TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Jaana Tõnisson

Cayley graafid

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja: professor Peeter Puusemp
Kaasjuhendaja: professor Kalle Kaarli

Tartu 2014

Cayley graafid

Jaana Tõnisson

Lühikokkuvõte

Käesolev bakalaureusetöö tutvustab rühmade graafilist esitlust Cayley graafide näol. Teema valikut põhjendab asjaolu, et vastavad graafid on algebras ja graafiteoorias suhteliselt vähe käsitlust leidnud. Lisaks ühendavad Cayley graafid kahte olulist modernse matemaatika haru - rühmasid ja graafe. Cayley graafid annavad võimaluse visualiseerida rühmi, mis on antud oma tekitajate ja määravate seostega.

Definitsioon. Olgu G lõplik rühm ja S tema tekitajate hulk, st $G = \langle S \rangle$. Rühma G Cayley graafiks nimetatakse suunatud graafi $\Gamma = \Gamma_{G,S}$, mille tippude hulgaks on G ja tipust g suundub tippu h suunatud serv siis ja ainult siis, kui leidub $s \in S$, nii et $h = gs$. Vastav kaar märgistatakse tekitajaga s.

$$g \xrightarrow{\quad s \quad} h = gs$$

Töös defineeritakse Cayley graafide mõistmiseks olulised mõisted rühma- ja graafiteooriast, lisaks Hamiltoni ja Schreieri graaf, millede korral on välja toodud ka seotus Cayley graafidega. Tööst leiab mõningaid Cayley graafide omadusi ja rakendusi. Kõige mahukam osa tööst on peatükk, milles on iseseisvalt koostatud kõik kuni 16-nda järguni mittekommutatiivsete rühmade Cayley graafid.

VÕTMESÕNAD: mittekommutatiivsed rühmad, rühmade graafiline esitlus, graafid, Cayley graaf

Cayley graphs

Jaana Tõnisson

Abstract

This bachelor's thesis introduces a graphical representation of a group given by a set of generators and relations with the help of Cayley graphs. The topic is not usually covered in abstract algebra nor in graph theory, yet is important for connecting two important branches of modern mathematics - groups and graphs, and providing a method for vizualizing groups.

Definition. Let G be a finite group and let $S \subseteq G$ be a subset. The corresponding Cayley graph $\Gamma_{(G,S)}$ has vertex set equal to G. Two vertices $g, h \in G$ are joined by a directed edge from g to h if and only if there exists $s \in S$ such that $h = gs$. Each edge is labeled to denote that it corresponds to $s \in S$. If Γ is a graph such that there exists a group G and generating set $S \subseteq G$ with $\Gamma \cong \Gamma_{(G,S)}$, then Γ is said to be a Cayley graph.

In order to understand Cayley graphs, important group and graph theory concepts are defined. In addition, Hamilton and Schreier coset graphs are being introduced, while bringing out the results on hamiltonian cycles and paths in Cayley graps, and the fact that a Schreier coset graph is a generalization of a Cayley graph. A substantial paragraph of the thesis includes drawing all the Non-abelian groups of order 16.

KEYWORDS: non-abelian groups, graphical representation of a group, graphs, Cayley graphs

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu antud rühm tema tekitajate ja määravate seostega. Käesolev bakalaureusetöö tutvustab sellise rühma graafilist esitlust Cayley graafil. Teema on uurimise alla võetud kolmel põhjusel:

- Cayley graafide suhteliselt vähene käsitlus algebras ja graafiteoorias;
- rühmade visualiseerimise võimalus;
- kahe olulise modernse matemaatika haru - rühmade ja graafide ühendamine.

Töö eesmärgiks on anda ülevaade Cayley graafist kui ühest rühmade esitamise võimalusest ning tutvustada kuni 16-nda järguni mittekommutatiivsete rühmade Cayley graafe. Lisaks annab töö kerge ülevaate Cayley graafide seotusest Hamiltoni ja Schreieri graafidega.

Käesolev töö on põhiliselt referatiivne, tema kirjutamisel olid aluseks allikad [G], [CM], [F]. Täiesti iseseisvalt on koostatud kolmas peatükk.

Esimeses peatükis tuuakse välja antud töö kontekstis olulised olevad rühma- ja graafiteooria mõisted, lisatud ka mõned lihtsad näited.

Teine peatükk on pühendatud Cayley graafidele. Esimeses alapunktis defineeritakse Cayley graaf ning tuuakse välja mõningad omadused. Teises alapunktis keskendutakse ülevaatlikult mõningatele Cayley graafide rakendustele.

Kolmandas peatükis tutvustatakse kõiki kuni 16-nda järguni mittekommutatiivseid rühmi ja nende Cayley graafe. Välja on toodud erinevad graafide koostamise võimalused, kasutades nii graafide värvimist kui servade tähistamist muudel viisidel.

Neljas peatükk annab ülevaate Cayley graafide seotusest Hamiltoni tsüklite ja aheletega ning töö viimases peatükis keskendutakse ülevaatlikult Schreieri graafidele, mis on tuntud kui Cayley graafide üldistused.

Kuigi Cayley graafid ei ole leidnud algebras ega graafiteoorias laialdast käsitlust, leiab töö autor, et materjali on teema kohta piisavalt ning uurimisprobleeme jätkub.

1 Mõningaid mõisteid rühma- ja graafiteooriast

Antud peatükis defineeritud mõisted rühma- ja graafiteooriast on aluseks käesolevale bakalaureusetööle.

Esmalt defineerime olulised rühmateooria mõisted. Olgu mainitud, et mõistete esitamise järjekord ei ole määrav, mõistetele tuginetakse kogu töö vältel.

Definitsioon 1.1. Hulkade X ja Y **otsekorrutiseks** nimetatakse hulka $X \times Y$, mis koosneb kõikvõimalikest paaridest $(x; y)$, kus $x \in X$ ja $y \in Y$:

$$X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Erijuhul, kui $X = Y$, tähistatakse $X \times X = X^2$.

Definitsioon 1.2. Mittetühja hulka G nimetatakse **rühmaks**, kui temas on antud binaarne tehe $*$, mis rahuldab järgmisi omadusi:

1^0 tehe $*$ on assotsiatiivne, s. t. $a * (b * c) = (a * b) * c$ iga $a,\ b,\ c \in G$ korral;

2^0 tehte $*$ suhtes leidub ühik e, s.t. leidub selline $e \in G$, et $a * e = e * a = a$ iga $a \in G$ korral;

3^0 igal elemendil $a \in G$ leidub pöördelement, s.t. iga $a \in G$ korral leidub selline $b \in G$, et $a * b = b * a = e$.

Järgnevalt tähistame tehet $*$ korrutamisena, ehkki see võib vabalt olla ka mõni muu tehe (näiteks liitmine). Rühma G tehtega $*$ tähistatakse $(G; *)$.

Definitsioon 1.3. Olgu n positiivne naturaalarv. **n-ndat järku substitutsiooniks** nimetatakse bijektiivset kujutust $f : X \longrightarrow X$, kus $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Kõigi n-ndat järku substitutsioonide hulk S_n moodustab kujutuste korrutamise suhtes rühma – **substitutsioonirühma** S_n. Substitutsiooni $f \in S_n$ esitatakse kujul

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}.$$

Kui veel

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ g(1) & g(2) & \ldots & g(n) \end{pmatrix} \in S_n,$$

siis

$$f \cdot g = fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \ldots & f(g(n)) \end{pmatrix}.$$

Käesolevas töös joonestatakse substitutsioonirühma S_3 Cayley graaf.

Definitsioon 1.4. Rühma $(G; *)$ nimetatakse **kommutatiivseks** ehk **Abeli rühmaks**, kui tehe $*$ on kommutatiivne, st

$$a * b = b * a \text{ iga } a, b \in G \text{ korral.}$$

Näide 1.1. Abeli rühmad on näiteks $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Q}; +)$, $(\mathbb{R}; +)$, $(\mathbb{C}; +)$.

Abeli rühma definitsioon on vajalik käesolevas töös eelkõige mõistmaks seoseid Cayley ja Hamiltoni graafide vahel neljandas peatükis.

Definitsioon 1.5. Rühma G mittetühja alamhulka A nimetatakse rühma G **alamrühmaks**, kui A on samuti rühm rühma G tehte suhtes.

Näide 1.2. Rühm $(\mathbb{Z}; +)$ on rühma $(\mathbb{Q}; +)$ alamrühm, rühm $(\mathbb{Q}; +)$ on omakorda rühma $(\mathbb{R}; +)$ alamrühm.

Definitsioon 1.6. Olgu $a \in G$. Rühma G alamhulka

$$aA = \{ab \mid b \in A\}$$

nimetatakse rühma G **vasakpoolseks kõrvalklassiks alamrühma** A järgi.

Analoogiliselt alamhulka

$$Aa = \{ba \mid b \in A\}$$

nimetatakse rühma G **parempoolseks kõrvalklassiks alamrühma** A järgi.

Järgmise definitsiooni jaoks olgu G rühm ning N tema alamrühm.

Definitsioon 1.7. Alamrühma N nimetatakse rühma G **normaaljagajaks** ja tähistatakse $N \triangleleft G$, kui $a^{-1}ba \in N$ iga $a \in G$ ja $b \in N$ korral:

$$a \in G, b \in N \Rightarrow a^{-1}ba \in N.$$

Definitsioon 1.8. Olgu N rühma G normaaljagaja ja $G/N = \{aN \mid a \in G\}$ kõigi vasakpoolsete kõrvalklasside hulk normaaljagaja N järgi. Siis G/N on rühm, kui defineerida korrutis hulgas G/N järgmiselt:

$$(aN) \cdot (bN) = (ab)N, \quad a, b \in G.$$

Saadud rühma G/N nimetatakse rühma G **faktorrühmaks** normaaljagaja N järgi.

Märkus 1.1. Kommutatiivses rühmas on iga alamrühm normaaljagajaks ning seega saab selle rühma jaoks moodustada faktorrühma iga alamrühma järgi.

Rühma kõrvalklasse käsitleb antud töö eelkõige kahes viimases peatükis, Hamiltoni ja Schreieri graafide korral. Faktorrühma mõiste tundmine on oluline mõistmaks seoseid Cayley ja Hamiltoni graafide vahel.

Definitsioon 1.9. Kujutust $\varphi : G \to H$ rühmast G rühma H nimetatakse (rühmade) **homomorfismiks**, kui

$$\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

iga $a, b \in G$ korral.

Definitsioon 1.10. Homomorfismi $\varphi : G \to H$ nimetatakse

1. **monomorfismiks**, kui ta on injektiivne,
2. **epimorfismiks**, kui ta on sürjektiivne,
3. **isomorfismiks**, kui ta on bijektiivne,
4. rühma G **endomorfismiks**, kui $G = H$,
5. rühma G **automorfismiks**, kui ta on isomorfism ja $G = H$.

Märkus 1.2. Rühma G kõigi automorfismide hulka tähistatakse $Aut(G)$ ja see on rühm kujutuste korrutamise suhtes.

