TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

464

HOMOGEENSETE RUUMIDE JA KIHTKONDADE ALAMMUUTKONNAD

ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ И РАССЛОЕНИЙ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

XXII

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK **464** ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

HOMOGEENSETE RUUMIDE JA KIHTKONDADE ALAMMUUTKONNAD

ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ И РАССЛОЕНИЙ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

XXII

ТАРТУ 1978

TRÜ Toimetised, 464 (1978), 3-12.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 3-12.

О ПОЧТИ-КОЛЬЦАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ЭНДОМОРФИЗМАМИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП

К.Каарли
Кафедра алгебры и геометрии

В теории почти-колец важное место занимают работы, посвященные изучению почти-колец, порожденных некоторым множеством эндоморфизмов группы из заданного класса. Первый результат в данном направлении принадлежит Фрёлиху [4] : почти-кольцо, порожденное всеми внутренними автоморфизмами конечной неабелевой простой группы G , совпадает с **почти-кольцом** $S_0(G)$ всех преобразований, сохраняющих 0 , группы G . Мы дадим весьма далеко идущее обобщение этой теоремы.

Пусть G – аддитивно записанная группа и R – **почти-кольцо**, порожденное множеством эндоморфизмов группы G , содержащим все внутренние автоморфизмы. Предположим,что все **ненулевые** фактор-модули F/H , где F и H – идеалы модуля G_R, неабелевы. Основная теорема работы утверждает, что в **этих условиях** R является плотным под-почти-кольцом почти-кольца

$$R' = \{ t \in S_0(G) \mid \text{для каждого идеала } A \text{ модуля } G_R \text{ из } g_1 - g_2 \in A \text{ следует } g_1 t - g_2 t \in A \}.$$

§ 1. Предварительные замечания

Рассматриваются левые почти-кольца с нулем, т.е. в почти-кольце предполагается выполнение тождеств $x(y+z) = xy + xz$, $0x = 0$.

<u>Модулем над почти-кольцом L</u> , или просто <u>L-модулем</u>, называется группа $(M,+)$, если для всех $m \in M$, $l \in L$ определен элемент $ml \in M$, так что $m(kl) = (mk)l$, $m(k+l) = mk + ml$ и $0l = 0$ для любых $m \in M$, $k, l \in L$.

Ядро гомоморфизма L-модулей называется идеалом L-модуля или L-идеалом. Идеалы L-модуля L называются правыми идеалами почти-кольца L. Символ $A \triangleleft_L M$ обозначает, что A - идеал L-модуля M. Вместо $S \triangleleft_L L$ обычно пишем $S \triangleleft_r L$. Идеал L-модуля, порожденный множеством X, обозначим через $(X)_L$.

Если A и B - подмножества L-модуля M, то обозначим

$$(B:A)=\{\ell\in L \mid A\ell \subseteq B\}.$$

Элемент d почти-кольца L называется дистрибутивным, если $(x+y)d=xd+yd$ при всех $x,y\in L$. Почти-кольцо L называется дистрибутивно порожденным (д.п. почти-кольцом), если $(L,+)$ порождается дистрибутивными элементами. Зафиксируем в каждом д.п. почти-кольце L некоторое его порождающее множество дистрибутивных элементов $\mathcal{D}(L)$. Для каждого модуля M над д.п. почти-кольцом предполагаем, что элементы из $\mathcal{D}(L)$ действуют на $(M,+)$ эндоморфизмами.

Введем еще обозначения: $[a,b]=a+b-a-b$,

$$[a,b,\ell]=(a+b)\ell-b\ell-a\ell.$$

Взаимным коммутантом $[A,B]_L$ подмножеств A и B L-модуля M называется L-идеал, порожденный всеми элементами вида $[a,b]$ и $[a,b,\ell]$, где $a\in A$, $b\in B$, $\ell\in L$. Теоретико-групповой взаимный коммутант множеств A и B, т.е. нормальный делитель, порожденный всеми элементами вида $[a,b]$, где $a\in A$, $b\in B$, обозначим через $[A,B]^+$. Если L дистрибутивно порождено, а A и B являются L-идеалами в M, то

$$[A,B]_L=[A,B]^+ \tag{1}$$

(см. [3], теорема 4.4.1).

