TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

E. TIIT

MATEMAATILISE STATISTIKA TABELID

II

TARTU 1972

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise statistika ja programmeerimise kateeder

E. Tiit

MATEMAATILISE STATISTIKA TABELID

II

Õppevahend

Tartu 1972

Kinnitatud Matemaatikateaduskonna nõukogus
19. novembril 1971.

Э.Тийт

ТАБЛИЦЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

II

На эстонском языке

Тартуский государственный университет

ЭССР, г.Тарту, ул.Юликооли,18

Vastutav toimetaja T. Veldre

TRÜ rotaprint 1972. Paljundamisele antud 13.III 1972. Trükipoognaid 15,75. Tingtrükipoognaid 14,65. Arvestuspoognaid 11,0. Trükiarv 1000. Paber 30x42. 1/4. MB 00602. Tell. nr. 315.

Hind 55 kop.

E e s s õ n a

Tabelitekogu-õppevahendi II osa täiendab varem ilmunud I osa, mis sisaldab eeskätt klassikalisi matemaatilise statistika jaotusi (binomiaal-, Poissoni ja normaaljaotus ning neist tuletatud jaotused) ning tutvustab nendele jaotustele baseeruvaid statistikameetodeid.

Tabelitekogu II osa seevastu esitab eeskätt uuemaid ja vähem tuntud, kuid sageli hoopiski mugavamaid meetodeid koos vajalike tabelitega.

IV ja V peatükk on pühendatud mitmemõõtmelisele statistikale - regressioon- ja korrelatsioonanalüüsile; IV peatükis esitatud elementaarfunktsioonide tabelid (eriti ruudud, ruutjuured, pöördarvud) peaksid olema kasulikud ka paljude teiste statistikaülesannete lahendamisel.

VI peatükk sisaldab meetodeid, mis on teenimatult vähe tuntud, kuid mis peaksid käsitsiarvutuses peatselt välja tõrjuma $\bar{x}$ ja s^2 arvutamisele baseeruvad klassikalised meetodid, kuna nende nn. lihtsustatud statistikute abil saab tulemused leida oluliselt väiksema arvutustöö varal. Eriti peaks neid lihtsustatud meetodeid soovitama materjali jooksva analüüsi ja töö planeerimise käigus.

VII peatükk sisaldab rea tuntumaid mitteparameetrilisi meetodeid, mida tuleks eriti soovitada sotsioloogidele, psühholoogidele, meedikutele jne., s. t. uurijaile, kelle materjal on kas kvalitatiivne (ei väljendu arvudena) või normaalsest tugevasti erineva jaotusega.

Kuna mitmed mitteparameetrilised meetodid taanduvad asümptootiliselt χ^2- ja normaaljaotusele, on sellesse peatükki lisatud ka χ^2-jaotuse ja normaaljaotuse tabeleid (7.14 ja 7.15), mis kordavad osaliselt I osa.

VIII peatükk esitab seeria meetodeid võõraste elementide kõrvaldamiseks väljavõttest.

Tänan kolleege Tiina Veldret ja Anne Parringut käsikirjaga tutvumise ja tõhusate näpunäidete eest, Helmi Tera, Marvi Vanemat ja Jaan Torokoffi suure töö eest käsikirja vormistamisel.

IV. E M P I I R I L I S T E V A L E M I T E L E I D M I N E.

Vaatlusandmete või mõõtmistulemuste töötlemisel ja interpreteerimisel tekib sageli vajadus lähendada leitud statistiline sõltuvus mingi funktsionaalse sõltuvusega, s. t., tuletada leitud statistilise sõltuvuse kirjeldamiseks nn. e m p i i r i l i n e v a l e m.

Empiiriliste valemite leidmiseks on mitmeid meetodeid, neist lihtsaim ja tuntuim on vähimruutude meetod, millega põgusalt tutvume ka käesolevas käsiraamatus. Märgime, et juhul kui otsitakse lineaarset seost normaaljaotusega muutujate vahel, annab vähimruutude meetod sama tulemuse kui statistilises mõttes põhjendatuim – maksimaalse tõepärasuse meetod. Viimane on aga üldjuhul küllaltki töömahukas ja sageli raskesti rakendatav.

§ 1. VÄHIMRUUTUDE MEETODI IDEE.

Olgu teostatud n katset või vaatlust, kusjuures on mõõdetud või vaadeldud k argumendi (sõltumatu muutuja) X_1, X_2, ..., X_k väärtusi ning nendest sõltuva muutuja Y väärtusi. Tulemused olgu esitatud järgmise tabelina.

Katse nr.	Argumendi nr.				Sõltuv muutuja
	1	2	....	k	
1	x_{11}	x_{12}	....	x_{1k}	y_1
2	x_{21}	x_{22}	....	x_{2k}	y_2
....	....	....	....	....	......
n	x_{n1}	x_{n2}	....	x_{nk}	y_n

Selle tabeliga samaväärne on vaatlusandmete maatriks (1):

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \cdots\cdots & x_{1k} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} \cdots\cdots & x_{2k} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} \cdots\cdots & x_{nk} & y_n \end{pmatrix} . \qquad (1)$$

Maatriksis vastab igale katsele üks rida (rea numbrit näitab esimene, nn. reaindeks) ja igale muutujale üks veerg (veeruindeks on teine); viimane veerg sisaldab sõltuva muutuja mõõtmistulemusi, kõik eelnevad - argumentide andmeid. Maatriksi (1) üldelement x_{ij} esitab i-ndal katsel j-nda argumendi mõõtmisel saadud tulemust.

Ülesandeks on leida funktsionaalne sõltuvus

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_k) , \qquad (2)$$

mis:

a° oleks küllalt lihtne;

b° oleks hästi kooskõlas vaatlusandmetega (1).

Kooskõla vaatlusandmetega kontrollime järgmiselt. Arvutame leitud valemi järgi Y väärtused iga punkti jaoks, kasutades vaatlusandmeid tabelist (1); saame nn. arvutatud või ennustatud väärtused $\tilde{y}_i$:

$$\tilde{y}_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) .$$

Kooskõla on hea, kui kõik h ä l b e d , s. o. vahed $y_i - \tilde{y}_i$ on (absoluutväärtuselt) väikesed. Vähimruutude meetodi aluseks on nõue, et hälvete ruutude summa

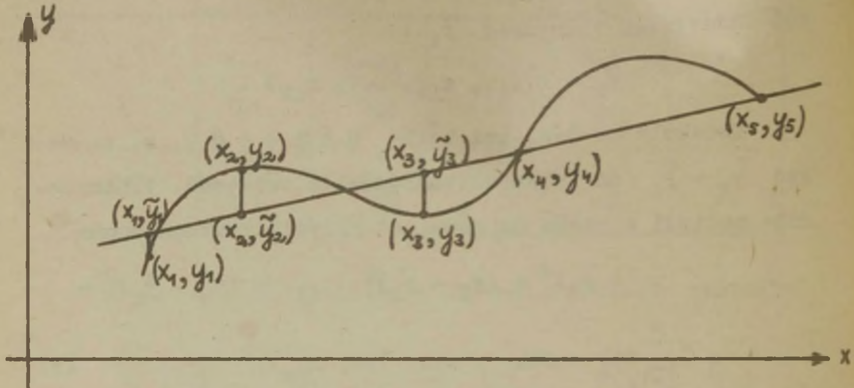
$$(y_1 - \tilde{y}_1)^2 + (y_2 - \tilde{y}_2)^2 + \ldots + (y_n - \tilde{y}_n)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}))^2 \qquad (3)$$

oleks minimaalne. Summa (3) suurus võimaldab võrrelda erinevate funktsioonide abil leitud lähendeid sama katsematerjali puhul.

Nõuded a° ja b° on teatud mõttes vastuolulised: enamasti on valemi (2) lihtsama kuju korral summa (3) suurem; valemit (2) keerukamaks muutes aga on võimalik summat (3) vähendada. Alati on võimalik muuta valem (2) niivõrd keeruliseks, et summa (3) osutuks võrdseks nulliga. Ekslik oleks aga teha siit järeldus, et selline keerukas empiiriline valem on ideaalselt täpne selles mõttes, et ka edaspidi tehtavate vaatluste puhul saadakse hea kooskõla, s.t. et $y_i - \tilde{y}_i \approx 0$, kui $i = n + 1, n + 2, \ldots$. Sageli osutub hoopiski lihtsam valem paremaks, sest see "silub" paratamatud mõõtmis- ja katsevead (vt. joon. 4.1).

Millist konkreetset funktsiooni kuju empiirilise valemi (3) jaoks kasutada ning kui kõrget keerukuse astet valida, jääb igal juhul uurija otsustada. Vajaduse korral tuleb



Joonis 4.1.
Sirge ja 4.astme parabool läbi 5 punkti.

proovida mitut valemit, kasutada graafikuid jne. Tuleb aga silmas pidada asjaolu, et keerukama valemi (mis sisaldab rohkem konstante a, b, ...) tuletamiseks on tarvis suuremat katsete arvu n .

Järgnevas esitame mõningate lihtsamate valemite leidmise eeskirjad, peatumata nende tuletuskäigul.

§ 2. ÜHEST ARGUMENDIST SÕLTUVAD VALEMID.

1. Lineaarne funktsioon.

Üheks sagedamini kasutatavamaks empiiriliseks valemiks on ühe argumendi lineaarne funktsioon (lineaarne regressioon)

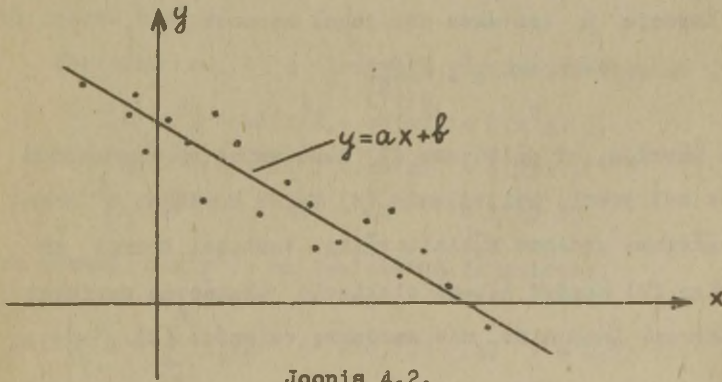
$$Y = aX + b \,. \tag{4}$$

(vt. joon. 4.2). Kordajad a ja b võrrandis (4) määratakse järgmise lineaarse võrrandisüsteemi lahenditena:

$$\begin{cases} aS(x^2) + bS(x) = S(xy) \,, \\ aS(x) + bn = S(y) \,, \end{cases} \tag{5}$$

kus suurused $S(x)$, $S(x^2)$, $S(y)$, $S(xy)$ leitakse vaatlusandmete maatriksist (1):

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \,, \quad S(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,,$$
$$S(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \,, \quad S(xy) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,. \tag{6}$$



Joonis 4.2.

Võrrandisüsteemi (5) lahendamisel saame:

$$a = \frac{nS(xy) - S(x)S(y)}{nS(x^2) - [S(x)]^2},$$

$$b = \frac{S(x^2)S(y) - S(x)S(xy)}{nS(x^2) - [S(x)]^2}.$$

Summad (6) võimaldavad ühtlasi lihtsalt leida muutujate X ja Y statistilisi karakteristikuid; näiteks

$$\bar{x} = \frac{1}{n} S(x) \; ; \qquad s_x^2 = \frac{1}{n-1} \left(S(x^2) - [S(x)]^2 \cdot \frac{1}{n} \right),$$

s_x^2 on X-i dispersiooni hinnang.

2. Võrdeline sõltuvus.

Mõningate ülesannete puhul soovitatakse empiiriliseks valemiks võrdelist seost sõltuva muutuja Y ja argumendi X vahel:

$$Y = aX , \tag{7}$$

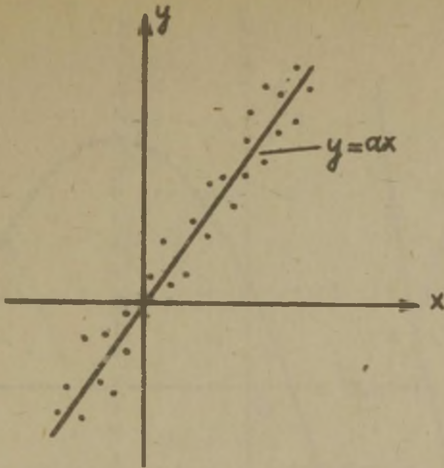
(vt. joon. 4.3), mis on saadud valemist (4) erijuhul

$$b = 0 .$$

Kordaja a leitakse sel juhul seosest

$$a = \frac{S(xy)}{S(x^2)} .$$

Tuleb märkida, et sõltuvuse (7) kasutamine on õigustatud üksnes sel juhul, kui valemis (4) tuleb kordaja b absoluutväärtuse poolest küllalt väike. Vastasel korral on valemiga (7) saadud lähend oluliselt ebatäpsem parimast lineaarsest lähendist, mis saadakse valemist (4).



Joonis 4.3.

3. <u>Ruutsõltuvus</u>.

Kui lineaarne sõltuvus (4) ei anna küllalt head empiirilist valemit (summa (3) osutub liiga suureks), võib proovida leida empiirilist valemit ruutpolünoomi kujul

$$Y = aX^2 + bX + c \, , \tag{8}$$

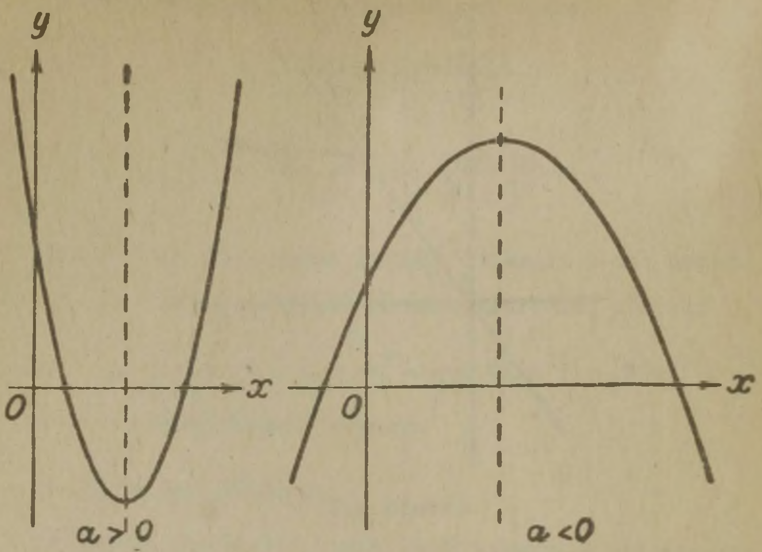
(vt. joon. 4.4).

Kordajad a, b, c leitakse võrrandisüsteemist (9)

$$\begin{cases} aS(x^4) + bS(x^3) + cS(x^2) = S(x^2y) \, , \\ aS(x^3) + bS(x^2) + cS(x) = S(xy) \, , \\ aS(x^2) + bS(x) + cn = S(y) \, , \end{cases} \tag{9}$$

kus summad $S(x^\ell y^r)$ on tähistatud järgmiselt:

$$S(x^\ell y^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^\ell y_i^r \quad (\ell = 0,1,2,3,4; \;\; r = 0,1) \, . \tag{10}$$



Joonis 4.4.

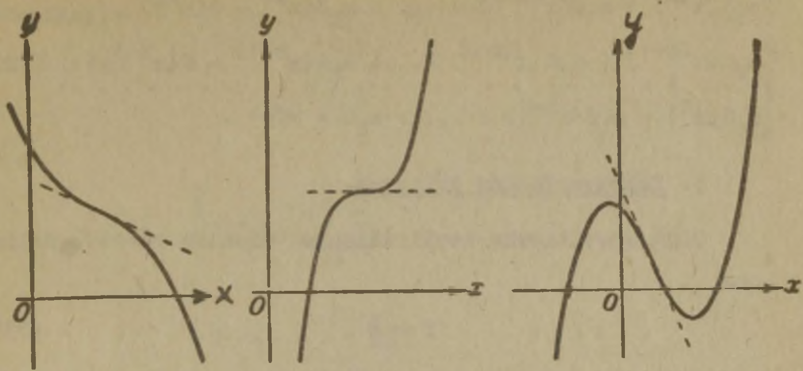
4. **Kõrgema astme polünoom.**

Kui vaatlusandmeid on küllalt palju ning sõltuvuse graafiline uurimine või teoreetilised kaalutlused näitavad, et empiiriline valem peaks olema kõrgema astme polünoom, võib kasutada empiirilist valemit kujul

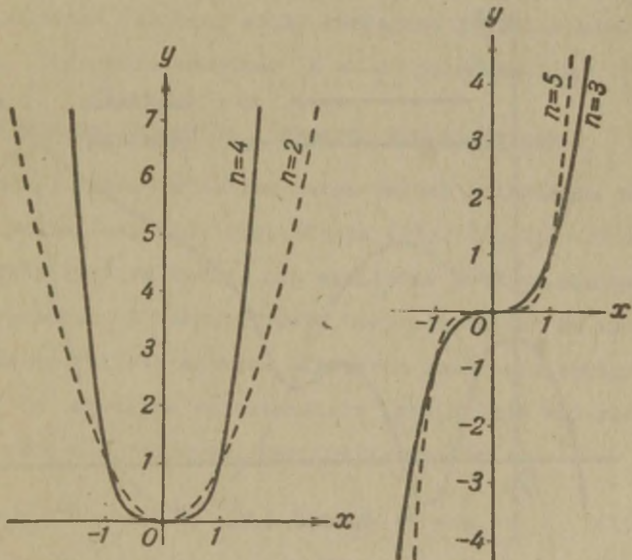
$$Y = a_0X^m + a_1X^{m-1} + \dots + a_{m-1}X + a_m , \qquad (11)$$

kus m määratakse ette sõltuvalt aprioorsest informatsioonist (pidades ühtlasi silmas seda, kas eeldatav funktsiooni kuju on paaris või paaritu, vt. joon. 4.5 - 4.7).

Kasutades sümboolikat (10), saame kordajate $a_0,\dots,a_m$ määramiseks võrrandisüsteemi:



Joonis 4.5.
Mitmesuguse kujuga kuupparaboole.



Joonis 4.6.
Kõrgema astme paraboole.

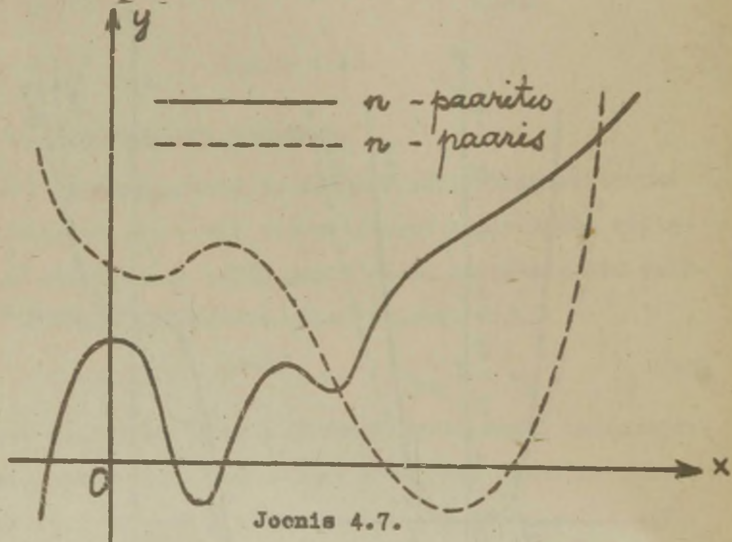
$$\begin{cases} a_0 S(x^{2k}) + a_1 S(x^{2k-1}) + \ldots + a_k S(x^k) = S(x^k y) , \\ a_0 S(x^{2k-1}) + a_1 S(x^{2k-2}) + \ldots + a_k S(x^{k-1}) = S(x^{k-1} y) , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ a_0 S(x^k) + a_1 S(x^{k-1}) + \ldots + a_k n = S(y) . \end{cases} \quad (12)$$

5. Pöördvõrdeline sõltuvus.

Olgu soovitavaks empiiriliseks valemiks pöördvõrdeline seos

$$Y = \frac{a}{X} . \quad (13)$$

Niisugune seos võib arvesse tulla üksnes juhul, kui kumbki muutujatest ei omanda väärtust 0 . Ka väga väikesed vaatlustulemused ei ole soovitavad, kuna mõjustavad oluliselt arvutusi (vt. joon. 4.8).



Joonis 4.7.

Kordaja a leidmiseks võime kasutada asjaolu, et valemi (13) võime saada valemist (7) asendusega $X \to \frac{1}{X}$.

Järelikult

$$a = \frac{S\left(\frac{Y}{X}\right)}{S\left(\frac{1}{X^2}\right)} ,$$

kus

$$\begin{cases} S\left(\frac{Y}{X}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i} , \\ S\left(\frac{1}{X^2}\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} . \end{cases} \qquad (14)$$

Kui aga soovitakse leida seost kujul

$$Y = \frac{a}{X} + b ,$$

lähtume valemist (4) ning selle kordajate leidmise eeskirjast (5), kasutades asendust $X \to \frac{1}{X}$ ja sümboolikat (14).

6. <u>Astmefunktsioonide lineaarne kombinatsioon</u>.

Sarnaselt pöördvõrdelise seose valemi leidmisega võime leida valemitest (4), (7), (8) ja (11) lähtudes terve hulga empiirilisi valemeid, mis avaldavad sõltuva muutuja Y argumendi X negatiivsete, murruliste või ka negatiivsete murruliste astmete lineaarse kombinatsioonina.

Olgu p suvaline ratsionaalarv (positiivne või negatiivne murd või täisarv). Empiirilise valemi

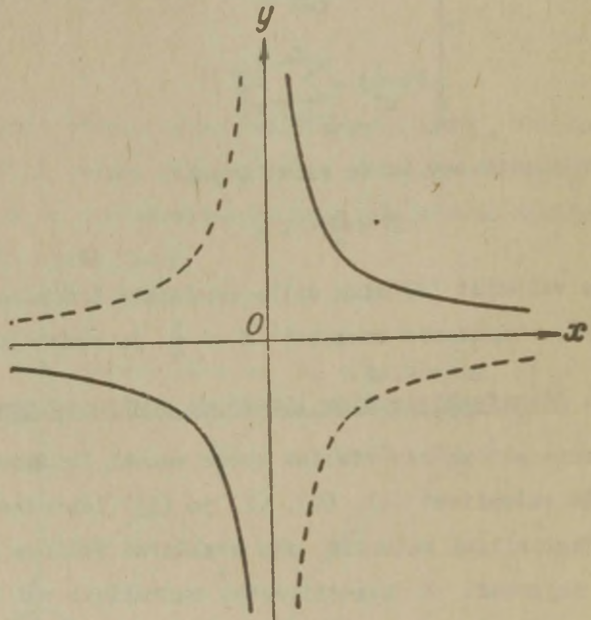
$$Y = a_0X^{mp} + a_1X^{(m-1)p} + \ldots a_{m-1}X^p + a_m \qquad (15)$$

leidmiseks teeme asenduse $X \to X^p$ ning saame valemi (11). Kordajad a_j leiame võrrandisüsteemiga (12) analoogilisest süsteemist, asendades vaid $x_i \to x_i^p$ iga summa (10) arvutamisel.

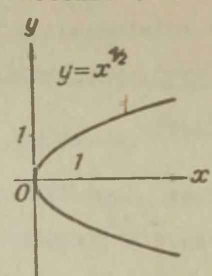
Näiteks praktilistes ülesannetes küllaltki sageli sobivaks osutuva nn. poolruutparabooli (vt. joon. 4.9)

$$Y = a\sqrt{X} + b$$

valemi saame valemist (4) teisendusega $X \to \sqrt{X}$.



Joonis 4.8.



Joonis 4.9.

7. Tundmatu astendajaga astmefunktsioon.

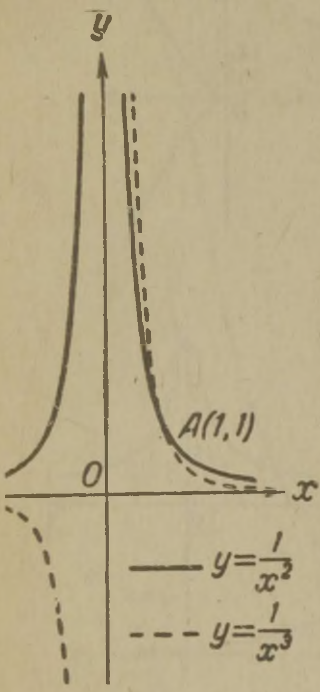
Võib esineda ülesandeid, kus empiirilise valemi üldkuju on küll teada:

$$Y = b X^a , \qquad (16)$$

kuid kordaja b ja astendaja a vajavad täpsustamist. Logaritmimisel omandab valem (16) kuju

$$\log Y = \log b + a \log X ,$$

mis on saadud valemist (4) teisendustega:



Joonis 4.10.
Negatiivse astendajaga astmefunktsioone.

$$Y \to \log Y ;$$
$$X \to \log X ;$$
$$b \to \log b .$$

Tuleb muidugi arvestada, et valemil (16) on üldkujul mõtet vaid juhul, kui Y ja X on positiivsed. Kordajad a ja log b leiame süsteemiga (5) sarnasest süsteemist:

$$\begin{cases} aS'(x^2) + (\log b)S'(x) = S'(xy) , \\ aS'(x) + (\log b)n = S'(y) , \end{cases}$$

kus

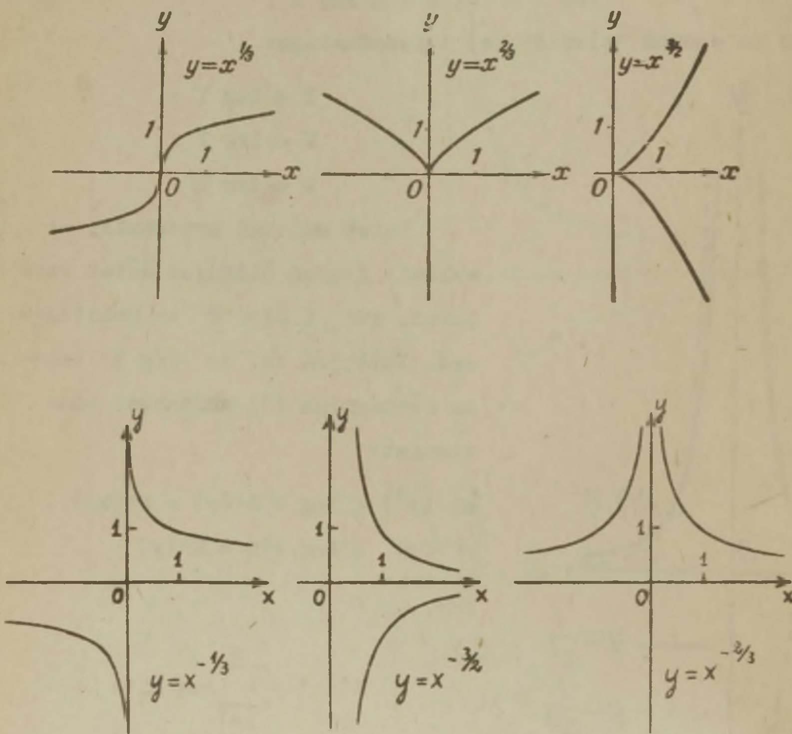
$$S'(x) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i ;$$

$$S'(y) = \sum_{i=1}^{n} \log y_i ;$$

3

$$S'(x^2) = \sum_{i=1}^{n} (\log x_i)^2 \ ;$$

$$S'(xy) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i \cdot \log y_i \ .$$



Joonis 4.11.
Irratsionaalse astendajaga astmefunktsioone.

(Paneme tähele, et on tarvis logaritme korrutada, mitte korrutist logaritmida.)

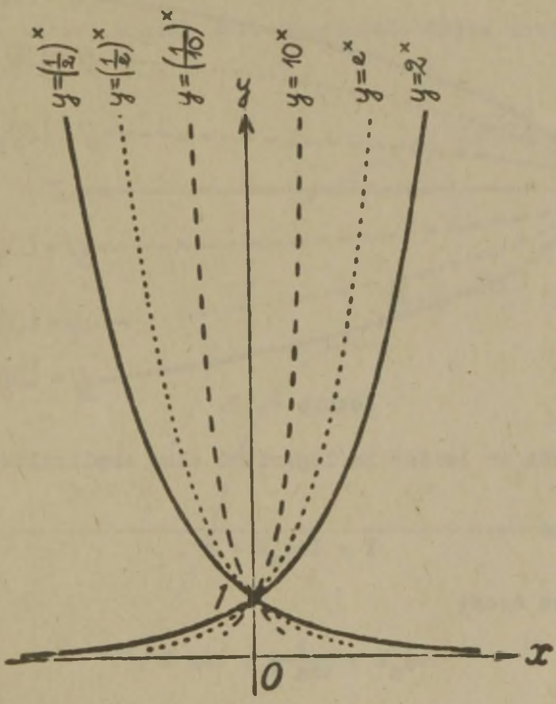
8. <u>Eksponent- ja logaritmfunktsioon.</u>

Sarnaselt toimub kordajate leidmine ka empiirilise valemi (vt. joon. 4.12)

$$Y = b \cdot a^X \tag{17}$$

puhul, millest logaritmimisel saame seose

$$\log Y = \log b + X \log a;$$



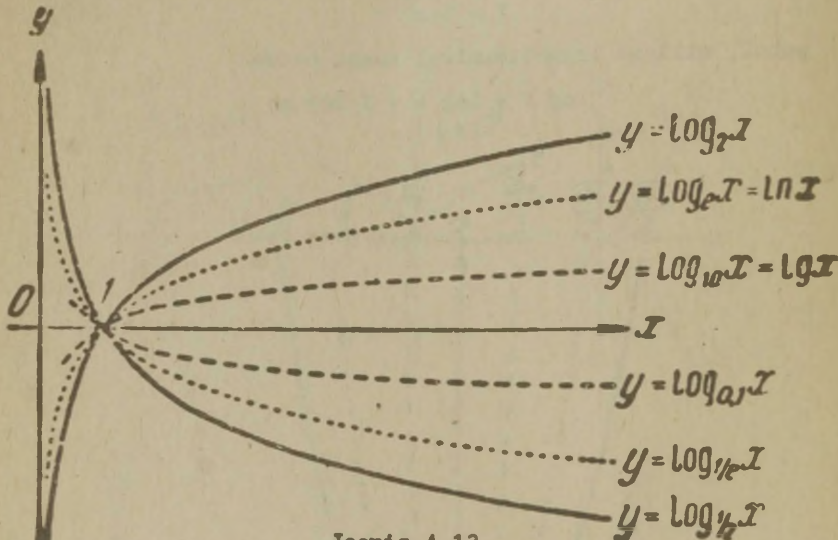
Joonis 4.12.

see seos on aga saadav seosest (4) teisendusega $Y \to \log Y$; $b \to \log b$; $a \to \log a$; järelikult saame kasutada log a ja log b leidmiseks süsteemiga (5) sarnast süsteemi; tuleb vaid jälgida, et Y oleks positiivne.

Ka logaritmfunktsiooni kujulise empiirilise valemi

$$Y = a \log X + b \qquad (18)$$

(vt. joon. 4.13) kordajate leidmine toimub põhimõtteliselt samuti.



Joonis 4.13.

Samuti on leitav ka logaritmi alus empiirilises valemis

$$Y = \log_a X + b , \qquad (19)$$

arvestades seost

$$\log_a X = \frac{1}{\log a} \cdot \log X ;$$

kordaja a asemel vajab leidmist vaid kordaja $\frac{1}{\log a}$, mille kaudu on lihtne leida ka otsitavat logaritmi alust.

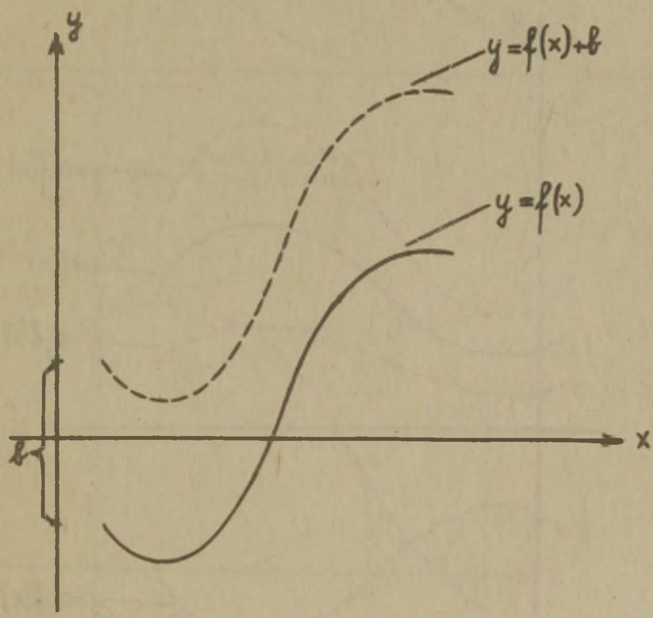
9. Suvalise funktsiooni lineaarteisendus.

Punktis 1 esitatud mõttekäiku võime kasutada ka suvalise funktsiooni abil esitatud empiirilise valemi täpsustamiseks lineaarteisenduse abil.

Oletame, et me oleme kas mingi teoreetilise kaalutluse või graafilise pildi järgi leidnud ligikaudse funktsionaalse sõltuvuse argumendi X ja sõltuva muutuja Y vahel:

$$Y = f(X).$$

Sageli on võimalik seda veel täpsustada nihke (y-telje suu-



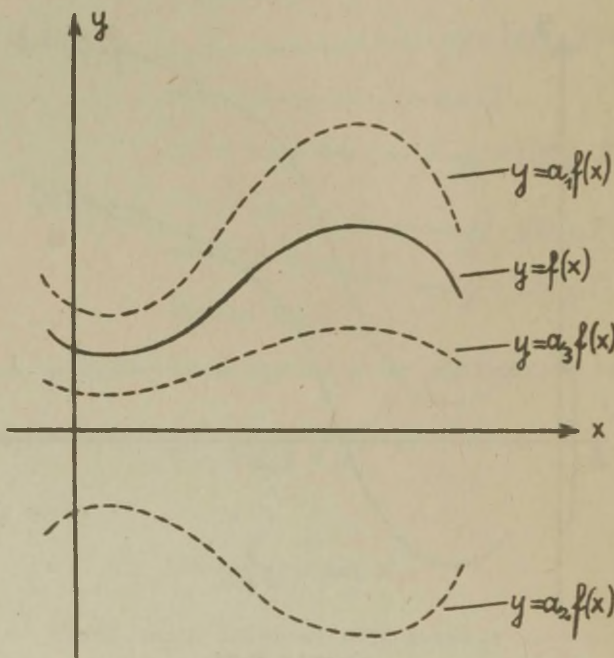
Joonis 4.14.
Nihe y-telje suunas.

nas) ja venituse, kokkusurumise (y-telje sihis) või peegelduse abil. Sellele vastab (vt. joonised 4.14 ja 4.15) lineaarteisendus

$$Y = a \cdot f(X) + b .$$

Vähimruutude mõttes parima lineaarteisenduse kordajad a ja b leiame süsteemiga (5) sarnasest võrrandisüsteemist:

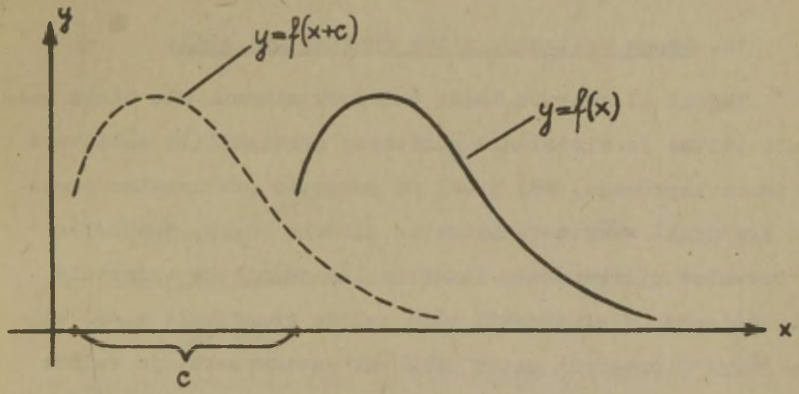
$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f(x_i)\right]^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \cdot f(x_i) ; \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$$



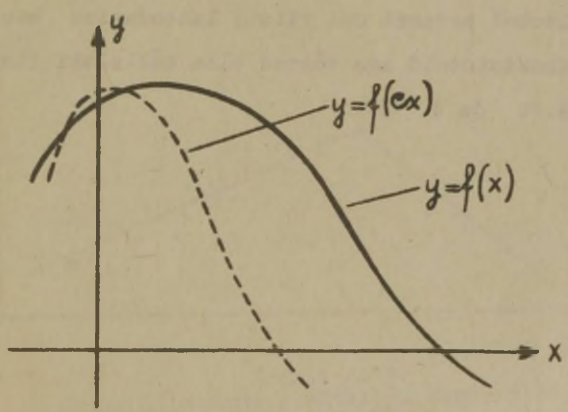
Joonis 4.15.
Venitus ($a_1 > 1$), peegeldus ($a_2 < 0$) ja kokkusurumine ($0 < a_3 < 1$) y-telje sihis.

Hoopiski tülikam on teisendada argumenti X . Nihke $X \to X+c$ konstandi c määramiseks (vt. joon. 4.16), saame võrrandi

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f(x_i + c)\right] \frac{d}{dx} f(x_i + c) = 0 ;$$



Joonis 4.16.
Nihe x-telje suunas.



Joonis 4.17.
Kokkusurumine x-telje sihis.

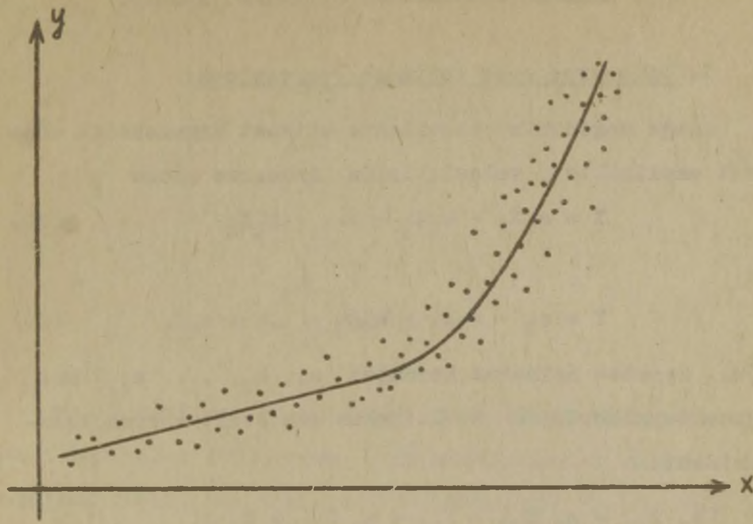
x-telje sihilise venituse $X \rightarrow cX$ kordaja määramiseks (vt. joon. 4.17) saame võrrandi:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(cx_i) \right] \frac{d}{dx} f(cx_i) \cdot x_i = 0 \ .$$

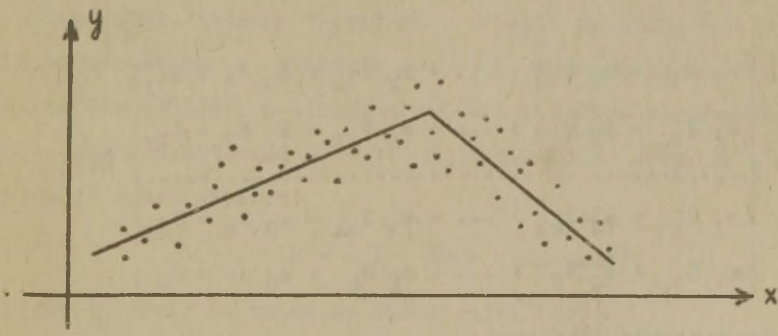
Mõlemad võrrandid on lihtsalt lahendatavad vaid erijuhul.

10. Seose esitamine mitme funktsiooni abil.

Sageli ei õnnestu leida üht funktsiooni, mis oleks küllalt lihtne ja kirjeldaks uuritavat statistilist sõltuvust piisava täpsusega. Sel juhul on enamasti otstarbekas jaotada argumendi väärtuste piirkond mitmeks osaks, kusjuures erinevates piirkondades kasutada lähendamiseks erinevaid funktsioone. Jaotuspunkti võib valida graafikult n.-ö. "silma järgi", proovida mitut erinevat jaotuspunkti ja valida tulemuste seast parim, või - mõningatel lihtsatel juhtudel - määrata jaotuspunkt vähimruutude meetodil. Väga paljudel juhtudel paraneb sel viisil lahendamise headus oluliselt, funktsioonid aga võivad olla küllaltki lihtsad (vt. joon. 4.18 ja 4.19).



Joonis 4.18.
Sirge ja parabooli abil esitatud empiiriline sõltuvus.



Joonis 4.19.
Ositi lineaarne funktsioon empiirilist sõltuvust kirjeldamas.

§ 3. MITMEST ARGUMENDIST SÕLTUVAD VALEMID.

1. Lineaarne seos (mitmene regressioon).

Kõige sagedamini soovitakse mitmest argumendist sõltuvat empiirilist valemit leida lineaarse seose

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k \tag{20}$$

või

$$Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k \tag{21}$$

kujul. Seostes esinevad kordajad $a_1, a_2, \dots, a_k$ – nn. regressioonikordajad – leitakse vastavalt võrrandisüsteemidest

$$\begin{cases} a_1 S_{11} + a_2 S_{12} + \dots + a_k S_{1k} = S_{1y}, \\ a_1 S_{21} + a_2 S_{22} + \dots + a_k S_{2k} = S_{2y}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 S_{k1} + a_2 S_{k2} + \dots + a_k S_{kk} = S_{ky} \end{cases} \tag{22}$$

ja

$$\begin{cases} a_1 S_{11} + a_2 S_{12} + \dots + a_k S_{1k} + a_0 S_1 = S_{1y}, \\ a_1 S_{21} + a_2 S_{22} + \dots + a_k S_{2k} + a_0 S_2 = S_{2y}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 S_{k1} + a_2 S_{k2} + \dots + a_k S_{kk} + a_0 S_k = S_{ky}, \\ a_1 S_1 + a_2 S_2 + \dots + a_k S_k + a_0 n = S_y ; \end{cases} \tag{23}$$

kus kasutatakse tähistusi:

$$\left\{\begin{aligned} S_r &= \sum_{i=1}^{n} x_{ir}, \\ S_y &= \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ S_{ry} &= \sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_i, \\ S_{lr} &= \sum_{i=1}^{n} x_{il}x_{ir}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Tuleb märkida, et üldiselt annab valem (21) parema lähendi kui valem (20), seose (20) kasutamine on õigustatud vaid sel juhul, kui valemis (21) vabaliige a_0 osutub (absoluutväärtuse poolest) küllalt väikeseks.

Geomeetriliselt kujutab võrranditega (20) ja (21) esitatud punktihulk hüpertasandit k-mõõtmelises ruumis; võrrandiga (20) määratud tasand läbib ühtlasi koordinaatide alguspunkti. Ainsaks võimaluseks seoseid graafiliselt illustreerida on - kasutada ära uuritava punktihulga lõikeid tasanditega, sealhulgas näiteks koordinaattasanditega. Koordinaattasanditel $(y - x_r)$ paiknevate sirgete võrrandid saame seostest

$$Y = a_r X_r \quad (r = 1,2,\ldots,k)$$

(kui empiiriline valem on antud kujul (20))

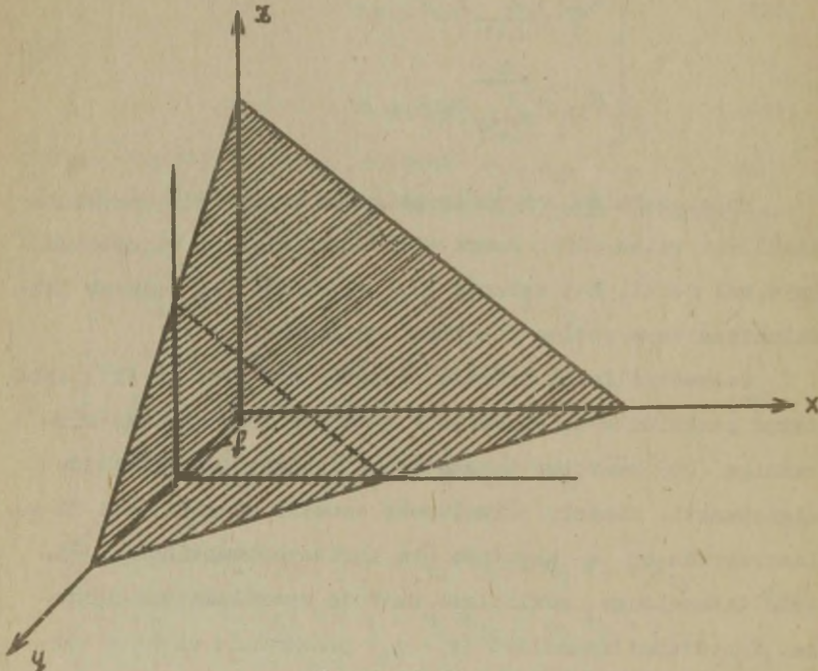
või

$$Y = a_r X_r + a_0$$

(valemi (21) puhul, vt. joon. 4.20).

Lõiketasandi võime fikseerida ka teiste seostega, andes ülejäänud koordinaatidele mingid teised väärtused

$$\begin{cases} X_1 = b_1 \ ; \ X_2 = b_2 \ ; \ \dots \ ; \ X_{r-1} = b_{r-1} \ ; \\ X_{r+1} = b_{r+1} ; \dots ; X_k = b_k \ . \end{cases} \tag{25}$$



Joonis 4.20.
Regressioonitasand 3-mõõtmelises ruumis, selle lõikejooned koordinaattasanditega ja tasandiga y = b (punktiirjoon).

Siis saame võrrandid

$$Y = a_r X_r - \sum_{j \neq r} a_j b_j$$

ning

$$Y = a_r X_r + a_0 - \sum_{j \neq r} a_j b_j \,.$$

Sisuliselt saame sel viisil tinglike jaotuste lineaarsed lähendid, kusjuures tingimused on fikseeritud seostega (25). Nende jaotuste puhul on olukord sarnane ühest argumendist sôltuva muutuja juhuga.

2. Ruutseos.

Ka mitmest argumendist sôltuva muutuja juhul vôib osutuda, et lineaarne seos ei anna küllalt head lähendit ning seetôttu tuleb empiirilises valemis kasutada ka kôrgema astmega liikmeid. Üldine ruutseos avaldub kujul

$$Y = a_{11}X_1^2 + a_{22}X_2^2 + \dots + a_{kk}X_k^2 + a_{12}X_1X_2 + \dots + a_{1k}X_1X_k +$$
$$+ \dots + a_{k-1,k}X_{k-1}X_k + a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_kX_k + a_0 \,, \tag{26}$$

mis muutujate vahetusega

$$X_1^2 \rightarrow X_{k+1}, \dots, X_k^2 \rightarrow X_{2k} \,,$$

$$X_1X_2 \rightarrow X_{2k+1}, \dots, X_{k-1}X_k \rightarrow X_{\frac{k(k+3)}{2}}$$

taandub eelmisele seosele, kusjuures argumentide arv suureneb $\frac{k(k+3)}{2}$ -ni.

Tuleb aga silmas pidada, et niisuguse seose kasutamine nôuab väga suurt katsete arvu ja on otstarbekas üksnes sel juhul, kui lähend ruutliikmete sissetoomisel oluliselt paraneb.

Sageli saab kasutada mittetäielikku ruutseost, milles esinevad ainult üksikute argumentide ruudud, ülejäänutest aga sõltub funktsioon lineaarselt.

Sobiva kuju väljavalimisel abistavad tasandiliste lõigete graafikud, võrdlust saab teostada hälvete ruutude summa (3) abil mitmete funktsioonikujude korral.

3. Korrutis.

Mõningates ülesannetes on oodatavaks seoseks korrutis

$$Y = C\, X_1^{a_1}\, X_2^{a_2} \ldots X_k^{a_k} \qquad (27)$$

või

$$Y = C\, a_1^{X_1} a_2^{X_2} \ldots a_k^{X_k}\,. \qquad (28)$$

Niisuguste empiiriliste valemite leidmiseks saame seosed (27) ja (28) logaritmida ning teisenduse

$$Y \to \log Y\,,$$

$$X_r \to \log X_r$$

või

$$Y \to \log Y$$

$$a_r \to \log a_r$$

abil kasutada seost (21). Seetõttu taandub ka konstantide $a_1, \ldots, a_r$ leidmine süsteemiga (23) sarnase süsteemi leidmisele ja lahendamisele.

4. Keerukama empiirilise valemi leidmine iteratsioonimeetodil.

Praktikas esineb sageli ülesandeid, kus tuleb leida empiiriline valem kujul, mis ei tulene ühestki ülaltoodud valemitüübist ning mille vahetu leidmine vähimruutude meetodil taandub äärmiselt keerukate võrrandisüsteemide lahendamisele. Sel juhul saab leida valemi kordajad iteratsioonimeetodil. Kirjeldame järgnevas üht võimalust valemi leidmiseks iteratsiooni teel.

Avaldugu otsitav empiiriline valem kujul:

$$Y = c_1 f_1(X_1,\dots,X_k,a_1^1,\dots,a_{r_1}^1) + c_2 f_2(X_1,\dots,X_k,a_1^2,\dots,a_{r_2}^2) +$$
$$+ \dots + c_m f_m(X_1,\dots,X_k,a_1^m,\dots,a_{r_m}^m)\ , \qquad (29)$$

kus määramist vajavad kordajad $c_1,\dots,c_m,a_1^1,\dots,a_{r_m}^m$. Funktsioonid $f_1,\dots,f_m$ olgu sellised, et nende kaudu avalduvate empiiriliste valemite kordajad $a_1^1,\dots,a_{r_m}^m$ olgu lihtsalt leitavad mõnel eelpoolkirjeldatud viisidest.

Esimesel etapil otsime empiirilist valemit kujul

$$Y = c_1 f_1(X_1,\dots,X_k,a_1^1,\dots,a_{r_1}^1) + b_1\ ,$$

mis on meie eeldust ning punkti 2.9 tulemusi arvestades teostatav. Saame sel viisil leida kordajad $c_1 = {}_1c_1$, b_1 ja $a_1^1 = {}_1a_1^1$, $a_2^1 = {}_1a_2^1$, ..., $a_{r_1}^1 = {}_1a_{r_1}^1$ (esimene indeks leitud kordajate ees eraldab neid kordajatest põhiseoses (29)).

Võtame kasutusele uue muutuja

$$Z_1 = Y - {}_1c_1\, f_1(X_1,\dots,X_k,\ {}_1a_1^1,\dots,\ {}_1a_{r_1}^1)\ ,$$

mille jaoks saame arvutada iga katse jaoks väärtused $Z_{11},Z_{12},\dots,Z_{1n}$. Asume leidma empiirilist seost.

$$Z_1 = c_2 f_2(X_1,\dots,X_k,a_1^2,\dots,a_{r_2}^2) + b_2\ ,$$

ning leitud kordajad tähistame vastavalt sümbolitega ${}_1c_2, {}_1a_1^2, \ldots, {}_1a_{r_2}^2$. Selliselt jatkame, kuni seosest

$$Z_{m-1} = c_m f_m(X_1, \ldots, X_k, a_1^m, \ldots, a_{r_m}^m) ,$$

kus

$$Z_{m-1} = Y - \sum_{i=1}^{m-1} {}_1c_i f_i(X_1, \ldots, X_k, {}_1a_1^i, \ldots, {}_1a_{r_i}^i) ,$$

leiame viimaste tundmatute kordajate $a_1^m, \ldots, a_{r_m}^m$ jaoks lähendid ${}_1a_1^m, \ldots, {}_1a_{r_m}^m$.

Edaspidi seisneb ülesanne leitud kordajate lähisväärtuste täpsustamises. Selleks võime kasutada juba leitud konstantide lähisväärtusi. Defineerime näiteks

$$U_1 = Y - \sum_{i=2}^{k} {}_1c_i f_i(X_1, \ldots, X_k, {}_1a_1^i, \ldots, {}_1a_{r_i}^i) ,$$

ning leides U_1 jaoks igas punktis väärtuse, täpsustame kordajaid $c_1, a_1^1, \ldots, a_{r_1}^1$ võrrandis

$$U_1 = c_1 f_1(X_1, \ldots, X_k, a_1^1, \ldots, a_r^1) .$$

Nii saame teise lähendi otsitavatele kordajatele: ${}_2c_1$, ${}_2a_1^1, \ldots, {}_2a_r^1$. Defineerides

$$U_s^l = Y - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{k} {}_{l-1}c_i f_i(X_1, \ldots, X_k, {}_{l-1}a_1^i, \ldots, {}_{l-1}a_{r_i}^i) ,$$

saame järk-järgult täpsustada kõiki otsitavaid kordajaid, leides võrrandist

$$U_s^{l-1} = c_s f_s(X_1, \ldots, X_k, a_1^s, a_2^s, \ldots, a_{r_s}^s)$$

kordajatele $c_s, a_1^s, \ldots, a_{r_s}^s$ järjekordse lähendi

$$ {}_1c_s,\ {}_1a_1^s,\ \ldots,\ {}_1a_{r_s}^s . $$

Tuleb aga märkida, et kirjeldatud protsess ei koondu alati ning koonduvuskiirus sõltub ka näiteks funktsioonide järjekorrast avaldises (29).

Üsna sarnaselt on võimalik leida ka kordajaid empiirilisse valemisse

$$ Y = cf_1(X_1,\ldots,X_k,a_1^1,\ldots,a_{r_1}^1) \cdot f_2(X_1,\ldots,X_k,a_1^2,\ldots $$

$$ \ldots,a_{r_2}^2) \ldots f_m(X_1,\ldots,X_k,a_1^m,\ldots,a_{r_m}^m) , \qquad (30) $$

leides selleks järk-järgult kordajad valemitesse

$$ Y = c_1f_1(X_1,\ldots,X_k,a_1^1,\ldots,a_{r_1}^1) , $$

$$ Z_1 = c_2f_2(X_1,\ldots,X_k,a_1^2,\ldots,a_{r_2}^2) , $$

$$ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots $$

$$ Z_{m-1} = c_mf_m(X_1,\ldots,X_k,a_1^m,\ldots,a_{r_m}^m) , $$

kus

$$ Z_r = \frac{Y}{\prod_{i=1}^{r-1} f_i(X_1,\ldots,X_k,{}_1a_1^i,\ldots,a_{r_i}^i)} , $$

ning hiljem leitud kordajaid täpsustades. Kuigi ka valemid (29) ja (30) ei ammenda kaugeltki kõiki praktikas vajaminevaid, avardub selliste empiiriliselt leitavate valemite klass oluliselt.

Kasutades logaritmilist teisendust, saame kujule (29) teisendada ka mitmesuguseid murdratsionaalseid avaldisi

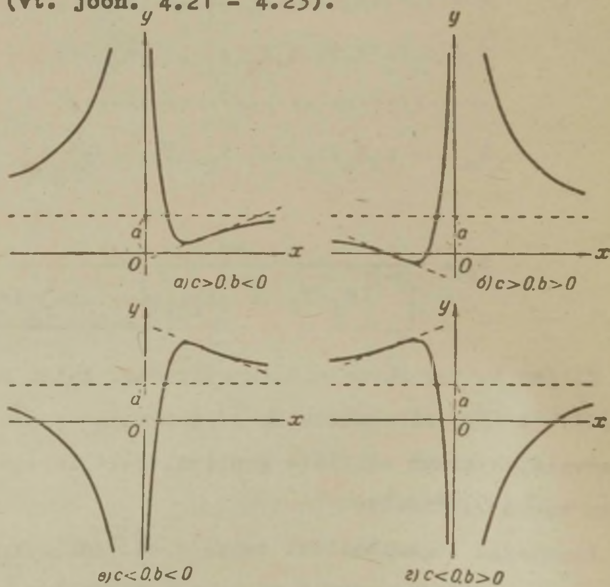
$$Y = c\,\frac{f_1(X_1,\dots,X_k,a_1,\dots,a_\ell)}{f_2(X_1,\dots,X_k,b_1,\dots,b_r)}\;;$$

nimelt seos

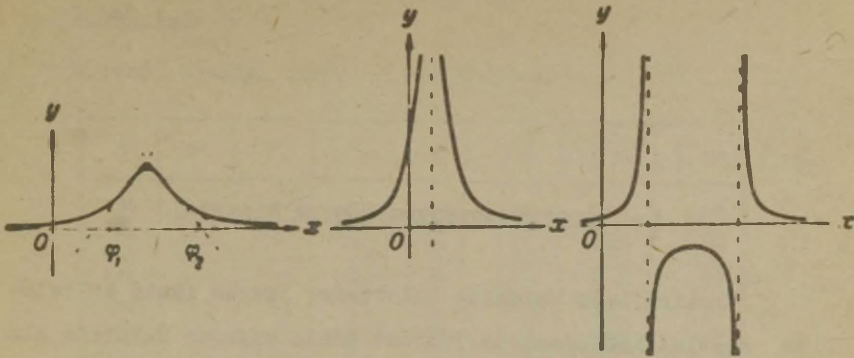
$$Y = \log c + \log f_1(X_1,\dots,X_k,a_1,\dots,a_\ell) -$$

$$- \log f_2(X_1,\dots,X_k,b_1,\dots,b_r)$$

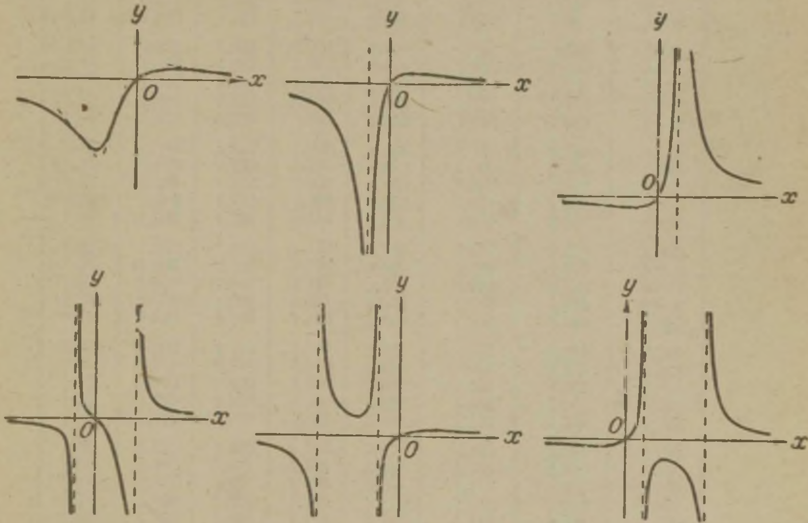
on leitav empiirilise valemi (29) leidmiseks tuletatud meetodil (või kombineeritult (29) ja (30) lahendusmeetoditega). Siinjuures tuleb aga arvestada, et logaritmitavad avaldised peavad olema positiivsed; valemid saame leida vaid piirkondades, kus funktsioonidel ei ole nn. iseäraseid punkte; viimaste ümbruses arvutustäpsus väheneb aga tunduvalt (vt. joon. 4.21 - 4.23).



Joonis 4.21. Funktsioon $\dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$.



Joonis 4.22. Funktsioon $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$.



Joonis 4.23. Funktsioon $\dfrac{x}{ax^2 + bx + c}$.

§ 4. ELEMENTAARFUNKTSIOONIDE TABELID.

Empiiriliste valemite tuletamise juures (kuid ka teiste statistikaülesannete juures) tekib vajadus kasutada elementaarfunktsioonide tabeleid, mistõttu on otstarbekas nende tabelite lisamine samasse tabelitekogusse.

Tabel 4.1.

Ruudud, kuubid, ruut- ja kuupjuured.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,00	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642
1,01	1,020	1,030	1,005	3,178	1,003	2,162	4,657
1,02	1,040	1,061	1,010	3,194	1,007	2,169	4,672
1,03	1,061	1,093	1,015	3,209	1,010	2,176	4,688
1,04	1,082	1,125	1,020	3,225	1,013	2,183	4,703
1,05	1,102	1,158	1,025	3,240	1,016	2,190	4,718
1,06	1,124	1,191	1,030	3,256	1,020	2,197	4,733
1,07	1,145	1,225	1,034	3,271	1,023	2,204	4,747
1,08	1,166	1,260	1,039	3,286	1,026	2,210	4,762
1,09	1,188	1,295	1,044	3,302	1,029	2,217	4,777
1,10	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791
1,11	1,232	1,368	1,054	3,332	1,035	2,231	4,806
1,12	1,254	1,405	1,058	3,347	1,038	2,237	4,820
1,13	1,277	1,443	1,063	3,362	1,042	2,244	4,835
1,14	1,300	1,482	1,068	3,376	1,045	2,251	4,849
1,15	1,322	1,521	1,072	3,391	1,048	2,257	4,863
1,16	1,346	1,561	1,077	3,406	1,051	2,264	4,877
1,17	1,369	1,602	1,082	3,421	1,054	2,270	4,891
1,18	1,392	1,643	1,086	3,435	1,057	2,277	4,905
1,19	1,416	1,685	1,091	3,450	1,060	2,283	4,919
1,20	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932
1,21	1,464	1,772	1,100	3,479	1,066	2,296	4,946
1,22	1,488	1,816	1,105	3,493	1,069	2,302	4,960
1,23	1,513	1,861	1,109	3,507	1,071	2,308	4,973
1,24	1,538	1,907	1,114	3,521	1,074	2,315	4,987
1,25	1,562	1,953	1,118	3,536	1,077	2,321	5,000
1,26	1,588	2,000	1,122	3,550	1,080	2,327	5,013
1,27	1,613	2,048	1,127	3,564	1,083	2,333	5,027
1,28	1,638	2,097	1,131	3,578	1,086	2,339	5,040
1,29	1,664	2,147	1,136	3,592	1,089	2,345	5,053
1,30	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066
1,31	1,716	2,248	1,145	3,619	1,094	2,357	5,079
1,32	1,742	2,300	1,149	3,633	1,097	2,363	5,092
1,33	1,769	2,353	1,153	3,647	1,100	2,369	5,104
1,34	1,796	2,406	1,158	3,661	1,102	2,375	5,117
1,35	1,822	2,460	1,162	3,674	1,105	2,381	5,130
1,36	1,850	2,515	1,166	3,688	1,108	2,387	5,143
1,37	1,877	2,571	1,170	3,701	1,111	2,393	5,155
1,38	1,904	2,628	1,175	3,715	1,113	2,399	5,168
1,39	1,932	2,686	1,179	3,728	1,116	2,404	5,180
1,40	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192
1,41	1,988	2,803	1,187	3,755	1,121	2,416	5,205
1,42	2,016	2,863	1,192	3,768	1,124	2,422	5,217
1,43	2,045	2,924	1,196	3,782	1,127	2,427	5,229
1,44	2,074	2,986	1,200	3,795	1,129	2,433	5,241
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254

Tabel pärineb kogumikust [6], lk. 18-37.