Definitsioon 1.11. Rühmade G ja H **otsekorrutiseks** nimetatakse rühma $G \times H$, milles korrutamine on defineeritud rühmade G ja H korrutamistehte abil järgmiselt:

$$(a;\, b) \cdot (c;\, d) = (ac;\, bd), \quad (a;\, b),\, (c;\, d) \in G \times H.$$

Definitsioon 1.12. Olgu G rühm. Rühma G alamhulka S nimetatakse selle rühma **tekitajate hulgaks**, kui rühma G iga element g avaldub kujul

$$g = s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \ldots s_k^{\varepsilon_k}$$

mingite $s_1,\, s_2, \ldots s_k \in S$ ja $\varepsilon_1,\, \varepsilon_2, \ldots,\, \varepsilon_k \in \{1;\, -1\}$ korral (s. t. rühma G iga element saadakse hulga S elementide ja nende pöördelementide korrutisena). Kui S on rühma G tekitajate hulk, siis tähistatakse $G = \langle S \rangle$.

Rühma G element ei pruugi avalduda üheselt tekitajate ja nende pöördelementide korrutisena. Et otsustada, millal kaks mainitud korrutist on võrdsed, on vaja teada, millal kehtib võrdus $s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2} \dots s_k^{\varepsilon_k} = e$ $(s_1,\ s_2, \dots s_k \in S;\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \dots,\ \varepsilon_k \in \{1; -1\})$. Kõiki selliseid vajalikke võrdusi nimetatakse rühma G **määratavateks seosteks**. Rühmade üks sagedasemaid esitusviise ongi nende esitamine tekitajate hulgaga ja vastavate määravate seostega.

Näide 1.3. Lõpmatu tsükliline rühm C_∞ on esitatav ühe tekitajaga ja 0 määrava seosega:

$$C_\infty = \langle a \rangle = \{\dots,\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1}, a^0,\ a,\ a^2,\ a^3, \dots\}.$$

Loetleme käesolevas töös hiljem kasutatavaid lõplikke rühmi, esitades need tekitajatega ja määravate seostega:

- n-ndat järku[1] tsükliline rühm C_n:

  $$C_n = \langle a \mid a^n = e \rangle = \{1,\ a,\ a^2, \dots,\ a^{n-1}\}.$$

  Selle rühma tekitajaks on a ja määravaks seoseks $a^n = e$.

- Kvaternioonide rühm Q:

  $$Q = \langle a,\ b \mid a^4 = e,\ a^2 = b^2,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

  See rühm on antud kahe tekitajaga a ja b ning kolme määrava seosega $a^4 = e$, $a^2 = b^2$ (ehk $a^2b^{-2} = e$) ja $b^{-1}ab = a^{-1}$ (ehk $b^{-1}aba = e$ või $ab = ba^{-1}$). Kasutades määravaid seoseid, on kerge näha, et kvaternioonide rühma iga element on üheselt avaldatav kujul b^ia^j, kus $i \in \{0,\ 1\},\ j \in \mathbb{Z}_4 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$[2]:

  $$Q = \{b^ia^j \mid i \in \{0,\ 1\},\ j \in \mathbb{Z}_4\}.$$

  Kvaternioonide rühm on 8-ndat järku rühm.

- Dieedri rühm D_n:

  $$D_n = \langle a,\ b \mid b^2 = a^n = e,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

  Dieedri rühma D_n iga element on üheselt avaldatav kujul b^ia^j, kus $i \in \mathbb{Z}_2,\ j \in \mathbb{Z}_n$:

  $$D_n = \{b^ia^j \mid i \in \mathbb{Z}_2,\ j \in \mathbb{Z}_n\} = \{1,\ a,\ a^2, \dots,\ a^{n-1},\ b,\ ba,\ ba^2, \dots,\ ba^{n-1}\}.$$

  Rühm D_n on $2n$-ndat järku rühm.

[1]Rühma G **järguks** nimetatakse selle rühma elementide arvu.
[2]Sümboliga $\mathbb{Z}_n$ tähistatakse jäägiklassiringi mooduli n järgi: $\mathbb{Z}_n = \{0,\ 1,\ 2, \dots,\ n-1\}$.

- Märgimuudurühm A_4:

$$A_4 = \langle a,\ b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 = e \rangle.$$

Järgnevalt defineeritakse käesoleva töö konktekstis olevad olulised graafiteooria mõisted.

Definitsioon 1.13. Ütleme, et **graaf** on paar $G = (V, E)$, kus V on mittetühi hulk ning E hulk, mille elementideks on hulga V kaheelemendilised alamhulgad.

Hulga V elemente nimetatakse graafi tippudeks, hulga E elemente graafi servadeks.

Toodud definitsioonis loetakse servadeks ainult tippude hulga kaheelemendilisi alamhulki, seega ei tohi graafis esineda silmuseid[3], ega kordseid[4] servi.

Definitsioon 1.14. Lõplikku, suunamata, ilma kordsete servade ja silmusteta graafi nimetatakse **lihtgraafiks**. Graafi, milles esinevad silmused ning servade kordsus, nimetatakse **multigraafiks**.

Olgu märgitud, et käesolevas töös on termin *graaf* kasutusel *lihtgraafi* tähenduses.

Märkus 1.3. Ülaltoodud definitsiooni põhjal järeldub, et servade hulk E on lõplik. Reeglina loeme ka, et graafi tippude hulk V on lõplik.

Lihtgraafi definitsioonist järeldub, et graafis on iga tipupaari jaoks kaks võimalust - nende vahel on kas (suunamata) serv või ei ole. Graafiteoorias uuritakse relatsioone, mis on oma olemuselt sümmeetrilised (näiteks linnadevaheline kaugus) kui ka relatsioone, millel on kindel suund (näiteks alluvusrelatsioon kaitseväes). Vastavalt räägitakse siis *suunamata* ja *suunatud* graafidest.

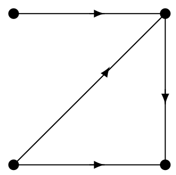
Definitsioon 1.15. Suunatud ehk orienteeritud graafiks nimetatakse graafi, mille tippude vahelised servad on tippude järjestatud paarid.

Definitsioon 1.16. Servale $e \in E$ vastavusse seatud järjestatud paari (u, v) tippe nimetatakse selle serva otstippudeks, sealjuures tippu u nimetatakse algtipuks ning tippu v lõpptipuks.

Märkus 1.4. Suunatud servade tähistamiseks lisatakse serva lõpptippude poole suunatud noolekesed, suunamata graafide puhul nooli ei kasutata. Käesolevas töös nimetatakse graafi suunatud servi kaarteks.

[3]**Silmuseks** nimetatakse serva, mis seob tipu tema endaga.
[4]Kordsete servade korral ühendab kahte tippu rohkem kui üks serv.

Näide 1.4. Lihtne näide suunatud graafist. Paneme tähele, et kõik kaared on tähistatud noolekestega.



Definitsioon 1.17. Ahelaks ehk teeks P tipust u tipuni v graafis $G = (V, E)$ nimetatakse servade järjendit $(e_1, \dots, e_k)$, mille korral leidub tippude järjend $(v_0, \dots, v_k)$ nii, et $u = v_0, v = v_k$ ja iga $i \in \{1, \dots, k\}$ jaoks $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.

Definitsioon 1.18. Graafi G nimetatakse **sidusaks**, kui kõik tema tipud on omavahel ahelate ehk teedega ühendatud.

Märkus 1.5. Näites (1.4) välja toodud graaf ei ole sidus, sest tema kaks vasakpoolset tippu ei ole omavahel teega ühendatud.

Definitsioon 1.19. Tipu astmeks nimetatakse temaga intsidentsete[5] kaarte arvu.

Definitsioon 1.20. Graafi nimetatakse **regulaarseks**, kui kõikide tippude astmed on võrdsed.

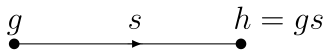
Märkus 1.6. Näites (1.4) välja toodud graaf ei ole ka regulaarne, sest tema tippude astmed ei ole võrdsed.

[5]Kui graafi tipp v kuulub servale e, siis öeldakse, et tipp v ja serv e on intsidentsed.

2 Cayley graaf

Eelnevas kirjeldasime rühma esitamist tekitajate ja määravate seostega. On ka muid võimalusi rühma esitamiseks. Üheks selliseks võimaluseks on rühma esitamine Cayley graafina. Cayley graafina on sobiv esitada rühmi, mille tekitajate arv on väike. Vastasel juhul on tekkiv graaf halvasti jälgitav. Käesolevas peatükis anname Cayley graafi definitsiooni ja kirjeldame selle mõningaid omadusi. Järgmises peatükis koostame kõigi mittekommutatiivsete rühmade Cayley graafid, kui rühma järk on ülimalt 16.

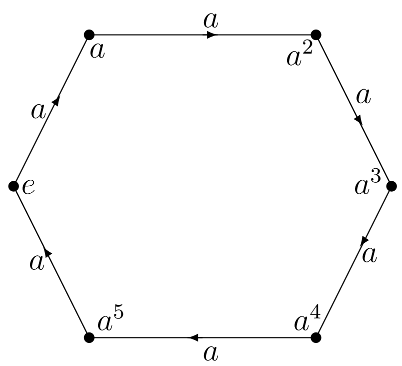
Definitsioon 2.1. Olgu G lõplik rühm ja S tema tekitajate hulk, st $G = \langle S \rangle$. Rühma G **Cayley graafiks** nimetatakse suunatud graafi $\Gamma = \Gamma_{G,S}$, mille tippude hulgaks on G ja tipust g suundub tippu h suunatud serv siis ja ainult siis, kui leidub $s \in S$, nii et $h = gs$. Vastav kaar märgistatakse tekitajaga s.



Näide 2.1. Vaatleme lõplikku tsüklilist rühma

$$C_6 = \langle a \mid a^6 = e \rangle = \{e,\, a,\, a^2,\, a^3,\ a^4,\ a^5\}.$$

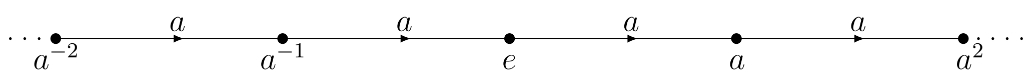
Selle rühma Cayley graaf on



Näide 2.2. Vaatleme lõpmatut tsüklilist rühma

$$C_\infty = \langle a \rangle = \{\ldots,\ a^{-2},\ a^{-1},\ e,\ a,\, a^2, \ldots\}.$$

Siin $S = \{a\}$ ning vastav Cayley graaf on



Märkus 2.1. Tavaliselt eeldatakse, et tekitajate hulk S on sümmeetriline, st $S = S^{-1}$ ja ei sisalda ühikelementi e. Siin $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$.

Märkus 2.2. Kui G on lõplik, siis ei pea eeldama, et $s \in S \Longrightarrow s^{-1} \in S$. Tõepoolest, sellisel juhul leidub naturaalarv n, nii et $s^{-1} = s^n$ ja seega s^{-1} tekitatakse juba S poolt. Kui G on lõpmatu, siis on vaja eeldada, et $s \in S \Longrightarrow s^{-1} \in S$.