Модуль M над почти-кольцом L называется абелевым, если $[M,M]_L=0$ и вполне неабелевым, если каждый ненулевой фактормодуль любого подмодуля модуля M неабелев. Очевидно, последнее равносильно требованию, что $[A,A]_L=A$ при любом подмодуле A L-модуля M.

Приведем ряд вспомогательных результатов.

Лемма 1 ([5], предложение 1.1). Если A и B - подмножества L-модуля M, причем $B\triangleleft_L M$, то $(B:A)\triangleleft_r L$.

Лемма 2 ([3], теорема 2.1.3). Идеалы модуля M над д.п. почти-кольцом L - это в точности L-подмодули, являющиеся нормальными делителями группы $(M,+)$.

Из леммы 2 легко следует

Лемма 3. Если X – подмножество модуля M над д.п. почти-кольцом L такое, что $X\mathfrak{D}(L)\subseteq X$, то L-идеал $(X)_L$ совпадает с нормальным делителем группы $(M,+)$, порожденным множеством X.

Лемма 4. Пусть M – модуль над д.п. почти-кольцом L, $A \trianglelefteq_L M$ и X – такое подмножество в M, что $X\mathfrak{D}(L)\subseteq X$. Тогда $[A,(X)_L]_L \subseteq [A,X]^+$.

Доказательство. В силу леммы 3 идеал $(X)_L$ совпадает с нормальным делителем группы $(M,+)$, порожденным множеством X. Поскольку

$$[a,-m+x+m]=-m+[m+a-m,x]+m$$

и A является нормальным делителем группы $(M,+)$, то

$$[A,(X)_L]^+\subseteq [A,X]^+.$$

Учитывая еще формулу (1), получим требуемое включение.

Лемма 5. Структура идеалов вполне неабелева модуля дистрибутивна.

Доказательство. Пусть L – почти-кольцо, M – вполне неабелевый L-модуль и $A,B,C \trianglelefteq_L M$. В лемме 2.9 работы [2] показано, что L-модуль

$$[(A+B)\cap(A+C)]/[A+(B\cap C)]$$

является абелевым. Следовательно, $(A+B)\cap(A+C) = A+(B\cap C)$ и структура идеалов L-модуля M дистрибутивна ([1], стр. 121, теорема 1).

Лемма 6. Если M – вполне неабелевый L-модуль, все подмодули которого являются L-идеалами, то

$$mA\cap mB = m(A\cap B) \qquad (2)$$

для любых $m\in M$, $A,B \trianglelefteq_r L$.

Доказательство. Очевидно, $m(A\cap B)\subseteq mA\cap mB$. Поскольку $[ma,mb]$, $[ma,mb,l]\in m[A,B]_L$ при всех $a\in A$, $b\in B$, $l\in L$, то $[mA,mB]_L\subseteq m[A,B]_L$. Следовательно,

$$[mA\cap mB,mA\cap mB]_L\subseteq[mA,mB]_L\subseteq m[A,B]_L\subseteq m(A\cap B),$$

откуда, в силу полной неабелевости M_L, получим $mA\cap mB = m(A\cap B)$.

Лемма 7. Пусть M – модуль над почти-кольцом L и $m_1, m_2\in M$. Тогда существует изоморфизм

$$\gamma = \gamma_{m_1, m_2} : m_1L/m_2(0:m_2) \to m_2L/m_2(0:m_1), \qquad (3)$$

задаваемый правилом

$$\gamma(m_1 l + m_1(0:m_2)) = m_2 l + m_2(0:m_1) . \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим $H_2 = m_2(0:m_1)$ и определим отображение $\delta : m_1L \to m_2L/H_2$, полагая $\delta(m_1 l) = m_2 l + H_2$. Ввиду $(0:m_1) \subseteq (H_2 : m_2)$, отображение δ однозначно и легко проверить, что оно является эпиморфизмом L-модулей. Пусть $H_1 = \mathbf{Ker}\,\delta$. Лемма будет доказана, если мы убедимся в справедливости равенства $H_1 = m_1(0:m_2)$. Действительно, учитывая очевидное соотношение

$$(mA : m) = A + (0:m),$$

где $m \in M$, $A \subseteq L$, получаем

$$H_1 = \{m_1 l \mid m_2 l \in H_2\} = m_1(H_2 : m_2) = m_1(m_2(0:m_1) : m_2) =$$
$$= m_1((0:m_1) + (0:m_2)) = m_1(0:m_2).$$

Лемма доказана.