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,45	2,102	3,049	1,204	3,808	1,132	2,438	5,254
1,46	2,132	3,112	1,208	3,821	1,134	2,444	5,266
1,47	2,161	3,177	1,212	3,834	1,137	2,450	5,278
1,48	2,190	3,242	1,217	3,847	1,140	2,455	5,290
1,49	2,220	3,308	1,221	3,860	1,142	2,461	5,301
1,50	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313
1,51	2,280	3,443	1,229	3,886	1,147	2,472	5,325
1,52	2,310	3,512	1,233	3,899	1,150	2,477	5,337
1,53	2,341	3,582	1,237	3,912	1,152	2,483	5,348
1,54	2,372	3,652	1,241	3,924	1,155	2,488	5,360
1,55	2,402	3,724	1,245	3,937	1,157	2,493	5,372
1,56	2,434	3,796	1,249	3,950	1,160	2,499	5,383
1,57	2,465	3,870	1,253	3,962	1,162	2,504	5,395
1,58	2,496	3,944	1,257	3,975	1,165	2,509	5,406
1,59	2,528	4,020	1,261	3,987	1,167	2,515	5,418
1,60	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429
1,61	2,592	4,173	1,269	4,012	1,172	2,525	5,440
1,62	2,624	4,252	1,273	4,025	1,174	2,530	5,451
1,63	2,657	4,331	1,277	4,037	1,177	2,535	5,463
1,64	2,690	4,411	1,281	4,050	1,179	2,541	5,474
1,65	2,722	4,492	1,285	4,062	1,182	2,546	5,485
1,66	2,756	4,574	1,288	4,074	1,184	2,551	5,496
1,67	2,789	4,657	1,292	4,087	1,186	2,556	5,507
1,68	2,822	4,742	1,296	4,099	1,189	2,561	5,518
1,69	2,856	4,827	1,300	4,111	1,191	2,566	5,529
1,70	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540
1,71	2,924	5,000	1,308	4,135	1,196	2,576	5,550
1,72	2,958	5,088	1,311	4,147	1,198	2,581	5,561
1,73	2,993	5,178	1,315	4,159	1,200	2,586	5,572
1,74	3,028	5,268	1,319	4,171	1,203	2,591	5,583
1,75	3,062	5,359	1,323	4,183	1,205	2,596	5,593
1,76	3,098	5,452	1,327	4,195	1,207	2,601	5,604
1,77	3,133	5,545	1,330	4,207	1,210	2,606	5,615
1,78	3,168	5,640	1,334	4,219	1,212	2,611	5,625
1,79	3,204	5,735	1,338	4,231	1,214	2,616	5,636
1,80	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646
1,81	3,276	5,930	1,345	4,254	1,219	2,626	5,657
1,82	3,312	6,029	1,349	4,266	1,221	2,630	5,667
1,83	3,349	6,128	1,353	4,278	1,223	2,635	5,677
1,84	3,386	6,230	1,356	4,290	1,225	2,640	5,688
1,85	3,422	6,332	1,360	4,301	1,228	2,645	5,698
1,86	3,460	6,435	1,364	4,313	1,230	2,650	5,708
1,87	3,497	6,539	1,367	4,324	1,232	2,654	5,718
1,88	3,534	6,645	1,371	4,336	1,234	2,659	5,729
1,89	3,572	6,751	1,375	4,347	1,236	2,664	5,739
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1,90	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749
1,91	3,648	6,968	1,382	4,370	1,241	2,673	5,759
1,92	3,686	7,078	1,386	4,382	1,243	2,678	5,769
1,93	3,725	7,189	1,389	4,393	1,245	2,682	5,779
1,94	3,764	7,301	1,393	4,405	1,247	2,687	5,789
1,95	3,802	7,415	1,396	4,416	1,249	2,692	5,799
1,96	3,842	7,530	1,400	4,427	1,251	2,696	5,809
1,97	3,881	7,645	1,404	4,438	1,254	2,701	5,819
1,98	3,920	7,762	1,407	4,450	1,256	2,705	5,828
1,99	3,960	7,881	1,411	4,461	1,258	2,710	5,838
2,00	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848
2,01	4,040	8,121	1,418	4,483	1,262	2,719	5,858
2,02	4,030	8,242	1,421	4,494	1,264	2,723	5,867
2,03	4,121	8,365	1,425	4,506	1,266	2,728	5,877
2,04	4,162	8,490	1,428	4,517	1,268	2,732	5,887
2,05	4,202	8,615	1,432	4,528	1,270	2,737	5,896
2,06	4,244	8,742	1,435	4,539	1,272	2,741	5,906
2,07	4,285	8,870	1,439	4,550	1,274	2,746	5,915
2,08	4,326	8,999	1,442	4,561	1,277	2,750	5,925
2,09	4,368	9,129	1,446	4,572	1,279	2,755	5,934
2,10	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944
2,11	4,452	9,394	1,453	4,593	1,283	2,763	5,953
2,12	4,494	9,528	1,456	4,604	1,285	2,768	5,963
2,13	4,537	9,664	1,459	4,615	1,287	2,772	5,972
2,14	4,580	9,800	1,463	4,626	1,289	2,776	5,981
2,15	4,622	9,938	1,466	4,637	1,291	2,781	5,991
2,16	4,666	10,08	1,470	4,648	1,293	2,785	6,000
2,17	4,709	10,22	1,473	4,658	1,295	2,789	6,009
2,18	4,752	10,36	1,476	4,669	1,297	2,794	6,018
2,19	4,796	10,50	1,480	4,680	1,299	2,798	6,028
2,20	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037
2,21	4,884	10,79	1,487	4,701	1,303	2,806	6,046
2,22	4,928	10,94	1,490	4,712	1,305	2,811	6,055
2,23	4,973	11,09	1,493	4,722	1,306	2,815	6,064
2,24	5,018	11,24	1,497	4,733	1,308	2,819	6,073
2,25	5,062	11,39	1,500	4,743	1,310	2,823	6,082
2,26	5,108	11,54	1,503	4,754	1,312	2,827	6,091
2,27	5,153	11,70	1,507	4,764	1,314	2,831	6,100
2,28	5,198	11,85	1,510	4,775	1,316	2,836	6,109
2,29	5,244	12,01	1,513	4,785	1,318	2,840	6,118
2,30	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127
2,31	5,336	12,33	1,520	4,806	1,322	2,848	6,136
2,32	5,382	12,49	1,523	4,817	1,324	2,852	6,145
2,33	5,429	12,65	1,526	4,827	1,326	2,856	6,153
2,34	5,476	12,81	1,530	4,837	1,328	2,860	6,162
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,35	5,522	12,98	1,533	4,848	1,330	2,864	6,171
2,36	5,570	13,14	1,536	4,858	1,331	2,868	6,180
2,37	5,617	13,31	1,539	4,868	1,333	2,872	6,188
2,38	5,664	13,48	1,543	4,879	1,335	2,876	6,197
2,39	5,712	13,65	1,546	4,889	1,337	2,880	6,206
2,40	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214
2,41	5,808	14,00	1,552	4,909	1,341	2,888	6,223
2,42	5,856	14,17	1,556	4,919	1,343	2,892	6,232
2,43	5,905	14,35	1,559	4,930	1,344	2,896	6,240
2,44	5,954	14,53	1,562	4,940	1,346	2,900	6,249
2,45	6,002	14,71	1,565	4,950	1,348	2,904	6,257
2,46	6,052	14,89	1,568	4,960	1,350	2,908	6,266
2,47	6,101	15,07	1,572	4,970	1,352	2,912	6,274
2,48	6,150	15,25	1,575	4,980	1,354	2,916	6,283
2,49	6,200	15,44	1,578	4,990	1,355	2,920	6,291
2,50	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300
2,51	6,300	15,81	1,584	5,010	1,359	2,928	6,308
2,52	6,350	16,00	1,587	5,020	1,361	2,932	6,316
2,53	6,401	16,19	1,591	5,030	1,363	2,936	6,325
2,54	6,452	16,39	1,594	5,040	1,364	2,940	6,333
2,55	6,502	16,58	1,597	5,050	1,366	2,943	6,341
2,56	6,554	16,78	1,600	5,060	1,368	2,947	6,350
2,57	6,605	16,97	1,603	5,070	1,370	2,951	6,358
2,58	6,656	17,17	1,606	5,079	1,372	2,955	6,366
2,59	6,708	17,37	1,609	5,089	1,373	2,959	6,374
2,60	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383
2,61	6,812	17,78	1,616	5,109	1,377	2,966	6,391
2,62	6,864	17,98	1,619	5,119	1,379	2,970	6,399
2,63	6,917	18,19	1,622	5,128	1,380	2,974	6,407
2,64	6,970	18,40	1,625	5,138	1,382	2,978	6,415
2,65	7,022	18,61	1,628	5,148	1,384	2,981	6,423
2,66	7,076	18,82	1,631	5,158	1,386	2,985	6,431
2,67	7,129	19,03	1,634	5,167	1,387	2,989	6,439
2,68	7,182	19,25	1,637	5,177	1,389	2,993	6,447
2,69	7,236	19,47	1,640	5,187	1,391	2,996	6,455
2,70	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463
2,71	7,344	19,90	1,646	5,206	1,394	3,004	6,471
2,72	7,398	20,12	1,649	5,215	1,396	3,007	6,479
2,73	7,453	20,35	1,652	5,225	1,398	3,011	6,487
2,74	7,508	20,57	1,655	5,235	1,399	3,015	6,495
2,75	7,562	20,80	1,658	5,244	1,401	3,018	6,503
2,76	7,618	21,02	1,661	5,254	1,403	3,022	6,511
2,77	7,673	21,25	1,664	5,263	1,404	3,026	6,519
2,78	7,728	21,48	1,667	5,273	1,406	3,029	6,527
2,79	7,784	21,72	1,670	5,282	1,408	3,033	6,534
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
2,80	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542
2,81	7,896	22,19	1,676	5,301	1,411	3,040	6,550
2,82	7,952	22,43	1,679	5,310	1,413	3,044	6,558
2,83	8,009	22,67	1,682	5,320	1,414	3,047	6,565
2,84	8,066	22,91	1,685	5,329	1,416	3,051	6,573
2,85	8,122	23,15	1,688	5,339	1,418	3,055	6,581
2,86	8,180	23,39	1,691	5,348	1,419	3,058	6,589
2,87	8,237	23,64	1,694	5,357	1,421	3,062	6,596
2,88	8,294	23,89	1,697	5,367	1,423	3,065	6,604
2,89	8,352	24,14	1,700	5,376	1,424	3,069	6,611
2,90	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619
2,91	8,468	24,64	1,706	5,394	1,428	3,076	6,627
2,92	8,526	24,90	1,709	5,404	1,429	3,079	6,634
2,93	8,585	25,15	1,712	5,413	1,431	3,083	6,642
2,94	8,644	25,41	1,715	5,422	1,433	3,086	6,649
2,95	8,702	25,67	1,718	5,431	1,434	3,090	6,657
2,96	8,762	25,93	1,720	5,441	1,436	3,093	6,664
2,97	8,821	26,20	1,723	5,450	1,437	3,097	6,672
2,98	8,880	26,46	1,726	5,459	1,439	3,100	6,679
2,99	8,940	26,73	1,729	5,468	1,441	3,104	6,687
3,00	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694
3,01	9,060	27,27	1,735	5,486	1,444	3,111	6,702
3,02	9,120	27,54	1,738	5,495	1,445	3,114	6,709
3,03	9,181	27,82	1,741	5,505	1,447	3,118	6,717
3,04	9,242	28,09	1,744	5,514	1,449	3,121	6,724
3,05	9,302	28,37	1,746	5,523	1,450	3,124	6,731
3,06	9,364	28,65	1,749	5,532	1,452	3,128	6,739
3,07	9,425	28,93	1,752	5,541	1,453	3,131	6,746
3,08	9,486	29,22	1,755	5,550	1,455	3,135	6,753
3,09	9,548	29,50	1,758	5,559	1,457	3,138	6,761
3,10	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768
3,11	9,672	30,08	1,764	5,577	1,460	3,145	6,775
3,12	9,734	30,37	1,766	5,586	1,461	3,148	6,782
3,13	9,797	30,66	1,769	5,595	1,463	3,151	6,790
3,14	9,860	30,96	1,772	5,604	1,464	3,155	6,797
3,15	9,922	31,26	1,775	5,612	1,466	3,158	6,804
3,16	9,986	31,55	1,778	5,621	1,467	3,162	6,811
3,17	10,05	31,86	1,780	5,630	1,469	3,165	6,818
3,18	10,11	32,16	1,783	5,639	1,471	3,168	6,826
3,19	10,18	32,46	1,786	5,648	1,472	3,171	6,833
3,20	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840
3,21	10,30	33,08	1,792	5,666	1,475	3,178	6,847
3,22	10,37	33,39	1,794	5,675	1,477	3,181	6,854
3,23	10,43	33,70	1,797	5,683	1,478	3,185	6,861
3,24	10,50	34,01	1,800	5,692	1,480	3,188	6,868
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,25	10,56	34,33	1,803	5,701	1,481	3,191	6,875
3,26	10,63	34,65	1,806	5,710	1,483	3,195	6,882
3,27	10,69	34,97	1,808	5,718	1,484	3,198	6,889
3,28	10,76	35,29	1,811	5,727	1,486	3,201	6,896
3,29	10,82	35,61	1,814	5,736	1,487	3,204	6,903
3,30	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910
3,31	10,96	36,26	1,819	5,753	1,490	3,211	6,917
3,32	11,02	36,59	1,822	5,762	1,492	3,214	6,924
3,33	11,09	36,93	1,825	5,771	1,493	3,217	6,931
3,34	11,16	37,26	1,828	5,779	1,495	3,220	6,938
3,35	11,22	37,60	1,830	5,788	1,496	3,224	6,945
3,36	11,29	37,93	1,833	5,797	1,498	3,227	6,952
3,37	11,36	38,27	1,836	5,806	1,499	3,230	6,959
3,38	11,42	38,61	1,838	5,814	1,501	3,233	6,966
3,39	11,49	38,96	1,841	5,822	1,502	3,236	6,973
3,40	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980
3,41	11,63	39,65	1,847	5,840	1,505	3,243	6,986
3,42	11,70	40,00	1,849	5,848	1,507	3,246	6,993
3,43	11,76	40,35	1,852	5,857	1,508	3,249	7,000
3,44	11,83	40,71	1,855	5,865	1,510	3,252	7,007
3,45	11,90	41,06	1,857	5,874	1,511	3,255	7,014
3,46	11,97	41,42	1,860	5,882	1,512	3,259	7,020
3,47	12,04	41,78	1,863	5,891	1,514	3,262	7,027
3,48	12,11	42,14	1,865	5,899	1,515	3,265	7,034
3,49	12,18	42,51	1,868	5,908	1,517	3,268	7,041
3,50	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047
3,51	12,32	43,24	1,873	5,925	1,520	2,274	7,054
3,52	12,39	43,61	1,876	5,933	1,521	3,277	7,061
3,53	12,46	43,99	1,879	5,941	1,523	3,280	7,067
3,54	12,53	44,36	1,881	5,950	1,524	3,283	7,074
3,55	12,60	44,74	1,884	5,958	1,525	3,287	7,081
3,56	12,67	45,12	1,887	5,967	1,527	3,290	7,087
3,57	12,74	45,50	1,889	5,975	1,528	3,293	7,094
3,58	12,82	45,88	1,892	5,983	1,530	3,296	7,101
3,59	12,89	46,27	1,895	5,992	1,531	3,299	7,107
3,60	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114
3,61	13,03	47,05	1,900	6,008	1,534	3,305	7,120
3,62	13,10	47,44	1,903	6,017	1,535	3,308	7,127
3,63	13,18	47,83	1,905	6,025	1,537	3,311	7,133
3,64	13,25	48,23	1,908	6,033	1,538	3,314	7,140
3,65	13,32	48,63	1,910	6,042	1,540	3,317	7,147
3,66	13,40	49,03	1,913	6,050	1,541	3,320	7,153
3,67	13,47	49,43	1,916	6,058	1,542	3,323	7,160
3,68	13,54	49,84	1,918	6,066	1,544	3,326	7,166
3,69	13,62	50,24	1,921	6,075	1,545	3,329	7,173
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
3,70	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179
3,71	13,76	51,06	1,926	6,091	1,548	3,335	7,186
3,72	13,84	51,48	1,929	6,099	1,549	3,338	7,192
3,73	13,91	51,90	1,931	6,107	1,551	3,341	7,198
3,74	13,99	52,31	1,934	6,116	1,552	3,344	7,205
3,75	14,06	52,73	1,936	6,124	1,554	3,347	7,211
3,76	14,14	53,16	1,939	6,132	1,555	3,350	7,218
3,77	14,21	53,58	1,942	6,140	1,556	3,353	7,224
3,78	14,29	54,01	1,944	6,148	1,558	3,356	7,230
3,79	14,36	54,44	1,947	6,156	1,559	3,359	7,237
3,80	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243
3,81	14,52	55,31	1,952	6,173	1,562	3,365	7,250
3,82	14,59	55,74	1,954	6,181	1,563	3,368	7,256
3,83	14,67	56,18	1,957	6,189	1,565	3,371	7,262
3,84	14,75	56,62	1,960	6,197	1,566	3,374	7,268
3,85	14,82	57,07	1,962	6,205	1,567	3,377	7,275
3,86	14,90	57,51	1,965	6,213	1,569	3,380	7,281
3,87	14,98	57,96	1,967	6,221	1,570	3,382	7,287
3,88	15,05	58,41	1,970	6,229	1,571	3,385	7,294
3,89	15,13	58,86	1,972	6,237	1,573	3,388	7,300
3,90	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306
3,91	15,29	59,78	1,977	6,253	1,575	3,394	7,312
3,92	15,37	60,24	1,980	6,261	1,577	3,397	7,319
3,93	15,44	60,70	1,982	6,269	1,578	3,400	7,325
3,94	15,52	61,16	1,985	6,277	1,579	3,403	7,331
3,95	15,60	61,63	1,987	6,285	1,581	3,406	7,337
3,96	15,68	62,10	1,990	6,293	1,582	3,409	7,343
3,97	15,76	62,57	1,992	6,301	1,583	3,411	7,350
3,98	15,84	63,04	1,995	6,309	1,585	3,414	7,356
3,99	15,92	63,52	1,997	6,317	1,586	3,417	7,362
4,00	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368
4,01	16,08	64,48	2,002	6,332	1,589	3,423	7,374
4,02	16,16	64,96	2,005	6,340	1,590	3,426	7,380
4,03	16,24	65,45	2,007	6,348	1,591	3,428	7,386
4,04	16,32	65,94	2,010	6,356	1,593	3,431	7,393
4,05	16,40	66,43	2,012	6,364	1,594	3,434	7,399
4,06	16,48	66,92	2,015	6,372	1,595	3,437	7,405
4,07	16,56	67,42	2,017	6,380	1,597	3,440	7,411
4,08	16,65	67,92	2,020	6,387	1,598	3,443	7,417
4,09	16,73	68,42	2,022	6,395	1,599	3,445	7,423
4,10	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429
4,11	16,89	69,43	2,027	6,411	1,602	3,451	7,435
4,12	16,97	69,93	2,030	6,419	1,603	3,454	7,441
4,13	17,06	70,44	2,032	6,427	1,604	3,457	7,447
4,14	17,14	70,96	2,035	6,434	1,606	3,459	7,453
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,15	17,22	71,47	2,037	6,442	1,607	3,462	7,459
4,16	17,31	71,99	2,040	6,450	1,608	3,465	7,465
4,17	17,39	72,51	2,042	6,458	1,610	3,468	7,471
4,18	17,47	73,03	2,045	6,465	1,611	3,471	7,477
4,19	17,56	73,56	2,047	6,473	1,612	3,473	7,483
4,20	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489
4,21	17,72	74,62	2,052	6,488	1,615	3,479	7,495
4,22	17,81	75,15	2,054	6,496	1,616	3,482	7,501
4,23	17,89	75,69	2,057	6,504	1,617	3,484	7,507
4,24	17,98	76,23	2,059	6,512	1,619	3,487	7,513
4,25	18,06	76,77	2,062	6,519	1,620	3,490	7,518
4,26	18,15	77,31	2,064	6,527	1,621	3,493	7,524
4,27	18,23	77,85	2,066	6,535	1,622	3,495	7,530
4,28	18,32	78,40	2,069	6,542	1,624	3,498	7,536
4,29	18,40	78,95	2,071	6,550	1,625	3,501	7,542
4,30	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548
4,31	18,58	80,06	2,076	6,565	1,627	3,506	7,554
4,32	18,66	80,62	2,078	6,573	1,629	3,509	7,560
4,33	18,75	81,18	2,081	6,580	1,630	3,512	7,565
4,34	18,84	81,75	2,083	6,588	1,631	3,514	7,571
4,35	18,92	82,31	2,086	6,595	1,632	3,517	7,577
4,36	19,01	82,88	2,088	6,603	1,634	3,520	7,583
4,37	19,10	83,45	2,090	6,611	1,635	3,522	7,589
4,38	19,18	84,03	2,093	6,618	1,636	3,525	7,594
4,39	19,27	84,60	2,095	6,626	1,637	3,528	7,600
4,40	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606
4,41	19,45	85,77	2,100	6,641	1,640	3,533	7,612
4,42	19,54	86,35	2,102	6,648	1,641	3,536	7,617
4,43	19,62	86,94	2,105	6,656	1,642	3,538	7,623
4,44	19,71	87,53	2,107	6,663	1,644	3,541	7,629
4,45	19,80	88,12	2,110	6,671	1,645	3,544	7,635
4,46	19,89	88,72	2,112	6,678	1,646	3,546	7,640
4,47	19,98	89,31	2,114	6,686	1,647	3,549	7,646
4,48	20,07	89,92	2,117	6,693	1,649	3,552	7,652
4,49	20,16	90,52	2,119	6,701	1,650	3,554	7,657
4,50	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663
4,51	20,34	91,73	2,124	6,716	1,652	3,560	7,669
4,52	20,43	92,35	2,126	6,723	1,653	3,562	7,674
4,53	20,52	92,96	2,128	6,731	1,655	3,565	7,680
4,54	20,61	93,58	2,131	6,738	1,656	3,567	7,686
4,55	20,70	94,20	2,133	6,745	1,657	3,570	7,691
4,56	20,79	94,82	2,135	6,753	1,658	3,573	7,697
4,57	20,88	95,44	2,138	6,760	1,659	3,575	7,703
4,58	20,98	96,07	2,140	6,768	1,661	3,578	7,708
4,59	21,07	96,70	2,142	6,775	1,662	3,580	7,714
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
4,60	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719
4,61	21,25	97,97	2,147	6,790	1,664	3,586	7,725
4,62	21,34	98,61	2,149	6,797	1,666	3,588	7,731
4,63	21,44	99,25	2,152	6,804	1,667	3,591	7,736
4,64	21,53	99,90	2,154	6,812	1,668	3,593	7,742
4,65	21,62	100,5	2,156	6,819	1,669	3,596	7,747
4,66	21,72	101,2	2,159	6,826	1,670	3,599	7,753
4,67	21,81	101,8	2,161	6,834	1,671	3,601	7,758
4,68	21,90	102,5	2,163	6,841	1,673	3,604	7,764
4,69	22,00	103,2	2,166	6,848	1,674	3,606	7,769
4,70	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775
4,71	22,18	104,5	2,170	6,863	1,676	3,611	7,780
4,72	22,28	105,2	2,173	6,870	1,677	3,614	7,786
4,73	22,37	105,8	2,175	6,877	1,679	3,616	7,791
4,74	22,47	106,5	2,177	6,885	1,680	3,619	7,797
4,75	22,56	107,2	2,179	6,892	1,681	3,622	7,802
4,76	22,66	107,9	2,182	6,899	1,682	3,624	7,808
4,77	22,75	108,5	2,184	6,907	1,683	3,627	7,813
4,78	22,85	109,2	2,186	6,914	1,685	3,629	7,819
4,79	22,94	109,9	2,189	6,921	1,686	4,632	7,824
4,80	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830
4,81	23,14	111,3	2,193	6,935	1,688	3,637	7,835
4,82	23,23	112,0	2,195	6,943	1,689	3,639	7,841
4,83	23,33	112,7	2,198	6,950	1,690	3,642	7,846
4,84	23,43	113,4	2,200	6,957	1,692	3,644	7,851
4,85	23,52	114,1	2,202	6,964	1,693	3,647	7,857
4,86	23,62	114,8	2,205	6,971	1,694	3,649	7,862
4,87	23,72	115,5	2,207	6,979	1,695	3,652	7,868
4,88	23,81	116,2	2,209	6,986	1,696	3,654	7,873
4,89	23,91	116,9	2,211	6,993	1,697	3,657	7,878
4,90	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884
4,91	24,11	118,4	2,216	7,007	1,700	3,662	7,889
4,92	24,21	119,1	2,218	7,014	1,701	3,664	7,894
4,93	24,30	119,8	2,220	7,021	1,702	3,667	7,900
4,94	24,40	120,6	2,223	7,029	1,703	3,669	7,905
4,95	24,50	121,3	2,225	7,036	1,704	3,672	7,910
4,96	24,60	122,0	2,227	7,043	1,705	3,674	7,916
4,97	24,70	122,8	2,229	7,050	1,707	3,677	7,921
4,98	24,80	123,5	2,232	7,057	1,708	3,679	7,926
4,99	24,90	124,3	2,234	7,064	1,709	3,682	7,932
5,00	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937
5,01	25,10	125,8	2,238	7,078	1,711	3,686	7,942
5,02	25,20	126,5	2,241	7,085	1,712	3,689	7,948
5,03	25,30	127,3	2,243	7,092	1,713	3,691	7,953
5,04	25,40	128,0	2,245	7,099	1,715	3,694	7,958
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,05	25,50	128,8	2,247	7,106	1,716	3,696	7,963
5,06	25,60	129,6	2,249	7,113	1,717	3,699	7,969
5,07	25,70	130,3	2,252	7,120	1,718	3,701	7,974
5,08	25,81	131,1	2,254	7,127	1,719	3,704	7,979
5,09	25,91	131,9	2,256	7,134	1,720	3,706	7,984
5,10	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990
5,11	26,11	133,4	2,261	7,148	1,722	3,711	7,995
5,12	26,21	134,2	2,263	7,155	1,724	3,713	8,000
5,13	26,32	135,0	2,265	7,162	1,725	3,716	8,005
5,14	26,42	135,8	2,267	7,169	1,726	3,718	8,010
5,15	26,52	136,6	2,269	7,176	1,727	3,721	8,016
5,16	26,63	137,4	2,272	7,183	1,728	3,723	8,021
5,17	26,73	138,2	2,274	7,190	1,729	3,725	8,026
5,18	26,83	139,0	2,276	7,197	1,730	3,728	8,031
5,19	26,94	139,8	2,278	7,204	1,731	3,730	8,036
5,20	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041
5,21	27,14	141,4	2,283	7,218	1,734	3,735	8,047
5,22	27,25	142,2	2,285	7,225	1,735	3,737	8,052
5,23	27,35	143,1	2,287	7,232	1,736	3,740	8,057
5,24	27,46	143,9	2,289	7,239	1,737	3,742	8,062
5,25	27,56	144,7	2,291	7,246	1,738	3,744	8,067
5,26	27,67	145,5	2,293	7,253	1,739	3,747	8,072
5,27	27,77	146,4	2,296	7,259	1,740	3,749	8,077
5,28	27,88	147,2	2,298	7,266	1,741	3,752	8,082
5,29	27,98	148,0	2,300	7,273	1,742	3,754	8,088
5,30	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093
5,31	28,20	149,7	2,304	7,287	1,745	3,759	8,098
5,32	28,30	150,6	2,307	7,294	1,746	3,761	8,103
5,33	28,41	151,4	2,309	7,301	1,747	3,763	8,108
5,34	28,52	152,3	2,311	7,308	1,748	3,766	8,113
5,35	28,62	153,1	2,313	7,314	1,749	3,768	8,118
5,36	28,73	154,0	2,315	7,321	1,750	3,770	8,123
5,37	28,84	154,9	2,317	7,328	1,751	3,773	8,128
5,38	28,94	155,7	2,319	7,335	1,752	3,775	8,133
5,39	29,05	156,6	2,322	7,342	1,753	3,777	8,138
5,40	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143
5,41	29,27	158,3	2,326	7,355	1,755	3,782	8,148
5,42	29,38	159,2	2,328	7,362	1,757	3,784	8,153
5,43	29,48	160,1	2,330	7,369	1,758	3,787	8,158
5,44	29,59	161,0	2,332	7,376	1,759	3,789	8,163
5,45	29,70	161,9	2,335	7,382	1,760	3,791	8,168
5,46	29,81	162,8	2,337	7,389	1,761	3,794	8,173
5,47	29,92	163,7	2,339	7,396	1,762	3,796	8,178
5,48	30,03	164,6	2,341	7,403	1,763	3,798	8,183
5,49	30,14	165,5	2,343	7,409	1,764	3,801	8,188
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,50	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193
5,51	30,36	167,3	2,347	7,423	1,766	3,805	8,198
5,52	30,47	168,2	2,349	7,430	1,767	3,808	8,203
5,53	30,58	169,1	3,352	7,436	1,768	3,810	8,208
5,54	30,69	170,0	2,354	7,443	1,769	3,812	8,213
5,55	30,80	171,0	2,356	7,450	1,771	3,814	8,218
5,56	30,91	171,9	2,358	7,457	1,772	3,817	8,223
5,57	31,02	172,8	2,360	7,463	1,773	3,819	8,228
5,58	31,14	173,7	2,362	7,470	1,774	3,821	8,233
5,59	31,25	174,7	2,364	7,477	1,775	3,824	8,238
5,60	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243
5,61	31,47	176,6	2,369	7,490	1,777	3,828	8,247
5,62	31,58	177,5	2,371	7,497	1,778	3,830	8,252
5,63	31,70	178,5	2,373	7,503	1,779	3,833	8,257
5,64	31,81	179,4	2,375	7,510	1,780	3,835	8,262
5,65	31,92	180,4	2,377	7,517	1,781	3,837	8,267
5,66	32,04	181,3	2,379	7,523	1,782	3,839	8,272
5,67	32,15	182,3	2,381	7,530	1,783	3,842	8,277
5,68	32,26	183,3	2,383	7,537	1,784	3,844	8,282
5,69	32,38	184,2	2,385	7,543	1,785	3,846	8,286
5,70	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291
5,71	32,60	186,2	2,390	7,556	1,787	3,851	8,296
5,72	32,72	187,1	2,392	7,563	1,788	3,853	8,301
5,73	32,83	188,1	2,394	7,570	1,789	3,855	8,306
5,74	32,95	189,1	3,396	7,576	1,790	3,857	8,311
5,75	33,06	190,1	2,398	7,583	1,792	3,860	8,316
5,76	33,18	191,1	2,400	7,589	1,793	3,862	8,320
5,77	33,29	192,1	2,402	7,596	1,794	3,864	8,325
5,78	33,41	193,1	2,404	7,603	1,795	3,866	8,330
5,79	33,52	194,1	2,406	7,609	1,796	3,869	8,335
5,80	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340
5,81	33,76	196,1	2,410	7,622	1,798	3,873	8,344
5,82	33,87	197,1	2,412	7,629	1,799	3,875	8,349
5,83	33,99	198,2	2,415	7,635	1,800	3,878	8,354
5,84	34,11	199,2	2,417	7,642	1,801	3,880	8,359
5,85	34,22	200,2	2,419	7,649	1,802	3,882	8,363
5,86	34,34	201,2	2,421	7,655	1,803	3,884	8,368
5,87	34,46	202,3	2,423	7,662	1,804	3,886	8,373
5,88	34,57	203,3	2,425	7,668	1,805	3,889	8,378
5,89	34,69	204,3	2,427	7,675	1,806	3,891	8,382
5,90	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387
5,91	34,93	206,4	2,431	7,688	1,808	3,895	8,392
5,92	35,05	207,5	2,433	7,694	1,809	3,897	8,397
5,93	35,16	208,5	2,435	7,701	1,810	3,900	8,401
5,94	35,28	209,6	2,437	7,707	1,811	3,902	8,406
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
5,95	35,40	210,6	2,439	7,714	1,812	3,904	8,411
5,96	35,52	211,7	2,441	7,720	1,813	3,906	8,416
5,97	35,64	212,8	2,443	7,727	1,814	3,908	8,420
5,98	35,76	213,8	2,445	7,733	1,815	3,911	8,425
5,99	35,88	214,9	2,447	7,740	1,816	3,913	8,430
6,00	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434
6,01	36,12	217,1	2,452	7,752	1,818	3,917	8,439
6,02	36,24	218,2	2,454	7,759	1,819	3,919	3,444
6,03	36,36	219,3	2,456	7,765	1,820	3,921	8,448
6,04	36,48	220,3	2,458	7,772	1,821	3,924	8,453
6,05	36,60	221,4	2,460	7,778	1,822	3,926	8,458
6,06	36,72	222,5	2,462	7,785	1,823	3,928	8,462
6,07	36,84	223,6	2,464	7,791	1,824	3,930	8,467
6,08	36,97	224,8	2,466	7,797	1,825	3,932	8,472
6,09	37,09	225,9	2,468	7,804	1,826	3,934	8,476
6,10	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481
6,11	37,33	228,1	2,472	7,817	1,828	3,939	8,486
6,12	37,45	229,2	2,474	7,823	1,829	3,941	8,490
6,13	37,58	230,3	2,476	7,829	1,830	3,943	8,495
6,14	37,70	231,5	2,478	7,836	1,831	3,945	8,499
6,15	37,82	232,6	2,480	7,842	1,832	3,947	8,504
6,16	37,95	233,7	2,482	7,849	1,833	3,949	8,509
6,17	38,07	234,9	2,484	7,855	1,834	3,951	8,513
6,18	38,19	236,0	2,486	7,861	1,835	3,954	8,518
6,19	38,32	237,2	2,488	7,868	1,836	3,956	8,522
6,20	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527
6,21	38,56	239,5	2,492	7,880	1,838	3,960	8,532
6,22	38,69	240,6	2,494	7,887	1,839	3,962	8,536
6,23	38,81	241,8	2,496	7,893	1,840	3,964	8,541
6,24	38,94	243,0	2,498	7,899	1,841	3,966	8,545
6,25	39,06	244,1	2,500	7,906	1,842	3,969	8,550
6,26	39,19	245,3	2,502	7,912	1,843	3,971	8,554
6,27	39,31	246,5	2,504	7,918	1,844	3,973	8,559
6,28	39,44	247,7	2,506	7,925	1,845	3,975	8,564
6,29	39,56	248,9	2,508	7,931	1,846	3,977	8,568
6,30	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573
6,31	39,82	251,2	2,512	7,944	1,848	3,981	8,577
6,32	39,94	252,4	2,514	7,950	1,849	3,983	8,582
6,33	40,07	253,6	2,516	7,956	1,850	3,985	8,586
6,34	40,20	254,8	2,518	7,962	1,851	3,987	8,591
6,35	40,32	256,0	2,520	7,969	1,852	3,990	8,595
6,36	40,45	257,3	2,522	7,975	1,853	3,992	8,600
6,37	40,58	258,5	2,524	7,981	1,854	3,994	8,604
6,38	40,70	259,7	2,526	7,987	1,855	3,996	8,609
6,39	40,83	260,9	2,528	7,994	1,856	3,998	8,613
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,40	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618
6,41	41,09	263,4	2,532	8,006	1,858	4,002	8,622
6,42	41,22	264,6	2,534	8,012	1,859	4,004	8,627
6,43	41,34	265,8	2,536	8,019	1,860	4,006	8,631
6,44	41,47	267,1	2,538	8,025	1,860	4,008	8,636
6,45	41,60	268,3	2,540	8,031	1,861	4,010	8,640
6,46	41,73	269,6	2,542	8,037	1,862	4,012	8,645
6,47	41,86	270,8	2,544	8,044	1,863	4,015	8,649
6,48	41,99	272,1	2,546	8,050	1,864	4,017	8,653
6,49	42,12	273,4	2,548	8,056	1,865	4,019	8,658
6,50	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662
6,51	42,38	275,9	2,551	8,068	1,867	4,023	8,667
6,52	42,51	277,2	2,553	8,075	1,868	4,025	8,671
6,53	42,64	278,4	2,555	8,081	1,869	4,027	8,676
6,54	42,77	279,7	2,557	8,087	1,870	4,029	8,680
6,55	42,90	281,0	2,559	8,093	1,871	4,031	8,685
6,56	43,03	282,3	2,561	8,099	1,872	4,033	8,689
6,57	43,16	283,6	2,563	8,106	1,873	4,035	8,693
6,58	43,30	284,9	2,565	8,112	1,874	4,037	8,698
6,59	43,43	286,2	2,567	8,118	1,875	4,039	8,702
6,60	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707
6,61	43,69	288,8	2,571	8,130	1,877	4,043	8,711
6,62	43,82	290,1	2,573	8,136	1,878	4,045	8,715
6,63	43,96	291,4	2,575	8,142	1,879	4,047	8,720
6,64	44,09	292,8	2,577	8,149	1,880	4,049	8,724
6,65	44,22	294,1	2,579	8,155	1,881	4,051	8,729
6,66	44,36	295,4	2,581	8,161	1,881	4,053	8,733
6,67	44,49	296,7	2,583	8,167	1,882	4,055	8,737
6,68	44,62	298,1	2,585	8,173	1,883	4,058	8,742
6,69	44,76	299,4	2,587	8,179	1,884	4,060	8,746
6,70	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750
6,71	45,02	302,1	2,590	8,191	1,886	4,064	8,755
6,72	45,16	303,5	2,592	8,198	1,887	4,066	8,759
6,73	45,29	304,8	2,594	8,204	1,888	4,068	8,763
6,74	45,43	306,2	2,596	8,210	1,889	4,070	8,768
6,75	45,56	307,5	2,598	8,216	1,890	4,072	8,772
6,76	45,70	308,9	2,600	8,222	1,891	4,074	8,776
6,77	45,83	310,3	2,602	8,228	1,892	4,076	8,781
6,78	45,97	311,7	2,604	8,234	1,893	4,078	8,785
6,79	46,10	313,0	2,606	8,240	1,894	4,080	8,789
6,80	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794
6,81	46,38	315,8	2,610	8,252	1,895	4,084	8,798
6,82	46,51	317,2	2,612	8,258	1,896	4,086	8,802
6,83	46,65	318,6	2,613	8,264	1,897	4,088	8,807
6,84	46,79	320,0	2,615	8,270	1,898	4,090	8,811
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
6,85	46,92	321,4	2,617	8,276	1,899	4,092	8,815
6,86	47,06	322,8	2,619	8,283	1,900	4,094	8,819
6,87	47,20	324,2	2,621	8,289	1,901	4,096	8,824
6,88	47,33	325,7	2,623	8,295	1,902	4,098	8,828
6,89	47,47	327,1	2,625	8,301	1,903	4,100	8,832
6,90	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837
6,91	47,75	329,9	2,629	8,313	1,905	4,104	8,841
6,92	47,89	331,4	2,631	8,319	1,906	4,106	8,845
6,93	48,02	332,8	2,632	8,325	1,907	4,108	8,849
6,94	48,16	334,3	2,634	8,331	1,907	4,109	8,854
6,95	48,30	335,7	2,636	8,337	1,908	4,111	8,858
6,96	48,44	337,2	2,638	8,343	1,909	4,113	8,862
6,97	48,58	338,6	2,640	8,349	1,910	4,115	8,866
6,98	48,72	340,1	2,642	8,355	1,911	4,117	8,871
6,99	48,86	341,5	2,644	8,361	1,912	4,119	8,875
7,00	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879
7,01	49,14	344,5	2,648	8,373	1,914	4,123	8,883
7,02	49,28	345,9	2,650	8,379	1,915	4,125	8,887
7,03	49,42	347,4	2,651	8,385	1,916	4,127	8,892
7,04	49,56	348,9	2,653	8,390	1,917	4,129	8,896
7,05	49,70	350,4	2,655	8,396	1,917	4,131	8,900
7,06	49,84	351,9	2,657	8,402	1,918	4,133	8,904
7,07	49,98	353,4	2,659	8,408	1,919	4,135	8,909
7,08	50,13	354,9	2,661	8,414	1,920	4,137	8,913
7,09	50,27	356,4	2,663	8,420	1,921	4,139	8,917
7,10	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921
7,11	50,55	359,4	2,666	8,432	1,923	4,143	8,925
7,12	50,69	360,9	2,668	8,438	1,924	4,145	8,929
7,13	50,84	362,5	2,670	8,444	1,925	4,147	8,934
7,14	50,98	364,0	2,672	8,450	1,926	4,149	8,938
7,15	51,12	365,5	2,674	8,456	1,926	4,151	8,942
7,16	51,27	367,1	2,676	8,362	1,927	4,152	8,946
7,17	51,41	368,6	2,678	8,468	1,928	4,154	8,950
7,18	51,55	370,1	2,680	8,473	1,929	4,156	8,955
7,19	51,70	371,7	2,681	8,479	1,930	4,158	8,959
7,20	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963
7,21	51,98	374,8	2,685	8,491	1,932	4,162	8,967
7,22	52,13	376,4	2,687	8,497	1,933	4,164	8,971
7,23	52,27	377,9	2,689	8,503	1,934	4,166	8,975
7,24	52,42	379,5	2,691	8,509	1,935	4,168	8,979
7,25	52,56	381,1	2,693	8,515	1,935	4,170	8,984
7,26	52,71	382,7	2,694	8,521	1,936	4,172	8,988
7,27	52,85	384,2	2,696	8,526	1,937	4,174	8,992
7,28	53,00	385,8	2,698	8,532	1,938	4,176	8,996
7,29	53,14	387,4	2,700	8,538	1,939	4,177	9,000
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,30	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004
7,31	53,44	390,6	2,704	8,550	1,941	4,181	9,008
7,32	53,58	392,2	2,706	8,556	1,942	4,183	9,012
7,33	53,73	393,8	2,707	8,562	1,943	4,185	9,016
7,34	53,88	395,4	2,709	8,567	1,943	4,187	9,021
7,35	54,02	397,1	2,711	8,573	1,944	4,189	9,025
7,36	54,17	398,7	2,713	8,579	1,945	4,191	9,029
7,37	54,32	400,3	2,715	8,585	1,946	4,193	9,033
7,38	54,46	401,9	2,717	8,591	1,947	4,195	9,037
7,39	54,61	403,6	2,718	8,597	1,948	4,196	9,041
7,40	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045
7,41	54,91	406,9	2,722	8,608	1,950	4,200	9,049
7,42	55,06	408,5	2,724	8,614	1,950	4,202	9,053
7,43	55,20	410,2	2,726	8,620	1,951	4,204	9,057
7,44	55,35	411,8	2,728	8,626	1,952	4,206	9,061
7,45	55,50	413,5	2,729	8,631	1,953	4,208	9,065
7,46	55,65	415,2	2,731	8,637	1,954	4,210	9,069
7,47	55,80	416,8	2,733	8,643	1,955	4,212	9,073
7,48	55,95	418,5	2,735	8,649	1,956	4,213	9,078
7,49	56,10	420,2	2,737	8,654	1,957	4,215	9,082
7,50	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086
7,51	56,40	423,6	2,740	8,666	1,958	4,219	9,090
7,52	56,55	425,3	2,742	8,672	1,959	4,221	9,094
7,53	56,70	427,0	2,744	8,678	1,960	4,223	9,098
7,54	56,85	428,7	2,746	8,683	1,961	4,225	9,102
7,55	57,00	430,4	2,748	8,689	1,962	4,227	9,106
7,56	57,15	432,1	2,750	8,695	1,963	4,228	9,110
7,57	57,30	433,8	2,751	8,701	1,964	4,230	9,114
7,58	57,46	435,5	2,753	8,706	1,964	4,232	9,118
7,59	57,61	437,2	2,755	8,712	1,965	4,234	9,122
7,60	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126
7,61	57,91	440,7	2,759	8,724	1,967	4,238	9,130
7,62	58,06	442,5	2,760	8,729	1,968	4,240	9,134
7,63	58,22	444,2	2,762	8,735	1,969	4,241	9,138
7,64	58,37	445,9	2,764	8,741	1,970	4,243	9,142
7,65	58,52	447,7	2,766	8,746	1,970	4,245	9,146
7,66	58,68	449,5	2,768	8,752	1,971	4,247	9,150
7,67	58,83	451,2	2,769	8,758	1,972	4,249	9,154
7,68	58,98	453,0	2,771	8,764	1,973	4,251	9,158
7,69	59,14	454,8	2,773	8,769	1,974	4,252	9,162
7,70	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166
7,71	59,44	458,3	2,777	8,781	1,976	4,256	9,170
7,72	59,60	460,1	2,778	8,786	1,976	4,258	9,174
7,73	59,75	461,9	2,780	8,792	1,977	4,260	9,178
7,74	59,91	463,7	2,782	8,798	1,978	4,262	9,182
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
7,75	60,06	465,5	2,784	8,803	1,979	4,264	9,185
7,76	60,22	467,3	2,786	8,809	1,980	4,265	9,189
7,77	60,37	469,1	2,787	8,815	1,981	4,267	9,193
7,78	60,53	470,9	2,789	8,820	1,981	4,269	9,197
7,79	60,68	472,7	2,791	8,826	1,982	4,271	9,201
7,80	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205
7,81	61,00	476,4	2,795	8,837	1,984	4,274	9,209
7,82	61,15	478,2	2,796	8,843	1,985	4,276	9,213
7,83	61,31	480,0	2,798	8,849	1,986	4,278	9,217
7,84	61,47	481,9	2,800	8,854	1,987	4,280	9,221
7,85	61,62	483,7	2,802	8,860	1,987	4,282	9,225
7,86	61,78	485,6	2,804	8,866	1,988	4,284	9,229
7,87	61,94	487,4	2,805	8,871	1,989	4,285	9,233
7,88	62,09	489,3	2,807	8,877	1,990	4,287	9,237
7,89	62,25	491,2	2,809	8,883	1,991	4,289	9,240
7,90	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244
7,91	62,57	494,9	2,812	8,894	1,992	4,293	9,248
7,92	62,73	496,8	2,814	8,899	1,993	4,294	9,252
7,93	62,88	498,7	2,816	8,905	1,994	4,296	9,256
7,94	63,04	500,6	2,818	8,911	1,995	4,298	9,260
7,95	63,20	502,5	2,820	8,916	1,996	4,300	9,264
7,96	63,36	504,4	2,821	8,922	1,997	4,302	9,268
7,97	63,52	506,3	2,823	8,927	1,997	4,303	9,272
7,98	63,68	508,2	2,825	8,933	1,998	4,305	9,275
7,99	63,84	510,1	2,827	8,939	1,999	4,307	9,279
8,00	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283
8,01	64,16	513,9	2,830	8,950	2,001	4,311	9,287
8,02	64,32	515,8	2,832	8,955	2,002	4,312	9,291
8,03	64,48	517,8	2,834	8,961	2,002	4,314	9,295
8,04	64,64	519,7	2,835	8,967	2,003	4,316	9,299
8,05	64,80	521,7	2,837	8,972	2,004	4,318	9,302
8,06	64,96	523,6	2,839	8,978	2,005	4,320	9,306
8,07	65,12	525,6	2,841	8,983	2,006	4,321	9,310
8,08	65,29	527,5	2,843	8,989	2,007	4,323	9,314
8,09	65,45	529,5	2,844	8,994	2,007	4,325	9,318
8,10	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322
8,11	65,77	533,4	2,848	9,006	2,009	4,329	9,326
8,12	65,93	535,4	2,850	9,011	2,010	4,330	9,329
8,13	66,10	537,4	2,851	9,017	2,011	4,332	9,333
8,14	66,26	539,4	2,853	9,022	2,012	4,334	9,337
8,15	66,42	541,3	2,855	9,028	2,012	4,336	9,341
8,16	66,59	543,3	2,857	9,033	2,013	4,337	9,345
8,17	66,75	545,3	2,858	9,039	2,014	4,339	9,348
8,18	66,91	547,3	2,860	9,044	2,015	4,341	9,352
8,19	67,08	549,4	2,862	9,050	2,016	4,343	9,356
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,20	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360
8,21	67,40	553,4	2,865	9,061	2,017	4,346	9,364
8,22	67,57	555,4	2,867	9,066	2,018	4,348	9,368
8,23	67,73	557,4	2,869	9,072	2,019	4,350	9,371
8,24	67,90	559,5	2,871	9,077	2,020	4,352	9,375
8,25	68,06	561,5	2,872	9,083	2,021	4,353	9,379
8,26	68,23	563,6	2,874	9,088	2,021	4,355	9,383
8,27	68,39	565,6	2,876	9,094	2,022	4,357	9,386
8,28	68,56	567,7	2,877	9,099	2,023	4,359	9,390
8,29	68,72	569,7	2,879	9,105	2,024	4,360	9,394
8,30	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398
8,31	69,06	573,9	2,883	9,116	2,026	4,364	9,402
8,32	69,22	575,9	2,884	9,121	2,026	4,366	9,405
8,33	69,39	578,0	2,886	9,127	2,027	4,367	9,409
8,34	69,56	580,1	2,888	9,132	2,028	4,369	9,413
8,35	69,72	582,2	2,890	9,138	2,029	4,371	9,417
8,36	69,89	584,3	2,891	9,143	2,030	4,373	9,420
8,37	70,06	586,4	2,893	9,149	2,030	4,374	9,424
8,38	70,22	588,5	2,895	9,154	2,031	4,376	9,428
8,39	70,39	590,6	2,897	9,160	2,032	4,378	9,432
8,40	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435
8,41	70,73	594,8	2,900	9,171	2,034	4,381	9,439
8,42	70,90	596,9	2,902	9,176	2,034	4,383	9,443
8,43	71,06	599,1	2,903	9,182	2,035	4,385	9,447
8,44	71,23	601,2	2,905	9,187	2,036	4,386	9,450
8,45	71,40	603,4	2,907	9,192	2,037	4,388	9,454
8,46	71,57	605,5	2,909	9,198	2,038	4,390	9,458
8,47	71,74	607,6	2,910	9,203	2,038	4,392	9,462
8,48	71,91	609,8	2,912	9,209	2,039	4,393	9,465
8,49	72,08	612,0	2,914	9,214	2,040	4,395	9,469
8,50	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473
8,51	72,42	616,3	2,917	9,225	2,042	4,399	9,476
8,52	72,59	618,5	2,919	9,230	2,042	4,400	9,480
8,53	72,76	620,7	2,921	9,236	2,043	4,402	9,484
8,54	72,93	622,8	2,922	9,241	2,044	4,404	9,488
8,55	73,10	625,0	2,924	9,247	2,045	4,405	9,491
8,56	73,27	627,2	2,926	9,252	2,046	4,407	9,495
8,57	73,44	629,4	2,927	9,257	2,046	4,409	9,499
8,58	73,62	631,6	2,929	9,263	2,047	4,411	9,502
8,59	73,79	633,8	2,931	9,268	2,048	4,412	9,506
8,60	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510
8,61	74,13	638,3	2,934	9,279	2,050	4,416	9,513
8,62	74,30	640,5	2,936	9,284	2,050	4,417	9,517
8,63	74,48	642,7	2,938	9,290	2,051	4,419	9,521
8,64	74,65	645,0	2,939	9,295	2,052	4,421	9,524
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
8,65	74,82	647,2	2,941	9,301	2,053	4,423	9,528
8,66	75,00	649,5	2,943	9,306	2,054	4,424	9,532
8,67	75,17	651,7	2,944	9,311	2,054	4,426	9,535
8,68	75,34	654,0	2,946	9,317	2,055	4,428	9,539
8,69	75,52	656,2	2,948	9,322	2,056	4,429	9,543
8,70	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546
8,71	75,86	660,8	2,951	9,333	2,057	4,433	9,550
8,72	76,04	663,1	2,953	9,338	2,058	4,434	9,554
8,73	76,21	665,3	2,955	9,343	2,059	4,436	9,557
8,74	76,39	667,6	2,956	9,349	2,060	4,438	9,561
8,75	76,56	669,9	2,958	9,354	2,061	4,440	9,565
8,76	76,74	672,2	2,960	9,359	2,061	4,441	9,568
8,77	76,91	674,5	2,961	9,365	2,062	4,443	9,572
8,78	77,09	676,8	2,963	9,370	2,063	4,445	9,576
8,79	77,26	679,2	2,965	9,375	2,064	4,446	9,579
8,80	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583
8,81	77,62	683,8	2,968	9,386	2,065	4,450	9,586
8,82	77,79	686,1	2,970	9,391	2,066	4,451	9,590
8,83	77,97	688,5	2,972	9,397	2,067	4,453	9,594
8,84	78,15	690,8	2,973	9,402	2,068	4,455	9,597
8,85	78,32	693,2	2,975	9,407	2,068	4,456	9,601
8,86	78,50	695,5	2,977	9,413	2,069	4,458	9,605
8,87	78,68	697,9	2,978	9,418	2,070	4,460	9,608
8,88	78,85	700,2	2,980	9,423	2,071	4,461	9,612
8,89	79,03	702,6	2,982	9,429	2,072	4,463	9,615
8,90	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619
8,91	79,39	707,3	2,985	9,439	2,073	4,466	9,623
8,92	79,57	709,7	2,987	9,445	2,074	4,468	9,626
8,93	79,74	712,1	2,988	9,450	2,075	4,470	9,630
8,94	79,92	714,5	2,990	9,455	2,075	4,471	9,633
8,95	80,10	716,9	2,992	9,460	2,076	4,473	9,637
8,96	80,28	719,3	2,993	9,466	2,077	4,475	9,641
8,97	80,46	721,7	2,995	9,471	2,078	4,476	9,644
8,98	80,64	724,2	2,997	9,476	2,079	4,478	9,648
8,99	80,82	726,6	2,998	9,482	2,079	4,480	9,651
9,00	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655
9,01	81,18	731,4	3,002	9,492	2,081	4,483	9,658
9,02	81,36	733,9	3,003	9,497	2,082	4,485	9,662
9,03	81,54	736,3	3,005	9,503	2,082	4,486	9,666
9,04	81,72	738,8	3,007	9,508	2,083	4,488	9,669
9,05	81,90	741,2	3,008	9,513	2,084	4,490	9,673
9,06	82,08	743,7	3,010	9,518	2,085	4,491	9,676
9,07	82,26	746,1	3,012	9,524	2,085	4,493	9,680
9,08	82,45	748,6	3,013	9,529	2,086	4,495	9,683
9,09	82,63	751,1	3,015	9,534	2,087	4,496	9,687
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,10	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691
9,11	82,99	756,1	3,018	9,545	2,089	4,500	9,694
9,12	83,17	758,6	3,020	9,550	2,089	4,501	9,698
9,13	83,36	761,0	3,022	9,555	2,090	4,503	9,701
9,14	83,54	763,6	3,023	9,560	2,091	4,505	9,705
9,15	83,72	766,1	3,025	9,566	2,092	4,506	9,708
9,16	83,91	768,6	3,027	9,571	2,092	4,508	9,712
9,17	84,09	771,1	3,028	9,576	2,093	4,509	9,715
9,18	84,27	773,6	3,030	9,581	2,094	4,511	9,719
9,19	84,46	776,2	3,032	9,586	2,095	4,513	9,722
9,20	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726
9,21	84,82	781,2	3,035	9,597	2,096	4,516	9,729
9,22	85,01	783,8	3,036	9,602	2,097	4,518	9,733
9,23	85,19	786,3	3,038	9,607	2,098	4,519	9,736
9,24	85,38	788,9	3,040	9,612	2,098	4,521	9,740
9,25	85,56	791,5	3,041	9,618	2,099	4,523	9,743
9,26	85,75	794,0	3,043	9,623	2,100	4,524	9,747
9,27	85,93	796,6	3,045	9,628	2,101	4,526	9,750
9,28	86,12	799,2	3,046	9,633	2,101	4,527	9,754
9,29	86,30	801,8	3,048	9,638	2,102	4,529	9,758
9,30	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761
9,31	86,68	807,0	3,051	9,649	2,104	4,532	9,764
9,32	86,86	809,6	3,053	9,654	2,104	4,534	9,768
9,33	87,05	812,2	3,055	9,659	2,105	4,536	9,771
9,34	87,24	814,8	3,056	9,664	2,106	4,537	9,775
9,35	87,42	817,4	3,058	9,670	2,107	4,539	9,778
9,36	87,61	820,0	3,059	9,675	2,107	4,540	9,782
9,37	87,80	822,7	3,061	9,680	2,108	4,542	9,785
9,38	87,98	825,3	3,063	9,685	2,109	4,544	9,789
9,39	88,17	827,9	3,064	9,690	2,110	4,545	9,792
9,40	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796
9,41	88,55	833,2	3,068	9,701	2,111	4,548	9,799
9,42	88,74	835,9	3,069	9,706	2,112	4,550	9,803
9,43	88,92	838,6	3,071	9,711	2,113	4,552	9,806
9,44	89,11	841,2	3,072	9,716	2,113	4,553	9,810
9,45	89,30	843,9	3,074	9,721	2,114	4,555	9,813
9,46	89,49	846,6	3,076	9,726	2,115	4,556	9,817
9,47	89,68	849,3	3,077	9,731	2,116	4,558	9,820
9,48	89,87	852,0	3,079	9,737	2,116	4,560	9,824
9,49	90,06	854,7	3,081	9,742	2,117	4,561	9,827
9,50	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830
9,51	90,44	860,1	3,084	9,752	2,119	4,565	9,834
9,52	90,63	862,8	3,085	9,757	2,119	4,566	9,837
9,53	90,82	865,5	3,087	9,762	2,120	4,568	9,841
9,54	91,01	868,3	3,089	9,767	2,121	4,569	9,844
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848

Tabel 4.1 (järg).

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
9,55	91,20	871,0	3,090	9,772	2,122	4,571	9,848
9,56	91,39	873,7	3,092	9,778	2,122	4,572	9,851
9,57	91,58	876,5	3,094	9,783	2,123	4,574	9,855
9,58	91,78	879,2	3,095	9,788	2,124	4,576	9,858
9,59	91,97	882,0	3,097	9,793	2,125	4,577	9,861
9,60	92.16	884,7	3.098	9,798	2,125	4,579	9,865
9,61	92,35	887,5	3,100	9,803	2,126	4,580	9,868
9,62	92,54	890,3	3,102	9,808	2,127	4,582	9,872
9,63	92,74	893,1	3,103	9,813	2,128	4,584	9,875
9,64	92,93	895,8	3,105	9,818	2,128	4,585	9,879
9,65	93,12	898,6	3,106	9,823	2,129	4,587	9,882
9,66	93,32	901,4	3,108	9,829	2,130	4,588	9,885
9,67	93,51	904,2	3,110	9,834	2,130	4,590	9,889
9,68	93,70	907,0	3,111	9,839	2,131	4,592	9,892
9,69	93,90	909,9	3,113	9,844	2,132	4,593	9,896
9,70	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899
9,71	94,28	915,5	3,116	9,854	2,133	4,596	9,902
9,72	94,48	918,3	3,118	9,859	2,134	4,598	9,906
9,73	94,67	921,2	3,119	9,864	2,135	4,599	9,909
9,74	94,87	924,0	3,121	9,869	2,136	4,601	9,913
9,75	95,06	926,9	3,122	9,874	2,136	4,603	9,916
9,76	95,26	929,7	3,124	9,879	2,137	4,604	9,919
9,77	95,45	932,6	3,126	9,884	2,138	4,606	9,923
9,78	95,65	935,4	3,127	9,889	2,139	4,607	9,926
9,79	95,84	938,3	3,129	9,894	2,139	4,609	9,930
9,80	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,933
9,81	96,24	944,1	3,132	9,905	2,141	4,612	9,936
9,82	96,43	947,0	3,134	9,910	2,141	4,614	9,940
9,83	96,63	949,9	3,135	9,915	2,142	4,615	9,943
9,84	96,83	952,8	3,137	9,920	2,143	4,617	9,946
9,85	97,02	955,7	3,138	9,925	2,144	4,618	9,950
9,86	97,22	958,6	3,140	9,930	2,144	4,620	9,953
9,87	97,42	961,5	3,142	9,935	2,145	4,621	9,956
9,88	97,61	964,4	3,143	9,940	2,146	4,623	9,960
9,89	97,81	967,4	3,145	9,945	2,147	4,625	9,963
9,90	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967
9,91	98,21	973,2	3,148	9,955	2,148	4,628	9,970
9,92	98,41	976,2	3,150	9,960	2,149	4,629	9,973
9,93	98,60	979,1	3,151	9,965	2,149	4,631	9,977
9,94	98,80	982,1	3,153	9,970	2,150	4,632	9,980
9,95	99,00	985,1	3,154	9,975	2,151	4,634	9,983
9,96	99,20	988,0	3,156	9,980	2,152	4,635	9,987
9,97	99,40	991,0	3,158	9,985	2,152	4,637	9,990
9,98	99,60	994,0	3,159	9,990	2,153	4,638	9,993
9,99	99,80	997,0	3,161	9,995	2,154	4,640	9,997
10,00	100,00	1 000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000

Tabel 4.2.

Täisarvude astmed.

n	n^2	n^3	n^4	n^5
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1 024
5	25	125	625	3 125
6	36	216	1 296	7 776
7	49	343	2 401	16 807
8	64	512	4 096	32 768
9	81	729	6 561	59 049
10	100	1 000	10 000	100 000
11	121	1 331	14 641	161 051
12	144	1 728	20 736	248 832
13	169	2 197	28 561	371 293
14	196	2 744	38 416	537 824
15	225	3 375	50 625	759 375
16	256	4 096	65 536	1 048 576
17	289	4 913	83 521	1 419 857
18	324	5 832	104 976	1 889 568
19	361	6 859	130 321	2 476 099
20	400	8 000	160 000	3 200 000
21	441	9 261	194 481	4 084 101
22	484	10 648	234 256	5 153 632
23	529	12 167	279 841	6 436 343
24	576	13 824	331 776	7 962 624
25	625	15 625	390 625	9 765 625
26	676	17 576	456 976	11 881 376
27	729	19 683	531 441	14 348 907
28	784	21 952	614 656	17 210 368
29	841	24 389	707 281	20 511 149
30	900	27 000	810 000	24 300 000
31	961	29 791	923 521	28 629 151
32	1 024	32 768	1 048 576	33 554 432
33	1 089	35 937	1 185 921	39 135 393
34	1 156	39 304	1 336 336	45 435 424
35	1 225	42 875	1 500 625	52 521 875
36	1 296	46 656	1 679 616	60 466 176
37	1 369	50 653	1 874 161	69 343 957
38	1 444	54 872	2 085 136	79 235 168
39	1 521	59 319	2 313 441	90 224 199
40	1 600	64 000	2 560 000	102 400 000
41	1 681	68 921	2 825 761	115 856 201
42	1 764	74 088	3 111 696	130 691 232
43	1 849	79 507	3 418 801	147 008 443
44	1 936	85 184	3 748 096	164 916 224
45	2 025	91 125	4 100 625	184 528 125
46	2 116	97 336	4 477 456	205 962 976
47	2 209	103 823	4 879 681	229 345 007
48	2 304	110 592	5 308 416	254 803 968
49	2 401	117 649	5 764 801	282 475 249

Tabel pärineb teoeest [6], lk. 38, 39.

Tabel 4.2 (järg).

n	n^2	n^3	n^4	n^5
50	2 500	125 000	6 250 000	312 500 000
51	2 601	132 651	6 765 201	345 025 251
52	2 704	140 608	7 311 616	380 204 032
53	2 809	148 877	7 890 481	418 195 493
54	2 916	157 464	8 503 056	459 165 024
55	3 025	166 375	9 150 625	503 284 375
56	3 136	175 616	9 834 496	550 731 776
57	3 249	185 193	10 556 001	601 692 057
58	3 364	195 112	11 316 496	656 356 768
59	3 481	205 379	12 117 361	714 924 299
60	3 600	216 000	12 960 000	777 600 000
61	3 721	226 981	13 845 841	844 596 301
62	3 844	238 328	14 776 336	916 132 832
63	3 969	250 047	15 752 961	992 436 543
64	4 096	262 144	16 777 216	1 073 741 824
65	4 225	274 625	17 850 625	1 160 290 625
66	4 356	287 496	18 974 736	1 252 332 576
67	4 489	300 763	20 151 121	1 350 125 107
68	4 624	314 432	21 381 376	1 453 933 568
69	4 761	328 509	22 667 121	1 564 031 349
70	4 900	343 000	24 010 000	1 680 700 000
71	5 041	357 911	25 411 681	1 804 229 351
72	5 184	373 248	26 873 856	1 934 917 632
73	5 329	389 017	28 398 241	2 073 071 593
74	5 476	405 224	29 986 576	2 219 006 624
75	5 625	421 875	31 640 625	2 373 046 875
76	5 776	438 976	33 362 176	2 535 525 376
77	5 929	456 533	35 153 041	2 706 784 157
78	6 084	474 552	37 015 056	2 887 174 368
79	6 241	493 039	38 950 081	3 077 056 399
80	6 400	512 000	40 960 000	3 276 800 000
81	6 561	531 441	43 046 721	3 486 784 401
82	6 724	551 368	45 212 176	3 707 398 432
83	6 889	571 787	47 458 321	3 939 040 643
84	7 056	592 704	49 787 136	4 182 119 424
85	7 225	614 125	52 200 625	4 437 053 125
86	7 396	636 056	54 700 816	4 704 270 176
87	7 569	658 503	57 289 761	4 984 209 207
88	7 744	681 472	59 969 536	5 277 319 168
89	7 921	704 969	62 742 241	5 584 059 449
90	8 100	729 000	65 610 000	5 904 900 000
91	8 281	753 571	68 574 961	6 240 321 451
92	8 464	778 688	71 639 296	6 590 815 232
93	8 649	804 357	74 805 201	6 956 883 693
94	8 836	830 584	78 074 896	7 339 040 224
95	9 025	857 375	81 450 625	7 737 809 375
96	9 216	884 736	84 934 656	8 153 726 976
97	9 409	912 673	88 529 281	8 587 340 257
98	9 604	941 192	92 236 816	9 039 207 968
99	9 801	970 299	96 059 601	9 509 900 499
100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000

Tabel 4.3.

Pöördarvud.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	10000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174
1,1	9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403
1,2	8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7812	7752
1,3	7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194
1,4	7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711
1,5	6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289
1,6	6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917
1,7	5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587
1,8	5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291
1,9	5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025
2,0	5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785
2,1	4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566
2,2	4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367
2,3	4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184
2,4	4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016
2,5	4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861
2,6	3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717
2,7	3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584
2,8	3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460
2,9	3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344
3,0	3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236
3,1	3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135
3,2	3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040
3,3	3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950
3,4	2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865
3,5	2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786
3,6	2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710
3,7	2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639
3,8	2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571
3,9	2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506
4,0	2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445
4,1	2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387
4,2	2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331
4,3	2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278
4,4	2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227
4,5	2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179
4,6	2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132
4,7	2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088
4,8	2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045
4,9	2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004
5,0	2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965
5,1	1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927
5,2	1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890
5,3	1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	1859	1855
5,4	1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821

Tabel pärineb teosest [6], lk. 40–41.

Tabel 4.3 (järg).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,5	1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789
5,6	1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757
5,7	1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727
5,8	1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698
5,9	1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669
6,0	1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642
6,1	1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616
6,2	1613	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590
6,3	1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565
6,4	1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541
6,5	1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517
6,6	1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495
6,7	1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473
6,8	1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451
6,9	1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431
7,0	1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410
7,1	1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391
7,2	1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372
7,3	1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353
7,4	1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335
7,5	1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318
7,6	1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300
7,7	1299	1297	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284
7,8	1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267
7,9	1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252
8,0	1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236
8,1	1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1222	1221
8,2	1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206
8,3	1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192
8,4	1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178
8,5	1176	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164
8,6	1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151
8,7	1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138
8,8	1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125
8,9	1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112
9,0	1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100
9,1	1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1091	1089	1088
9,2	1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076
9,3	1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065
9,4	1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054
9,5	1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043
9,6	1042	1041	1040	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032
9,7	1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021
9,8	1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011
9,9	1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001

Tabel 4.4.

Kümnendlogaritmid.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

Tabel pärineb teosest [6] , lk. 44-45.

Tabel 4.4 (järg).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Tabel 4.5.