2.1 Cayley graafide omadusi

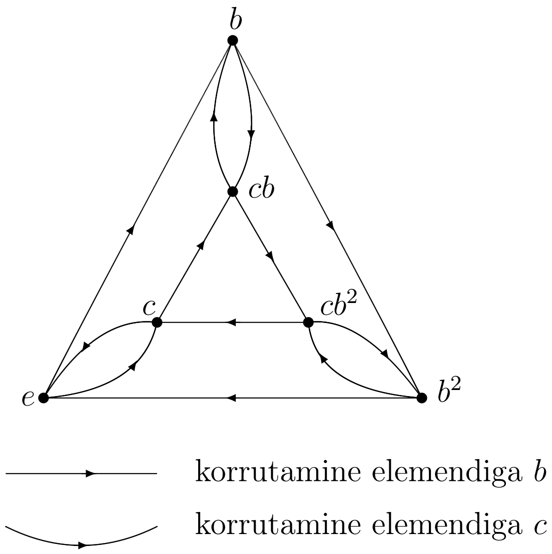
Cayley graafide joonestamiseks on erinevaid viise. Eristamaks milline tekitaja milliseid tippe ühendab, on Arthur Cayley välja käinud graafide värvimise. Igale tekitajale $s \in S$ määratakse kindel värv, millega värvitakse vastav serv $x \xrightarrow{s} xs$. Levinud praktikas kasutatakse värvimise asemel noolekesi, punkte ja punktiirjooni. Näiteid värvide, noolte, punktiirjoonte jms kasutamisest leiab kogu töö ulatuses.

Omadus 2.1. *Cayley graaf sõltub tekitajate valikust.*

Näide 2.3. Näites 2.1 vaadeldud rühm $C_6 = \langle a \rangle$ avaldub otsekorrutisena $C_6 = \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, kus $b = a^2$ ja $c = a^3$ ehk

$$C_6 = \langle b,\, c \mid b^3 = c^2 = e,\; bc = cb \rangle.$$

Tekitajate hulgale $S = \{b,\; c\}$ vastav rühma C_6 Cayley graaf on



Vahetult Cayley graafi definitsioonist järelduvad kaks järgmist omadust.

Omadus 2.2. *Iga Cayley graaf on sidus.*

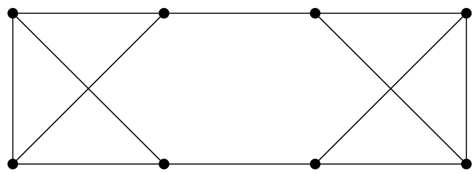
Omadus 2.3. *Cayley graafide tippude astmed on võrdsed ehk Cayley graafid on regulaarsed.*

Definitsioon 2.2. Graaf G on tipptransitiivne, kui automorfismirühm $Aut(G)$ toimib tippude hulgal $V(G)$ transitiivselt.

Omadus 2.4 ([F])**.** *Iga Cayley graaf on tipptransitiivne.*

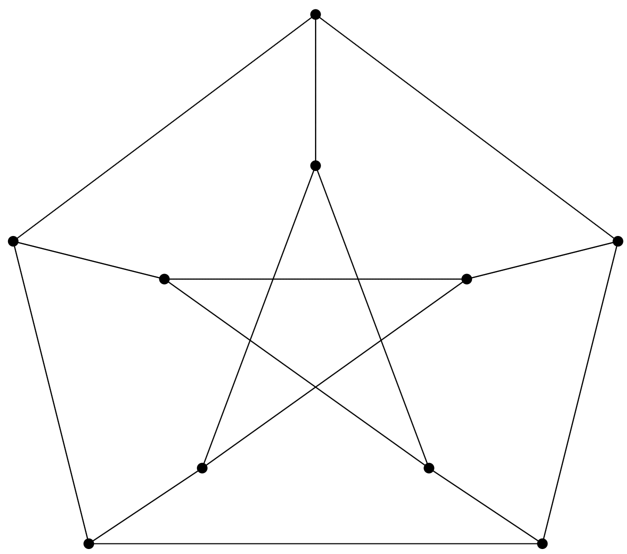
Järeldus 2.5. *Mitte kõik sidusad regulaarsed graafid ei ole Cayley graafid.*

Näide 2.4 ([F])**.** Järgneval joonisel on esitatud sidus regulaarne graaf, mis ei ole Cayley graaf. See graaf ei ole tipptransitiivne.



Järeldus 2.6. *Mitte iga tipptransitiivne graaf ei ole Cayley graaf.*

Näide 2.5 ([F])**.** Peterseni graaf ei ole Cayley graaf. Peterseni graaf on esitatud järgneval joonisel.



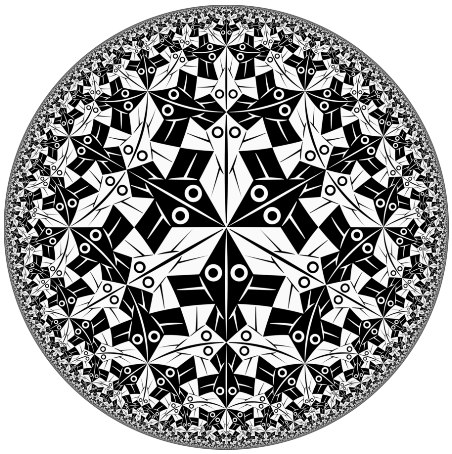
Käesolev töö käsitleb olukordi, kus ette on antud mingi rühm ning sellele leitakse Cayley graaf. Juhtudega, kus ette on antud mingi graaf kindlal rühmal, ning kindlaks tuleks määrata, kas tegemist on Cayley graafiga, tegeleb näiteks Sabidussi teoreem.

Teoreem 2.7 (Sabidussi [S]). *Olgu* Γ *graaf. Sellisel juhul eksisteerib rühm* G *ja tema tekitajate hulk* S*, nii et* $\Gamma \cong \Gamma_{G,S}$ *siis ja ainult siis, kui* $Aut(\Gamma)$ *sisaldab alamrühma* G_0*, mis toimib graafi* Γ *tippude hulgal* $V(\Gamma)$ *transitiivselt. Sel korral* $G \cong G_0$.

2.2 Mõningaid Cayley graafide rakendusi

Graafidel on väga palju rakendusi, neid saab kasutada igal pool, kus on vaja kirjeldada, mis millega seotud on. Näiteks võivad tipud tähistada linnu ja servad linnadevahelisi teid. Graafide abil saab kujutada ka abstraktsemaid objekte, näiteks võivad tipud olla mingi suure projekti etapid ning servad tööd, mis viivad ühest etapist teise.

Cayley graafid leiavad rakendust loomulikult arvutiteaduses, hüperboolsete ja automaatsete rühmade uurimisel, kombinatoorika struktuurides ning Escher-tüüpi korduvate mustrite koostamisel arvutigraafikal [CG]. Mõningaid teisi Cayley graafide rakendusi on näidatud töös [CFS].



Joonis 1: M.C. Escheri korduv muster *Circle Limit I*

3 Kuni 16-nda järguni mittekommutatiivsete rühmade Cayley graafid

Teada on madalat järku rühmade kirjeldused. H. S. M. Coxeteri ja W. O. J. Moseri monograafias [CM] on antud kõigi lõplike rühmade kirjeldused järguni 16 (kaasa arvatud). Nendest mittekommutatiivsed on parajasti 17 rühma. Selles peatükis on koostatud kõigi nende 17 mittekommutatiivse rühma Cayley graafid.

Seitseteist mittekommutatiivset rühma järguni 16 on järgmised:

1. $S_3 = \langle a,\ b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid S_3 \mid\ = 6$
2. $D_4 = \langle a,\ b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid D_4 \mid\ = 8$
3. $Q = \langle a,\ b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2\rangle,\ \mid Q \mid\ = 8$
4. $D_5 = \langle a,\ b \mid a^5 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid D_5 \mid\ = 10$
5. $D_6 = \langle a,\ b \mid a^6 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid D_6 \mid\ = 12$
6. $A_4 = \langle a,\ b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid A_4 \mid\ = 12$
7. $G_7 = \langle a,\ b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2\rangle,\ \mid G_7 \mid\ = 12$
8. $D_7 = \langle a,\ b \mid a^7 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid D_7 \mid\ = 14$
9. $G_9 = C_2 \times D_4 = \langle a,\ b,\ c \mid a^4 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = e,$
   $ca = ac, cb = bc\rangle,\ \mid G_9 \mid\ = 16$
10. $G_{10} = C_2 \times Q = \langle a,\ b,\ c \mid a^4 = e,\ b^2 = a^2 = c^2,$
    $ca = ac, cb = bc\rangle,\ \mid G_{10} \mid\ = 16$
11. $D_8 = \langle a,\ b \mid a^8 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid D_8 \mid\ = 16$
12. $G_{12} = \langle a,\ b \mid b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^3\rangle,\ \mid G_{12} \mid\ = 16$
13. $G_{13} = \langle a,\ b \mid b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^{-3}\rangle,\ \mid G_{13} \mid\ = 16$
14. $G_{14} = \langle a,\ b \mid a^4 = b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1}\rangle,\ \mid G_{14} \mid\ = 16$
15. $G_{15} = \langle a,\ b \mid a^4 = b^4 = (ba)^2 = (b^{-1}a)^2 = e\rangle,\ \mid G_{15} \mid\ = 16$
16. $G_{16} = \langle a,\ b,\ c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e, cba = bac = acb\rangle,\ \mid G_{16} \mid\ = 16$
17. $G_{17} = \langle a,\ b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2\rangle,\ \mid G_{17} \mid\ = 16$

3.1 Rühma elementide korrutamine tekitajatega

Mittekommutatiivsete rühmade Cayley graafide koostamiseks on rühma kõik elemendid viidud kujule $b^i a^j$. Erandina on selles töös rühm A_4, mille elemendid on kujul $a^i b^j$ ning leidub ka elemente kujul $b^j a^i b^j$; rühm G_9; rühm G_{10}; ning rühm G_{16}. Kolme viimase rühma puhul on tekitajaid kolm, neist kahe esimese rühma elemendid avalduvad kujul $c^i b^j a^k$, rühma G_{16} elemendid aga kujul $c^i a^j b^k$.

Cayley graafi definitsioonist järeldub, et rühma iga element on üheks Cayley graafi tipuks. Selleks, et määrata ära täpsed seosed iga rühma elemendi ehk graafi tippude vahel, on iga element läbi korrutatud iga tekitajaga.

Korrutamiste teisendamisel kasutatakse reeglina järgnevaid seoseid:

$$b \cdot b^{-1} = e \tag{3.1}$$

$$b^{-1} a^k b = (b^{-1} a b)^k \tag{3.2}$$

Paljudes rühmades on määratud seos $(ab)^2 = e$, millest järeldub, et:

$$ab \cdot ab = e$$

Korrutades võrdust vasakult elemendi a pöördelemendiga a^{-1}, saame:

$$bab = a^{-1} e \Longrightarrow bab = a^{-1}$$

Kui lisaks $b^2 = e$, siis $b = b^{-1}$ ning eelnevast järeldub, et:

$$b^{-1} a b = a^{-1} \tag{3.3}$$

Korrutamiste lahenduskäik on välja toodud kahe esimese rühma, S_3 ja D_4 korral. Ülejäänud rühmade korral toimub korrutamine analoogiliselt. Kõikidele eranditele on töös tähelepanu juhitud.