§ 2. Теорема плотности для вполне неабелевых модулей

В этом параграфе зафиксированы группа G и почти-кольцо R, порожденное множеством E эндоморфизмов группы G, содержащим все внутренние автоморфизмы. Тогда G является модулем над д.п. почти-кольцом R (в качестве $\mathcal{B}(R)$ берем E). Легко видеть, что все подмодули R-модуля G являются R-идеалами. Действительно, каждый подмодуль является нормальным делителем, так как R содержит все внутренние автоморфизмы группы G и тогда, в силу леммы 2, он является R-идеалом.

Лемма 8. Пусть H_i и F_i – подмодули модуля G_R, $H_i \subseteq F_i$, $i = 1, 2$. Обозначим $g + H_1 = \bar{g}$, $g + H_2 = \tilde{g}$, $K_1/H_1 = \bar{K}_1$, $K_2/H_2 = \tilde{K}_2$ для любых $g \in G$ и подмножеств $H_i \subseteq K_i \subseteq G$, $i = 1, 2$. Если $\varphi : \bar{F}_1 \to \tilde{F}_2$ – эпиморфизм, то элементы вида $\tilde{f} - \varphi(\bar{f})$, где $f \in F_1$, порождают в $\tilde{G}$ подмодуль $\tilde{X}$ такой, что $[\tilde{F}_2, \tilde{X}]_R = 0$.

Доказательство. Берем произвольный элемент $f_1 \in F_1$. Тогда найдется $r \in R$ такой, что $-f_1 + g + f_1 = gr$ при каждом $g \in G$, откуда $-\bar{f}_1 + \bar{g} + \bar{f}_1 = \bar{g}r$. Если $g \in F_1$, то, применяя к последнему равенству изоморфизм φ, получаем

$$-\varphi(\bar{f}_1) + \varphi(\bar{g}) + \varphi(\bar{f}_1) = \varphi(\bar{g}r) = \varphi(\bar{g})r = -\tilde{f}_1 + \varphi(\bar{g}) + \tilde{f}_1.$$

Следовательно,

$$[\varphi(\bar{g}), \tilde{f}_1 - \varphi(\bar{f}_1)] = 0,$$

откуда, в силу произвольности $g \in F_1$, вытекает

$$[\tilde{F}_2, \tilde{f}_1 - \varphi(\bar{f}_1)]^+ = 0. \tag{5}$$

Поскольку $(\tilde{f}_1 - \varphi(\bar{f}_1))d = \tilde{f}_1 d - \varphi(\bar{f}_1 d)$ при каждом $d \in \mathcal{D}(R)$, то множество $\{\tilde{f} - \varphi(\bar{f}) \mid f \in F_1\}$ замкнуто относительно умножения на элементы из $\mathcal{D}(R)$. Утверждение леммы следует теперь из (5) и леммы 4.

Следствие 1. Если выполнены условия леммы 8 и G – вполне неабелевый R-модуль, то $H_1 \cap F_2 \subseteq H_2$.

Доказательство. Пусть $f \in H_1 \cap F_2$. Поскольку $f \in H_1$, то $\bar{f} = 0$ и $\tilde{f} = \tilde{f} - \varphi(\bar{f}) \in \tilde{F}_2 \cap \tilde{X}$. По лемме 8 R-модуль $\tilde{F}_2 \cap \tilde{X}$ является абелевым. Действительно, $[\tilde{F}_2 \cap \tilde{X}, \tilde{F}_2 \cap \tilde{X}]_R \subseteq [\tilde{F}_2, \tilde{X}]_R = 0$. Тогда, в силу полной неабелевости $\tilde{G}_R$, получим $\tilde{F}_2 \cap \tilde{X} = 0$. Следовательно, $\tilde{f} = 0$ и, значит, $f \in H_2$, что и требовалось доказать.

