich das nicht ändert, können wir auch nur Vermutungen, keine Behauptungen, aussprechen*).

So soll auch meine ablehnende Stellungnahme gegenüber der Voraussetzung schiefer Kristallachsen aufgefasst werden; sie beansprucht nur das e i n e: ebenso berechtigt dazustehen wie die gegenteilige Annahme.

Man wird ein gewichtiges Argument zugunsten der Annahme geneigter Kristallachsen in der langen Dauer einer unveränderten schiefen Erscheinung sehen wollen; doch wird auch dieses Argument sehr geschwächt durch den Einwand, dass eine langandauernde gleichgrosse Neigung der Kristallachsen wohl mindestens ebenso unwahrscheinliche Bedingungen voraussetzt, wie eine dauernde eigentümliche Anordnung der Wolken.

Es ist eine undankbare Aufgabe, Kritik zu üben, ohne etwas wesentlich Positives bieten zu können. Doch liess sich in dieser Arbeit nicht wohl ein Eingehen auf die schiefen

*) Es erscheint nicht unmöglich, auch die von Johansson als Täuschung bezeichnete Beobachtung einer beweglichen Nebensonne durch Bewegung ungleich dichter Wolken zu erklären; als das Wahrscheinlichere wird wohl immer die von ihm vorausgesetzte Täuschung gelten müssen (69).

Haloerscheinungen und die bisher aufgestellten Erklärungsversuche vermeiden.

Beobachtungen schiefer Haloerscheinungen, und vor allem Messungen ihrer Lage, Ausdehnung und Helligkeit, sind dringend erwünscht, besonders auch Beobachtungen über den Fall der Eiskristalle und Untersuchungen über die Windverhältnisse und das elektrische Feld der freien Atmosphäre usw. im Hinblick auf die Fallbewegung der Eiskristalle.

9. Schon im Abschnitt I 2 dieser Arbeit wurde erwähnt, dass eine Reihe von Haloerscheinungen durch die Schwingungen der atmosphärischen Eiskristalle um ihre Gleichgewichtslage erklärt wird; in den Abschnitten II 4 und II 5 wurde gezeigt, dass die Annahme solcher Schwingungen durch die Beobachtung von fallenden Eiskristallen und Versuche im Laboratorium bestätigt wird. Die theoretischen Grundlagen dieses mechanischen Vorganges sind nicht ausreichend geklärt, so dass wir die Grösse des Drehmoments, das den Kristall in die Gleichgewichtslage zurücktreibt, nicht berechnen können. Aber ob wir nun den hydrodynamischen Druck auf eine schiefe Platte nach der Formel von Rayleigh (118) berechnen oder in anderer Art, wir dürfen wohl in jedem Fall annehmen, dass bei nicht zu grossem Ausschlag wenigstens annähernd die Gesetze der harmonischen Schwingungen gelten werden. Unter dieser Voraussetzung ist, wenn grössere Kristalle, deren Gestalt wesentlich von der Kugelgestalt abweicht, in gleichmässig bewegter Luft fallen, und dabei Haloerscheinungen von der bezeichneten Art erzeugen, eine Untersuchung der Verteilung der Kristallachsen auf die verschiedenen Richtungen im Raume möglich.

Denken wir uns eine grosse Zahl N von Kristallen im Mittelpunkt einer Hohlkugel vom Halbmesser R konzentriert. Die Fortsetzungen der Hauptachsen schneiden die Kugeloberfläche in $2N$ Punkten, die bei völlig ungeordneter Lage der Kristalle gleichmässig auf der Kugeloberfläche verteilt sind, so dass auf jede Flächeneinheit $2N/4\pi R^2$ solcher Schnittpunkte entfallen.

Wenn aber Schwankungen der Hauptachsen um die vertikale Gleichgewichtslage stattfinden, drängen sich die Schnittpunkte auf zwei Kugelkalotten zusammen. Die Schwingungsweite sei φ_0 , die jeweilige Neigung eines Kristalls gegen

die Vertikale sei φ und die Periode sei T . Dann folgt nach dem Gesetz der harmonischen Schwingungen für einen Kristall:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{2\pi}{T} \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}$$

Die pendelnde Achse durchläuft während der Zeit dt einen Winkel von φ bis $\varphi + d\varphi$. Während einer vollen Periode durchläuft sie diesen Winkel viermal, zweimal auf dem Wege zur Gleichgewichtslage, zweimal auf dem Wege von ihr. Während jeder vollen Periode ist also die Achse $4dt$ Sekunden um einen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ abgelenkt. Indem wir diesen Wert durch T teilen, finden wir den Bruchteil einer ganzen Periode, und damit auch den Bruchteil jeder ganzen Zahl von Perioden, während dessen sich die Achse in der angegebenen Neigung zur Vertikalen befindet. Wir können diesen Bruchteil auch als Bruchteil der Gesamtzahl aller Kristalle dn/N bezeichnen, der in jedem Augenblick um einen Winkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ von der Gleichgewichtslage entfernt ist:

$$\frac{dn}{N} = \frac{4 dt}{T} = \frac{2 d\varphi}{\pi \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

Mit N multipliziert, ergibt dieser Ausdruck die Zahl der Schnittpunkte von Kristallachsen auf einer Kugelzone, deren Oberfläche gleich $2\pi R^2 \sin \varphi d\varphi$ ist. Bei vollkommen gleichförmiger Verteilung auf die gesamte Kugeloberfläche kämen auf dieselbe Zone $N \sin \varphi d\varphi$ Schnittpunkte. Das Verhältnis der Anzahl von Schnittpunkten der Achsen mit der Kugeloberfläche bei der gegebenen Verteilung zu der Anzahl von Schnittpunkten bei gleichförmiger Verteilung soll die relative Dichte D heissen.

$$D = \frac{2}{\pi \sin \varphi \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

Es gibt zwei Werte von φ , denen eine unendliche grosse Dichte entspricht: $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi_0$. Das Maximum in der Gleichgewichtslage entsteht trotz der grossen Geschwindigkeit der Pendelbewegung in diesem Punkte dadurch, dass alle Hauptachsen, unabhängig vom Azimut der Schwingungen,

durch diese Lage gehen; das zweite Maximum wird durch die geringere Geschwindigkeit und die Umkehr der Bewegung in der äussersten Lage bedingt.

Führen dagegen die Hauptachsen Schwingungen um eine horizontale Gleichgewichtslage aus, so entspricht dem Ausschlag χ ein Winkel zwischen der Kristallachse und der Vertikalen von der Grösse $\varphi = 90^\circ - \chi$, und in der äussersten Lage $\varphi = 90 - \chi_0$.

Wie im vorigen Fall berechnet man die relative Dichte D.

$$D = \frac{2}{\pi \sin \varphi \sqrt{\chi_0^2 - \chi^2}}$$

Die Dichte der Hauptachsen bei horizontaler Gleichgewichtslage wird nur in der äussersten Abweichung unendlich gross; die Verteilung ist viel gleichmässiger als bei vertikaler Gleichgewichtslage.

Für Helligkeitsberechnungen kann man die Werte der Dichte dort, wo sie unendlich werden, nicht gebrauchen: die unendlich grossen Werte beziehen sich immer nur auf ein unendlich kleines Gebiet der gedachten Kugel, oder auf einen unendlich kleinen Raumwinkel. Es ist deshalb zweckmässig, die mittlere Dichte für endliche Raumwinkel zu berechnen. Wir finden die mittlere Dichte zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 , indem wir durch Integration die Anzahl der auf eine endliche Kugelzone entfallenden Schnittpunkte berechnen, und diese dann durch die Anzahl von Schnittpunkten teilen, die bei gleichmässiger Verteilung auf dieselbe Kugelzone kommt.

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dn = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{2 N d\varphi}{\pi \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \frac{2 N}{\pi} \left(\arcsin \frac{\varphi_2}{\varphi_0} - \arcsin \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \right)$$

$$D = \frac{2 (\arcsin \varphi_2/\varphi_0 - \arcsin \varphi_1/\varphi_0)}{\pi (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)}$$

Einen ähnlichen Ausdruck erhalten wir bei Schwingungen um eine horizontale Gleichgewichtslage.

In der folgenden Tabelle sind einige Werte der D für $\varphi_0 = 1^\circ$ und für $\chi_0 = 1^\circ$ angegeben.

φ/φ_0 oder χ/χ_0	$\varphi_0 = 1^0$ D	$\chi_0 = 1^0$ D
0,00—0,01	418000	36
0,09—0,10	22100	37
0,19—0,20	10900	37
0,29—0,30	7400	38
0,39—0,40	5800	40
0,49—0,50	4900	42
0,59—0,60	4400	46
0,69—0,70	4200	51
0,79—0,80	4400	61
0,89—0,90	5300	83
0,99—1,00	29900	524

Die mittlere Dichte erreicht, wenn die Gleichgewichtslage der Hauptachse vertikal ist, ein Minimum bei $\varphi/\varphi_0 = 0,71$, und, wenn die Gleichgewichtslage horizontal ist, bei $\chi = 0$. Im ersten Fall ist die Lage des Minimums von dem Werte von φ_0 abhängig, ändert sich aber, solange dieses klein bleibt, nur sehr wenig.

Die berechneten Werte der Dichte bei Schwingungsweiten von 1^0 lassen sich in einfacher Weise benutzen, um die angenäherten Werte auch für andere Schwingungsweiten zu finden, wenn diese nur nicht gross sind. Es bezeichne D' , φ_0' und φ' die Dichte, die Schwingungsweite und den Ausschlag in einem solchen Fall, wobei $\varphi_0' = k\varphi_0$ und $\varphi' : \varphi = \varphi_0' : \varphi_0$. Dann ist:

$$D' = \frac{2}{\sin k\varphi \sqrt{k^2\varphi_0'^2 - k^2\varphi'^2}}$$

Bei kleinem φ_0' ist demnach D' annähernd gleich D/k^2 .

In derselben Art findet man, wenn $\chi_0 = k\chi_0$ ist, und $\chi' : \chi = \chi_0' : \chi_0$, dass bei Pendelungen um die horizontale Gleichgewichtslage D' nahezu gleich D/k ist.

10. Die theoretischen Ausführungen des vorigen Abschnittes können nur dann ohne weiteres eine Anwendung zur Erklärung einiger Haloerscheinungen finden, wenn die Pendelungen in allen denkbaren Azimuten gleich oft geschehen, und wenn die Schwingungsweite für alle Kristalle innerhalb

einer Wolke wenigstens annähernd gleich gross ist. Die erste Bedingung ist wohl regelmässig erfüllt; in Bezug auf die zweite aber ist man auf Vermutungen angewiesen.

Sogar über die Grössenordnung der Schwingungsweite sind verschiedene Annahmen gemacht worden. Bravais (38) nimmt einen maximalen Ausschlag von nicht mehr als 4° an. Pernter (97) hält eine Schwingungsweite von 20° für sehr wahrscheinlich und eine solche bis zu 30° noch für möglich. Schoute (130) nimmt ein Maximum der Schwankungen von 5° an. Stuchtey (136) meint, dass nach den bisherigen Beobachtungen regelmässig vorkommende Schaukelungen bis zu maximalen Amplituden von 10° und mehr als ausgeschlossen gelten müssen: es könnten nur kleine Pendelungen, bis herab zu $10'$ (140), oder volle Rotationen vorkommen.