1. Kolmanda astme substitutsioonide hulga rühm S_3 on esitatav kujul

$$S_3 = \langle a,\, b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle, \ \mid S_3 \mid \ = 6$$

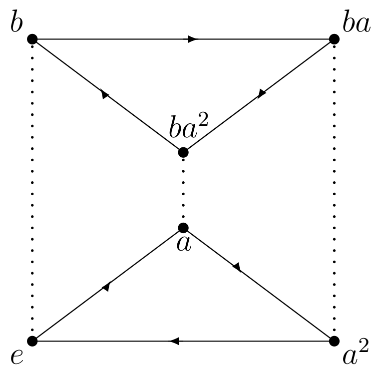
Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$S_3 = \{ b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2 \} = \{ e,\ a,\ a^2,\ b,\ ba,\ ba^2 \}.$$

Kasutades teadmisi, et $a^3 = e \Longrightarrow a^{-1} = a^2$ ja $b^2 = e \Longrightarrow b^{-1} = b$ ning seoseid (3.1)–(3.3), saame

$$\begin{gathered} ab = b \cdot b^{-1}ab = ba^{-1} = ba^2, \\ a^2b = b \cdot b^{-1}a^2b = b \cdot (b^{-1}ab)^2 = b \cdot (a^2)^2 = ba^4 = ba, \\ bab = b^{-1} \cdot ab = a^{-1} = a^2, \\ ba^2b = b^{-1} \cdot a^2b = (b^{-1}ab)^2 = (a^2)^2 = a \end{gathered}$$

Seega rühma S_3 Cayley graaf on



korrutamine elemendiga a

mõlema suunaline korrutamine elemendiga b

Paneme tähele, et puuduvad nooled punktiirjoonel ei tähenda graafi suunamatust. Tegemist on mõlema suunalise korrutamisega, s.t

$$eb = b,$$

$$bb = e$$

2. Dieedri rühm D_4 on esitatav kujul

$$D_4 = \langle a,\, b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle, \ \mid D_4 \mid \ = 8$$

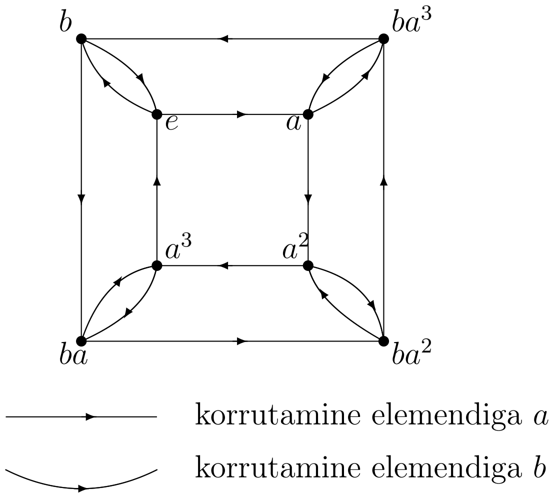
Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$D_4 = \{b^i a^j \mid i = 0,\, 1;\ j = 0,\, 1,\, 2,\, 3\} = \{e,\, a,\, a^2,\, a^3,\ b,\, ba,\, ba^2,\, ba^3\}.$$

Kasutades seoseid (3.1)–(3.3) ning teades, et $a^4 = e \Longrightarrow a^{-1} = a^3$ ja $b^2 = e \Longrightarrow b^{-1} = b$, saame:

$$\begin{aligned}
ab &= b \cdot b^{-1}ab = ba^{-1} = ba^3,\\
a^2b &= b \cdot b^{-1}a^2b = b \cdot (b^{-1}ab)^2 = b \cdot (a^3)^2 = ba^6 = ba^2,\\
a^3b &= b \cdot b^{-1}a^3b = b \cdot (b^{-1}ab)^3 = b \cdot (a^3)^3 = ba^9 = ba,\\
bab &= b \cdot ba^3 = b^2 \cdot a^3 = a^3,\\
ba^2b &= b \cdot ba^2 = b^2 \cdot a^2 = a^2,\\
ba^3b &= b \cdot ba = b^2 \cdot a = a
\end{aligned}$$

Seega rühma D_4 Cayley graaf on



Näeme, et mõlemasuunalist korrutamist saab tähistada ka vastavalt eraldi kaartega, nagu seda on rühma D_4 Cayley graafi korral tehtud.

3. Kvaterioonide rühm Q on esitatav kujul

$$Q = \langle a,\ b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle,\ \mid Q \mid\ = 8$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$Q = \{b^i a^j \mid i = 0,\, 1;\ j = 0,\, 1,\, 2,\, 3\} = \{e,\, a,\, a^2,\, a^3,\ b,\, ba,\, ba^2,\, ba^3\}.$$

Paneme tähele, et rühma poolt ei ole defineeritud seost (3.3), s.t $(ab)^2$ ei pruugi võrduda ühikelemendiga e.

Korrutades seose $abab = b^2$ paremalt elemendiga b^{-1}, saame:

$$aba = b$$

Korrutame saadud tulemuse $aba = b$ vasakult elemendiga b^{-1}:

$$b^{-1}aba = e$$

Seejärel korrutame seose $b^{-1}aba = e$ paremalt elemendiga a^{-1}. Saame kehtima seose (3.3):

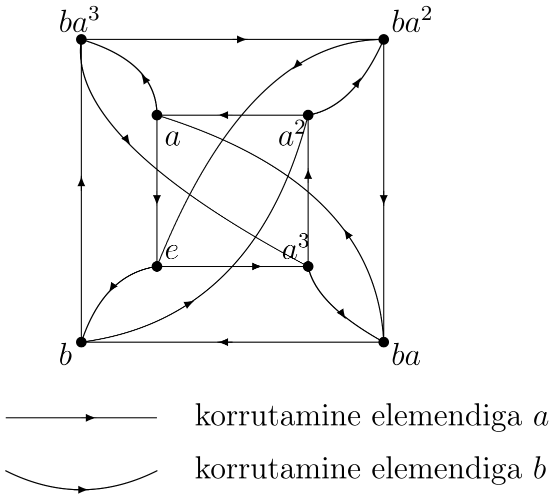
$$b^{-1}ab = a^{-1}$$

Võttes mõlemad pooled ruutu, saame:

$$b^{-1}a^2b = a^{-2} \Longrightarrow b^{-1}b^2b = a^{-2} \Longrightarrow b^2 = a^{-2} \Longrightarrow a^2 = a^{-2} \Longrightarrow a^4 = e,$$

millest järeldub, et $a^{-1} = a^3$.

Korrutame rühma kõik elemendid tekitajatega ja saame, et rühma Q Cayley graaf on



4. Dieedri rühm D_5 on esitatav kujul

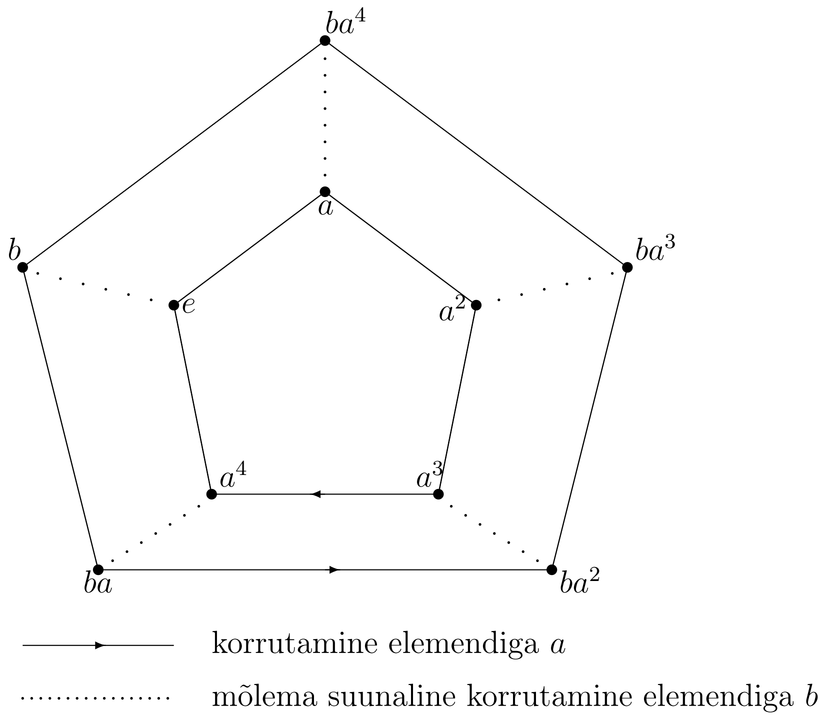
$$D_5 = \langle a,\ b \mid a^5 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle,\ \mid D_5 \mid\ = 10$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$D_5 = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ b,\ ba,\ ba^2,\ ba^3,\ ba^4\}.$$

Arvestades, et $a^5 = e \Longrightarrow a^{-1} = a^4$ ja $b^2 = e \Longrightarrow b^{-1} = b$ ning seoseid (3.1)–(3.3), saame, et rühma D_5 Cayley graaf on



5. Dieedri rühm D_6 on esitatav kujul

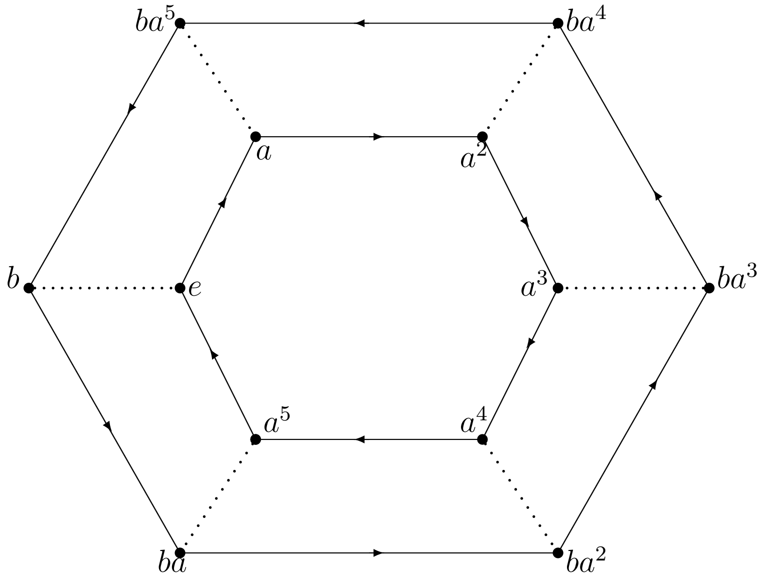
$$D_6 = \langle a,\ b \mid a^6 = b^2 = (ab)^2 = e\rangle,\ \mid D_6 \mid\ = 12$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$D_6 = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ b, ba, ba^2, ba^3,\ ba^4,\ ba^5\}.$$

Teades, et $a^6 = e \Longrightarrow a^{-1} = a^5$ ja $b^2 = e \Longrightarrow b^{-1} = b$ ning arvestades elementide ja tekitajate korrutamisel ka seostega (3.1)–(3.3), saame, et rühma D_6 Cayley graaf on



korrutamine elemendiga a

mõlema suunaline korrutamine elemendiga b

6. Märgimuudurühm A_4 on esitatav kujul

$$A_4 = \langle a,\ b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 = e \rangle,\ \mid A_4 \mid\ = 12$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$A_4 = \{a^i b^j \mid i = 0,\ 1,\ 2;\ j = 0,\ 1,\ 2,\} = \{e,\ a,\ a^2,\ b,\ ab,\ a^2b,\ b^2,\ ab^2,\ a^2b^2\}.$$

Paneme tähele, et rühmas A_4 on 12 elementi, kujul $a^i b^j$ on välja toodud aga 9 elementi. Leiame puuduvad kolm elementi.