Следствие 2. Пусть G – вполне неабелевый R-модуль и $g_1, g_2 \in G$. Тогда

$$g_2R \cap g_1(0:g_2) \subseteq g_2(0:g_1). \tag{6}$$

Доказательство. По лемме 7 имеем изоморфизм

$$\varphi_{g_1,g_2} : g_1R/g_1(0:g_2) \to g_2R/g_2(0:g_1).$$

Тогда выполнены условия леммы 8 и, применяя следствие I, получим требуемое включение.

Предложение 1. Если G – вполне неабелевый R-модуль, то при любых $g_1, g_2 \in G$ выполняется равенство

$$(g_1 - g_2)R = g_1(0:g_2) + g_2(0:g_1). \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим $H_1 = g_1(0:g_2)$, $H_2 = g_2(0:g_1)$, $g+H_1=\bar{g}$, $g+H_2=\tilde{g}$. Так как тождественный автоморфизм группы G является внутренним, то R имеет единицу. Поэтому $g_1-g_2 \in (g_1-g_2)R$. Поскольку $(g_1-g_2)R \trianglelefteq_R G$, то и $g_1 r - g_2 r \in (g_1-g_2)R$ при любом $r\in R$. В частности, взяв r из $(0:g_2)$, получим включение $H_1 \subseteq (g_1-g_2)R$. Аналогично доказывается, что $H_2 \subseteq (g_1-g_2)R$ и, значит,

$$H_1+H_2 \subseteq (g_1-g_2)R.$$

Докажем обратное включение. Поскольку R имеет единицу, то из формулы (4) следует $\tilde{\varphi}_{g_1,g_2}(\tilde{g}_1)=\tilde{g}_2$. Тогда, согласно лемме 8, элемент $\tilde{g}_1-\tilde{g}_2$ принадлежит такому идеалу $\tilde{X}_2$ модуля $\tilde{G}_R = G/H_2$, что $[\tilde{X}_2,\tilde{g}_2R]_R=0$. Аналогично, $\bar{g}_1-\bar{g}_2$ содержится в таком идеале $\bar{X}_1$ R-модуля $\bar{G}=G/H_1$, что $[\bar{X}_1,\bar{g}_1R]_R=0$. С другой стороны, $g_1-g_2= = g_1+g_2(-1)\in g_1R+g_2R$ и в итоге

$$g_1-g_2\in X_1\cap X_2\cap(g_1R+g_2R). \tag{8}$$

Учитывая свойство R-идеалов X_1 и X_2 и формулу (1), получаем

$$[X_1\cap X_2, g_1R+g_2R]_R\subseteq[X_1\cap X_2,g_1R]_R+[X_1\cap X_2,g_2R]_R\subseteq$$
$$\subseteq[X_1,g_1R]_R+[X_2,g_2R]_R\subseteq H_1+H_2.$$

Следовательно,

$$[X_1\cap X_2\cap(g_1R+g_2R), X_1\cap X_2\cap(g_1R+g_2R)]_R\subseteq H_1+H_2,$$

откуда, в силу полной неабелевости G_R, получим

$$X_1\cap X_2\cap(g_1R+g_2R)\subseteq H_1+H_2.$$

Теперь из (8) следует $g_1-g_2\in H_1+H_2$, что и требовалось доказать.

Предложение 2. Пусть G является вполне неабелевым R-модулем. Тогда для любых $g_1,\dots,g_n,g_{n+1}\in G$ справедлива формула

$$g_{n+1}R\cap\left(\bigcap_{i=1}^{n}(g_i-g_{n+1})R\right)=g_{n+1}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(0:g_i)\right). \tag{9}$$

Доказательство. Докажем (9) индукцией по n. Если $n = 1$, то последовательно используя формулу (7), лемму 5, и включение (6), получаем

$$g_2R\cap(g_1-g_2)R = g_2R\cap(g_1(0:g_2)+g_2(0:g_1)) =$$
$$= g_2R\cap g_1(0:g_2)+g_2(0:g_1) = g_2(0:g_1).$$