Will man die Grösse der Schwankungen mittelbar nach den Haloerscheinungen feststellen, so hängt das Ergebnis z. T. von den der Theorie zugrunde gelegten Voraussetzungen ab; zweifellos haben diese bei der Annahme der oben genannten Zahlenwerte mitgespielt. Solange insbesondere noch keine endgültige Entscheidung darüber gefällt ist, welche von den verschiedenen Theorien der Lichtsäulen die richtige ist, kann danach die Grösse der Schwankungen nicht festgestellt werden. Dagegen geben einige Beobachtungen der Untersonne die Möglichkeit einer einwandfreien Berechnung. Naturgemäss sind bei dieser Erscheinung, die nur unter der Bedingung kleiner Schwingungsweite entstehen kann, die ermittelten Werte immer niedrig, und die Frage, ob auch grössere Schwankungen vorkommen oder nicht, bleibt offen. Nach einer Beobachtung von W. Schmidt (126) findet man Schwingungsweiten von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}^{\circ}$, gleichzeitig auch grössere Schwingungen bis über $1\frac{1}{2}^{\circ}$, die aber nicht so häufig waren*) oder auch nur durch mehrfache Reflexion vorgetäuscht wurden: bei einer zweiten, von demselben Beobachter beschriebenen Erscheinung der Untersonne war die Schwingungsweite noch geringer. Nach einer ähnlichen Erscheinung fand Bottlinger (27) einen Wert von $0,6$ bis $0,9^{\circ}$, und Schwingungsweiten von derselben Grössenordnung

*) Schmidt schreibt 3° ; es scheint ein Fehler vorzuliegen (Durchmesser statt Halbmesser?).

lassen sich auch aus anderen Beobachtungen der Untersonne herleiten.

Diese Beobachtungen beweisen also, dass Schwingungsweiten von annähernd 1° vorkommen können, sagen aber nichts darüber aus, ob grössere möglich sind oder nicht. Weiter lässt sich aus ihnen schliessen, dass die Schwingungsweite der Kristalle einer Wolke vielleicht manchenmal nicht einheitlich ist.

Wenn in einer Wolke gleichzeitig verschiedene Schwingungsweiten vorkommen, so ist die Folge davon ein Verwischen oder völliges Verschwinden des Dichtemaximums bei dem grössten Ausschlag. Dagegen bleibt bei den Kristallen mit vertikaler Gleichgewichtslage der Hauptachse das dieser Lage entsprechende Dichtemaximum bestehen. Es ist möglich, dass die Theorie der Pendelungen aus diesem Grunde für die Kristalle mit horizontaler Gleichgewichtslage der Hauptachse ihre Bedeutung zum grössten Teile verliert, denn das Dichtemaximum ist hier ohnehin sehr schwach entwickelt. Das sehr bedeutende Hauptmaximum bei vertikaler Gleichgewichtslage ist vielleicht mit ein Grund dafür, dass die Erscheinungen der Gruppe a des Abschnitts I 2 so viel zahlreicher und auch auffallender sind als die der Gruppe b (Abschnitt I 6).

Dabei hat es wenig zu sagen, ob die vertikale Gleichgewichtslage wirklich genau oder nur annähernd erreicht wird. Man muss bei der Berechnung der Intensität einer Haloerscheinung in der Nähe der Gleichgewichtslage ja ohnehin stets die mittlere Dichte innerhalb eines endlichen Raumwinkels berücksichtigen, da sie in der Gleichgewichtslage selbst unendlich gross wird, dabei aber ein endliches Integral der mittleren Dichte ergibt. Die Beugung des Lichtes, die Unfähigkeit unsres Auges, leuchtende Punkte in einer Winkelentfernung von weniger als einer Minute zu unterscheiden, und die grossen scheinbaren Dimensionen der Lichtquellen (Sonne und Mond) lassen es fast völlig belanglos erscheinen, ob die Gleichgewichtslage tatsächlich oder nur annähernd erreicht wird. Wenn aber, wie Stuchtey (145) annimmt, ein „rotierender Gleitflug“ stattfindet, wobei ein Kristall dauernd dieselbe Neigung gegen den Horizont beibehält und nur das Azimut seiner Neigung ändert, oder wenn ein Rollen

stattfindet, sind natürlich die Formeln des vorigen Abschnittes nicht anwendbar; in dem häufigen gleichzeitigen Auftreten der Erscheinungen der Gruppen I und II liegt ein wichtiger Hinweis auf die Richtigkeit der Voraussetzungen des genannten Abschnittes.

Auch grössere Kristalle scheinen unter Umständen völlig unregelmässig zu fallen. So beobachtete W Schmidt (126) nahe beim Korbe des sinkenden Ballons eine Störung der ruhigen, leise schwankenden Fallbewegung der Plättchen, die eine Untersonne erzeugten. Bei der im Abschnitt I 2 und II 4 erwähnten Beobachtung von Lichtsäulen über den Strassenlaternen Dorpats am 12. Februar 1906 erhoben sich die Säulen nur dort bis zu einer Höhe von 30 bis 40⁰, wo die Luft ruhig war, während an anderen Stellen, wo ein leichter Wind wehte, ihre Höhe merklich geringer war. In der freien Atmosphäre gibt es keine Hindernisse, die die Bewegung der Luft stören könnten, wie in den genannten beiden Fällen; doch ist die Luft auch dort oft stark turbulent. Es gibt leider noch keine unmittelbaren Beobachtungen darüber, ob die Turbulenz in der freien Atmosphäre imstande ist, die Fallbewegung der Kristalle wesentlich zu stören. Wenn aber ein solcher Einfluss angenommen werden darf, dann ist bei stark turbulenter Luftbewegung nur auf die Erscheinungen der Gruppe III zu rechnen. Das häufige alleinige Erscheinen des gewöhnlichen Ringes kann ebensogut wie auf turbulente Luftbewegung auch auf eine solche Gestalt und Grösse der Kristalle zurückgeführt werden, die keine bestimmte Fallstellung bedingen.

III. Untersonnen und Lichtsäulen.

1. Die in den Abschnitten II 9 und II 10 behandelte Pendeltheorie der atmosphärischen Eiskristalle lässt sich besonders leicht auf die Untersonne und die Lichtsäulen anwenden.

Wenn, wie früher, vorausgesetzt wird, dass die Eiskristalle im Mittelpunkt O einer grossen Kugel zusammengedrängt sind, so wird die Richtung der Hauptachse eines Kristalls durch den Schnittpunkt P von Achse und Kugeloberfläche

zwar durch: 1) eine Drehung um den Winkel $\Delta\Phi$ um eine senkrecht zur Einfallsebene stehende Achse, wobei die Spiegelnormale in dieser Ebene bleibt, und 2) eine Drehung um AOB (die Schnittlinie von Horizont- und Einfallsebene) um den Winkel $X = \Psi \sin(90^\circ - H + \Delta\Phi)$. $\Delta\Phi$ und X können, solange sie klein sind, näherungsweise als rechtwinklige Koordinaten auf einer im Zenit an die Himmelskugel gelegten Tangentialebene aufgefasst werden.

Bei den eben besprochenen Veränderungen der Lage der Spiegelnormale wird der reflektierte Strahl entsprechend um die Winkel $\Delta\Phi' = 2\Delta\Phi$ und, vom erreichten Punkt aus, senkrecht zum Sonnenvertikal um $X' = \Psi \sin 2(90^\circ - H + \Delta\Phi)$ aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt. Auch diese Grössen lassen sich unter der genannten Bedingung als rechtwinklige Koordinaten auf einer im Punkt S' an die Himmelskugel gelegten Tangentialebene auffassen. Dann gelten die Formeln:

$$\Delta\Phi' = 2\Delta\Phi \quad (1) \quad X' = 2X \sin(H - \Delta\Phi) \quad (2)$$

Diese zwei Formeln bilden mit der Verteilungsfunktion D der Achsenrichtungen pendelnder Kristalle (Abschnitt II 9) die Grundlage aller weiteren Berechnungen der Gestalt und der Helligkeit von Untersonnen und Lichtsäulen.

2. Wenn die Sonne hoch steht und die Schwingungsbreite der Kristalle φ_0 gering ist, kann Formel (2) als Annäherung geschrieben werden:

$$X' = 2X \sin H$$

Ex bibl. univ. Dorp

Es soll nun die Richtung von den Strahlen bestimmt werden, die von Kristallen mit der gleichen Neigung φ , aber beliebigem Azimut ψ reflektiert werden. Die Normalen zu den Spiegelflächen (die Hauptachsen) erzeugen einen vertikalen Kegel; dieser schneidet die horizontale Tangentialebene in Z auf einem Kreise, dessen Durchmesser dem Winkel 2φ entspricht. Die reflektierten Strahlen erzeugen einen zweiten Kegel, der die Tangentialebene in S' annähernd auf einer Ellipse schneidet, deren Längsachse einem Winkel von 4φ entspricht, während die kürzere horizontale Achse durch den Winkel $4\varphi \sin H$ bestimmt wird. Im Grenzfall $H = 90^\circ$ verwandelt sich auch diese Ellipse in einen Kreis, der dann konzentrisch den ersten Kreis umfasst.

Daraus folgt, dass bei hochstehender Sonne alle Strahlen, die von Kristallen mit gleich grossem Neigungswinkel reflektiert werden, einen annähernd elliptischen Ring der Untersonne ergeben. Alle derartigen elliptischen Ringe einer Untersonne sind konzentrisch und ähnlich, und bilden zusammen das Bild der Untersonne, deren scheinbare Durchmesser durch $4\varphi_0$ und $4\varphi_0 \sin H$ bestimmt werden.

Die auf der Figur nach S' und den benachbarten Punkten hinführenden Strahlen scheinen dem Beobachter auf der Erde vom Gegenpunkt von S' , nämlich von S_1 und den ihm benachbarten Punkten am Himmelsgewölbe herzukommen. Die Winkelhöhe eines beobachteten Lichtpunktes über S_1 ist $2A\Phi$ und kann positiv oder negativ sein, je nach dem Vorzeichen von $A\Phi$; seine seitliche Entfernung vom Sonnenvertikal ist X' , und zwar liegt der Punkt ebensoweit hinter der Ebene der Zeichnung, wie P' vor ihr liegt.

3. Die Verteilung der Helligkeit im Bilde der Untersonne ist jetzt leicht zu berechnen. Wenn die Hauptachsen einer Gruppe von Kristallen innerhalb des Raumwinkels $d\Phi dX$ liegen, müssen nach dem Vorhergehenden die reflektierten Strahlen innerhalb des Raumwinkels $d\Phi' dX' = 2d\Phi 2dX \sin H$ liegen. Das Verhältnis dieser Raumwinkel ist konstant für alle Strahlen, die eine Untersonne bilden. Wenn man nun, was bei grosser Sonnenhöhe und kleiner Schwingungsweite möglich ist, unter Vernachlässigung der Abhängigkeit der reflektierten Strahlenmenge vom veränderlichen Winkel Φ , annimmt, dass die Helligkeit der Untersonne in ihren verschiedenen Teilen der Zahl der reflektierenden Kristalle proportional ist, muss die Helligkeit auf den genannten elliptischen Ringen ebenso verteilt sein wie die Dichte der Hauptachsen auf den einem bestimmten Wert von φ entsprechenden Kugelzonen. Es muss also die Helligkeit in der Mitte der Untersonne ein sehr starkes Hauptmaximum haben, und, wenn eine annähernd einheitliche Schwingungsweite der Kristalle vorhanden ist, muss am Rande der Untersonne ein hellerer Ring als Nebenmaximum sichtbar werden, während in der Entfernung von $\frac{1}{7}$ Zehnteln des Halbmessers vom Mittelpunkt die Helligkeit ein Minimum aufweisen muss. Da die Sonne nicht als punktförmig gelten kann, ist dieses Ergebnis in der üblichen Weise abzuändern: man stellt sich

vor, dass in der oben berechneten theoretischen Untersonne alle Lichtpunkte, deren Zahl proportional der Zahl der reflektierenden Flächen verteilt sein soll, durch je ein Sonnenbildchen von gleicher Lichtstärke mit dem Durchmesser von $0,5^{\circ}$ ersetzt werden.