Oletame, et üks puuduv element on bab. Kontrollime, kas

$$bab \in \{e,\ a,\ a^2,\ b,\ ab,\ a^2b,\ b^2,\ ab^2,\ a^2b^2\}$$

Teame, et $ab \cdot ab = e$. Korrutades võrdust vasakult elemendiga a^{-1}, saame

$$bab = a^{-1}$$

Teades, et $a^3 = e \Longrightarrow a^{-1} = a^2$, saame

$$bab = a^2$$

Element a^2 eksisteerib juba rühma ühe elemendina, seega ei ole element bab üks märgiruudurühmade elementidest.

Oletame nüüd, et ba^2 on üks puuduv element. Kontrollime, kas

$$ba^2 \in \{e,\ a,\ a^2,\ b,\ ab,\ a^2b,\ b^2,\ ab^2,\ a^2b^2\}$$

Selleks käime läbi iga rühma elemendi, oletades, et puuduv element ba^2 on võrdne ühega neist.

$$ba^2 = e \Longrightarrow b = a^{-2} = a \Longrightarrow ba^2 \neq e$$

$$ba^2 = b \Longrightarrow a^2 = e \Longrightarrow ba^2 \neq b$$

$$ba^2 = b^2 \Longrightarrow a^2 = b \Longrightarrow ba^2 \neq b^2$$

$$ba^2 = a \Longrightarrow ba = e \Longrightarrow b = a^{-1} \Longrightarrow ba^2 \neq a$$

$$ba^2 = ab \Longrightarrow ba^2 = b^{-1}a^{-1} \Longrightarrow b^2a^3 = e \Longrightarrow b^2 = e \Longrightarrow ba^2 \neq ab$$

$$ba^2 = ab^2 \Longrightarrow ba^2 = ab^{-1} = ab \cdot b^{-2} = b^{-1}a^{-1}b \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b^2a^2 = a^{-1}b \Longrightarrow a = a^{-1} \Longrightarrow a^2 = e \Longrightarrow ba^2 \neq ab^2$$

$$ba^2 = a^2b \Longrightarrow ba^2 = a^{-1}b \Longrightarrow aba^2 = b \Longrightarrow b^{-1}a = b \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a = b^2 \Longrightarrow ba^2 \neq a^2b$$
$$ba^2 = a^2b^2 \Longrightarrow ba^2 = a^{-1}b^2 \Longrightarrow aba^2 = b^2 \Longrightarrow b^{-1}a = b^2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a = b^3 = e \Longrightarrow ba^2 \neq a^2b^2$$

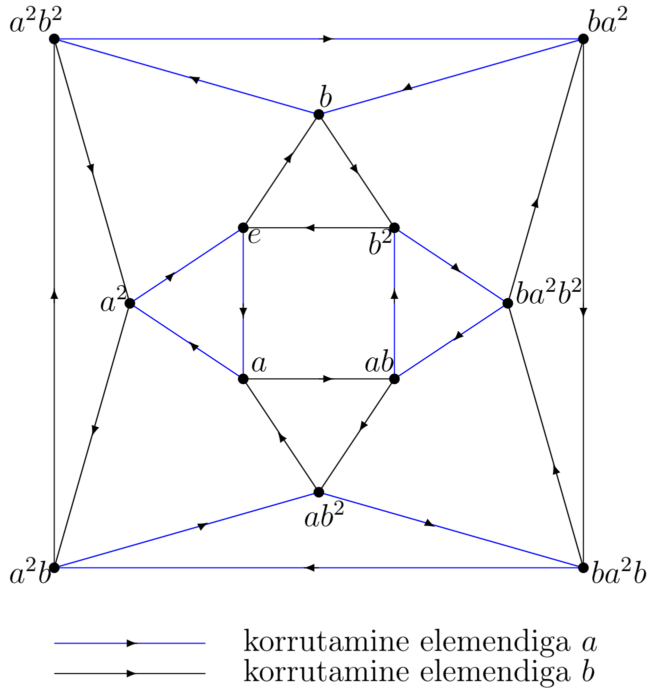
Näeme, et mitte ükski oletus ei kehti, järelikult on ba^2 rühma A_4 üks puuduv element. Analoogiliselt eelnevaga leitakse, et rühma puuduvad elemendid on veel ba^2b ja ba^2b^2.

Rühma A_4 elemendid on seega

$$A_4 = \{e,\ a,\ a^2,\ b,\ ab,\ a^2b,\ b^2,\ ab^2,\ a^2b^2,\ ba^2,\ ba^2b,\ ba^2b^2\}$$

Elementide korrutamisel tekitajatega on arvesse on võetud, et $a^{-1} = a^2$ ja $b^{-1} = b^2$. Samuti kasutatakse seoseid (3.1)–(3.3).

Seega rühma A_4 Cayley graaf on



Antud rühma Cayley graafis on näha graafi värvimist. Tekitajale a on määratud sinine värv, millega värvitakse kõik servad $x \xrightarrow{a} xa$ ning tekitajale b on jäetud must värv.

7. Rühm G_7 on esitatav kujul

$$G_7 = \langle a,\ b \mid a^3 = b^2 = (ab)^2 \rangle,\ \mid G_7 \mid\ = 12$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$G_7 = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} =$$
$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ b, ba, ba^2, ba^3,\ ba^4,\ ba^5\}.$$

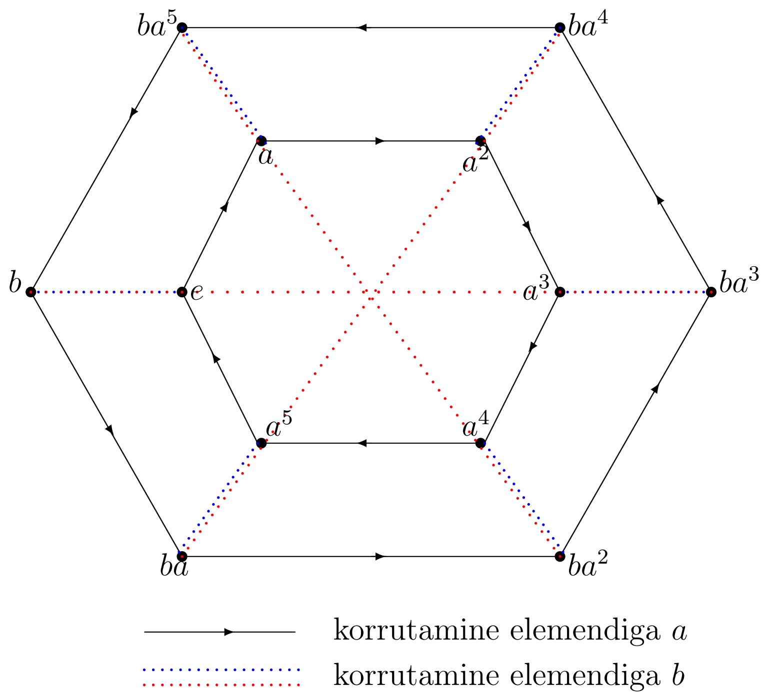
Paneme tähele, et rühma poolt ei ole defineeritud seost (3.3), s.t $(ab)^2$ ei pruugi võrduda ühikelemendiga e. Analoogiliselt rühma Q korral läbiviidud teisendusetega (vt lk 18) saame kehtima seose (3.3) ning leiame, et $a^6 = e$.

Rühma G_7 Cayley graafi paremaks mõistmiseks on välja toodud kahe elemendi korrutamine tekitajaga b

$$ab = b \cdot b^{-1}ab = b \cdot a^{-1} = ba^5 \tag{3.4}$$

$$ba^5b = b{\cdot}bb^{-1}a^5b = b{\cdot}b{\cdot}(b^{-1}ab)^5 = b{\cdot}b{\cdot}(a^5)^5 = b{\cdot}ba^{25} = b{\cdot}ba = b^2a = a^4 \tag{3.5}$$

Rühma G_7 Cayley graaf on



Paneme tähele, et punktiirjoone korral ei ole tegemist mõlemapoolse korrutamisega, ning tegemist ei ole ka suunamata graafiga. Sinisega märgitud korrutamisel on kaar suunatud väljapoole (vt (3.4), punasega märgitud kaared on suunatud sissepoole (vt (3.5)).

8. Dieedri rühm D_7 on esitatav kujul

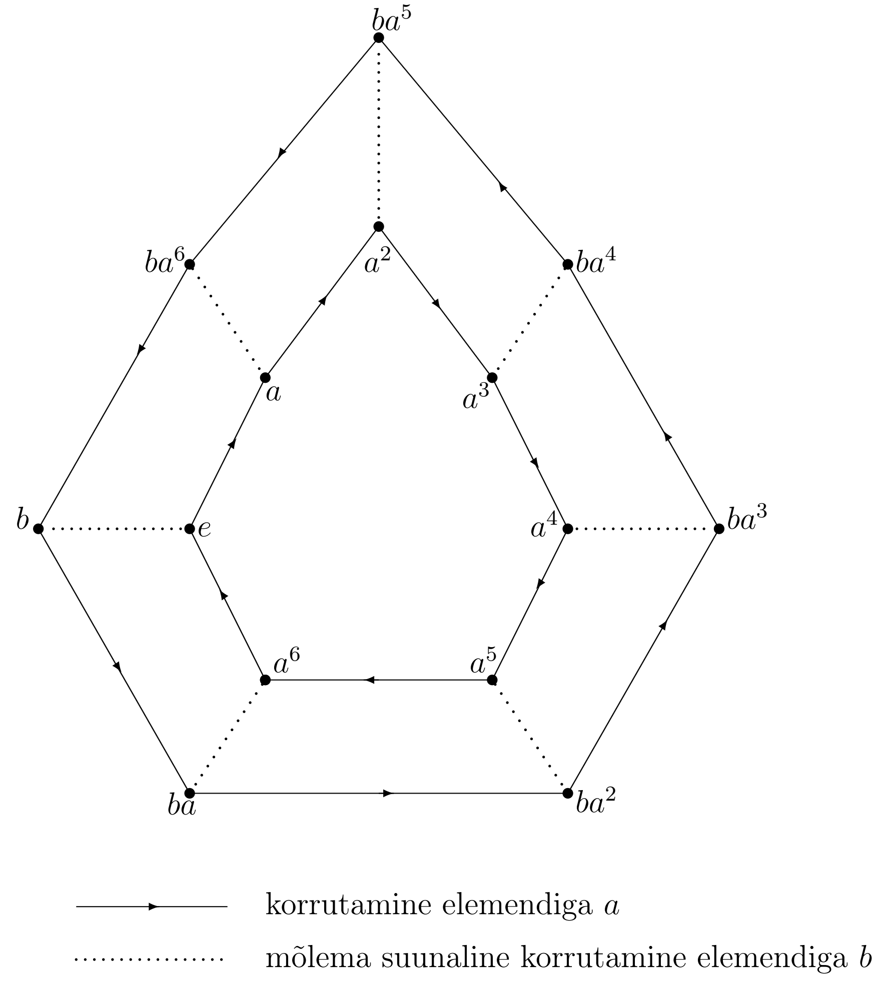
$$D_7 = \langle a,\ b \mid a^7 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle, \ \mid D_7 \mid \ = 14$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$D_7 = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ b, ba, ba^2, ba^3,\ ba^4,\ ba^5,\ ba^6\}.$$

Rühma D_7 Cayley graaf on



9. Rühm G_9 on esitatav kujul

$$G_9 = C_2 \times D_4 = \langle a,\ b,\ c \mid a^4 = b^2 = c^2 = (ab)^2 = e, ca = ac,\ cb = bc\rangle,\ \mid G_9 \mid\ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