Antilogaritmid.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

Tabel pärineb teosest [6], lk. 46-47.

Tabel 4.5 (järg).

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

Tabel 4.6.

Eksponentfunktsioon, hüperbooleed ja trigonomeetrilised funktsioonid.

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,00	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000
01	1,0101	0,9900	0,0100	1,0001	0,0100	0,0100	1,0000	0,0100
02	1,0202	0,9802	0,0200	1,0002	0,0200	0,0200	0,9998	0,0200
03	1,0305	0,9704	0,0300	1,0005	0,0300	0,0300	0,9996	0,0300
04	1,0408	0,9608	0,0400	1,0008	0,0400	0,0400	0,9992	0,0400
0,05	1,0513	0,9512	0,0500	1,0013	0,0500	0,0500	0,9988	0,0500
06	1,0618	0,9418	0,0600	1,0018	0,0599	0,0600	0,9982	0,0601
07	1,0725	0,9324	0,0701	1,0025	0,0699	0,0699	0,9976	0,0701
08	1,0833	0,9231	0,0801	1,0032	0,0798	0,0799	0,9968	0,0802
09	1,0942	0,9139	0,0901	1,0041	0,0898	0,0899	0,9960	0,0902
0,10	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950	0,1003
11	1,1163	0,8958	0,1102	1,0061	0,1096	0,1098	0,9940	0,1104
12	1,1275	0,8869	0,1203	1,0072	0,1194	0,1197	0,9928	0,1206
13	1,1388	0,8781	0,1304	1,0085	0,1293	0,1296	0,9916	0,1307
14	1,1503	0,8694	0,1405	1,0098	0,1391	0,1395	0,9902	0,1409
0,15	1,1618	0,8607	0,1506	1,0113	0,1489	0,1494	0,9888	0,1511
16	1,1735	0,8521	0,1607	1,0128	0,1586	0,1593	0,9872	0,1614
17	1,1853	0,8437	0,1708	1,0145	0,1684	0,1692	0,9856	0,1717
18	1,1972	0,8353	0,1810	1,0162	0,1781	0,1790	0,9838	0,1820
19	1,2092	0,8270	0,1911	1,0181	0,1877	0,1889	0,9820	0,1923
0,20	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801	0,2027
21	1,2337	0,8106	0,2115	1,0221	0,2070	0,2085	0,9780	0,2131
22	1,2461	0,8025	0,2218	1,0243	0,2165	0,2182	0,9759	0,2236
23	1,2586	0,7945	0,2320	1,0266	0,2260	0,2280	0,9737	0,2341
24	1,2712	0,7866	0,2423	1,0289	0,2355	0,2377	0,9713	0,2447
0,25	1,2840	0,7788	0,2526	1,0314	0,2449	0,2474	0,9689	0,2553
26	1,2969	0,7711	0,2629	1,0340	0,2543	0,2571	0,9664	0,2660
27	1,3100	0,7634	0,2733	1,0367	0,2636	0,2667	0,9638	0,2768
28	1,3231	0,7558	0,2837	1,0395	0,2729	0,2764	0,9611	0,2876
29	1,3364	0,7483	0,2941	1,0423	0,2821	0,2860	0,9582	0,2984
0,30	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9553	0,3093
31	1,3634	0,7334	0,3150	1,0484	0,3004	0,3051	0,9523	0,3203
32	1,3771	0,7261	0,3255	1,0516	0,3095	0,3146	0,9492	0,3314
33	1,3910	0,7189	0,3360	1,0549	0,3185	0,3240	0,9460	0,3425
34	1,4049	0,7118	0,3466	1,0584	0,3275	0,3335	0,9428	0,3537
0,35	1,4191	0,7047	0,3572	1,0619	0,3364	0,3429	0,9394	0,3650
36	1,4333	0,6977	0,3678	1,0655	0,3452	0,3523	0,9359	0,3764
37	1,4477	0,6907	0,3785	1,0692	0,3540	0,3616	0,9323	0,3879
38	1,4623	0,6839	0,3892	1,0731	0,3627	0,3709	0,9287	0,3994
39	1,4770	0,6771	0,4000	1,0770	0,3714	0,3802	0,9249	0,4111
0,40	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211	0,4228
41	1,5068	0,6637	0,4216	1,0852	0,3885	0,3986	0,9171	0,4346
42	1,5220	0,6570	0,4325	1,0895	0,3969	0,4078	0,9131	0,4466
43	1,5373	0,6505	0,4434	1,0939	0,4053	0,4169	0,9090	0,4586
44	1,5527	0,6440	0,4543	1,0984	0,4136	0,4259	0,9048	0,4708
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831

Tabel pärineb teosest [6], lk. 52-55.

Tabel 4.6 (järg).

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,45	1,5683	0,6376	0,4653	1,1030	0,4219	0,4350	0,9004	0,4831
46	1,5841	0,6313	0,4764	1,1077	0,4301	0,4439	0,8961	0,4954
47	1,6000	0,6250	0,4875	1,1125	0,4382	0,4529	0,8916	0,5080
48	1,6161	0,6188	0,4986	1,1174	0,4462	0,4618	0,8870	0,5206
49	1,6323	0,6126	0,5098	1,1225	0,4542	0,4706	0,8823	0,5334
0,50	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776	0,5463
51	1,6653	0,6005	0,5324	1,1329	0,4699	0,4882	0,8727	0,5594
52	1,6820	0,5945	0,5438	1,1383	0,4777	0,4969	0,8678	0,5726
53	1,6989	0,5886	0,5552	1,1438	0,4854	0,5055	0,8628	0,5859
54	1,7160	0,5827	0,5666	1,1494	0,4930	0,5141	0,8577	0,5994
0,55	1,7333	0,5769	0,5782	1,1551	0,5005	0,5227	0,8525	0,6131
56	1,7507	0,5712	0,5897	1,1609	0,5080	0,5312	0,8473	0,6269
57	1,7683	0,5655	0,6014	1,1669	0,5154	0,5396	0,8419	0,6410
58	1,7860	0,5599	0,6131	1,1730	0,5227	0,5480	0,8365	0,6552
59	1,8040	0,5543	0,6248	1,1792	0,5299	0,5564	0,8309	0,6696
0,60	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253	0,6841
61	1,8404	0,5434	0,6485	1,1919	0,5441	0,5729	0,8196	0,6989
62	1,8589	0,5379	0,6605	1,1984	0,5511	0,5810	0,8139	0,7139
63	1,8776	0,5326	0,6725	1,2051	0,5581	0,5891	0,8080	0,7291
64	1,8965	0,5273	0,6846	1,2119	0,5649	0,5972	0,8021	0,7446
0,65	1,9155	0,5220	0,6967	1,2188	0,5717	0,6052	0,7961	0,7602
66	1,9348	0,5169	0,7090	1,2258	0,5784	0,6131	0,7900	0,7761
67	1,9542	0,5117	0,7213	1,2330	0,5850	0,6210	0,7838	0,7923
68	1,9739	0,5066	0,7336	1,2402	0,5915	0,6288	0,7776	0,8087
69	1,9937	0,5016	0,7461	1,2476	0,5980	0,6365	0,7712	0,8253
0,70	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648	0,8423
71	2,0340	0,4916	0,7712	1,2628	0,6107	0,6518	0,7584	0,8595
72	2,0544	0,4868	0,7838	1,2706	0,6169	0,6594	0,7518	0,8771
73	2,0751	0,4819	0,7966	1,2785	0,6231	0,6669	0,7452	0,8949
74	2,0959	0,4771	0,8094	1,2865	0,6291	0,6743	0,7385	0,9131
0,75	2,1170	0,4724	0,8223	1,2947	0,6351	0,6816	0,7317	0,9316
76	2,1383	0,4677	0,8353	1,3030	0,6411	0,6889	0,7248	0,9505
77	2,1598	0,4630	0,8484	1,3114	0,6469	0,6961	0,7179	0,9697
78	2,1815	0,4584	0,8615	1,3199	0,6527	0,7033	0,7109	0,9893
79	2,2034	0,4538	0,8748	1,3286	0,6584	0,7104	0,7038	1,0092
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296

Tabel 4.6 (järg).

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
0,80	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967	1,0296
81	2,2479	0,4449	0,9015	1,3464	0,6696	0,7243	0,6895	1,0505
82	2,2705	0,4404	0,9150	1,3555	0,6751	0,7311	0,6822	1,0717
83	2,2933	0,4360	0,9286	1,3647	0,6805	0,7379	0,6749	1,0934
84	2,3164	0,4317	0,9423	1,3740	0,6858	0,7446	0,6675	1,1156
0,85	2,3396	0,4274	0,9561	1,3835	0,6911	0,7513	0,6600	1,1383
86	2,3632	0,4232	0,9700	1,3932	0,6963	0,7578	0,6524	1,1616
87	2,3869	0,4190	0,9840	1,4029	0,7014	0,7643	0,6448	1,1853
88	2,4109	0,4148	0,9981	1,4128	0,7064	0,7707	0,6372	1,2097
89	2,4351	0,4107	1,0122	1,4229	0,7114	0,7771	0,6294	1,2346
0,90	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216	1,2602
91	2,4843	0,4025	1,0409	1,4434	0,7211	0,7895	0,6137	1,2864
92	2,5093	0,3985	1,0554	1,4539	0,7259	0,7956	0,6058	1,3133
93	2,5345	0,3946	1,0700	1,4645	0,7306	0,8016	0,5978	1,3409
94	2,5600	0,3906	1,0847	1,4753	0,7352	0,8076	0,5898	1,3692
0,95	2,5857	0,3867	1,0995	1,4862	0,7398	0,8134	0,5817	1,3984
96	2,6117	0,3829	1,1144	1,4973	0,7443	0,8192	0,5735	1,4284
97	2,6379	0,3791	1,1294	1,5085	0,7487	0,8249	0,5653	1,4592
98	2,6645	0,3753	1,1446	1,5199	0,7531	0,8305	0,5570	1,4910
99	2,6912	0,3716	1,1598	1,5314	0,7574	0,8360	0,5487	1,5237
1,00	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403	1,5574
01	2,7456	0,3642	1,1907	1,5549	0,7658	0,8468	0,5319	1,5922
02	2,7732	0,3606	1,2063	1,5669	0,7699	0,8521	0,5234	1,6281
03	2,8011	0,3570	1,2220	1,5790	0,7739	0,8573	0,5148	1,6652
04	2,8292	0,3535	1,2379	1,5913	0,7779	0,8624	0,5062	1,7036
1,05	2,8577	0,3499	1,2539	1,6038	0,7818	0,8674	0,4976	1,7433
06	2,8864	0,3465	1,2700	1,6164	0,7857	0,8724	0,4889	1,7844
07	2,9154	0,3430	1,2862	1,6292	0,7895	0,8772	0,4801	1,8270
08	2,9447	0,3396	1,3025	1,6421	0,7932	0,8820	0,4713	1,8712
09	2,9743	0,3362	1,3190	1,6552	0,7969	0,8866	0,4625	1,9171
1,10	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536	1,9648
11	3,0344	0,3296	1,3524	1,6820	0,8041	0,8957	0,4447	2,0143
12	3,0649	0,3263	1,3693	1,6956	0,8076	0,9001	0,4357	2,0660
13	3,0957	0,3230	1,3863	1,7093	0,8110	0,9044	0,4267	2,1198
14	3,1268	0,3198	1,4035	1,7233	0,8144	0,9086	0,4176	2,1759
1,15	3,1582	0,3166	1,4208	1,7374	0,8178	0,9128	0,4085	2,2345
16	3,1899	0,3135	1,4382	1,7517	0,8210	0,9168	0,3993	2,2958
17	3,2220	0,3104	1,4558	1,7662	0,8243	0,9208	0,3902	2,3600
18	3,2544	0,3073	1,4735	1,7808	0,8275	0,9246	0,3809	2,4273
19	3,2871	0,3042	1,4914	1,7957	0,8306	0,9284	0,3717	2,4979
1,20	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624	2,5722
21	3,3535	0,2982	1,5276	1,8258	0,8367	0,9356	0,3530	2,6503
22	3,3872	0,2952	1,5460	1,8412	0,8397	0,9391	0,3436	2,7328
23	3,4212	0,2923	1,5645	1,8568	0,8426	0,9425	0,3342	2,8198
24	3,4556	0,2894	1,5831	1,8725	0,8455	0,9458	0,3248	2,9119
1,25	3.4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096

Tabel 4.6 (järg).

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x	tg x
1,25	3,4903	0,2865	1,6019	1,8884	0,8483	0,9490	0,3153	3,0096
26	3,5254	0,2837	1,6209	1,9045	0,8511	0,9521	0,3058	3,1133
27	3,5609	0,2808	1,6400	1,9208	0,8538	0,9551	0,2963	3,2236
28	3,5966	0,2780	1,6593	1,9373	0,8565	0,9580	0,2867	3,3413
29	3,6328	0,2753	1,6788	1,9540	0,8591	0,9608	0,2771	3,4672
1,30	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675	3,6021
31	3,7062	0,2698	1,7182	1,9880	0,8643	0,9662	0,2579	3,7471
32	3,7434	0,2671	1,7381	2,0053	0,8668	0,9687	0,2482	3,9033
33	3,7810	0,2645	1,7583	2,0228	0,8692	0,9711	0,2385	4,0723
34	3,8190	0,2618	1,7786	2,0404	0,8717	0,9735	0,2288	4,2556
1,35	3,8574	0,2592	1,7991	2,0583	0,8741	0,9757	0,2190	4,4552
36	3,8962	0,2567	1,8198	2,0764	0,8764	0,9779	0,2092	4,6734
37	3,9354	0,2541	1,8406	2,0947	0,8787	0,9799	0,1994	4,9131
38	3,9749	0,2516	1,8617	2,1132	0,8810	0,9819	0,1896	5,1774
39	4,0149	0,2491	1,8829	2,1320	0,8832	0,9837	0,1798	5,4707
1,40	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700	5,7979
41	4,0960	0,2441	1,9259	2,1700	0,8875	0,9871	0,1601	6,1654
42	4,1371	0,2417	1,9477	2,1894	0,8896	0,9887	0,1502	6,5811
43	4,1787	0,2393	1,9697	2,2090	0,8917	0,9901	0,1403	7,0555
44	4,2207	0,2369	1,9919	2,2288	0,8937	0,9915	0,1304	7,6018
1,45	4,2631	0,2346	2,0143	2,2488	0,8957	0,9927	0,1205	8,2381
46	4,3060	0,2322	2,0369	2,2691	0,8977	0,9939	0,1106	8,9886
47	4,3492	0,2299	2,0597	2,2896	0,8996	0,9949	0,1006	9,8874
48	4,3929	0,2276	2,0827	2,3103	0,9015	0,9959	0,0907	10,983
49	4,4371	0,2254	2,1059	2,3312	0,9033	0,9967	0,0807	12,350
1,50	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707	14,101
51	4,5267	0,2209	2,1529	2,3738	0,9069	0,9982	0,0608	16,428
52	4,5722	0,2187	2,1768	2,3955	0,9087	0,9987	0,0508	19,670
53	4,6182	0,2165	2,2008	2,4174	0,9104	0,9992	0,0408	24,498
54	4,6646	0,2144	2,2251	2,4395	0,9121	0,9995	0,0308	32,461
1,55	4,7115	0,2122	2,2496	2,4619	0,9138	0,9998	0,0208	48,078
56	4,7588	0,2101	2,2743	2,4845	0,9154	0,9999	0,0108	92,620
57	4,8066	0,2080	2,2993	2,5073	0,9170	1,0000	+0,0008	1255,8
58	4,8550	0,2060	2,3245	2,5305	0,9186	1,0000	−0,0092	−108,65
59	4,9037	0,2039	2,3499	2,5538	0,9201	0,9998	−0,0192	−52,067
1,60	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292	−34,233

Tabel 4.7.

Eksponentfunktsioon.

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,60	4,9530	0,2019	**2,00**	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072
1,61	5,0028	0,1999	2,01	7,4633	0,1340	2,41	11,134	0,08982
1,62	5,0531	0,1979	2,02	7,5383	0,1327	2,42	11,246	0,08892
1,63	5,1039	0,1959	2,03	7,6141	0,1313	2,43	11,359	0,08804
1,64	5,1552	0,1940	2,04	7,6906	0,1300	2,44	11,473	0,08716
1,65	5,2070	0,1920	**2,05**	7,7679	0,1287	**2,45**	11,588	0,08629
1,66	5,2593	0,1901	2,06	7,8460	0,1275	2,46	11,705	0,08543
1,67	5,3122	0,1882	2,07	7,9248	0,1262	2,47	11,822	0,08458
1,68	5,3656	0,1864	2,08	8,0045	0,1249	2,48	11,941	0,08374
1,69	5,4195	0,1845	2,09	8,0849	0,1237	2,49	12,061	0,08291
1,70	5,4739	0,1827	**2,10**	8,1662	0,1225	**2,50**	12,182	0,08208
1,71	5,5290	0,1809	2,11	8,2482	0,1212	2,51	12,305	0,08127
1,72	5,5845	0,1791	2,12	8,3311	0,1200	2,52	12,429	0,08046
1,73	5,6407	0,1773	2,13	8,4149	0,1188	2,53	12,554	0,07966
1,74	5,6973	0,1755	2,14	8,4994	0,1177	2,54	12,680	0,07887
1,75	5,7546	0,1738	**2,15**	8,5849	0,1165	**2,55**	12,807	0,07808
1,76	5,8124	0,1720	2,16	8,6711	0,1153	2,56	12,936	0,07730
1,77	5,8709	0,1703	2,17	8,7583	0,1142	2,57	13,066	0,07654
1,78	5,9299	0,1686	2,18	8,8463	0,1130	2,58	13,197	0,07577
1,79	5,9895	0,1670	2,19	8,9352	0,1119	2,59	13,330	0,07502
1,80	6,0496	0,1653	**2,20**	9,0250	0,1108	**2,60**	13,464	0,07427
1,81	6,1104	0,1637	2,21	9,1157	0,1097	2,61	13,599	0,07353
1,82	6,1719	0,1620	2,22	9,2073	0,1086	2,62	13,736	0,07280
1,83	6,2339	0,1604	2,23	9,2999	0,1075	2,63	13,874	0,07208
1,84	6,2965	0,1588	2,24	9,3933	0,1065	2,64	14,013	0,07136
1,85	6,3598	0,1572	**2,25**	9,4877	0,1054	**2,65**	14,154	0,07065
1,86	6,4237	0,1557	2,26	9,5831	0,1044	2,66	14,296	0,06995
1,87	6,4883	0,1541	2,27	9,6794	0,1033	2,67	14,440	0,06925
1,88	6,5535	0,1526	2,28	9,7767	0,1023	2,68	14,585	0,06856
1,89	6,6194	0,1511	2,29	9,8749	0,1013	2,69	14,732	0,06788
1,90	6,6859	0,1496	**2,30**	9,9742	0,10026	**2,70**	14,880	0,06721
1,91	6,7531	0,1481	2,31	10,074	0,09926	2,71	15,029	0,06654
1,92	6,8210	0,1466	2,32	10,176	0,09827	2,72	15,180	0,06587
1,93	6,8895	0,1451	2,33	10,278	0,09730	2,73	15,333	0,06522
1,94	6,9588	0,1437	2,34	10,381	0,09633	2,74	15,487	0,06457
1,95	7,0287	0,1423	**2,35**	10,486	0,09537	**2,75**	15,643	0,06393
1,96	7,0993	0,1409	2,36	10,591	0,09442	2,76	15,800	0,06329
1,97	7,1707	0,1395	2,37	10,697	0,09348	2,77	15,959	0,06266
1,98	7,2427	0,1381	2,38	10,805	0,09255	2,78	16,119	0,06204
1,99	7,3155	0,1367	2,39	10,913	0,09163	2,79	16,281	0,06142
2,00	7,3891	0,1353	**2,40**	11,023	0,09072	**2,80**	16,445	0,06081

Tabel pärineb teosest [6] , lk. 56–58.

Tabel 4.7 (järg).

x	e^x	e	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
2,80	16,445	0,06081	3,25	25,790	0,03877	3,70	40,447	0,02472
2,81	16,610	0,06020	3,26	26,050	0,03839	3,71	40,854	0,02448
2,82	16,777	0,05961	3,27	26,311	0,03801	3,72	41,264	0,02423
2,83	16,945	0,05901	3,28	26,576	0,03763	3,73	41,679	0,02399
2,84	17,116	0,05843	3,29	26,843	0,03725	3,74	42,098	0,02375
2,85	17,288	0,05784	3,30	27,113	0,03688	3,75	42,521	0,02352
2,86	17,462	0,05727	3,31	27,385	0,03652	3,76	42,948	0,02328
2,87	17,637	0,05670	3,32	27,660	0,03615	3,77	43,380	0,02305
2,88	17,814	0,05613	3,33	27,938	0,03579	3,78	43,816	0,02282
2,89	17,993	0,05558	3,34	28,219	0,03544	3,79	44,256	0,02260
2,90	18,174	0,05502	3,35	28,503	0,03508	3,80	44,701	0,02237
2,91	18,357	0,05448	3,36	28,789	0,03474	3,81	45,150	0,02215
2,92	18,541	0,05393	3,37	29,079	0,03439	3,82	45,604	0,02193
2,93	18,728	0,05340	3,38	29,371	0,03405	3,83	46,063	0,02171
2,94	18,916	0,05287	3,39	29,666	0,03371	3,84	46,525	0,02149
2,95	19,106	0,05234	3,40	29,964	0,03337	3,85	46,993	0,02128
2,96	19,298	0,05182	3,41	30,265	0,03304	3,86	47,465	0,02107
2,97	19,492	0,05130	3,42	30,569	0,03271	3,87	47,942	0,02086
2,98	19,688	0,05079	3,43	30,877	0,03239	3,88	48,424	0,02065
2,99	19,886	0,05029	3,44	31,187	0,03206	3,89	48,911	0,02045
3,00	20,086	0,04979	3,45	31,500	0,03175	3,90	49,402	0,02024
3,01	20,287	0,04929	3,46	31,817	0,03143	3,91	49,899	0,02004
3,02	20,491	0,04880	3,47	32,137	0,03112	3,92	50,400	0,01984
3,03	20,697	0,04832	3,48	32,460	0,03081	3,93	50,907	0,01964
3,04	20,905	0,04783	3,49	32,786	0,03050	3,94	51,419	0,01945
3,05	21,115	0,04736	3,50	33,115	0,03020	3,95	51,935	0,01925
3,06	21,328	0,04689	3,51	33,448	0,02990	3,96	52,457	0,01906
3,07	21,542	0,04642	3,52	33,784	0,02960	3,97	52,985	0,01887
3,08	21,758	0,04596	3,53	34,124	0,02930	3,98	53,517	0,01869
3,09	21,977	0,04550	3,54	34,467	0,02901	3,99	54,055	0,01850
3,10	22,198	0,04505	3,55	34,813	0,02872	4,0	54,598	0,01832
3,11	22,421	0,04460	3,56	35,163	0,02844	4,1	60,340	0,01657
3,12	22,646	0,04416	3,57	35,517	0,02816	4,2	66,686	0,01500
3,13	23,874	0,04372	3,58	35,874	0,02788	4,3	73,700	0,01357
3,14	23,104	0,04328	3,59	36,234	0,02760	4,4	81,451	0,01228
3,15	23,336	0,04285	3,60	36,598	0,02732	4,5	90,017	0,01111
3,16	23,571	0,04243	3,61	36,966	0,02705	4,6	99,484	0,01005
3,17	23,807	0,04200	3,62	37,338	0,02678	4,7	109,95	0,00910
3,18	24,047	0,04159	3,63	37,713	0,02652	4,8	121,51	0,00823
3,19	24,288	0,04117	3,64	38,092	0,02625	4,9	134,29	0,00745
3,20	24,533	0,04076	3,65	38,475	0,02599	5,0	148,41	0,00674
3,21	24,779	0,04036	3,66	38,861	0,02573	5,1	164,02	0,00610
3,22	25,028	0,03996	3,67	39,252	0,02548	5,2	181,27	0,00552
3,23	25,280	0,03956	3,68	39,646	0,02522	5,3	200,34	0,00499
3,24	25,534	0,03916	3,69	40,045	0,02497	5,4	221,41	0,00452
3,25	25,790	0.03877	3,70	40,447	0,02472	5.5	244,69	0.00409

Tabel 4.7 (järg).

x	e^{x}	e^{-x}	x	e^{x}	e^{-x}	x	e^{x}	e^{-x}
5,5	244,69	0,00409	**7,0**	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203
5,6	270,43	0,00370	7,1	1212,0	0,000825	8,6	5431,7	0,000184
5,7	298,87	0,00335	7,2	1339,4	0,000747	8,7	6002,9	0,000167
5,8	330,30	0,00303	7,3	1480,3	0,000676	8,8	6634,2	0,000151
5,9	365,04	0,00274	7,4	1636,0	0,000611	8,9	7332,0	0,000136
6,0	403,43	0,002479	**7,5**	1808,0	0,000553	**9,0**	8103,1	0,000123
6,1	445,86	0,002243	7,6	1998,2	0,000500	9,1	8955,3	0,000112
6,2	492,75	0,002029	7,7	2208,3	0,000453	9,2	9897,1	0,000101
6,3	544,57	0,001836	7,8	2440,6	0,000410	9,3	10938	0,000091
6,4	601,85	0,001662	7,9	2697,3	0,000371	9,4	12088	0,000083
6,5	665,14	0,001503	**8,0**	2981,0	0,000335	**9,5**	13360	0,000075
6,6	735,10	0,001360	8,1	3294,5	0,000304	9,6	14765	0,000068
6,7	812,41	0,001231	8,2	3641,0	0,000275	9,7	16318	0,000061
6,8	897,85	0,001114	8,3	4023,9	0,000249	9,8	18034	0,000055
6,9	992,27	0,001008	8,4	4447,1	0,000225	9,9	19930	0,000050
7,0	1096,6	0,000912	**8,5**	4914,8	0,000203	**10,0**	22026	0,000045

Tabel 4.8.

Naturaallogaritmid.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953

Tabel 4.8 pärineb teosest [6], lk. 58 - 60.

Tabel 4.8 (järg).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268

Tabel 4.8 (järg).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

V. KORRELATSIOONIKORDAJAD.

§ 1. LINEAARNE KORRELATSIOONIKORDAJA.

1. Lineaarse korrelatsioonikordaja tähendus.

Juhuslikke suurusi nimetatakse sõltumatuteks, kui neist ühe jaotus ei sõltu sellest, millise väärtuse teine omandab.[1] Kui juhuslikud suurused ei ole sõltumatud, siis on nende vahel statistiline seos. Statistilise seose üheks tuntuimaks vormiks on korrelatiivne sõltuvus, mille puhul ühe juhusliku suuruse väärtuse muutudes muutub teise juhusliku suuruse keskväärtus. Korrelatiivse sõltuvuse mõõduks on mitmesugused korrelatsioonikordajad. Kõige sagedamini leiab kasutamist nn. lineaarne korrelatsioonikordaja r, mis defineeritakse seosega

$$r(X,Y) = r = \frac{E(X - EX)(Y - EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}, \qquad (1)$$

kus EX, EY, $\sqrt{DX}$ ja $\sqrt{DY}$ on juhuslike suuruste X ja Y keskväärtused ja standardhälbed.

Lineaarne korrelatsioonikordaja r näitab, kui lähedane on X ja Y vaheline statistiline sõltuvus lineaar-

---

[1] Juhuslike suuruste sõltumatuse range definitsiooni võib leida konspektist Tiit, E. Tõenäosusteooria I, Tartu, 1968.

sele funktsioonile

$$Y = aX + b \qquad (2)$$

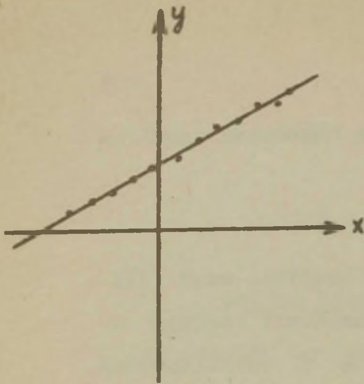
(vt. joon. 5.1). Korrelatsioonikordaja väärtused rahuldavad võrratust

$$-1 \leqslant r \leqslant 1 .$$

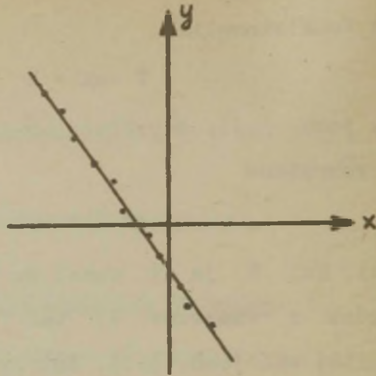
Alati, kui X ja Y vahel on täpne lineaarne seos (2), omandab r väärtuse +1 või -1 (vastavalt kordaja a märgile, vt. joon. 5.1). Kui aga X ja Y on sõltumatud, siis $r = 0$.

Juhul, kui $0 < |r| < 1$, võime lineaarse seose tugevust hinnata r abil järgmiselt: Y koguvarieeruvusest (DY) kirjeldab X-i muutumine r^2 osa ($100.r^2$ protsenti), ülejäänud osa Y varieeruvusest ($DX(1 - r^2)$) on põhjustatud muudest asjaoludest, üldiselt juhusest.

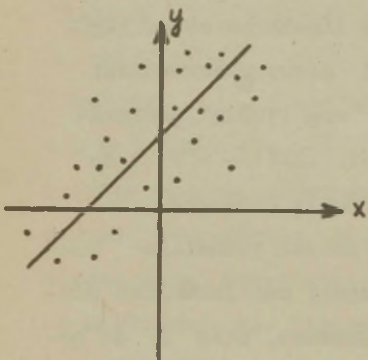
Korrelatsioonikordaja r märk näitab juhuslike suuruste X ja Y ühise muutumise suunda: kui juhusliku suuruse X suurenedes EY üldiselt suureneb, siis r on positiivne (ja vastupidi). Siinjuures ei tarvitse suuruste X ja EY vaheline seos olla rangelt monotoonne, vaid võib esineda isegi piirkonna osi, kus juhusliku suuruse X suurenemisele kaasneb keskväärtuse EY kahanemine (vt. joon. 5.2); määrav on üldtendents kogu uuritava piirkonna ulatuses. Kui juhusliku suuruse X suurenedes EY reeglina väheneb või juhusliku suuruse X vähenedes EY üldiselt suureneb, siis on r negatiivne; r negatiivsusest aga järeldub, et juhuslik suurus X ja keskväärtus EY muutuvad üldiselt vastassuunaliselt.



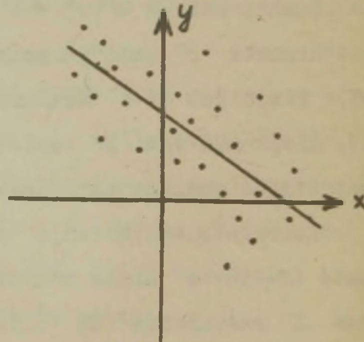
a) tugev seos, $r \approx 1$.



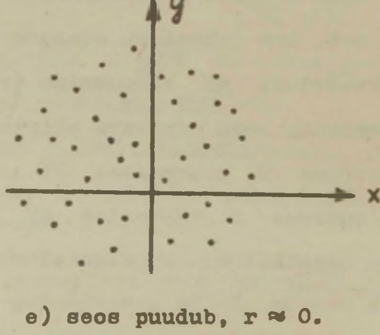
b) tugev seos, $r \approx -1$.



c) nôrk seos, $0 < r < 1$.

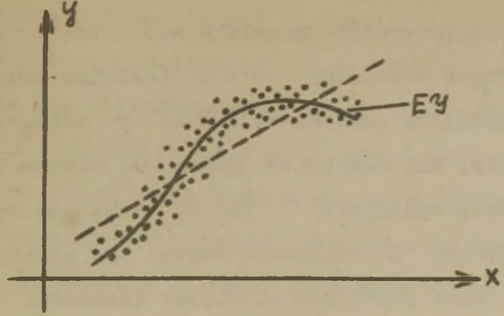


d) nôrk seos, $-1 < r < 0$.

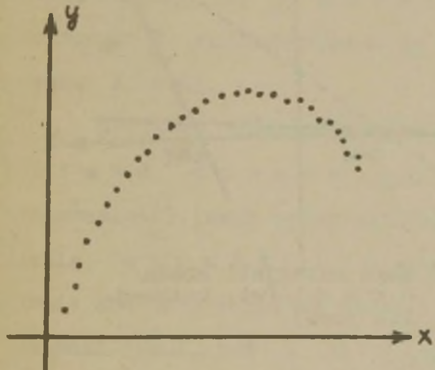


e) seos puudub, $r \approx 0$.

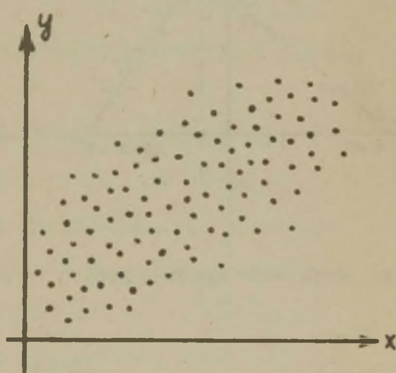
Joonis 5.1.



Joonis 5.2.
r > 0, kuigi EY ei muutu monotoonselt.



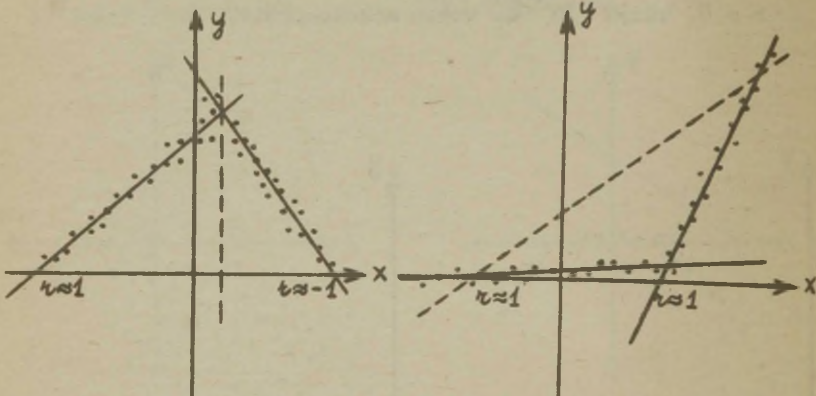
a)
r on tunduvalt väiksem ühest kuigi X ja Y vahel on peaaegu täpne funktsionaalne seos, mis on aga lineaarsest tugevasti erinev.



b)
r on tunduvalt väiksem ühest, sest X kirjeldab Y varieerumisest ainult osa (sõltuvus ei ole funktsionaalne).

Joonis 5.3.

Kui juhusliku suuruse X muutudes keskväärtus EY jääb konstantseks, siis puudub juhuslike suuruste X ja Y vahel korrelatiivne seos ning $r = 0$ (sellise olukorra erijuhuks on muutujate sõltumatus). Kuid r võib võrduda nulliga ka siis, kui teatavate juhusliku suuruse X väärtuste korral seos muutujate X ja EY vahel on monotoonselt kasvav, teiste X väärtuste korral aga monotoonselt kahanev (vt. joon. 5.4[a]) nii et üldist tendentsi kogu piirkonna jaoks ei ole võimalik täheldada.



a) Kogu materjali kohta
$r \approx 0$

b) Kogu materjali kohta
$0 < r < 1$ (vt. katkendlik joon)

Joonis 5.4.

Vaatleme nüüd, missuguseid järeldusi juhuslike suuruste statistilise seose kohta saab teha korrelatsioonikordaja abil.

Kõigepealt juhul $|r| \approx 1$ (korrelatsioonikordaja absoluutväärtus on praktiliselt võrdne ühega; niisuguseks loetakse olukord, kui $|r| \geqslant 0,95$ või $|r| \geqslant 0,90$ sõltuvalt uuritavast materjalist) on juhuslike suuruste vahel ligikaudu lineaarne seos (2). Sel juhul võime öelda, et uuritavad juhuslikud suurused on ligikaudu funktsionaalselt seotud (lineaarne seos on ju üks funktsionaalse seose erijuhte, mis mitmeid funktsionaalseid sõltuvusi teatud piirkondades hästi lähendab). Kui aga korrelatsioonikordaja absoluutväärtus on ühest tunduvalt väiksem (kokkuleppeliselt näiteks $|r| < 0,90$), siis on selge, et täpset lineaarset seost (2) juhuslike suuruste X ja Y vahel ei ole, küll aga võivad need suurused olla mingis mittelineaarses sõltuvuses (vt. joon. 5.3). Igal juhul jääb kehtima tõsiasi, et v ä h e m a l t r^2 osa juhusliku suuruse Y varieeruvusest on kirjeldatav juhusliku suuruse X abil.

Erijuhul, kui juhuslikud suurused X ja Y on m õ l e m a d n o r m a a l j a o t u s e g a (lühidalt: normaalsed), saab nendevaheline funktsionaalne sõltuvus olla a i n u l t l i n e a a r n e , seega normaalsete suuruste vahelist seost kirjeldab r^2 täielikult. Samuti juhul, kui X ja Y on normaalsed, järeldub seosest $r = 0$ mitte üksnes X ja Y korreleerimatus, vaid ka X ja Y sõltumatus.

Üldiselt tuleb juhul, kui $r = 0$ või $|r|$ on väike (näiteks $|r| \leqslant 0,3$), X ja Y aga normaaljaotusest erinevad, arvestada ka mittelineaarse seose võimalust.

Reeglina siiski juhul kui $r = 0$, t u g e v a t m i t t e l i n e a a r s e t seost muutujate vahel praktiliselt ei esine (kuigi kunstlikult võib selliseid näiteid konstrueerida). Selle põhjuseks on asjaolu, et enamust praktikas kasutatavatest funktsioonidest saab lineaarse funktsiooniga küllaltki hästi lähendada.

Mônikord võib esineda olukord, et ei õnnestu leida ühist lineaarset lähendit kogu piirkonnale, küll aga võib uuritava piirkonna jaotada üksikuteks osadeks, kus igaühes X ja Y vaheline seos on lähedane lineaarsele ning seega igas osapiirkonnas korrelatsioonikordaja r väärtus suhteliselt suur. Sellise jaotamise jaoks üldist eeskirja ei ole, tuleb kasutada graafikut (vt. joon. 5.4). Niisugust seost nimetatakse o s i t i l i n e a a r s e k s ning küllaltki sageli on statistiline seos muutujate vahelositi lineaarse funktsionaalse seosega hästi lahendatav.

2. Lineaarse korrelatsioonikordaja hindamine.

Praktikas esinevate juhuslike suuruste puhul ei ole valemiga (1) esitatud korrelatsioonikordaja väärtus teada ning seda tuleb väljavõtte põhjal hinnata.

Tuntuimaks hinnanguks korrelatsioonikordajale on nn. väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r}$, mis leiab statistika rakendustes väga sagedast kasutamist. Kui väljavõtte mahuks on n, avaldub väljavõtte korrelatsioonikordaja järgmiselt:

$$\tilde{r} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{j=1}^{n}(y_j-\bar{y})^2}}, \qquad (3)$$

kus $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ on väljavõtte keskväärtused. Väljavõtte põhjal arvutatud standardhälbe hinnangute s_x ja s_y kaudu avaldub korrelatsioonikordaja hinnang veidi lihtsamal kujul

$$\tilde{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)\, s_x\, s_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{(n-1)\, s_x\, s_y} .$$

Väljavõtte korrelatsioonikordaja on juhuslik suurus, mille keskväärtus võrdub teoreetilise korrelatsioonikordajaga

$$E\tilde{r} = r ,$$

seetõttu on saadud hinnang nihutamata.

Väljavõtte mahu suurenedes läheneb hinnang $\tilde{r}$ korrelatsioonikordaja õigele väärtusele r (hinnang on veenev ehk konsistentne).

Üldiselt $\tilde{r}$ jaotus (eeldusel, et lähtesuurused on normaalsed) on tugevasti asümmeetriline, kui $E\tilde{r} \neq 0$. Hinnangu $\tilde{r}$ jaotus on tabuleeritud[2], kuid tabelid on vähelevinud ja praktiliseks kasutamiseks vähesobivad. Praktiliseks ülesannete lahendamiseks on tuletatud rida lihtsamaid meetodeid, mida käesolevas peatükis koos vastavate tabelitega esitamegi.

---

[2] David, F.N. Tables of the Ordinates and Probability Integral of the Distribution of the Correlation Coefficient in Small Samples. Cambridge University Press, 1938.

§ 2. KORRELATIIVSE SEOSE OLEMASOLU KONTROLL.

Praktikas pakub suurimat huvi korrelatiivse seose olemasolu kontrollimine, s. t. hüpoteeside

$H_1 : r \neq 0$ (kahepoolne);

$H_2 : r > 0$ (ühepoolne);

$H_3 : r < 0$ (ühepoolne);

kehtivuse kontrollimine vastavalt etteantud olulisuse nivoole α .

Selliste hüpoteeside kontrollimiseks on koostatud küllaltki detailsed korrelatsioonikordaja kriitiliste väärtuste tabelid, mis annavad hüpoteeside vastuvõtmiseks vajalikud minimaalsed $\tilde{r}$ väärtused (absoluutväärtused) sõltuvalt olulisuse nivoost ja väljavõtte mahust.

Kriitilised väärtused esitame tabelites 5.1 ja 5.2. Kahepoolse hüpoteesi H_1 kontrollimiseks tuleb α väärtus valida ülevalt, tabeli peast; ühepoolsete hüpoteeside H_2 ja H_3 kontrollimiseks valime olulisuse nivoo tabeli alumisest reast. Parameetriks f on vabadusastmete arv, mis avaldub väljavõtte mahu kaudu:

$$f = n - 2 .$$

Sageli esitatakse taolisi tabeleid ka vahetult sõltuvalt väljavõtte mahust n , sel korral ei ole tarvis teostada argumendi ümberarvutust.

<u>Näide 5.1</u>.

Olgu väljavõtte maht 25, väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r} = 0{,}45$. Küsitakse, kas uuritavate juhuslike suuruste vahel eksisteerib statistiline seos (olulisuse nivoo 0,05).

Lahendus.

Käesoleval juhul $n = 25$. Tabelis 5.1 vastav väärtus puudub, küll aga on antud $\bar{r}_{26;0,05} = 0,388$ ja $\bar{r}_{24;0,05} = 0,404$, mille abil interpoleerimise teel (vt. [3], lk. 17) võime leida ka $\bar{r}_{25;0,05}$. (Kasutame kahepoolset seost, sest á priori ei ole öeldud, kas oodatav korrelatiivne seos peaks olema positiivne või negatiivne). Kuna $\bar{r}_{25;0,05} < \bar{r}_{24;0,05} < 0,45$, võime loobuda $\bar{r}_{25;0,05}$ täpsest väljaarvutamisest, ning järeldada, et meie poolt leitud väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r} = 0,45$ ületab vastava kriitilise väärtuse ja seega võime võtta vastu hüpoteesi H_1 : juhuslikud suurused on korreleeritud. Väide on tõestatud olulisuse nivooga 0,05; väiksema olulisuse nivooga seda aga tõestada ei ole võimalik.

Näide 5.2.

Olgu vaatluste arv 9, väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r} = 0,8$. Kas uuritavad suurused on positiivselt korreleeritud?

Lahendus.

Tabelist 5.1 leiame, et $\bar{r}_{9;0,005} = 0,798$. Järelikult saame hüpoteesi olulisuse nivooga 0,005 vastu võtta (loomulikult kehtib see ka iga suurema olulisuse nivoo puhul).

Tabel 5.1.

Korrelatsioonikordaja kriitilised väärtused: kahepoolne hüpotees ($r \neq 0$) vastavalt olulisuse nivoole α, ühepoolne hüpotees ($r > 0$) vastavalt olulisuse nivoole α'.

n \ α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	n \ α	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
5	.805	.878	.934	.959	.991	20	.378	.444	.516	.561	.679
6	.729	.811	.882	.917	.974	22	.360	.423	.492	.537	.652
7	.669	.754	.833	.875	.951	24	.344	.404	.472	.515	.629
8	.621	.707	.789	.834	.925	26	.330	.388	.453	.496	.607
9	.582	.666	.750	.798	.898	28	.317	.374	.437	.479	.588
10	.549	.632	.715	.765	.872	30	.306	.361	.423	.463	.570
11	.521	.602	.685	.735	.847	40	.264	.312	.366	.402	.501
12	.497	.576	.658	.708	.823	50	.235	.279	.328	.361	.451
13	.476	.553	.634	.684	.801	60	.214	.254	.300	.330	.414
14	.457	.532	.612	.661	.780	80	.185	.220	.260	.286	.361
15	.441	.514	.592	.641	.760	100	.165	.196	.232	.256	.324
16	.426	.497	.574	.623	.742	250	.104	.124	.147	.163	.207
17	.412	.482	.558	.606	.725	500	.074	.088	.104	.115	.147
18	.400	.468	.543	.590	.708	1000	.052	.062	.074	.081	.104
19	.389	.456	.529	.575	.693	∞	0	0	0	0	0
n / α'	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	n / α'	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005

Küllalt suurte n väärtuste korral saame väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r}$ jaotuse suvalise täiendkvantiili r_α:

$$P(\tilde{r} > r_\alpha) = \alpha$$

(eeldusel $r = 0$, X ja Y on normaaljaotusega) leida asümptootiliselt:

$$r_\alpha = \frac{p_\alpha}{\sqrt{p_\alpha^2 + n - 2}} ,$$

kus p_α on t_{n-2}-jaotuse α-täiendkvantiil.

Tabel pärineb teosest [1], lk. 468.

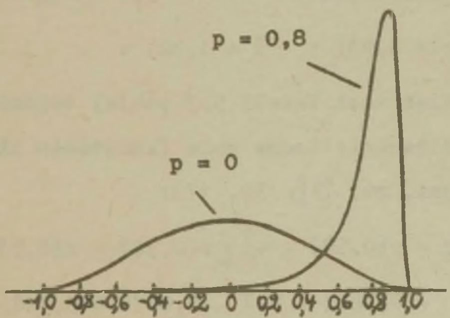
§ 3. KORRELATSIOONIKORDAJA USALDUSPIIRIDE ARVUTAMINE.

1. Fisheri z-teisendus.

Tabel 5.1 annab meile ühtlasi korrelatsioonikordaja r $(1-\alpha)$ - usalduspiirid juhuks, kui väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r} = 0$. Kahjuks ei ole need tabelid kasutatavad väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r}$ teiste väärtuste korral, sest $\tilde{r}$ jaotus muutub (vt. joon. 5.5). Kõige otstarbekam meetod $\tilde{r}$ usalduspiiride leidmiseks taandub Fisheri z-teisendusele. Osutub nimelt, et juhuslik suurus

$$\tilde{z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\tilde{r}}{1-\tilde{r}} \tag{4}$$

on ligikaudu normaaljaotusega $N(z, \sqrt{\frac{1}{n-3}})$, kus $z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$, r on vaadeldava korrelatsioonikordaja teoreetiline väärtus, $\tilde{r}$ aga väljavõtteline hinnang; n on väljavõtte maht.



Joonis 5.5.

Tabelis 5.2 ongi tabuleeritud z väärtused vastavalt r väärtustele, tabelis 5.3 aga vastupidi - r väärtused vastavalt z väärtustele, s. t. funktsioon $r = e^{2z-1}/e^{2z+1}$. Kasutades teisenduste tabeleid ja normaaljaotuse keskväärtuse usalduspiiride arvutamise eeskirja on lihtne leida ka r usalduspiirid.

Näide 5.3.

Nõutagu leida korrelatsioonikordaja r 95%-lised usalduspiirid, kui 28-indiviidise väljavõtte korral $\tilde{r} =$ $= 0,73$.

Lahendus.

Leiame kõigepealt tabeli 5.2 abil $\tilde{z}$ väärtuse:

$$\tilde{z} = 0,9287 .$$

Et $n = 28$, siis $\sigma = \sqrt{\frac{1}{28-3}} = 0,2$; $\tilde{z}$ usalduspiirid leiame (vt. [3], lk. 187)

$$\underline{z}, \bar{z} = 0,9287 \pm 0,2 \cdot 1,96 = 0,929 \pm 0,392 ;$$

$$\underline{z} = 0,537 ; \quad \bar{z} = 1,321 .$$

Nüüd tuleb veel tabeli 5.3 põhjal teisendada leitud z väärtused tagasi; teeme seda (kasutades lineaarset interpolatsiooni, vt. [3], lk. 17):

$$\underline{r} = r(0,53) + \frac{7}{10}\left[r(0,54) - r(0,53)\right] =$$

$$= 0,4854 + 0,7 \cdot 0,0076 \approx 0,491 ;$$

$$\bar{r} = r(1,32) + \frac{1}{10}\left[r(1,33) - r(1,32)\right] =$$

$$= 0,8668 + 0,1 \cdot 0,0024 \approx 0,867 .$$

Tabel 5.2.

Korrelatsioonikordaja teisendus $z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$.

r	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.00000	.01000	.02000	.03001	.04002	.05004	.06007	.07012	.08017	.09024
.1	.10034	.11045	.12058	.13074	.14093	.15114	.16139	.17167	.18198	.19234
.2	.20273	.21317	.22366	.23419	.24477	.25541	.26611	.27686	.28768	.29857
.3	.30952	.32055	.33165	.34283	.35409	.36544	.37689	.38842	.40006	.41180
.4	.42365	.43561	.44769	.45990	.47223	.48470	.49731	.51007	.52298	.53606
.5	.54931	.56273	.57634	.59014	.60415	.61838	.63283	.64752	.66246	.67767
.6	.69315	.70892	.72500	.74142	.75817	.77530	.79281	.81074	.82911	.84795
.7	.86730	.88718	.90764	.92873	.95048	.97295	.99621	1.02033	1.04537	1.07143
.8	1.09861	1.12703	1.15682	1.18813	1.22117	1.25615	1.29334	1.33308	1.37577	1.42192
.9	1.47222	1.52752	1.58902	1.65839	1.73805	1.83178	1.94591	2.09229	2.29756	2.64665

Tabel pärineb teosest [1], lk. 468.

Tabel 5.3.

Korrelatsioonikordaja r väärtused teisendatud avaldise z kaudu:

$$r = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \qquad (z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}) .$$

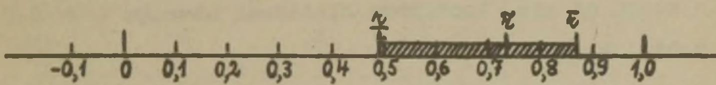
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.0000	.0100	.0200	.0300	.0400	.0500	.0599	.0699	.0798	.0898
0,1	.0997	.1096	.1194	.1293	.1391	.1489	.1586	.1684	.1781	.1877
0,2	.1974	.2070	.2165	.2260	.2355	.2449	.2543	.2636	.2729	.2821
0,3	2913	.3004	.3095	.3185	.3275	.3364	.3452	.3540	.3627	.3714
0,4	.3800	.3885	.3969	.4053	.4136	.4219	.4301	.4382	.4462	.4542
0,5	.4621	.4699	.4777	.4854	.4930	.5005	.5080	.5154	.5227	.5299
0,6	.5370	.5441	.5511	.5580	.5649	.5717	.5784	.5850	.5915	.5980
0,7	.6044	.6107	.6169	.6231	.6291	.6351	.6411	.6469	.6527	.6584
0,8	.6640	.6696	.6751	.6805	.6858	.6911	.6963	.7014	.7064	.7114
0,9	.7163	.7211	.7259	.7306	.7352	.7398	.7443	.7447	.7531	.7574
1.0	.7616	.7658	.7699	.7739	.7779	.7818	.7857	.7895	.7932	.7969
1.1	.8005	.8041	.8076	.8110	.8144	.8178	.8210	.8243	.8275	.8306
1,2	.8337	.8367	.8397	.8426	.8455	.8483	.8511	.8538	.8565	.8591
1,3	.8617	.8643	.8668	.8692	.8717	.8741	.8764	.8787	.8810	.8832
1,4	.8854	.8875	.8896	.8917	.8937	.8957	.8977	.8996	.9015	.9033
1,5	.9051	.9069	.9087	.9104	.9121	.9138	.9154	.9170	.9186	.9201
1,6	.9217	.9232	.9246	.9261	.9275	.9289	.9302	.9316	.9329	.9341
1,7	.9354	.9366	.9379	.9391	.9402	.9414	.9425	.9436	.9447	.9458
1.8	.94681	.94783	.94884	.94983	.95080	.95175	.95268	.95359	.95449	.95537
1,9	.95624	.95709	.95792	.95873	.95953	.96032	.96109	.96185	.96259	.96331
2,0	.96403	.96473	.96541	.96609	.96675	.96739	.96803	.96865	.96926	.96986
2,1	.97045	.97103	.97159	.97215	.97269	.97323	.97375	.97426	.97477	.97526
2,2	.97574	.97622	.97668	.97714	.97759	.97803	.97846	.97888	.97929	.97970
2,3	.98010	.98049	.98087	.98124	.98161	.98197	.98233	.98267	.98301	.98335
2,4	.98367	.98399	.98431	.98462	.98492	.98522	.98551	.98579	.98607	.98635
2,5	.98661	.98688	.98714	.98739	.98764	.98788	.98812	.98835	.98858	.98881
2,6	.98903	.98924	.98945	.98966	.98987	.99007	.99026	.99045	.99064	.99083
2,7	.99101	.99118	.99136	.99153	.99170	.99186	.99202	.99218	.99233	.99248
2,8	.99263	.99278	.99292	.99306	.99320	.99333	.99346	.99359	.99372	.99384
2,9	.99396	.99408	.99420	.99431	.99443	.99454	.99464	.99475	.99485	.99495
	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
3	.99505	.99595	.99668	.99728	.99777	.99818	.99851	.99878	.99900	.99918
4	.99933	.99945	.99955	.99963	.99970	.99975	.99980	.99983	.99986	.99989

Tabel pärineb teosest [4], lk. 620.

Seega otsitavateks usalduspiirideks on

$$\underline{r} = 0,491 \; ; \qquad \bar{r} = 0,867 \, .$$

Jooniselt 5.6 näeme, et leitud usalduspiirkond on tugevasti ebasümmeetriline, 0-punkti suunas välja venitatud ning punkti 1 suunas kokku surutud.



Joonis 5.6.

<u>Näide 5.4.</u>

Olgu $n = 39$, $\tilde{r} = 0,21$. Nõutagu leida korrelatsioonikordaja r 99%-lised usalduspiirid.

<u>Lahendus</u>.

Tabelist 5.1 näeme, et $\bar{r}_{40;0,01} = 0,402$; kuna $n = 39 < 40$ ja $\bar{r}_{39;0,01} > 0,402$, siis kuulub punkt 0,21 usalduspiirkonda juhul, kui $\tilde{r} = 0$ ning järelikult ka punkt 0 kuulub usalduspiirkonda $\tilde{r} = 0,21$ puhul. Seetõttu peab alumine usalduspiir olema negatiivne.

Vajalikud arvutused teostame sarnaselt eelmise näitega:

$$\tilde{z} = 0,2132 \; ;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{36}} = 0,167 \; ;$$

$$p_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58 \; ;$$

$$\underline{z}\,,\ \bar{z} = 0{,}213 \pm 2{,}58 \cdot 0{,}167 = 0{,}213 \pm 0{,}430\ ;$$

$$\underline{z} = -0{,}217\ ; \quad \bar{z} = 0{,}643\ .$$

Tabelist (5.3) leiame:

$$|\underline{r}| = 0{,}214\ ; \quad \underline{r} = -0{,}214\ ; \quad \bar{r} = 0{,}567\ .$$

Järelikult otsitavad usalduspiirid katavad ka nullpunkti. Siit järeldub ühtlasi, et hüpoteesi seose olemasolu kohta ei saa soovitava olulisuse nivooga ($\alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$) tõestada.

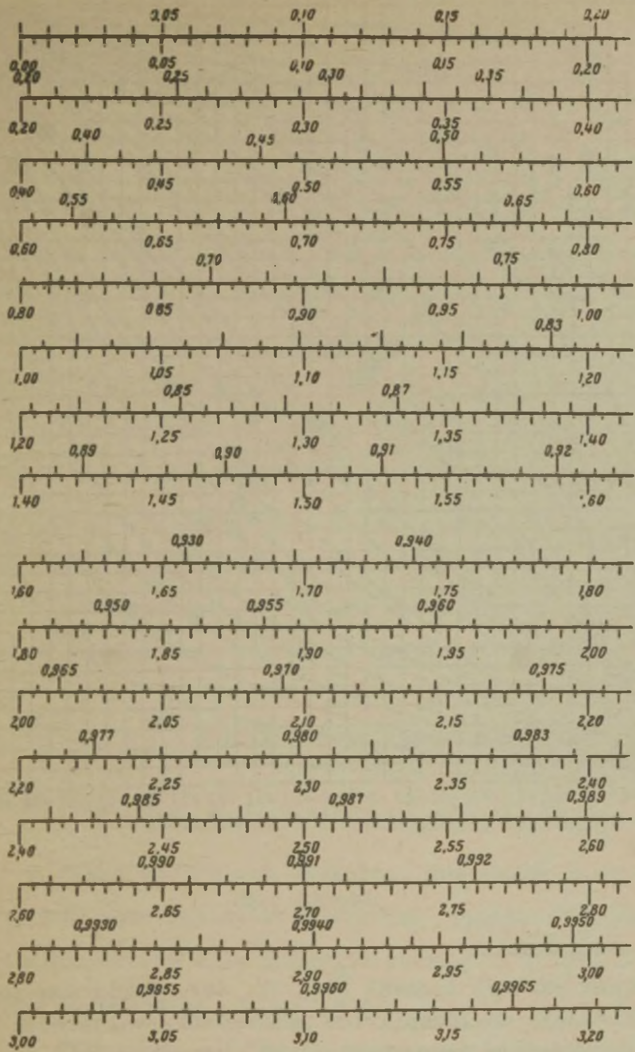
2. Nomogrammi kasutamine r ja z seose arvutamiseks.

Tabelite 5.2 ja 5.3 asemel võib vastavuse r ja z vahel esitada ka kahe skaala vahelise vastavusena lihtsal nomogrammil. Sellise nomogrammi esitame joonisel 5.7. Nagu näha, on ülemisel skaalal esitatud r väärtus (muutumispiirkond $[0,\ 1]$), alumisel skaalal aga z väärtus.

Nomogrammilt võib väärtusi lugeda kolme kümnendkohaga, seega täpsus läheneb tabelite 5.2 ja 5.3 kasutamisel (koos lineaarse interpolatsiooniga) saadud täpsusele. Tööd hõlbustab veel asjaolu, et sama nomogrammi saab kasutada mõlemasuunaliste teisenduste jaoks ($r \to z$ ja $z \to r$) .

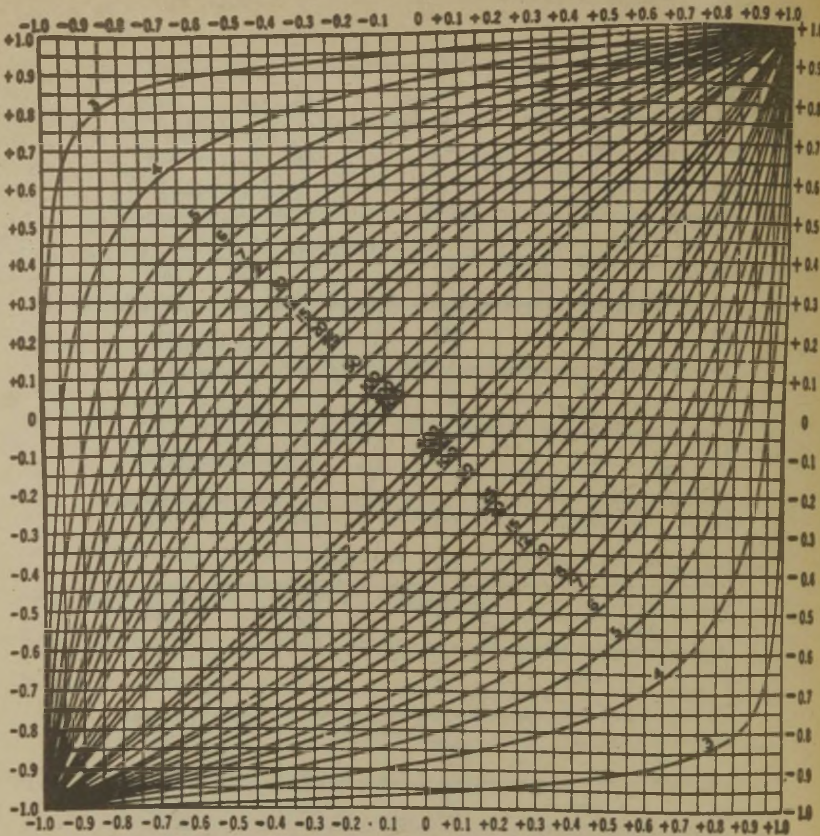
3. Nomogrammi kasutamine usalduspiiride leidmiseks.

Veelgi hõlpsam on korrelatsioonikordaja usalduspiire leida vahetult selleks ette nähtud nomogrammi abil (vt. joon. 5.8).



Joonis 5.7.

Nomogramm pärineb teosest [11], lk. 175. Nomogramm r (ülemine skaala) ja z (alumine skaala) väärtuste vastavuse kohta.



Joonis 5.8.

Nomogramm pärineb teosest [1], lk. 464. Nomogramm korrelatsioonikordaja usalduspiiride määramiseks väljavôtte korrelatsioonikordaja (vertikaalteljel) ja väljavôtte mahu n (erinevad kôverad joonisel) järgi. Usalduspiirid paiknevad horisontaalteljel.

Selleks fikseeritakse soovitav usaldusnivoo ning nomogrammi horisontaalteljele kantakse väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r}$ võimalikud väärtused; vertikaalteljelt, mis samuti esitab r võimalikke väärtusi, tuleb lugeda r usalduspiirid $\underline{r}$ ja $\bar{r}$. Nomogrammile kantud kõverad vastavad erinevatele väljavõtte mahtudele n; vastavalt antud väljavõtte mahule ja antud väljavõtte korrelatsioonikordaja $\tilde{r}$ väärtusele leiame graafikul n-kõverate ja $\tilde{r}$-vertikaali lõikepunktid, milledest tõmmatud horisontaalide ja vertikaaltelje lõikepunktid annavadki $\underline{r}$ ja $\bar{r}$ väärtused.

Arusaadavalt tuleb nomogrammide kasutamisel kasutada väärtuste interpoleerimist; vajaduse korral tuleb n väärtus asendada maksimaalse sellest väiksemaga, mis nomogrammil esineb. Tulemused on üldiselt vähemtäpsed kui arvutamisel (või osalisel nomogrammi kasutamisel). Meetodi eeliseks on aga eelmistega võrreldes oluliselt suurem töökiirus.

§ 4. MITMENE KORRELATSIOONIKORDAJA.

1. Mitmese korrelatsioonikordaja definitsioon.

Praktikas esineb olukordi, kus tuleb leida seos rohkem kui kahe juhusliku suuruse vahel. Näiteks võib uurimisobjektiks olla juhuslik suurus Z, mis sõltub kahest argumendist X ja Y.

Kasutades eelmistest paragrahvidest tuntud lineaarseid korrelatsioonikordajaid $r(X,Z)$ ja $r(Y,Z)$ võime kindlaks teha, kui tugevasti sõltub muutuja Z eraldi

X-st ja eraldi Y-st (mõistame siin üksnes lineaarset sõltuvust), kuid ei tea, kui suure osa Z varieeruvusest määravad mõlemad argumendid üheskoos mõjudes; ilmselt sõltub see ühine mõju X ja Y omavahelisest seosest, mida mõõdab r(X,Y) .

X ja Y ühise mõju tugevuse mõõtmiseks defineeritakse mitmene lineaarne korrelatsioonikordaja r(Z; X, Y) kui juhuslike suuruste Z ja

$$U = aX + bY$$

vaheline lineaarne korrelatsioonikordaja, kus kordajad a ja b on valitud nii, et saadav korrelatsioonikordaja omandaks maksimaalse väärtuse. Seega r(Z;X,Y) on lineaarne korrelatsioonikordaja Z ja tema parima lineaarse X ja Y kaudu avalduva lähendi vahel.

Mitmene korrelatsioonikordaja r(Z;X,Y) arvutatakse lineaarsete korrelatsioonikordajate r(X,Y) , r(X,Z) ja r(Y,Z) kaudu järgmise valemi abil:

$$r(Z;X,Y) = \sqrt{\frac{\left[r(X,Z)\right]^2 + \left[r(Y,Z)\right]^2 + 2r(X,Y)r(X,Z)r(Y,Z)}{1 - \left[r(X,Y)\right]^2}}, \quad (5)$$

kusjuures mitmene korrelatsioonikordaja loetakse alati positiivseks. Ilmselt kehtib võrratus:

$$\max(|r(X,Z)|, |r(Y,Z)|) \leq r(Z;X,Y) \leq |r(X,Z)| + |r(Y,Z)|.$$

Märgime, et sageli kasutatakse korrelatsioonikordajate tähistamisel ka indekssümboolikat: $r(X,Y) = r_{12}$; $r(Z;X,Y) = r_{3.12}$ jne.

Analoogiliselt saab defineerida mitmese korrelatsioonikordaja ka enam kui kahest juhuslikust argumendist sõltuva juhusliku suuruse Z ja argumentide $X_1, X_2, \ldots, X_k$ vahelise lineaarse seose tugevuse määramiseks.