Tatsächlich hat Bottlinger (27) genau solch eine Untersonne beschrieben, hat auch mit wenigen Worten das Wesentliche dieser Erklärung ausgesprochen: „In der extremen Lage verweilen sie“ nämlich die Kristalle, „am längsten, denn hier kehrt sich ihre Bewegung um. Daher entsteht der weisse Ring. Durch die Mittellage gehen sie alle mit der grössten Geschwindigkeit hindurch, aber hier vereinigen sich sämtliche Azimute und addieren ihre Helligkeit. So entsteht der weisse Fleck.“

In anderen Fällen wurde der weisse Ring nicht beobachtet, doch war die helle Mitte der Untersonne von einer schwächeren Randzone umgeben. Das kann an mehr als einem Grund gelegen haben. Es kann bei kleiner Schwingungsweite der Kristalle die Übereinanderlagerung der von verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe stammenden Spiegelbilder schon eine merkliche Überdeckung der Maxima und Minima verursachen. Ist aber die Schwingungsweite der Kristalle grösser, so ist noch eher als im ersten Fall eine Ungleichartigkeit in der Bewegung der einzelnen Kristalle zu erwarten, die der Ausbildung des umrahmenden hellen Ringes hinderlich ist. Schliesslich können mehrfache Spiegelungen (Abschnitt III 8) bei dichteren Wolken eine Rolle spielen.

Die Helligkeitsverteilung mit dem scharf ausgesprochenen und schnell nach aussen abfallenden Maximum in der Mitte kann vielleicht als Erklärung für das kleine scharfbegrenzte Bild der Sonne dienen, das Stuchtey (140) veranlasste, Schwingungsweiten von rund $10'$ anzunehmen.

Nicht unerwähnt soll es bleiben, dass der von Bottlinger beobachtete helle Ring von Stuchtey (145) auch als Folge des „rotierenden Gleitfluges“ von Kristallen aufgefasst wird, was wegen der notwendig gleichen Neigung vieler Kristalle, die auf Schraubenlinien sinken, und dabei ständig ihr Azimut ändern, nicht viel Wahrscheinlichkeit für sich hat. Ob die „Lichtschwänze“ der Untersonnen, Fort-

setzungen in der Richtung zur Sonne oder von ihr fort, nach Stuchtey (143) durch rollende Kristalle zu erklären sind, oder ob sie einfach als Übergangsform zwischen den Unter-sonnen und den Lichtsäulen aufzufassen sind, wird wohl am ehesten zu entscheiden sein, wenn man genügend Beobachtungen haben wird, um festzustellen, ob sie bei tief- oder bei hochstehender Sonne häufiger sind. Das erste würde gegen Stuchtey's Erklärung sprechen. Doch könnte auch mehrfache Reflexion in dichteren Wolken die Ursache sein.

4. Noch vor kurzem galt die von J. Galle (59) gegebene Erklärung der Lichtsäulen durch Sonne und Mond als zweifellos richtig, und man war höchstens über solche Einzelheiten, die Galle überhaupt nicht erwähnt hatte, verschiedener Meinung. Nach ihm entstehen die Säulen durch Spiegelung an den Endflächen platter Eiskristalle, wenn bei ruhiger Luft mehr solche vorhanden sind, die eine kleine, als solche, die eine grosse Neigung gegen den Horizont haben. Diese Erklärungsart wurde von Bravais (37) aufgenommen und ausgebaut.

Bei einer Sonnenhöhe H und einer maximalen Neigung φ_0 der spiegelnden Flächen sind die äussersten der von den unteren Flächen der Kristalle gespiegelten Strahlen (Säule über der Sonne) um den Winkel $2\varphi_0 - H$, die äussersten von der oberen Fläche reflektierenden Strahlen (Säule unter der Sonne) um den Winkel $2\varphi_0 - H$ gegen den Horizont geneigt; wenn $H > \varphi_0$, fehlen die ersten ganz, und wenn $H < -\varphi_0$, fehlen die zweiten. Daher ist nicht nur die Länge der Säulen, sondern auch die Möglichkeit ihrer Entstehung bei gegebener Sonnenhöhe von der maximalen Neigung der spiegelnden Flächen gegen den Horizont abhängig.

Um die zuweilen beobachtete grosse Länge der Lichtsäulen und die, wenn auch kurzen, Säulen bei hohem Sonnenstande zu erklären, muss man entweder sehr starke Neigungen der spiegelnden Flächen gegen den Horizont annehmen, oder aber mehrfache Reflexionen. Es lässt sich zeigen, dass unter der ersten Voraussetzung die Säulen sehr breit werden; so erreicht bei $\varphi_0 = 10^\circ$ die grösste Breite der Säule über einer punktförmigen Lichtquelle, die am Horizont steht, etwa $4''$, bei $\varphi_0 = 20^\circ$ steigt sie sogar bis auf

14° , dazu kommt immer noch der scheinbare Durchmesser der Sonne hinzu. Diese Breite ist schlecht mit der fast ausnahmslos beobachteten schmalen Gestalt der Säulen, die kaum breiter als die Sonne erscheinen, zu vereinigen (39, 129).

Darum setzte Bravais nur kleine Abweichungen von der Gleichgewichtslage voraus, dafür aber mehrfache Reflexionen. Bei einer Schwingungsweite $\varphi_1 = 2^{\circ}$ und $\varphi_0 = 4^{\circ}$ bewirkt die einmalige Spiegelung, wenn die Lichtquelle punktförmig am Horizont steht, eine grösste Breite der Säule von $8'$ und von $33'$. Durch die mehrfache Spiegelung werden die Säulen freilich nicht nur länger, sondern auch breiter, und zwar beides ungefähr proportional der Anzahl der Spiegelungen; doch ist die berechnete Breite in diesem Fall sehr viel geringer, als wenn man die ganze Länge der Säule durch nur einmalige Reflexion bei grosser Schwingungsweite der Kristalle zu erklären sucht.

Gegen die Erklärungsweise durch mehrfache Reflexionen wird eingewandt, dass dabei eine bedeutende Schwächung des Lichtes eintreten muss. Auch liegt es nahe, anzunehmen, dass bei den langen und breiten Säulen, die durch einmalige Reflexion entstehen könnten, die senkrechte Mittellinie der Säulen durch ihre Helligkeit ausgezeichnet sein müsste, und dass deshalb wohl auch der Eindruck einer schmalen Säule entstehen könnte.

Solche Erwägungen haben wohl Pernter (100) veranlasst, grosse Schwankungen der Kristalle vorauszusetzen (Abschnitt II 10), doch war er bereit anzunehmen, „dass auch die dreimalige Reflexion noch genug lichtstarke Strahlen liefert, um an dem oberen Aufbau der Säulen teilzunehmen, wenn auch der Unterschied in der Intensität schon recht bedeutend sein muss“

Schoute (129) und mit ihm Everdingen (49) glauben wieder die Erklärung in mehrfachen Reflexionen an Kristallen mit kleiner Schwingungsweite zu finden.

Dann hat Stuchtey (136) eine ganz neue Theorie der langen Lichtsäulen aufgestellt, indem er die überraschende Tatsache nachwies, dass Prismen, deren Achsen sämtlich horizontal liegen, die aber sonst alle nur denkbaren Lagen gleich häufig einnehmen, das Licht so reflektieren, dass die Helligkeit vorzugsweise auf das Gebiet über und unter der

Lichtquelle konzentriert wird. Dieselbe Wirkung kann auch von Plättchen oder Sternen hervorgerufen werden, wenn sie rollen, d. h. um eine horizontale Nebenachse rotieren. Man kann sich versucht fühlen, in dieser Theorie die ersehnte Rettung aus der Zwickmühle der beiden Varianten der Gallischen Theorie zu finden. Doch taucht gleich ein Bedenken auf: es ist nicht bekannt geworden, dass man, während eine Lichtsäule beobachtet wurde, zugleich auch Eisnadeln oder Prismen gesehen hat, während Plättchen oder flache Sterne bei solchen Gelegenheiten mehrfach beobachtet worden sind. Es liegt daher nahe anzunehmen, dass die Nadeln und Prismen, die Stuchtey in erster Linie für die Säulen verantwortlich macht, aus der Erklärung ausscheiden müssen*).

Auch will es scheinen, dass die Annahme eines allgemeinen Rollens der Eiskristalle noch einer Bestätigung durch

*) Wie Barral und Bixio (17) haben jetzt auch in letzter Zeit Wigan und Schwab (160) während der Beobachtung einer Untersonne (nicht einer Lichtsäule) „Eisnadeln“ vermerkt. Da aber nur gesagt wird, dass die Kristalle „vorwiegend Nadelform“ besaßen, und auch andre Formen vorhanden waren, beweist die Beobachtung noch nicht endgültig, ob die Untersonne auch in Eisnadeln entstehen kann. Auf jeden Fall ist eine genaue Beobachtung ebenso dringend erwünscht, wie die Beschränkung des Wortes „Eisnadeln“ auf den ursprünglichen Sinn und die Vermeidung dieser Bezeichnung bei Eiskristallen beliebiger Gestalt. Meine bei einer früheren Gelegenheit geäußerten Bemerkungen, die sich gegen den Missbrauch des Wortes richteten (86), sind von Everdingen, soweit als sie sich auf die „Onweders“ beziehen, zurückgewiesen worden mit der Begründung, dass der Ausdruck „ijsnaldjes“ bloss der Kürze wegen benutzt wird, statt „ijskristalletjes“, und dass damit zu der Frage, ob die Haloerscheinungen in Nadeln oder in Plättchen und Sternen entstehen, noch keine Stellung genommen werden soll, „zoals ten onrechts door R. Meyer is begrepen“ (Onweders XXIX. Jahrg. 1908, 103 [1910]). An der angeführten Stelle habe ich nicht behauptet, dass der Gebrauch des Wortes mit bestimmten theoretischen Vorstellungen über die Entstehung der Haloerscheinungen verknüpft sein muss, wohl aber darauf hingewiesen, dass der Leser im Ungewissen darüber gelassen wird, ob bloss Eiskristalle einer nicht weiter festgestellten Form beobachtet wurden, oder ob die besondere Nadelgestalt der Kristalle bestimmt wurde, und dass, wie die Erfahrung lehrt, hierdurch leicht zu einem Irrtum Veranlassung gegeben wird. Das ist um so bedauerlicher, als bestimmt nicht ganz selten die Möglichkeit zur Feststellung der Kristallform gegeben ist; und derartige Beobachtungen sind zur Lösung mancher grundlegenden Frage der Halotheorie dringend nötig (Abschnitt II 6).

die Beobachtung bedürfte. Bisher ist ein häufiges Rollen nur an grossen Objekten, wie Schneeflocken und Papiermodellen, beobachtet worden (Abschnitt II 5). Doch will dieser Einwand noch nicht viel bedeuten, weil die gleiche Wirkung auch durch Prismen mit horizontaler Achse und beständiger, aber bei verschiedenen Kristallen verschiedener Stellung hervorgerufen wird. Auch fehlt es noch an unmittelbaren Beobachtungen über die horizontale Stellung der Nadeln und Prismen. Doch wird diese Annahme durch die grosse Zahl von Haloerscheinungen der Gruppe b (Abschnitt II 2) sehr wesentlich gestützt. Dagegen zeigt die Statistik im Abschnitt I 5, dass eine Entstehung der Säulen in Plättchen und Sternen wahrscheinlicher ist, als die Entstehung in Nadeln oder Prismen.