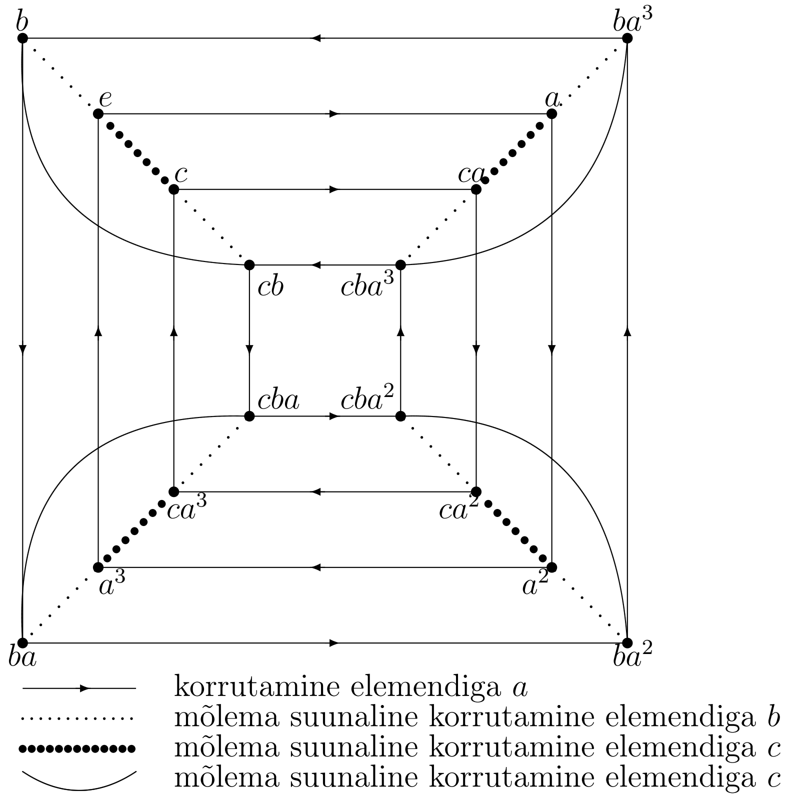
$$G_9 = \{c^i g \mid g \in D_4,\ i = 0,\ 1\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ba,\ ba^2,\ ba^3,\ c,\ ca,\ ca^2,\ ca^3,\ cb,\ cba,\ cba^2,\ cba^3\}$$

Mõned rühma G_9 elementide korrutamised tekitajaga b:

$$ab = b \cdot b^{-1}ab = b \cdot a^{-1} = ba^3$$
$$ba^3b = b^{-1}a^3b = (b^{-1}ab)^3 = (a^3)^3 = a^9 = a$$
$$cab = c \cdot ba^3 = cba^3$$
$$cba^3b = cbba = cb^2a = ca$$

Seega rühma G_9 Cayley graaf on



10. Rühm G_{10} on esitatav kujul

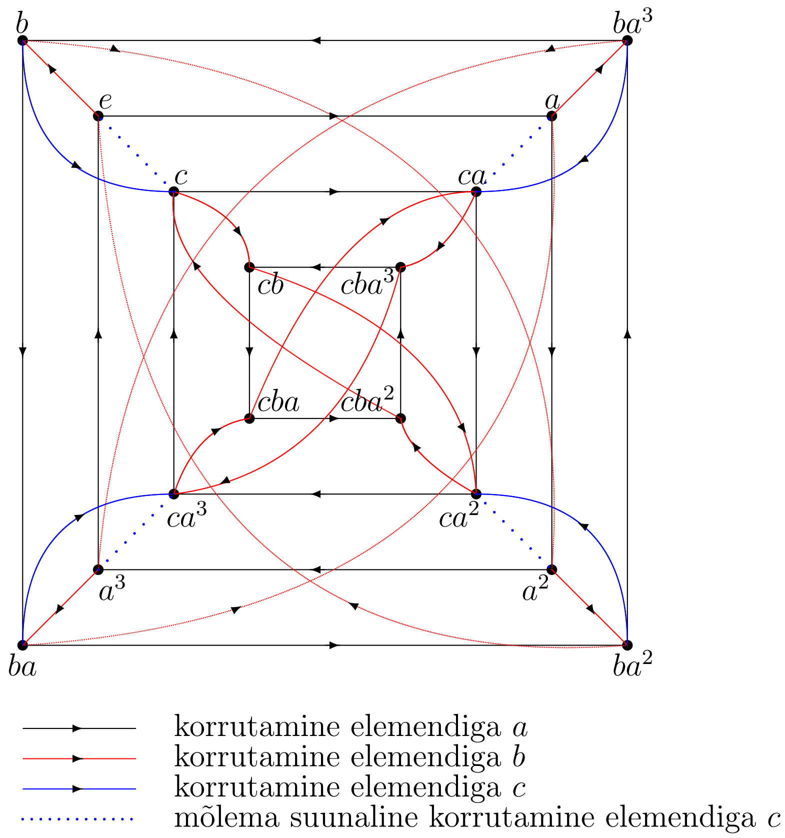
$$G_{10} = C_2 \times Q = \langle a,\ b,\ c \mid a^4 = e,\ b^2 = a^2 = c^2,\ ca = ac,\ cb = bc \rangle,\ \mid G_{10} \mid\ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$G_{10} = \{c^i g \mid g \in Q,\ i = 0,\ 1\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ba,\ ba^2,\ ba^3,\ c,\ ca,\ ca^2,\ ca^3,\ cb,\ cba,\ cba^2,\ cba^3\}$$

Rühma G_{10} Cayley graaf on



11. Dieedri rühm D_8 on esitatav kujul

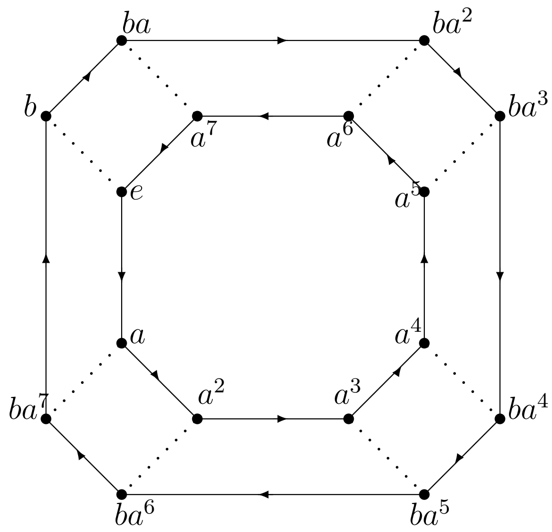
$$D_8 = \langle a,\ b \mid a^8 = b^2 = (ab)^2 = e \rangle,\ \mid D_8 \mid\ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$D_8 = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ b, ba, ba^2, ba^3,\ ba^4,\ ba^5,\ ba^6,\ ba^7\}.$$

Rühma D_8 Cayley graaf on



—▸— korrutamine elemendiga a

················ mõlema suunaline korrutamine elemendiga b

12. Rühm G_{12} on esitatav kujul

$$G_{12} = \langle a,\ b \mid b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^3 \rangle, \ \mid G_{12} \mid \ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$G_{12} = \{ b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \} =$$

$$= \{ e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ b, ba, ba^2, ba^3,\ ba^4,\ ba^5,\ ba^6,\ ba^7 \}.$$

Paneme tähele, et $b^{-1}ab = a^3$. Korrutades seost vasakult elemendiga b, saame

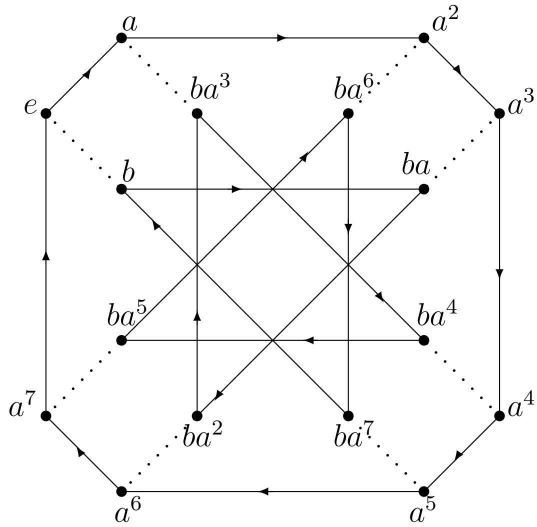
$$ab = ba^3$$

Korrutades eelnevat seost $ab = ba^3$ paremalt elemendiga b^{-1}, saame

$$a = ba^3 b^{-1},$$

millest järeldub, et $a = (b^{-1}ab)^3 \Longrightarrow a = (a^3)^3 \Longrightarrow a = a^9 \Longrightarrow a^8 = e$.

Seega rühma G_{12} Cayley graaf on



korrutamine elemendiga a

mõlema suunaline korrutamine elemendiga b

13. Rühm G_{13} on esitatatav kujul

$$G_{13} = \langle a,\ b \mid b^2 = e,\ b^{-1}ab = a^{-3} \rangle,\ \mid G_{13} \mid\ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

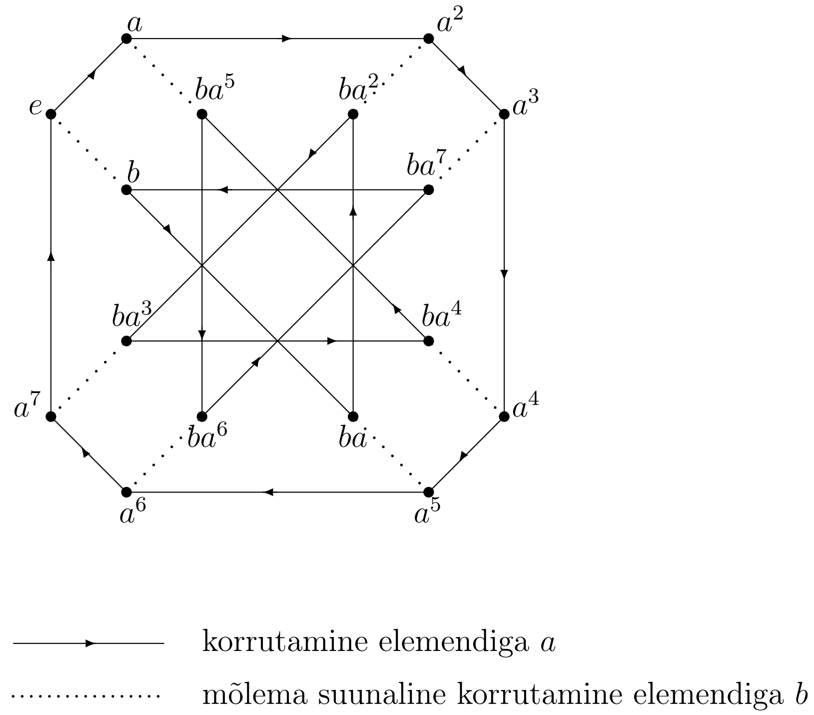
$$G_{13} = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ b,\ ba,\ ba^2,\ ba^3,\ ba^4,\ ba^5,\ ba^6,\ ba^7\}.$$

Paneme tähele, et $b^{-1}ab = a^{-3}$. Kasutades seost $b^{-1} = b$, saame

$$b^{-1}(b^{-1}ab)b = b^{-1}a^{-3}b = (b^{-1}ab)^{-3} = (a^{-3})^{-3} = a^9 \Longrightarrow a = a^9 \Longrightarrow a^8 = e$$