Selleks määratleme jällegi juhuslikku suurust Z parimini lähendava argumentide $X_1,\ldots,X_k$ lineaarse kombinatsiooni U

$$U = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_kX_k$$

kui sellise, mille puhul lineaarne korrelatsioonikordaja $r(Z,U)$ saavutab maksimaalse väärtuse, ning loeme siis leitud maksimaalväärtuse $r(Z,U) = r(Z;\, X_1,X_2,\ldots,X_k)$ mitmeseks korrelatsioonikordajaks (mida vaatleme ainult positiivsena).

Mitmese korrelatsioonikordaja üldavaldise anname maatrikskujul:

$$r^2_{0;12\ldots k} = \frac{A'C^{-1}A}{DZ} \tag{6}$$

kus C on argumentide $X_1,\ldots,X_k$ kovariatsioonimaatriks, $c_{ij} = \operatorname{cov} X_iX_j = E(X_i-EX_i)(X_j-EX_j)$, A aga Z ja X_i-de kovariatsioonivektor (üheveeruline maatriks),

$$A' = a_1,\ldots,a_k\ ,$$

$$a_i = \operatorname{cov}(ZX_i) = E(Z - EZ)(X_i - EX_i)\ ;$$

DZ on Z dispersioon. Korrelatsioonikordaja $r^2_{0;12\ldots k}$ loetakse alati mittenegatiivseks.

2. Mitmese korrelatsioonikordaja hinnang.

Mitmese korrelatsioonikordaja hinnangu saame valemist (5), asendades selles teoreetilised korrelatsioonikordaja väärtused r_{ij} vastavate väljavõtteliste hinnangutega $\tilde{r}_{ij}$. Samuti tuleb üldvalemis (6) kasutada väljavõttelisi kovariatsioonikordajate hinnanguid:

$$\tilde{c}_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}(x_{il} - \bar{x}_i)(x_{jl}-\bar{x}_j) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n} x_{il}x_{jl}-n\bar{x}_i\bar{x}_j\right),$$

$$\tilde{a}_i = \frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}(x_{il} - \bar{x}_i)(y_l-\bar{y}) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{l=1}^{n} x_{il}y_l-n\bar{x}_i\bar{y}\right).$$

3. Mitmese korrelatiivse seose olemasolu kontroll.

Loomulikult kerkib mitmese korrelatiivse seose puhul sama probleem, mida vaatlesime kahe muutuja puhulgi: kontrollida hüpoteesi seose olemasolu kohta, s. t. tõestada hüpotees

$$H_1: \ r_{0.12\ldots k} \neq 0$$

antud olulisuse nivoo α korral. Selle hüpoteesi kontrollimiseks vajalikud korrelatsioonikordaja kriitilised väärtused vastavalt tundmatute arvule k (argumentide arv + sõltuv muutuja) ja vabadusastmete arvule $f = n - k$ on esitatud tabelis 5.4.

Näide 5.5.

Olgu antud väljavõtte korrelatsioonimaatriks, mis on arvutatud 30 vaatluse põhjal. Kas eksisteerib usaldatav li-

Tabel 5.4.

Mitmese korrelatsioonikordaja kriitilised väärtused hüpoteesi r=0 kontrollimiseks olulisuse nivoodega α = 0,05 (esimene rida) ja α = 0,01 (teine rida).

	Muutujate arv k			
n−k	3	4	5	6
1	0.999	0.999	0.999	1.000
	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.975	0.983	0.987	0.990
	0.995	0.997	0.997	0.998
3	0.930	0.950	0.961	0.968
	0.977	0.983	0.987	0.990
4	0.881	0.912	0.930	0.942
	0.949	0.962	0.970	0.975
5	0.836	0.874	0.898	0.914
	0.917	0.937	0.949	0.957
6	0.795	0.839	0.867	0.886
	0.886	0.911	0.927	0.938
7	0.758	0.807	0.838	0.860
	0.855	0.885	0.904	0.918
8	0.726	0.777	0.811	0.835
	0.827	0.860	0.882	0.898
9	0.697	0.750	0.786	0.812
	0.800	0.837	0.861	0.878
10	0.671	0.726	0.763	0.790
	0.776	0.814	0.840	0.859
11	0.648	0.703	0.741	0.770
	0.753	0.793	0.821	0.841
12	0.627	0.683	0.722	0.751
	0.732	0.773	0.802	0.824
13	0.608	0.664	0.703	0.733
	0.712	0.755	0.785	0.807
14	0.590	0.646	0.686	0.717
	0.694	0.737	0.768	0.791
15	0.574	0.630	0.670	0.701
	0.677	0.721	0.752	0.776
16	0.559	0.615	0.655	0.687
	0.662	0.706	0.738	0.762
17	0.545	0.601	0.641	0.673
	0.647	0.691	0.724	0.749
18	0.532	0.587	0.628	0.660
	0.633	0.678	0.710	0.736
19	0.520	0.575	0.615	0.647
	0.620	0.665	0.697	0.723
20	0.509	0.563	0.604	0.636
	0.607	0.652	0.685	0.712
21	0.498	0.552	0.593	0.624
	0.596	0.641	0.674	0.700
22	0.488	0.542	0.582	0.614
	0.585	0.630	0.663	0.690
23	0.479	0.532	0.572	0.604
	0.574	0.619	0.653	0.679
24	0.470	0.523	0.562	0.594
	0.565	0.609	0.643	0.669
25	0.462	0.314	0.353	0.585
	0.555	0.600	0.633	0.660
26	0.454	0.506	0.545	0.576
	0.546	0.590	0.624	0.651
27	0.446	0.498	0.536	0.568
	0.538	0.582	0.615	0.642
28	0.439	0.490	0.529	0.560
	0.529	0.573	0.607	0.633
29	0.432	0.483	0.521	0.552
	0.522	0.565	0.598	0.625
30	0.425	0.476	0.514	0.545
	0.514	0.557	0.591	0.618
40	0.373	0.419	0.455	0.484
	0.454	0.494	0.526	0.552
60	0.308	0.348	0.380	0.406
	0.377	0.414	0.442	0.467
120	0.221	0.251	0.275	0.295
	0.272	0.300	0.322	0.342

Tabel pärineb teosest [10], lk. 19.3. Vabadusastmete arv

$$f = n - k,$$

kus n on väljavõtte maht, k - muutujate arv.

neaarne seos ühelt poolt Z ja teiselt poolt X ning Y vahel (olulisuse nivooks olgu 0,05)?

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -0,35 & 0,52 \\ -0,35 & 1 & 0,41 \\ 0,52 & 0,41 & 1 \end{pmatrix}$$

Lahendus.

Leiame mitmese korrelatsioonikordaja $r_{3.12}$.

$$r_{3.12} = \sqrt{\frac{0,52^2+0,41^2+2.0,52.0,41.0,35}{1-0,35^2}} = \sqrt{\frac{0,59}{0,88}} \approx 0,82 .$$

Võtame $f = n - k = 30 - 3 = 27$, $\alpha = 0,05$. Tabelist 5.4 saame siis $\bar{r} = 0,538$. Et $0,82 > 0,538$, on muutuvate juhuslike suuruste vahel reaalne seos.

§ 5. SPEARMANI ASTAKKORRELATSIOONIKORDAJA ρ.

1. Astakkorrelatsiooni definitsioon ja arvutamise eeskiri.

Spearmani astakkorrelatsioonikordaja kuulub mitteparameetriliste statistikute hulka, mille võimalik kasutamisala on avaram kui parameetrilistel statistikutel (on esitatud vähem nõudeid uuritavate juhuslike suuruste jaotuste kohta). Astakkorrelatsiooni võib arvutada isegi selliste juhuslike suuruste puhul, milledele arvväärtusi üldse ei omistata, kuid väärtused on järjestatavad (näiteks värvus, meeldivus jne.).

Anname järgnevas Spearmani astakkorrelatsioonikordaja arvutamise eeskirja.

Olgu antud väljavõte mahuga n, kusjuures igale indiviidile i vastab kaks mõõtmistulemust (tunnust) x_i ja y_i, seega väljavõtteks on (samuti kui ka lineaarse korrelatsioonikordaja arvutamisel) paaride hulk

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \ldots,\ (x_n,y_n)\ .$$

Järjestame esimese tunnuse väärtused kasvavas järjekorras:

$$x_1' \leq x_2' \leq \ldots \leq x_n' ,$$

ning märgime igale X-i väärtusele juurde järjekorranumbri i_1, i_2 jne. Juhul, kui variatsioonireas on korduvad väärtused, $x_i' = x_{i+1}' = \ldots = x_{i+j}'$ $(j \geq 1)$, omistame neile kõigile võrdse järjekorranumbri $i + \frac{j}{2}$ (mis võib ka murruliseks osutuda).

Samal viisil toimime ka teise tunnusega. Kokkuvõttes saame järjestamise tulemused esitada järgmise tabeli kolme esimese veeruna (muuseas, esimesest veerust võib ka loobuda, võttes järjestuse aluseks näiteks tunnuse X järjestuse, nii et $i_1 = 1,\ldots,i_n = n$).

Jrk. nr. esialgu	Tunnuse X jrk. nr.	Tunnuse Y jrk. nr.	Vahe	Vahe ruut
1	i_1	j_1	$d_1=(i_1-j_1)$	d_1^2
2	i_2	j_2	$d_2=(i_2-j_2)$	d_2^2
3	i_3	j_3	$d_3=(i_3-j_3)$	d_3^2
...	...	...	...	...
n	i_n	j_n	$d_n=(i_n-j_n)$	d_n^2

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

Seejärel täidame tabelis eelviimase ja viimase veeru ning summeerime viimase veeru väärtused. Saadud summa abil on lihtne arvutada suurust ρ :

$$\rho = 1 - \frac{6\sum\limits_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)} ,$$

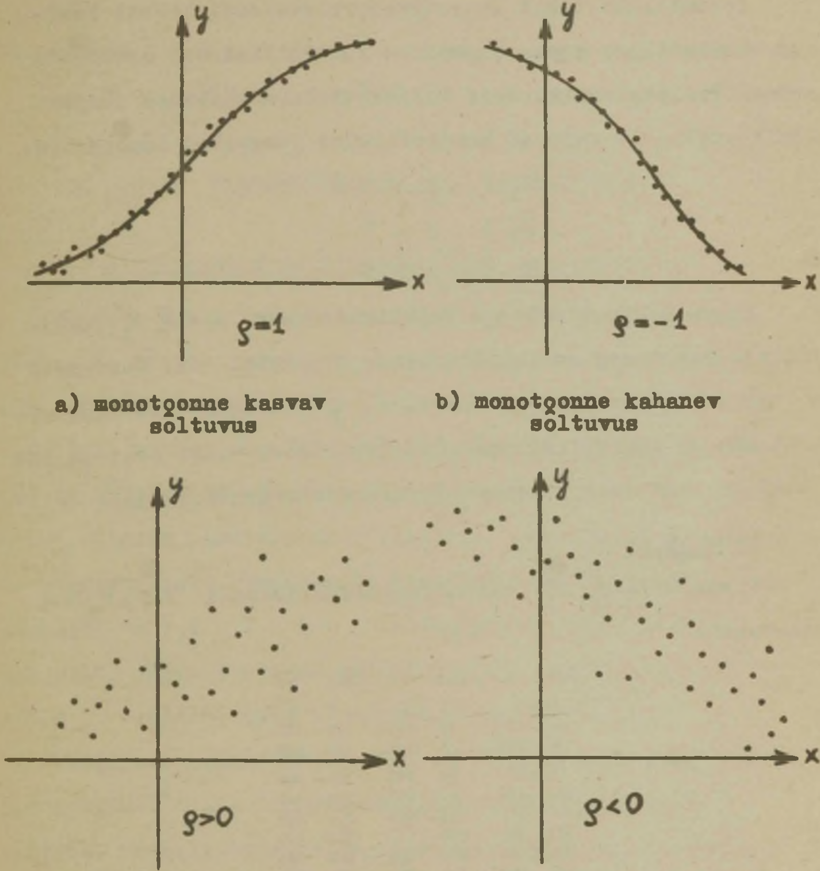
mida nimetataksegi astakkorrelatsioonikordajaks. On lihtne näha, et tunnuste järjekorranumbrite täieliku ühtelangemise puhul kehtib võrdus $\rho = 1$. Juhul, kui järjekorranumbrid on täielikult vastupidises järjekorras, saame $\rho = -1$. Sõltumatute järjekorranumbrite puhul on $\rho = 0$ (vt. joon. 5.9).

Üldiselt mõõdab ρ monotoonse seose tugevust: kui on tegemist rangelt monotoonse sõltuvusega, omandab ρ väärtuse +1 või -1. Kui seos ei ole rangelt monotoonne, siis näitab ρ väärtus seose lähedust monotoonsusele.

Tuleb märkida, et astakkorrelatsiooni on mõtet kasutada eeskätt siis, kui juhuslike suuruste erinevate väärtuste arv on suur, kuna üksnes sel juhul on mõtet rääkida rangelt monotoonsest sõltuvusest.

Võrreldes ρ ja r väärtusi (juhul, kui need mõlemad on arvutatavad), võib kujutleda olukordi, kus $\rho = \pm 1$, kuid $|r| \neq 1$ (vt. a) ja b) joonisel 5.9). Kuid enamasti on ka r siis küllaltki suure absoluutväärtusega. Juhul, kui $r = \pm 1$, s. t. seos on lineaarne, on see ka monotoonne, järelikult $\rho = \pm 1$ samuti. Mõnikord võib monotoonne seos olla lineaarsest tugevam ka juhul $|\rho| < 1$;

niisugust olukorda kujutab joonis 5.9 d).



a) monotoonne kasvav sõltuvus

b) monotoonne kahanev sõltuvus

c) nôrk kasvav sôltuvus

d) nôrk kahanev sôltuvus

Joonis 5.9.

2. Seose olemasolu kontrollimine astakkorrelatsioonikordaja abil.

Loomulikult tekib ka astakkorrelatsiooni korral küsimus statistilise seose olemasolu kontrollimisest arvutatud astakkorrelatsioonikordaja väljavõttelise väärtuse põhjal. Põhimõtteliselt vajavad kontrollimist järgmised hüpoteesid:

$$H_1 : \rho \neq 0 ;$$
$$H_2 : \rho > 0 ;$$
$$H_3 : \rho < 0 .$$

Nende kontrollimiseks vajalikud summa $S = \sum d_i^2$ kriitilised väärtused on tabuleeritud, vt. tabel 5.5. Suuremate n väärtuste korral võib kasutada ρ kriitiliste väärtustena ka r kriitilisi väärtusi (vt. tabel 5.1), sest ρ läheneb n kasvades lineaarsele korrelatsioonikordajale r.

Tabel 5.5.

Summa $S = \sum d_i^2$ täiendjaotusfunktsiooni $P(S \geq x_\alpha) = \alpha$ väärtused.

Σd_i^2	α	Σd_i^2	α	Σd_i^2	α
$N = 4$		$N = 7$		$N = 9$	
18	.167	82	.151	172	.125
20	.042	86	.118	180	.089
$N = 5$		90	.083	188	.060
32	.175	94	.055	196	.038
34	.117	98	.033	204	.022
36	.067	102	.017	212	.011
38	.042	106	.006	220	.004
40	.008	110	.001	228	.001
$N = 6$		$N = 8$		$N = 10$	
56	.121	120	.150	228	.139
58	.083	126	.108	238	.102
60	.068	132	.076	248	.072
62	.051	138	.048	258	.048
64	.029	144	.029	268	.030
66	.017	150	.014	278	.017
68	.008	156	.005	288	.009
70	.001	162	.001	298	.004

Tabel pärineb teosest [1], lk. 469.

VI. L I H T S U S T A T U D H I N N A N G U D J Ä R K- S T A T I S T I K U T E A B I L .

§ 1. VARIATSIOONRIDA JA JÄRKSTATISTIKUD.

1. Lihtsustatud ja klassikalised hinnangud.

Enamus statistikaülesandeid on seotud suure arvutustööga. Ka kõige lihtsamate hindamisülesannete (keskväärtuse, standardhälbe, usalduspiiride leidmine) lahendamisel tuleb tavaliste hinnangute leidmiseks summeerida (liidetavate arv võrdub väljavõtte mahuga), jagada, leida ruute ning ruutjuuri, lisaks kasutada veel tabeleid. Samasugune on olukord ka statistiliste hüpoteeside kontrollimisel: ikka tuleb kõigepealt a r v u t a d a lähteandmete ("statistilise materjali") järgi teatavad näitajad, nn. s t a t i s t i k u d , seejärel neid tabeliandmetega võrrelda.

Selline mahukas arvutustöö on tülikas eriti sel juhul, kui arvutusi tuleb jooksva töö käigus korduvalt teha - näiteks, et selgitada välja, kas väljavõtte maht on soovitud järeldusteni jõudmiseks piisav.

Niisugustel kordadel on otstarbekas tavaliste (nimetame neid "klassikalisteks") statistikute asemel kasutada nn. lihtsustatud statistikuid, mille leidmine toimub kas praktiliselt arvutusteta või üsna lihtsate arvutuste tulemusena (väheste arvude liitmine-lahutamine ja ühe teguriga korrutamine) spetsiaalsete tabelite abil.

Lihtsustatud statistikud ja nende kasutamine on vähe tuntud. Selle põhjuseks on kõigepealt asjaolu, et nimetatud meetodid on klassikalistest palju uuemad ja seetõttu vähe tuttavad ka õppekirjanduses. Teisest küljest on nende kasutamisel takistuseks ka vastavate tabelite vähene levik. Pealegi ei asenda lihtsustatud meetodid täielikult klassikalisi, vaid sobivad viimastega paralleelselt rakendamiseks, eeskätt aprioorsete hinnangute saamiseks töö käigus. Eriti vajalik on see seoses elektronarvutite laialdase rakendamisega, mil täpse ning töömahuka arvutustöö tegemine jäetakse erandituit arvuti teha, kuid jooksva töö planeerimiseks (katsete arvu piisavus jne.) on paratamatult vaja kasvõi ligikaudseltki hinnata juba saavutatud tulemusi.

2. <u>Hinnangu efektiivsus</u>.

Kui ühele hinnatavale suurusele (näiteks keskväärtusele) saab anda mitu erinevat hinnangut, tekib paratamatult küsimus nende hinnangute v õ r d l e m i s e s t .

Eeldame, et meil on tegemist nihutamata hinnangutega, s. t. niisuguste hinnangutega, mis ei põhjusta süstemaatilist viga (täpsemalt: hinnangu keskväärtus langeb kokku hinnatava parameetri õige väärtusega, vt. [2]). Selliste hinnangute seas on mõistlik eelistada v ä i k s e i m a h a j u v u s e g a hinnanguid, s.t. niisuguseid, mille dispersioon on võimalikult väike. Minimaalse dispersiooniga nihutamata hinnangut nimetatakse e f e k t i i v s e k s h i n n a n g u k s . Hinnangute võrdlemiseks sobib hinnangu e f e k t i i v s u s $e(\theta)$: hinnangu θ efektiivsus võrdub efektiivse hinnangu dispersiooni $D(\theta^*)$ ja antud hinnangu dispersiooni $D(\theta)$ suhtega

$$e(\theta) = \frac{D(\theta^*)}{D(\theta)} ,$$

kusjuures väljavõtte maht n on konstantne.

Ilmselt kehtib võrratus

$$0 \leq e(\theta) \leq 1 ,$$

kusjuures ülemise piiri 1 saavutab efektiivsus efektiivse hinnangu korral.

Mistahes hindamiseeskirja korral sõltub hinnangu dispersioon väljavõtte mahust (sealjuures on sõltuvus sageli pöördvõrdeline); n-indiviidise väljavõtte põhjal leitud hinnang efektiivsusega e on sama täpne (hajuvuse mõttes) kui $n^* = e.n$-indiviidise väljavõtte põhjal leitud efektiivne hinnang. Selles mõttes võib öelda, et mitteefektiivne hinnang kasutab ära vaid e $(e < 1)$ osa väljavõttes sisalduvast informatsioonist.

3. <u>Variatsioonrida</u>.

Olgu antud mingi suuruse mõõtmistulemuste (vaatlustulemuste, katseandmete) hulk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - nn. väljavõte. Esialgu paikneb see tavaliselt täiesti juhuslikus - näiteks andmete laekumise järjekorras.

Korrastame väljavõtte, järjestades ta kasvavasse jadasse:

$$x_1' \leq x_2' \leq \ldots \leq x_i' \leq x_{i+1}' \leq \ldots \leq x_n' . \qquad (1)$$

Siinjuures kôrvuti paiknevad liikmed vôivad olla omavahel vôrdsed. Jada (1) nimetame variatsioonreaks, x_i' on variatsioonrea[3] i-s liige, x_1' - esimene liige ja x_n' - viimane liige. Vahet

$$\omega_n = x_n - x_1$$

nimetatakse v a r i a t s i o o n i - u l a t u s e k s ehk h a a r d e k s . Variatsioonrida ja tema üksikud liikmed, mida nimetatakse järkstatistikuteks, sobivad hästi uuritava statistilise materjali iseloomustamiseks. Nende kaudu ongi tuletatud järgnevas esitatud lihtsustatud hinnangud.

4. Variatsioonrea liikmete jaotus.

Olgu meil antud väljavôte mahuga n normaaljaotusega juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ väärtuste hulgast; järjestame selle variatsioonritta. Iga üksik variatsioonrea liige on omakorda juhuslik suurus, mis sôltub järjekorranumbrist ja väljavôtte mahust (vt. [2]). Tabelis 6.1 on esitatud variatsioonrea liikmete keskväärtused sôltuvalt väljavôtte mahust ja järjekorranumbrist. Jaotuse sümmeetria tôttu kehtib seos

$$EX_k = -EX_{n-k} ,$$

[3] Käesolevas peatükis loobume sümboolika lihtsustamiseks juhusliku väljavôtte ja variatsioonrea eristamisest ning tähistame variatsioonrea i-nda liikme sümboli x_i' asemel lihtsalt tähisega x_i .

mille põhjal on lihtne leida puuduvate liikmete keskväärtused ($k > 10$).

Tabelis 6.1 esitatud keskväärtusi on kasutatud järgnevates punktides esitatud hinnangute konstrueerimisel ning nende põhjal on võimalik ka uusi hinnanguid konstrueerida.

Juhul, kui on tegemist üldkujulise normaaljaotusega $Y \sim N(m, \sigma)$, saame Y variatsioonrea k-nda liikme keskväärtuse leida valemist

$$E\,Y_k = m + \sigma\,E\,X_k\,, \qquad (2)$$

$$E\,X_k = \frac{E\,Y_k - m}{\sigma}\,,$$

kus n on väljavõtte maht, k - variatsioonrea liikme järjekorranumber ning suuruse $E\,X_k$ saame leida tabelist 6.1.

<u>Näide 6.1.</u>

Olgu Y normaaljaotusega $N(0,5;1,7)$. Leida 10-indiviidise väljavõtte teise liikme Y_2 keskväärtus.

<u>Lahendus.</u>

Tabelist 6.1 leiame:

$$X_2 = -1,001\ ;$$

valemi (2) kasutamisel saame:

$$Y_2 = 0,5 - 1,001 . 1,7 \approx -1,2\ .$$

Tabel 6.1.

Normaalse juhusliku suuruse[4] $X \sim N(0,1)$ variatsioonrea liikmete keskväärtused $E\,X_i$ $(i=1,2,\ldots,n;\ n=2,\ldots,20)$.

n	EX_1	EX_2	EX_3	EX_4	EX_5	EX_6	EX_7	EX_8	EX_9	EX_{10}
2	−.564	.564								
3	−.846	.000	.846							
4	−1.029	−.297	.297	1.029						
5	−1.163	−.495	.000	.495	1.163					
6	−1.267	−.642	−.202	.202	.642	1.267				
7	−1.352	−.757	−.353	.000	.353	.757	1.352			
8	−1.424	−.852	−.473	−.153	.153	.473	.852	1.424		
9	−1.485	−.932	−.572	−.275	.000	.275	.572	.932	1.485	
10	−1.539	−1.001	−.656	−.376	−.123	.123	.376	.656	1.001	1.539
11	−1.586	−1.062	−.729	−.462	−.225	.000	.225	.462	.729	1.062
12	−1.629	−1.116	−.793	−.537	−.312	−.103	.103	.312	.537	.793
13	−1.668	−1.164	−.850	−.603	−.388	−.191	.000	.191	.388	.603
14	−1.703	−1.208	−.901	−.662	−.456	−.267	−.088	.088	.267	.456
15	−1.736	−1.248	−.948	−.715	−.516	−.335	−.165	.000	.165	.335
16	−1.766	−1.285	−.990	−.763	−.570	−.396	−.234	−.077	.077	.234
17	−1.794	−1.319	−1.029	−.807	−.619	−.451	−.295	−.146	.000	.146
18	−1.820	−1.350	−1.066	−.848	−.665	−.502	−.351	−.208	−.069	.069
19	−1.844	−1.380	−1.099	−.886	−.707	−.548	−.402	−.264	−.131	.000
20	−1.867	−1.408	−1.131	−.921	−.745	−.590	−.448	−.315	−.187	−.062

[4] Tabelites toodud jaotused on arvutatud erandiltult normeeritud ja standardiseeritud normaaljaotuse $N(0,1)$ jaoks. Praktiliselt saab neid kasutada mistahes normaaljaotuse puhul, nagu on tehtud ka näidetes.

Tabel pärineb teosest [1], lk. 407.

§ 2. NORMAALJAOTUSE KESKVÄÄRTUSE JA STANDARDHÄLBE LIHTSUSTATUD HINNANGUD.

1. Keskväärtuse hinnangud.

Olgu X normaalne juhuslik suurus, $X \sim N(m, \sigma)$. Keskväärtuse efektiivseks hinnanguks on väljavõtte aritmeetiline keskmine $\bar{x}$. Et $\bar{x}$ leidmine nõuab arvutustööd, on sageli otstarbekas kasutada järkstatistikute põhjal leitavaid lihtsustatud hinnanguid. Tuntumad nendest on järgmised:

a) väljavõtte mediaan (variatsioonrea keskmine element)

$$X_{\frac{n+1}{2}}$$

(kui n on paaritu) või kahe keskmise elemendi poolsumma

$$\frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}) \quad \text{(kui } n \text{ on paaris);}$$

b) variatsioonrea keskpunkt

$$\frac{1}{2}(X_1 + X_n) \ ;$$

c) kahe sümmeetrilise järkstatistiku aritmeetiline keskmine

$$\frac{1}{2}(X_i + X_{n-i})$$

(selle valemi erijuhtudeks on ühtlasi a) ja b);

d) variatsioonrea mingi elementide hulga lineaarne kombinatsioon

$$\sum_{i=1}^{k} X_{j_i} \cdot a_{j_i} \ ,$$

kusjuures

$$\sum_{i=1}^{k} a_{j_i} = 1 .$$

Kõik sellised hinnangud on nihutamata, kuid mitteefektiivsed. Tabelis 6.2 on antud rida hinnangute avaldisi koos nende hinnangute dispersioonide ja efektiivsusega.

Juhul, kui hinnatakse normaaljaotuse $N(m, \sigma)$ keskväärtust, saame keskväärtuse hinnangu dispersiooniks

$$\sigma^2 \cdot D(\tilde{m}),$$

kus suuruse $D(\tilde{m})$ leiame tabelist, σ^2 aga on uuritava juhusliku suuruse dispersioon (millele tuleb leida sobival meetodil hinnang).

Mis puutub muu jaotusega juhuslikesse suurustesse, siis kõik ülalmärgitud hinnangud on nihutamata hinnanguteks keskväärtusele iga sümmeetrilise juhusliku suuruse korral; mittesümmeetrilise juhusliku suuruse puhul on need hinnangud nihutamata hinnanguteks mediaanile, mis aga erineb keskväärtusest. Hinnangute $\tilde{m}_i$ dispersioonihinnangud $D(\tilde{m}_i)$ kehtivad üksnes normaalsuse eeldusel, kuid ei muutu eriti tugevasti, kui jaotus mõnevõrra normaalsest erineb.

Jälgides tabelit 6.2 näeme, et saadud hinnangud on oma kvaliteedilt üsnagi erinevad. Halvim neist on hinnang $\tilde{m}_2$, mille efektiivsus väheneb väljavõtte mahu suurenedes ja läheneb nullile. Tuleb veel märkida, et hinnang $\tilde{m}_2$, on väga tundlik juhuslike võõraste elementide suhtes, mis on väljavõttesse sattunud. Seetõttu on selle kasutamine mõeldav vaid üsna väikeste (kuni 5-elemendiliste) väljavõtete korral.

Tabel 6.2.

Keskväärtuse lihtsustatud hinnanguid:

1. $\tilde{m}_1$ – väljavõtte mediaan, $X_{\frac{n+1}{2}}$ või $\frac{1}{2}(X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1})$;

2. $\tilde{m}_2$ – variatsioonrea keskpunkt $\frac{X_1 + X_n}{2}$;

3. $\tilde{m}_3$ – parim lineaarne hinnang kahe variatsioonrea liikme kaudu $\frac{X_k + X_{n-k}}{2}$;

4. $\tilde{m}_4 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=2}^{n-1} X_i$.

Iga hinnangu jaoks on antud dispersioon (eeldusel $X \sim N(0,1)$) ja efektiivsus; hinnangule $\tilde{m}_3$ on lisatud ka konkreetne avaldis.

n	$\tilde{m}_1$		$\tilde{m}_2$		$\tilde{m}_3$			$\tilde{m}_4$	
	D	e	D	e	Hinnangu kuju	D	e	D	e
2	.500	1.000	.500	1.000	$\frac{1}{2}(X_1 + X_2)$]	.500	1.000		
3	.449	.743	.362	.920	$\frac{1}{2}(X_1 + X_3)$	.362	.920	.449	.743
4	.298	.838	.298	.838	$\frac{1}{2}(X_2 + X_3)$	.298	.838	.298	.838
5	.287	.697	.261	.767	$\frac{1}{2}(X_2 + X_4)$	.231	.867	.227	.881
6	.215	.776	.236	.706	$\frac{1}{2}(X_2 + X_5)$	.193	.865	.184	.906
7	.210	.679	.218	.654	$\frac{1}{2}(X_2 + X_6)$	.168	.849	.155	.922
8	.168	.743	.205	.610	$\frac{1}{2}(X_3 + X_6)$	.149	.837	.134	.934
9	.166	.669	.194	.572	$\frac{1}{2}(X_3 + X_7)$	.132	.843	.118	.942
10	.138	.723	.186	.539	$\frac{1}{2}(X_3 + X_8)$	.119	.840	.105	.949
11	.137	.663	.178	.510	$\frac{1}{2}(X_3 + X_9)$	.109	.832	.0952	.955
12	.118	.709	.172	.484	$\frac{1}{2}(X_4 + X_9)$	.100	.831	.0869	.959
13	.117	.659	.167	.461	$\frac{1}{2}(X_4 + X_{10})$	.0924	.833	.0799	.963
14	.102	.609	.162	.440	$\frac{1}{2}(X_4 + X_{11})$	.0860	.830	.0739	.966
15	.102	.656	.158	.422	$\frac{1}{2}(X_4 + X_{12})$	.0808	.825	.0688	.969
16	.0904	.692	.154	.392	$\frac{1}{2}(X_5 + X_{12})$	.0756	.827	.0644	.971
17	.0901	.653	.151	.389	$\frac{1}{2}(X_5 + X_{13})$	.0711	.827	.0605	.973
18	.0810	.686	.148	.375	$\frac{1}{2}(X_5 + X_{14})$	.0673	.825	.0570	.975
19	.0808	.651	.145	.362	$\frac{1}{2}(X_6 + X_{14})$	.0640	.823	.0539	.976
20	.0734	.681	.143	.350	$\frac{1}{2}(X_6 + X_{15})$	.0607	.824	.0511	.978
∞	$1.57/N$	.637		.000	$\frac{1}{2}(P_{25} + P_{75})$	$1.24/N$	.808		1.000

Tabel pärineb teosest [1], lk. 406.

Hinnang $\widetilde{m}_1$ - hästituntud mediaan - on küllalt madala efektiivsusega: väljavõttest kasutatakse ära vähem kui $\frac{2}{3}$ informatsiooni (näiteks 20-elemendilise väljavõtte mediaan on sama täpne kui 14-elemendilise väljavõtte aritmeetiline keskmine). Ometi võib seda hinnangut soovitada, kuna ta pole tundlik võõraste elementide suhtes.

Parema efektiivsusega on hinnang $\widetilde{m}_3$, mis kasutab ära üle $\frac{4}{5}$ väljavõtte informatsioonist, ning pole tundlik vigade suhtes. Tülikas on selle juures vaid asjaolu, et formaalne arvutusreegel muutub, kuid, nagu näha, annavad parima lineaarse kombinatsiooni kvartiilidele võimalikult lähedased variatsioonrea liikmed.

Viimane hinnang $\widetilde{m}_4$ on arvutustülikuselt ja efektiivsuselt lähedane aritmeetilisele keskmisele $\bar{x}$, erineb sellest üksnes suurema veakindluse poolest. Seda on otstarbekas kasutada juhul, kui väljavõttesse võib olla sattunud võõraid elemente.

<u>Näide 6.2.</u>

Olgu antud väljavõte vaatlustulemustest, mis on esitatud jaotustabeli kujul. Arvutuste hõlbustamiseks lisame tavalisele jaotustabelile veel rea, kuhu kanname liikmete järjekorranumbrid variatsioonreas:

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	$\sum$
k_i	1	3	3	2	3	3	1	2	1	0	1	20
Jrk. nr.	1	2-4	5-7	8-9	10-12	13-15	16	17-18	19		20	

Leida keskväärtuse hinnang!

Lahendus.

1) Kasutades mediaani (hinnang $\tilde{m}_1$), saame

$$\tilde{m}_1 = 1,4 ;$$

2) variatsioonrea keskkoht annab hinnangu

$$\tilde{m}_2 = \frac{1}{2}(1,0 + 2,0) = 1,5 ;$$

3) parim lineaarne kombinatsioon aga annab (vt. tabel 6.2)

$$\tilde{m}_3 = \frac{1}{2}(1,2 + 1,5) = 1,35 ;$$

4) leiame veel $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1.1,0+3.1,1+3.1,2+2.1,3+3.1,4+3.1,5+1.1,5+$$

$$+1.1,6+2.1,7+1.1,8+1.2,0 =$$

$$= 1,5+ \frac{1}{200}(-1.5-3.4-3.3-2.2-3.1+1.1+2.2+1.3+1.5)=$$

$$= 1,5 - \frac{20}{200} = 1,40;$$

5) hinnangule $\bar{x}$ on lähedane $\tilde{m}_4$:

$$\tilde{m}_4 = 1,5+ \frac{1}{180}(-3.4-3.3-2.2-3.1+1.1+2.2+1.3) =$$

$$= 1,5 - \frac{20}{180} = 1,39 .$$

Arvutame veel standardhälbe hinnangu:

$$s^2 = \frac{1}{19}(2.0,5^2+3.0,4^2+4.0,3^2+4.0,2^2+4.0,1^2-20.(\frac{2}{20})^2) =$$

$$= \frac{1}{19}(0,50+0,48+0,36+0,16+0,04-0,20) = 0,0705 ;$$

$$\underline{s = 0,266 .}$$

Hinnangute standardhälbed leiame s^2 kaudu tabeli 6.2 abil:

$$D(\tilde{m}_1) = 0,0705.0,0734 = 0,00518 ; \quad \sqrt{D(\tilde{m}_1)} = 0,072;$$

$$D(\tilde{m}_2) = 0{,}0705 \cdot 0{,}143 = 0{,}01008 \ ; \qquad \sqrt{D(\tilde{m}_2)} = 0{,}104;$$

$$D(\tilde{m}_3) = 0{,}0705 \cdot 0{,}0607 = 0{,}00428 \ ; \qquad \sqrt{D(\tilde{m}_3)} = 0{,}065;$$

$$D(\bar{x}) = \frac{0{,}0705}{20} = 0{,}00353 \ ; \qquad \sqrt{D(\bar{x})} = 0{,}059;$$

$$D(\tilde{m}_4) = 0{,}0706 \cdot 0{,}0511 = 0{,}00361; \qquad \sqrt{D(\tilde{m}_4)} = 0{,}060.$$

Kasutades t-tabeleid (vt. [3]), võime leida ka kõigile hinnangutele usalduspiirid; leiame näiteks 2-poolsed 95%-lised usalduspiirid. Et $t_{10;0,05} = 2{,}009$, saame:

$$\tilde{m}_1 = 1{,}4 \pm 0{,}14,$$

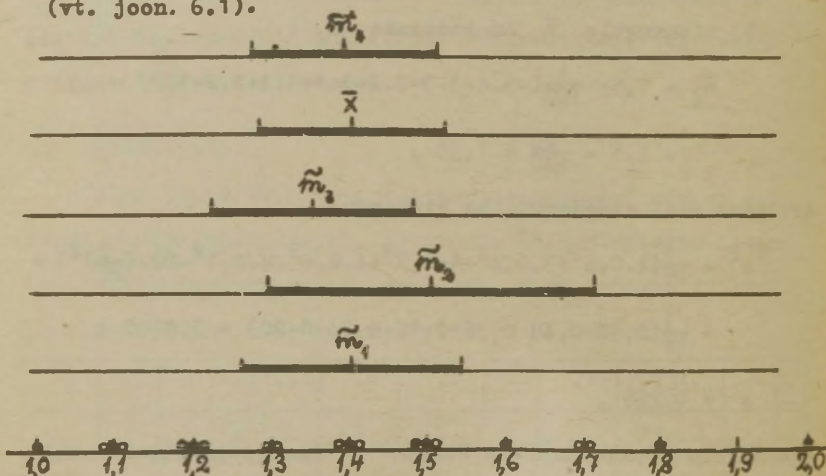
$$\tilde{m}_2 = 1{,}5 \pm 0{,}21,$$

$$\tilde{m}_3 = 1{,}35 \pm 0{,}13,$$

$$\bar{x} = 1{,}40 \pm 0{,}12,$$

$$\tilde{m}_4 = 1{,}39 \pm 0{,}12;$$

(vt. joon. 6.1).



Joonis 6.1.
Erinevate eeskirjadega saadud keskväärtuse hinnangud koos usalduspiiridega.

2. Standardhälbe hinnang variatsioonilulatuse abil.

Olgu X normaalne juhuslik suurus, $X \sim N(m, \sigma)$. Dispersiooni σ^2 jaoks saame efektiivse hinnangu leida ainult juhul kui keskväärtus m on teada; see on

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 .$$

Kui m ei ole teada, saame nihutamata hinnangu

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 ,$$

ja (harvem kasutatava) nihutatud hinnangu

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 .$$

Standardhälbe jaoks saame leida hinnangud lihtsalt ruutjuurena dispersioonihinnangutest:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2} ; \quad s = \sqrt{s^2} ; \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}^2} .$$

Neist esimest saab kasutada väga harva (üldjuhul m ei ole teada). Ülejäänud annavad nihutatud, kuid asümtootiliselt nihutamata hinnangu (nihe läheneb väljavõtte mahu kasvades nullile). Ka on viimased hinnangud asümptootiliselt efektiivsed, s.t. efektiivsus läheneb ühele.

Kõigi ülaltoodud standardhälbe hinnangute olulisemaks puuduseks on töömahukus arvutamisel, mistõttu neid käsitsiarvutamisel on tülikas kasutada.

Lihtsa hinnangu standardhälbele võib saada variatsiooniulatuse abil.

Tabelis 6.3 on tabuleeritud normaaljaotusega $X \sim N(0,1)$ juhusliku suuruse n-indiviidilise väljavõtte variatsiooniulatuse $X^{(n)}$ jaotus; sümboliga α_n on tähistatud variatsiooniulatuse keskväärtus

$$EX^{(n)} = \alpha_n ;$$

variatsiooniulatuse standardhälve on tähistatud tähega β_n:

$$\sqrt{DX^{(n)}} = \beta_n ,$$

ning suhe $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \gamma_n$. Edasi on tabelis ära toodud jaotuse kvantiilid.

Olgu X normaaljaotusega $X \sim N(m, \sigma)$. Siis X väärtuste seast tehtud väljavõtte variatsiooniulatus ω_n on juhuslik suurus $\sigma X^{(n)}$ ja selle keskväärtuseks on $E\sigma X^{(n)} = \sigma \cdot \alpha_n$. Seda arvestades saame standardhälbe jaoks hinnangu

$$\tilde{\sigma} = \frac{\omega_n}{\alpha_n} ,$$

kus ω_n on väljavõtte variatsiooniulatus, suuruse α_n leiame tabelist 6.3.

See hinnang on nihutamata, s. t. keskmiselt õige. Suuruse $X^{(n)}$ jaotuse kvantiilide abil saame arvutada ka σ usalduspiirid vastavalt usaldusnivoole $1-\alpha$:

$$\underline{\underline{\sigma}} = X^{(n)}_{\alpha/2} ;$$

$$\overline{\overline{\sigma}} = X^{(n)}_{1-\alpha/2},$$

$$\underline{\sigma} = X^{(n)}_{\alpha} ;$$

$$\overline{\sigma} = X^{(n)}_{1-\alpha},$$

Tabel 6.3.

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ variatsiooniulatuse $X^{(n)}$ keskväärtus $\alpha_n = E\omega_n$, standardhälve $\beta_n = \sqrt{DX^{(n)}}$, variatsioonikordaja $\gamma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ ja jaotuse kvantiilid x_α : $P(\omega_n < x_\alpha) = \alpha$.

n	α_n	β_n	γ_n	0,05	0,1	0,5	1,0	2,5	5,0	10,0	20,0	30,0
2	1,128	0,853	0,756	0,00	0,00	0,01	0,02	0,04	0,09	0,18	0,36	0,55
3	1,693	0,888	0,525	0,04	0,06	0,13	0,19	0,30	0,43	0,62	0,90	1,14
4	2,059	0,880	0,427	0,16	0,20	0,34	0,43	0,59	0,76	0,98	1,29	1,53
5	2,326	0,864	0,371	0,31	0,37	0,55	0,66	0,85	1,03	1,26	1,57	1,82
6	2,534	0,848	0,335	0,47	0,54	0,75	0,87	1,06	1,25	1,49	1,80	2,04
7	2,704	0,833	0,308	0,61	0,69	0,92	1,05	1,25	1,44	1,68	1,99	2,22
8	2,847	0,820	0,288	0,75	0,83	1,08	1,20	1,41	1,60	1,83	2,14	2,38
9	2,970	0,808	0,272	0,88	0,96	1,21	1,34	1,55	1,74	1,97	2,28	2,51
10	3,078	0,797	0,259	1,00	1,08	1,33	1,47	1,67	1,86	2,09	2,39	2,62
11	3,173	0,787	0,248	1,10	1,20	1,45	1,58	1,78	1,97	2,20	2,50	2,72
12	3,258	0,778	0,239	1,21	1,30	1,55	1,68	1,88	2,07	2,30	2,59	2,82
13	3,336	0,770	0,231	1,30	1,39	1,64	1,77	1,97	2,16	2,39	2,68	2,90
14	3,407	0,762	0,224	1,38	1,48	1,72	1,86	2,06	2,24	2,47	2,75	2,97
15	3,472	0,755	0,217	1,46	1,56	1,80	1,93	2,14	2,32	2,54	2,83	3,04
16	3,532	0,749	0,212	1,53	1,63	1,88	2,01	2,21	2,39	2,61	2,89	3,11
17	3,588	0,743	0,207	1,60	1,69	1,94	2,07	2,27	2,45	2,67	2,95	3,17
18	3,640	0,738	0,203	1,66	1,75	2,01	2,14	2,34	2,51	2,73	3,01	3,22
19	3,689	0,733	0,199	1,72	1,82	2,07	2,20	2,39	2,57	2,79	3,06	3,27
20	3,735	0,729	0,195	1,78	1,88	2,12	2,25	2,45	2,63	2,84	3,11	3,32

n	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	95,0	97,5	99,0	99,5	99,9	99,95
2	0,74	0,95	1,20	1,47	1,81	2,33	2,77	3,17	3,64	3,97	4,65	4,92
3	1,36	1,59	1,83	2,09	2,42	2,90	3,31	3,68	4,12	4,42	5,06	5,31
4	1,76	1,98	2,21	2,47	2,78	3,24	3,63	3,98	4,40	4,69	5,31	5,56
5	2,04	2,26	2,48	2,73	3,04	3,48	3,86	4,20	4,60	4,89	5,48	5,72
6	2,26	2,47	2,69	2,94	3,23	3,66	4,03	4,36	4,76	5,03	5,62	5,86
7	2,44	2,65	2,86	3,10	3,39	3,81	4,17	4,49	4,88	5,15	5,73	5,96
8	2,59	2,79	3,00	3,24	3,52	3,93	4,29	4,61	4,99	5,26	5,82	6,04
9	2,71	2,92	3,12	3,35	3,63	4,04	4,39	4,70	5,08	5,34	5,90	6,12
10	2,83	3,02	3,23	3,46	3,73	4,13	4,47	4,79	5,16	5,42	5,97	6,19
11	2,93	3,12	3,32	3,55	3,82	4,21	4,55	4,86	5,23	5,49	6,04	6,25
12	3,01	3,21	3,41	3,63	3,90	4,29	4,62	4,92	5,29	5,54	6,09	6,31
13	3,09	3,29	3,48	3,70	3,97	4,35	4,69	4,99	5,35	5,60	6,14	6,36
14	3,17	3,36	3,55	3,77	4,03	4,41	4,74	5,04	5,40	5,65	6,19	6,40
15	3,23	3,42	3,62	3,83	4,09	4,47	4,80	5,09	5,45	5,70	6,23	6,45
16	3,30	3,48	3,67	3,89	4,14	4,52	4,85	5,14	5,49	5,74	6,28	6,49
17	3,35	3,54	3,73	3,94	4,19	4,57	4,89	5,18	5,54	5,79	6,32	6,52
18	3,41	3,59	3,78	3,99	4,24	4,61	4,93	5,22	5,57	5,82	6,35	6,56
19	3,46	3,64	3,83	4,03	4,29	4,65	4,97	5,26	5,61	5,86	6,38	6,59
20	3,51	3,69	3,87	4,08	4,33	4,69	5,01	5,30	5,65	5,89	6,41	6,62

Tabel pärineb teosest [9], lk. 514.

kusjuures $\underline{\underline{\sigma}}$ ja $\overline{\overline{\sigma}}$ moodustavad kahepoolsed usalduspiirid, $P(\underline{\underline{\sigma}} \leq \sigma \leq \overline{\overline{\sigma}}) = 1 - \alpha$; $\underline{\sigma}$ ja $\overline{\sigma}$ aga on vastavalt ühepoolne alumine ja ühepoolne ülemine usalduspiir:

$$P(\sigma \geq \underline{\sigma}) = 1 - \alpha \quad \text{ning} \quad P(\sigma \leq \overline{\sigma}) = 1 - \alpha .$$

Tabelis 6.4 on toodud suurused $\frac{1}{\alpha_n}$ (mille järgi on eriti mugav arvutada standardhälbe hinnangut), dispersioon γ_n^2 ja hinnangu efektiivsus.

Tabelis 6.5 esitatakse α_n väärtused ka suurte n väärtuste jaoks (kuni väärtuseni $n=1000$). Tuleb siiski märkida, et suurte n väärtuste korral hinnang variatsiooniulatuse kaudu muutub väheefektiivseks ning pole seetõttu otstarbekas kasutada. Et saada suure väljavõtte korral lihtsustatud standardhälbe hinnangut, mis materjalis sisalduvat informatsiooni paremini ära kasutaks, on otstarbekas väljavõte jaotada (juhuslikult) osaväljavõteteks ning leida iga osaväljavõtte põhjal hinnang.

Nii võime näiteks kasutada 10-indiviidilisi osaväljavõtteid $x_{1.1},\ldots,x_{1.10}$; $x_{2.1},\ldots,x_{2.10}$; $\ldots$; $x_{p1},\ldots,x_{p.10}$, mille variatsiooniulatused olgu ω_1, $\omega_2,\ldots,\omega_p$. Leiame dispersioonihinnangud $\sigma_i^o (i=1,2,\ldots,p)$ valemist

$$\sigma_i^o = \frac{1}{\alpha_{10}} \omega_i$$

ning

$$\sigma^* = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \sigma_i^o .$$

Saadud hinnangu efektiivsus on $\sim 0{,}85$ (kui kasutatakse kõiki indiviide), üldiselt aga k-indiviididiliste seeriate puhul $e_k \cdot \frac{kp}{n}$, kus e_k on k-indiviidilise väljavõtte ulatuse põhjal saadava hinnangu efektiivsus, p - seeriate arv ja n - indiviidide üldarv.

Tabel 6.4.

Variatsiooniulatuse ω_n keskväärtuse pöördväärtus $\frac{1}{\alpha_n}$, hinnangu $\tilde{\sigma} = X^{(n)} \frac{1}{\alpha_n}$ dispersioon (β_n^2) ja efektiivsus e_n $(X \sim N(0,1))$.

n	$1/\alpha_n$	γ_n	e	n	$1/\alpha_n$	γ_n	e
2	.886w	.571	1.000	11	.315w	.0616	.831
3	.591w	.275	.992	12	.307w	.0571	.814
4	.486w	.183	.975	13	.300w	.0533	.797
5	.430w	.138	.955	14	.294w	.0502	.781
6	.395w	.112	.933	15	.288w	.0474	.766
7	.370w	.0949	.911	16	.283w	.0451	.751
8	.351w	.0829	.890	17	.279w	.0430	.738
9	.337w	.0740	.869	18	.275w	.0412	.725
10	.325w	.0671	.850	19	.271w	.0395	.712
				20	.268w	.0381	.700

Tabel pärineb teosest [1], lk. 404.

Näide 6.3.

Olgu väljavõtte maht 10, variatsiooniulatus $\omega = 3,5$. Eeldame, et tegemist on normaaljaotusega. Nõutakse leida standardhälbe nihutamata hinnangut ja selle 95%-lisi usalduspiire.

Lahendus. Tabelist 6.4 leiame, et $n = 10$ puhul $\frac{1}{\alpha} = 0,325$. Seega $\tilde{\sigma} = 3,5 \cdot 0,325 = 1,137$.
Et leida usalduspiire, kasutame tabelit 6.3. Näeme, et

$$P\left(\frac{\omega}{\sigma} < 1{,}67\right) = 0{,}025 \;; \qquad P\left(\frac{\omega}{\sigma} < 4{,}79\right) = 0{,}975, \text{ siit}$$

$$\underline{\sigma} = \frac{\omega}{4{,}79} = \frac{3{,}5}{4{,}79} = 0{,}731 \,,$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\omega}{1{,}67} = \frac{3{,}5}{1{,}67} = 2{,}095 \,.$$

Tabel 6.5.

Variatsiooniulatuse ω_n keskväärtus $\alpha_n(X \sim N(0,1))$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	—	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,70	2,85	2,97
10	3,08	3,17	3,26	3,34	3,41	3,47	3,53	3,59	3,64	3,69
20	3,73	3,78	3,82	3,86	3,90	3,93	3,96	4,00	4,03	4,06
30	4,09	4,11	4,14	4,16	4,19	4,21	4,24	4,26	4,28	4,30
40	4,32	4,34	4,36	4,38	4,40	4,42	4,43	4,45	4,47	4,48
50	4,50	4,51	4,53	4,54	4,56	4,57	4,59	4,60	4,61	4,63
60	4,64	4,65	4,66	4,68	4,69	4,70	4,71	4,72	4,73	4,74
70	4,75	4,77	4,78	4,79	4,80	4,81	4,82	4,83	4,83	4,84
80	4,85	4,86	4,87	4,88	4,89	4,90	4,91	4,91	4,92	4,93
90	4,94	4,95	4,96	4,96	4,97	4,98	4,99	4,99	5,00	5,01

n	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
K	5,02	5,49	5,76	5,94	6,07	6,18	6,28	6,35	6,42	6,48

Tabel pärineb teosest [12], lk. 84.

3. Standardhälbe hinnangud variatsioonrea liikmete lineaarsete kombinatsioonide kaudu.

Eelmises punktis vaatlesime standardhälbe hinnanguid variatsiooniulatuse kaudu. Selle hinnangu puuduseks on madal efektiivsus, s. t. ta ei kasuta väljavõttes sisalduvat informatsiooni täielikult.

Oluliselt parema efektiivsusega hinnanguid võib saada, kasutades variatsiooniulatuse kõrval veel teisi variatsioonrea liikmeid. Kuigi selliste hinnangute leidmine on pisut tülikam, on see siiski oluliselt lihtsam kui tavaline s arvutamine, kusjuures e f e k t i i v s u s o n p r a k t i l i s e l t s a m a , mis väljavõtte dispersiooni s^2 kaudu saadud standardhälbe hinnangul s .

Järgnevalt esitame mõningad tabelid (6.6 - 6.8), millest on antud eeskiri hinnangu moodustamiseks, hinnangu dispersioon ja efektiivsus.

Tabel 6.6.

Standardhälbe hinnang variatsioonrea liikmete lineaarkombinatsiooni kaudu $(X \sim N(0,1))$.

n	hinnang $\tilde{\sigma}$	$D(\tilde{\sigma})$	e
2	$.8862(X_2 - X_1)$	.571	1.000
3	$.5908(X_3 - X_1)$	.275	.992
4	$.4857(X_4 - X_1)$	.183	.975
5	$.4299(X_5 - X_1)$	.138	.955
6	$.2619(X_6 + X_5 - X_2 - X_1)$	.109	.957
7	$.2370(X_7 + X_6 - X_2 - X_1)$	.0895	.967
8	$.2197(X_8 + X_7 - X_2 - X_1)$	.0761	.970
9	$.2068(X_9 + X_8 - X_2 - X_1)$	.0664	.968
10	$.1968(X_{10} + X_9 - X_2 - X_1)$	.0591	.964
11	$.1608(X_{11} + X_{10} + X_8 - X_4 - X_2 - X_1)$	.0529	.967
12	$.1524(X_{12} + X_{11} + X_9 - X_4 - X_2 - X_1)$	.0478	.972
13	$.1456(X_{13} + X_{12} + X_{10} - X_4 - X_2 - X_1)$	.0436	.975
14	$.1399(X_{14} + X_{13} + X_{11} - X_4 - X_2 - X_1)$	.0401	.977
15	$.1352(X_{15} + X_{14} + X_{12} - X_4 - X_2 - X_1)$	.0372	.977
16	$.1311(X_{16} + X_{15} + X_{13} - X_4 - X_2 - X_1)$	.0347	.975
17	$.1050(X_{17} + X_{16} + X_{15} + X_{13} - X_5 - X_3 - X_2 - X_1)$	.0325	.978
18	$.1020(X_{18} + X_{17} + X_{16} + X_{14} - X_5 - X_3 - X_2 - X_1)$	.0305	.978
19	$.09939(X_{19} + X_{18} + X_{17} + X_{15} - X_5 - X_3 - X_2 - X_1)$	.0288	.979
20	$.09706(X_{20} + X_{19} + X_{18} + X_{16} - X_5 - X_3 - X_2 - X_1)$	.0272	.978

Märkus. Juhul $X \sim N(m,\sigma)$ saame standardhälbe hinnangu dispersiooniks $\sigma^2 D(\tilde{\sigma})$, kus σ^2 leiame hinnangu $\tilde{\sigma}$ ruutimisel.

Tabel pärineb teosest [1], lk. 406.

Tabel 6.7.

Standardhälbe hinnangud variatsioonrea liikmete lineaarkombinatsioonide kaudu; $X \sim N(m, \sigma)$.

n	hinnang $\tilde{\sigma}$	e
2	$.8862(X_2 - X_1)$	1.00
3	$.5908(X_3 - X_1)$	.99
4	$.3770(X_4 + X_3 - X_2 - X_1)$	.91
5	$.3016(X_5 + X_4 - X_2 - X_1)$	.94
6	$.2369(X_6 + X_5 + X_4 - X_3 - X_2 - X_1)$	.90
7	$.2031(X_7 + X_6 + X_5 - X_3 - X_2 - X_1)$	.92
8	$.1723(X_8 + X_7 + X_6 + X_5 - X_4 - X_3 - X_2 - X_1)$	.90
9	$.1532(X_9 + X_8 + X_7 + X_6 - X_4 - X_3 - X_2 - X_1)$	.91
10	$.1353(X_{10} + X_9 + X_8 + X_7 + X_6 - X_5 - X_4 - X_3 - X_2 - X_1)$	.89

Tabel pärineb teosest [1], lk. 405.

Võrreldes tabeleid 6.6 ja 6.7 näeme, et kuigi tabelis 6.7 esitatud hinnang sisaldab rohkem liikmeid, ei ole selle efektiivsus suurem. Hinnangute 6.7 eeliseks on vaid nende mugavam ja paremini meeldejääv kuju, tegelikult on hinnangud 6.6 ökonoomsemad.

Näide 6.4.

Olgu antud vaatlustulemused:

0,37; 0,30; 0,42; 0,43; 0,43.

Nõutakse leida standardhälbe hinnang.

Lahendus. Tabelist 6.6 saame

$$\sigma \approx 0,4299(0,43-0,37) = 0,0258 \approx 0,026,$$

tabelist 6.7 aga leiame:

$$\sigma \approx 0,3016(0,43+0,43-0,37-0,39) = 0,0302 \approx 0,030 .$$

Võrdluseks leiame veel ka klassikalise hinnangu s :

$$\bar{x} = 0{,}408\ ,$$

$$s^2 = \frac{1}{40000}(3^2+1^2+2^2+2.3^2-5.0{,}8^2) = 0{,}00072\ ,$$

$$s \approx 0{,}027\ .$$

Erinevused hinnangutes on ilmselt tingitud jaotuse mittenormaalsusest.

Paneme tähele, et väljavõtte neljas ja viies liige on võrdsed. Seetõttu a l a h i n d a b hajuvust hinnang, mis kasutab ainult viiendat liiget, ja ülehindab hinnang, mis kasutab ka neljandat liiget.

<u>Näide 6.5</u>.

Leida antud jaotustabeli põhjal standardhälbe hinnang.

Väärtus	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
Sagedus	1	2	3	2	3	3	1	2	2	0	1
Jrk.nr.	1	2,3	4-6	7,8	9-11	12-14	15	16,17	18,19	-	20

<u>Lahendus</u>. Kõigepealt täiendame tavalist jaotustabelit viimase reaga, kuhu märgime üksikindiviidide järjekorranumbrid.

Tabeli 6.6 põhjal leiame hinnangu:

$$\sigma \approx 0{,}0971(2{,}0+1{,}8+1{,}8+1{,}7-1{,}2-1{,}1-1{,}1-1{,}0) = 0{,}0971.2{,}9 = $$
$$= 0{,}282.$$

Märgime veel, et sellised hinnangud muutuvad suhteliselt ebatäpseks sel juhul, kui korduste arv variatsioonreas on suur (ja eriti, kui erinevate väärtuste hulk on väike).

Tabelites 6.6 ja 6.7 esitatud lineaarsed kombinatsioonid on suhteliselt lihtsad, kuna neis kõigil liikmetel on sama kordaja. Mõnevõrra paremaid tulemusi võib saada selliste lineaarsete kombinatsioonide kasutamisel, kus erinevatel liikmetel on erinevad kordajad.

Tabelis 6.8 on esitatud parim lineaarne hinnang standardhälbele σ variatsioonrea kordajate kaudu. Näeme, et selle hinnangu efektiivsus on praktiliselt võrdne ühega, seega ei ole tulemus üldiselt vähem täpne kui hinnang s, kasutatakse aga siiski mõnevõrra lihtsamaid arvutusi.

Tabel 6.8.

Standardhälbe σ parim lineaarne hinnang ($X \sim N(m,\sigma)$).

n	hinnang $\tilde{\sigma}$	e
2	$.8862(X_2-X_1)$	1.000
3	$.5908(X_3-X_1)$	.992
4	$.4539(X_4-X_1)+.1102(X_3-X_2)$	.989
5	$.3724(X_5-X_1)+.1352(X_4-X_2)$	.988
6	$.3175(X_6-X_1)+.1386(X_5-X_2)+.0432(X_4-X_3)$	.988
7	$.2778(X_7-X_1)+.1351(X_6-X_2)+.0625(X_5-X_3)$	.989
8	$.2476(X_8-X_1)+.1294(X_7-X_2)+.0713(X_6-X_3)+.0230(X_5-X_4)$	.989
9	$.2237(X_9-X_1)+.1233(X_8-X_2)+.0751(X_7-X_3)+.0360(X_6-X_4)$	.989
10	$.2044(X_{10}-X_1)+.1172(X_9-X_2)+.0763(X_8-X_3)+.0436(X_7-X_4)+.0142(X_6-X_5)$	.990

Tabel pärineb teosest [1], lk. 407.

Tabelites 6.6, 6.7 ja 6.8 esitatud hinnangud on kõik praktiliseks kasutamiseks küllalt efektiivsed, kusjuures erinevused efektiivsuses on väheolulised.

Näide 6.6. Olgu antud väljavõte

0,72; 0,73; 0,75; 0,75; 0,77.

Leida hinnang standardhälbele σ .

<u>Lahendus</u>. Leiame parima lineaarse hinnangu. Kasutame selleks tabelit 6.8:

$$\sigma \approx 0{,}3724(0{,}77-0{,}72) + 0{,}1352(0{,}75-0{,}73) = 0{,}0213 .$$

§ 3. NORMAALJAOTUSE PARAMEETRITE HINNANGUD PROTSENTIILIDE KAUDU.

Suuremahuliste väljavõtete korral on otstarbekas esitada variatsioonrea liikmete lineaarkombinatsioonidest moodustatud hinnangud protsentiilide kaudu.

Defineerime protsentiili: s-protsentiiliks nimetatakse variatsioonrea niisugust liiget, millest vasakule jääb (ligikaudu) s % variatsioonrea liikmetest, paremale (ligikaudu) (100-s) % variatsioonrea liikmetest. Seos on üldiselt ligikaudne, kuid enamasti leidub üks variatsioonrea liige, mis seda nõuet parimini rahuldab, ning see ongi otsitavaks protsentiiliks.

Olgu näiteks väljavõtte maht $n = 400$. Siis 25-protsentiiliks on liige järjekorranumbriga 100 (x_{100}); sellest jääb vasakule 99 liiget, s. o. 24,75 %, paremale aga 300, s. o. 75 %. Kui loeksime 25-protsentiiliks 101. liikme, saaksime - vasakul 100, s. o. 25 %; paremal 299, s. o. 74,75 % kõigist liikmetest. Järelikult on võimalik mõlemat võimalust kasutada ning 25-protsentiil ei ole üheselt määratud.

Kui aga väljavõtte mahtu pisut muuta, saame üheselt määratud protsentiilid (näiteks n=401 korral on 25-protsentiiliks element nr. 101 - vasemal 100, paremal 300 indiviidi).

Tabeleis 6.9 - 6.11 on esitatud normaaljaotuse keskväärtuse ja standardhälbe hinnangud protsentiilide kaudu.

Tabel 6.9.

Normaaljaotuse $X \sim N(m, \sigma)$ keskväärtuse m hinnangud protsentiilide kaudu.

n	hinnang $\hat{m}$	e
1	P_{50}	.64
2	$.5(P_{25} + P_{75})$	.81
3	$.3333(P_{17} + P_{50} + P_{83})$	.88
4	$.25(P_{12.5} + P_{37.5} + P_{62.5} + P_{87.5})$	.91
5	$.20(P_{10} + P_{30} + P_{50} + P_{70} + P_{90})$	.93
...	. . . .	...
10	$.10(P_{05} + P_{15} + P_{25} + P_{35} + P_{45} + P_{55} + P_{65} + P_{75} + P_{85} + P_{95})$	.97

Tabel 6.10.

Normaaljaotuse $X \sim N(m, \sigma)$ standardhälbe σ hinnangud protsentiilide kaudu.

n	hinnang $\hat{\sigma}$	e
2	$.3388(P_{93} - P_{07})$	.65
4	$.1714(P_{97} + P_{85} - P_{15} - P_{03})$	.80
6	$.1180(P_{98} + P_{91} + P_{80} - P_{20} - P_{09} - P_{02})$	.87
8	$.0935(P_{98} + P_{93} + P_{86} + P_{77} - P_{23} - P_{14} - P_{07} - P_{02})$	.90
10	$.0739(P_{98.5} + P_{95} + P_{90} + P_{84} + P_{75} - P_{25} - P_{16} - P_{10} - P_{05} - P_{01.5})$	.92

Tabelid pärinevad teosest [1], lk. 404.

Tabelis 6.11 on antud valemid keskväärtuse ja standardhälbe hindamiseks samade protsentiilide kaudu; hinnangueeskirjad tulevad järgmised:

$$m \approx \frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{2r} x_{i_j} ,$$

kus x_{i_j} on sobivalt valitud protsentiilid,

$$\sigma \approx K\left(\sum_{j=r+1}^{2r} x_{i_j} - \sum_{j=1}^{r} x_{i_j}\right) ,$$

kus K on antud tabeli viimases veerus.

Näide 6.7.

Olgu antud väljavõte mahuga $n=50$. Keskväärtuse hinnangu võime valida näiteks kujul 4 tabelist 6.9; $P_{12,5} \approx x_6$; $P_{37,5} \approx x_{19}$; $P_{62,5} \approx x_{32}$ ja $P_{87,5} \approx x_{45}$ (toodud protsentiilid paiknevad sümmeetriliselt variatsioonrea keskpaiga suhtes). Seega saame:

$$m \approx 0,25(x_6 + x_{19} + x_{32} + x_{45}) .$$

Tabel 6.11.

Normaaljaotuse $X \sim N(m, \sigma)$ parameetrite m ja σ hinnangud protsentiilide kaudu ja nende hinnangute efektiivsus.

n	hinnangus kasutatavad protsentiilid	$e(\tilde{m})$	$e(\tilde{\sigma})$	K
2	15, 85	.73	.56	.4824
4	05, 30, 70, 95	.80	.74	.2305
6	05, 15, 40, 60, 85, 95	.89	.80	.1704
8	03, 10, 25, 45, 55, 75, 90, 97	.90	.86	.1262
10	03, 10, 20, 30, 50, 50, 70, 80, 90, 97	.94	.87	.1104

Tabel pärineb teosest [1], lk. 404.