Dass aber Stuchtey (144) schreibt: „Nadeln oder Prismen werden die hellsten Säulen erzeugen, da bei ihnen in einem Kristall immer 3 Paare spiegelnder Flächen zusammengedrängt sind, gegen nur zwei wesentlich in Betracht kommende Flächen bei den Plättchen und Sternen“, wirkt wenig überzeugend, weil ja offenbar auch die Grösse der spiegelnden Fläche berücksichtigt werden muss; der Vergleich fällt dann wohl zuungunsten der Nadeln und Prismen aus (Abschnitt III 5).

Auch die Bemerkung von Stuchtey (142): „bei diesen Säulen hat man häufig eine Verbreiterung nach oben hin wahrgenommen (vgl. Pernter, Met. Optik, p. 259)“, ist nicht ohne Widerspruch hinzunehmen. Es heisst bei Pernter: „ja sie scheinen sich sogar zuweilen von der Sonne ab etwas zu verbreitern“

Wie dem auch sei, die Theorie von Stuchtey bringt uns eine völlig neue Idee, die um so beachtenswerter ist, als die älteren Erklärungsversuche nicht recht befriedigend scheinen wollen.

Exner führt in der zweiten Auflage der Meteorologischen Optik (105) die verschiedenen Theorien nebeneinander auf, ohne einer von ihnen den unbedingten Vorzug zu geben.

Es bestehen demnach heute drei Theorien der Lichtsäulen, wobei zwei von Gallies Auffassung ausgehen.

1) Nur einmalige Spiegelung an den Endflächen von Eiskristallen (Plättchen und Sternen), deren Hauptachse mit

einer unter Umständen auch grossen Schwingungsweite (bis zu 20° und mehr) um die Vertikale pendelt.

2) Mehrfache Spiegelungen an den Endflächen der Kristalle bei ausschliesslich kleiner Schwingungsweite (z. B. bis 5° höchstens) der Hauptachsen um die Vertikale.

3) Spiegelung an den Seitenflächen genau horizontaler, im übrigen aber ohne jede Ordnung gelagerter Eisnadeln oder länglicher Prismen, unter Umständen auch an rollenden Kristallen flacher Gestalt.

Alle drei Theorien sind gezwungen, in reichlichem Masse mit Voraussetzungen zu operieren, hauptsächlich solchen über: 1) die Intensität des reflektierten Lichtes und besonders über das Verhältnis der Intensitäten des einfach und des mehrfach reflektierten Lichtes, 2) die Fallbewegung der Eiskristalle, besonders die Stabilität der horizontalen Nadeln, die Schwingungsweite der flachen Formen und das Rollen.

Eine Entscheidung darüber, welche von diesen Erklärungen denn eigentlich die richtige ist, kann neben Beobachtungen (besonders der Kristalle) und Messungen (besonders der Helligkeitsverteilung) nur eine Helligkeitsberechnung geben.

Die bisher in dieser Richtung ausgeführten Versuche sind recht unvollständig.

Everdingen (50) findet, dass die Spiegelung an Kristallen, die eine gleiche Neigung φ gegen die Vertikale haben, aber ein verschiedenes Azimut ψ haben, eine Lichtkurve am Himmel entstehen lässt, auf der einer bestimmten Azimutdifferenz $\Delta\psi$ sehr ungleich lange Bogenstücke Δs entsprechen. Er nimmt an, dass ein kleines $\Delta s : \Delta\psi$ geringer Streuung der Strahlen und darum einer grossen Helligkeit entspricht (am höchsten und am tiefsten Punkt der Kurve), ein grosser Wert des Verhältnisses aber einer starken Streuung und geringen Helligkeit. Dieser Schluss ist naheliegend, aber anfechtbar: es ist z. B. schon aus einer Zeichnung von Bravais (39) zu ersehen, dass Kristalle mit einer etwas abweichenden Neigung, sagen wir $\varphi + \Delta\varphi$, eine andere Lichtkurve ergeben, die gerade an den Stellen, wo das Verhältnis $\Delta s : \Delta\psi$ besonders klein ist, weit von der ersten Kurve absteht, und umgekehrt; es wird, bildlich gesprochen, das Licht in der einen Richtung zusammengepresst,

in der anderen auseinandergereckt, und das Ergebnis bleibt ohne genauere Berechnung völlig unbestimmt.

Einen Ansatz zu einer Helligkeitsberechnung findet man auch bei Stuchtey, wo Fig. 12 in gewissem Sinne eine Zusammenfassung der Zeichnungen von Bravais und Everdingen gibt.

5. Eine vollständige Helligkeitsberechnung der Lichtsäulen bereitet nicht geringe Schwierigkeiten. Dagegen ist es leicht, einen Vergleich zwischen den Flächenhelligkeiten, die sich nach den Theorien von Galle (bei nur einmaliger Reflexion) und Stuchtey ergeben, anzustellen.

Zur Beurteilung der Helligkeit von Lichtsäulen nach der Theorie von Galle benutzen wir die Formeln des Abschnittes II 9; danach ist die Anzahl der Hauptachsen von Eisplättchen, die um ihre Gleichgewichtslage pendeln und um den Winkel zwischen den Grenzen φ und $\varphi + d\varphi$ zur Vertikalen geneigt sind, gleich:

$$dn = \frac{2 N d\varphi}{\pi \sqrt{q_0^2 - q^2}}$$

Einem Azimut zwischen den Grenzen ψ und $\psi + d\psi$ entspricht der Bruchteil $d\psi/2\pi$ aller dieser Hauptachsen. Demnach ist die Zahl der in einer bestimmten Richtung orientierten Spiegelflächen gleich dem Produkt der beiden gefundenen Ausdrücke, die Menge des in dieser Richtung reflektierten Lichtes ist proportional diesem Produkt und proportional der Grösse der reflektierenden Flächen (die mit F bezeichnet werden soll):

$$\frac{N F d\varphi d\psi}{\pi^2 \sqrt{q_0^2 - q^2}} \quad (A)$$

Nach Stuchtey liegen Nadeln oder Prismen horizontal. Ihre Zahl sei N' . Zum Azimut zwischen den Grenzen ψ und $\psi + d\psi$ gehören $N'd\psi/\pi$ Kristallachsen. Bei der vorausgesetzten Rollbewegung der Kristalle müssen alle Neigungswinkel der Normalen zu den sechs spiegelnden Seitenflächen gegen die Lotlinie gleich häufig vorkommen. Die Zahl der Normalen, die eine Neigung zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ haben, ist also gleich $6 N' d\varphi d\psi/2\pi^2$.

Die Grösse der Seitenflächen der Kristalle sei f ; dann ist die reflektierte Lichtmenge proportional:

$$\frac{3 N' f d\varphi d\psi}{\pi^2} \quad (B)$$

Der Proportionalitätsfaktor ist bei beiden berechneten Ausdrücken in gleicher Weise abhängig von der Intensität der Sonnenstrahlung, von dem Einfallswinkel der Strahlen und von der Schwächung des Sonnenlichts durch Abschirmung einiger Kristalle durch andere. Setzen wir voraus, dass N' gleich N ist, und dass die Wirkung der Abschirmung des Lichtes in beiden Fällen die gleiche ist, so ist das Verhältnis der Helligkeiten entsprechender Flächenelemente der Lichtsäulen nach den Erklärungen von Stuchtey und Galle gleich dem Verhältnis der Ausdrücke (B) und (A), nämlich:

$$3 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} f/F$$

Nach allem, was über die atmosphärischen Eiskristalle bekannt geworden ist, z. B. nach den Mikrophotographien in Pernter-Exners Meteorologischer Optik, ist f/F immer bedeutend kleiner als 1. Setzen wir den unwahrscheinlichen, für die Theorie von Stuchtey günstigen Fall voraus, dass f/F gleich $1/3$, so wird das Verhältnis der Helligkeiten gleich $\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}$. Dieser Ausdruck erreicht seinen grössten Wert bei $\varphi = 0$, d. h. für den Punkt der Lichtsäule, in dem zuweilen das Spiegelbild der Sonne, die Untersonne, entsteht, der aber gewöhnlich unter dem Horizont liegt. Nimmt man dann noch den grössten für φ_0 je angesetzten Wert, nämlich 30° , so wird das Verhältnis der Helligkeiten gleich 0,52.

Es wird also auch unter den denkbar günstigsten Bedingungen kein Element einer Säule, die durch Reflexion an rollenden Nadeln oder Prismen entsteht, die Helligkeit der anderen Säule, die durch Spiegelung an den Endflächen einer gleich grossen Anzahl pendelnder Plättchen entsteht, erreichen; dabei wird vorausgesetzt, dass etwaige Beugungserscheinungen zu vernachlässigen sind.

Wenn φ_0 einen kleineren Wert hat, werden die Bedingungen ungünstiger: für $\varphi = 0$ und $\varphi_0 = 1^\circ$ erhalten wir nur noch 0,017 als Verhältnis der Helligkeiten.

Sobald φ einen von 0 abweichenden Wert erhält, wird das Verhältnis der Helligkeiten noch kleiner. Bei $\varphi = \varphi_0$ wird das theoretische Verhältnis gleich 0. Aber bei einem $\varphi > \varphi_0$ wird es unendlich, doch spricht auch dieses nur zugunsten der Theorie von Galle; danach entstehen nämlich, besonders bei kleinem φ_0 , mehr oder weniger scharf begrenzte helle Säulen, während nach Stuchtey das gesamte Himmelsgewölbe hell erscheint, wobei seine Theorie wohl erkennen lässt, dass die Helligkeit über und unter der Sonne am grössten sein muss, aber gar keine Veranlassung zu der Annahme gibt, dass eine auch nur einigermaßen deutlich begrenzte Säule wahrgenommen werden könnte.

Noch ungünstiger stellen sich die Bedingungen für die Theorie von Stuchtey, wenn man annimmt, dass die Achsen der Nadeln und Prismen nicht genau horizontal liegen, sondern dass sie, was zum mindesten sehr wahrscheinlich ist, um eine horizontale Lage hin und her pendeln.

Nehmen wir statt der länglichen Prismen rollende Plättchen an, so ist die Zahl der spiegelnden Flächen statt 6 nur 2, ihre Grösse aber statt f jetzt F . Um den Helligkeitsvergleich auch für rollende Plättchen durchzuführen, müssen wir das früher gefundene Helligkeitsverhältnis durch $3f/F$ teilen, und erhalten denselben Wert, den wir oben unter der Annahme der Beziehung $f/F = 1/3$ gefunden hatten. Das Ergebnis ist nur insofern günstiger, als man nicht eine unwahrscheinliche Grösse der Seitenflächen der Prismen voraussetzen braucht. Dagegen muss für annähernd horizontale Strahlen die Lichtdurchlässigkeit einer Wolke, in der flache Kristalle um eine horizontale Achse rotieren, viel geringer sein als die Lichtdurchlässigkeit einer anderen Wolke, die aus annähernd horizontal schwebenden Plättchen besteht.

Neben den schon im vorigen Abschnitt genannten Einwänden, die sich auf Beobachtungen der Kristalle stützen, genügen diese theoretischen Ausführungen wohl, um die von Stuchtey gegebene Erklärung der langen Säulen als unzureichend zu kennzeichnen.

Der oben für die Lichtsäulen durchgeführte Helligkeitsvergleich gilt natürlich auch für die Untersonnen und zeigt,

dass eine wesentliche Beteiligung rollender Kristalle, wie sie Stuchtey annimmt (143), wenig wahrscheinlich ist.