Seega rühma G_{13} Cayley graaf on



14. Rühm G_{14} on esitatav kujul

$$G_{14} = \langle a,\ b \mid a^4 = b^4 = e,\ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle, \ \mid G_{14} \mid\ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$G_{14} = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ba,\ ba^2,\ ba^3,\ b^2,\ b^2a,\ b^2a^2,\ b^2a^3,\ b^3,\ b^3a,\ b^3a^2,\ b^3a^3\}.$$

Mõned rühma G_{14} elementide korrutamised tekitajaga b:

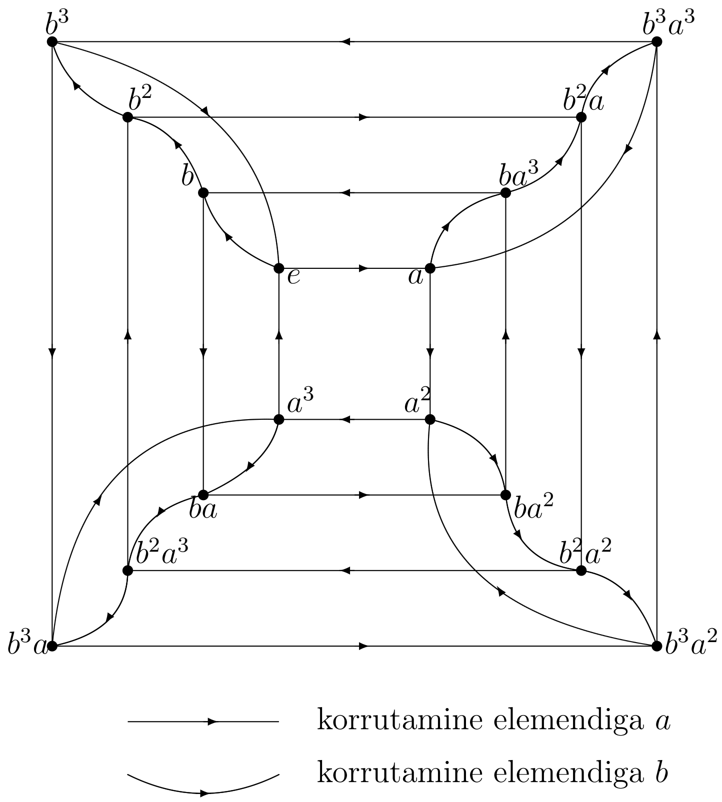
$$ab = b \cdot b^{-1}ab = b \cdot a^{-1} = ba^3$$

$$ba^3b = b \cdot b(b^{-1}a^3b) = b \cdot b(a^3)^3 = b \cdot ba^9 = b^2a$$

$$b^2ab = b^2ba^3 = b^3a^3$$

$$b^3a^3b = b^3ba = b^4a = a$$

Seega rühma G_{14} Cayley graaf on



15. Rühm G_{15} on esitatav kujul

$$G_{15} = \langle a,\ b \mid a^4 = b^4 = (ba)^2 = (b^{-1}a)^2 = e\rangle,\ \mid G_{15} \mid\ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$G_{15} = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ba,\ ba^2,\ ba^3,\ b^2,\ b^2a,\ b^2a^2,\ b^2a^3,\ b^3,\ b^3a,\ b^3a^2,\ b^3a^3\}.$$

Paneme tähele, et $(ba)^2 = (b^{-1}a)^2 = e$. Korrutame mõlemaid seoseid paremalt elemendiga a^{-1}:

$$baba = e \Longrightarrow bab = a^{-1} \tag{3.6}$$

$$b^{-1}ab^{-1}a = e \Longrightarrow b^{-1}ab^{-1} = a^{-1}$$

Kahest eelnevast järeldub:

$$bab = b^{-1}ab^{-1}$$

Korrutame võrduse $bab = b^{-1}ab^{-1}$ nii vasakult kui paremalt elemendiga b:

$$b^2ab^2 = a$$

Võtame arvesse, e $b^4 = e \Longrightarrow b^2 = b^{-2}$. Peale saadud avaldise $b^2ab^2 = a$ korrutamist paremalt elemendiga b^2 saame:

$$b^2a = ab^2 \tag{3.7}$$

Teades, et $a^4 = e \Longrightarrow a^2 = a^{-2}$ ja, et kehtib seos $b^2a = ab^2$, saame:

$$a^2 = a^{-2} = bab \cdot bab = bab^2ab = b \cdot b^2a^2b = b^3a^2b = b^{-1}a^2b,$$

millest järeldub:

$$a^2 = b^{-1}a^2b$$

Korrutame saadud võrduse vasakult elemendiga b ning saame:

$$ba^2 = a^2b \tag{3.8}$$

Selleks, et juhtida tähelepanu rühma G_{14} ja rühma G_{15} Cayley graafide erinevusele, on välja toodud samade elementide korrutamine tekitajaga b. Teisendamisel on rakendatud seoseid (3.6)–(3.8).

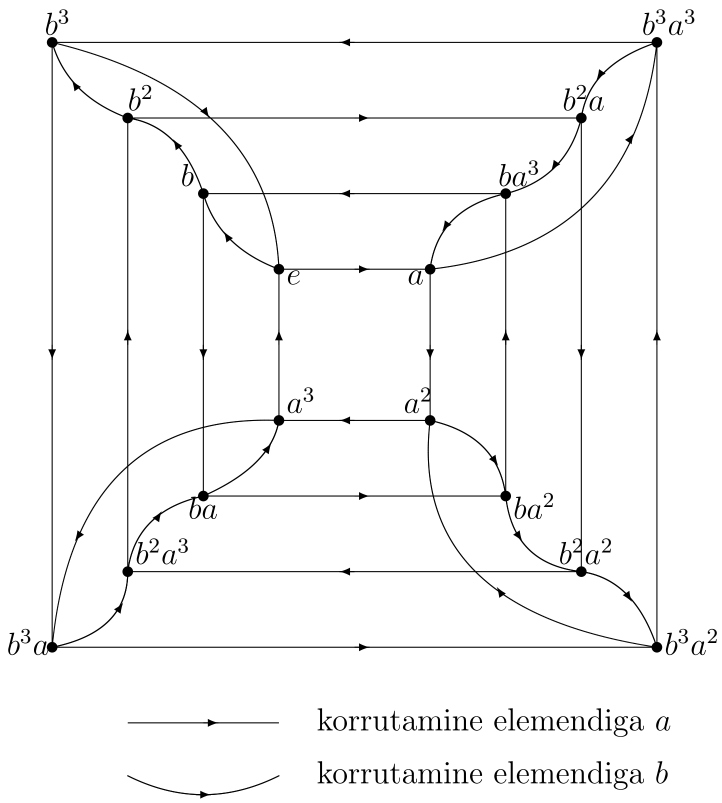
$$ab = b^{-1} \cdot bab = b^{-1}a^{-1} = b^3a^3$$

$$ba^3b = ba \cdot a^2b = baba^2 = a^{-1}a^2 = a$$

$$b^2ab = b^2b^3a^3 = b^5a^3 = ba^3$$

$$b^3a^3b = b^{-1}a^{-1}b = abb = ab^2 = b^2a$$

Seega rühma G_{15} Cayley graaf on



16. Rühm G_{16} on esitatav kujul

$$G_{16} = \langle a,\ b,\ c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e, cba = bac = acb\rangle,\ \mid G_{16} \mid\ = 16$$

Saab näidata, et ([P2]):

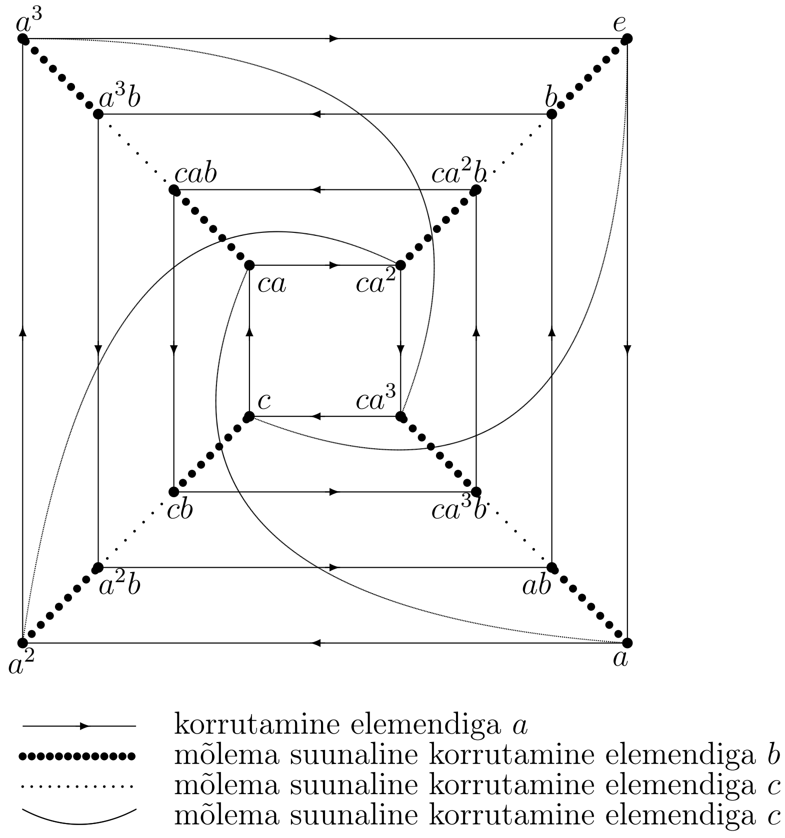
$$G_{16} = \langle a,\ b,\ c \mid a^4 = b^2 = c^2 = e, ac = ca, b^{-1}vb = ca^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$G_{16} = \{c^i a^j b^k \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ k = 0,\ 1\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ b,\ ab,\ a^2b,\ a^3b,\ c,\ ca,\ ca^2,\ ca^3,\ cb,\ cab,\ ca^2b,\ ca^3b, \}.$$

Rühma G_{16} Cayley graaf on



17. Rühm G_{17} on esitatav kujul

$$G_{17} = \langle a,\ b \mid a^4 = b^2 = (ab)^2 \rangle,\ \mid G_{17} \mid\ = 16$$

Sellest järeldub, et rühma elemendid on

$$G_{17} = \{b^i a^j \mid i = 0,\ 1;\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\} =$$

$$= \{e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ b, ba, ba^2, ba^3,\ ba^4,\ ba^5,\ ba^6,\ ba^7\}.$$

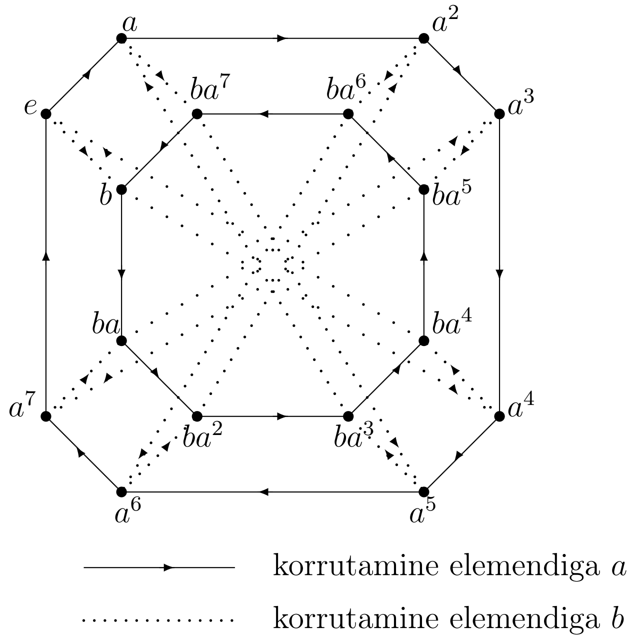
Paneme tähele, et rühma poolt ei ole defineeritud seost (3.3), s.t $(ab)^2$ ei pruugi võrduda ühikelemendiga e. Analoogiliselt varasemate juhtudega rühmade Q ja G_7 korral saame, et $b^{-1}ab = a^{-1}$ ning leiame, et $a^8 = e$.