Näide 6.8. Sama väljavõtte mahu korral võime standardhälbe hinnangu valida tabelist 6.10, näiteks nr. 8; leiame protsentiilid:

$P_{02} = x_2$ (vasakule jääb 1 element, s. o. 2 %),

$P_{07} = x_4$ (vasakule jääb 3 elementi, s. o. 6 %; paremale - 46, s. o. 92 %),

$P_{14} = x_8$ (vasakule jääb 7 elementi, s. o. 14 %),

$P_{23} = x_{12}$ (vasakule jääb 11 elementi, s. o. 22 %).

Ülejäänud protsentiilid määrame sümmeetria põhjal:

$$P_{98} = x_{49};\ P_{93} = x_{47};\ P_{86} = x_{43};\ P_{77} = x_{39};$$

kokkuvõttes

$$\sigma \approx 0,0935(x_{49}+ x_{47}+x_{43}+ x_{39}- x_{12}- x_8- x_4- x_2) .$$

Näide 6.9. Leida keskväärtuse ja standardhälbe hinnangud väljavõtte põhjal, mille maht on 300.

Kasutame selleks tabelit 6.11, kust valime hinnangu 6. Arvutame summad:

$$S_1 = x_{15} + x_{45}+ x_{120}; \quad S_2 = x_{181} + x_{256} + x_{286} ;$$

hinnanguteks saame:

$$m \approx \frac{1}{6}(S_1+S_2) ; \qquad \sigma \approx 0,1704(S_2-S_1) .$$

Siinjuures on keskväärtuse hinnangu täpsus sama suur kui aritmeetilisel keskmisel, mis arvutatud 0,89.300=267 indiviidi põhjal (juhuslik valik samast väljavõttest), standardhälbe täpsus aga suurem kui 0,8.300 = 240 indiviidi põhjal arvutatud suurusel $s = \sqrt{s^2}$. Toodud hinnangute leidmiseks kulus aga kokku kuus liitmis-lahutamis- ja kaks korrutamistehet, klassikalisel viisil aga kulunuks üle 500 liitmistehte, 240 ruutimist, kaks jagamist ja üks juurimine.

§ 4. NORMAALJAOTUSE KESKVÄÄRTUSE USALDUSPIIRIDE LIHTSUSTATUD HINNANGUD.

Kasutades väljavõtte variatsioonrida, võib leida keskväärtusele ka usalduspiiride hinnangud, ilma, et selleks oleks tarvis hinnata standardhälvet σ ; vastavad kordajad leiame nn. τ -tabelist (vt. tabelid 6.12 ja 6.13).

Ühepoolse alumise $(1-\alpha)$-usalduspiiri $\underline{m}$

$$P(\underline{m} < m) = 1 - \alpha$$

leiame valemist

$$\underline{m} = \bar{x} - \omega p_{\alpha};$$

ühepoolse ülemise $(1-\alpha)$-usalduspiiri $\bar{m}$

$$P(m < \bar{m}) = 1 - \alpha$$

vastavast seosest

$$\bar{m} = \bar{x} + \omega p_{\alpha}.$$

Kahepoolsete usalduspiiride jaoks usaldusnivooga $1-\alpha$ saame vastavalt seosed

$$\underline{m}, \bar{m} = \bar{x} \pm \omega p_{\alpha}.$$

Suurused $p_{\alpha}, p_{\frac{\alpha}{2}}$ leiame tabelist 4.12, kus on antud juhusliku suuruse $\frac{\bar{x}}{\omega_n}$ täiendkvantiilid vastavalt α väärtustele 0,0005 kuni 0,05 (ehk γ-kvantiilid vastavalt γ väärtustele 0,95 kuni 0,9995). Siin on lähtesuuruseks normaaljaotusega N(0,1) juhuslik suurus X; $\omega_n = X_n - X_1$ on variatsiooniulatus n-indiviidise väljavõtte puhul.

Tabel 6.12. τ_1-jaotus.

Juhusliku suuruse $\frac{\bar{x}}{X_n - X_1}$ täiendkvantiilid,

$X \sim N(0,1)$ $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum X_i$, $X_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$, $X_1 = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.

n \ α	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
2	3.175	6.353	15.910	31.828	159.16	318.31
3	.885	1.304	2.111	3.008	6.77	9.58
4	.529	.717	1.023	1.316	2.29	2.85
5	.388	.507	.685	.843	1.32	1.58
6	.312	.399	.523	.628	.92	1.07
7	.263	.333	.429	.507	.71	.82
8	.230	.288	.366	.429	.59	.67
9	.205	.255	.322	.374	.50	.57
10	.186	.230	.288	.333	.44	.50
11	.170	.210	.262	.302	.40	.44
12	.158	.194	.241	.277	.36	.40
13	.147	.181	.224	.256	.33	.37
14	.138	.170	.209	.239	.31	.34
15	.131	.160	.197	.224	.29	.32
16	.124	.151	.186	.212	.27	.30
17	.118	.144	.177	.201	.26	.28
18	.113	.137	.168	.191	.24	.26
19	.108	.131	.161	.182	.23	.25
20	.104	.126	.154	.175	.22	.24

Näide 6.10. Olgu antud väljavõte

0,72; 0,73; 0,75; 0,75; 0,77.

Nõutakse leida keskväärtuse m 95%-lised usalduspiirid.

Lahendus. $\omega = 0,05$;

$$\bar{x} = 0,75 + \frac{1}{5}(-0,03 - 0,02 + 0,02) = 0,744;$$

$$\tau_{5;0,975} = 0,507; \quad \text{seega} \quad \underline{m}, \bar{m} = 0,744 \pm 0,507 \cdot 0,05 =$$

$$= 0,744 \pm 0,025; \ \underline{m} = 0,719; \ \bar{m} = 0,760 .$$

Tabel pärineb teosest [1], lk.408.

Ülalesitatud arvutuseeskirja rakendamine nõuab mõnevõrra arvutustööd, sest on tarvis leida aritmeetiline keskmine $\bar{x}$ (n liitmist, üks jagamine). Hoopiski lihtsa hinnangu keskväärtuse usalduspiiridele võime saada, kasutades suuruse τ_2 jaotust (vt. tabel 4.13). Selleks tuleb leida vaid väljavõtte maksimaalne ja minimaalne element (ülejäänud elementide järjestamist variatsioonritta ei nõuta) ning nende abil leitava keskväärtuse ning selle usalduspiiride hinnangud. Tõsi küll, hinnangud ei ole efektiivsed, kuid on täiesti kasutatavad väikeste väljavõtete korral.

Usalduspiiride arvutuseeskirjad saame järgnevalt:

$$\underline{m} = \frac{1}{2}(X_1 + X_n) - \omega\mu_\alpha ,$$

$$\bar{m} = \frac{1}{2}(X_1 + X_n) + \omega\mu_\alpha ,$$

$$\underline{m},\bar{m} = \frac{1}{2}(X_1 + X_n) \pm\omega\mu_{\frac{\alpha}{2}} ,$$

kus arvud μ_α on juhusliku suuruse $\dfrac{X_1' + X_n'}{2\,\omega_n}$ α-täiendkvantiilid ($\alpha = 0,05 \ldots 0,005$) sõltuvalt väljavõtte mahust n ; lähteks on normaaljaotus $N(0,1)$.

Näide 6.11. Näitena leiame τ_2-jaotuse abil eelmises näites antud väljavõtte põhjal keskväärtuse 95%-lised usalduspiirid.

Lahendus. $m \approx \frac{1}{2}(0,72 + 0,77) = 0,745,$

$\omega = 0,05.$

Tabelist 4.13 saame

$$\mu_{5;0,975} = 0,52; \quad \text{seega}$$

$\underline{m}, \bar{m} = 0{,}745 \pm 0{,}05 \cdot 0{,}52 = 0{,}745 \pm 0{,}026$;

$\underline{m} = 0{,}719$; $\bar{m} = 0{,}771$.

Tabel 6.13. τ_2-jaotus.

Juhusliku suuruse $\frac{X_1 + X_n}{2(X_n - X_1)}$ täiendkvantiilid,

$X \sim N(0,1)$, $X_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$; $X_1 = \min\limits_{1 \leq i \leq n} X_i$.

n \ α	0,05	0,025	0,01	0,005
2	3.16	6.35	15.91	31.83
3	.90	1.30	2.11	3.02
4	.55	.74	1.04	1.37
5	.42	.52	.71	.85
6	.35	.43	.56	.66
7	.30	.37	.47	.55
8	.26	.33	.42	.47
9	.24	.30	.38	.42
10	.22	.27	.35	.39

Tabel pärineb teosest [1], lk. 409.

§ 5. MEDIAANI USALDUSPIIRID.

Eeldame, et X on normaaljaotusega juhuslik suurus, $X \sim N(m,1)$. Siis sobib keskväärtuse hinnanguks ka mediaan, nagu nägime paragrahvis 1. Mediaani usalduspiiride arvutamisel ei saa aga kasutada tavalist t-testile baseeruvat metoodikat, kuna see hinnang ei ole efektiivne (standardhälve on suurem kui $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$). Mediaani usalduspiiride (normaaljaotusega N(0,1) juhusliku suuruse puhul) arvutamisel on otstarbekas kasutada mediaani täiendkvantiilide tabelit, mille järgnevas esitame (vt. tabel 6.14).

Tabel 6.14.

Normaaljaotusega N(0,1) juhusliku suuruse n-indiviidise väljavõtte mediaani täiendkvantiilid μ_α $(P(X > \mu_\alpha) = \alpha)$; (α on antud protsentides).

n \ α	40%	25%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,25%	0,1%	0,05%
1	0,253	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	2,807	1,090	3,291
2	179	477	0,906	163	386	1,645	1,821	1,985	2,185	2,327
3	169	450	857	101	315	564	735	893	089	227
4	138	368	699	0,898	071	273	411	539	1,696	1,808
5	135	360	685	881	051	250	386	513	669	78[illegible]
6	0,117	0,312	0,593	0,762	0,909	1,080	1,197	1,306	1,440	1,535
7	116	309	587	754	900	070	187	295	428	523
8	104	276	525	674	804	0,956	060	156	274	358
9	103	274	522	670	799	950	054	149	267	351
10	094	250	476	611	729	866	0,960	047	154	230
11	0,094	0,249	0,474	0,609	0,726	0,863	0,957	1,044	1,151	1,227
12	087	231	439	564	672	799	885	0,965	064	134
13	086	230	438	562	670	796	883	963	061	131
14	081	215	409	525	627	745	825	900	0,992	057
15	081	215	408	524	625	743	823	898	990	055
16	0,076	0,202	0,385	0,494	0,589	0,700	0,776	0,846	0,933	0,994
17	076	202	384	493	588	699	775	845	931	992
18	072	191	364	468	558	663	735	801	883	941
19	072	191	364	467	557	662	734	800	881	939
20	068	182	347	445	531	631	699	763	840	895
21	0,068	0,182	0,347	0,445	0,531	0,630	0,698	0,762	0,839	0,894

Tabel pärineb teosest [5], lk. 281.

Suuremate kui 21-indiviidiste väljavõtete puhul saab leida täiendkvantiilid järgmiste asümptootiliste valemite järgi:

$$q_{\alpha;21} = \sqrt{\frac{85}{8l+5}}\, q_{\alpha;20}\,; \quad q_{\alpha;21+1} = \sqrt{\frac{85}{8l+5}}\, q_{\alpha;21}\,.$$

Arvutuste lihtsustamiseks esitame teguri $\sqrt{\frac{85}{8l+5}}$ väärtused tabelina (vt. tabel 6.15).

Tabel 6.15.

Teguri $\sqrt{\frac{85}{8l+5}}$ väärtused.

l	$\sqrt{\frac{85}{8l+5}}$	l	$\sqrt{\frac{85}{8l+5}}$	l	$\sqrt{\frac{85}{8l+5}}$	l	$\sqrt{\frac{85}{8l+5}}$	l	$\sqrt{\frac{85}{8l+5}}$
10	1,0000	30	0,5890	50	0,4581	70	0,3879	90	0,3424
11	0,9560	31	5796	51	4537	71	3852	91	3405
12	9174	32	5707	52	4493	72	3825	92	3387
13	8831	33	5621	53	4451	73	3799	93	3369
14	8523	34	5539	54	4410	74	3773	94	3351
15	0,8246	35	0,5461	55	0,4370	75	0,3748	95	0,3333
16	7994	36	5386	56	4332	76	3724	96	3316
17	7764	37	5314	57	4294	77	3700	97	3299
18	7553	38	5245	58	4257	78	3676	98	3282
19	7358	39	5178	59	4221	79	3653	99	3266
20	0,7177	40	0,5114	60	0,4186	80	0,3630	100	0,3249
21	7009	41	5052	61	4152	81	3608	120	2968
22	6853	42	4993	62	4119	82	3586	150	2656
23	6706	43	4935	63	4086	83	3564	200	2301
24	6569	44	4879	64	4055	84	3543	240	2101
25	0,6439	45	0,4826	65	0,4024	85	0,3523	300	0,1880
26	6317	46	4774	66	3993	86	3502	400	1629
27	6202	47	4723	67	3964	87	3482	600	1330
28	6092	48	4674	68	3935	88	3462	1200	0941
29	5989	49	4627	69	3906	89	3443		

Tabel pärineb teosest [5], lk. 281.

Mediaani usalduspiiride arvutamisel kasutame jaotuse sümmeetrilisust. Seetõttu kahepoolsete $(1-\alpha)$-usalduspiiride väärtusteks saame $\pm q_{\alpha/2}$.

Jaotuse $N(m, \sigma)$ korral on mediaani usalduspiirideks

$$m \mp q_{\alpha/2}\sigma ,$$

kus $q_{\alpha/2}$ on leitud tabelist 6.14; m ja σ on normaaljaotuse parameetrid, mida võib vajaduse korral asendada vastavate hinnangutega (vt. §§ 1-4).

Praktiliseks tööks on veelgi mugavam kasutada niisugust mediaani usalduspiiride tabelit, kus usalduspiirid on antud variatsioonrea liikmete kaudu. Niisugune on tabel 6.16, kus vastavalt väljavõtte mahule n antakse alumisele (kahepoolsele) 95%- ja 99%-lisele usalduspiirile vastav variatsioonrea liikme number k. Mediaani usalduspiirideks on seega variatsioonrea liikmed x_k ja x_{n+1-k}.

Näide 6.12. Olgu antud väljavõte:

1,70; 1,82; 1,85; 1,87; 1,88; 1,90; 1,91; 1,92; 1,93; 1.94; 1,97; 1,98; 2,05.

Leida mediaan ja selle 95%-lised usalduspiirid.

Lahendus. Kuna $n=14$, siis mediaaniks on $\frac{1}{2}(x_7+x_8) = 1,915$. Tabelist 6.16 saame, et $k = 4$; $n+1-k=11$; seega on mediaani 95%-listeks usalduspiirideks väärtused 1,87 ja 1,95.

Tabel 6.16.

Mediaani 95%-lised ja 99%-lised usalduspiirid variatsioonrea liikmete kaudu.

n	k	$\alpha \leq .05$	k	$\alpha \leq .01$	n	k	$\alpha \leq .05$	k	$\alpha \leq .01$
6	1	.031			36	12	.029	10	.004
7	1	.016			37	13	.047	11	.008
8	1	.008	1	.008	38	13	.034	11	.005
9	2	.039	1	.004	39	13	.024	12	.009
10	2	.021	1	.002	40	14	.038	12	.006
11	2	.012	1	.001	41	14	.028	12	.004
12	3	.039	2	.006	42	15	.044	13	.008
13	3	.022	2	.003	43	15	.032	13	.005
14	3	.013	2	.002	44	16	.049	14	.010
15	4	.035	3	.007	45	16	.036	14	.007
16	4	.021	3	.004	46	16	.026	14	.005
17	5	.049	3	.002	47	17	.040	15	.008
18	5	.031	4	.008	48	17	.029	15	.006
19	5	.019	4	.004	49	18	.044	16	.009
20	6	.041	4	.003	50	18	.033	16	.007
21	6	.027	5	.007	51	19	.049	16	.005
22	6	.017	5	.004	52	19	.036	17	.008
23	7	.035	5	.003	53	19	.027	17	.005
24	7	.023	6	.007	54	20	.040	18	.009
25	8	.043	6	.004	55	20	.030	18	.006
26	8	.029	7	.009	56	21	.044	18	.005
27	8	.019	7	.006	57	21	.033	19	.008
28	9	.036	7	.004	58	22	.048	19	.005
29	9	.024	8	.008	59	22	.036	20	.009
30	10	.043	8	.005	60	22	.027	20	.006
31	10	.029	8	.003	61	23	.040	21	.010
32	10	.020	9	.007	62	23	.030	21	.007
33	11	.035	9	.005	63	24	.043	21	.005
34	11	.024	10	.009	64	24	.033	22	.008
35	12	.041	10	.006	65	25	.046	22	.006

Tabel pärineb teosest [1], lk. 462.

§ 6. KESKVÄÄRTUSE KOHTA KÄIVATE HÜPOTEESIDE KONTROLLIMINE.

1. Keskväärtuse võrdlemine konstandiga.

Sageli tekib vajadus kontrollida hüpoteese

$$H_1: m \neq m_0 ,$$

$$H_2: m < m_0 ,$$

$$H_3: m > m_0 ,$$

kus m on vastava juhusliku suuruse keskväärtus, m_0 aga ülesandega antud parameeter (näiteks $m_0 = 0$).

Üldtuntud meetod selliste hüpoteeside kontrollimiseks (olulisuse nivool α) tugineb $(1-\alpha)$-usalduspiiride arvutamisele (vt. [2], [3]).

Väikeste väljavõtete puhul on aga otstarbekas kasutada võrdlusstatistikuks lihtsalt üht variatsioonrea liiget, sest sel juhul ei ole tarvis usalduspiire arvutada.

Tabelis 6.17 esitame hüpoteeside $H_1 - H_3$ kontrollimise eeskirjad vastavalt etteantud olulisuse nivoole väikeste väljavõtete ($n \leq 10$) jaoks.

Näide 6.13. Olgu antud variatsioonrida:

3,8; 3,9; 4,0; 4,2; 4,3; 4,4; 4,5; 4,6; 4,8; 4,9.

Nõutakse kontrollida ühepoolset hüpoteesi $H_3: m > 4,0$ olulisuse nivooga 0,05.

Lahendus. Tabelist 6.17 näeme, et kuna $n = 10$, siis võime hüpoteesi tõestatuks lugeda olulisuse nivooga 0,05 parajasti siis, kui

$$\min\left(X_4, \tfrac{1}{2}(X_1 + X_6)\right) > 4,0 .$$

Tabel 6.17.

Kombineeritud statistikud hüpoteeside $m \neq m_o$, $m < m_o$ ja $m > m_o$ kontrollimiseks väikeste väljavõtete põhjal ($n \leq 10$) koos olulisuse nivoodega.

Kriteeriumi olulisuse nivoo α			Hüpoteesid	
			Kahepoolne: H_1: $m \neq \mu_0$	
n	ühepoolne	kahepoolne	Ühepoolne: H_2: $m < \mu_0$	Ühepoolne: H_3: $m > \mu_0$
4	6.2%	12.5%	$X_4 < \mu_0$	$X_1 > \mu_0$
5	6.2%	12.5%	$\frac{1}{2}(X_4 + X_5) < \mu_0$	$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) > \mu_0$
	3.1%	6.2%	$X_5 < \mu_0$	$X_1 > \mu_0$
6	4.7%	9.4%	$\max [X_5, \frac{1}{2}(X_4 + X_6)] < \mu_0$	$\min [X_2, \frac{1}{2}(X_1 + X_3)] > \mu_0$
	3.1%	6.2%	$\frac{1}{2}(X_5 + X_6) < \mu_0$	$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) > \mu_0$
	1.6%	3.1%	$X_6 < \mu_0$	$X_1 > \mu_0$
7	5.5%	10.9%	$\max [X_5, \frac{1}{2}(X_4 + X_7)] < \mu_0$	$\min [X_3, \frac{1}{2}(X_1 + X_4)] > \mu_0$
	2.3%	4.7%	$\max [X_6, \frac{1}{2}(X_5 + X_7)] < \mu_0$	$\min [X_2, \frac{1}{2}(X_1 + X_3)] > \mu_0$
	1.6%	3.1%	$\frac{1}{2}(X_6 + X_7) < \mu_0$	$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) > \mu_0$
	0.8%	1.6%	$X_7 < \mu_0$	$X_1 > \mu_0$
8	4.3%	8.6%	$\max [X_6, \frac{1}{2}(X_4 + X_8)] < \mu_0$	$\min [X_3, \frac{1}{2}(X_1 + X_5)] > \mu_0$
	2.7%	5.5%	$\max [X_6, \frac{1}{2}(X_5 + X_8)] < \mu_0$	$\min [X_3, \frac{1}{2}(X_1 + X_4)] > \mu_0$
	1.2%	2.3%	$\max [X_7, \frac{1}{2}(X_6 + X_8)] < \mu_0$	$\min [X_2, \frac{1}{2}(X_1 + X_3)] > \mu_0$
	0.8%	1.6%	$\frac{1}{2}(X_7 + X_8) < \mu_0$	$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) > \mu_0$
	0.4%	0.8%	$X_8 < \mu_0$	$X_1 > \mu_0$
9	5.1%	10.2%	$\max [X_6, \frac{1}{2}(X_4 + X_9)] < \mu_0$	$\min [X_4, \frac{1}{2}(X_1 + X_6)] > \mu_0$
	2.2%	4.3%	$\max [X_7, \frac{1}{2}(X_5 + X_9)] < \mu_0$	$\min [X_3, \frac{1}{2}(X_1 + X_5)] > \mu_0$
	1.0%	2.0%	$\max [X_8, \frac{1}{2}(X_5 + X_9)] < \mu_0$	$\min [X_2, \frac{1}{2}(X_1 + X_5)] > \mu_0$
	0.6%	1.2%	$\max [X_8, \frac{1}{2}(X_7 + X_9)] < \mu_0$	$\min [X_2, \frac{1}{2}(X_1 + X_3)] > \mu_0$
	0.4%	0.8%	$\frac{1}{2}(X_8 + X_9) < \mu_0$	$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) > \mu_0$
10	5.6%	11.1%	$\max [X_6, \frac{1}{2}(X_4 + X_{10})] < \mu_0$	$\min [X_5, \frac{1}{2}(X_1 + X_7)] > \mu_0$
	2.5%	5.1%	$\max [X_7, \frac{1}{2}(X_5 + X_{10})] < \mu_0$	$\min [X_4, \frac{1}{2}(X_1 + X_6)] > \mu_0$
	1.1%	2.1%	$\max [X_8, \frac{1}{2}(X_6 + X_{10})] < \mu_0$	$\min [X_3, \frac{1}{2}(X_1 + X_5)] > \mu_0$
	0.5%	1.0%	$\max [X_9, \frac{1}{2}(X_6 + X_{10})] < \mu_0$	$\min [X_2, \frac{1}{2}(X_1 + X_5)] > \mu_0$

Tabel pärineb teosest [1], lk. 463.

Käesoleval juhul

$$X_4 = 4{,}2 \ ;$$

$$\tfrac{1}{2}(X_1 + X_6) = \tfrac{1}{2}(3{,}8 + 4{,}4) = 4{,}1 \ ;$$

$$\min(4{,}2;\ 4{,}1) = 4{,}1;\ 4{,}1 > 4{,}0;$$

järelikult võime hüpoteesi H_3 lugeda õigeks, kusjuures olulisuse nivooks on tabeli 6.17 kohaselt koguni 0,025.

2. <u>Keskväärtuste lihtsustatud võrdlemine (2 normaaljaotust).</u>

Olgu X_1 ja X_2 normaalsed juhuslikud suurused ($X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$; $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$) . Mõlemast on antud väljavõte mahuga n . Nõutakse kontrollida olulisuse nivooga α järgmisi hüpoteese (vt. [2], [3]) :

$$H_1:\ m_1 \neq m_2 \ ;$$
$$H_2:\ m_1 > m_2 \ ;$$
$$H_3:\ m_1 < m_2 \ .$$

Ka seda on võimalik teha ilma dispersioonihinnanguid s_1^2 , s_2^2 ja s_d^2 leidmata, kasutades vaid väljavõtete variatsiooniulatusi $\omega_n^{(1)}$ ja $\omega_n^{(2)}$. Selleks on tabelis 6.18 antud juhusliku suuruse $\tau_d = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(\omega_n^{(1)} + \omega_n^{(2)})}$ jaotuse α-täiendkvantiilid p_α , kus lähtesuurused X_1 ja X_2 on eeldatud sõltumatutena normaaljaotustega $X_1, X_2 \sim N(0,1)$.

Ülaltoodud hüpoteeside kontrollimiseks saame järgmised eeskirjad.

Arvutame väljavõtete põhjal suuruse $K^{(n)} = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\frac{1}{2}(\omega_n^{(1)} + \omega_n^{(2)})}$.

Kui leiab aset võrratus

$$|K^{(n)}| > p_{\alpha/2} ,$$

võime vastu võtta hüpoteesi H_1 . Kui aga

$$K^{(n)} > p_\alpha ,$$

võtame vastu hüpoteesi H_2 . Juhul

$$K^{(n)} < 0 , \quad |K^{(n)}| > p_\alpha$$

võtame vastu hüpoteesi H_3 .

<u>Näide 6.14</u>. Olgu antud lisaks näites 6.10 esitatud väljavõttele veel väljavõte

0,75; 0,76; 0,77; 0,79; 0,81 .

Nõutakse kontrollida, kas need väljavõtted pärinevad erineva keskväärtusega üldkogumitest (olulisuse nivooks võtta 0,05).

<u>Lahendus</u>. Näite 6.10 lahenduse põhjal teame, et $\omega_1 = 0{,}05$; $\bar{x}_1 = 0{,}744$. Arvutame veel: $\omega_2 = 0{,}06$, $\bar{x}_2 = 0{,}776$. Leiame suhte $K^{(n)}$:

$$K^{(n)} = \frac{0{,}032}{0{,}055} = 0{,}582 .$$

Et kontrollimist vajas kahepoolne hüpotees (ülesande tingimustest ei olnud ette teada, kumb keskväärtus peaks suurem olema), siis valime tabelist $p_{5;0{,}025} = 0{,}613$.

Kuna $0{,}582 < 0{,}613$, siis peame vastu võtma nullhüpoteesi, mis väidab, et keskväärtused on samad, s. t. e i õ n n e s t u t õ e s t a d a 5 %-l i s e o l u l i s u s e n i v o o g a k e s k v ä ä r t u s t e e r i n e v u s t .

<u>Tabel 6.18.</u>

τ_α-jaotuse, s. t. juhusliku suuruse

$$K^{(n)} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}\left[(X_{1n}-X_{11})+(X_{2n}-X_{21})\right]}$$ α-täiendkvantiilid,

kus

$$X_1 \sim N(0,1); \quad X_2 \sim N(0,1), \quad \bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij};$$

$$X_{i1} = \min_{1 \leq j \leq n} X_{ij}, \quad X_{in} = \max_{1 \leq j \leq n} X_{ij} \qquad (i = 1,2).$$

$n_1=n_2$ \ α	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
2	2.322	3.427	5.553	7.916	17.81	25.23
3	.974	1.272	1.715	2.093	3.27	4.18
4	.644	.813	1.047	1.237	1.74	1.99
5	.493	.613	.772	.896	1.21	1.35
6	.405	.499	.621	.714	.94	1.03
7	.347	.426	.525	.600	.77	.85
8	.306	.373	.459	.521	.67	.73
9	.275	.334	.409	.464	.59	.64
10	.250	.304	.371	.419	.53	.58
11	.233	.280	.340	.384	.48	.52
12	.214	.260	.315	.355	.44	.48
13	.201	.243	.294	.331	.41	.45
14	.189	.228	.276	.311	.39	.42
15	.179	.216	.261	.293	.36	.39
16	.170	.205	.247	.278	.34	.37
17	.162	.195	.236	.264	.33	.35
18	.155	.187	.225	.252	.31	.34
19	.149	.179	.216	.242	.30	.32
20	.143	.172	.207	.232	.29	.31
	$-P_{05}$	$-P_{02.5}$	$-P_{01}$	$-P_{0.5}$	$-P_{0.1}$	$-P_{0.05}$

Tabel pärineb teosest [1], lk. 409.

3. Keskväärtuste võrdlemine erinevate väljavõttemahtude ja oluliselt erinevate dispersioonihinnangute puhul.

Meetod, mida kirjeldame käesolevas punktis, ei kuulu järskstatistikute hulka. Ometi sobib teda lihtsustatud statistikuna vaadelda, kuna tema kasutamine on mõnevõrra lihtsam traditsioonilisest meetodist.

On hästi teada, et klassikaline t-test võimaldab võrrelda ainult kas võrdsete mahtude või lähedaste dispersioonidega väljavõtteid (vt. [2], [3]). Praktikas esineb juhtumeid, kus tekib vajadus võrrelda keskväärtusi, ilma et kumbki ülalmärgitud eeldustest oleks täidetud. Sel juhul kasutatakse usalduspiiride meetodit (vt. [2]), mis aga on töömahukam ja vähemtundlik (väiksema võimsusega).

Osutub, et ülalsõnastatud ülesande lahendus sõltub niihästi kummagi väljavõtte mahust kui ka dispersioonihinnangute suhtest. On arvutatud välja juhusliku suuruse $\dfrac{d}{\sqrt{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}}$ jaotus (nullhüpoteesi H_0: $m_1 = m_2$ puhul) sõltuvalt kõigist ülalloetletud tegureist. Suhte $\dfrac{d}{\sqrt{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}}$ täiendkvantiilid q_α α väärtustel 0,5%, 1 %, 2,5 %, 5 % on esitatud tabelis 6.19. Hüpoteesi

$$H_1: m_1 \neq m_2$$

saame vastu võtta olulisuse nivooga α juhul kui arvutatud statistik $\left|\dfrac{d}{\sqrt{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}}\right| > q_{\alpha/2}$ hüpoteesid

$$H_2: m_1 > m_2$$

ja

$$H_3:\ m_2 > m_1$$

võtame vastu olulisuse nivooga α juhul, kui $\dfrac{d}{\sqrt{\lambda_1 s_1^2+\lambda_2 s_2^2}} >$ $> q_\alpha$, kus $d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ hüpoteeside H_1 ja H_2, $d = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ hüpoteesi H_3 puhul.

Näide 6.15. Olgu antud kaks väljavõtet järgmiste parameetritega:

$$n_1 = 20\ ; \quad n_2 = 10\ ;$$
$$s_1 = 1\ ; \quad s_2 = 4{,}5;$$
$$\bar{x}_1 = 0\ ; \quad \bar{x}_2 = 1{,}52\ .$$

Nõutakse kontrollida hüpoteesi

$$H_1:\ m_1 \neq m_2$$

olulisuse nivooga $\alpha = 0{,}05$.

Lahendus. Keskväärtuste võrdlemiseks tuleb meil kasutada keskväärtuse dispersioonihinnanguid $\frac{1}{n_1} s_1^2$ ja $\frac{1}{n_2} s_2^2$; et rakendada tabelit 6.19, võtame $\lambda_1 = \frac{1}{n_1}$; $\lambda_2 = \frac{1}{n_2}$. Saame seega

$$\lambda_1 = \frac{1}{20}\ ;\ \lambda_2 = \frac{1}{10}\ ;\ \frac{\lambda_1 s_1^2}{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2} = \frac{1\cdot\frac{1}{20}}{1\cdot\frac{1}{20} + 4{,}5\cdot\frac{1}{10}} = 0{,}1,$$

$$\sqrt{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}707\ ,$$

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}} = \frac{1{,}52}{0{,}707} = 2{,}15\ .$$

Tabel 6.19.

Suhte $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}}$ täiendkvantiilid; $\alpha = 0,005$.

ν_2	ν_1 \ $\frac{\lambda_1 s_1^2}{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
10	10	3,17	3,08	3,00	2,90	2,82	2,79	2,82	2,90	3,00	3,08	3,17
	12	3,17	3,08	3,00	2,91	2,82	2,78	2,79	2,84	2,91	2,98	3,05
	15	3,17	3,08	3,00	2,91	2,82	2,77	2,76	2,78	2,83	2,89	2,95
	20	3,17	3,08	3,00	2,91	2,82	2,76	2,73	2,74	2,76	2,80	2,85
	30	3,17	3,08	3,00	2,91	2,82	2,75	2,71	2,69	2,70	2,72	2,75
	∞	3,17	3,08	2,99	2,91	2,82	2,74	2,67	2,63	2,60	2,58	2,58
12	10	3,05	2,98	2,91	2,84	2,79	2,78	2,82	2,91	3,00	3,08	3,17
	12	3,05	2,98	2,91	2,84	2,78	2,76	2,78	2,84	2,91	2,98	3,05
	15	3,05	2,98	2,91	2,84	2,78	2,75	2,75	2,78	2,83	2,89	2,95
	20	3,05	2,98	2,91	2,84	2,78	2,74	2,72	2,73	2,76	2,80	2,85
	30	3,05	2,98	2,91	2,84	2,77	2,73	2,70	2,69	2,70	2,72	2,75
	∞	3,05	2,98	2,91	2,84	2,77	2,71	2,65	2,62	2,59	2,58	2,58
15	10	2,95	2,89	2,83	2,78	2,76	2,77	2,82	2,91	3,00	3,08	3,17
	12	2,95	2,89	2,83	2,78	2,75	2,75	2,78	2,84	2,91	2,98	3,05
	15	2,95	2,89	2,83	2,78	2,74	2,73	2,74	2,78	2,83	2,89	2,95
	20	2,95	2,89	2,83	2,78	2,74	2,71	2,71	2,73	2,76	2,80	2,85
	30	2,95	2,89	2,83	2,78	2,73	2,70	2,68	2,68	2,70	2,72	2,75
	∞	2,95	2,89	2,83	2,77	2,72	2,67	2,64	2,61	2,59	2,58	2,58
20	10	2,85	2,80	2,76	2,74	2,73	2,76	2,82	2,91	3,00	3,08	3,17
	12	2,85	2,80	2,76	2,73	2,72	2,74	2,78	2,84	2,91	2,98	3,05
	15	2,85	2,80	2,76	2,73	2,71	2,71	2,74	2,78	2,83	2,89	2,95
	20	2,85	2,80	2,76	2,73	2,70	2,70	2,70	2,73	2,76	2,80	2,85
	30	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69	2,68	2,67	2,68	2,70	2,72	2,75
	∞	2,85	2,80	2,76	2,72	2,68	2,65	2,62	2,60	2,59	2,58	2,58
30	10	2,75	2,72	2,70	2,69	2,71	2,75	2,82	2,91	3,00	3,08	3,17
	12	2,75	2,72	2,70	2,69	2,70	2,73	2,77	2,84	2,91	2,98	3,05
	15	2,75	2,72	2,70	2,68	2,68	2,70	2,73	2,78	2,83	2,89	2,95
	20	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67	2,68	2,69	2,72	2,76	2,80	2,85
	30	2,75	2,72	2,69	2,67	2,66	2,66	2,66	2,67	2,69	2,72	2,75
	∞	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,59	2,58	2,58	2,58
∞	10	2,58	2,58	2,60	2,63	2,67	2,74	2,82	2,91	2,99	3,08	3,17
	12	2,58	2,58	2,59	2,62	2,65	2,71	2,77	2,84	2,91	2,98	3,05
	15	2,58	2,58	2,59	2,61	2,64	2,67	2,72	2,77	2,83	2,89	2,95
	20	2,58	2,58	2,59	2,60	2,62	2,65	2,68	2,72	2,76	2,80	2,85
	30	2,58	2,58	2,58	2,59	2,60	2,62	2,64	2,66	2,69	2,72	2,75
	∞	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58

Tabel pärineb teosest [5], lk. 306 - 309.

Tabel 6.19 (järg); $\alpha = 0,01$.

ν_2	ν_1 \ $\frac{\lambda_1 s_1^2}{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
10	10	2,76	2,70	2,63	2,56	2,51	2,50	2,51	2,56	2,63	2,70	2,76
	12	2,76	2,70	2,63	2,56	2,51	2,49	2,49	2,52	2,57	2,62	2,68
	15	2,76	2,70	2,63	2,56	2,51	2,48	2,47	2,48	2,52	2,56	2,60
	20	2,76	2,70	2,63	2,56	2,51	2,47	2,45	2,45	2,47	2,49	2,53
	30	2,76	2,70	2,63	2,56	2,50	2,46	2,43	2,42	2,42	2,44	2,46
	∞	2,76	2,70	2,63	2,56	2,50	2,44	2,40	2,36	2,34	2,33	2,33
12	10	2,68	2,62	2,57	2,52	2,49	2,49	2,51	2,56	2,63	2,70	2,76
	12	2,68	2,62	2,57	2,52	2,48	2,47	2,48	2,52	2,57	2,62	2,68
	15	2,68	2,62	2,57	2,52	2,48	2,46	2,46	2,48	2,52	2,56	2,60
	20	2,68	2,62	2,57	2,52	2,48	2,45	2,44	2,45	2,47	2,49	2,53
	30	2,68	2,62	2,57	2,52	2,47	2,44	2,42	2,41	2,42	2,44	2,46
	∞	2,68	2,62	2,57	2,51	2,46	2,42	2,38	2,36	2,34	2,33	2,33
15	10	2,60	2,56	2,52	2,48	2,47	2,48	2,51	2,56	2,63	2,70	2,76
	12	2,60	2,56	2,52	2,48	2,46	2,46	2,48	2,52	2,57	2,62	2,68
	15	2,60	2,56	2,51	2,48	2,45	2,45	2,45	2,48	2,51	2,56	2,60
	20	2,60	2,56	2,51	2,48	2,45	2,43	2,43	2,44	2,46	2,49	2,53
	30	2,60	2,56	2,51	2,47	2,44	2,42	2,41	2,41	2,42	2,44	2,46
	∞	2,60	2,56	2,51	2,47	2,43	2,40	2,37	2,35	2,34	2,33	2,33
20	10	2,53	2,49	2,47	2,45	2,45	2,47	2,51	2,56	2,63	2,70	2,76
	12	2,53	2,49	2,47	2,45	2,44	2,45	2,48	2,52	2,57	2,62	2,68
	15	2,53	2,49	2,46	2,44	2,43	2,43	2,45	2,48	2,51	2,56	2,60
	20	2,53	2,49	2,46	2,44	2,42	2,42	2,42	2,44	2,46	2,49	2,53
	30	2,53	2,49	2,46	2,44	2,42	2,40	2,40	2,40	2,42	2,43	2,46
	∞	2,53	2,49	2,46	2,43	2,40	2,38	2,36	2,34	2,33	2,33	2,33
30	10	2,46	2,44	2,42	2,42	2,43	2,46	2,50	2,56	2,63	2,70	2,76
	12	2,46	2,44	2,42	2,41	2,42	2,44	2,47	2,52	2,57	2,62	2,68
	15	2,46	2,44	2,42	2,41	2,41	2,42	2,44	2,47	2,51	2,56	2,60
	20	2,46	2,43	2,42	2,40	2,40	2,40	2,42	2,44	2,46	2,49	2,53
	30	2,46	2,43	2,42	2,40	2,39	2,39	2,39	2,40	2,42	2,43	2,46
	∞	2,46	2,43	2,41	2,39	2,37	2,36	2,35	2,34	2,33	2,33	2,33
∞	10	2,33	2,33	2,34	2,36	2,40	2,44	2,50	2,56	2,63	2,70	2,76
	12	2,33	2,33	2,34	2,36	2,38	2,42	2,46	2,51	2,57	2,62	2,68
	15	2,33	2,33	2,34	2,35	2,37	2,40	2,43	2,47	2,51	2,56	2,60
	20	2,33	2,33	2,33	2,34	2,36	2,38	2,40	2,43	2,46	2,49	2,53
	30	2,33	2,33	2,33	2,34	2,35	2,36	2,37	2,39	2,41	2,43	2,40
	∞	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33	2,33

Tabel 6.19 (järg); $\alpha = 0,025$.

$\frac{\lambda_1 s_1^2}{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}$ ν_2	ν_1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
8	8	2,31	2,25	2,20	2,14	2,10	2,08	2,10	2,14	2,20	2,25	2,31
	10	2,31	2,25	2,20	2,15	2,10	2,08	2,08	2,11	2,14	2,19	2,23
	12	2,31	2,25	2,20	2,15	2,10	2,07	2,07	2,08	2,11	2,14	2,18
	15	2,31	2,25	2,20	2,15	2,10	2,07	2,05	2,06	2,08	2,10	2,13
	20	2,31	2,25	2,20	2,15	2,10	2,06	2,04	2,04	2,05	2,07	2,09
	∞	2,31	2,25	2,20	2,14	2,09	2,05	2,01	1,99	1,97	1,96	1,96
10	8	2,23	2,19	2,14	2,11	2,08	2,08	2,10	2,15	2,20	2,25	2,31
	10	2,23	2,18	2,14	2,11	2,08	2,06	2,08	2,11	2,14	2,18	2,23
	12	2,23	2,18	2,14	2,10	2,07	2,06	2,06	2,08	2,11	2,14	2,18
	15	2,23	2,18	2,14	2,10	2,07	2,05	2,05	2,06	2,08	2,10	2,13
	20	2,23	2,18	2,14	2,10	2,07	2,05	2,04	2,04	2,05	2,06	2,09
	∞	2,23	2,18	2,14	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,97	1,96	1,96
12	8	2,18	2,14	2,11	2,08	2,07	2,07	2,10	2,15	2,20	2,25	2,31
	10	2,18	2,14	2,11	2,08	2,06	2,06	2,07	2,10	2,14	2,18	2,23
	12	2,18	2,14	2,11	2,08	2,06	2,05	2,06	2,08	2,11	2,14	2,18
	15	2,18	2,14	2,11	2,08	2,06	2,04	2,04	2,06	2,08	2,10	2,13
	20	2,18	2,14	2,11	2,08	2,05	2,04	2,03	2,03	2,05	2,06	2,09
	∞	2,18	2,14	2,11	2,07	2,04	2,02	1,99	1,98	1,97	1,96	1,96
15	8	2,13	2,10	2,08	2,06	2,05	2,07	2,10	2,15	2,20	2,25	2,31
	10	2,13	2,10	2,08	2,06	2,05	2,05	2,07	2,10	2,14	2,18	2,23
	12	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,04	2,06	2,08	2,11	2,14	2,18
	15	2,13	2,10	2,08	2,05	2,04	2,03	2,04	2,05	2,08	2,10	2,13
	20	2,13	2,10	2,08	2,05	2,04	2,03	2,03	2,03	2,05	2,06	2,09
	∞	2,13	2,10	2,07	2,05	2,02	2,00	1,99	1,97	1,97	1,96	1,96
20	8	2,09	2,07	2,05	2,04	2,04	2,06	2,10	2,15	2,20	2,25	2,31
	10	2,09	2,06	2,05	2,04	2,04	2,05	2,07	2,10	2,14	2,18	2,23
	12	2,09	2,06	2,05	2,03	2,03	2,04	2,05	2,08	2,11	2,14	2,18
	15	2,09	2,06	2,05	2,03	2,03	2,03	2,04	2,05	2,08	2,10	2,13
	20	2,09	2,06	2,05	2,03	2,02	2,02	2,02	2,03	2,05	2,06	2,09
	∞	2,09	2,06	2,04	2,02	2,01	1,99	1,98	1,97	1,96	1,96	1,96
∞	8	1,96	1,96	1,97	1,99	2,01	2,05	2,09	2,14	2,20	2,25	2,31
	10	1,96	1,96	1,97	1,98	2,00	2,03	2,06	2,10	2,14	2,18	2,23
	12	1,96	1,96	1,97	1,98	1,99	2,02	2,04	2,07	2,11	2,14	2,18
	15	1,96	1,96	1,97	1,97	1,99	2,00	2,02	2,05	2,07	2,10	2,13
	20	1,96	1,96	1,96	1,97	1,98	1,99	2,01	2,02	2,04	2,06	2,09
	∞	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96

Tabel 6.19 (järg); $\alpha = 0{,}05$.

$\frac{\lambda_1 s_1^2}{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2}$		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
v_2	v_1											
6	6	1,94	1,90	1,85	1,80	1,76	1,74	1,76	1,80	1,85	1,90	1,94
	8	1,94	1,90	1,85	1,80	1,76	1,73	1,74	1,76	1,79	1,82	1,86
	10	1,94	1,90	1,85	1,80	1,76	1,73	1,73	1,74	1,76	1,78	1,81
	15	1,94	1,90	1,85	1,80	1,76	1,73	1,71	1,71	1,72	1,73	1,75
	20	1,94	1,90	1,85	1,80	1,76	1,73	1,71	1,70	1,70	1,71	1,72
	∞	1,94	1,90	1,85	1,80	1,76	1,72	1,69	1,67	1,66	1,65	1,64
8	6	1,86	1,82	1,79	1,76	1,74	1,73	1,76	1,80	1,85	1,90	1,94
	8	1,86	1,82	1,79	1,76	1,73	1,73	1,73	1,76	1,79	1,82	1,86
	10	1,86	1,82	1,79	1,76	1,73	1,72	1,72	1,74	1,76	1,78	1,81
	15	1,86	1,82	1,79	1,76	1,73	1,71	1,71	1,71	1,72	1,73	1,75
	20	1,86	1,82	1,79	1,76	1,73	1,71	1,70	1,70	1,70	1,71	1,72
	∞	1,86	1,82	1,79	1,75	1,72	1,70	1,68	1,66	1,65	1,65	1,64
10	6	1,81	1,78	1,76	1,74	1,73	1,73	1,76	1,80	1,85	1,90	1,94
	8	1,81	1,78	1,76	1,74	1,72	1,72	1,73	1,76	1,79	1,82	1,86
	10	1,81	1,78	1,76	1,73	1,72	1,71	1,72	1,73	1,76	1,78	1,81
	15	1,81	1,78	1,76	1,73	1,72	1,70	1,70	1,71	1,72	1,73	1,75
	20	1,81	1,78	1,76	1,73	1,71	1,70	1,69	1,69	1,70	1,71	1,72
	∞	1,81	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69	1,67	1,66	1,65	1,65	1,64
15	6	1,75	1,73	1,72	1,71	1,71	1,73	1,76	1,80	1,85	1,90	1,94
	8	1,75	1,73	1,72	1,71	1,71	1,71	1,73	1,76	1,79	1,82	1,86
	10	1,75	1,73	1,72	1,71	1,70	1,70	1,72	1,73	1,76	1,78	1,81
	15	1,75	1,73	1,72	1,70	1,70	1,69	1,70	1,70	1,72	1,73	1,75
	20	1,75	1,73	1,72	1,70	1,69	1,69	1,69	1,69	1,70	1,71	1,72
	∞	1,75	1,73	1,72	1,70	1,68	1,67	1,66	1,65	1,65	1,65	1,64
20	6	1,72	1,71	1,70	1,70	1,71	1,73	1,76	1,80	1,85	1,90	1,94
	8	1,72	1,71	1,70	1,70	1,70	1,71	1,73	1,76	1,79	1,82	1,86
	10	1,72	1,71	1,70	1,69	1,69	1,70	1,71	1,73	1,76	1,78	1,81
	15	1,72	1,71	1,70	1,69	1,69	1,69	1,69	1,70	1,72	1,73	1,75
	20	1,72	1,71	1,70	1,69	1,68	1,68	1,68	1,69	1,70	1,71	1,72
	∞	1,72	1,71	1,70	1,68	1,67	1,66	1,66	1,65	1,65	1,65	1,64
∞	6	1,64	1,65	1,66	1,67	1,69	1,72	1,76	1,80	1,85	1,90	1,94
	8	1,64	1,65	1,65	1,66	1,68	1,70	1,72	1,75	1,79	1,82	1,86
	10	1,64	1,65	1,65	1,66	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	1,78	1,81
	15	1,64	1,65	1,65	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,72	1,73	1,75
	20	1,64	1,65	1,65	1,65	1,66	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72
	∞	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64	1,64

Võrdleme saadud väärtust tabelis 6.19 antud väärtustega. Kohalt $n_2 = 10$, $n_1 = 20$, $\frac{\lambda_1 s_1^2}{\lambda_1 s_1^2 + \lambda_2 s_2^2} = 0,1$ leiame, et $q_{\alpha/2} = q_{0,025} = 2,18 > 2,15$, seega ei saa me olulisuse nivooga 0,05 hüpoteesi H_1 vastu võtta. Vastu saaks selle aga võtta olulisuse nivooga $\alpha = 0,10$, sest $q_{0,05} = 1,78 < 2,15$.

§ 7. STANDARDHÄLVETE LIHTSUSTATUD VÕRDLEMINE (kaks normaaljaotust).

Olgu X_1 ja X_2 normaalsed juhuslikud suurused, $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$. Nõutakse kontrollida olulisuse nivooga α üht hüpoteesidest:

$$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 ;$$
$$H_2 : \sigma_1 > \sigma_2 ;$$
$$H_3 : \sigma_1 < \sigma_2 .$$

Ka neid hüpoteese on võimalik kontrollida ilma standardhälbe hinnanguid arvutamata, kasutades selleks vaid väljavõtete variatsiooniulatusi. Siinjuures võivad kasutatavate väljavõtete mahud n_1 ja n_2 olla erinevad.

Tabelis 6.20 on tabuleeritud F-suhte jaotuse kvantiilid. Nimetus F-suhe pärineb asjaolust, et selle statistiku kasutamise eesmärk on üpris sarnane F-testi kasutamisele (vt. [2], [3]). Tabuleeritud on niisiis suhte $\frac{\omega_{n1}}{\omega_{n2}}$ α- kvantiilid x_α, kus ω_{n1} ja ω_{n2} on sõltumatute juhuslike suuruste $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ vastavalt n_1- ja n_2-indiviidiliste väljavõtete variatsiooniulatused. Kriteeriumid ülalmärgitud hüpoteeside kontrollimiseks saame järgmisel kujul.

Arvutame väljavõtete põhjal välja suhte $F = \dfrac{X_{1n_1} - X_{11}}{X_{2n_2} - X_{21}}$.

Hüpoteesi H_1 saame vastu võtta, kui kehtib üks võrratustest

$$F < x_{\alpha/2} \quad \text{või} \quad F > x_{1-\alpha/2} .$$

Hüpoteesi H_2 saame vastu võtta siis, kui kehtib võrratus

$$F > x_{1-\alpha} ;$$

hüpoteesi H_3 loeme õigeks siis, kui

$$F < x_{\alpha} .$$

<u>Näide 6.16.</u> Olgu X_1 ja X_2 normaalsed juhuslikud suurused, $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$; $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$. Kummagi juhusliku suuruse väärtuste hulgast on antud väljavõte, nende mahud on vastavalt $n_1 = 10$, $n_2 = 7$.

Kontrollida, kas esimesel juhuslikul suurusel on suurem hajuvus kui teisel (lugedes olulisuse nivooks $\alpha = 0{,}05$), kui variatsiooniulatused on vastavalt $\omega_1 = 5{,}3$; $\omega_2 = 2{,}1$.

<u>Lahendus</u>. Leiame suhte $F = \frac{5{,}3}{2{,}1} = 2{,}52$.

Tabelist 6.20 võtame $x_{10;7;0,95} = 2{,}4$. Et $2{,}52 > 2{,}4$, võime lugeda tõestatuks, et esimene väljavõte pärineb suurema hajuvusega üldkogumist kui teine.

Tabel 6.20.

$$\text{Suhte } F_{(n_1,n_2)} = \frac{X_{1n_1} - X_{11}}{X_{2n_2} - X_{21}} \text{ kvantiilid;}$$

$$X_1 \sim N(0,1); \quad X_2 \sim N(0,1); \quad X_{in_i} = \max_{i \leq j \leq n_i} X_{ij} ;$$

$$X_{i1} = \min_{i \leq j \leq n_i} X_{ij} .$$

nimetaja maht n_2	α	lugeja maht n_1: 2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	.005	.0078	.096	.21	.30	.38	.44	.49	.54	.57
	.01	.0157	.136	.26	.38	.46	.53	.59	.64	.68
	.025	.039	.217	.37	.50	.60	.68	.74	.79	.83
	.05	.079	.31	.50	.62	.74	.80	.86	.91	.95
	.95	12.7	19.1	23	26	29	30	32	34	35
	.975	25.5	38.2	52	57	60	62	64	67	68
	.99	63.7	95	116	132	142	153	160	168	174
	.995	127	191	230	250	260	270	280	290	290
3	.005	.0052	.071	.16	.24	.32	.38	.43	.47	.50
	.01	.0105	.100	.20	.30	.37	.43	.49	.53	.57
	.025	.026	.160	.28	.39	.47	.54	.59	.64	.68
	.05	.052	.23	.37	.49	.57	.64	.70	.75	.80
	.95	3.19	4.4	5.0	5.7	6.2	6.6	6.9	7.2	7.4
	.975	4.61	6.3	7.3	8.0	8.7	9.3	9.8	10.2	10.5
	.99	7.37	10	12	13	14	15	15	16	17
	.995	10.4	14	17	18	20	21	22	23	25
4	.005	.0043	.059	.14	.22	.28	.34	.39	.43	.46
	.01	.0086	.084	.18	.26	.33	.39	.44	.48	.52
	.025	.019	.137	.25	.34	.42	.48	.53	.57	.61
	.05	.043	.20	.32	.42	.50	.57	.62	.67	.70
	.95	2.02	2.7	3.1	3.4	3.6	3.8	4.0	4.2	4.4
	.975	2.72	3.5	4.0	4.4	4.7	5.0	5.2	5.4	5.6
	.99	3.83	5.0	5.5	6.0	6.4	6.7	7.0	7.2	7.5
	.995	4.85	6.1	7.0	7.6	8.1	8.5	8.8	9.3	9.6
5	.005	.0039	.054	.13	.20	.26	.32	.36	.40	.44
	.01	.0076	.079	.17	.24	.31	.36	.41	.45	.49
	.025	.018	.124	.23	.32	.38	.44	.49	.53	.57
	.05	.038	.18	.29	.40	.46	.52	.57	.61	.65
	.95	1.61	2.1	2.4	2.6	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2
	.975	2.01	2.6	2.9	3.2	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9
	.99	2.64	3.4	3.8	4.1	4.3	4.6	4.7	4.9	5.0
	.995	3.36	4.1	4.6	4.9	5.2	5.5	5.7	5.9	6.1

Tabel pärineb raamatust [1], lk. 410-411.

Tabel 6.20 (järg).

nimetaja maht n_2	α	lugeja maht n_1								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	.005	.0038	.051	.12	.19	.25	.30	.35	.38	.42
	.01	.0070	.073	.16	.23	.29	.34	.39	.43	.46
	.025	.017	.115	.21	.30	.36	.42	.46	.50	.54
	.05	.035	.16	.27	.36	.43	.49	.54	.58	.61
	.95	1.36	1.8	2.0	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
	.975	1.67	2.1	2.4	2.6	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2
	.99	2.16	2.7	3.0	3.2	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9
	.995	2.67	3.1	3.5	3.8	4.0	4.1	4.3	4.5	4.6
7	.005	.0037	.048	.12	.18	.24	.29	.33	.37	.40
	.01	.0066	.069	.15	.22	.28	.33	.37	.41	.45
	.025	.016	.107	.20	.28	.34	.40	.44	.48	.52
	.05	.032	.15	.26	.35	.41	.47	.51	.55	.59
	.95	1.26	1.6	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
	.975	1.48	1.9	2.1	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8
	.99	1.87	2.3	2.6	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3
	.995	2.28	2.7	2.9	3.1	3.3	3.5	3.6	3.7	3.8
8	.005	.0036	.045	.11	.18	.23	.28	.32	.36	.39
	.01	.0063	.065	.14	.21	.27	.32	.36	.40	.43
	.025	.016	.102	.19	.27	.33	.38	.43	.47	.50
	.05	.031	.14	.25	.33	.40	.45	.50	.53	.57
	.95	1.17	1.4	1.6	1.8	1.9	1.9	2.0	2.1	2.1
	.975	1.36	1.7	1.9	2.0	2.2	2.3	2.3	2.4	2.5
	.99	1.69	2.1	2.3	2.4	2.6	2.7	2.8	2.8	2.9
	.995	2.03	2.3	2.6	2.7	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3
9	.005	.0035	.042	.11	.17	.22	.27	.31	.35	.38
	.01	.0060	.062	.14	.21	.26	.31	.35	.39	.42
	.025	.015	.098	.18	.26	.32	.37	.42	.46	.49
	.05	.030	.14	.24	.32	.38	.44	.48	.52	.55
	.95	1.10	1.3	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.9	2.0
	.975	1.27	1.6	1.8	1.9	2.0	2.1	2.1	2.2	2.3
	.99	1.56	1.9	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.6
	.995	1.87	2.1	2.3	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
10	.005	.0034	.041	.10	.16	.22	.26	.30	.34	.37
	.01	.0058	.060	.13	.20	.26	.30	.34	.38	.41
	.025	.015	.095	.18	.25	.31	.36	.41	.44	.48
	.05	.029	.13	.23	.31	.37	.43	.47	.51	.54
	.95	1.05	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.8	1.9
	.975	1.21	1.5	1.6	1.8	1.9	1.9	2.0	2.0	2.1
	.99	1.47	1.8	1.9	2.1	2.2	2.2	2.3	2.4	2.4
	.995	1.75	2.0	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.6	2.7

VII. MITTEPARAMEETRILISED MEETODID.

Mitteparameetrilisteks meetoditeks nimetatakse matemaatilises statistikas enamasti niisuguseid meetodeid, mis ei ole seotud ühe kindla jaotuste perega, vaid töötavad laiematel eeldustel. Mõned mitteparameetrilised meetodid on rakendatavad isegi kvalitatiivsete, s. o. mittearvuliste tunnuste analüüsimisel. Seega on mitteparameetrilised meetodid klassikalistest - ehk nn. parameetrilistest - palju universaalsemad, kuid selle arvel mõnevõrra vähem tundlikud.

Käesolevas peatükis esitame eeskätt selliseid mitteparameetrilisi meetodeid, mis baseeruvad spetsiaalselt nende meetodite jaoks arvutatud tabelitele ja toome ära ka vastavad tabelid.

Üks levinumaid ja universaalsemaid mitteparameetrilisi meetodeid - χ^2-test - taandub küll klassikalisele χ^2-jaotusele, nõuab aga edukaks rakendamiseks tabelitekogu I osas toodud χ^2-tabelist hoopis mahukamat tabelit, seepärast on käesolevasse peatükki lisatud ka χ^2-jaotuse täiendjaotusfunktsiooni tabel (vt. tabel 7.14), samuti normaalse jaotusfunktsiooni tabel (7.15).

§ 1. JAOTUSTE KOOSKÕLA.
(Kolmogorovi test).

1. Empiiriline jaotusfunktsioon.

Olgu antud juhusliku suuruse X väärtuste seast väljavõte $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Järjestame selle variatsioonritta:

$$x_1' \leq x_2' \leq \ldots \leq x_n' .$$

Defineerime empiirilise jaotusfunktsiooni $F_n(x)$ järgmiselt:

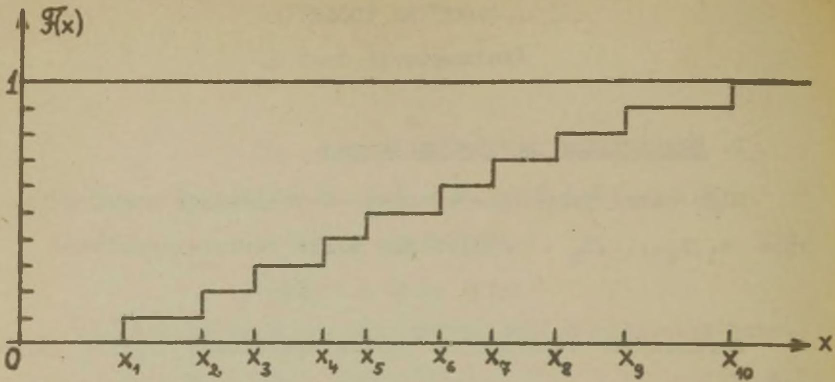
$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leq x_1', \\ \frac{1}{n}, & \text{kui } x_1' < x \leq x_2', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{k}{n}, & \text{kui } x_k' < x \leq x_{k+1}', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 1, & \text{kui } x > x_n' . \end{cases} \qquad (1)$$

(Vt. joonis 7.1).

Empiiriline jaotusfunktsioon (ka väljavõtte jaotusfunktsioon) on hinnanguks vaadeldava juhusliku suuruse tegelikule jaotusfunktsioonile (üldkogumi jaotusfunktsioonile) $F(x)$. See hinnang on nihutamata ($EF_n(x) = F(x)$ iga x puhul) ja läheneb väljavõtte mahu n kasvades (peaaegu kindlasti[5]) jaotusfunktsioonile $F(x)$. Empiirilise jaotusfunktsiooni $F_n(x)$ põhjal saab kontrollida hüpoteese jaotusfunktsiooni $F(x)$ kuuluvusest ühte või teise jaotusfunktsioonide klassi või ühtelangevust etteantud jaotusfunktsiooniga $G(x)$.

---

[5] Koonduvust "peaaegu kindlasti" on selgitatud näiteks konspektis E. Tiit. Tõenaosusteooria I, Tartu, 1968.



Joonis 7.1.
Variatsioonrida ja empiiriline jaotusfunktsioon.

2. Kolmogorovi λ-kriteerium.

Olgu antud mingi teoreetiline jaotus, mille jaotusfunktsioon on $G(x)$. Soovitakse kontrollida üht hüpoteesidest

$$H_1 : F(x) \neq G(x) ,$$
$$H_2 : F(x) > G(x) ,$$
$$H_3 : F(x) < G(x) ,$$

kusjuures võrratused hüpoteesides H_2 ja H_3 ei tarvitse olla täidetud kogu x-teljel, vaid piisab, kui leidub mingi hulk argumendi x väärtusi, kus vastav võrratus on täidetud. Seega ei välista hüpoteesid H_2 ja H_3 teineteist, kummastki aga järeldub H_1 .

Siin tähistab $F(x)$ üldkogumi jaotusfunktsiooni, mida hinnatakse väljavõtte põhjal.

Ülalkirjeldatud hüpoteeside kontrollimiseks on sobivaiks statistikuteks osutunud vahed

$$\Delta_{n1} = \max_x \left| F_n(x) - G(x) \right| ,$$
$$\Delta_{n2} = \max_x \left(F_n(x) - G(x) \right) ,$$
$$\Delta_{n3} = \max_x \left(G(x) - F_n(x) \right) ,$$

kus $G(x)$ väärtused leitakse kas tabelitest, arvutatakse vastava jaotuse valemist või määratakse graafiliselt, $F_n(x)$ aga arvutatakse valemi (1) kohaselt.

Juhul, kui kehtib hüpoteesile H_1 vastupidine nullhüpotees

$$H_0 : F(x) \equiv G(x) ,$$

on vahe $\Delta_{n1} = \max_x \left| F_n(x) - F(x) \right|$ jaotust detailselt uuritud ja tabuleeritud. Selle järgi on leitud niihästi täpsed kui ka asümptootilised hinnangud hüpoteesi H_1 kriitilistele väärtustele sõltuvalt olulisuse nivoost α ja väljavõtte mahust n. Need kriitilised väärtused on esitatud tabelis 7.1. Praktiliste ülesannete lahendamisel tuleb väiksemate n väärtuste korral ($n \leq 100$) kasutada täpset väärtust (antud teises veerus). Suurte väljavõtte mahtude ($n > 100$) puhul aga saame kriteeriumi $\lambda_{\alpha,n}$ leida lihtsalt asümptootilisest jaotusest:

$$\lambda_{\alpha,n} = \sqrt{\frac{-\ln \alpha/2}{2n}} ,$$

või veelgi lihtsamalt:

$$\lambda_{0,05;n} = \frac{1,36}{\sqrt{n}} ; \quad \lambda_{0,01;n} = \frac{1,63}{\sqrt{n}} .$$

Kui $\Delta_{n1} > \lambda_{\alpha,n}$, võtame olulisuse nivooga α vastu hüpoteesi H_1 ; kui aga $\Delta_{n1} \leq \lambda_{\alpha,n}$, loeme võimalikuks (kuigi mitte rangelt tõestatuks) nullhüpoteesi H_0.

Tabel 7.1.

Kolmogorovi λ-kriteerium jaotuste võrdlemiseks (kahepoolne hüpotees).