6. Es bleibt jetzt nur noch zu entscheiden, welche von beiden Varianten der Galle'schen Theorie den Vorzug verdient, und ob eine von ihnen imstande ist, den Beobachtungstatsachen gerecht zu werden. Ehe diese Prüfung durchgeführt wird, soll eine einfache Herleitung der Gestalt der Säulen, die durch einmalige Spiegelung an pendelnden Plättchen entstehen, gegeben werden. Die im Abschnitt III 1 hergeleitete Formel (2) darf bei der Berechnung der Lichtsäulen wegen der geringen Sonnenhöhe H nicht mehr durch Vernachlässigung von $\Delta\Phi$ vereinfacht werden.

Man findet die rechtwinkligen Koordinaten des von einer spiegelnden Fläche erzeugten Lichtflecks, indem man erst die Koordinaten $\Delta\Phi$ und X des Punktes P , auf den die Normale der spiegelnden Fläche hinweist, durch Rechnung oder Zeichnung bestimmt, darauf $\Delta\Phi$ verdoppelt und $X' = X \sin(H - \Delta\Phi)$ ebenfalls durch Rechnung oder Zeichnung ermittelt. Am einfachsten ist es, nachdem man festgesetzt hat, welche Strecke einem Bogengrad entsprechen soll, über dem Horizont den Punkt S , unter ihm S_1 zu bezeichnen, dann von S_1 aus einen Kreis mit dem Halbmesser φ (z. B. zur Bestimmung der Grenzen der Säule — mit dem Halbmesser φ_0) zu schlagen, und durch ihn einige horizontale Sehnen zu ziehen; ihre Entfernung $\Delta\Phi$ von S_1 ist zu verdoppeln, und auf eine durch den so gefundenen Punkt des Sonnenvertikals gehende horizontale Linie die Strecke X' aufzutragen. Diese kann ebenfalls unter Benutzung zeichnerischer Methoden gefunden werden.

Der angegebene Weg ist nicht mathematisch streng, aber doch wohl für alle praktischen Zwecke genau genug, dabei bedeutend einfacher als die Berechnung mit den Formeln der sphärischen Trigonometrie, deren Genauigkeit doch meist wieder durch die zeichnerische Interpolation der Kurve zwischen den berechneten Punkten und durch die Darstellung auf einer Ebene herabgesetzt wird. Die Ergebnisse der Berechnung, d. h. die Gestalt der Säulen, die einer bestimmten Schwingungsweite φ_0 entsprechen, ist aus früheren Arbeiten, z. B. der von Stuchtey (136), bekannt.

7. Will man die Helligkeitsverteilung in einer Lichtsäule nach der Theorie von Galle unter der Annahme nur einmaliger Reflexion berechnen, so kann man den in dem Abschnitt III 5 gegebenen Ausdruck benutzen, durch den die Summe aller spiegelnden Flächen bestimmt wird, deren Normalen innerhalb eines vorgeschriebenen unendlich kleinen Raumwinkels liegen:

$$\frac{N F d\varphi d\psi}{\pi^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

Die gesamte auffallende Lichtmenge wird durch Multiplikation dieses Ausdrucks mit der Intensität der Sonnenstrahlung J und mit dem Cosinus des Einfallswinkels Φ der Strahlen gefunden. Davon wird nur ein Bruchteil r reflektiert; die gesamte reflektierte Lichtmenge ist dann:

$$\frac{J N F r \cos \Phi d\varphi d\psi}{\pi^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}}$$

Chr. Wiener (159) hat die Grösse r nach den Fresnelschen Formeln berechnet: r kann Werte von 0,18 (bei $\Phi = 0$) bis 1,00 (bei $\Phi = 90'$) annehmen; bei den Lichtsäulen kommen nur die grösseren Werte von r in Betracht.

Nach den Ausführungen des Abschnittes III 1 fällt diese Lichtmenge auf das Flächenelement der gedachten grossen Kugel $4 R^2 \sin\Phi \cos\Phi d\Phi d\Psi$. Die Beleuchtungshelligkeit ist demnach:

$$\frac{J N F r \cos\Phi d\varphi d\psi}{\pi^2 \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2} 4 R^2 \sin\Phi \cos\Phi d\Phi d\Psi}$$

Nachdem man den Bruch mit $\sin\varphi$ erweitert hat, lässt sich im Zählen $\sin\varphi d\varphi d\psi$ durch $\sin\Phi d\Phi d\Psi$ ersetzen, wobei die Grössen φ und ψ einerseits, Φ und Ψ andererseits in der durch die Figur angedeuteten Weise miteinander verbunden sind; der genauer formulierte Zusammenhang ist bei Stuchtey (138), der allerdings andre Bezeichnungen benutzt (\mathcal{A} , D , e , x), zu finden.

Nach erfolgter Kürzung erhält man für die Flächenhelligkeit folgenden Ausdruck:

$$J N F r$$

$$4\pi^2 R^2 \sin\varphi \sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}$$

Der Faktor R^2 liesse sich durch einen Übergang von der Helligkeitsverteilung auf der beleuchteten Fläche zur Verteilung im Raumwinkel fortschaffen. Hierzu liegt aber, da nur Vergleiche der Helligkeit an verschiedenen Stellen beabsichtigt sind, keine Veranlassung vor.

Wir sehen, dass der Ausdruck für die Helligkeit bei gegebenem φ und φ_0 bis auf den Faktor r konstant ist; dieser ist vom Einfallswinkel abhängig und erreicht bei $\varphi = 90^\circ$ seinen Höchstwert 1; dann ist $\Phi A = H$, d. h. der untersuchte Punkt rückt bis an die Lichtquelle heran.

Auf einer Lichtkurve, die durch Kristalle mit gleicher Neigung zur Vertikalen erzeugt wird, nimmt demnach die Helligkeit mit zunehmender Höhe über der Sonne oder der Tiefe unter ihr ab, bleibt aber, wenn φ_0 nicht gar zu gross ist, entgegen der Auffassung von Everdingen (Abschnitt III 4), in allen Teilen der Kurve nahezu gleich. Schwerer ist es, solche Änderungen der Helligkeit auf einer Kurve zu schätzen, die durch die verschiedene Dicke der Wolken in der Blickrichtung verursacht werden.

Untersucht man die Helligkeit von Lichtkurven, deren jede einem bestimmten Wert von φ entspricht, so findet man, wie bei der Untersonne, ein Helligkeitsmaximum bei $\varphi = 0$ und ein zweites schwächeres bei $\varphi = \varphi_0$. Das erste kann nur ausnahmsweise als Untersonne oder als horizontnahe „doppelte Sonne“ (Obersonne) beobachtet werden, das zweite wird nach Abschnitt II 10 besonders bei grosser Schwingungsweite vermutlich nur selten gut entwickelt sein. Bei geringer Schwingungsweite wieder ist die Lichtsäule so schmal, dass durch die Winkelausdehnung der Sonne eine Überdeckung der Maxima und Minima entstehen muss.

Von besonderer Bedeutung ist es aber, dass bei grösserer Schwingungsweite, z. B. 20° , in der Entfernung von $2 \times 0,7 A \Phi$ über dem Spiegelpunkt der Sonne ein Minimum der Helligkeit vorhanden sein muss, von dem aus in allen Richtungen, auch nach oben, nach rechts und nach links, die Helligkeit zunimmt, denn in diesen Richtungen ist ja das zweite Maximum zu suchen. Die Lichtsäule muss dann ungefähr

die Gestalt eines aufrechtstehenden Blattes haben, dessen dicht über der Sonne befindlicher Stengelteil besonders hell hervortritt, dessen Rand aber ebenfalls heller ist als die Blattfläche. Nimmt man auch an, dass das zweite Maximum durch ungleiche Schwingungsweite der Kristalle sehr verbreitert und verwischt wird, so darf man doch in grösserer Höhe über der Sonne keinen durch seine Helligkeit hervortretenden senkrechten Streifen erwarten.

Es ergibt sich damit, dass die Annahme grosser Schwingungsweiten flacher Eiskristalle nicht nur zu der schon bekannten sehr breiten Gestalt von „Säulen“ führen muss, sondern auch, dass die Lichtverteilung in einem solchen Gebilde denkbar wenig geeignet ist, den Eindruck eines schmalen, senkrechten Bandes zu machen.

Will man ein vollständiges Bild der tatsächlichen Verteilung der Helligkeit in den Lichtsäulen haben, so muss man die mittlere Dichte der Kristallachsen (Abschnitt II 9) benutzen und auf die Grösse der Sonnenscheibe Rücksicht nehmen. Es braucht wohl kaum ausgeführt zu werden, dass auch bei dieser Berechnung alle oben hergeleiteten Ergebnisse der Helligkeitsvergleichen bestehen bleiben.

8. Aus dem letzten Abschnitt geht hervor, dass die Lösung der Frage, ob Lichterscheinungen zweiter und höherer Ordnung dem Auge merklich werden können, von entscheidender Bedeutung für die Theorie der senkrechten Lichtsäulen nach Galle ist; ihre Bedeutung für die Lösung anderer Probleme ist schon früher, Abschnitt I 5, berührt worden.

Die Bemerkung A. Wegeners (152), dass die Helligkeit des sekundären Halos zu der des primären, ihm als Lichtquelle dienenden, sich ebenso verhalten muss, wie die Helligkeit dieses Halos zur Helligkeit der Sonne, darf wohl als klarer Ausdruck einer fast allgemein vertretenen Ansicht gelten.

Es scheint, dass man nie versucht hat, diese Frage in strenger Weise zu lösen; das ist auch nicht leicht. Doch lässt sich mit wenigen Voraussetzungen eine einfache mathematische Lösung finden, die wenigstens der Grössenordnung nach die Helligkeitsverhältnisse richtig wiedergeben muss.

Im gegebenen Fall ist auch dieses schon entscheidend: sind die Erscheinungen zweiter und höherer Ordnung von annähernd gleicher Helligkeit wie die erster Ordnung, so steht der Erklärung der Säulen durch mehrfache Reflexionen an Kristallen, die nur kleine Schwankungen ausführen, nichts mehr im Wege; im entgegengesetzten Fall muss eine neue Erklärung gesucht werden, da keine der bisher besprochenen befriedigend ist. Die nachfolgende Rechnung wurde von mir in der Hauptsache schon vor 14 Jahren ausgeführt, aber damals weder auf das besondere Problem der Säulen angewandt, noch veröffentlicht.

Es mögen Sonnenstrahlen von der Intensität I auf eine homogene Wolke fallen und in ihr bis zum Austritt den geradlinigen Weg S zurücklegen. Innerhalb der Wolke, in der Entfernung s von der Eintrittsstelle, werden die Strahlen auf dem Element ds des Weges durch Absorption, Brechung, Spiegelung oder Beugung geschwächt, und zwar proportional der jeweiligen Intensität I_s :

$$dI_s = - a I_s ds \quad (1) \quad I_s = I_0 e^{-as} \quad (2)$$

a ist der für den Grad der Lichtschwächung charakteristische Proportionalitätsfaktor, der Extinktionskoeffizient. Gleichung (2) folgt aus (1) durch Integration.

Die Intensität i_0 der unabgelenkt aus der Wolke tretenden Strahlen ist gleich:

$$i_0 = I_0 e^{-aS} \quad (3)$$

Ein Teil der Strahlen werde in einer bestimmten Richtung, die von der ursprünglichen wenig abweicht, reflektiert; dieser Teil sei a_1 , wobei naturgemäss $a_1 \leq a^*$.