Olgu välja toodud kaks seost tekitajatega korrutamisel

$$ab = b^{-1}bab = b \cdot a^{-1} = ba^7 \tag{3.9}$$

$$ba^3b = ba^2 \cdot ab = ba^2ba^7 = b \cdot ba^6a^7 = b^2a^{13} = a^4a^{13} = a^{17} = a \tag{3.10}$$

Seega rühma G_{17} Cayley graaf on



Paneme tähele, et ka punktiirjoonele on lisatud nooled. Kõik punktiirjoonega kaared avalduvad analoogiliselt seostele (3.9) ja (3.10).

4 Cayley graafid ja Hamiltoni graafid

Selleks, et lähemalt Cayley ja Hamiltoni graafide vahelisi seoseid uurida, defineerime kõigepealt Hamiltoni graafi.

Definitsioon 4.1. Hamiltoni ahelaks nimetatakse sellist graafi Γ ahelat, mis läbib kõiki tippe täpselt ühe korra.

Definitsioon 4.2. Hamiltoni tsükliks nimetatakse kinnist Hamiltoni ahelat.

Definitsioon 4.3. Sidusat suunamata graafi nimetatakse **Hamiltoni graafiks** siis, kui selles graafis leidub kõiki tippe läbiv tsükkel, nn Hamiltoni tsükkel.

Hamiltoni tsüklite leidumisega graafides on tegeletud pikka aega. 1969. aastal väitis Lovász, et iga Cayley graaf sisaldab endas Hamiltoni ahelat. [PR]. Sellest hüpoteesist lähtuvalt leidub hulganisti teoreeme Hamiltoni ja Cayley graafide seose kohta. Saab näidata, et kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 4.1 ([PR])**.** *Iga lõplik rühm G, milles on vähemalt kolm elementi, omab tekitajate hulka S, nii et $|S| \leq \log_2 |G|$ ja vastav Cayley graaf $\Gamma_{G;S}$ sisaldab Hamiltoni tsüklit.*

Joseph A. Gallian tõstatab küsimuse Hamiltoni tsükli olemasolust Cayley graafis $\Gamma_{G,S}$, kui $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle = C_m \times C_n$, $S = \{a, b\}$, $m, n > 1$ ning m ja n on ühistegurita. Ta tõestab järgmised kaks teoreemi.

Teoreem 4.2 ([G])**.** *Olgu $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle = C_m \times C_n$, $S = \{a, b\}$; $m, n > 1$. Kui arvud m ja n on ühistegurita, siis Cayley graafil $\Gamma_{G;S}$ ei leidu Hamiltoni tsüklit.*

Teoreem 4.3 ([G])**.** *Olgu $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle = C_m \times C_n$, $S = \{a, b\}$; $m, n > 1$. Kui arv m jagub arvuga n, siis Cayley graafil $\Gamma_{G;S}$ leidub Hamiltoni tsüklit.*

Leidub Abeli rühmade Cayley graafe, mis ei sisalda Hamiltoni tsükleid, kuid mis sisaldavad Hamiltoni ahelaid.

Teoreem 4.4 ([G])**.** *Olgu G mingi lõplik Abeli rühm ning olgu S mittetühi rühma G tekitajate hulk. Siis Cayley graaf $\Gamma_{G,S}$ sisaldab Hamiltoni ahelat.*

TÕESTUS. Tõestuse viime läbi induktsiooniga tekitajate arvu $|S|$ järgi. Oletame, et $|S| = 1$ ja $S = \{a\}$. Siis rühm G on tsükliline ja $G = \{e, a, a^2, ..., a^{m-1}\}$, kus m on rühma G järk. Sellisel juhul tuleb Cayley graafiks hulknurkne graaf (vt näidet 2.1), mis on ilmselt Hamiltoni ahel.

Olgu nüüd $|S| > 1$. Teame, et tekitajate hulgast S väiksema tekitajate arvuga rühmade jaoks teoreemi väide kehtib. Valime $s \in S$. Olgu $T = S \setminus \{s\}$ ja $H = \langle T \rangle$. Märgime, et H võib olla võrdne rühmaga G. Induktsiooni eelduse kohaselt graafis $\Gamma_{H,T}$ leidub Hamiltoni ahel $(a_1, a_2, ..., a_k)$. Näitame, et

$$(a_1, a_2, ..., a_k, s, a_1, a_2, ..., a_k, s, a_1, a_2, ..., a_k),$$

kus $a_1, a_2, ..., a_k$ esineb $|G|/|H|$ korda ning s esineb $|G|/|H|-1$ korda, on Hamiltoni ahel Cayley graafis $\Gamma_{G,S}$.

Kuna $S = T \cup \{s\}$ ja T tekitab rühma H, siis kõrvalklass Hs tekitab faktorrühma G/H, s.t $G/H = \langle Hs \rangle$. Faktorrühm eksisteerib, sest G on Abeli rühm. Seega rühma H kõrvalklassid on $H, Hs, Hs^2, ..., Hs^n$, kus $n = |G|/|H| - 1$. Alustades rühma G ühikelemendist, läbib ahel $(a_1, a_2, ..., a_k)$ igat rühma H elementi ainult ühe korra, sest $(a_1, a_2, ..., a_k)$ on $\Gamma_{H,T}$ Hamiltoni ahel. Tekitaja s viib selle ahela liikumise kõrvalklassi Hs ühe elemendini. Alustades sellest elemendist, läbib ahel $(a_1, a_2, ..., a_k)$ igat Hs elementi täpselt ühe korra. Edasi viib tekitaja s saadud ahela kõrvalklassi Hs^2 ühe elemendini, kus igat elementi läbitakse täpselt üks kord. Protsessi jätkudes läbitakse kõikide kõrvalklasside $Hs^3, Hs^4, ..., Hs^n$ kõiki tippe ainult ühe korra. Põhjusel, et iga $\Gamma_{G,S}$ tipp on täpselt ühes kõrvalklassis Hs^i, läbitakse iga $\Gamma_{G,S}$ tippu ainult ühe korra. Seega leidub Hamiltoni ahel. Vastavalt induktsiooniprintsiibile kehtib teoreem mistahes tekitajate arvu korral.

□

5 Schreieri graafid

Schreieri graafid on Cayley graafide üldistused. Kui Cayley graafide korral on graafi tippudeks hulga elemendid, siis Schreieri graafi korral on graafi tipud mingi kindlaks määratud alamrühma kõrvalklassid. Käesolevas peatükis defineeritakse Schreieri graaf ning tuuakse näide, mis on lahendatud iseseisvalt.

Definitsioon 5.1. Olgu G rühm ning $\{x_1, x_2, ..., x_d\}$ selle rühma tekitajate hulk S. Olgu H lõpliku indeksiga[6] n rühma G alamrühm. Defineerime $\Gamma = \Gamma_{S,H}$ kui graafi, mille tipud on alamrühma H parempoolsed kõrvalklassid ning mille servad on kujul $Hg - Hgx_i$, kus $1 \leq i \leq d$. Seda graafi Γ nimetatakse Schreieri kõrvalklasside graafiks ehk Schreieri graafiks.

Näide 5.1. Vaatleme substitutsioonirühma $G = S_4$ ning tema alamrühma $A = \{f \in S_4 \mid f(3) = 3\}$. Parempoolseid kõrvalklasse alamrühma A järgi on $\frac{24}{6} = 4$ tükki ning nendeks on A; Ag_1; Ag_2; Ag_3, kus

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kõrvalklassi A elemendid on

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

Lisaks leiame kõik kõrvalklasside Ag_1; Ag_2; Ag_3 elemendid ja korrutame kõikide kõrvalklasside elemendid paremalt rühma G tekitajatega

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Kõrvalklassi A korrutamisel tekitajaga a, $A \xrightarrow{a} Aa$, saame:

$$f_1 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ f_2 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ f_3 a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

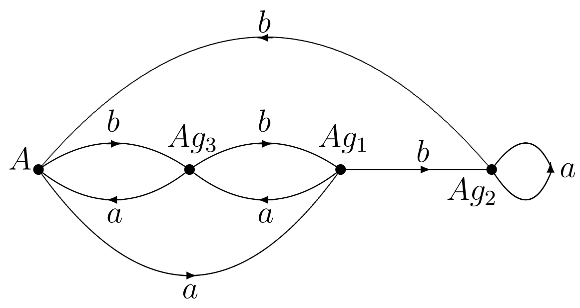
[6] Rühma G parempoolsete kõrvalklasside arvu alamrühma H järgi nimetatakse selle alamrühma indeksiks.

$$f_4a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \ f_5a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ f_6a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kõrvalklassi A korrutamisel tekitajaga b, $A \xrightarrow{b} Ab$, saame:

$$f_1b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ f_2b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ f_3b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$f_4b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ f_5b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ f_6b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rühma S_4 Schreieri graaf on siis



Kirjandus

[C] M. Conder, *Schreier coset graphs and their applications.* University of Auckland, Auckland, 169–175, 1991.

[BLW] A. Buldas, P. Laud, J. Willemson, *Graafid.* Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu, 10–15, 29, 2008.

[CFS] G. Cooperman, L. Finkelstein, N. Sarawagi, *Applications of Cayley graphs.* Northeastern University, Boston, 1991.

[CG] S. J. Curran, J. A. Gallian, *Hamilton cycles and paths in Cayley graphs and digraphs - A survey.* Discrete Mathematics 156 (1996), 1–18.

[CM] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups.* Springer Verlag, 1980.

[F] C. Franc, *Cayley graphs.* www.math.mcgill.ca/goren/667.2010/Cameron.pdf.

[G] J. A. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra.* Houghton Miffin Company, Boston, New York, 502–516, 1998.

[PR] I. Pak, R.Radoičić, *Hamilton Paths in Cayley Graphs.* Minneapolis, New York, 2008.

[P1] P. Puusemp, *Üldalgebra alused.* TTÜ Kirjastus, Tallinn, 2012.

[P2] P. Puusemp, *Non-abelian groups of order 16 and their endomorphism semigroups.* J. of Mathematical Sciences, Vol. 131, No. 6, 2005, 6098-6111.

[P3] R. Palm, *Diskreetse matemaatika elemendid.* Tartu Ülikooli Kirjastus, Tartu. 2003, 47–50.

[S] G. Sabidussi, *On a Class of Fixed-Point-Free Graphs.* Proc. Amer. Math. Soc. (5), 1958, 800–804.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks.

Mina, Jaana Tõnisson (sünnikuupäev: 21.02.1990)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Cayley graafid,

   mille juhendaja on Peeter Puusemp,

   (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 3. juuni 2014. a.