Vahe

$\Delta_n = \max\limits_{x} \left| F(x) - F_n(x) \right|$ jaotuse α-täiendkvantiilid

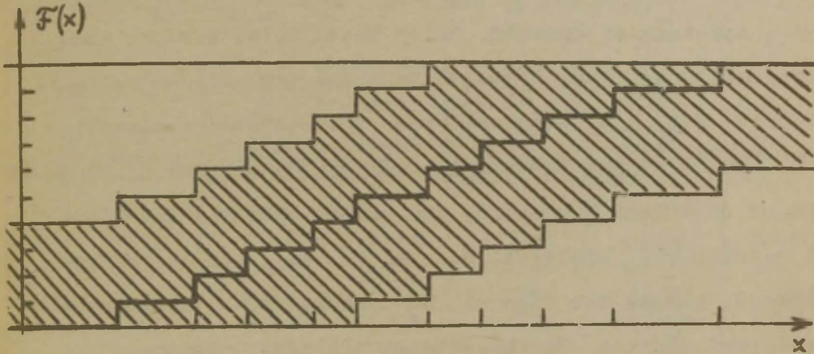
$\lambda_{\alpha, n}$;

$P(\Delta_n > \lambda_{\alpha, n}) = \alpha$ ja vastavad asümptootilised väärtused.

n	$\alpha = 0{,}05$			$\alpha = 0{,}01$		
	täpne jaotus	asümptootiline jaotus	suhe	täpne jaotus	asümptootiline jaotus	suhe
5	0,5633	0,6074	1,078	0,6685	0,7279	1,089
10	0,4087	0,4295	1,051	0,4864	0,5147	1,058
15	0,3375	0,3507	1,039	0,4042	0,4202	1,040
20	0,2939	0,3037	1,033	0,3524	0,3639	1,033
25	0,2639	0,2716	1,029	0,3165	0,3255	1,028
30	0,2417	0,2480	1,026	0,2898	0,2972	1,025
40	0,2101	0,2147	1,022	0,2521	0,2574	1,021
50	0,1884	0,1921	1,019	0,2260	0,2302	1,018
60	0,1723	0,1753	1,018	0,2067	0,2101	1,016
70	0,1597	0,1623	1,016	0,1917	0,1945	1,015
80	0,1496	0,1518	1,015	0,1795	0,1820	1,014
90	0,1412	0,1432	1,014			
100	0,1340	0,1358	1,013			

Tabel pärineb teosest [7], lk. 407.

Toodud kriteeriumi abil saame moodustada ka jaotusfunktsiooni $F(x)$ $(1-\alpha)$-usalduspiirid, nendeks on murdjooned $F_n(x) \pm \lambda_{\alpha,n}$ (vt. joon. 7.2). Näeme, et seose $F(x) = G(x)$ võime lugeda kehtivaks parajasti siis, kui kõver $G(x)$ paikneb tervikuna jaotusfunktsiooni $F(x)$ usalduspiirkonnas (vt. joon. 7.3).



Joonis 7.2.
Jaotusfunktsiooni kahepoolsed usalduspiirid ($n=10$, $\alpha = 0,05$).

3. <u>Ühepoolsete hüpoteeside kontrollimine</u>.

Mõnikord huvitab uurijat tõestada ühepoolne hüpotees (H_2 või H_3); nii on olukord sel juhul, kui mingi eelneva informatsiooni põhjal e n n e s t a t i s t i l i s e m a t e r j a l i t ö ö t l e m i s t oletatakse ühepoolset võrratusseost jaotusfunktsioonide vahel.

Juhusliku suuruse Δ_{n1} jaotuse sümmeetrilisuse tõttu võib ka ühepoolsete hüpoteeside kontrollimiseks kasutada tabelit 7.1, asendades vaid tulemuses olulisuse nivoo poole väiksemaga, s. t. kui

$$\Delta_{n2} > \lambda_{\alpha,n} ,$$

loeme hüpoteesi H_2 tõestatuks olulisuse nivooga $\alpha/2$; kui aga

$$\Delta_{n3} > \lambda_{\alpha,n} ,$$

loeme hüpoteesi H_3 tõestatuks olulisuse nivooga $\alpha/2$.

Kui hüpoteese H_2 ja H_3 soovitava olulisuse nivooga tõestada ei õnnestu, tuleb vastu võtta nendele vastavad alternatiivid; enamasti tähendab see, et jaotusfunktsioonid $F(x)$ ja $G(x)$ ei erine teineteisest oluliselt (või kehtib koguni vastupidine võrratus). Märgime siinjuures, et on võimalik olukord, kus õigeks osutuvad (olulisuse nivooga α) niihästi H_2 kui ka H_3 , kui ka selline olukord, kus ei ole õige ei H_2 ega ka H_3 . Isegi sellest, kui H_2 ja H_3 mõlemad on olulisuse nivooga α tõestatud, ei järeldu H_1 õigsus olulisuse nivooga α , vaid üksnes olulisuse nivooga 2α!

Et kontrollida ühepoolseid hüpoteese H_2 ja H_3 olulisuse nivoodega $\alpha = 0,01$ ja $0,05$, esitame ka nende jaoks kriitilised väärtused (vt. tabel 7.2) sõltuvalt valjavõtte mahust n . Vastavat ühepoolset kriteeriumi nimetavad mõned autorid ka Smirnovi kriteeriumiks. Suure n väärtuste korral $(n > 50)$ võib kasutada asümptootilist jaotust kriteeriumi $\bar{\lambda}_{\alpha,n}$ leidmiseks kas kujul

$$\bar{\lambda}_{\alpha,n} = \sqrt{\frac{-\ln\alpha}{2n}}$$

või lihtsalt

$$\bar{\lambda}_{0,05;n} = \frac{1,22}{\sqrt{n}} ; \quad \bar{\lambda}_{0,01;n} = \frac{1,52}{\sqrt{n}} .$$

Tabel 7.2.

Smirnovi λ-kriteerium jaotuste võrdlemiseks (ühepoolne hüpotees).

Vahe $\Delta_{n2} = \max (F(x) - F_n(x))$ jaotuse α-täiendkvantiilid $\bar{\lambda}_{\alpha,n}$;

$P(\Delta_{n2} > \bar{\lambda}_{\alpha,n}) = \alpha$ ja vastavad asümptootilised väärtused.

n	$\alpha = 0,05$ tänne jaotus	asümptootiline jaotus	suhe	$\alpha = 0,01$ tänne jaotus	asümptootiline jaotus	suhe
5	0,5094	0,5473	1,074	0,6271	0,6786	1,082
8	0,4096	0,4327	1,056	0,5065	0,5365	1,059
10	0,3687	0,3870	1,050	0,4566	0,4799	1,051
20	0,2647	0,2737	1,034	0.3285	0,3393	1,033
40	0,1891	0,1935	1,023	0,2350	0,2399	1,021
50	0,1696	0,1731	1,021	0,2107	0,2146	1,019

Tabel pärineb teosest [7], lk. 406.

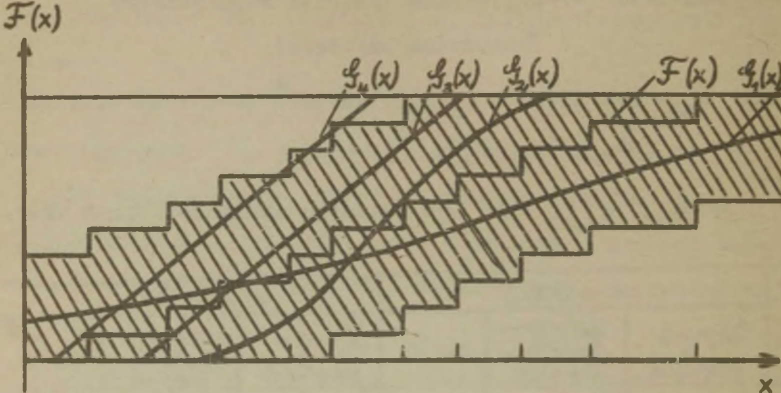
Tabelis 7.2 esitatud kriitiliste väärtuste abil on võimalik konstrueerida jaotusfunktsioonile F(x) ka ühepoolseid $(1-\alpha)$-usalduspiire (vt. joon. 7.4), nendeks on murdjooned

$F_n(x) - \bar{\lambda}_{\alpha,n}$ (alumine ühepoolne usalduspiir)

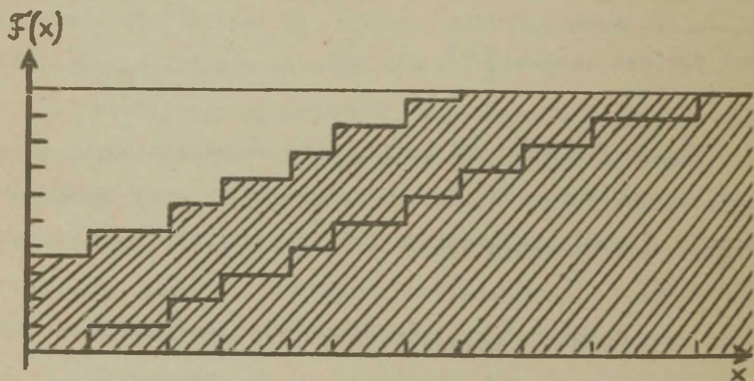
ja

$F_n(x) + \bar{\lambda}_{\alpha,n}$ (ülemine ühepoolne usalduspiir).

Näeme jälle, et nullhüpoteeside vastuvõtmine (olulisuse nivooga α) on samaväärne konstateerimisega, et teoreetiline jaotusfunktsioon G(x) kuulub jaotusfunktsiooni F(x) ühepoolsesse usalduspiirkonda (usaldusnivooga 1 - α).



Joonis 7.3.
Hinnatav jaotusfunktsioon F(x) võib ühte langeda niihästi teoreetilise jaotusega $G_1(x)$, $G_2(x)$ kui ka $G_3(x)$. Saab aga tõestada, et ta ei lange ühte teoreetilise jaotusega $G_4(x)$.



Joonis 7.4.
Jaotusfunktsiooni ühepoolne usalduspiirkond ja ülemine usalduspiir ($n = 10$, $\alpha = 0{,}05$).

4. <u>Kahe empiirilise jaotusfunktsiooni võrdlemine.</u>

Olgu antud kaks väljavõtet:

$$x_1, x_2, \dots, x_{n_1}; \quad y_1, y_2, \dots, y_{n_2}.$$

Moodustame nende põhjal empiirilised jaotusfunktsioonid $F_{n_1}(x)$ ja $G_{n_2}(x)$, mis hindavad vastavalt tegelikke (üldkogumite) jaotusfunktsioone $F(x)$ ja $G(x)$. Nõutakse võrrelda jaotusfunktsioone $F(x)$ ja $G(x)$.

Sisuliselt on võimalik vaadelda kolme hüpoteesi H_1, H_2 ja H_3, mis formaalselt langevad ühte nendega, mida kirjeldasime punktis 2.

Kui defineerime vahed $\bar{\Delta}_{ni}$ järgmiselt:

$$\bar{\Delta}_{n1} = \max_x \left| G_{n_2}(x) - F_{n_1}(x) \right| ,$$
$$\bar{\Delta}_{n2} = \max_x \left(F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x) \right) ,$$
$$\bar{\Delta}_{n3} = \max_x \left(G_{n_2}(x) - F_{n_1}(x) \right)$$

ning arvutame n valemist

$$n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} ,$$

saame hüpoteesi H_1 (väljavõtted pärinevad erinevate jaotusfunktsioonidega üldkogumitest) kontrollida tabeli 7.1 abil täpselt nii, nagu kirjeldatud punktis 2, ning hüpoteese H_2 ja H_3 tabeli 7.2 abil täpselt selliselt, nagu kirjeldatud punktis 3. Suurte n väärtuste korral arvutatakse kriitilised väärtused hüpoteesi H_1 tarvis asümptootiliselt:

$$\lambda_{0,05;n} = 1{,}36\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}; \quad \lambda_{0,01;n} = 1{,}63\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

Hüpoteeside H_2 ja H_3 jaoks leiame asümptootilised kriitilised väärtused vastavalt seostest

$$\lambda_{0,05;n} = 1{,}22\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}; \quad \lambda_{0,01;n} = 1{,}52\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

<u>Näide 7.1.</u>

Olgu antud väljavõte:

2,8; 8,9; 6,5; 8,7; 0,8; 3,0; 2,9; 4,3; 6,5; 4,2.

Kas see väljavõte võib pärineda üldkogumist ühtlase jaotusega $\mathcal{U}(0;\ 10{,}0)$? (Märkus: väljavõtte moodustavad arvud kahekohalisest juhuslike arvude tabelist).

<u>Lahendus.</u>

Järjestame väljavõtte variatsioonritta ja moodustame empiirilise jaotusfunktsiooni:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leqslant 0{,}8; \\ 0{,}1, & \text{kui } 0{,}8 < x \leqslant 2{,}8; \\ 0{,}2, & \text{"} \quad 2{,}8 < x \leqslant 2{,}9; \\ 0{,}3, & \text{"} \quad 2{,}9 < x \leqslant 3{,}0; \\ 0{,}4, & \text{"} \quad 3{,}0 < x \leqslant 4{,}2; \\ 0{,}5, & \text{"} \quad 4{,}2 < x \leqslant 4{,}3; \\ 0{,}6, & \text{"} \quad 4{,}3 < x \leqslant 6{,}5; \\ 0{,}8, & \text{"} \quad 6{,}5 < x \leqslant 8{,}7; \\ 0{,}9, & \text{"} \quad 8{,}7 < x \leqslant 8{,}9; \\ 1{,}0, & \text{"} \quad x > 8{,}9. \end{cases}$$

Teoreetiline jaotusfunktsioon avaldub seosest:

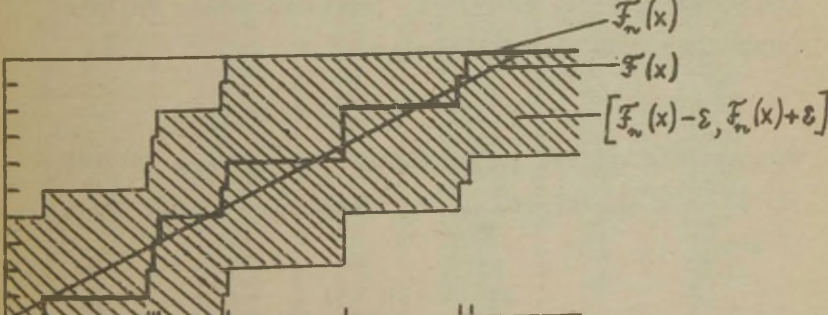
$$
\begin{cases}
F(x) = 0 , & \text{kui } x < 0 , \\
F(x) = 0{,}1x, & \text{kui } 0 \leqslant x \leqslant 10{,}0 , \\
F(x) = 1 , & \text{kui } x > 10{,}0 .
\end{cases}
$$

Leiame nüüd ka vahed $\Delta(x_i) = |F_n(x_i) - F(x_i)|$ kõigis murdjoone tippudes ja samuti punktides $x = 0$ ja $x = 10$; ilmselt võib maksimum funktsiooni $F(x)$ monotoonsuse tõttu realiseeruda vaid nendes punktides. Arvutustulemused koondame tabelisse:

x_i	0	0,8	2,8	2,9	3,0	4,2	4,3	6,5	8,7	8,9	1,0
$\lvert F_n(x_i) - F(x_i)\rvert$	0	0,08	0,18	0,09	0	0,02	0,07	0,05	0,07	0,01	0
$\lvert F_n(x_{i+}) - F(x_{i+})\rvert$	0	0,02	0,08	0,01	0,10	0,08	0,17	0,15	0,03	0,11	0

Ilmselt $\max |F(x) - F_n(x)| = \Delta_{10,1} = 0{,}18$.

Tabelist 7.1 näeme, et $\lambda_{0,05;10} = 0{,}409$; et $\Delta_{n1} < 0{,}409$, tuleb meil vastu võtta nullhüpotees: väljavõte pärineb ühtlase jaotusega üldkogumist (vt. joon. 7.5).



Joonis 7.5.
Empiiriline jaotus on kooskõlas teoreetilisega.

5. Suvalise usaldusnivooga usalduspiiride moodustamine.

Väljavõtte mahu n kasvades läheneb korrutis

$$\sqrt{n}\left\{\max_x \left| F_n(x) - F(x)\right|\right\}$$

juhuslikule suurusele K , mida nimetatakse ka Kolmogorovi λ-statistikuks. Selle juhusliku suuruse jaotus on detailselt tabuleeritud, vt. tabel 7.3, kus on esitatud selle juhusliku suuruse jaotusfunktsioon

$$F(\lambda) = P\{K < \lambda\} .$$

Seda jaotusfunktsiooni saabki kasutada suvalise usaldusnivooga usalduspiiride ning suvalise olulisuse nivooga kriteeriumide konstrueerimiseks.

Usaldusnivooga 1- α usalduspiirid leiame järgmiselt: võtame $F(\lambda) = 1 - \alpha$ ning määrame sellest seosest λ ; usalduspiirideks on murdjooned $F_n(x) \pm \lambda\sqrt{n}$. Olulisuse nivooga α kriteeriumi leidmiseks võtame jälle $F(\lambda) = 1 - \alpha$ ning määrame λ . Hüpoteesi H_1 saame vastu võtta (olulisuse nivooga α) juhul kui $\Delta_{n1} > \lambda\sqrt{n}$. Kui aga hüpoteesi H_1 vastu võtta ei saa, leiame maksimaalse olulisuse nivoo, mille korral H_0 vastu võetakse. Selleks leiame λ^*, mis rahuldab võrdust

$$\Delta_{n1}\sqrt{n} = \lambda^* ,$$

ning sellele vastava jaotusfunktsiooni väärtuse $F(\lambda^*)$. Olulisuse nivoo (hüpoteesi H_0 tõenäosuse) leiame siis seosest

$$\alpha = 1 - F(\lambda^*) .$$

Tabel 7.3.

Kolmogorovi λ-funktsiooni $K(\lambda) = \sqrt{n}\,\max\limits_{x} \left| F_n(x) - F(x) \right|$ jaotusfunktsioon.

λ	F(λ)	λ	F(λ)	λ	F(λ)
0,28	0,000001	0,86	0,549744	1,45	0,970158
0,29	0,000004	0,87	0,564546	1,46	0,971846
0,30	0,000009	0,88	0,579070	1,47	0,973448
0,31	0,000021	0,89	0,593316	1,48	0,974970
0,32	0,000046	0,90	0,607270	1,49	0,976412
0,33	0,000091	0,91	0,620928	1,50	0,977782
0,34	0,000171	0,92	0,634286	1,51	0,979080
0,35	0,000303	0,93	0,647338	1,52	0,980310
0,36	0,000511	0,94	0,660082	1,53	0,981476
0,37	0,000826	0,95	0,672516	1,54	0,982578
0,38	0,001285	0,96	0,684636	1,55	0,983622
0,39	0,001929	0,97	0,696444	1,56	0,984610
0,40	0,002808	0,98	0,707940	1,57	0,985544
0,41	0,003972	0,99	0,719126	1,58	0,986426
0,42	0,005476	1,00	0,730000	1,59	0,987260
0,43	0,007377	1,01	0,740566	1,60	0,988048
0,44	0,009730	1,02	0,750826	1,61	0,988791
0,45	0,012590	1,03	0,760780	1,62	0,989492
0,46	0,016005	1,04	0,770434	1,63	0,990154
0,47	0,020022	1,05	0,779794	1,64	0,990777
0,48	0,024682	1,06	0,788860	1,65	0,991364
0,49	0,030017	1,07	0,797636	1,66	0,991917
0,50	0,036055	1,08	0,806128	1,67	0,992438
0,51	0,042814	1,09	0,814342	1,68	0,992928
0,52	0,050306	1,10	0,822282	1,69	0,993389
0,53	0,058534	1,11	0,829950	1,70	0,993823
0,54	0,067497	1,12	0,837356	1,71	0,994230
0,55	0,077183	1,13	0,844502	1,72	0,994612
0,56	0,087577	1,14	0,851394	1,73	0,994972
0,57	0,098656	1,15	0,858038	1,74	0,995309
0,58	0,110395	1,16	0,864442	1,75	0,995625
0,59	0,122760	1,17	0,870612	1,76	0,995922
0,60	0,135718	1,18	0,876548	1,77	0,996200
0,61	0,149229	1,19	0,882258	1,78	0,996460
0,62	0,163225	1,20	0,887750	1,79	0,996704
0,63	0,177753	1,21	0,893030	1,80	0,996932
0,64	0,192677	1,22	0,898104	1,81	0,997146
0,65	0,207987	1,23	0,902972	1,82	0,997346
0,66	0,223637	1,24	0,907648	1,83	0,997533
0,67	0,239582	1,25	0,912132	1,84	0,997707
0,68	0,255780	1,26	0,916432	1,85	0,997870
0,69	0,272189	1,27	0,920556	1,86	0,998023
0,70	0,288765	1,28	0,924505	1,87	0,998145
0,71	0,305471	1,29	0,928288	1,88	0,998297
0,72	0,322265	1,30	0,931908	1,89	0,998421
0,73	0,339113	1,31	0,935370	1,90	0,998536
0,74	0,355981	1,32	0,938682	1,91	0,998644
0,75	0,372833	1,33	0,941848	1,92	0,998745
0,76	0,389640	1,34	0,944872	1,93	0,998837
0,77	0,406372	1,35	0,947756	1,94	0,998924
0,78	0,423002	1,36	0,950512	1,95	0,999004
0,79	0,439505	1,37	0,953142	1,96	0,999079
0,80	0,455857	1,38	0,955650	1,97	0,999149
0,81	0,472041	1,39	0,958040	1,98	0,999213
0,82	0,488030	1,40	0,960318	1,99	0,999273
0,83	0,503808	1,41	0,962486	2,00	0,999320
0,84	0,519366	1,42	0,964552	2,01	0,999380
0,85	0,534682	1,43	0,966516	2,02	0,999428
		1,44	0.968382	2,03	0,999474

Tabel pärineb teosest [9], lk. 539 -540.

Tabel 7.3 (järg).

λ	F(λ)	λ	F(λ)	λ	F(λ)
2,04	0,999516	2,23	0,999904	2,42	0,999984
2,05	0,999552	2,24	0,999912	2,43	0,999986
2,06	0,999588	2,25	0,999920	2,44	0,999987
2,07	0,999620	2,26	0,999926	2,45	0,999988
2,08	0,999650	2,27	0,999934	2,46	0,999988
2,09	0,999680	2,28	0,999940	2,47	0,999990
2,10	0,999705	2,29	0,999944	2,48	0,999991
2,11	0,999728	2,30	0,999949	2,49	0,999992
2,12	0,999750	2,31	0,999954	2,50	0,9999925
2,13	0,999770	2,32	0,999958	2,55	0,9999956
2,14	0,999790	2,33	0,999962	2,60	0,9999974
2,15	0,999806	2,34	0,999965	2,65	0,9999984
2,16	0,999822	2,35	0,999968	2,70	0,9999990
2,17	0,999838	2,36	0,999970	2,75	0,9999994
2,18	0,999852	2,37	0,999973	2,80	0,9999997
2,19	0,999864	2,38	0,999976	2,85	0,99999982
2,20	0,999874	2,39	0,999978	2,90	0,99999990
2,21	0,999886	2,40	0,999980	2,95	0,99999994
2,22	0,999896	2,41	0,999982	3,00	0,99999997

Ühepoolsete hüpoteeside kontrollimisel tuleb igal pool α asendada väärtusega 2α, samuti ühepoolsete usalduspiiride konstrueerimisel.

Selleks, et saada kriteeriumi kahe empiirilise jaotuse võrdlemiseks, arvutame

$$\Delta = \max \left| F_{n_1}(x) - G_{n_2}(x) \right|$$

ning arvestame, et statistik $\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}\,\Delta$ on K-jaotusega. Siit tulenevad eelpool toodutega analoogilised eeskirjad hüpoteeside kontrolli ja usalduspiiride konstrueerimise ülesannete lahendamiseks.

<u>Näide 7.2.</u>

Nõutagu konstrueerida 75%-lised usalduspiirid antud empiirilisele jaotusele, kui $n = 55$.

<u>Lahendus.</u>

Tabelist 7.3 leiame vastavalt $F(\lambda) = 0{,}75$ väärtusele $\lambda = 1{,}02$; seega usalduspiirideks on

$$F_n(x) \pm \frac{1{,}02}{\sqrt{55}} \approx F_n(x) \pm 0{,}137 .$$

<u>Näide 7.3.</u>

Olgu 120-indiviidilise väljavõtte puhul $\Delta_{n1} = 0{,}07$. Kas võib olla tegemist väljavõttega antud teoreetilise jaotusega üldkogumist?

<u>Lahendus.</u>

Leiame $K = \Delta_{n1}\sqrt{n} = 0{,}07\sqrt{120} = 0{,}77$.

Tabelist 7.3 leiame, et $F(0{,}77) = 0{,}406$, järelikult

$\alpha = 1 - 0{,}406 = 0{,}594$; väljavõtte kuulumine antud teoreetilise jaotusega üldkogumisse on küllaltki tõenäoline.

§ 2. KAHE VÄLJAVÕTTE ÜHTE ÜLDKOGUMISSE KUULUVUSE KONTROLL

(Mann-Whitney test).

1. <u>Ülesande sõnastus</u>.

Olgu antud kaks sõltumatut väljavõtet

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1} \quad \text{ja} \quad y_1, y_2, \ldots, y_{n_2},$$

mis pärinevad vastavalt juhuslike suuruste X ja Y väärtuste hulgast.

Nõutagu kontrollida hüpoteese:

$$H_1 : EX \neq EY ;$$

$$H_2 : EX > EY ;$$

$$H_3 : EX < EY ;$$

s. t. võrrelda vaadeldavate jaotuste keskväärtusi. Ilmselt asjaolust, et keskväärtused ei lange ühte, järeldub ka, et vastavate juhuslike suuruste jaotused on erinevad (kuigi võivad kuuluda samasse jaotuste peresse) ning väljavõtted kuuluvad ka erinevatesse üldkogumitesse.

Niisuguste hüpoteeside kontrollimiseks juhul, kui tegemist on normaaljaotusega, on sobiv kasutada t-testi. Samuti võimaldab küllalt suurt erinevust keskväärtuste vahel kindlaks teha ka Kolmogorovi λ-test, mille kasutamiseks tuleb aga arvutada välja empiirilised jaotusfunktsioonid.

Kui aga empiirilisi jaotusfunktsioone ei soovita leida, samuti juhul, kui meil on tegemist mitte kvantitatiivsete, vaid järjestatavate tunnustega, on ülalmärgitud hüpoteese otstarbekas kontrollida mõningate mitteparameetriliste testide abil.

Järgnevas tutvume põhjalikumalt neist ühega - nn. Mann-Whitney testiga.

2. *U*-jaotus.

Moodustame sõltumatutest väljavõtetest variatsioonread:

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}; \qquad y_1, y_2, \ldots, y_{n_2},$$

kusjuures eeldame (üldisust kitsendamata), et $n_1 \leq n_2$. Seejärel moodustame ühise variatsioonrea

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \qquad n = n_1 + n_2, \tag{1}$$

pidades iga saadud rea liikme jaoks meeles, kumba variatsioonridadest ta varem kuulus ja milline indeks tal oli.

Moodustame nüüd jada $u_1, u_2, \ldots, u_{n_2}$ järgmiselt: u_i võrdub y_i-le variatsioonreas (1) eelneva suurima indeksiga liikme x_j indeksiga j; kui y_i-le ei eelne ühtegi liiget x_j, on u_i väärtuseks 0.

Seejärel leiame summa:

$$U_{n_1 n_2} = \sum_{i=1}^{n_2} u_i . \tag{2}$$

Mõnevõrra piltlikum meetod u_i-de määramiseks on järgmine: märgime kõik esimesse väljavõttesse kuuluvad liikmed variatsioonreas (1) tähega x, kõik teise väljavõttesse kuuluvad liikmed variatsioonreas (1) tähega y. Saame näiteks sellise jada:

$$y, x, y, y, x, y, x, x, y.$$

Loendame iga y ees paiknevad x-d, ning need arvud tähistame järjest sümbolitega $u_1, u_2, \ldots u_{n_2}$. Statistiku $U_{n_1 n_2}$ arvutame jälle summana (2).

Käesolevas näites saaksime

$$u_1 = 0 \; ; \quad u_2 = 1 \, , \quad \mu_3 = 1 \, , \quad u_4 = 2 \, , \quad u_5 = 4$$

ja

$$U = 0 + 1 + 1 + 2 + 4 = 8 \, .$$

Ilmselt on leitud summa $U_{n_1 n_2}$ täisarvuliste väärtustega juhuslik suurus, mille väärtused sõltuvad väljavõtete omavahelisest paiknemisest. Lihtne on näha, et ekstremaalsed väärtused $U_{n_1 n_2} = 0$ ja $U_{n_1 n_2} = n_1 \cdot n_2$ omandab statistik U parajasti siis, kui väljavõtete väärtuste hulgad ei lõiku (vt. joon. 7.6).

a) $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = n_1$; $U_{n_1 n_2} = n_1 \cdot n_2$.

b) $u_1 = u_2 = \ldots = u_{n_2} = 0$; $U_{n_1 n_2} = 0$.

Joonis 7.6.

Eeldusel $F_X = F_Y$, mille korral on õige nullhüpotees $H_0 : EX = EY$, on $U_{n_1 n_2}$ jaotus tabuleeritud (vt. tabel 7.4).

Nendes tabelites on veergude kaupa esitatud statistiku $U_{n_1n_2}$ jaotusfunktsiooni

$$F_{n_1n_2}(u) = P(U_{n_1n_2} < u) = \sum_{x=0}^{u-1} P(U_{n_1n_2} = x)$$

väärtused vastavalt u väärtustele $1, 2, \ldots, \left[\frac{n_1n_2+1}{2}\right]$.

Puuduvad jaotusfunktsiooni väärtused vastavalt argumendi väärtustele $\left[\frac{n_1n_2+1}{2}\right] + 1, \ldots, n_1n_2$ saab leida sümmeetria põhjal seosest

$$P(U_{n_1n_2} = u) = P(U_{n_1n_2} = n_1n_2 - u)$$

ja

$$P(U_{n_1n_2} < u) = P(U_{n_1n_2} > n_1n_2 - u) ,$$

millest tuleneb

$$F_{n_1n_2}(u) = 1 - F_{n_1n_2}(n_1n_2 - u + 1) .$$

Tabel 7.4.

Mann-Whitney U-statistiku jaotusfunktsioon $F(u) = P(U_{n_1n_2} < u)$ vastavalt väljavõtete mahtudele n_1 ja n_2 $(n_1 \leqslant n_2)$.

$n_2 = 3$

U	n_1 = 1	2	3
0	.250	.100	.050
1	.500	.200	.100
2	.750	.400	.200
3		.600	.350
4			.500
5			.650

$n_2 = 4$

U	n_1 = 1	2	3	4
0	.200	0.67	.028	.014
1	.400	.133	.057	.029
2	.600	.267	.114	.057
3		.400	.200	.100
4		.600	.314	.171
5			.429	.243
6			.571	.343
7				.443
8				.557

Tabel pärineb teosest [4], lk. 640-642.

Tabel 7.4 (järg).

$n_2 = 5$

U	n_1 = 1	2	3	4	5
0	.167	0.47	.018	.008	.004
1	.333	.095	.036	.016	.008
2	.500	.190	.071	.032	.016
3	.667	.286	.125	.056	.028
4		.429	.196	.095	.048
5		.571	.286	.143	.075
6			.393	.206	.111
7			.500	.278	.155
8			.607	.365	.210
9				.452	.274
10				.548	.345
11					.421
12					.500
13					.579

$n_2 = 6$

U	n_1 = 1	2	3	4	5	6
0	.143	.036	.012	.005	.002	.001
1	.286	.071	.024	.010	.004	.002
2	.428	.143	.048	.019	.009	.004
3	.571	.214	.083	.033	.015	.008
4		.321	.131	.057	.026	.013
5		.429	.190	.086	.041	.021
6		.571	.274	.129	.063	.032
7			.357	.176	.089	.047
8			.452	.238	.123	.066
9			.548	.305	.165	.090
10				.381	.214	.120
11				.457	2.68	.155
12				.545	.331	.197
13					.396	.242
14					.465	.294
15					.535	.350
16						.409
17						.469
18						.531

$n_2 = 7$

U	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7
0	.125	.028	.008	.003	.001	.001	.000
1	.250	.056	.017	.006	.003	.001	.001
2	.375	.111	.033	.012	.005	.002	.001
3	.500	.167	.058	.021	.009	.004	.002
4	.625	.250	.092	.036	.015	.007	.003
5		.333	.133	.055	.024	.011	.006
6		.444	.192	.082	.037	.017	.009
7		.556	.258	.115	.053	.026	.013
8			.333	.158	.074	.037	.019
9			.417	.206	.101	.051	.027
10			.500	.264	.134	.069	.036
11			.583	.324	.172	.090	.049
12				.394	.216	.117	.064
13				.464	.265	.147	.082
14				.538	.319	.183	.104
15					.378	.223	.130
16					.438	.267	.159
17					.500	.314	.191
18					.562	.365	.228
19						.418	.267
20						.473	.310
21						.527	.355
22							.402
23							.451
24							.500
25							.549

$n_2 = 8$

U	n_1									
	1	2	3	4	5	6	7	8	t	Normal
0	.111	.022	.006	.002	.001	,000	.000	.000	3,308	.001
1	.222	.044	.012	.004	.002	,001	.000	.000	3,203	.001
2	.333	.089	.024	.008	.003	,001	.001	.000	3,098	.001
3	.444	.133	.042	.014	.005	,002	.001	.001	2,993	.001
4	.556	.200	.067	.024	.009	,004	.002	.001	2,888	.002
5		.267	.097	.036	.015	,006	.003	.001	2,783	.003
6		.356	.139	.055	.023	,010	.005	.002	2,678	.004
7		.444	.188	.077	.033	,015	.007	.003	2,573	.005
8		.556	.248	.107	.047	,021	.010	.005	2,468	.007
9			.315	.141	.064	,030	.014	.007	2,363	.009
10			.387	.184	.085	,041	.020	.010	2,258	.012
11			.461	.230	.111	,054	.027	.014	2,153	.016
12			.539	.285	.142	,071	.036	.019	2,048	.020
13				.341	.177	,091	.047	.025	1,943	.026
14				.404	.217	,114	.060	.032	1,838	.033
15				.467	.262	,141	.076	.041	1,733	.041
16				.533	.311	,172	.095	.052	1,628	.052
17					.362	,207	.116	.065	1,523	.064
18					.416	,245	.140	.080	1,418	.078
19					.472	,286	.168	.097	1,313	.094
20					.528	,331	.198	.117	1,208	.113
21						,377	.232	.139	1,012	.135
22						,426	.268	.164	.998	.159
23						,475	.306	.191	.893	.185
24						,525	.347	.221	.788	.215
25							.389	.253	.683	.247
26							.433	.287	.578	.282
27							.478	.323	.473	.318
28							.522	.360	.368	.356
29								.399	.263	.396
30								.439	.158	.437
31								.480	.052	.481
32								.520		

korral Mann-Whitney testi abil.

Väikeste väljavõtete mahtude n_1 ja n_2 korral saame hüpoteeside H_1, H_2 ja H_3 kontrollimiseks kasutada tabelites 7.4 antud jaotusfunktsiooni väärtusi.

Ühepoolse hüpoteesi H_2 loeme olulisuse nivoo α korral tõestatuks, kui antud väljavõtte põhjal arvutatud statistiku U väärtus u rahuldab tingimust

$$F_{n_1 n_2}(u) < \alpha .$$

Ühepoolse hüpoteesi H_3 loeme olulisuse nivoo α korral tõestatuks, kui kõigepealt $u' = n_1 n_2 - u < u$ ning

$$F_{n_1 n_2}(u') < \alpha .$$

Kahepoolse hüpoteesi H_1 tõestamiseks leiame

$$u'' = \min (u, u') .$$

Tõestatuks loeme hüpoteesi H_1 parajasti siis, kui

$$F_{n_1 n_2}(u'') < \frac{\alpha}{2} .$$

Vastasel korral tuleb vastu võtta nullhüpotees (kusjuures nullhüpoteesi ei saa selle põhjal veel tõestatuks lugeda). Nullhüpoteesiks on hüpoteesi H_1 korral: "väljavõtted võivad pärineda ühest üldkogumist", hüpoteesi H_2 korral: "EX ei ole suurem kui EY" ja hüpoteesi H_3 korral: "EY ei ole suurem kui EX". Väljavõtete kuulumine ühte üldkogumisse on seda tõepärasem, mida lähedasemad on u ja u' väärtused teineteisele, seega ka $F_{n_1 n_2}(u)$ ja $F_{n_1 n_2}(u')$ väärtused arvule 0,5.

Tabel 7.5.

Mann-Whitney U-testi kriitilised väärtused ühe- ja kahepoolse hüpoteesi kontrollimiseks vastavalt olulisuse nivoole α.

ühepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}001$
kahepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}002$

n_1	n_2 = 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2												
3									0	0	0	0
4		0	0	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7
6	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	3	5	6	7	8	9	10	11	13	14	15	16
8	5	6	8	9	11	12	14	15	17	18	20	21
9	7	8	10	12	14	15	17	19	21	23	25	26
10	8	10	12	14	17	19	21	23	25	27	29	32
11	10	12	15	17	20	22	24	27	29	32	34	37
12	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	42
13	14	17	20	23	26	29	32	35	38	42	45	48
14	15	19	22	25	29	32	36	39	43	46	50	54
15	17	21	24	28	32	36	40	43	47	51	55	59
16	19	23	27	31	35	39	43	48	52	56	60	65
17	21	25	29	34	38	43	47	52	57	61	66	70
18	23	27	32	37	42	46	51	56	61	66	71	76
19	25	29	34	40	45	50	55	60	66	71	77	82
20	26	32	37	42	48	54	59	65	70	76	82	88

Tabel pärineb teosest [4], lk. 643-645.

Tabel 7.5 (järg).

ühepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}01$
kahepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}02$

n_1	n_2 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2					0	0	0	0	0	0	1	1
3	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5
4	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
6	7	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22
7	9	11	12	14	16	17	19	21	23	24	26	28
8	11	13	15	17	20	22	24	26	28	30	32	34
9	14	16	18	21	23	26	28	31	33	36	38	40
10	16	19	22	24	27	30	33	36	38	41	44	47
11	18	22	25	28	31	34	37	41	44	47	50	53
12	21	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60
13	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67
14	26	30	34	38	43	47	51	56	60	65	69	73
15	28	33	37	42	47	51	56	61	66	70	75	80
16	31	36	41	46	51	56	61	66	71	76	82	87
17	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93
18	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88	94	100
19	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	107
20	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

ühepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}025$
kahepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}050$

n_1	n_2 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1												
2	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2
3	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	31	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127

Tabel 7.5 (järg).

ühepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}05$
kahepoolse kriteeriumi korral $\alpha = 0{,}10$

n_2	n_1 9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1											0	0
2	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11
4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18
5	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25
6	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32
7	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39
8	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47
9	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
10	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62
11	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69
12	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77
13	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84
14	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92
15	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100
16	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107
17	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115
18	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123
19	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130
20	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138

4. Hüpoteeside kontrollimine suuremate väljavõtete korral Mann-Whitney testi abil.

Täielikud U-statistiku jaotusfunktsiooni tabelid on esitatud vaid juhul, kus max $(n_1, n_2) \leq 8$. Suuremamahuliste väljavõtete jaoks on esitatud U kriitilised väärtused hüpoteesi H_2 (vastavalt H_1) kontrollimiseks olulisuse nivoode 0,001 (0,002), 0,01 (0,02), 0,025 (0,05) ja 0,05 (0,10) puhul. Hüpotees H_2 (vastavalt H_1) võetakse vastu tabelis antud olulisuse nivooga parajasti siis, kui väljavõtte põhjal valemiga (2) leitud väärtus $U_{n_1 n_2}$ ei ületa tabelis antud kriitilist väärtust (kuid võib sellega ühte langeda).

Hüpoteesi H_3 kontrollimiseks arvutame jälle suuruse

$u' = n_1 n_2 - u$ ning võrdleme saadud väärtust tabelis antud kriitilise u väärtusega. Hüpoteesi H_3 vastuvõtmine toimub samuti kui hüpoteesi H_2 puhulgi.

5. U asümptootiline jaotus suurte väljavõtete puhul.

Suurte väljavõtete puhul ($n > 20$) läheneb U-jaotus küllaltki kiiresti normaaljaotusele ($N(m, \sigma)$), kus $m = \frac{n_1 n_2}{2}$, $\sigma = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$. Hüpoteeside H_1, H_2 ja H_3 kontrollimiseks võib siis kasutada normaaljaotuse keskväärtuse kohta käivate hüpoteeside kontrollimise metoodikat (eeldusel, et standardhälve on teada). Seega tuleb leida suurus

$$u_1 = \frac{u - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

ning võrrelda seda normaaljaotuse kvantiilidega; kui $|u_1| > p_{\alpha/2}$, võtame vastu hüpoteesi H_1; kui $u_1 < 0$ ja $|u_1| > p_\alpha$, võtame vastu hüpoteesi H_2 ning juhul $u_1 > p_\alpha$ võtame vastu hüpoteesi H_3 (vt. tabel 7.15).

Näide 7.4.

Vaatleme kõigepealt punktis 2 näitena toodud väljavõtteid, mille ühine variatsioonrida on sümboolselt

$$y, x, y, y, x, y, x, x, y$$

ja $u = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 5$. Nõutagu kontrollida hüpoteesi H_1. Tabelist 7.4 leiame

$$F_{4,5}(8) = 0{,}365 ;$$

kuna tegemist on kahepoolse hüpoteesiga, saaksime H_1 vastu võtta juhul $F_{4,5}(8) < \alpha$, mis käesoleval juhul ei ole täidetud. Tuleb oletada, et väljavõtted pärinevad ühest üldkogumist; oletus on pealegi üsnagi tõepärane, sest $F_{4,5}(8)$ on küllaltki lähedane arvule 0,5.

Näide 7.5.

Kontrollida (olulisuse nivooga 0,05), kas väljavõtted

$$3,5,7,7,8,8,9,9,10$$

ja

$$2,2,4,6$$

pärinevad samast üldkogumist.

Lahendus.

Tähistame teise väljavõtte liikmed tähega x, esimese väljavõtte liikmed tähega y ja moodustame ühise variatsioonrea:

2	2	3	4	5	6	7	7	...
x_1	x_2	y_1	x_3	y_2	x_4	y_3	y_4	...

Leiame jada $u_1, u_2, \ldots$:

$u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = \ldots = u_9 = 4$, seega $u = 2+3+7.4=33$;

$$u' = n_1 n_2 - u = 4.9 - 33 = 3 .$$

Paneme tähele, et sama tulemuse saaksime, lugedes iga x ees olevaid maksimaalseid y indekseid:

$$u_1' = 0 \; ; \; u_2' = 0 \; ; \; u_3' = 1 \; ; \; u_4' = 2 \; ; \; u' = 3 .$$

Tabelist 7.5 näeme, et $u_{4,9;0,05} = 4$.

Kuna $3 < 4$, võime seega väita, et väljavõtted pärinevad erinevatest üldkogumitest.

§ 3. MÄRGITEST.

1. Probleemiseade.

Olgu kahe erineva tingimuste kompleksi puhul tehtud seeria mõõtmisi, kokku n objektil; tulemusena saadakse väärtusepaaride hulk

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)\ ,$$

kus $x_1,x_2,\dots,x_n$ tähistavad mõõtmistulemusi ühtedes tingimustes, $y_1,\dots,y_n$ – samade objektide mõõtmistulemusi teistes tingimustes.

Mõõtmistulemuste X ja Y jaotuste kohta ei tarvitse midagi teada olla. Veelgi enam, mõõtmistulemused ei tarvitse üldse arvudena väljenduda, oluline on vaid see, et iga vaatluste paar oleks järjestatav, kasvõi mõttes "parem-halvem". Niisiis, iga vaatluste paari kohta peab kehtima üks järgmistest suhetest:

$$x_i < y_i \quad \text{(ehk sümboolselt +)}\ ,$$
$$x_i = y_i \quad \text{(ehk sümboolselt 0)}\ ,$$
$$x_i > y_i \quad \text{(ehk sümboolselt -)}\ ,$$

kusjuures võrratus ei tarvitse tähendada tavalist arvude vahelist võrratust.

Huvi pakub küsimus, kas mõõtmistulemustes ilmneb süstemaatilisi erinevusi vastavalt erinevatele tingimustele, s. t. tuleb kontrollida üht hüpoteesidest:

$$H_1 : EX \neq EY ;$$
$$H_2 : EX > EY ;$$
$$H_3 : EX < EY ,$$

mida võib üldiselt tõlgendada kui hüpoteese:

H_1 : mõõtmisseeriates on süstemaatiline erinevus;

H_2 : seost $x_i > y_i$ esineb oluliselt rohkem kui seost $x_i < y_i$;

H_3 : seost $x_i < y_i$ esineb oluliselt rohkem kui seost $x_i > y_i$.

2. Hüpoteeside kontrollimine märgitesti abil (ainult "+" ja "-" tulemused).

Statistikuteks, mille põhjal hüpoteese H_1-H_3 kontrollitakse, on positiivsete vahede "+" arv k ja negatiivsete vahede "-" arv l vastavalt väljavõtte mahule n.

Vastav vahede arvu jaotus eeldusel $H_0 : EX = EY$ allub binomiaaljaotusele $B(n,\frac{1}{2})$; selle jaotuse abil on leitud ka hüpoteeside H_1-H_3 kriitilised piirkonnad sõltuvalt väljavõtte mahust n ja olulisuse nivoost α .

Vaatleme kõigepealt olukorda $k+l = n$ (0-tulemusi ei ole). Arvutame $k^* = \min(k,l)$ ning leiame tabelist vastavalt α ja n väärtusele kriitilise väärtuse $K_{\alpha,n}$.

Kui $k^* \leq K_{\alpha,n}$, loeme H_1 õigeks (olulisuse nivooga α), kui aga $k^* > K_{\alpha,n}$, tuleb vastu võtta nullhüpotees H_0 , (mida tõlgendame: erinevused seoste $x_i < y_i$ ja $x_i > y_i$ arvus ei ole olulised).

Ühepoolseid hüpoteese H_2 ja H_3 tuleb kontrollida sel juhul, kui mingi eelneva informatsiooni põhjal (enne katse teostamist) on alust üht neist eelistada. Hüpoteesi

H_2 kontrollimisel on mõtet üksnes juhul, kui $l > k$, vastasel korral tuleb see hüpotees otsekohe kummutada.

Kui $k \leq K_{2\alpha,n}$, loeme hüpoteesi H_2 õigeks (olulisuse nivooga α), kui aga $k > K_{2\alpha,n}$, tuleb vastu võtta nullhüpotees (seost $x_i > y_i$ ei esine seosest $x_i < y_i$ oluliselt rohkem, erinevus on ainult juhuslikku laadi).

Hüpoteesi H_3 kontrollimisel on mõtet vaid siis, kui $l < k$. Võrdleme arvu l kriitilise väärtusega $K_{2\alpha,n}$.

Kui $l \leq K_{2\alpha,n}$, loeme hüpoteesi H_3 õigeks (olulisuse nivooga α), kui aga $l > K_{2\alpha,n}$, tuleb vastu võtta nullhüpotees (seost $x_i < y_i$ ei esine seosest $x_i > y_i$ oluliselt rohkem, erinevus on ainult juhuslikku laadi).

3. <u>Hüpoteeside kontrollimine juhul, kui esineb ka "0"-tulemusi.</u>

Vaatleme nüüd olukorda, kus osa väärtuspaaridest annavad võrdlemisel tulemuse $x_i = y_i$, mille tähistasime sümboolselt "0"-tulemusena.

On kaks võimalust sellise ülesande lahendamiseks märgitesti abil.

Üks neist on: jätta nulltulemused välja ja võtta n asemel väljavõtte mahuks $n' = k + l$. Edasine ülesande lahendamine taandub punktis 2 kirjeldatule.

Teine võimalus on: jaotada nulltulemused pooleks ning liita neist pooled positiivsete, pooled negatiivsete tulemustega, seega

$$k' = k + \frac{n-(l+k)}{2} \; ; \quad l' = l + \frac{n-(l+k)}{2}$$

(paaritu arvu puhul paigutame viimase elemendi juhuslikult).

Enamus õpikute autoreid soovitab esimest meetodit, kuna saadud kriteerium osutub võimsamaks teisest meetodist, samal ajal on aga ka hüpoteesi H_1 (H_2,H_3) eksliku vastuvõtmise tõenäosus suurem kui teisel meetodil.

Näib aga, et meetodite vahel tuleb valik teostada sõltuvalt probleemi sisust. Kui mõõtmistulemused x_i, y_i on diskreetsed (arvulised) suurused, näiteks perekonnaliikmete arv erinevatel aastatel, lahendatud ülesannete arv erinevates kontrolltöödes jne., on sisuliselt õige rakendada esimest meetodit, kuna 0-tulemused tõepoolest ei sisalda mingit informatsiooni muutuse suuna kohta.

Kui aga arvud x_i ja y_i väljendavad mingi pidevalt muutuva näitaja mõõtmistulemusi (vererõhk enne ja pärast ravimi manustamist, viljasaak erinevate väetiste kasutamisel), võib arvata, et 0-tulemus sisaldab tegelikult ka muutust, mis on ainult niivõrd väike, et mõõtmistäpsus ei võimaldanud seda registreerida. Et mõõtmistäpsus mõlemas suunas on sama, võib lugeda põhjendatuks 0-tulemuste arvu võrdset jaotamist positiivsete ja negatiivsete suuruste vahel.

Tabelitega 7.6 ja 7.7 paralleelselt esitame veel sellega mõnevõrra kattuva tabeli 7.8, milles on antud sõltuvalt α ja k väärtusest minimaalsed n väärtused, mille puhul hüpoteesid H_1, H_2 ja H_3 vastu võetakse.

Tabel 7.6.

Märgitesti kriitilised väärtused.

N	1%	5%	10%	25%	N	1%	5%	10%	25%
1					46	13	15	16	18
2					47	14	16	17	19
3				0	48	14	16	17	19
4				0	49	15	17	18	19
5			0	0	50	15	17	18	20
6		0	0	1	51	15	18	19	20
7		0	0	1	52	16	18	19	21
8	0	0	1	1	53	16	18	20	21
9	0	1	1	2	54	17	19	20	22
10	0	1	1	2	55	17	19	20	22
11	0	1	2	3	56	17	20	21	23
12	1	2	2	3	57	18	20	21	23
13	1	2	3	3	58	18	21	22	24
14	1	2	3	4	59	19	21	22	24
15	2	3	3	4	60	19	21	23	25
16	2	3	4	5	61	20	22	23	25
17	2	4	4	5	62	20	22	24	25
18	3	4	5	6	63	20	23	24	26
19	3	4	5	6	64	21	23	24	26
20	3	5	5	6	65	21	24	25	27
21	4	5	6	7	66	22	24	25	27
22	4	5	6	7	67	22	25	26	28
23	4	6	7	8	68	22	25	26	28
24	5	6	7	8	69	23	25	27	29
25	5	7	7	9	70	23	26	27	29
26	6	7	8	9	71	24	26	28	30
27	6	7	8	10	72	24	27	28	30
28	6	8	9	10	73	25	27	28	31
29	7	8	9	10	74	25	28	29	31
30	7	9	10	11	75	25	28	29	32
31	7	9	10	11	76	26	28	30	32
32	8	9	10	12	77	26	29	30	32
33	8	10	11	12	78	27	29	31	33
34	9	10	11	13	79	27	30	31	33
35	9	11	12	13	80	28	30	32	34
36	9	11	12	14	81	28	31	32	34
37	10	12	13	14	82	28	31	33	35
38	10	12	13	14	83	29	32	33	35
39	11	12	13	15	84	29	32	33	36
40	11	13	14	15	85	30	32	34	36
41	11	13	14	16	86	30	33	34	37
42	12	14	15	16	87	31	33	35	37
43	12	14	15	17	88	31	34	35	38
44	13	15	16	17	89	31	34	36	38
45	13	15	16	18	90	32	35	36	39

Tabel pärineb teosest [1] , lk. 417.

Tabel 7.7.

Märgitesti jaotusfunktsioon: $P(X \leq x)$, kui $X \sim B(n,1/2)$.

N	x	α
$N = 3$	0	.125
$N = 4$	0	.062
	1	.312
$N = 5$	0	.031
	1	.188
$N = 6$	0	.016
	1	.109
	2	.344
$N = 7$	0	.008
	1	.062
	2	.227
$N = 8$	0	.004
	1	.035
	2	.145
$N = 9$	0	.002
	1	.020
	2	.090
	3	.254
$N = 10$	0	.001
	1	.011
	2	.055
	3	.172
$N = 11$	0	.000
	1	.006
	2	.033
	3	.113
	4	.274
$N = 12$	1	.003
	2	.019
	3	.073
	4	.194
$N = 13$	1	.002
	2	.011
	3	.046
	4	.133
$N = 14$	1	.001
	2	.006
	3	.029
	4	.090
	5	.212
$N = 15$	1	.000
	2	.004
	3	.018
	4	.059
	5	.151
$N = 16$	2	.002
	3	.011
	4	.038
	5	.105
	6	.227
$N = 17$	2	.001
	3	.006
	4	.025
	5	.072
	6	.166
$N = 18$	3	.004
	4	.015
	5	.048
	6	.119
	7	.240
$N = 19$	3	.002
	4	.010
	5	.032
	6	.084
	7	.180
$N = 20$	3	.001
	4	.006
	5	.021
	6	.058
	7	.132
$N = 21$	4	.004
	5	.013
	6	.039
	7	.095
	8	.192
$N = 22$	4	.002
	5	.008
	6	.026
	7	.067
	8	.143
$N = 23$	4	.001
	5	.005
	6	.017
	7	.047
	8	.105
	9	.202
$N = 24$	5	.003
	6	.011
	7	.032
	8	.076
	9	.154
$N = 25$	5	.002
	6	.007
	7	.022
	8	.054
	9	.115
	10	.212
$N = 26$	6	.005
	7	.014
	8	.038
	9	.084
	10	.163
$N = 27$	6	.003
	7	.010
	8	.026
	9	.061
	10	.124
	11	.221
$N = 28$	6	.002
	7	.006
	8	.018
	9	.044
	10	.092
	11	.172
$N = 29$	7	.004
	8	.012
	9	.031
	10	.068
	11	.132
$N = 30$	7	.003
	8	.008
	9	.021
	10	.049
	11	.100
	12	.181
$N = 31$	7	.002
	8	.005
	9	.015
	10	.035
	11	.075
	12	.141
$N = 32$	8	.004
	9	.010
	10	.025
	11	.055
	12	.108
	13	.189
$N = 33$	8	.002
	9	.007
	10	.018
	11	.040
	12	.081
	13	.148
$N = 34$	9	.005
	10	.012
	11	.029
	12	.061
	13	.115
	14	.196
$N = 35$	9	.003
	10	.008
	11	.020
	12	.045
	13	.088
	14	.155
$N = 36$	9	.002
	10	.006
	11	.014
	12	.033
	13	.066
	14	.121
	15	.203
$N = 37$	10	.004
	11	.010
	12	.024
	13	.049
	14	.094
	15	.162
$N = 38$	10	.003
	11	.007
	12	.017
	13	.036
	14	.072
	15	.128
$N = 39$	11	.005
	12	.012
	13	.027
	14	.054
	15	.100
	16	.168
$N = 40$	11	.003
	12	.008
	13	.019
	14	.040
	15	.077
	16	.134
$N = 41$	11	.002
	12	.006
	13	.014
	14	.030
	15	.059
	16	.106
	17	.174
$N = 42$	12	.004
	13	.010
	14	.022
	15	.044
	16	.082
	17	.140

Tabel pärineb teosest [1], lk. 418-420.

Tabel 7.7 (järg).

z	α
$N = 43$	
12	.003
13	.007
14	.016
15	.033
16	.063
17	.111
18	.180
$N = 44$	
13	.005
14	.011
15	.024
16	.048
17	.087
18	.146
$N = 45$	
13	.003
14	.008
15	.018
16	.036
17	.068
18	.116
19	.186
$N = 46$	
13	.002
14	.006
15	.013
16	.027
17	.052
18	.092
19	.151
$N = 47$	
14	.004
15	.009
16	.020
17	.039
18	.072
19	.121
20	.191
$N = 48$	
14	.003
15	.007
16	.015
17	.030
18	.056
19	.097
20	.156

z	α
$N = 49$	
15	.005
16	.011
17	.022
18	.043
19	.076
20	.126
$N = 50$	
15	.003
16	.008
17	.016
18	.032
19	.059
20	.101
21	.161
$N = 51$	
15	.002
16	.005
17	.012
18	.024
19	.046
20	.080
21	.131
$N = 52$	
16	.004
17	.009
18	.018
19	.035
20	.063
21	.106
22	.166
$N = 53$	
16	.003
17	.006
18	.014
19	.027
20	.049
21	.084
22	.136
$N = 54$	
17	.005
18	.010
19	.020
20	.038
21	.067
22	110
23	.170

z	α
$N = 55$	
17	.003
18	.007
19	.015
20	.029
21	.052
22	.089
23	.140
$N = 56$	
17	.002
18	.005
19	.011
20	.022
21	.041
22	.070
23	.114
24	.175
$N = 57$	
18	.004
19	.008
20	.017
21	.031
22	.056
23	.092
24	.145
$N = 58$	
18	.003
19	.006
20	.012
21	.024
22	.043
23	.074
24	.119
25	.179
$N = 59$	
19	.004
20	.009
21	.018
22	.034
23	.059
24	.096
25	.149

z	α
$N = 60$	
19	.003
20	.007
21	.014
22	.026
23	.046
24	.078
25	.123
26	.183
$N = 61$	
20	.005
21	.010
22	.020
23	.036
24	.062
25	.100
26	.153
$N = 62$	
20	.004
21	.008
22	.015
23	.028
24	.049
25	.081
26	.126
$N = 63$	
20	.003
21	.006
22	.011
23	.021
24	.038
25	.065
26	.104
27	.157
$N = 64$	
21	.004
22	.008
23	.016
24	.030
25	.052
26	.084
27	.130

z	α
$N = 65$	
21	.003
22	.006
23	.012
24	.023
25	.041
26	.068
27	.107
28	.161
$N = 66$	
22	.005
23	.009
24	.018
25	.032
26	.054
27	.088
28	.134
$N = 67$	
22	.003
23	.007
24	.014
25	.025
26	.043
27	.071
28	.111
29	.164
$N = 68$	
22	.002
23	.005
24	.010
25	.019
26	.034
27	.057
28	.091
29	.137
$N = 69$	
23	.004
24	.008
25	.015
26	.027
27	.046
28	.074
29	.114
30	.168

z	α
$N = 70$	
23	.003
24	.006
25	.011
26	.021
27	.036
28	.060
29	.094
30	.141
$N = 71$	
24	.004
25	.008
26	.016
27	.028
28	.048
29	.077
30	.118
31	.171
$N = 72$	
24	.003
25	.006
26	.012
27	.022
28	.038
29	.062
30	.097
31	.144
$N = 73$	
25	.005
26	.009
27	.017
28	.030
29	.050
30	.080
31	.121
32	.175
$N = 74$	
25	.004
26	.007
27	.013
28	.024
29	.040
30	.065
31	.100
32	.148

Tabel 7.7 (jätk).

z	α
N = 75	
25	.003
26	.005
27	.010
28	.018
29	.032
30	.053
31	.083
32	.124
33	.179
N = 76	
26	.004
27	.008
28	.014
29	.025
30	.042
31	.068
32	.103
33	.151
N = 77	
26	.003
27	.006
28	.011
29	.020
30	.034
31	.055
32	.086
33	.127
N = 78	
27	.004
28	.008
29	.015
30	.027
31	.044
32	.070
33	.106
34	.154
N = 79	
27	.003
28	.006
29	.012
30	.021
31	.036
32	.057
33	.088
34	.130

z	α
N = 80	
28	.005
29	.009
30	.016
31	.028
32	.046
33	.073
34	.109
35	.157
N = 81	
28	.004
29	.007
30	.013
31	.022
32	.037
33	.060
34	.091
35	.133
N = 82	
28	.003
29	.005
30	.010
31	.018
32	.030
33	.049
34	.075
35	.112
36	.160
N = 83	
29	.004
30	.008
31	.014
32	.024
33	.039
34	.062
35	.094
36	.136
N = 84	
29	.003
30	.006
31	.011
32	.019
33	.031
34	.051
35	.078
36	.115
37	.163

z	α
N = 85	
30	.004
31	.008
32	.015
33	.025
34	.041
35	.064
36	.096
37	.139
N = 86	
30	.003
31	.006
32	.011
33	.020
34	.033
35	.053
36	.080
37	.118
38	.166
N = 87	
31	.005
32	.009
33	.016
34	.027
35	.043
36	.066
37	.099
38	.142
N = 88	
31	.004
32	.007
33	.012
34	.012
35	.035
36	.055
37	.083
38	.120
39	.169

z	α
N = 89	
31	.003
32	.005
33	.010
34	.017
35	.028
36	.045
37	.069
38	.102
39	.145
N = 90	
32	.004
33	.007
34	.013
35	.022
36	.036
37	.057
38	.085
39	.123
40	.171
N = 91	
32	.003
33	.006
34	.010
35	.018
36	.029
37	.046
38	.071
39	.104
40	.147
N = 92	
33	.004
34	.008
35	.014
36	.024
37	.038
38	.059
39	.087
40	.126

z	α
N = 93	
33	.003
34	.006
35	.011
36	.019
37	.031
38	.048
39	.073
40	.107
41	.150
N = 94	
34	.005
35	.009
36	.015
37	.025
38	.039
39	.061
40	.090
41	.128
N = 95	
34	.004
35	.007
36	.012
37	.020
38	.032
39	.050
40	.075
41	.109
42	.152
N = 96	
34	.003
35	.005
36	.009
37	.016
38	.026
39	.041
40	.063
41	.092
42	.131

z	α
N = 97	
35	.004
36	.007
37	.012
38	.021
39	.034
40	.052
41	.077
42	.111
43	.155
N = 98	
35	.003
36	.006
37	.010
38	.017
39	.027
40	.043
41	.065
42	.094
43	.133
N = 99	
36	.004
37	.008
38	.013
39	.022
40	.035
41	.054
42	.080
43	.114
44	.157
N = 100	
36	.003
37	.006
38	.010
39	.018
40	.028
41	.044
42	.067
43	.097
44	.136

Tabel 7.8.

Märgitest. Mahu n kriitilised väärtused vastavalt α ja k väärtustele.

K	α					K	α				
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005		0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
0	4	5	6	7	8	26	64	67	70	73	76
1	7	8	9	11	12	27	66	69	72	76	78
2	9	11	12	14	15	28	68	71	74	78	80
3	12	13	15	17	18	29	70	74	77	80	83
4	14	16	17	19	21	30	72	76	79	83	85
5	17	18	20	22	24	31	75	78	81	85	87
6	19	21	23	25	26	32	77	80	83	87	90
7	21	23	25	27	29	33	79	82	86	89	92
8	24	26	28	30	32	34	81	85	88	92	94
9	26	28	30	33	34	35	83	67	90	94	97
10	28	30	33	35	37	36	85	89	92	96	99
11	31	33	35	38	39	37	87	91	94	98	101
12	33	35	37	30	42	38	90	93	97	101	104
13	35	37	40	42	44	39	92	96	99	103	106
14	37	40	42	45	47	40	94	98	101	105	108
15	39	42	44	47	49	41	96	100	103	108	110
16	42	44	47	50	52	42	98	102	106	110	113
17	44	47	49	52	54	43	100	104	108	112	115
18	46	49	51	54	57	44	102	106	110	114	117
19	48	51	54	57	59	45	105	109	112	117	120
20	51	53	56	59	61	46	107	111	114	119	122
21	53	56	58	62	64	47	109	113	117	121	124
22	55	58	61	64	66	48	111	115	119	123	126
23	57	60	63	66	69	49	113	117	121	125	129
24	59	62	65	69	71	50	115	119	123	128	131
25	62	65	67	71	73	51	117	122	125	130	133

Tabel pärineb teosest [5], lk. 415.

4. Kahe väljavõtte võrdlemine märgitesti abil.

Juhul kui väljavõtete $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ ja $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ mahud n_1 ja n_2 on võrdsed, saab ka kahe väljavõtte võrdlemiseks (vt. hüpoteesid H_1-H_3, punkt 3.1) kasutada märgitesti.

Olgu väljavõtted juhuslikus järjestuses. Kui nad seda pole, kasutame juhusliku järjestuse saavutamiseks juhuslike arvude tabelit. Leiame järjest vahed:

$$d_1 = x_1 - y_1, \quad d_2 = x_2 - y_2, \dots, \quad d_n = x_n - y_n \quad (n = n_1 = n_2) .$$

Hüpoteesidega H_1, H_2 ja H_3 on samaväärsed hüpoteesid:

$$H_1' : ED = 0 ;$$

$$H_2' : ED > 0 ;$$

$$H_3' : ED < 0 ,$$

kus $D = X - Y$ on juhuslik suurus ning D väärtuste väljavõtteks on vahede d_i hulk. Hüpoteese $H_1' - H_3'$ on aga juba lihtne märgitesti abil kontrollida.

5. Märgitesti võimsusefektiivsus.

Et hüpoteese $H_1' - H_3'$ on võimalik kontrollida ka teiste meetoditega, näiteks X ja Y normaalsuse korral t-testi abil, pakub huvi erinevate meetodite võimsuse võrdlemine. Selliseks võrdlemiseks defineerime nn. võimsusefektiivsuse ε kui suhte

$$\varepsilon = \frac{n_t}{n} ,$$

kus n on vaadeldava meetodi puhul antud juhul kasutatav väljavõtte maht, n_t - aga sama võimsuse saavutamiseks vajalik väljavõtte maht t-testi kasutamise korral (eeldades, et muud tingimused püsivad konstantsetena). Tabelis 7.9 on toodud võimsusefektiivsuse väärtused sõltuvalt kriteeriumi olulisuse nivoost α, väljavõtte mahust n ja keskmiste vahest $\delta = m_1 - m_2$.

Tabel 7.9.

Märgitesti võimsusefektiivsus.

n	α	δ				
		Near 0	.5	1.0	1.5	2.0
5	.0625	96	96	95	93	91
10	.0020	94	92	90	87	84
10	.0215	85	84	82	80	77
10	.1094	77	76	74	72	
20	.0118	76	75	73	70	
20	.0414	73	72	70	68	
20	.1153	70	69	67	65	
∞	α	63.7				

Tabel pärineb teosest [1], lk. 285.