Setzt man in den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (1) den Koeffizienten a_1 statt a , so erhält man die Menge von Strahlen in der besonderen, von uns untersuchten Richtung, die auf der Strecke ds durch Reflexion von dem ursprünglichen Bündel abgespalten werden. Diese Strahlen haben noch den Weg $S-s$ innerhalb der Wolke zu durchlaufen, und werden dabei ebenfalls in der geschilderten Weise geschwächt, so dass nur die Strahlenmenge

*) Genau in derselben Art liessen sich anstelle reflektierter Strahlen gebrochene oder gebeugte untersuchen.

$a_1 I_0 e^{-as} ds e^{-a(S-s)} = a_1 I_0 e^{-aS} ds$ die Wolke verlässt. Durch Integration findet man die ganze Menge der auf dem Wege von 0 bis S durch einmalige Reflexion in der bestimmten Richtung abgetrennten Strahlen bei ihrem Austritt aus der Wolke:

$$i_1 = a_1 S I_0 e^{-aS} = a_1 S i_0 \quad (4)$$

Auf ähnliche Weise findet man, dass die Menge des einmalig reflektierten Lichtes im Innern der Wolke in der Entfernung s von der Eintrittsstelle der Strahlen gleich $a_1 s I_0 e^{-as}$ ist.

Derjenige Teil dieser schon einmal reflektierten Strahlen, der auf der Strecke ds seines Weges ein zweites Mal in ähnlicher Weise reflektiert wird, ist durch Multiplikation des letzten Ausdrucks mit $a_1 ds$ zu finden; beim Durchlaufen des noch übrigen Teiles des Weges $S-s$ bis an die Grenze der Wolke tritt wieder die allgemeine Schwächung ein, die durch den Faktor $e^{-a(S-s)}$ ausgedrückt wird. Es verlässt demnach nur die Strahlenmenge $a_1^2 s I_0 e^{-as}$ die Wolke. Die Gesamtmenge dieser Strahlen, die die Erscheinung zweiter Ordnung bilden, wird durch Integration von 0 bis S gefunden und ist gleich:

$$i_2 = \frac{a_1^2}{2} S^2 I_0 e^{-aS} = \frac{a_1^2 S^2}{2} i_0 = \frac{a_1 S}{2} i_1 \quad (5)$$

In derselben Weise findet man die Menge des eine grössere Anzahl von Malen reflektierten Lichtes:

$$i_n = \frac{a_1^n S^n}{n!} I_0 e^{-aS} \quad (6)$$

Im allgemeinen wird der Raumwinkel, innerhalb dessen die ein- oder mehrfach abgelenkten Strahlen liegen, nicht mehr ebenso gross sein, wie der Raumwinkel, innerhalb dessen die unabgelenkten verlaufen; es wird in der Regel bei der Ablenkung eine mehr oder weniger starke Streuung stattfinden. Sie äussert sich dem Beobachter darin, dass die optische „Erscheinung“ erster Ordnung am Himmelsgewölbe eine k-mal grössere Fläche einnimmt als die Lichtquelle, die „Erscheinung“ zweiter Ordnung — wieder eine k-mal grössere Fläche als die erster Ordnung usw. Das Verhältnis k ist nicht immer konstant, wie man das leicht annehmen könnte und

auch aus Bemerkungen von Bravais, Everdingen und Schoute in ihren Untersuchungen über die Lichtsäulen (Abschnitt III 4) herauslesen könnte. Bei der Bildung der Lichtsäulen werden die schon einmal reflektierten Sonnenstrahlen gleichsam von einem Sonnenbilde ausgehen, das tiefer oder höher liegt als die wahre Sonne; die Gestalt der von diesen Strahlen bei einer zweiten Reflexion gebildeten Säule ist von der Neigung dieser Strahlen zum Horizont abhängig, wie das auf den Figuren 9—11 von Stuchtey (136) dargestellt ist. Ähnlich steht es mit den Säulen höherer Ordnung. Vernachlässigt man die Veränderlichkeit von k , so findet man folgendes Verhältnis der durchschnittlichen Flächenhelligkeiten der Lichtquelle (H_0) und der Erscheinungen 1-ter, 2-ter und n -ter Ordnung (H_1 bis H_n):

$$H_0 : H_1 : H_2 : H_n = i_0 : \frac{i_1}{k} : \frac{i_2}{k^2} : \frac{i_n}{k^n} = 1 : \frac{a_1 S}{k} : \frac{a_1^2 S^2}{2k^2} : \frac{a_1^n S^n}{n! k^n}$$

Diese Formeln lassen erkennen, dass bei einem gegebenen Wert von a_1 und k immer ein solcher Wert von S gefunden werden kann, dass die Erscheinungen erster Ordnung heller werden als die Lichtquelle selbst, oder die Erscheinungen zweiter Ordnung heller als die von der ersten Ordnung usw. Diese auf den ersten Blick überraschende Folgerung findet eine gewisse Bestätigung in der Tatsache, dass die durch vielfache Zerstreuung entstandene Helligkeit an der Unterseite der Wolken oft recht bedeutend ist, während das unmittelbare Sonnenlicht nicht merklich durchdringt. Diese Tatsache wird in den Arbeiten von Mecke (84) und Dietzius (44) erklärt; vielleicht wird auch für die Theorie der Haloerscheinungen manche Anregung von hier ausgehen.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der vorliegenden Behandlung der Frage und der in den genannten Arbeiten besteht darin, dass Mecke und Dietzius den gesamten Strom des absteigenden Lichtes als eine Einheit behandeln; für ihn gilt dann das hier benutzte Exponentialgesetz nicht mehr. Wir haben hier all' die Strahlen vernachlässigt, die denen der Erscheinung n -ter Ordnung gleichgerichtet sind, aber durch mehr als n Reflexionen oder durch andere,

hier nicht berücksichtigte optische Vorgänge in diese Richtung gebracht worden sind.

Durch Differentiation des Ausdrucks für i_n findet man, dass bei gegebenem a und a_1 jedes i_n und ebenso jedes H_n sein Maximum erreicht, wenn $S = n/a$; daraus folgt, dass die ein-, zwei- und mehrfach gespiegelten Strahlen nicht alle bei der gleichen Wolkendicke ein Maximum erreichen, sondern, dass bei zunehmendem n eine immer zunehmende Mächtigkeit der Wolke erforderlich ist.

Die berechneten Formeln gelten, wie oben ausgeführt, nur unter folgender Voraussetzung: die scheinbare Helligkeit der Lichtquelle wird durch Strahlen, die nach zwei- oder mehrfacher Spiegelung wieder die ursprüngliche Richtung erhalten, nicht mehr merklich vergrössert, ebenso die Helligkeit der Erscheinung n -ter Ordnung — nicht durch Strahlen, die $n+2$ oder mehr Male gespiegelt wurden; zum mindesten muss diese Vergrösserung den schon vorhandenen Helligkeiten der Lichtquelle und der Erscheinungen erster, zweiter und höherer Ordnung proportional sein. Diese Voraussetzung ist offenbar schlecht erfüllt, und man muss mit der Möglichkeit eines Fehlers von 100% und mehr rechnen. So lange uns die Helligkeitsverhältnisse bloss der Grössenordnung nach interessieren, kann die genauere Berechnung unterbleiben.

Von einschneidender Wichtigkeit ist nur noch eine Frage: Lässt die grosse Mächtigkeit der Wolken S , die erforderlich ist, damit die Säulen höherer Ordnung ihrer Helligkeit nach mit denen niederer Ordnung vergleichbar werden, überhaupt noch eine merkliche Intensität der Strahlung zu? Es könnte sein, dass der hierzu nötige grosse Wert von S die Erscheinungen aller Ordnungen zwar annähernd gleich hell macht, dass sie aber alle unter der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegen.

Eine mathematische Behandlung dieser Frage ist sehr wohl möglich; sie gewinnt aber erst dann einen praktischen Wert, wenn das Verhältnis von $a_1 : a$ bekannt ist, dieses wieder ist nur feststellbar, wenn Angaben über die Dicke der Eisplättchen vorliegen. Ich habe solche in der mir zugänglichen Literatur über atmosphärische Eiskristalle nicht

finden können*). Das Verhältnis $a_1 : a$, das von den Querschnitten der auf die End- und Seitenflächen fallenden Strahlenbündel abhängig ist, hat bei annähernd horizontal schwebenden Eisplättchen, auf die nahezu horizontale Sonnenstrahlen treffen, keinen so grossen Wert, wie man das bei der geringen Dicke der Plättchen annehmen könnte, denn der Einfallswinkel der auf die grossen Endflächen fallenden Strahlen beträgt fast 90° . Trotzdem glaube ich auf Grund einer Überschlagsrechnung annehmen zu dürfen, dass hier für die Erklärung der Säulen durch Spiegelung an pendelnden Plättchen keine Schwierigkeiten zu erwarten sind. Nur müssen die Kristalle tatsächlich flach und nicht etwa pilzförmig oder sonst anders gestaltet sein.

Schliesslich kann man die Beobachtungstatsache hoher Säulen selbst als Beweis für die Möglichkeit heller Säulenspiegelungen höherer Ordnung ansehen; denn wie sollte nach Ablehnung der Erklärungen durch Spiegelung an rollenden Kristallen oder an Kristallen mit grosser Schwingungsweite die Erklärung sonst zustande kommen? Eine Erklärung durch Beugung, wie sie Dornó (47) anregt, wäre wohl nur in dem Sinne aufzufassen, dass die Beugung an den gegenüberliegenden Kanten nahezu horizontal schwebender Eisplättchen geschieht oder an Nadeln, die bei beliebigem Azimut annähernd horizontal liegen. Man stösst dabei aber gleich auf Schwierigkeiten, besonders muss eine solche durch Beugung entstandene Säule mit zunehmender Entfernung von der

*) Nach Abschluss dieser Arbeit habe ich folgende Messungen mit einem Zeiss'schen Dickenmesser für Deckgläschen ausführen können: Es handelt sich leider immer nur um Plättchensterne und in einzelnen, besonders bezeichneten Fällen um strahlige Sterne. Die erste der beiden angegebenen Zahlen bedeutet den Durchmesser des Sternes, die zweite, nach dem Strich, bedeutet die Dicke; alle Messungsergebnisse sind in mm ausgedrückt. Am 24. Januar 1924 vormittags: 2-0,05; 2-0,06; 3-0,06. Am 7. Februar 1924 vormittags: 1 0,02; 1,5-0,01 (dünne Strahlen); 2-0,02; 2-0,03; 2-0,04; 2-0,05. (dichtes Netz flacher Strahlen); 3-0,02 (dünne Strahlen); 3-0,035; 3-0,035; 3-0,04; 3-0,04; 3-0,05 (dünne Strahlen); 5-0,04; 6-0,09; 9-0,04. Am 9. Februar 1924 vormittags: 1,5-0,005; 1,5-0,01; 1,5-0,02; 2-0,02; 2-0,09; 3-0,04; 6-0,04; 6 0,08. Die beiden letzten Messungen wurden um eine Stunde später als die anderen gemacht.

Sonne schnell breiter werden, auch kommt man kaum ohne mehrfache Beugung aus, wenn hohe Säulen erklärt werden sollen. Damit soll aber nicht gesagt werden, dass die Beugung hier ganz und gar keine Rolle spielt; es ist vielmehr anzunehmen, dass sie bei allen Haloerscheinungen mitwirkt, indem sie die durch Brechung und Spiegelung bedingten Vorgänge etwas modifiziert.