Näide 7.6.

Peale täiendavat õppimist paranesid 27-l õpilasel 40-st kontrolltöö tulemused. Kas on tegemist juhusliku muutusega (hüpoteesi kontrollimisel kasutada olulisuse nivood 0,01)?

Lahendus.

Kuna meid huvitab ühepoolne muutus, tuleb kontrollida ühepoolset hüpoteesi H_3. Leiame

$$k^* = 40 - 27 = 13 .$$

Ühepoolse hüpoteesi kontrollimiseks olulisuse nivooga 0,01 me tabelit 7.6 kasutada ei saa, sest puudub vajalik α väärtus. Küll aga näeme, et $k_{0,05;40} = 13$, seega võime hüpoteesi H_3 lugeda tõestatuks olulisuse nivooga 0,025. Lahenduse täpsustamiseks vaatleme veel tabelit 7.7, kust järeldub, et hüpoteesi H_3 võiksime tõestada küll olulisuse nivooga 0,019; kuid kui on nõutav tõestus olulisuse nivooga 0,01, tuleb vastu võtta H_0 .

Näide 7.7.

Ravimi manustamise tagajärjel 50-le haigele täheldati järgmisi muudatusi vererõhus:

5-l haigel vererõhk suurenes;
25-l " " vähenes;
20-l " " jäi endiseks.

Kas võime öelda, et ravim mõjustas vererõhku kindlas suunas? Kui mõjustas, siis kas suurenemise või vähenemise poole? Olulisuse nivooks valida 0,05.

Lahendus.

Kontrollimist vajab hüpotees H_1 .

Oletades, et 20-l patsiendil, kellel vererõhk jäi endiseks, esines siiski väikesi muudatusi, jaotame nende arvu kaheks. Saame siis:

$$k = 5 + 10 = 15,$$
$$l = 25 + 10 = 35 .$$

Kuna $K_{0,05;50} = 17$, saame hüpoteesi H_1 õigeks tunnistada. Veelgi enam, et $K_{0,01;50} = 15$, saame hüpoteesi H_1 lugeda õigeks ka olulisuse nivooga 0,01.

6. Märgitesti jaoks vajalik minimaalne väljavõtte maht.

Mõnikord on otstarbekas jooksva uurimistöö käigus planeerida vajalikku väljavõtte mahtu vastavalt juba olemasolevatele katsetulemustele. Selleks toome ära tabeli 7.10, milles esitatakse väljavõtte mahu minimaalväärtused sõltuvalt väljavõtte põhjal saadud suhte hinnangust $\frac{k}{n-k}$ ning nõutavast olulisuse nivoost hüpoteesi $H_1 : p \neq 1/2$ tõestamisel.

Näide 7.8.

Olgu katseseeriae positiivse ja negatiivse tulemuse (tähistame need vastavalt A ja $\bar{A}$) esinemise suhe umbes 1 : 3. Leida vajalik väljavõtte maht selleks, et tõestada hüpotees

$$H_1 : P(A) \neq P(\bar{A})$$

olulisuse nivooga 0,05.

Lahendus.

Väljavõtte põhjal saame tõenäosuse $p = P(A)$ jaoks hinnangu $\hat{p} \approx 0,25$. Tabelist 7.10 näeme, et sel juhul on vajalik väljavõtte maht $n = 49$; seega tuleks planeerida umbes 50-katseline katseseeria.

Tabel 7.10.

Märgitesti jaoks vajalik minimaalne väljavõtte maht.

$\frac{k}{n-k}$	α = 1%	5%	10%	25%
.45(.55)	1,777*	1,297*	1,080*	780*
.40(.60)	442*	327	267*	193*
.35(.65)	193*	143	118*	86
.30(.70)	106*	79	67	47
.25(.75)	66	49	42	32
.20(.80)	44	35	28	21
.15(.85)	32	23	18	14
.10(.90)	24	17	13	11
.05(.95)	15	12	11	6

Tabel pärineb teosest [1], lk. 283.

7. Wilcoxoni test.

Mõningatel juhtudel annab märgitestist paremaid tulemusi Wilcoxoni test, mis kuulub samuti mitteparameetriliste testide hulka, kuid nõuab siiski, et uuritavad juhuslikud suurused oleksid kvantitatiivsed, nii et vahed $d_i = x_i - y_i$ oleksid järjestatavad. Wilcoxoni test arvestab mitte üksnes vahede märke (nagu märgitest), vaid lisaks ka vahede suurusi, täpsemalt - nende kohti järjestuses.

Järjestame vahed d_i nende absoluutväärtuste kasvamise järjekorras:

$$0 \leq |d_{i_1}| \leq |d_{i_2}| \leq \dots \leq |d_{i_{n'}}|, \qquad (2)$$

kus $n' \leq n$, ning määrame igale vahele d_i tema järjekorranumbri jadas (2). Kui mitu vahet d_{i_j}, d_{i_j+1}, ..., d_{i_j+k} absoluutväärtuse poolest ühte langevad, leiame nende järjekorranumbrite aritmeetilise keskmise $\frac{i_j+i_j+k}{2}$ ning omistame kõigile vaadeldavatele võrdsetele vahedele sama järjekorranumbri.

Seejärel leiame negatiivsetele vahedele vastavate järjekorranumbrite summa S^- ja positiivsetele vahedele vastavate järjekorranumbrite summa S^+. Vaadeldavate summade jaotused eeldusel $H_0 : ED = 0$ on tabuleeritud. Tabelis 7.11 on esitatud hüpoteesi H_1 kriitilised väärtused sõltuvalt väljavõtte mahust n ja soovitavast olulisuse nivoost α.

Hüpoteesi H_1 kontrollimiseks leiame väljavõtte põhjal summad S^+ ja S^- ning seejärel

$$S = \min(S^+, S^-) .$$

Kui $S < S_{n,\alpha}$ (viimase väärtuse leiame tabelist 7.11), siis võtame vastu hüpoteesi H_1, s. t. loeme tõestatuks (olulisuse nivooga α), et väljavõtted pärinevad erinevatest üldkogumitest. Vastasel juhul, kui $S > S_{n,\alpha}$, tuleb võtta vastu nullhüpotees, s. t. järeldada, et väljavõtted võivad kuuluda ühte üldkogumisse; see on seda tõenäolisem, mida lähemal on S^+ ja S^- teineteisele oma väärtuse poolest. Wilcoxoni testi võimsusefektiivsus on normaaljaotuste puhul $\sim 0{,}955$, seega keskmiselt tähendab see informatsioonikadu $\frac{1}{22}$ osa väljavõttest.

Näide 7.9.

Katsetatagu kaht erinevat viljasorti A ja B mitmetel pinnastel ning mitmete harimisviiside korral. Katsetulemused on esitatud kümne vaatluspaarina.

Tabel 7.11.

Wilcoxoni testi kriitilised väärtused.

n	ühepoolne kriteerium: α		
	0,025	0,01	0,005
	kahepoolne kriteerium: α		
	0,05	0,02	0,01
6	0	—	—
7	2	0	—
8	4	2	0
9	6	3	2
10	8	5	3
11	11	7	5
12	14	10	7
13	17	13	10
14	21	16	13
15	25	20	16
16	30	24	20
17	35	28	23
18	40	33	28
19	46	38	32
20	52	43	38
21	59	49	43
22	66	56	49
23	73	62	55
24	81	69	61
25	89	77	68

Tabel pärineb teosest [4], lk. 651.

Nõutakse kontrollida: a) sortide erinevust keskmise saagikuse poolest; b) kas sort A on sordist B viljakam.

Katse tulemused on esitatud järgmise tabeli esimeses kolmes veerus.

Katse nr.	Sort A	Sort B	Vahe	Vahe jrk. nr.	Vahe märk
1.	47,8	46,1	1,7	5	+
2.	50,1	48,6	1,5	3,5	+
3.	47,6	48,2	-0,6	1	-
4.	48,6	43,0	5,6	7	+
5.	46,3	46,3	0		
6.	38,6	28,9	9,7	8	+
7.	31,1	28,0	3,1	6	+
8.	28,5	27,0	1,5	3,5	+
9.	32,5	32,5	0		
10.	27,0	27,9	-0,9	2	-

Lahendus.

Täiendame tabelit, arvutades vahed (veerg 4), järjestades seejärel nullist erinevad vahed (veerg 5) ning lõpuks leides veel, millised vahedest kuuluvad positiivsete, millised negatiivsete hulka (viimane veerg on ühtlasi kontrolliks). Arvestamata jätame nulliga võrduvad vahed, seega tuleb arvesse ainult 10-2 = 8 paari. Kuna negatiivsete liikmete summa $S^- = 3$ on ilmselt väiksem, võime S^+ arvutamisest loobuda ja leida järgmiseks tabelist 7.8 kriitilised väärtused $S_{8,\alpha}$. Näeme, et $\alpha = 0{,}025$ puhul $S_{8,\alpha} = 4$ ning rahuldab tingimust $S < S_{n,\alpha}$. Seega võime kinnitada, et hüpotees a) on tõestatud olulisuse nivooga $2\alpha = 0{,}05$; sama mõttekäik näitab ühtlasi, et hüpotees b) (ühepoolne) on tõestatud olulisuse nivooga 0,025.

§ 4. ITERATSIOONITEST KATSETULEMUSTE JADA HOMOGEENSUSE KONTROLLIMISEKS.

Sageli tekib vajadus kontrollida, kas katseseeria on homogeenne, kas katsetulemused paiknevad kogu seeria vältel juhuslikult. Seda asjaolu saab kontrollida järgnevalt kirjeldamisele tuleva iteratsioonitesti abil.

Olgu mingil katsel 2 võimalikku tulemust, mida me tinglikult tähistame tähtedega A ja B . Registreerime järjest teostatud katsete tulemused jadana, näiteks

A A B B B A B B B A A B B A A B B .

Sellise jada saab jagada lõikudeks, mis koosnevad ainult ühest sümbolist:

AA; BBB; A; BBB; AA; BB; AA; BB.

Nimetame neid lõike iteratsioonideks; siit pärineb ka nimetus iteratsioonitest.

Probleemiks, mis vajab lahendamist, on tulemuste A ja B paiknemise juhuslikkus katsetulemuste jadas. Hüpoteesid sõnastame järgnevalt:

H_0 : katsetulemused A ja B paiknevad jadas juhuslikult;

H_1 : katsetulemused A ja B ei paikne juhuslikult, vaid mingi seaduspärasuse järgi.

Statistikuks, mille alusel ülalmärgitud hüpoteese kontrollime, on iteratsioonide arv k jadas, mis sisaldab n_1 katsetulemust A ja n_2 katsetulemust B, $n_1 + n_2 = n$. Tabelites 7.12 ja 7.13 on esitatud hüpoteesi

H_1 jaoks statistiku k kriitilised väärtused sõltuvalt n_1 ja n_2 väärtustest ning olulisuse nivoost α.

Hüpoteesi H_o võime vastu võtta siis, kui on täidetud tingimus

$$\underline{k} < k < \bar{k} ,$$

hüpoteesi H_1 saame tõestatuks lugeda niihästi siis, kui $k \leq \underline{k}$ kui ka siis, kui $k \geq \bar{k}$.

Näide 7.10.

Vaatleme jadasid

$$+ - + - + - + - +$$

ja

$$+ + + + + - - - - .$$

Kas niisugused jadad võivad olla juhuslikud?

Lahendus.

Käesoleval juhul $n_1 = 5$, $n_2 = 4$. Iteratsioonide arvuks on 9 esimeses jadas ja 2 teises jadas. Tabelist 7.12 saame k kriitilisteks väärtusteks $\underline{k} = 2$; $\bar{k} = 9$, seega ei ole täidetud tingimus $\underline{k} < k < \bar{k}$ ning juhuslikkuse hüpotees tuleb mõlema jada puhul kummutada.

Sama meetodit saab kasutada ka juhul kui katsetulemused on kvantitatiivsed. Muutugu need vahemikus (a,b); valime mingi arvu c : $a < c < b$, ning defineerime sündmused A ja B kui katsetulemuse kuulumine vahemikku (a,c) või poollõiku $[c,b)$; samuti võib näiteks sündmuseks A lugeda vaatlustulemuste kuulumise mingisse piirkonda $|x - \bar{x}| > c$, s. o. keskväärtusest tugevasti hälbivate väärtuste esinemise.

Tabel 7.12.

Iteratsioonitesti kriitilised väärtused ($m \leq n$).

m	n	α 0,10	0,05	0.02	0,01
2	2	1 5	1 5	1 5	1 5
	3	1 6	1 6	1 6	1 6
	4	1 6	1 6	1 6	1 6
	5	1 6	1 6	1 6	1 6
	6	1 6	1 6	1 6	1 6
	7	1 6	1 6	1 6	1 6
	8	2 6	1 6	1 6	1 6
	9	2 6	1 6	1 6	1 6
	10	2 6	1 6	1 6	1 6
	11	2 6	1 6	1 6	1 6
	12	2 6	2 6	1 6	1 6
	13	2 6	2 6	1 6	1 6
	14	2 6	2 6	1 6	1 6
	15	2 6	2 6	1 6	1 6
	16	2 6	2 6	1 6	1 6
	17	2 6	2 6	1 6	1 6
	18	2 6	2 6	1 6	1 6
	19	2 6	2 6	2 6	1 6
	20	2 6	2 6	2 6	1 6
3	3	1 7	1 7	1 7	1 7
	4	1 7	1 8	1 8	1 8
	5	2 8	1 8	1 8	1 8
	6	2 8	2 8	1 8	1 8
	7	2 8	2 8	1 8	1 8
	8	2 8	2 8	1 8	1 8
	9	2 8	2 8	2 8	1 8
	10	3 8	2 8	2 8	1 8
	11	3 8	2 8	2 8	1 8
	12	3 8	2 8	2 8	2 8
	13	3 8	2 8	2 8	2 8
	14	3 8	2 8	2 8	2 8
	15	3 8	3 8	2 8	2 8
	16	3 8	3 8	2 8	2 8
	17	3 8	3 8	2 8	2 8
	18	3 8	3 8	2 8	2 8
	19	3 8	3 8	2 8	2 8
	20	3 8	3 8	2 8	2 8
4	4	2 8	1 9	1 9	1 9
	5	2 9	2 9	1 9	1 10
	6	3 9	2 9	2 10	1 10
	7	3 9	2 10	2 10	1 10
	8	3 10	3 10	2 10	2 10
	9	3 10	3 10	2 10	2 10
	10	3 10	3 10	2 10	2 10
	11	3 10	3 10	2 10	2 10
	12	4 10	3 10	3 10	2 10
	13	4 10	3 10	3 10	2 10
	14	4 10	3 10	3 10	2 10
	15	4 10	3 10	3 10	3 10
	16	4 10	4 10	3 10	3 10
	17	4 10	4 10	3 10	3 10
4	18	4 10	4 10	3 10	3 10
	19	4 10	4 10	3 10	3 10
	20	4 10	4 10	3 10	3 10
5	5	3 9	2 10	2 10	1 11
	6	3 10	3 10	2 11	2 11
	7	3 10	3 11	2 11	2 12
	8	3 11	3 11	2 12	2 12
	9	4 11	3 12	3 12	2 12
	10	4 11	3 12	3 12	3 12
	11	4 12	4 12	3 12	3 12
	12	4 12	4 12	3 12	3 12
	13	4 12	4 12	3 12	3 12
	14	5 12	4 12	3 12	3 12
	15	5 12	4 12	4 12	3 12
	16	5 12	4 12	4 12	3 12
	17	5 12	4 12	4 12	3 12
	18	5 12	5 12	4 12	4 12
	19	5 12	5 12	4 12	4 12
	20	5 12	5 12	4 12	4 12
6	6	3 11	3 11	2 12	2 12
	7	4 11	3 12	3 12	2 13
	8	4 12	3 12	3 13	3 13
	9	4 12	4 13	3 13	3 14
	10	5 12	4 13	3 14	3 14
	11	5 13	4 13	4 14	3 14
	12	5 13	4 13	4 14	3 14
	13	5 13	5 14	4 14	3 14
	14	5 13	5 14	4 14	4 14
	15	6 14	5 14	4 14	4 14
	16	6 14	5 14	4 14	4 14
	17	6 14	5 14	5 14	4 14
	18	6 14	5 14	5 14	4 14
	19	6 14	6 14	5 14	4 14
	20	6 14	6 14	5 14	4 14
7	7	4 12	3 13	3 13	3 13
	8	4 13	4 13	3 14	3 14
	9	5 13	4 14	4 14	3 15
	10	5 13	5 14	4 15	3 15
	11	5 14	5 14	4 15	4 15
	12	6 14	5 14	4 15	4 16
	13	6 14	5 15	5 16	4 16
	14	6 14	5 15	5 16	4 16
	15	6 15	6 15	5 16	4 16
	16	6 15	6 16	5 16	5 16
	17	7 15	6 16	5 16	5 16
	18	7 15	6 16	5 16	5 16
	19	7 15	6 16	6 16	5 16
	20	7 15	6 16	6 16	5 16

Tabel pärineb teosest [5], lk. 416-417.

<u>Tabel 7.12</u> (jãrg).

m	n	α 0,10	α 0,05	α 0,02	α 0,01
8	8	5 13	4 14	4 14	3 15
	9	5 14	5 14	4 15	3 15
	10	6 14	5 15	4 15	4 16
	11	6 15	5 15	5 16	4 16
	12	6 15	6 16	5 16	4 17
	13	6 15	6 16	5 17	5 17
	14	7 16	6 16	5 17	5 17
	15	7 16	6 16	5 17	5 18
	16	7 16	6 17	6 17	5 18
	17	7 16	7 17	6 18	5 18
	18	8 16	7 17	6 18	6 18
	19	8 16	7 17	6 18	6 18
	20	8 17	7 17	6 18	6 18
9	9	6 14	5 15	4 16	4 16
	10	6 15	5 16	5 16	4 17
	11	6 15	6 16	5 17	5 17
	12	7 16	6 16	5 17	5 18
	13	7 16	6 17	6 18	5 18
	14	7 17	7 17	6 18	5 18
	15	8 17	7 18	6 18	6 19
	16	8 17	7 18	6 18	6 19
	17	8 17	7 18	7 19	6 19
	18	8 18	8 18	7 19	6 20
	19	8 18	8 18	7 19	6 20
	20	9 18	8 18	7 19	7 20
10	10	6 16	6 16	5 17	5 17
	11	7 16	6 17	5 18	5 18
	12	7 17	7 17	6 18	5 19
	13	8 17	7 18	6 19	5 19
	14	8 17	7 18	6 19	6 19
	15	8 18	7 18	7 19	6 20
	16	8 18	8 19	7 20	6 20
	17	9 18	8 19	7 20	7 20
	18	9 19	8 19	7 20	7 21
	19	9 19	8 20	8 20	7 21
	20	9 19	9 20	8 20	7 21
11	11	7 17	7 17	6 18	5 19
	12	8 17	7 18	6 19	6 19
	13	8 18	7 19	6 19	6 20
	14	8 18	8 19	7 20	6 20
	15	9 19	8 19	7 20	7 21
	16	9 19	8 20	7 21	7 21
	17	9 19	9 20	8 21	7 22
	18	10 20	9 20	8 21	7 22
	19	10 20	9 21	8 22	6 22
	20	10 20	9 21	8 22	8 22
12	12	8 18	7 19	7 19	6 20
	13	9 18	8 19	7 20	6 21
	14	9 19	8 20	7 21	7 21
12	15	9 19	8 20	8 21	7 22
	16	10 20	9 21	8 22	7 22
	17	10 20	9 21	8 22	8 22
	18	10 21	9 21	8 22	8 23
	19	10 21	10 22	9 23	8 23
	20	11 21	10 22	9 23	8 23
13	13	9 19	8 20	7 21	7 21
	14	9 20	9 20	8 21	7 22
	15	10 20	9 21	8 22	7 22
	16	10 21	9 21	8 22	8 23
	17	10 21	10 22	9 23	8 23
	18	11 21	10 22	9 23	8 24
	19	11 22	10 23	9 24	9 24
	20	11 22	10 23	10 24	9 24
14	14	10 20	9 21	8 22	7 23
	15	10 21	9 22	8 23	8 23
	16	11 21	10 22	9 23	8 24
	17	11 22	10 23	9 24	8 24
	18	11 22	10 23	9 24	9 25
	19	12 23	11 23	10 24	9 25
	20	12 23	11 24	10 25	9 25
15	15	11 21	10 22	9 23	8 24
	16	11 22	10 23	9 24	9 24
	17	11 22	11 23	10 24	9 25
	18	12 23	11 24	10 25	9 25
	19	12 23	11 24	10 25	10 26
	20	12 24	12 25	11 26	10 26
16	16	11 23	11 23	10 24	9 25
	17	12 23	11 24	10 25	9 26
	18	12 24	11 25	10 26	10 26
	19	13 24	12 25	11 26	10 27
	20	13 25	12 25	11 26	10 27
17	17	12 24	11 25	10 26	10 26
	18	13 24	12 25	11 26	10 27
	19	13 25	12 26	11 27	10 27
	20	13 25	13 26	11 27	11 28
18	18	13 25	12 26	11 27	11 27
	19	14 25	13 26	12 27	11 28
	20	14 26	13 27	12 28	11 29
19	19	14 26	13 27	12 28	11 29
	20	14 27	13 27	12 29	12 29
20	20	15 27	14 28	13 29	12 30

Tabel 7.13.

Iteratsiooniteesti kriitilised väärtused, m = n .

$m=n$	α				$m=n$	α			
	0,10	0,05	0,02	0,01		0,10	0,05	0,02	0.01
20	15 26	14 27	13 28	12 29	60	51 70	49 72	47 74	46 75
21	16 27	15 28	14 29	13 30	61	52 71	50 73	48 75	47 76
22	17 28	16 29	14 31	14 31	62	53 72	51 74	49 76	48 77
23	17 30	16 31	15 32	14 33	63	54 73	52 75	50 77	49 78
24	18 31	17 32	16 33	15 34	64	55 74	53 76	51 78	49 80
25	19 32	18 33	17 34	16 35	65	56 75	54 77	52 79	50 81
26	20 33	19 34	18 35	17 36	66	57 76	55 78	53 80	51 82
27	21 34	20 35	19 36	18 37	67	58 77	56 79	54 81	52 83
28	22 35	21 36	19 38	18 39	68	58 79	57 80	54 83	53 84
29	23 36	22 37	20 39	19 40	69	59 80	58 81	55 84	54 85
30	24 37	22 39	21 40	20 41	70	60 81	58 83	56 85	55 86
31	25 38	23 40	22 41	21 42	71	61 82	59 84	57 86	56 87
32	25 40	24 41	23 42	22 43	72	62 83	60 85	58 87	57 88
33	26 41	25 42	24 43	23 44	73	63 84	61 86	59 88	57 90
34	27 42	26 43	24 45	23 46	74	64 85	62 87	60 89	58 91
35	28 43	27 44	25 46	24 47	75	65 86	63 88	61 90	59 92
36	29 44	28 45	26 47	25 48	76	66 87	64 89	62 91	60 93
37	30 45	29 46	27 48	26 49	77	67 88	65 90	63 92	61 94
38	31 46	30 47	28 49	27 50	78	68 89	66 91	64 93	62 95
39	32 47	30 49	29 50	28 51	79	69 90	67 92	64 95	63 96
40	33 48	31 50	30 51	29 52	80	70 91	68 93	65 96	64 97
41	34 49	32 51	31 52	29 54	81	71 92	69 94	66 97	65 98
42	35 50	33 52	31 54	30 55	82	71 94	69 96	67 98	66 99
43	35 52	34 53	32 55	31 56	83	72 95	70 97	68 99	66 101
44	36 53	35 54	33 56	32 57	84	73 96	71 98	69 100	67 102
45	37 54	36 55	34 57	33 58	85	74 97	72 99	70 101	68 103
46	38 55	37 56	35 58	34 59	86	75 98	73 100	71 102	69 104
47	39 56	38 57	36 59	35 60	87	76 99	74 101	72 103	70 105
48	40 57	38 59	37 60	35 62	88	77 100	75 102	73 104	71 106
49	41 58	39 60	38 61	36 63	89	78 101	76 103	74 105	72 107
50	42 59	40 61	38 63	37 64	90	79 102	77 104	74 107	73 108
51	43 60	41 62	39 64	38 65	91	80 103	78 105	75 108	74 109
52	44 61	42 63	40 65	39 66	92	81 104	79 106	76 109	75 110
53	45 62	43 64	41 66	40 67	93	82 105	80 107	77 110	75 112
54	45 64	44 65	42 67	41 68	94	83 106	81 108	78 111	76 113
55	46 65	45 66	43 68	42 69	95	84 107	82 109	79 112	77 114
56	47 66	46 67	44 69	42 71	96	85 108	82 111	80 113	78 115
57	48 67	47 68	45 70	43 72	97	86 109	83 112	81 114	79 116
58	49 68	47 70	46 71	44 73	98	87 110	84 113	82 115	80 117
59	50 69	48 71	46 73	45 74	99	87 112	85 114	83 116	81 118
					100	88 113	86 115	84 117	82 119

Tabel pärineb teosest [5], lk. 418.

§ 5. χ^2-JAOTUSELE BASEERUVAD MITTEPARAMEETRILISED MEETODID.

Terve rida mitmesuguseid mitteparameetrilisi kriteeriume tugineb χ^2-jaotusele. Tutvume neist mõninga tuntuimaga.

1. <u>Empiirilise ja teoreetilise jaotuse võrdlemine</u>.

Olgu antud mingi teoreetiline jaotus tabelina.

Juhusliku suuruse väärtuste hulk[6]	A_1	A_2	...	A_m
Tõenäosus	p_1	p_2	...	p_m

(1)

Ilmselt $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Olgu antud empiiriline jaotus vastavalt samadele juhusliku suuruse X väärtushulkadele A_1 , ..., A_m .

Juhusliku suuruse väärtuste hulk	A_1	A_2	...	A_m
Sagedus	n_1	n_2	...	n_m

(2)

Sageduste summa moodustab väljavõtte mahu n :

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n .$$

---

[6] Siin väärtuste hulk A_i võib (diskreetse juhusliku suuruse korral) sisaldada üht ainsat juhusliku suuruse väärtust x_i , pideva juhusliku suuruse korral aga võib selleks olla näiteks poollõik $[a_{i-1}, a_i)$.

Nõutakse kontrollida nullhüpoteesi

H_o : empiiriline jaotusfunktsioon (2) pärineb jaotusega (1) esitatud üldkogumist.

Selle hüpoteesi kontrollimiseks arvutatakse välja statistik

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{(np_i - n_i)^2}{np_i} \ , \qquad (3)$$

mis nullhüpoteesi kehtimise korral on asümptootiliselt χ^2-jaotusega vabadusastmete arvuga $m-1$.

Lähendust võib lugeda täiesti heaks, kui on täidetud tingimus

$$n_i \geq 5; \quad np_i \geq 5; \quad i = 1,2,\dots,m \ . \qquad (4)$$

Vastuvõetavaks võib lugeda lähendust veel ka juhul

$$n_i \geq 2; \quad np_i \geq 2; \quad i = 1,2,\dots,m \ . \qquad (5)$$

Mõningad autorid[7] leiavad lähenduse olevat kasutuskõlbuliku ka sel juhul, kui mingi (ühe ainukese) i korral

$$1 \leq \min (n_i, np_i) < 2 \ ;$$
$$\min(n_j, np_j) \geq 2, \quad j \neq i, \ j=1,2,\dots,n \ . \qquad (6)$$

Juhul kui $X < q_\alpha$, kus q_α on χ^2_{m-1}-jaotuse α-täiendkvantiil, tuleb nullhüpotees H_o olulisuse nivooga α vastu võtta; kui $X \geq q_\alpha$, loeme tõestatuks hüpoteesi H_1 .

---

[7] Vt. näiteks Walker, H.M.; Lev, J. Statistical Inference, N. York, 1953.

H_1 : empiiriline jaotusfunktsioon (2) ei pärine jaotusega (1) esitatud üldkogumist.

Juhul kui tuleb vastu võtta hüpotees H_0, huvitab meid maksimaalne olulisuse nivoo α, millega see vastu võtta õnnestub; kui tõestatakse hüpotees H_1, on huvitavaim minimaalne olulisuse nivoo α, millega see vastu võetakse. Esimesel juhul näitab $1-\alpha$ tõenäosust, et õige on H_1, kuigi vastu võeti H_0; teisel juhul on α tõenäosus selleks, et H_0 on õige, kuid võeti vastu H_1.

Selleks, et α väärtusi võimalikult täpselt määrata, lisame üldtuntud χ^2-jaotuse tabelitele (kus tavaliselt esitatakse täiendkvantiilid väheste α väärtuste jaoks) ka $\chi^2_{k/k}$ kvantiilide tabeli, mis sisaldab 24 erinevat α väärtust (vt. tabel 7.14).

Näide 7.11.

Olgu vaatlustulemusena saadud $m = 4$ rühma puhul suuruse X (3) väärtuseks

$$X = 3,20 .$$

Kas vaadeldav empiiriline jaotus on antud teoreetilisega kooskõlas?

Lahendus.

$m - 1 = 3$; $\frac{X}{3} = 3,20 : 3 = 1,07$; tabelist 7.14 leiame: $x_{3;0,60} = 1,01$, $x_{3;0,70} = 1,22$, seega saame võrratuse:

$$0,30 < P(X > 3,20) < 0,40 ,$$

järelikult saame hüpoteesi H_0 võtta vastu olulisuse nivooga $\alpha > 0,30$; niisugune α väärtus näitab, et nullhüpoteesi õigsus on üsnagi tõenäone.

2. Parimini sobiva teoreetilise jaotuse määramine.

Sageli ei ole teoreetiline jaotus määratud täielikult, vaid on teada ainult jaotuse klass. Jaotuse täpsustamiseks on tarvis väljavõtte põhjal määrata jaotust iseloomustavad parameetrid. Peale sellist teoreetilise jaotuse täpsustamist saab rakendada täpselt punktis 1 kirjeldatud metoodikat, kusjuures suurus (3) on χ^2-jaotusega vabadusastmete arvuga $m - k - 1$, kus k on väljavõtte põhjal arvutatud parameetrite arv.

Nii on näiteks normaaljaotuse täpseks määramiseks vaja arvutada hinnang kahele parameetrile: m ja σ ; seega oleks summa X χ^2-jaotusega vabadusastmete arvuga $m - 3$.

Ühtlase jaotuse puhul aga saame ilma väljavõtet kasutamata määrata tõenäosused: $p_i = \frac{1}{m}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; seetõttu on vabadusastmete arvuks $m - 1$.

Poissoni ja eksponentjaotuse, samuti ka binomiaaljaotuse korral vajab väljavõtte põhjal täpsustamist üks parameeter ning vabadusastmete arvuks on $m - 2$.

3. Kahe empiirilise jaotuse võrdlemine.

Kahe empiirilise jaotuse võrdlemise saame samuti taandada valemi (3) kasutamisele. Sisuliselt tähendab see, et teoreetiliseks jaotuseks võetakse mõlema jaotuse keskmine hinnang ja mõlemat võrreldakse selle keskmisega. Niisugune mõttekäik aga annab teisendamise tulemusena valemi

$$X = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_{1i} N_2 - n_{2i} N_1)^2}{n_{1i} + n_{2i}}, \quad \text{kus} \quad N_1 = \sum_{i=1}^{m} n_{1i}, \quad N_2 = \sum_{i=1}^{m} n_{2i}$$

ja juhul kui õige on nullhüpotees H_o, on juhuslik suurus X (asümptootiliselt) χ^2-jaotusega vabadusastmete arvuga $m - 1$.

H_o : mõlemad empiirilised jaotused (väljavõtted) pärinevad samast üldkogumist. Hüpoteesi kontrollimine toimub analoogiliselt punktis 1 kirjeldatud mõttekäigule.

Sama meetodiga võib võrrelda ka mitmedimensionaalseid jaotusi (ristkülikutabeleid) jne., samuti ka tabelite osi. Tuleb ainult arvestada, et juhul kui ei võrrelda terviklikke tabeleid, on vabadusastmete arvuks mitte $m' - 1$, vaid m' (võrreldavate "lahtrite" arv), sest seos $\sum n_i = n$, mis määras ühe lineaarse seose, langeb ära. Igal juhul tuleb ka silmas pidada, et niihästi teoreetilised kui ka empiirilised sagedused oleksid piisavad, et garanteerida lähendi headust (vt. tingimused (4) - (6)).

4. Sõltumatuse kontroll.

χ^2-meetod on ka üks tuntumaid kahe (empiirilise) juhusliku suuruse sõltumatuse kontrollimiseks.

Selleks vaatleme uuritavate juhuslike suuruste ühist jaotust, mis avaldub empiirilise sagedustabelina:

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_h	
x_1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{1h}	$n_{1\cdot}$
x_2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	n_{2h}	$n_{2\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_l	n_{l1}	n_{l2}	$\cdots$	n_{lh}	$n_{l\cdot}$
	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$		$n_{\cdot h}$	n

On teada, et juhul kui juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud, peab kehtima võrdus

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$$

iga i ($i=1,2,\ldots,l$) ja j ($j=1,2,\ldots,h$) korral; empiiriliste hinnangute kaudu, võttes

$$p_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}; \quad p_{.j} = \frac{n_{.j}}{n},$$

saaksime:

$$\frac{n_{ij}}{n} = \frac{n_{i.}}{n} \cdot \frac{n_{.j}}{n}.$$

Lugedes hinnangud $\frac{n_{i.}}{n} \cdot \frac{n_{.j}}{n}$ teoreetilisteks tõenäosusteks, saame jälle valemit (3) rakendada empiirilise ja teoreetilise jaotuse võrdlemiseks. Et teoreetilise jaotuse arvutamiseks on kasutatud veel $(l-1)+(h-1)$ empiirilist seost (üks seos tuleneb kõigist ülejäänutest!), saame vabadusastmete arvuks $hl-1-(l-1)-(h-1) = (l-1)(h-1)$. Valem (3) omandab peale teisendust arvutusteks sobiva kuju:

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{h} \frac{(nn_{ij} - n_{i.} \cdot n_{.j})^2}{n_{i.} \cdot n_{.j}},$$

kus $n_{i.} = \sum_{j=1}^{h} n_{ij}$; $n_{.j} = \sum_{i=1}^{l} n_{ij}$;

$$n = \sum_{i=1}^{l} n_{i.} = \sum_{j=1}^{h} n_{.j} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{h} n_{ij}.$$

Tabel 7.14.

χ^2_k/k kvantiilid x_α, $P(X < x_\alpha) = \alpha$.

k	.05	.1	.5	1.0	2.5	5.0	10	20	30	40	50	60
1	$.0^6 39$	$.0^5 157$	$.0^4 39$	$.0^3 16$	$.0^3 98$	$.0^2 39$	.016	.064	.148	.275	.455	.708
2	.001	.001	.005	.010	.025	.052	.106	.223	.356	.511	.693	.916
3	.005	.008	.024	.038	.072	.117	.195	.335	.475	.623	.789	.982
4	.016	.023	.052	.074	.121	.178	.266	.412	.549	.688	.839	1.011
5	.032	.042	.082	.111	.166	.229	.322	.469	.600	.731	.870	1.03
6	.050	.064	.113	.145	.206	.272	.367	.512	.638	.762	.891	1.04
7	.069	.085	.141	.177	.241	.310	.405	.546	.667	.785	.907	1.04
8	.089	.107	.168	.206	.272	.342	.436	.574	.691	.803	.918	1.04
9	.108	.128	.193	.232	.300	.369	.463	.598	.710	.817	.927	1.05
10	.126	.148	.216	.256	.325	.394	.487	.618	.727	.830	.934	1.05
11	.144	.167	.237	.278	.347	.416	.507	.635	.741	.840	.940	1.05
12	.161	.184	.256	.298	.367	.436	.525	.651	.753	.848	.945	1.05
13	.177	.201	.274	.316	.385	.453	.542	.664	.764	.856	.949	1.05
14	.193	.217	.291	.333	.402	.469	.556	.676	.773	.863	.953	1.05
15	.207	.232	.307	.349	.418	.484	.570	.687	.781	.869	.956	1.05
16	.221	.246	.321	.363	.432	.498	.582	.697	.789	.874	.959	1.05
17	.234	.260	.335	.377	.445	.510	.593	.706	.796	.879	.961	1.05
18	.247	.272	.348	.390	.457	.522	.604	.714	.802	.883	.963	1.05
19	.258	.285	.360	.402	.469	.532	.613	.722	.808	.887	.965	1.05
20	.270	.296	.372	.413	.480	.543	.622	.729	.813	.890	.967	1.05
22	.291	.317	.393	.434	.499	.561	.638	.742	.823	.897	.970	1.05
24	.310	.337	.412	.452	.517	.577	.652	.753	.831	.902	.972	1.05
26	.328	.355	.429	.469	.532	.592	.665	.762	.838	.907	.974	1.05
28	.345	.371	.445	.484	.547	.605	.676	.771	.845	.911	.976	1.04
30	.360	.386	.460	.498	.560	.616	.687	.779	.850	.915	.978	1.04
35	.394	.429	.491	.529	.588	.642	.708	.795	.862	.922	.981	1.04
40	.423	.448	.518	.554	.611	.663	.726	.809	.872	.928	.983	1.04
45	.448	.472	.540	.576	.630	.680	.741	.820	.880	.933	.985	1.04
50	.469	.494	.560	.594	.647	.695	.754	.829	.886	.937	.987	1.04
55	.488	.512	.577	.610	.662	.708	.765	.837	.892	.941	.988	1.04
60	.506	.529	.592	.625	.675	.720	.774	.844	.897	.944	.989	1.04
70	.535	.558	.618	.649	.697	.739	.790	.856	.905	.949	.990	1.03
80	.560	.582	.640	.669	.714	.755	.803	.865	.911	.952	.992	1.03
90	.581	.602	.658	.686	.729	.768	.814	.873	.917	.955	.993	1.03
100	.599	.619	.673	.701	.742	.779	.824	.879	.921	.958	.993	1.03
120	.629	.648	.699	.724	.763	.798	.839	.890	.929	.962	.994	1.03
140	.653	.671	.719	.743	.780	.812	.850	.898	.934	.965	.995	1.03
160	.673	.690	.736	.758	.793	.824	.860	.905	.939	.968	.996	1.02
180	.689	.706	.749	.771	.804	.833	.868	.910	.942	.970	.996	1.02
200	.703	.719	.761	.782	.814	.841	.874	.915	.945	.972	.997	1.02
250	.732	.746	.785	.804	.832	.858	.887	.924	.951	.975	.997	1.02
300	.753	.767	.802	.820	.846	.870	.897	.931	.956	.977	.998	1.02
350	.770	.783	.816	.833	.857	.879	.904	.936	.959	.979	.998	1.02
400	.784	.796	.827	.843	.866	.887	.911	.940	.962	.981	.998	1.02
450	.795	.807	.837	.852	.874	.893	.916	.944	.964	.982	.999	1.02
500	.805	.816	.845	.859	.880	.898	.920	.946	.966	.983	.999	1.01
750	.839	.848	.872	.884	.901	.917	.934	.956	.972	.986	.999	1.01
1000	.859	.868	.889	.899	.914	.928	.943	.962	.976	.988	.999	1.01
5000	.936	.939	.949	.954	.961	.967	.974	.983	.989	.995	1.00	1.00
∞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabel pärineb teosest [1], lk. 386-387.

Tabel 7.14 (järg).

70	80	90	95	97.5	99	99.5	99.9	99.95	k
1.07	1.64	2.71	3.84	5.02	6.64	7.88	10.83	12.12	1
1.20	1.61	2.30	3.00	3.69	4.61	5.30	6.91	7.60	2
1.22	1.55	2.08	2.60	3.12	3.78	4.28	5.42	5.91	3
1.22	1.50	1.94	2.37	2.79	3.32	3.72	4.62	5.00	4
1.21	1.46	1.85	2.21	2.57	3.02	3.35	4.10	4.42	5
1.21	1.43	1.77	2.10	2.41	2.80	3.09	3.74	4.02	6
1.20	1.40	1.72	2.01	2.29	2.64	2.90	3.47	3.72	7
1.19	1.38	1.67	1.94	2.19	2.51	2.74	3.27	3.48	8
1.18	1.36	1.63	1.88	2.11	2.41	2.62	3.10	3.30	9
1.18	1.34	1.60	1.83	2.05	2.32	2.52	2.96	3.14	10
1.17	1.33	1.57	1.79	1.99	2.25	2.43	2.84	3.01	11
1.17	1.32	1.55	1.75	1.94	2.18	2.36	2.74	2.90	12
1.16	1.31	1.52	1.72	1.90	2.13	2.29	2.66	2.81	13
1.16	1.30	1.50	1.69	1.87	2.08	2.24	2.58	2.72	14
1.15	1.29	1.49	1.67	1.83	2.04	2.19	2.51	2.65	15
1.15	1.28	1.47	1.64	1.80	2.00	2.14	2.45	2.58	16
1.15	1.27	1.46	1.62	1.78	1.97	2.10	2.40	2.52	17
1.14	1.26	1.44	1.60	1.75	1.93	2.06	2.35	2.47	18
1.14	1.26	1.43	1.59	1.73	1.90	2.03	2.31	2.42	19
1.14	1.25	1.42	1.57	1.71	1.88	2.00	2.27	2.37	20
1.13	1.24	1.40	1.54	1.67	1.83	1.95	2.19	2.30	22
1.13	1.23	1.38	1.52	1.64	1.79	1.90	2.13	2.23	24
1.12	1.22	1.37	1.50	1.61	1.76	1.86	2.08	2.17	26
1.12	1.22	1.35	1.48	1.59	1.72	1.82	2.03	2.12	28
1.12	1.21	1.34	1.46	1.57	1.70	1.79	1.99	2.07	30
1.11	1.19	1.32	1.42	1.52	1.64	1.72	1.90	1.98	35
1.10	1.18	1.30	1.39	1.48	1.59	1.67	1.84	1.90	40
1.10	1.17	1.28	1.37	1.45	1.55	1.63	1.78	1.84	45
1.09	1.16	1.26	1.35	1.43	1.52	1.59	1.73	1.79	50
1.09	1.16	1.25	1.33	1.41	1.50	1.56	1.69	1.75	55
1.09	1.15	1.24	1.32	1.39	1.47	1.53	1.66	1.71	60
1.08	1.14	1.22	1.29	1.36	1.43	1.49	1.60	1.65	70
1.08	1.13	1.21	1.27	1.33	1.40	1.45	1.56	1.60	80
1.07	1.12	1.20	1.26	1.31	1.38	1.43	1.52	1.56	90
1.07	1.12	1.18	1.24	1.30	1.36	1.40	1.49	1.53	100
1.06	1.11	1.17	1.22	1.27	1.32	1.36	1.45	1.48	120
1.06	1.10	1.16	1.20	1.25	1.30	1.33	1.41	1.44	140
1.06	1.09	1.15	1.19	1.23	1.28	1.31	1.38	1.41	160
1.05	1.09	1.14	1.18	1.22	1.26	1.29	1.36	1.38	180
1.05	1.08	1.13	1.17	1.21	1.25	1.28	1.34	1.36	200
1.04	1.07	1.12	1.15	1.18	1.22	1.25	1.30	1.32	250
1.04	1.07	1.11	1.14	1.17	1.20	1.22	1.27	1.29	300
1.04	1.06	1.10	1.13	1.15	1.18	1.21	1.25	1.27	350
1.04	1.06	1.09	1.12	1.14	1.17	1.19	1.24	1.25	400
1.03	1.06	1.09	1.11	1.13	1.16	1.18	1.22	1.23	450
1.03	1.05	1.08	1.11	1.13	1.15	1.17	1.21	1.22	500
1.03	1.04	1.07	1.09	1.10	1.12	1.14	1.17	1.18	750
1.02	1.04	1.06	1.07	1.09	1.11	1.12	1.14	1.15	1000
1.01	1.02	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.07	5000
1	1	1	1	1	1	1	1	1	∞

Tabel 7.15.

Normaalse juhusliku suuruse $X \sim N(0,1)$ jaotusfunktsioon

$$P(X < x) = \Phi(x) .$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	.500000	.503989	.507978	.511966	.515953	.519939	.523922	.527903	.531881	.535856
0,1	.539828	.543795	.547758	.551717	.555670	.559618	.563559	.567495	.571424	.575345
0,2	.579260	.583166	.587064	.590954	.594835	.598706	.602568	.606420	.610261	.614092
0,3	.617911	.621720	.625516	.629300	.633072	.636831	.640576	.644309	.648027	.651732
0,4	.655422	.659097	.662757	.666402	.670031	.673645	.677242	.680822	.684386	.687933
0,5	.691462	.694974	.698468	.701944	.705401	.708840	.712260	.715661	.719043	.722405
0,6	.725747	.729069	.732371	.735653	.738914	.742154	.745373	.748571	.751748	.754903
0,7	.758036	.761148	.764238	.767305	.770350	.773373	.776373	.779350	.782305	.785236
0,8	.788145	.791030	.793892	.796731	.799546	.802337	.805105	.807850	.810570	.813267
0,9	.815940	.818589	.821214	.823814	.826391	.828944	.831472	.833977	.836457	.838913
1,0	.841345	.843752	.846136	.848495	.850830	.853141	.855428	.857690	.859929	.862143
1,1	.864334	.866500	.868643	.870762	.872857	.874928	.876976	.879000	.881000	.882977
1,2	.884930	.886861	.888768	.890651	.892512	.894350	.896165	.897958	.899727	.901475
1,3	.903200	.904902	.906582	.908241	.909877	.911492	.913085	.914656	.916207	.917736
1,4	.919243	.920730	.922196	.923641	.925066	.926471	.927855	.929219	.930563	.931888
1,5	.933193	.934478	.935744	.936992	.938220	.939429	.940620	.941792	.942947	.944083
1,6	.945201	.946301	.947384	.948449	.949497	.950529	.951543	.952540	.953521	.954486
1,7	.955434	.956367	.957284	.958185	.959070	.959941	.960796	.961636	.962462	.963273
1,8	.964070	.964852	.965620	.966375	.967116	.967843	.968557	.969258	.969946	.970621
1,9	.971283	.971933	.972571	.973197	.973810	.974412	.975002	.975581	.976148	.976704
2,0	.977250	.977784	.978308	.978822	.979325	.979818	.980301	.980774	.981237	.981691
2,1	.982136	.982571	.982997	.983414	.983823	.984222	.984614	.984997	.985371	.985738
2,2	.986097	.986447	.986791	.987126	.987454	.987776	.988089	.988396	.988696	.988989
2,3	.989276	.989556	.989830	.990097	.990358	.990613	.990862	.991106	.991344	.991576
2,4	.991802	.992024	.992240	.992451	.992656	.992857	.993053	.993244	.993431	.993613
2,5	.993790	.993963	.994132	.994297	.994457	.994614	.994766	.994915	.995060	.995201
2,6	.995339	.995473	.995604	.995731	.995855	.995975	.996093	.996207	.996319	.996427
2,7	.996533	.996636	.996736	.996833	.996928	.997020	.997110	.997197	.997282	.997365
2,8	.997445	.997523	.997599	.997673	.997744	.997814	.997882	.997948	.998013	.998074
2,9	.998134	.998193	.998250	.998305	.998359	.998411	.998462	.998511	.998559	.998605
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3,0	.998650	.999032	.999313	.999517	.999663	.999767	.999841	.999892	.999928	.999952

Tabel pärineb teosest [4], lk. 590.

VIII. TUGEVASTI KÕRVALEKALDUVATE VAATLUSTULEMUSTE, NN. "JÄMEDATE VIGADE" ERALDAMINE.

Sageli kuulub väljavõttesse väärtusi, mis oluliselt erinevad väljavõtte ülejäänud väärtustest (on neist palju väiksemad või palju suuremad). Sisuliselt võib see tähendada, et on tegemist vaatlus-, mõõtmis- või koguni ümberkirjutamise veaga, samuti, et mõõdeti objekti, mis oli millegipärast teiste omadustega. Statistilises mõttes ei kuulu need objektid samasse üldkogumisse.

Tekib probleem - kuidas eraldada neid objekte ülejäänute seast ilma sisulist analüüsi teostamata, üksnes mõõtmistulemuste põhjal. Arusaadavalt saab siin kriteeriumiks olla üksnes kõrvalekaldumine üldkogumi keskmistest näitajatest, s. t. välja jäetakse väärtused, mis antud üldkogumi puhul esineksid ülimalt väikese tõenäosusega.

Silmas tuleb siiski pidada ka asjaolu, et kui väljavõtte maht on küllalt suur, võib sellesse väljavõttesse "seaduslikult" kuuluda ka üpriski haruldasi (väikese tõenäosusega esinevaid) indiviide. Näiteks igas kümnendas 1000-indiviidilises väljavõttes leidub keskmiselt element, mille esinemise tõenäosus on 0,0001.

Peale selle sõltub üksikväärtuste väljavõttes esinemise tõenäosus oluliselt sellest, missugune on üldkogumi jaotus. Enamus kirjanduses esitatud kriteeriume eeldab, et üldkogum on normaaljaotusega ja töötab seetõttu hästi vaid jaotuste puhul, mis on lähedased normaalsele.

Järgnevas vaatleme tuntumaid "jämedate vigade" eraldamise kriteeriume.

§ 1. KRITEERIUMID, MIS TUGINEVAD KAUGUSELE KESKVÄÄRTUSEST.

1. Tuntud keskväärtus m ja standardhälve σ.

Eeldame, et meil on tegemist normaaljaotusega $Y \sim N(m,\sigma)$, kusjuures m ja σ on teada; peale normeerimist ja tsentreerimist saame siit normaaljaotusega $N(0,1)$ juhusliku suuruse X, $X = \frac{Y - m}{\sigma}$.

Tabelis 8.1 on esitatud variatsioonrea maksimaalse elemendi X_n jaotuse α-täiendkvantiilid α 1- ja 0-lähedaste väärtuste jaoks.

Toodud tabelit saab kasutada üksnes sel juhul, kui jaotuse parameetrid m ja σ on kas eelnevate (küllalt suuremahuliste) vaatluste varal või mingite teoreetiliste kaalutluste tulemusena küllalt täpselt teada. Juhul, kui m ja σ hinnatakse sama vaatlusmaterjali põhjal, ei ole selle tabeli kasutamine lubatav.

Näide 8.1.

Olgu tegemist 25-indiviidilise väljavõttega normaaljaotusega $N(10,2)$ üldkogumist. Kas vaatlustulemus 4,0 võiks

Tabel 8.1.

Normaalse N(0,1) juhusliku suuruse n-mahulise väljavõtterea maksimaalse elemendi X_n jaotuse täiendkvantiilid q_α : $P(X_n > q_\alpha) = \alpha$.

n \ α	99,9%	99,5%	99%	97,5%	95%	90%	10%	5%	2,5%	1%	0,5%	0,1%
1	−3,090	−2,576	−2,326	−1,960	−1,645	−1,282	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090
2	−1,858	−1,471	−1,282	−1,002	−0,760	−0,478	1,632	1,955	2,239	2,575	2,807	3,290
3	−1,282	−0,950	−0,788	−0,546	−0,336	−0,090	1,818	2,121	2,391	2,712	2,935	3,403
4	−0,924	−0,625	−0,478	−0,259	−0,068	+0,157	1,943	2,234	2,494	2,806	3,023	3,481
5	−0,671	−0,395	−0,258	−0,055	+0,124	0,334	2,036	2,319	2,572	2,877	3,090	3,540
6	−0,478	−0,218	−0,090	+0,102	0,271	0,471	2,111	2,386	2,635	2,934	3,143	3,588
7	−0,325	−0,077	+0,045	0,229	0,390	0,582	2,172	2,442	2,687	2,981	3,188	3,628
8	−0,198	+0,039	0,157	0,333	0,489	0,674	2,224	2,490	2,731	3,022	3,227	3,662
9	−0,090	0,138	0,252	0,423	0,574	0,753	2,269	2,531	2,769	3,057	3,260	3,692
10	+0,003	0,224	0,334	0,500	0,647	0,822	2,309	2,568	2,803	3,089	3,290	3,719
11	0,084	0,300	0,407	0,568	0,711	0,882	2,344	2,601	2,834	3,117	3,317	3,743
12	0,157	0,367	0,471	0,629	0,769	0,936	2,376	2,630	2,862	3,143	3,341	3,765
13	0,222	0,427	0,529	0,684	0,821	0,985	2,406	2,657	2,887	3,166	3,363	3,785
14	0,281	0,482	0,582	0,733	0,868	1,029	2,432	2,682	2,910	3,187	3,383	3,803
15	0,334	0,531	0,630	0,779	0,911	1,070	2,457	2,705	2,932	3,207	3,402	3,820
16	0,384	0,577	0,674	0,821	0,951	1,107	2,480	2,726	2,952	3,226	3,420	3,836
17	0,429	0,620	0,715	0,859	0,988	1,142	2,502	2,746	2,970	3,243	3,436	3,851
18	0,471	0,659	0,753	0,895	1,022	1,175	2,522	2,765	2,988	3,259	3,452	3,865
19	0,511	0,696	0,788	0,929	1,054	1,205	2,541	2,783	3,004	3,275	3,466	3,878
20	0,547	0,730	0,822	0,960	1,084	1,233	2,559	2,799	3,020	3,289	3,480	3,890
21	0,582	0,762	0,853	0,990	1,113	1,260	2,576	2,815	3,034	3,303	3,493	3,902
22	0,614	0,793	0,882	1,018	1,139	1,285	2,592	2,830	3,049	3,316	3,506	3,914
23	0,645	0,821	0,910	1,044	1,164	1,309	2,607	2,844	3,062	3,328	3,517	3,924
24	0,674	0,848	0,936	1,069	1,188	1,332	2,621	2,857	3,075	3,340	3,529	3,934
25	0,702	0,874	0,961	1,093	1,211	1,353	2,635	2,870	3,087	3,351	3,539	3,944
26	0,728	0,899	0,985	1,116	1,233	1,374	2,648	2,883	3,098	3,362	3,550	3,954
27	0,753	0,922	1,008	1,137	1,253	1,393	2,661	2,895	3,110	3,373	3,560	3,963
28	0,777	0,945	1,029	1,158	1,273	1,412	2,673	2,906	3,120	3,383	3,569	3,971
29	0,800	0,966	1,050	1,178	1,292	1,430	2,685	2,917	3,130	3,392	3,578	3,980
30	0,822	0,987	1,070	1,197	1,310	1,447	2,696	2,928	3,141	3,402	3,587	3,988

Tabel pärineb teosest [5], lk. 322.

sellesse üldkogumisse kuuluda või on tegemist vaatlusveaga? Kasutada 5%-list olulisuse nivood.

Lahendus.

Normaaljaotuse sümmeetrilisuse tõttu on $X_n - m$ ja $m - X_1$ jaotused võrdsed. Normeeritud hälbeks on käesoleval juhul $\frac{10,0-4,0}{2,0} = 3,0$. Tabelist 8.1 näeme, et $n = 25$ korral on $q_{0,05} = 2,870$. (Antud juhul tuli kontrollida ühepoolset hüpoteesi). Et $3,0 > q_{0,05}$, tuleb õigeks lugeda hüpotees, et vaatlustulemus 4,0 sellesse üldkogumisse ei kuulu. Tuleb aga märkida, et näiteks olulisuse nivooga 0,025 see hüpotees enam paika ei peaks.

2. Tuntud standardhälve, tundmatu keskväärtus.

Juhul kui keskväärtus m ei ole teada, kasutatakse selle asemel sama väljavõtte põhjal arvutatud aritmeetilist keskmist $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Tabelis 8.2 on antud juhusliku suuruse $\frac{X_n - \bar{x}}{\sigma}$ α-täiendkvantiilid (väikeste α väärtuste jaoks). Selle tabeli kasutamisel tuleb aga eeldada, et standardhälve σ on teada (näiteks varasematest küllalt suuremahulistest vaatlustest). Antud väljavõtte põhjal leitud hinnangut standardhälbena σ kasutada ei ole lubatud.

Võrreldes tabeleid 8.1 ja 8.2 samade α väärtuste korral näeme, et tabelis 8.2 on kriitilised väärtused v ä i k s e m a d , seda eriti väikeste n väärtuste korral. Selle põhjuseks on asjaolu, et keskväärtusest tugevasti hälbiv X_n väärtus kallutab samas suunas ka hinnangut $\bar{x}$, seetõttu on vahe $X_n - \bar{x}$ väiksem kui vahe $X_n - m$.

<u>Tabel 8.2.</u>

Normaalse $N(0,1)$ juhusliku suuruse n-mahulise väljavõtterea maksimaalse elemendi X_n ja $\bar{\bar{x}}$ vahe $X_n - \bar{\bar{x}}$ α-täiendkvantiilid q_α

$$P((X_n - \bar{\bar{x}}) > q_\alpha) = \alpha .$$

n \ α	0,5%	1%	5%	10%	n \ α	0,5%	1%	5%	10%
2	1,985	1,821	1,386	1,163	14	3,261	3,072	2,589	2,352
3	2,396	2,215	1,738	1,497	15	3,287	3,099	2,617	2,382
4	2,618	2,431	1,941	1,696	16	3,312	3,124	2,644	2,409
5	2,764	2,574	2,080	1,835	17	3,334	3,147	2,668	2,434
6	2,870	2,679	2,184	1,939	18	3,355	3,168	2,691	2,458
7	2,952	2,761	2,267	2,022	19	3,375	3,188	2,712	2,480
8	3,019	2,828	2,334	2,091	20	3,393	3,207	2,732	2,500
9	3,074	2,884	2,392	2,150	21	3,409	3,224	2,750	2,519
10	3,122	2,931	2,441	2,200	22	3,425	3,240	2,768	2,538
11	3,163	2,973	2,484	2,245	23	3,439	3,255	2,784	2,555
12	3,199	3,010	2,523	2,284	24	3,453	3,269	2,800	2,571
13	3,232	3,043	2,557	2,320	25	3,465	3,282	2,815	2,587

Tabel pärineb teosest [5] , lk. 323.

3. Tundmatu keskväärtus ja standardhälve.

Eeldus, et juhusliku suuruse keskväärtus või standardhälve oleks varem teada, on küllaltki harva täidetud. Hoopiski tüüpilisem on olukord, et keskväärtus ja standardhälve hinnatakse s a m a väljavõtte põhjal, millest soovitakse ka "kahtlased" elemendid eraldada.

Tabelis 8.3 esitame normeeritud maksimaalse hälbe

$$\max_i \frac{|X_i - \bar{x}|}{s}$$

α-täiendkvantiilid rea α väärtuste jaoks. Jälle on eeldatud, et tegemist on normaaljaotusega $N(m, \sigma)$, kusjuures m ja σ on tundmatud. Märgime veel, et erinevalt tabelitest 8.1 ja 8.2 on tabel 8.3 ette nähtud kahepoolse hüpoteesi kontrollimiseks; ühepoolse hüpoteesi kontrollimiseks tuleb kasutada olulisuse nivooks α tabeli väärtust 2α.

Näide 8.2.

Olgu antud 30-indiviidiline variatsioonrida, mille kaudu leitud parameetrite hinnangud on: $\bar{x} = 1{,}0$; $s = 2{,}5$. Olgu variatsioonrea äärmised liikmed $x_1 = -6{,}5$ ning $x_{30} = 9{,}0$. Kontrollida (olulisuse nivooga $\alpha = 0{,}01$) nende kuuluvust antud üldkogumisse.

Lahendus.

Leiame $\max \dfrac{|x_i - \bar{x}|}{s} = \max\left(\dfrac{8}{2{,}5}, \dfrac{7{,}5}{2{,}5}\right) = 3{,}2$. Tabelist 8.3 leiame $n = 30$ kohalt $q_{0,01} = 3{,}291$. Et $3{,}2 < 3{,}291$, tuleb lugeda kõik variatsioonrea liikmed antud üldkogumisse kuuluvaks.

Tabel 8.3.

Normaalse juhusliku suuruse n-mahulise väljavõtte maksimaalse normeeritud hälbe $\max\limits_i \dfrac{|X_i - \bar{x}|}{s}$ α-täiendkvantiilid q_α :

$$P\left(\max_i \frac{|X_i - \bar{x}|}{s} > q_\alpha\right) = \alpha .$$

n \ α	0,05%	0,1%	0,2%	0,5%	1%	2%	5%	10%	20%
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412	1,406
4	1,732	1,732	1,731	1,730	1,728	1,723	1,710	1,689	1,645
5	1,996	1,994	1,990	1,982	1,972	1,955	1,917	1,869	1,791
6	2,219	2,212	2,203	2,183	2,161	2,130	2,067	1,996	1,894
7	2,408	2,395	2,377	2,344	2,310	2,265	2,182	2,093	1,974
8	2,568	2,547	2,521	2,476	2,431	2,374	2,273	2,172	2,041
9	2,704	2,677	2,643	2,586	2,532	2,464	2,349	2,238	2,097
10	2,822	2,788	2,747	2,680	2,616	2,540	2,414	2,294	2,146
11	2,925	2,884	2,837	2,760	2,689	2,606	2,470	2,343	2,190
12	3,015	2,969	2,915	2,830	2,753	2,663	2,519	2,387	2,229
13	3,096	3,044	2,984	2,892	2,809	2,713	2,563	2,426	2,264
14	3,167	3,111	3,046	2,947	2,859	2,759	2,602	2,461	2,297
15	3,232	3,171	3,102	2,997	2,905	2,800	2,638	2,494	2,327
16	3,290	3,225	3,152	3,042	2,946	2,837	2,670	2,523	2,354
17	3,343	3,274	3,198	3,083	2,983	2,871	2,701	2,551	2,380
18	3,392	3,320	3,240	3,120	3,017	2,903	2,728	2,577	2,404
19	3,437	3,361	3,278	3,155	3,049	2,932	2,754	2,601	2,426
20	3,478	3,400	3,314	3,187	3,079	2,959	2,779	2,623	2,447
21	3,516	3,436	3,347	3,217	3,106	2,984	2,801	2,644	2,467
22	3,552	3,469	3,378	3,245	3,132	3,008	2,823	2,664	2,486
23	3,585	3,500	3,407	3,271	3,156	3,030	2,843	2,683	2,504
24	3,616	3,529	3,434	3,295	3,179	3,051	2,862	2,701	2,521
25	3,646	3,556	3,459	3,318	3,200	3,071	2,880	2,718	2,537
26	3,673	3,582	3,483	3,340	3,220	3,089	2,897	2,734	2,553
27	3,699	3,606	3,506	3,360	3,239	3,107	2,913	2,749	2,568
28	3,724	3,629	3,528	3,380	3,258	3,124	2,929	2,764	2,582
29	3,747	3,651	3,548	3,399	3,275	3,140	2,944	2,778	2,596
30	3,769	3,672	3,567	3,416	3,291	3,156	2,958	2,792	2,609
31	3,791	3,692	3,586	3,433	3,307	3,171	2,972	2,805	2,622
32	3,811	3,711	3,603	3,449	3,322	3,185	2,985	2,818	2,634
33	3,830	3,729	3,620	3,465	3,337	3,199	2,998	2,830	2,646
34	3,848	3,746	3,636	3,480	3,351	3,212	3,010	2,842	2,657
35	3,866	3,762	3,652	3,494	3,364	3,224	3,022	2,853	2,668
36	3,882	3,778	3,667	3,507	3,377	3,236	3,033	2,864	2,679
37	3,898	3,793	3,681	3,521	3,389	3,248	3,044	2,874	2,689
38	3,914	3,808	3,695	3,533	3,401	3,259	3,055	2,885	2,699
39	3,929	3,822	3,708	3,545	3,413	3,270	3,065	2,894	2,709
40	3,943	3,835	3,720	3,557	3,424	3,281	3,075	2,904	2,718
41	3,957	3,848	3,733	3,568	3,435	3,291	3,084	2,913	2,727
42	3,970	3,861	3,745	3,579	3,445	3,301	3,094	2,922	2,736
43	3,983	3,873	3,756	3,590	3,455	3,310	3,103	2,931	2,745
44	3,995	3,885	3,767	3,600	3,465	3,320	3,112	2,940	2,753
45	4,007	3,896	3,778	3,610	3,474	3,329	3,120	2,948	2,762
46	4,019	3,907	3,788	3,620	3,483	3,338	3,129	2,956	2,770
47	4,030	3,918	3,798	3,630	3,492	3,346	3,137	2,964	2,778
48	4,041	3,928	3,808	3,639	3,501	3,354	3,145	2,972	2,785
49	4,052	3,938	3,818	3,648	3,510	3,363	3,152	2,980	2,793
50	4,062	3,948	3,827	3,656	3,518	3,370	3,160	2,987	2,800
51	4,072	3,957	3,836	3,665	3,526	3,378	3,167	2,994	2,807
52	4,082	3,966	3,845	3,673	3,534	3,386	3,175	3,001	2,814

Tabel pärineb teosest [5], lk. 324.

Kasutades aga olulisuse nivood $\alpha = 0{,}05$ satuksime olukorda, kus $3{,}2 > q_{0,05} = 2{,}958$, seega tuleks $x_{30} = 9{,}0$ lugeda võõraks elemendiks. Tekib küsimus, milline seisukoht tuleks võtta elemendi $x_1 = -6{,}5$ suhtes?

Et uuesti kasutada tabelit 8.3, tuleks arvutada uued väljavõtte karakteristikud $\bar{x}_{29}$ ja s_{29}, jättes elemendi 9,0 välja ning teostada kontrollimine uuesti, võrreldes nüüd saadud väärtust tabelist 8.3 leitud väärtusega $q_{0,05}=2{,}944$.

Peale elemendi x_1 eraldamist (kui see osutus põhjendatuks) tuleb arvutada uued karakteristikud $\bar{x}_{28}$ ja s_{28} ning leida suurus $\max\limits_i \frac{|x_i - \bar{x}|}{s}$. Kui see osutub väiksemaks väärtusest 2,929 (vt. tabel 8.3), tuleb asuda seisukohale, et variatsioonrida koosneb ainult ühte väljavõttesse kuuluvatest, n.-ö. "õigetest" väärtustest.

Nagu nägime, meetodid, mis kasutavad antud väljavõtte põhjal arvutatud parameetri hinnanguid, võimaldavad korraga eraldada ainult ühe "kahtlase" elemendi, kuna pärast iga elemendi eemaldamist tuleb arvutada parameetritele uued väärtused.

4. Erinevate väljavõtete põhjal hinnatud variatsiooniulatus ja standardhälve.

Et pääseda karakteristikute pidevast ümberarvutamisest elementide eemaldamise käigus, s. t. "vigaste" elementide mõjust karakteristikute hinnangutele, võib kasutada ka kaht erinevat ja sõltumatut väljavõtet samast üldkogumist, neist üks sisaldab "kahtlasi" elemente; teine on aluseks üldkogumi parameetrite hinnangutele. Tabelis 8.4 esitamegi sõltumatu standardhälbe hinnanguga normeeritud maksimaalse hälbe kriitilised väärtused (täiendkvantiilid) vastavalt reale α väärtustele.

Tabel 8.4.

Normaalse juhusliku suuruse n-mahulise väljavõtte maksimaalse sõltumatu standardhälbe hinnanguga normeeritud hälbe $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{|X_i - \bar{x}|}{s}$ α-täiendkvantiilid:

$$P\left(\max_i \frac{|X_i - \bar{x}|}{s} > q_\alpha\right) = \alpha .$$

$\alpha = 0,1\%$

n \ ν	3	4	5	6	7	8	9	10	12
10	4.0	4.3	4.6	4.8	5.0	5.2	5.3	5.4	5.6
11	3.8	4.2	4.5	4.7	4.8	5.0	5.1	5.2	5.3
12	3.7	4.1	4.3	4.5	4.7	4.8	4.9	5.0	5.1
13	3.6	4.0	4.2	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	5.0
14	3.5	3.9	4.1	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.9
15	3.5	3.8	4.0	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.8
16	3.4	3.7	4.0	4.1	4.3	4.4	4.5	4.5	4.7
17	3.4	3.7	3.9	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
18	3.3	3.6	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
19	3.3	3.6	3.8	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5
20	3.3	3.6	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4
24	3.2	3.5	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.3
30	3.1	3.4	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.0	4.1
40	3.0	3.3	3.5	3.6	3.7	3.7	3.8	3.9	4.0
60	2.9	3.2	3.4	3.5	3.6	3.6	3.7	3.8	3.8
120	2.9	3.1	3.3	3.4	3.5	3.5	3.6	3.6	3.7
∞	2.8	3.0	3.2	3.3	3.4	3.4	3.5	3.5	3.6

$\alpha = 0,5\%$

n \ ν	3	4	5	6	7	8	9	10	12
10	3,12	3,46	3,70	3,87	4,02	4,14	4,24	4,33	4,47
11	3,04	3,37	3,59	3,76	3,90	4,01	4,11	4,19	4,33
12	2,98	3,29	3,51	3,67	3,80	3,91	4,00	4,08	4,21
13	2,93	3,23	3,44	3,60	3,72	3,83	3,92	3,99	4,12
14	2,88	3,18	3,38	3,54	3,66	3,76	3,85	3,92	4,04
15	2,84	3,13	3,33	3,48	3,60	3,70	3,78	3,86	3,98
16	2,81	3,10	3,29	3,44	3,56	3,65	3,73	3,80	3,92
17	2,78	3,07	3,26	3,40	3,52	3,61	3,68	3,75	3,86
18	2,76	3,04	3,23	3,37	3,48	3,57	3,64	3,71	3,82
19	2,74	3,01	3,20	3,34	3,45	3,54	3,61	3,68	3,79
20	2,72	2,99	3,17	3,31	3,42	3,51	3,58	3,65	3,75
24	2,66	2,92	3,10	3,23	3,33	3,42	3,49	3,55	3,65
30	2,60	2,86	3,03	3,15	3,25	3,33	3,40	3,46	3,55
40	2,55	2,79	2,96	3,08	3,17	3,25	3,31	3,37	3,46
60	2,50	2,73	2,89	3,01	3,10	3,17	3,23	3,28	3,37
120	2,45	2,67	2,83	2,94	3,02	3,09	3,15	3,20	3,28
∞	2,40	2,62	2,76	2,87	2,95	3,02	3,07	3,12	3,20

Tabel pärineb teosest [5], lk. 325-327.

Tabel 8.4 (järg).

$\alpha = 1\%$

n \ ν	3	4	5	6	7	8	9	10	12
10	2,78	3,10	3,32	3,48	3,62	3,73	3,82	3,90	4,04
11	2,72	3,02	3,24	3,39	3,52	3,63	3,72	3,79	3,93
12	2,67	2,96	3,17	3,32	3,45	3,55	3,64	3,71	3,84
13	2,63	2,92	3,12	3,27	3,38	3,48	3,57	3,64	3,76
14	2,60	2,88	3,07	3,22	3,33	3,43	3,51	3,58	3,70
15	2,57	2,84	3,03	3,17	3,29	3,38	3,46	3,53	3,65
16	2,54	2,81	3,00	3,14	3,25	3,34	3,42	3,49	3,60
17	2,52	2,79	2,97	3,11	3,22	3,31	3,38	3,45	3,56
18	2,50	2,77	2,95	3,08	3,19	3,28	3,35	3,42	3,53
19	2,49	2,75	2,93	3,06	3,16	3,25	3,33	3,39	3,50
20	2,47	2,73	2,91	3,04	3,14	3,23	3,30	3,37	3,47
24	2,42	2,68	2,84	2,97	3,07	3,16	3,23	3,29	3,38
30	2,38	2,62	2,79	2,91	3,01	3,08	3,15	3,21	3,30
40	2,34	2,57	2,73	2,85	2,94	3,02	3,08	3,13	3,22
60	2,29	2,52	2,68	2,79	2,88	2,95	3,01	3,06	3,15
120	2,25	2,48	2,62	2,73	2,82	2,89	2,95	3,00	3,08
∞	2,22	2,43	2,57	2,68	2,76	2,83	2,88	2,93	3,01

$\alpha = 2,5\%$

n \ ν	3	4	5	6	7	8	9	10	12
10	2,34	2,63	2,83	2,98	3,10	3,20	3,29	3,36	3,49
11	2,30	2,58	2,77	2,92	3,03	3,13	3,22	3,29	3,41
12	2,27	2,54	2,73	2,87	2,98	3,08	3,16	3,23	3,35
13	2,24	2,51	2,69	2,83	2,94	3,03	3,11	3,18	3,29
14	2,22	2,48	2,66	2,79	2,90	2,99	3,07	3,14	3,25
15	2,20	2,45	2,63	2,76	2,87	2,96	3,04	3,11	3,21
16	2,18	2,43	2,61	2,74	2,84	2,93	3,01	3,08	3,18
17	2,17	2,42	2,59	2,72	2,82	2,91	2,98	3,05	3,15
18	2,15	2,40	2,57	2,70	2,80	2,89	2,96	3,02	3,12
19	2,14	2,39	2,56	2,68	2,78	2,87	2,94	3,00	3,10
20	2,13	2,37	2,54	2,67	2,77	2,85	2,92	2,98	3,08
24	2,10	2,34	2,50	2,62	2,72	2,80	2,87	2,93	3,02
30	2,07	2,30	2,46	2,58	2,67	2,75	2,81	2,87	2,96
40	2,04	2,27	2,42	2,53	2,62	2,70	2,76	2,82	2,91
60	2,01	2,23	2,38	2,49	2,58	2,65	2,71	2,76	2,85
120	1,98	2,20	2,34	2,45	2,53	2,60	2,66	2,71	2,79
∞	1,95	2,16	2,30	2,41	2,49	2,56	2,61	2,66	2,74

Tabel 8.4 (järg).

$\alpha = 5\%$

ν / n	3	4	5	6	7	8	9	10	12
10	2,01	2,27	2,46	2,60	2,72	2,81	2,89	2,96	3,08
11	1,98	2,24	2,42	2,56	2,67	2,76	2,84	2,91	3,03
12	1,96	2,21	2,39	2,52	2,63	2,72	2,80	2,87	2,98
13	1,94	2,19	2,36	2,50	2,60	2,69	2,76	2,83	2,94
14	1,93	2,17	2,34	2,47	2,57	2,66	2,74	2,80	2,91
15	1.91	2,15	2,32	2,45	2,55	2,64	2,71	2,77	2,88
16	1.90	2,14	2,31	2,43	2,53	2,62	2,69	2,75	2,86
17	1,89	2,13	2,29	2,42	2,52	2,60	2,67	2,73	2,84
18	1,88	2,11	2,28	2,40	2,50	2,58	2,65	2,71	2,82
19	1,87	2,11	2,27	2,39	2,49	2,57	2,64	2,70	2,80
20	1,87	2,10	2,26	2,38	2,47	2,56	2,63	2,68	2,78
24	1,84	2.07	2,23	2,34	2,44	2,52	2,58	2,64	2,74
30	1,82	2,04	2,20	2,31	2,40	2,48	2,54	2,60	2,69
40	1,80	2,02	2,17	2,28	2,37	2,44	2,50	2,56	2,65
60	1,78	1.99	2,14	2,25	2,33	2,41	2,47	2,52	2,61
120	1,76	1.96	2,11	2,22	2,30	2.37	2,43	2,48	2,57
∞	1,74	1,94	2,08	2,18	2,27	2,33	2,39	2,41	2,52

$\alpha = 10\%$

ν / n	3	4	5	6	7	8	9	10	12
10	1,68	1,92	2,09	2,23	2,33	2,42	2,50	2,56	2,68
11	1,66	1,90	2,07	2,20	2,30	2,39	2,46	2,53	2,64
12	1,65	1,88	2,05	2,17	2,28	2,36	2,44	2,50	2,61
13	1,63	1,86	2,03	2,16	2,26	2,34	2,41	2,47	2,58
14	1,62	1,85	2,01	2,14	2,24	2,32	2,39	2,45	2,56
15	1,61	1,84	2,00	2,12	2,22	2,31	2,38	2,44	2,54
16	1,61	1,83	1,99	2,11	2,21	2,29	2,36	2,42	2,52
17	1,60	1,82	1,98	2,10	2,20	2,28	2,35	2,41	2,51
18	1,59	1,82	1,97	2,09	2,19	2,27	2,34	2,39	2,49
19	1,59	1,81	1,96	2,08	2,18	2,26	2,33	2,38	2,48
20	1,58	1,80	1,96	2,08	2,17	2,25	2,32	2,37	2,47
24	1,57	1,78	1,94	2,05	2,15	2,22	2,29	2,34	2.44
30	1,55	1,77	1,92	2,03	2,12	2,20	2,26	2,32	2,41
40	1,54	1,75	1,90	2,01	2,10	2,17	2,23	2,29	2,38
60	1,52	1,73	1,87	1,98	2,07	2,14	2,20	2,26	2,35
120	1,51	1,71	1,85	1,96	2,05	2,12	2,18	2,23	2,32
∞	1,50	1,70	1,83	1,94	2,02	2,09	2,15	2,20	2,28

§ 2. KRITEERIUMID, MIS TUGINEVAD VARIATSIOONIULATUSELE.

1. Tuntud standardhälve.

Olgu juhuslik suurus X normaaljaotusega $N(m, \sigma)$; tema n-indiviidilise väljavõtte normeeritud variatsiooniulatus $\frac{\omega}{\sigma} = \frac{X_n - X_1}{\sigma}$ annab hea võimaluse kahtlaste väärtuste väljaeraldamiseks. Tuleb aga märkida, et selle kriteeriumi kasutamiseks on tarvis eeldada, et standardhälve σ on tuntud (kas eelmistest vaatlustest või teoreetilistest kaalutlustest). Normeeritud variatsiooniulatuse jaotuse α-kvantiilid x_α sõltuvalt väljavõtte mahust n on esitatud tabelis 8.5.

Tabel 8.5.

Normaalse $N(m, \sigma)$ juhusliku suuruse n-mahulise väljavõtte normeeritud variatsiooniulatuse $\frac{\omega}{\sigma} = \frac{X_n - X_1}{\sigma}$ α-kvantiilid x_α:

$$P\left(\frac{X_n - X_1}{\sigma} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

n	0.1	0.5	1.0	2.5	5.0	10.0	90.0	95.0	97.5	99.0	99.5	99.9
2	0,00	0,01	0,02	0,04	0,09	0,18	2,33	2,77	3,17	3,64	3,97	4,65
3	0,06	0,13	0,19	0,30	0,43	0,62	2,90	3,31	3,68	4,12	4,42	5,06
4	0,20	0,34	0,43	0,59	0,76	0,98	3,24	3,63	3,98	4,40	4,69	5,31
5	0,37	0,55	0,66	0,85	1,03	1,26	3,48	3,86	4,20	4,60	4,89	5,48
6	0,54	0,75	0,87	1,06	1,25	1,49	3,66	4,03	4,36	4,76	5,03	5,62
7	0,69	0,92	1,05	1,25	1,44	1,68	3,81	4,17	4,49	4,88	5,15	5,73
8	0,83	1,08	1,20	1,41	1,60	1,83	3,93	4,29	4,61	4,99	5,26	5,82
9	0,96	1,21	1,34	1,55	1,74	1,97	4,04	4,39	4,70	5,08	5,34	5,90
10	1,08	1,33	1,47	1,67	1,86	2,09	4,13	4,47	4,79	5,16	5,42	5,97
11	1,20	1,45	1,58	1,78	1,97	2,20	4,21	4,55	4,86	5,23	5,49	6,04
12	1,30	1,55	1,68	1,88	2,07	2,30	4,29	4,62	4,92	5,29	5,54	6,09
13	1,39	1,64	1,77	1,97	2,16	2,39	4,35	4,68	4,99	5,35	5,60	6,14
14	1,47	1,72	1,86	2,06	2,24	2,47	4,41	4,74	5,04	5,40	5,65	6,19
15	1,55	1,80	1,93	2,14	2,32	2,54	4,47	4,80	5,09	5,45	5,70	6,23
16	1,63	1,88	2,01	2,21	2,39	2,61	4,52	4,85	5,14	5,49	5,74	6,27
17	1,69	1,94	2,07	2,27	2,45	2,67	4,57	4,89	5,18	5,54	5,78	6,31
18	1,76	2,01	2,14	2,34	2,51	2,73	4,61	4,93	5,22	5,57	5,82	6,35
19	1,82	2,07	2,20	2,39	2,57	2,79	4,65	4,97	5,26	5,61	5,85	6,38
20	1,87	2,12	2,25	2,45	2,62	2,84	4,69	5,01	5,30	5,65	5,89	6,41

Tabel pärineb teosest [8], lk. 295.

2. Tundmatu standardhälve.

Punktis 1 kirjeldatud metoodika ja tabeli 8.5 kasutamist segab asjaolu, et enamasti ei ole standardhälve σ teada, vaid teda tuleb väljavõtte põhjal hinnata. Tabelis 8.6 esitame standardhälbe hinnanguga normeeritud variatsiooniulatuse jaotuse kvantiilid, kusjuures standardhälve ning variatsiooniulatus on hinnatud sama väljavõtte põhjal.

Näide 8.3.

Olgu antud 10-indiviidiline väljavõte, mille põhjal leitud standardhälbe hinnang olgu 1,0 ja variatsiooniulatus ω = 3,70. Küsitakse, kas väljavõtte kõik elemendid kuuluvad samasse üldkogumisse (olulisuse nivooga α = 0,05).

Lahendus.

Kuna $\frac{\omega}{s}$ = 3,7 ; tabelist 8.6 leiame, võttes n=10, $x_{0,95}$ = 3,685 < 3,70 , seega on variatsiooniulatus liiga suur ja ilmselt tuleb keskväärtusest kaugeim element (kas x_1 või x_{10}) lugeda vööraks.

Küsimus sellest, kas ülejäänud 9 elementi kuuluvad antud üldkogumisse, tuleb lahendada täiendava analüüsi tulemusena, kusjuures tuleb uuesti arvutada niihästi standardhälbe hinnang s kui ka variatsiooniulatuse hinnang ω .

Märgime siin, et suhe $\frac{\omega}{s}$ on kahelt poolt tõkestatud. Tabelis 8.7 esitame suhte väärtuste ülemised ja alumised tõkked. Nende abil on võimalik eraldada jämedamaid arvutusvigu statistikute ω ja s hindamisel.

Tabel 8.6.

Normaalse $N(m, \sigma)$ juhusliku suuruse n-mahulise väljavõtte standardhälbe hinnanguga s normeeritud variatsiooniulatuse $\frac{\omega}{s} = \frac{X_n - X_1}{s}$ α-kvantiilid x_α :

$$P\left(\frac{X_n - X_1}{s} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

n	0,5	1,0	2,5	5,0	10,0	90,0	95,0	97,5	99,0	99,5
3						1,997	1,999	2,000	2,000	2,000
4						2,409	2,429	2,439	2,445	2,447
5						2,712	2,753	2,782	2,803	2,813
6						2,949	3,012	3,056	3,095	3,115
7						3,143	3,222	3,282	3,338	3,369
8						3,303	3,399	3,471	3,543	3,585
9						3,449	3,552	3,634	3,720	3,772
10	2,47	2,51	2,59	2,67	2,77	3,57	3,685	3,777	3,875	3,935
11	2,53	2,58	2,66	2,74	2,84	3,68	3,80	3,903	4,012	4,079
12	2,59	2,65	2,73	2,80	2,91	3,78	3,91	4,01	4,134	4,208
13	2,65	2,70	2,78	2,86	2,97	3,87	4,00	4,11	4,244	4,325
14	2,70	2,75	2,83	2,91	3,02	3,95	4,09	4,21	4,34	4,431
15	2,75	2,80	2,88	2,96	3,07	4,02	4,17	4,29	4,43	4,53
16	2,80	2,85	2,93	3,01	3,13	4,09	4,24	4,37	4,51	4,62
17	2,84	2,90	2,98	3,06	3,17	4,15	4,31	4,44	4,59	4,69
18	2,88	2,94	3,02	3,10	3,21	4,21	4,38	4,51	4,66	4,77
19	2,92	2,98	3,06	3,14	3,25	4,27	4,43	4,57	4,73	4,84
20	2,95	3,01	3,10	3,18	3,29	4,32	4,49	4,63	4,79	4,91
30	3,22	3,27	3,37	3,46	3,58	4,70	4,89	5,06	5,25	5,39
40	3,41	3,46	3,57	3,66	3,79	4,96	5,15	5,34	5,54	5,69
50	3,57	3,61	3,72	3,82	3,94	5,15	5,35	5,54	5,77	5,91
60	3,69	3,74	3,85	3,95	4,07	5,29	5,50	5,70	5,93	6,09
80	3,88	3,93	4,05	4,15	4,27	5,51	5,73	5,93	6,18	6,35
100	4,02	4,09	4,20	4,31	4,44	5,68	5,90	6,11	6,36	6,54
150	4,30	4,36	4,47	4,59	4,72	5,96	6,18	6,39	6,64	6,84
200	4,50	4,56	4,67	4,78	4,90	6,15	6,38	6,59	6,85	7,03
500	5,06	5,13	5,25	5,37	5,49	6,72	6,94	7,15	7,42	7,60
1000	5,50	5,57	5,68	5,79	5,92	7,11	7,33	7,54	7,80	7,99

Tabel pärineb teosest [8], lk. 295.

Tabel 8.7.

Suhte $\frac{\omega}{s}$ ülemised ja alumised tõkked sõltuvalt väljavõtte mahust.

n	ниж	верх	*n*	ниж	верх	*n*	ниж	верх
			10	1,897	4,243	30	1,966	7,616
			11	1,915	4,472	40	1,975	8,832
			12	1,915	4,690	50	1,980	9,899
3	1,732	2,000	13	1,927	4,899	60	1,983	10,863
4	1,732	2,449	14	1,927	5,099	80	1,987	12,570
						100	1,990	14,071
5	1,826	2,828	15	1,936	5,292			
6	1,826	3,162	16	1,936	5,477	150	1,993	17,263
7	1,871	3,464	17	1,944	5,657	200	1,995	19,950
8	1,871	3,742	18	1,944	5,831	500	1,998	31,591
9	1,897	4,000	19	1,949	6.000	1000	1,999	44,699
			20	1,949	6,164			

Tabel pärineb teosest [8], lk. 296.

3. Sõltumatult hinnatud standardhälve.

Mugavam on suhet $\frac{\omega}{s}$ kasutada võõraste indiviidide eraldamiseks siis, kui s on arvutatud ühe väljavõtte põhjal (olgu selle maht ν), variatsiooniulatus aga, mis sisaldab ka kaheldavaid elemente, on hinnatud eelmisest sõltumatu väljavõtte põhjal (mille maht on n). Sel juhul on võimalik kasutada kriteeriumi korduvalt, ilma vahepeal s väärtusi ümber arvestamata.

Vastava suhte – (nn. standardiseeritud variatsiooniulatus) jaotuse kriitilised väärtused (α -täiendkvantiilid α väärtustel 0,05 ja 0,01) on esitatud tabelites 8.8^{a} ja 8.8^{b}.

Tabel 8.8[a].

Sõltumatu standardhälbe hinnanguga normeeritud variatsiooniulatuse $\frac{\omega_n}{s_\nu}$ 0,05-täiendkvantiilid $q_{0,05}$,

$$P\left(\frac{\omega_n}{s_\nu} > q_{0,05}\right) = 0,05 .$$

ν \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17,97	26,98	32,82	37,08	40,41	43,12	45,40	47,36	49,07	50,59	51,96	53,20	54,33	55,36	56,32	57,22	58,04	58,83	59,56
2	6,08	8,33	9,80	10,88	11,74	12,44	13,03	13,54	13,99	14,39	14,75	15,08	15,38	15,65	15,91	16,14	16,37	16,57	16,77
3	4,50	5,91	6,82	7,50	8,04	8,48	8,85	9,18	9,46	9,72	9,95	10,15	10,35	10,52	10,69	10,84	10,98	11,11	11,24
4	3,93	5,04	5,76	6,29	6,71	7,05	7,35	7,60	7,83	8,03	8,21	8,37	8,52	8,66	8,79	8,91	9,03	9,13	9,23
5	3,64	4,60	5,22	5,67	6,03	6,33	6,58	6,80	6,99	7,17	7,32	7,47	7,60	7,72	7,83	7,93	8,03	8,12	8,21
6	3,46	4,34	4,90	5,30	5,63	5,90	6,12	6,32	6,49	6,65	6,79	6,92	7,03	7,14	7,24	7,34	7,43	7,51	7,59
7	3,34	4,16	4,68	5,06	5,36	5,61	5,82	6,00	6,16	6,30	6,43	6,55	6,66	6,76	6,85	6,94	7,02	7,10	7,17
8	3,26	4,04	4,53	4,89	5,17	5,40	5,60	5,77	5,92	6,05	6,18	6,29	6,39	6,48	6,57	6,65	6,73	6,80	6,87
9	3,20	3,95	4,41	4,76	5,02	5,24	5,43	5,59	5,74	5,87	5,98	6,09	6,19	6,28	6,36	6,44	6,51	6,58	6,64
10	3,15	3,88	4,33	4,65	4,91	5,12	5,30	5,46	5,60	5,72	5,83	5,93	6,03	6,11	6,19	6,27	6,34	6,40	6,47
11	3,11	3,82	4,26	4,57	4,82	5,03	5,20	5,35	5,49	5,61	5,71	5,81	5,90	5,98	6,06	6,13	6,20	6,27	6,33
12	3,08	3,77	4,20	4,51	4,75	4,95	5,12	5,27	5,39	5,51	5,61	5,71	5,80	5,88	5,95	6,02	6,09	6,15	6,21
13	3,06	3,73	4,15	4,45	4,69	4,88	5,05	5,19	5,32	5,43	5,53	5,63	5,71	5,79	5,86	5,93	5,99	6,05	6,11
14	3,03	3,70	4,11	4,41	4,64	4,83	4,99	5,13	[illegible],25	5,36	5,46	5,55	5,64	5,71	5,79	5,85	5,91	5,97	6,03
15	3,01	3,67	4,08	4,37	4,59	4,78	4,94	5,08	5,20	5,31	5,40	5,49	5,57	5,65	5,72	5,78	5,85	5,90	5,96
16	3,00	3,65	4,05	4,33	4,56	4,74	4,90	5,03	5,15	5,26	5,35	5,44	5,52	5,59	5,66	5,73	5,79	5,84	5,90
17	2,98	3,63	4,02	4,30	4,52	4,70	4,86	4,99	5,11	5,21	5,31	5,39	5,47	5,54	5,61	5,67	5,73	5,79	5,84
18	2,97	3,61	4,00	4,28	4,49	4,67	4,82	4,96	5,07	5,17	5,27	5,35	5,43	5,50	5,57	5,63	5,69	5,74	5,79
19	2,96	3,59	8,98	4,25	4,47	4,65	4,79	4,92	5,04	5,14	5,23	5,31	5,39	5,46	5,53	5,59	5,65	5,70	5,75
20	2,95	3,58	3,96	4,23	4,45	4,62	4,77	4,90	5,01	5,11	5,20	5,28	5,36	5,43	5,49	5,55	5,61	5,66	5,71
24	2,92	3,53	3,90	4,17	4,37	4,54	4,68	4,81	4,92	5,01	5,10	5,18	5,25	5,32	5,38	5,44	5,49	5,55	5,59
30	2,89	3,49	3,85	4,10	4,30	4,46	4,60	4,72	4,82	4,92	5,00	5,08	5,15	5,21	5,27	5,33	5,38	5,43	5,47
40	2,86	3,44	3,79	4,04	4,23	4,39	4,52	4,63	4,73	4,82	4,90	4,98	5,04	5,11	5,16	5,22	5,27	5,31	5,36
60	2,83	3,40	3,74	3,98	4,16	4,31	4,44	4,55	4,65	4,73	4,81	4,88	4,94	5,00	5,06	5,11	5,15	5,20	5,24
120	2,80	3,36	3,68	3,92	4,10	4,24	4,36	4,47	4,56	4,64	4,71	4,78	4,84	4,90	4,95	5,00	5,04	5,09	5,13
∞	2,77	3,31	3,63	3,86	4,03	4,17	4,29	4,39	4,47	4,55	4,62	4,68	4,74	4,80	4,85	4,89	4,93	4,97	5,01

Tabel pärineb teosest [8], lk. 111.

Tabel 8.8[b].

Sõltumatu standardhälbe hinnanguga normeeritud variatsiooniulatuse $\frac{\omega_n}{s_\nu}$ 0,01-täiendkvantiilid $q_{0,01}$:

$$P\left(\frac{\omega_n}{s_\nu} > q_{0,01}\right) = 0,01 .$$

ν \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90,03	135,0	164,3	185,6	202,2	215,8	227,2	237,0	245,6	253,2	260,0	266,2	271,8	277,0	281,8	286,3	290,4	294,3	298,0
2	14,04	19,02	22,29	24,72	26,63	28,20	29,53	30,68	31,69	32,59	33,40	34,13	34,81	35,43	36,00	36,53	37,03	37,50	37,95
3	8,26	10,62	12,17	13,33	14,24	15,00	15,64	16,20	16,69	17,13	17,53	17,89	18,22	18,52	18,81	19,07	19,32	19,55	19,77
4	6,51	8,12	9,17	9,96	10,58	11,10	11,55	11,93	12,27	12,57	12,84	13,09	13,32	13,53	13,73	13,91	14,08	14,24	14,40
5	5,70	6,98	7,80	8,42	8,91	9,32	9,67	9,97	10,24	10,48	10,70	10,89	11,08	11,24	11,40	11,55	11,68	11,81	11,93
6	5,24	6,33	7,03	7,56	7,97	8,32	8,61	8,87	9,10	9,30	9,48	9,65	9,81	9,95	10,08	10,21	10,32	10,43	10,54
7	4,95	5,92	6,54	7,01	7,37	7,68	7,94	8,17	8,37	8,55	8,71	8,86	9,00	9,12	9,24	9,35	9,46	9,55	9,65
8	4,75	5,64	6,20	6,62	6,96	7,24	7,47	7,68	7,86	8,03	8,18	8,31	8,44	8,55	8,66	8,76	8,85	8,94	9,03
9	4,60	5,43	5,96	6,35	6,66	6,91	7,13	7,33	7,49	7,65	7,78	7,91	8,03	8,13	8,23	8,33	8,41	8,49	8,57
10	4,48	5,27	5,77	6,14	6,43	6,67	6,87	7,05	7,21	7,36	7,49	7,60	7,71	7,81	7,91	7,99	8,08	8,15	8,23
11	4,39	5,15	5,62	5,97	6,25	6,48	6,67	6,84	6,99	7,13	7,25	7,36	7,46	7,56	7,65	7,73	7,81	7,88	7,95
12	4,32	5,05	5,50	5,84	6,10	6,32	6,51	6,67	6,81	6,94	7,06	7,17	7,26	7,36	7,44	7,52	7,59	7,66	7,73
13	4,26	4,96	5,40	5,73	5,98	6,19	6,37	6,53	6,67	6,79	6,90	7,01	7,10	7,19	7,27	7,35	7,42	7,48	7,55
14	4,21	4,89	5,32	5,63	5,88	6,08	6,26	6,41	6,54	6,66	6,77	6,87	6,96	7,05	7,13	7,20	7,27	7,33	7,39
15	4,17	4,84	5,25	5,56	5,80	5,99	6,16	6,31	6,44	6,55	6,66	6,76	6,84	6,93	7,00	7,07	7,14	7,20	7,26
16	4,13	4,79	5,19	5,49	5,72	5,92	6,08	6,22	6,35	6,46	6,56	6,66	6,74	6,82	6,90	6,97	7,03	7,09	7,15
17	4,10	4,74	5,14	5,43	5,66	5,85	6,01	6,15	6,27	6,38	6,48	6,57	6,66	6,73	6,81	6,87	6,94	7,00	7,05
18	4,07	4,70	5,09	5,38	5,60	5,79	5,94	6,08	6,20	6,31	6,41	6,50	6,58	6,65	6,73	6,79	6,85	6,91	6,97
19	4,05	4,67	5,05	5,33	5,55	5,73	5,89	6,02	6,14	6,25	6,34	6,43	6,51	6,58	6,65	6,72	6,78	6,84	6,89
20	4,02	4,64	5,02	5,29	5,51	5,69	5,84	5,97	6,09	6,19	6,28	6,37	6,45	6,52	6,59	6,65	6,71	6,77	6,82
24	3,96	4,55	4,91	5,17	5,37	5,54	5,69	5,81	5,92	6,02	6,11	6,19	6,26	6,33	6,39	6,45	6,51	6,56	6,61
30	3,89	4,45	4,80	5,05	5,24	5,40	5,54	5,65	5,76	6,85	5,93	6,01	6,08	6,14	6,20	6,26	6,31	6,36	6,41
40	3,82	4,37	4,70	4,93	5,11	5,26	5,39	5,50	5,60	6,69	5,76	5,83	5,90	5,96	6,02	6,07	6,12	6,16	6,21
60	3,76	4,28	4,59	4,82	4,99	5,13	5,25	5,36	5,45	5,53	5,60	5,67	5,73	5,78	5,84	5,89	5,93	5,97	6,01
120	3,70	4,20	4,50	4,71	4,87	5,01	5,12	5,21	5,30	5,37	5,44	5,50	5,56	5,61	5,66	5,71	5,75	5,79	5,83
∞	3,64	4,12	4,40	4,60	4,76	4,88	4,99	5,08	5,16	5,23	5,29	5,35	5,40	5,45	5,49	5,54	5,57	5,61	5,65

---

[b] Tabel pärineb teosest [8], lk. 112.

§ 3. KRITEERIUMID, MIS TUGINEVAD DISPERSIOONI-HINNANGUTELE.

Panime tähele, et äärmiste (kahtlaste) elementide väljajätmine mõjustab tugevasti hajuvust iseloomustavaid karakteristikuid - standardhälbe- ja dispersioonihinnanguid. Nende võrdlemine annab ühe võimaluse kahtlaste elementide väljajätmiseks. Käesolevas paragrahvis kirjeldame F-testi analoogile baseeruvaid kriteeriume dispersioonihinnangute võrdlemiseks kahtlaste elementide olemasolu väljaselgitamise eesmärgil.

1. Ühe kahtlase väärtuse kontrollimine.

Olgu tegemist normaalse juhusliku suurusega $X \sim N(m,\sigma)$ ning n-indiviidilise väljavõttega selle väärtuste hulgast. Dispersiooni σ^2 nihutamata hinnanguks väljavõtte väärtuste põhjal on

$$s^2 = \frac{1}{n-1} S^2 , \quad \text{kus} \quad S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Oletame, et variatsioonrea viimane element on kahtlane. Arvutame vastavad statistikud ilma seda elementi kasutamata:

$$s^2_{(n)} = \frac{1}{n-1} S^2_{(n)} ; \; S^2_{(n)} = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x}_{(n)})^2 ; \; \bar{x}_{(n)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i .$$

Samasugusel viisil võime arvutada statistikud ka ilma variatsioonrea esimest elementi kasutamata (kui see osutub kahtlaseks):

$$s^2_{(1)} = \frac{1}{n-1} S^2_{(1)}; \quad S^2_{(1)} = \sum_{i=2}^{n} (x_i - \bar{x}_{(1)})^2; \quad \bar{x}_{(1)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} x_i .$$

Suhted $S^2_{(1)}/S^2$ ja $S^2_{(n)}/S^2$ on sama jaotusega (normaaljaotuse sümmeetrilisuse tõttu). Nullhüpoteetilisel eeldusel, et variatsioonrea äärmised elemendid kuuluvad samasse üldkogumisse, on suhte jaotus tabuleeritud. Tabelis 8.9 esitame selle suhte α-kvantiilid x_α suurte α väärtuste jaoks sõltuvalt väljavõtte mahust n ; suhte kasutamise kohta vt. näide 8.4.

Tabel 8.9.

Suhte $\frac{S^2_{(1)}}{S^2}$ või $\frac{S^2_{(n)}}{S^2}$ α-kvantiilid x_α :

$$P\left(\frac{S^2_{(1)}}{S^2} < x_\alpha \right) = \alpha .$$

n	99%	97.5%	95%	90%
3	0,0001	0,0007	0,0027	0,0109
4	0,0100	0,0248	0,0494	0,0975
5	0,0442	0,0808	0,1270	0,1984
6	0,0928	0,1453	0,2032	0,2826
7	0,1447	0,2066	0,2696	0,3503
8	0,1948	0,2616	0,3261	0,4050
9	0,2411	0,3101	0,3742	0,4502
10	0,2831	0,3526	0,4154	0,4881
11	0,3211	0,3901	0,4511	0,5204
12	0,3554	0,4232	0,4822	0,5483
13	0,3864	0,4528	0,5097	0,5727
14	0,4145	0,4792	0,5340	0,5942
15	0,4401	0,5030	0,5559	0,6134
16	0,4634	0,5246	0,5755	0,6306
17	0,4848	0,5442	0,5933	0,6461
18	0,5044	0,5621	0,6095	0,6601
19	0,5225	0,5785	0,6243	0,6730
20	0,5393	0,5937	0,6379	0,6848
21	0,5548	0,6076	0,6504	0,6958
22	0,5692	0,6206	0,6621	0,7058
23	0,5827	0,6327	0,6728	0,7151
24	0,5953	0,6439	0,6829	0,7238
25	0,6071	0,6544	0,6923	0,7319

Tabel pärineb teosest [8], lk. 296.

2. <u>Kahe kahtlase väärtuse kontrollimine</u>.

Ülalkirjeldatud meetodiga sarnaselt on võimalik kontrollida ka kaht v a r i a t s i o o n r e a ühes o t s a s paiknevat kahtlast elementi. Selleks arvutame kas statistiku

$$s^2_{(1,2)} = \frac{1}{n-2} S^2_{(1,2)}; \quad S^2_{(1,2)} = \sum_{i=3}^{n} (x_i - \bar{x}_{(1,2)})^2; \quad \bar{x}_{(1,2)} = \frac{1}{n-2}\sum_{i=3}^{n} x_i,$$

juhul, kui kahtlasteks osutuvad väikseimad väärtused, või

$$s^2_{(n-1,n)} = \frac{1}{n-2} S^2_{(n-1,n)}; \quad S^2_{(n-1,n)} = \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - \bar{x}_{(n-1,n)})^2; \quad \bar{x}_{(n-1,n)} =$$

$$= \frac{1}{n-3} \sum_{i=1}^{n-2} x_i ,$$

siis, kui kahtluse all on maksimaalsed variatsioonrea liikmed.

Tabuleeritud on suhte $\frac{S^2_{(1,2)}}{S^2} = \frac{S^2_{(n-1,n)}}{S^2}$ α-kvantiilid suurte α väärtuste korral (vt. tabel 8.10).

<u>Näide 8.4</u>.

Olgu meil 10-indiviidine väljavõte, mille maksimaalsed elemendid tunduvad uurijale kahtlastena.

Nõutakse kontrollida (olulisuse nivooga $\alpha = 0,05$) nende kuuluvust ühtsesse üldkogumisse.

<u>Lahendus</u>.

Arvutame summad. Olgu need näiteks

$$S^2_{(n-1,n)} = 2,40;$$

$$s^2_{(n)} = 4{,}10\,;$$

$$s^2 = 10{,}0\,.$$

Leiame suhte $\frac{s^2_{(n)}}{s^2} = \frac{4{,}10}{10{,}0} = 0{,}410 < 0{,}4154$, kusjuures viimase väärtuse leidsime tabelist 8.9 kohalt $\alpha = 95\,\%$, $n = 10$. Seega näeme, et dispersioonihinnangud on liiga tugevasti erinevad, seega viimane variatsioonrea element ei saa uuritavasse üldkogumisse kuuluda.

Vaatleme nüüd, kuidas on lugu eelviimase elemendiga. Leiame suhte

$$\frac{s^2_{(n-1,n)}}{s^2} = 0{,}24 > 0{,}2305 = x_{0,95} \text{ (vt. tabel 8.10, } n = 10\text{).}$$

Järelikult kahe mõlema viimase elemendi kuulumine üldkogumisse ei ole liiga väikese tõenäosusega. Et viimane element osutus võõraks, tuleb järeldada, et eelviimane kuulub üldkogumisse.

Tabel 8.10.

Suhte $\dfrac{s^2_{(1,2)}}{s^2}$ või $\dfrac{s^2_{(n-1,n)}}{s^2}$ α-kvantiilid x_α :

$$P\left(\frac{s^2_{(1,2)}}{s^2} < x_\alpha \right) = \alpha .$$

n	99%	97,5%	95%	90%
4	0,0000	0,0002	0,0008	0,0031
5	0,0035	0,0090	0,0183	0,0376
6	0,0186	0,0349	0,0565	0,0921
7	0,0440	0,0708	0,1020	0,1479
8	0,0750	0,1101	0,1478	0,1994
9	0,1082	0,1492	0,1909	0,2454
10	0,1415	0,1865	0,2305	0,2863
11	0,1736	0,2212	0,2666	0,3226
12	0,2044	0,2536	0,2996	0,3552
13	0,2333	0,2836	0,3295	0,3843
14	0,2605	0,3112	0,3568	0,4106
15	0,2859	0,3367	0,3818	0,4345
16	0,3098	0,3603	0,4048	0,4562
17	0,3321	0,3822	0,4259	0,4761
18	0,3530	0,4025	0,4455	0,4944
19	0,3725	0,4214	0,4636	0,5113
20	0,3909	0,4391	0,4804	0,5269

Tabel pärineb teosest [8], lk. 297.

§ 4. VARIATSIOONREA ÜKSIKELEMENTIDE VAHEKAUGUSED.

Silma järgi hinnates on mõne elemendi kahtlaseks lugemiseks aluseks nimelt elemendi suur vahekaugus lähimast (lähimatest) naabritest. Ka variatsioonrea üksikute (äärmiste) elementide omavahelised kaugused mitmel viisil normeeritutena on tabuleeritud ning nende alusel välja töötatud kriteeriumid vööraste elementide väljaeraldamiseks.

1. Kahe kõrvutipaikneva äärmise liikme vahe normeeritud suhe (σ on teada).

Olgu X normaalne $N(m,\sigma)$ juhuslik suurus. Eeldame, et standardhälve σ on teada (eelmistest vaatlustest, teoreetilistest kaalutlustest). Olgu antud n-indiviidiline väljavõte selle juhusliku suuruse väärtuse hulgast. Tabelis 8.11 on tabuleeritud suhte $\frac{X_n - X_{n-1}}{\sigma}$ täiendjaotusfunktsioon (tuhandega korrutatuna). Seda tabelit on hõlpus kasutada terve rea kahtlaste väärtuste väljaeraldamiseks, kuna täiendavalt tuleb arvutada vaid vahed ja muuta väljavõtte mahtu: peale elemendi X_n väljaeraldamist leiame vahe $\frac{X_{n-1} - X_{n-2}}{\sigma}$ ja kontrollime saadud vahet tabelist 8.11 väljavõtte mahule n-1 vastava jaotusfunktsiooni väärtusega; kui ka X_{n-1} osutus vööraks, tuleb leida vahe $\frac{X_{n-3} - X_{n-2}}{\sigma}$ jne. Täpselt samuti on jaotatud ka suhe $\frac{X_2 - X_1}{\sigma}$ jne., seetõttu on võimalik kontrollida niihästi vähimate kui ka suurimate variatsioonrea liikmete kuulumist üldkogumisse.

Tabel 8.11.

Normeeritud suhte $\frac{X_n - X_{n-1}}{\sigma}$ täiendjaotusfunktsioon (korrutatuna tuhandega):

$$1000.P\left(\frac{X_n - X_{n-1}}{\sigma} > \lambda\right) = 1000.P\left(\frac{X_2 - X_1}{\sigma} > \lambda\right).$$

n	λ 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
2	944	888	832	777	724	671	621	572	534	480	437	396	358
3	917	836	760	687	618	553	498	437	386	339	296	257	222
10	855	737	613	513	427	353	289	235	190	152	121	096	075
20	827	679	553	447	359	285	226	177	138	107	082	062	047
30	813	656	525	417	328	257	199	153	117	089	068	050	037
40	803	639	506	396	308	238	182	138	104	078	058	042	031
50	796	628	491	382	294	225	170	128	096	071	052	038	027
60	790	619	481	371	283	215	161	120	089	065	048	034	025
70	785	611	471	361	274	206	154	114	084	061	044	032	022
80	780	604	464	353	267	200	148	109	080	058	041	030	021
90	778	600	459	348	262	195	144	106	077	055	040	028	020
100	775	596	454	343	257	191	141	103	075	054	038	027	019
200	757	567	422	311	227	165	118	084	060	042	029	020	014
300	746	552	405	294	212	152	107	075	052	036	025	017	011
400	740	543	394	284	203	144	101	070	048	033	022	015	010
500	735	536	387	277	197	138	096	067	045	031	021	014	009
600	731	530	381	271	191	134	093	064	043	029	020	013	009
700	727	525	375	266	187	130	090	061	041	028	019	012	008
800	725	521	371	262	183	127	087	059	040	027	018	012	008
900	722	517	367	258	180	124	085	058	039	026	017	011	007
1000	720	514	364	255	177	122	083	056	038	025	016	011	007

n	λ 1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
2	322	269	258	229	203	179	157	138	120	104	090	077
3	191	163	139	118	099	083	069	057	047	039	031	025
10	059	045	035	028	020	015	011	008	007	004	003	002
20	035	026	019	014	010	007	006	004	003	002	001	001
30	027	020	014	010	007	005	004	003	002	001	001	001
40	022	016	011	008	006	004	003	002	001	001	001	
50	019	014	010	007	005	003	002	001	001	001		
60	017	012	009	006	004	003	002	001	001	001		
70	016	011	008	005	004	002	002	001	001			
80	016	010	007	005	003	002	001	001	001			
90	014	010	007	004	003	002	001	001	001			
100	013	009	006	004	003	002	001	001	001			
200	009	006	004	003	002	001	001					
300	007	005	003	002	001	001	001					
400	007	004	003	002	001	001	001					
500	006	004	002	002	001	001						
600	005	004	002	001	001	001						
700	005	003	002	001	001	001						
800	005	003	002	001	001	001						
900	005	003	002	001	001							
1000	005	003	002	001	001							

n	λ 2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
2	066	056	048	040	034	028	024	020	016	013	011	009	007
3	021	016	013	010	008	006	005	004	003	002	002	001	001
10	002	001	001	001									
20	001												

n	λ 3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
2	006	005	004	003	002	002	001	001	001	001	001	—
3	001	001										

Tabel pärineb teosest [8], lk. 293.

2. Variatsioonrea liikmete vahe ja variatsiooniulatuse suhe.

Punktis 1 kirjeldatud meetodi puuduseks on liialt range eeldus: nimelt nõutakse, et standardhälve σ oleks teada. Kasutades selle asemel σ hinnangut variatsiooniulatuse kaudu, saame kriteeriumid variatsioonrea liikmete ja variatsiooniulatuse suhte abil. Tabelites 8.12 ja 8.13 on tabuleeritud suhete

$$r_{10} = \frac{X_2 - X_1}{\omega} = \frac{X_n - X_{n-1}}{\omega},$$

ja

$$r_{20} = \frac{X_3 - X_1}{\omega} = \frac{X_n - X_{n-2}}{\omega}$$

kvantiilid (eeldusel, et väljavõtted pärinevad normaalse $N(m, \sigma)$ juhusliku suuruse väärtuste hulgast). Suhet r_{10} sobib kasutada juhul, kui kahtluse all on üksnes äärmine element, suhet r_{20} aga juhul, kui kahtluse all on kaks äärmist elementi, mistõttu nende vahe ei tarvitse osutuda väljaeraldamiseks sobivaks statistikuks (vt. joon. 8.1). Kui on alust arvata, et võõraid elemente on ühes variatsioonrea otsas rohkem kui kaks, tuleb kasutada teisi meetodeid (vt. joon. 8.2).

Märgime siin, et nende kriteeriumide korduv rakendamine nõuab ka ω ümberarvutamist, mis aga pole keeruline.

Näide 8.5.

Olgu antud 10-indiviidiline väljavõte, kusjuures $\omega = 10{,}0$. Kahtlusi tekitavad viimased kaks variatsioonrea liiget x_n ja x_{n-1}, kusjuures $x_n - x_{n-1} = 2{,}0$; $x_{n-1} - x_{n-2} = 4{,}0$. Nõutakse kontrollida nende kuuluvust uuritavasse üldkogumisse olulisuse nivooga $\alpha = 0{,}05$.

Lahendus.

Leiame $r_{10} = \frac{2{,}0}{10{,}0} = 0{,}200$; tabelist 8.12 näeme, et niisuguse või suurema hälbe esinemise tõenäosus on üle 30 %, seega ei ole mingit põhjust äärmise elemendi eemaldamiseks. Vaatleme nüüd aga statistikut

$r_{20} = \frac{2{,}0+4{,}0}{10{,}0} = 0{,}600$; tabelist 8.13 näeme, et $x_{0,95} = 0{,}531$, seega on meie juhul vahe liiga suur ning väärtus x_n tuleb lugeda (olulisuse nivooga $\alpha = 0{,}05$) mittekuuluvaks vaadeldavasse kogumisse.

Loomulik on püstitada probleem ka elemendi x_{n-1} suhtes. Arvutame $n-1 = 9$ jaoks suhte $r_{10} = \frac{4{,}0}{10{,}0-2{,}0} = 0{,}500 > 0{,}437$ (vt. tabel 8.12), seega tuleb ka element x_{n-1} eemaldada.

Näiline vastuolu statistikute r_{20} ja r_{10} kasutamisel saadud tulemuste vahel on tingitud asjaolust, et r_{10} "ei tööta" juhul, kui kaks elementi on valed (ja paiknevad teineteise lähedal). Selletõttu tuleb statistiku r_{10} kasutamisel alati veenduda, et pole tegemist väärade elementide rühmaga (vt. joon. 8.1 ja 8.2).

Tabel 8.12.

Suhte $r_{10} = \frac{X_2 - X_1}{X_n - X_1} = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_1}$ kvantiilid x_α (korrutatud tuhandega).

$$P\left(\frac{X_2 - X_1}{X_n - X_1} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

n \ α, %	99.5	99	98	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5
3	994	988	976	941	886	781	684	591	500	409	316	219	114	059
4	926	889	846	765	679	560	471	394	324	257	193	130	065	033
5	821	780	729	642	557	451	373	308	250	196	146	097	048	023
6	740	698	644	560	482	386	318	261	210	164	121	079	038	018
7	680	637	586	507	434	344	281	230	184	143	105	068	032	016
8	634	590	543	468	399	314	255	208	166	128	094	060	029	014
9	598	555	510	437	370	290	234	191	152	118	086	055	026	013
10	568	527	483	412	349	273	219	178	142	110	080	051	025	012
11	542	502	460	392	332	259	208	168	133	103	074	048	023	011
12	522	482	441	376	318	247	197	160	126	097	070	045	022	011
13	503	465	425	361	305	237	188	153	120	092	067	043	021	010
14	488	450	411	349	294	228	181	147	115	088	064	041	020	010
15	475	438	399	338	285	220	175	141	111	085	062	040	019	010
16	463	426	388	329	277	213	169	136	107	082	060	039	019	009
17	452	416	379	320	269	207	165	132	104	080	058	038	018	009
18	442	407	370	313	263	202	160	128	101	078	056	036	018	009
19	433	398	363	306	258	197	157	125	098	076	055	036	017	008
20	426	391	356	300	252	193	153	122	096	074	053	035	017	008
21	418	384	350	295	247	189	150	119	094	072	052	034	016	008
22	411	378	344	290	242	186	147	117	092	071	051	033	016	008
23	404	372	338	285	238	182	144	115	090	069	050	033	016	008
24	399	367	333	281	234	179	142	113	089	068	049	032	016	008
25	393	362	329	277	230	176	139	111	088	067	048	032	015	008
26	388	357	324	273	227	173	137	109	086	066	047	031	015	007
27	384	353	320	269	224	171	135	108	085	065	047	031	015	007
28	380	349	316	266	220	168	133	106	084	064	046	030	015	007
29	376	345	312	263	218	166	131	105	083	063	046	030	014	007
30	372	341	309	260	215	164	130	103	082	062	045	029	014	007

Tabel pärineb teosest [8], lk. 298.

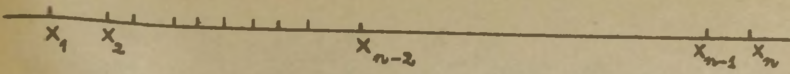
Tabel 8.13.

Suhte $r_{20} = \dfrac{X_3 - X_1}{X_n - X_1} = \dfrac{X_n - X_{n-2}}{X_n - X_1}$ kvantiilid x_α (korrutatud tuhandega).

$$P\left(\frac{X_3 - X_1}{X_n - X_1} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

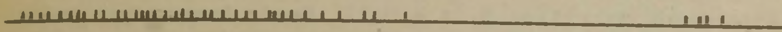
n \ α, %	99.5	99	98	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5
4	996	992	987	967	935	871	807	743	676	606	529	440	321	235
5	950	929	901	845	782	694	623	560	500	440	377	306	218	155
6	865	836	800	736	670	585	520	463	411	358	305	245	172	126
7	814	778	732	661	596	516	454	402	355	306	261	208	144	099
8	746	710	670	607	545	468	410	361	317	274	230	184	125	085
9	700	667	627	565	505	432	378	331	288	250	208	166	114	077
10	664	632	592	531	474	404	354	307	268	231	192	153	104	070
11	627	603	564	504	449	381	334	290	253	217	181	143	097	065
12	612	579	540	481	429	362	316	274	239	205	172	136	091	060
13	590	557	520	461	411	345	301	261	227	195	164	129	086	057
14	571	538	502	445	395	332	288	250	217	187	157	123	082	054
15	554	522	486	430	382	320	277	241	209	179	150	118	079	052
16	539	508	472	418	370	310	268	233	202	173	144	113	076	050
17	526	495	460	406	359	301	260	226	195	167	139	109	074	049
18	514	484	449	397	350	293	252	219	189	162	134	105	071	048
19	503	473	439	379	341	286	246	213	184	157	130	101	069	047
20	494	464	430	372	333	279	240	208	179	152	126	098	067	046
21	485	455	422	365	326	273	235	203	175	148	123	096	065	045
22	477	447	414	358	320	267	230	199	171	145	120	094	064	044
23	469	440	407	352	314	262	225	195	167	142	117	092	062	043
24	462	434	401	347	309	258	221	192	164	139	114	090	061	042
25	456	428	395	343	304	254	217	189	161	136	112	089	060	041
26	450	422	390	338	300	250	214	186	158	134	110	087	059	041
27	444	417	385	334	296	246	211	183	156	132	109	086	058	040
28	439	412	381	330	292	243	208	180	154	130	107	085	058	040
29	434	407	376	326	288	239	205	177	151	128	106	083	057	039
30	428	402	372	322	285	236	202	175	149	126	104	082	056	039

Tabel pärineb teosest [8], lk. 301.



Joonis 8.1.

Väljavõttes on ilmselt 2 väära elementi; statistiku r_{10} kasutamine ei võimalda avastada, et x_n on võõras.



Joonis 8.2.

Väljavõttes on ilmselt 4 väära elementi. Neid pole võimalik avastada ei statistiku r_{10} ega ka statistiku r_{20} abil, vaid tuleb kasutada teisi meetodeid.

3. <u>Variatsioonrea liikmete vahe ja variatsioonrea osaulatuse suhe.</u>

Eelmises punktis esitatud kriteeriumid sobivad kasutamiseks vaid juhul, kui kahtlased elemendid paiknevad variatsioonrea ühes otsas. Kui neid aga võib variatsioonrea mõlemas otsas leiduda, ei ole täieliku variatsiooniulatuse kasutamine sobiv, sest see võib anda standardhälbele nihutatud hinnangu, mida vaadeldava statistiku jaotuses ei arvestata. Sellisel juhul tuleb kasutada statistikuid, mis baseeruvad variatsioonrea osaulatusele:

$$r_{11} = \frac{X_2 - X_1}{X_{n-1} - X_1} = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_2},$$

$$r_{12} = \frac{X_2 - X_1}{X_{n-2} - X_1} = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_3},$$

$$r_{21} = \frac{X_3 - X_1}{X_{n-1} - X_1} = \frac{X_n - X_{n-2}}{X_n - X_2},$$

$$r_{22} = \frac{X_3 - X_1}{X_{n-2} - X_1} = \frac{X_n - X_{n-2}}{X_n - X_3}.$$

Nende statistikute kvantiilid sõltuvalt väljavõtte mahust on tabuleeritud tabelites 8.14 - 8.17. Nende kasutamine on analoogiline eelpoolkirjeldatuga, kusjuures valida tuleb neid järgmiselt:

r_{11} juhul, kui variatsioonrea kummaski otsas on üks kahtlane element;

r_{12} juhul, kui kontrollitavas otsas on üks, teises otsas aga kaks kahtlast elementi;

r_{21} juhul, kui kontrollitavas otsas on kaks, teises otsas aga üks kahtlane element;

r_{22} juhul, kui variatsioonrea mõlemas otsas on kaks kahtlast elementi.

Tabel 8.14.

Suhte $r_{11} = \dfrac{X_2 - X_1}{X_{n-1} - X_1} = \dfrac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_2}$ kvantiilid x_α (korrutatud tuhandega).

$$P\left(\frac{X_2 - X_1}{X_{n-1} - X_1} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

α. % / n	99,5	99	98	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5
4	995	991	981	955	910	822	737	648	564	459	362	250	131	069
5	937	916	876	807	728	615	524	444	369	296	224	151	078	039
6	839	805	763	689	609	502	420	350	288	227	169	113	056	028
7	782	740	689	610	530	432	359	298	241	189	140	093	045	022
8	725	683	631	554	479	385	318	260	210	164	121	079	037	019
9	677	635	587	512	441	352	288	236	189	148	107	070	033	016
10	639	597	551	477	409	325	265	216	173	134	098	063	030	014
11	606	566	521	450	385	305	248	202	161	124	090	058	028	013
12	580	541	498	428	367	289	234	190	150	116	084	055	026	012
13	558	520	477	410	350	275	222	180	142	109	079	052	025	012
14	539	502	460	395	336	264	212	171	135	104	075	049	024	011
15	522	486	445	381	323	253	203	164	129	099	072	047	023	011
16	508	472	432	369	313	244	196	158	124	095	069	045	022	011
17	495	460	420	359	303	236	190	152	119	092	067	044	021	010
18	484	449	410	349	295	229	184	148	116	089	065	042	020	010
19	473	439	400	341	288	223	179	143	112	087	063	041	020	010
20	464	430	392	334	282	218	174	139	110	084	061	040	019	010
21	455	421	384	327	276	213	170	136	107	082	059	039	019	009
22	446	414	377	320	270	208	166	132	104	081	058	038	018	009
23	439	407	371	314	265	204	163	130	102	079	056	037	018	009
24	432	400	365	309	260	200	160	127	100	077	055	036	018	009
25	426	394	359	304	255	197	156	124	098	076	054	036	017	009
26	420	389	354	299	250	193	154	122	096	074	053	035	017	008
27	414	383	349	295	246	190	151	120	095	073	052	034	017	008
28	409	378	344	291	243	188	149	118	093	072	051	034	016	008
29	404	374	340	287	239	185	146	116	092	070	051	033	016	008
30	399	369	336	283	236	182	144	115	090	069	050	032	016	008

Tabel pärineb teosest [8], lk. 299.

<u>Tabel 8.15.</u>

Suhte $r_{12} = \dfrac{X_2 - X_1}{X_{n-2} - X_1} = \dfrac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_3}$ kvantiilide x_α tuhandekordsed:

$$P\left(\frac{X_2 - X_1}{X_{n-2} - X_1} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

α, % / n	99,5	99	98	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5
5	996	992	984	960	919	838	755	669	579	463	381	268	143	074
6	951	925	891	824	745	635	545	465	390	316	240	165	088	049
7	875	836	791	712	636	528	445	374	307	245	183	123	064	031
8	797	760	708	632	557	456	382	317	258	203	152	101	056	025
9	739	701	656	580	504	409	339	270	227	177	130	086	044	021
10	694	655	610	537	454	373	308	258	204	158	116	075	038	019
11	658	619	575	502	431	345	283	232	187	145	106	069	035	017
12	629	590	546	473	406	324	265	217	174	135	098	063	032	016
13	612	554	521	451	387	307	250	204	163	126	092	059	030	015
14	580	542	501	432	369	292	237	193	153	118	086	055	028	014
15	560	523	482	416	354	280	226	184	146	112	082	053	026	013
16	544	508	467	401	341	269	217	177	139	107	078	050	025	013
17	529	493	453	388	330	259	209	170	134	103	075	048	014	012
18	516	480	440	377	320	251	202	163	129	099	072	047	023	012
19	504	469	429	367	311	243	196	157	125	096	069	045	022	011
20	493	458	419	358	303	237	191	153	121	093	067	044	022	011
21	483	449	410	349	296	231	186	148	118	090	065	042	021	010
22	474	440	402	342	290	225	181	145	114	088	063	041	020	010
23	465	432	394	336	284	220	176	141	112	086	062	040	020	010
24	457	423	387	330	278	216	173	138	109	084	060	039	019	010
25	450	417	381	324	273	212	169	135	107	082	059	038	019	009
26	443	411	375	319	268	208	166	132	105	080	058	037	019	009
27	437	405	370	314	263	204	163	130	103	079	057	037	018	009
28	431	399	365	309	259	201	160	128	101	077	056	036	018	009
29	426	394	360	305	255	197	157	126	099	076	055	035	017	009
30	420	389	355	301	251	194	154	124	098	075	054	035	017	009

Tabel pärineb teosest [8], lk. 300.

Tabel 8.16.

Suhte $r_{21} = \dfrac{X_3 - X_1}{X_{n-1} - X_1} = \dfrac{X_n - X_{n-2}}{X_n - X_2}$ kvantiilid x_α (korrutatud tuhandega).

$$P\left(\frac{X_3 - X_1}{X_{n-1} - X_1} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

n \ α, %	99,5	99	98	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5
5	998	995	990	976	952	902	850	795	735	669	594	501	374	273
6	970	951	924	872	821	745	680	621	563	504	439	364	268	195
7	919	885	842	780	725	637	575	517	462	408	350	285	198	138
8	868	829	780	710	650	570	509	454	402	352	298	240	166	117
9	816	776	725	657	594	516	458	407	360	313	265	212	146	103
10	760	726	678	612	551	474	420	374	329	286	240	189	130	089
11	713	679	638	576	517	442	391	348	305	265	221	173	118	080
12	675	642	605	546	490	419	370	326	285	247	206	161	110	074
13	649	615	578	521	467	399	351	308	269	232	194	152	104	070
14	627	593	555	501	448	381	334	293	255	219	184	144	099	066
15	607	574	537	483	431	366	319	280	245	208	175	138	094	062
16	589	557	521	467	416	353	307	269	235	199	167	132	090	059
17	573	542	507	453	403	341	296	259	225	192	161	127	086	057
18	559	529	494	440	391	331	287	250	218	186	155	122	082	054
19	547	517	482	428	380	322	279	243	211	180	150	117	078	052
20	536	506	472	419	371	314	271	236	205	174	145	113	075	050
21	526	496	462	410	363	306	264	229	199	170	141	110	073	049
22	517	487	453	402	356	299	258	223	194	165	137	107	071	048
23	509	479	445	395	349	293	252	218	189	161	133	105	069	046
24	501	471	438	388	343	287	247	214	185	158	130	103	068	045
25	493	464	431	382	337	282	242	210	181	154	127	100	067	043
26	486	457	424	376	331	277	238	206	178	151	125	098	066	042
27	479	450	418	370	325	273	234	203	175	149	123	096	064	041
28	472	444	412	365	320	269	230	200	172	146	121	094	063	041
29	466	438	406	360	316	265	227	197	170	144	119	092	062	040
30	460	433	401	355	312	261	224	194	167	142	117	091	061	040

Tabel pärineb teosest [8], lk. 302.

Tabel 8.17.

Suhte $r_{22} = \frac{X_3 - X_1}{X_{n-2} - X_1} = \frac{X_n - X_{n-2}}{X_n - X_3}$ kvantiilid x_α (korrutatud tuhandega).

$$P\left(\frac{X_3 - X_1}{X_{n-2} - X_1} < x_\alpha\right) = \alpha .$$

n \ α, %	99.5	99	98	95	90	80	70	60	50	40	30	20	10	5
6	998	995	992	983	965	930	880	830	780	720	640	540	410	300
7	970	945	919	881	850	780	730	670	610	540	470	380	270	200
8	922	890	857	803	745	664	602	546	490	434	375	309	218	156
9	873	840	800	737	676	592	530	478	425	373	320	281	186	128
10	826	791	749	682	620	543	483	433	384	335	285	231	150	111
11	781	745	703	637	578	503	446	397	351	305	256	208	142	099
12	740	704	661	600	543	470	416	370	325	282	238	190	130	090
13	705	670	628	570	515	443	391	347	304	263	222	177	122	084
14	674	641	602	546	492	421	370	328	287	247	206	166	115	079
15	647	616	579	525	472	402	353	312	273	234	196	156	109	075
16	624	595	559	507	454	386	338	298	261	223	186	148	104	071
17	606	577	542	490	438	373	325	286	250	214	178	142	099	067
18	589	561	527	475	424	361	314	276	241	206	171	135	094	063
19	575	547	514	462	412	350	304	268	233	199	165	130	090	060
20	562	536	502	450	401	340	295	260	226	193	160	125	086	057
21	551	524	491	440	391	331	287	252	220	187	155	120	082	054
22	541	514	481	430	382	323	280	245	213	182	150	116	078	051
23	532	505	472	421	374	316	274	239	207	177	146	113	075	049
24	524	497	464	413	367	310	268	232	201	172	142	111	074	047
25	516	489	457	406	360	304	262	227	196	168	138	108	073	045
26	508	486	450	399	354	298	257	222	192	164	135	106	072	044
27	501	475	443	393	348	292	252	218	189	161	132	104	071	043
28	495	469	437	387	342	287	247	215	186	158	130	102	069	042
29	489	463	431	381	337	282	243	211	183	155	128	100	068	041
30	483	457	425	376	332	278	239	208	180	153	126	098	067	041

Tabel pärineb teosest [8] , lk. 303.

K i r j a n d u s .

1. Dixon, W.J., Massey, F.J. Introduction to Statistical Analysis. N. York, Toronto, London, 1957.
2. Tiit, E. Matemaatiline statistika I. Tartu, 1971.
3. Tiit, E. Matemaatilise statistika tabelid I. Tartu, 1971.
4. Weber, E. Grundriss der Biologischen Statistik. Jena, 1967.
5. Большев, Л.Н., Смирнов, Н.В. Таблицы математической статистики. Москва, I968.
6. Бронштейн, И.Н., Семендяев, К.А. Справочник по математике, Москва, I959.
7. Ван дер Варден, Б.Л. Математическая статистика. Москва, I960.
8. Введение в теорию порядковых статистик. Москва, I970.
9. Дунин-Барковский, И.В., Смирнов, Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Москва, I955.
I0. Оуэн, Д.Б. Сборник статистических таблиц. Москва, I966.
II. Снедекор, Дж.У. Статистические методы. Москва, I96I.
I2. Толоконцев, Н.А. Вычисление среднего квадратического отклонения по размаху. Сравнение с общепринятым методом. Тезисы докладов третьего совещания по применению математических методов в биологии. Ленинград, I96I.

S i s u k o r d.

Hind 55 kop.