Die Probleme dieses letzten Abschnittes sind ebenso wie viele früher erwähnte Fragen noch in weitem Masse der theoretischen Untersuchung zugänglich; leider stellt sich das Fehlen entsprechender Beobachtungstatsachen oft als schweres Hindernis in den Weg.

IV Zusammenfassung.

Teil I. Es wird nach der Häufigkeit, in der eine Haloerscheinung einzeln oder in Verbindung mit anderen auftritt, ein Mass der Selbständigkeit, der Abhängigkeit von anderen Erscheinungen und der Verwandtschaft mit anderen Erscheinungen definiert.

Die als Ergebnisse einer Statistik von mehr als tausend z. T. zusammengesetzten Erscheinungen berechneten Masszahlen dieser Art werden im Hinblick auf die Theorie dieser Erscheinungen diskutiert.

Eine Übersicht über die Sonnenhöhe, die bei den rund anderthalb tausend Einzelercheinungen verschiedener Sonnenhalos beobachtet wurden, vervollständigt diesen Teil der Arbeit, der im Hinblick auf die Mängel des zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterials in erster Linie nur die Veranschaulichung einer statistischen Methode geben will.

Teil II. Nach einer kurzen historischen Übersicht über die verschiedenen Versuche zur Erklärung der nichtkonzentrisch zur Sonne gelegenen Haloerscheinungen werden die wenigen unmittelbaren Beobachtungen über die Fallstellung der Kristalle in der Luft und die entsprechenden Laboratoriumsversuche besprochen. Darauf wird theoretisch an der Hand einer Formel von Gans festgestellt, unter welchen Bedingungen durch den hydrodynamischen Widerstand der Luft eine bestimmte Gleichgewichtslage der Eiskristalle hervorgerufen werden muss.

Eine theoretische Prüfung der zur Erklärung der schiefen Haloerscheinungen herangezogenen Voraussetzungen, insbesondere über die Bewegung der Luft, in der die Kristalle fallen, lässt diese Voraussetzungen quantitativ völlig unzureichend erscheinen. Es wird auch festgestellt, dass sich alle Beobachtungen schiefer Haloerscheinungen deuten lassen, ohne dass man zu einer schiefen, dabei aber für alle Kristalle parallelen Stellung der Achsen Zuflucht nehmen müsste. Doch fehlen zuverlässige Beobachtungen über die Häufigkeit verschiedener Formen der Eiskristalle, über ihre Fallgeschwindigkeit und den Charakter der Fallbewegung im Gebiet der Cirruswolken, sowie über die Luftbewegung, insofern als sie den Fall der Kristalle beeinflussen kann, und über das elektrische Feld in dieser Höhe noch in so weitem Masse, dass viele Fragen der Theorie noch nicht sicher zu beantworten sind.

Unter der Voraussetzung, dass die Kristalle harmonische Schwingungen um eine Gleichgewichtslage ausführen, wird die Dichte der Hauptachsen in ihrer Verteilung nach verschiedenen Richtungen berechnet. Es erweist sich, dass beim Pendeln der Hauptachse um eine vertikale Lage zwei Dichtemaxima bestehen, deren eins der Gleichgewichtslage entspricht, während das andre der äussersten Lage der Kristalle zukommt; besonders das erste ist sehr gross. Dagegen ist beim Pendeln der Hauptachse um eine horizontale Lage nur ein Maximum der Dichte vorhanden, und zwar entspricht es der äussersten Ausweichung der Kristalle aus ihrer Gleichgewichtslage; dieses Maximum ist schwach, und überhaupt die Verteilung der Kristalle auf die verschiedenen Richtungen viel gleichmässiger als bei vertikaler Gleichgewichtsstellung der Hauptachse. Hierin wird einer von den Gründen gefunden, warum die Haloerscheinungen, bei denen die Hauptachse vertikal gerichtet ist, gegenüber denen, wo sie horizontal liegt, vorwiegen. Das Hauptmaximum bei vertikaler Stellung der Achse zeigt auch, dass sogar stark pendelnde Kristalle imstande sind, lichtstarke Erscheinungen von solcher Art zu erzeugen, wie sie bei genau vertikalen Achsen entstehen.

Teil III. Unter Benutzung der Pendeltheorie der Kristalle wird eine sehr einfache Berechnung der Gestalt der Unter-sonne und der Helligkeitsverteilung in ihr gegeben.

Es wird eine Helligkeitsberechnung der Lichtsäulen ausgeführt: 1) unter der Voraussetzung einmaliger Reflexion an pendelnden Eisplättchen (nach Galle) und 2) unter der Voraussetzung der Reflexion an Kristallen, die um eine horizontale Achse rotieren (nach Stuchtey); der Vergleich spricht unbedingt zugunsten der ersten Theorie.

Eine einfache Berechnung der Gestalt und der Helligkeitsverteilung in den Lichtsäulen, die durch nur einmalige Reflexion erzeugt werden, zeigt, dass die beobachteten langen Säulen unter keinen Umständen auf diese Weise erklärt werden können.

Eine angenäherte Berechnung der Helligkeit von Lichtsäulen zweiter und höherer Ordnung zeigt, dass die verbreitete Meinung, als ob sie gegenüber den Säulen erster Ordnung zu vernachlässigen seien, völlig unbegründet ist, dass unter Umständen das mehrfach reflektierte Licht vielleicht sogar intensiver sein kann als das einmal reflektierte. Damit ist das Hindernis, das der Erklärung der langen Lichtsäulen durch mehrfache Reflexion an Eisplättchen mit kleiner Schwingungsweite entgegenstand, weggeräumt.

Literaturnachweis.

1. Journal des Savans, May 10, 1666 und Phil. Transactions I, 219.
An account of four Suns
2. Meteorologitscheski Westnik (russ.) II, 505 (1892); XIX, 123 (1909).
3. Onweders, optische verschijnselfen XIX. Jahrg. 1898, 50, Mai 2.
4. " " XXII " 1901, 63, Jan. 29 und
" " XXIII. " 1902, 59, Dez. 3.
5. " " XXIII. " 1902, 56, März 1.
6. " " XXV. " 1904, 71, Mai 21.
7. " " XXVII. 1906, 76, März 7.
8. Transactions of the R. Soc. of Edinb. XLII, 226, 1890 Dez. 29 (1902).

9. Aepinus F., Halonum extraordinarium Petropoli visarum descriptio.
Novi Comm. Ac. sc. Imp. Petrop. VIII, Jahrg. 1760/61, 60, 392 (1763).
10. Arago, Instructions pour le voyage Annuaire du Bureau des
Longitudes, Jahrg. 1836, 302, (1835) und C. R. I. 399 (1835).
11. Arctowski H., Résultats du Voyage du S. Y. Belgica en 1897—1899,
Météorologie, Phén. optiques (Anvers 1902).
12. Arctowski H. a. a. O. 37, Anmerkung.
13. Arctowski H. a. a. O. 41, Nr. 78.
14. Aristoteles, Meteora, Lib. III, cap. IV, Probl. 15, 12.
15. Babinet, Mém. d'optique mét. C. R. IV, 639 (1837).
16. Barkow E., Über eine ungewöhnliche Haloerscheinung. M. Z. XXXIII,
545 (1916).
17. Barral et Bixio, Journ. du voyage aéron. 27. juillet 1850. C. R. XXXI,
129 (1850).
18. Beckerstedt I. A., Der K. Schwed. Ak. d. Wiss. Abhandlungen aus der
Naturlehre, Jahrg. 1763, XXV. 47 (1766) übers. v. Kästner.
— Berson s. Weidert.
19. Besson L., Annuaire de la Soc. Mét. de France XLVII, 139 (1899).
20. Besson L., Recherches expér. sur l'orientation des cristaux de glace
atm. Annuaire de la Soc. Mét. de France LV, 40—50 (1907).
21. Besson L., Sur l'arc circumzenithal. Annuaire de la Soc. Mét. de France
LVII, 65 (1909).
22. Besson L., Sur la théorie des halos. Thèses. 31 (Paris 1909).
23. Besson L. a. a. O. 47
24. Besson L. a. a. O. 48.
25. Besson L. a. a. O. 54, 68.
26. Beutel Th., Dreyfache Zugabe der Admirabilium in Aere et Aethere ...
(Leipzig 1665).
— Bixio s. Barral.

27. Bottlinger C. F., Über eine interessante optische Erscheinung bei einer Ballonfahrt. M. Z. XXVII, 74 (1910).
28. Bracke A., Les curiosités atmosph. de 1906. Mém. et Publ. de la Soc. des Sc, des Arts et des Lettres du Hainaut (6) IX. Vol. 59, 1 (Mons 1908).
29. Brandes H. W., Gilberts Ann. d. Phys. LII, 405 (1816) Besprechung des optischen Werks von Venturi; und Gehlers Phys. Wörterbuch V, 1, 463–469 (1829).
30. Brandes H. W., Gehlers Phys. Wörterbuch V, 1, 467 (1829).
31. Brandes H. W. a. a. O. 463, 465, 466, 469.
32. Brandes H. W. a. a. O. 468–469.
33. Bravais, Notice sur les parhélies. Journ. de l'Ec. Polyt. XVIII, 30. cah. 92 (1845).
34. Bravais, Mémoire sur les halos Journ. de l'Ec. Polyt. XVIII, 31. cah. § XXVII (1847).
35. Bravais a. a. O. 19, 20.
36. Bravais a. a. O. 162.
37. Bravais a. a. O. 169 und Note XXI, 253.
38. Bravais a. a. O. 170, 171.
39. Bravais a. a. O. Pl. II, Fig. 61.
40. Bravais, Notice sur les halos. Annuaire de la Soc. Mét. de France, Jahrg. 1851, 41.
41. Collins in der Rezension, die dem Werk „Recherches sur les phénomènes lumineux“ von Ossipofsky, St. Pétersbourg 1828, vorausgeht.
42. Debye und Scherrer, Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht. I. Phys. Z. XVII, 277 (1916).
43. Descartes, Meteora X.
44. Dietzius R., Die Lichtdurchlässigkeit und die Albedo von Nebel und Wolken. Beitr. z. Phys. d. fr. Atm. X, 202 (1922). — Die Absorbition des Lichtes in trüben Medien. Beitr. z. Phys. d. Fr. Atm. XI, 69 (1923)
45. Dicquemare, Observations sur la Physique, sur l'Hist. Nat. et les Arts (Rozier) X, 136 (1777).
46. Dobrowolski A., Les cristaux de glace aériens et le phénomène des halos. Ciel et Terre XXVIII, 267 (1907).
47. Dorno C., Beobachtungen der Dämmerung und von Ringerscheinungen um die Sonne 1911–1917. Veröff. d. K. Preuss. Met. Inst. Nr. 295 92 (1917).
48. Ekama H., Mijne Waarnemingen omtrent de Halo 1882 83, 14.
49. Everdingen E. van, Onweders, optische verschijnselen XXVIII, Jahrg. 1907, 77 (1909).
50. Everdingen E. van a. a. O. 79
Exner F. M. s. Pernter.
51. Du Fay, Observations sur les parhélies. Mém. de l'Ac. R. d. Sc. XLVIII, 96 (1735).
52. Fischbach, Eine Brillant-Parabel. Jahreshfte d. Ver. f. vaterl. Naturkunde in Württemberg XX, 149 (1864).

53. Flaugergues H., Observations astr. faites à Viviers. Mém. de l'Inst. National des Sc. et Arts. Sc. math. et phys. I, 107 (1795/96).
54. Fonvielle, Sur les effets optiques de neiges lamellaires. C. R. LXXXII, 825 (1876).
55. Fraunhofer J., Theorie der Höfe, Nebensonnen und verw. Phänomene. Schuhmachers Astr. Abhandlungen III (1825).
56. Galle J. G., Über Höfe und Nebensonnen. Pogg. Ann. d. Phys. XLIX, 1-31, 241-291 (1840).
57. Galle J. G. a. a. O. 5.
58. Galle J. G. a. a. O. 19-20.
59. Galle J. G. a. a. O. 255.
60. Galle J. G., Über eine am 1. Febr. 1873 zu Breslau über einer Feuersbrunst beobachtete Lichtsäule. Pogg. Ann. d. Phys. Jubelbd. 2f (1874).
61. Gans R., Wie fallen Stäbe und Scheiben in einer reibenden Flüssigkeit? Sitzungsber. d. math. phys. Kl. d. K. B. Ak. d. Wiss. zu München. 1911, H. II. 191.
62. Grönberg Th., Korrespondenzblatt d. Naturf.-Ver. zu Riga XXVII, 45 (1884).
63. Hall W., An account of a singular Halo. A Journ. of Nat. Philos. (Nicholsons J.) IV, 485 (1799). — Transactions of the R. Soc. of Edinb. IV, 173. — Ein merkwürdiger Hof um den Mond. Gilb. Ann. d. Phys. III, 357 (1800).
64. Hess, Zur meteor. Optik, M. Z. IV, 142 (1887).
65. de la Hire, Observation sur une Colonne de lumière. Mém. de l'Ac. R. de Paris 1702, 141.
66. Hugenius Chr., Opuscula posthuma II. Diss. de coronis et parheliis §§ 11, 33 (Amsterdam 1728).
67. Hugenius Chr. a. a. O. § 12.
68. Hugenius Chr. a. a. O. § 37.
69. Johansson O., Die ausserordentl. Haloerscheinung am 10. März 1920 in Süd-Finnland. Acta Soc. Sc. Fennicae L, Nr. 1, 10 (1920).
70. Kämtz L., Nachtrag Schweiggers Jahrb. d. Chem. u. Phys. XV, 198 (1825).
71. Kämtz L., Lehrbuch d. Meteorologie III, 127 (1836).
72. Kämtz L. a. a. O. 131-133.
73. Kämtz L. a. a. O. 135.
74. Kassner C., Refraktionserscheinung. M. Z. XI, 119 (1894).
75. Köhler H., Wasser oder Eis? M. Z. XL, 257 (1923).
76. Köppen W., Beitr. z. Mechanik des Fluges und schwebenden Falles. Ill. Aeron. Mitt. V, 149 (1901). — Die Orientierung fallender Prismen in der Luft. M. Z. XXV, 280 (1908).
77. Krause R., Nebenmonde. M. Z. VII, 237 (1890).
78. Langberg, Atmosph. optische Erscheinung. Pogg. Ann. d. Phys. LX, 154 (1843).
79. de Launay, Parhélie. C. R. XXXII, 725 (1851).
80. Leyst E., Die Halophänomene in Russland. Bull. de la Soc. Imp. des Natural. de Moscou. Jahrg. 1903, 302, 331.

81. Liefmann Fr., Breslauer Samml. v. Naturw. Med. Kunst- u. Litteraturgesch. XIX, 161.
82. Listing I. B., Über einen in Russland von Hrn. Korsakoff beobachteten terr. Sonnenhalo. Pogg. Ann. d. Phys. CXXII, 161 (1864).
83. Mariotte, Oeuvres. Traité de la Nature des Couleurs I, 13. app., 276. (1740).
84. Mecke R., Über Zerstreuung und Beugung d. Lichtes durch Nebel u. Wolken. Ann. d. Phys. (4), LXV, 257 (1921).
85. Meyer R., Eiskristalle und -Ringe. M. Z. XXVII, 117 (1910).
86. Meyer R. a. a. O. 119.
87. Meyer R. a. a. O. 120.
88. Meyer R., Über die optischen Erscheinungen in atm. Eiskristallen (Riga 1913, russ.).
89. Nell Chr., Parhélie double. Revue Néphologique Nr. 3, 19 (1906).
90. Newton, Optice Lib. I, P II, Prop. IX.
91. Newton, Optice Lib. II, P. IV, Obs. XIII.
92. Nordenskjöld A., Bidrag till kännedom om oxidernas kristallformer. Öfversigt of Kongl. Vetensk. Ak. Förhandlingar 1860, 440 (1861). — Kristallform einiger Oxide. Journ. f. prakt. Chemie LXXXV, 7. H. LIV, 431—432 (1862).
93. Omond R. T., Glories, Halos and Coronae seen from Ben Nevis Obs. Proc. of the R. Soc. of Edinb. XIII, 500—513, XIV, 314—327.
94. Pernter J., Über Höfe und Ringe. 27 (Wien 1891).
95. Pernter J., Erklärung des fälschlich „weisser Regenbogen“ benannten Bouguerschen Halos. Sitzungsber. d. Wien. Ak. d. Wiss. IIa, CXIV. 917 (1905).
96. Pernter-Exner, Meteorologische Optik, 1. Aufl. 259 (1902).
97. Pernter-Exner a. a. O. 329 330, 398, 399.
98. Pernter-Exner a. a. O. 333.
99. Pernter-Exner a. a. O. 343, Fig. 134.
100. Pernter-Exner a. a. O. 397—399.
101. Pernter-Exner, Meteorologische Optik, 2. Aufl. 311 (1922).
102. Pernter-Exner a. a. O. 357, 436.
103. Pernter-Exner a. a. O. 402.
104. Pernter-Exner a. a. O. 403 Anmerk., 417.
105. Pernter-Exner a. a. O. 435.
106. Pernter-Exner a. a. O. 437.
107. Pernter-Exner a. a. O. 438.
108. Pernter-Exner a. a. O. 439.
109. Pernter-Exner a. a. O. 441.
110. Pinkhof M., Beiträge zur Halotheorie. M. Z. XXXVII, 61 (1920).
111. Pinkhof M. a. a. O. 62.
112. Pinkhof M. a. a. O. 63.
113. Pinkhof M., Bijdrage tot de theorie der Halo-Verschijnselen. Verhandelingen d. K. Ak. van Wetensch. te Amsterdam (1) XIII, Nr. 1, 17, 19.
114. Pinkhof M. a. a. O. 21.
115. Pinkhof M. a. a. O. 46.

116. Poggendorff, Nebensonnen mit Ringen von ungewöhnlicher Lage und Form. Pogg. Ann. d. Phys. VII, 529 (1826).
117. Price L., Sillimans Amer. Journ. of Science X, 368.
118. Rayleigh Phil. Magazine (5) II, 430 (1876).
119. Richardson L. F., Der atmosphärische Turbulenzkoeffizient, gemessen durch den Niederschlag. M. Z. XXXIX, 24 (1922). — Proc. of the R. Soc. (A) 96, 16 (1919).
120. Richter A., Düna-Zeitung 22. März a. St. 1907.
121. Robel E., Über Höfe und Nebensonnen, 34 (Göttingen 1872).
122. Robel E. a. a. O. 56.
123. Saint Amans, Sur un Iris singulier Observations sur la Phys., sur l'Hist. Nat. et les Arts (Rozier) XI, 377 (1777).
— Scherrer s. Debye.
124. Schmauss A., Randbemerkungen VII, Nr. 9. M. Z. XXXVIII, 227 (1921). — Kolloidforschung u. Meteorologie. M. Z. XL, 85 (1923).
125. Schmidt J. C., Analytische Optik, § 627 (Göttingen 1834).
126. Schmidt W., Beobachtungen über die Orientierung der Eiskristalle in den Wolken. M. Z. XXV, 372 (1908).
127. S(choute), De orienteering van vallende ijskristallen. Hemel en Dampkring VI, 139, 154 (1908/09).
128. S(choute), a. a. O. 140.
129. Schoute C., Lichtzuilen boven of onder zon of maan, en dubbele zonnen of manen. Hemel en Dampkring VII, 2–3 (1909/10).
130. Schoute C. a. a. O. 5.
131. Schück, A., Seltenes Kreuz durch den Mond. Schriften d. Naturw. Ver. f. Schleswig-Holstein XIII, 56 (1904).
— Schwab s. Wigand.
132. Schweder G., Über einen ungewöhnlichen Sonnenhof. Korrespondenzblatt d. Naturf.-Vereins zu Riga L, 245 (1907).
133. Simpson G., Die Orientierung fallender Prismen in der Luft. M. Z. XXV, 557 (1908).
134. Sresnewsky B., Die Witterung im April 1900 (russ.). Meteorol. Westnik X, 215 (1900).
135. Süring R., Unsymmetrische Berührungsbögen an Sonnenringen. M. Z. XXXII, 552 (1915).
136. Stuchtey K., Untersonnen und Lichtsäulen an Sonne und Mond. Ann. d. Phys. (4) LIX, 33 (1919).
137. Stuchtey K. a. a. O. 35, 50, 52.
138. Stuchtey K. a. a. O. 37.
139. Stuchtey K. a. a. O. 42.
140. Stuchtey K. a. a. O. 48.
141. Stuchtey K. a. a. O. 49 Fig. 14.
142. Stuchtey K. a. a. O. 51.
143. Stuchtey K. a. a. O. 50, 52.
144. Stuchtey K. a. a. O. 52–53.
145. Stuchtey K. a. a. O. 53.
146. Stuchtey K. a. a. O. 55.

-
147. Trautmann Chr., *Miscell. Phys. Med. Math.* (Büchner) II, 307, 1260 (Erfurt 1732—1734).
 148. Venturi, *Commentarij sopra la storia e le teorie dell' ottica.* Comm. V (1814).
 149. Wegener A., *Photographie optischer Erscheinungen vom Ballon aus.* Jahrb. d. Deutschen Luftschiffverbandes 1911, 80.
 150. Wegener A., *Verschwisterte und vergesellschaftete Halos.* M. Z. XXXII, 550 (1915).
 151. Wegener A. a. a. O. 551.
 152. Wegener A., *Die Nebensonnen unter dem Horizont.* M. Z. XXXIV, 297 (1917).
 153. Weidert F. und Berson A., *Über Lichtsäulen an Mond und Sonne.* Sonderabdruck aus d. Festschrift, herausg. v. d. Opt. Anst. C. P. Goerz, anl. d. Feier ihres 25-jähr. Bestehens 1886 1911.
 154. Weidert F. und Berson A. a. a. O. 5.
 155. Weidert F. und Berson A. a. a. O. 6.
 156. Weidler J., *An observation of two parhelia.* Phil. Transactions XL, 55 (1737).
 157. Whitney A., *Refraction of light upon the snow.* Nature XLVIII, 60 (1893).
 158. Wiener Chr., *Die Helligkeit d. klaren Himmels.* Nova Acta. Abh. d. K. Leop. Car. Deutschen Ak. d. Naturf. LXXIII, Nr. 1 (1909).
 159. Wiener Chr. a. a. O. 130.
 160. Wigand A. und Schwab Fr., *Über die Untersonne und den Sonnenhalo.* Phys. Z. XIII, 678 (1912).
 161. Wigand A. und Schwab Fr. a. a. O. 679.
 162. Wood R., *The Meteorol. Optics of Pernter.* M. W. R. XXXIV, 357 (1906).
 163. Young Th., *A theory of halos and parhelia.* R. Inst. Journ. II, 14 (1803) — *A Journ. of Nat. Philos.* (Nicholson's J.) VI, 56 (1803) — *A Course of Lectures* I, L. XXXVII, 143; II, 307 (1807).
 164. Zech P., *Bemerkung* Jahresheft d. Ver. f. vaterl. Naturkunde in Württemberg XX, 204 (1864).
-