Допустим, что (9) верна при $n \leq k-1$ и рассмотрим случай $n = k$. Преобразуем левую часть формулы (9), учитывая индуктивное предположение, леммы 5 и 6 и формулу (7),

$$g_{k+1}R\cap(\bigcap_{i=1}^{k}(g_i-g_{k+1})R) = [g_{k+1}R\cap(\bigcap_{i=1}^{k-1}(g_i-g_{k+1})R)]\cap$$
$$\cap(g_k-g_{k+1})R = g_{k+1}(\bigcap_{i=1}^{k-1}(0:g_i))\cap[g_{k+1}(0:g_k)+g_k(0:g_{k+1})] =$$
$$= g_{k+1}(\bigcap_{i=1}^{k}(0:g_i))+[g_{k+1}(\bigcap_{i=1}^{k-1}(0:g_i))\cap g_k(0:g_{k+1})].$$

Предложение будет доказано, если мы убедимся, что

$$y = g_{k+1}(\bigcap_{i=1}^{k-1}(0:g_i))\cap g_k(0:g_{k+1}) \subseteq g_{k+1}(\bigcap_{i=1}^{k}(0:g_i)).$$

Ясно, что $y \subseteq g_{k+1}(\bigcap_{i=1}^{k-1}(0:g_i))$ и, в силу (6), имеем

$$y \subseteq g_{k+1}R\cap g_k(0:g_{k+1}) \subseteq g_{k+1}(0:g_k).$$

Следовательно, согласно лемме 6, будет $y \subseteq g_{k+1}(\bigcap_{i=1}^{k}(0:g_i))$.
Предложение доказано.

Прежде, чем приступить к доказательству основного результата, введем еще одно понятие. Назовем идеализатором нормального делителя N L-модуля M в почти-кольце L множество

$$\mathrm{Id}_{M,L}(N) = \{\ell\in L \mid m_1-m_2\in N \Rightarrow m_1\ell - m_2\ell\in N\}.$$

Легко проверить, что идеализатор является под-почти-кольцом почти кольца L.

Теорема 1. Пусть G – группа, E – некоторое множество ее эндоморфизмов, содержащее все внутренние автоморфизмы и R – почти-кольцо преобразований группы G, порожденное множеством E. Если G – вполне неабелевый R-модуль, то R является плотным под-почти-кольцом почти-кольца

$$R' = \bigcap_{H \trianglelefteq_R G} \mathrm{Id}_{G,S_0(G)}(H),$$

т.е. для любых $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ и $r' \in R'$ найдется $r \in R$ такой, что $g_i r = g_i r'$, $i = 1, \ldots, n$.

<u>Доказательство</u>. Из определения идеализатора следует, что все R-подмодуля модуля G являются и R'-подмодулями. Таким образом, $gR' \subseteq gR$ при любом $g \in G$ и утверждение теоремы верно при $n = 1$. Предположим, что оно верно при $n = k$ и докажем его для $n = k + 1$. Согласно индуктивному предположению найдется $r_1 \in R$ такой, что $g_i r_1 = g_i r'$ для $i = 1, \ldots, k$. Выясним, насколько могут отличаться $g_{k+1} r_1$ и $g_{k+1} r'$. Поскольку оба они принадлежат $g_{k+1} R$, то $g_{k+1} r' - g_{k+1} r_1 \in g_{k+1} R$. Так как оба r_1 и r' принадлежат идеализатору $\mathrm{Id}_{G, S_0(G)}((g_i - g_{k+1})R)$, то $g_{k+1} r' - g_i r'$ и $g_{k+1} r_1 - g_i r_1$, принадлежат $(g_i - g_{k+1})R$. В силу выбора элемента r_1, имеем $g_i r_1 = g_i r'$ при $i = 1, \ldots, k$. Следовательно,

$$g_{k+1} r' - g_{k+1} r_1 = (g_{k+1} r' - g_i r') - (g_{k+1} r_1 - g_i r_1) \in$$
$$\in (g_i - g_{k+1})R, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Мы доказали, что

$$g_{k+1} r' - g_{k+1} r_1 \in g_{k+1} R \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} (g_i - g_{k+1})R\right).$$

Отсюда, согласно формуле (9), следует, что

$$g_{k+1} r' - g_{k+1} r_1 \in g_{k+1} \left(\bigcap_{i=1}^{k} (0 : g_i)\right).$$

Таким образом, найдется $r_2 \in \bigcap_{i=1}^{k} (0 : g_i)$ такой, что $g_{k+1} r_2 = g_{k+1} r' - g_{k+1} r_1$. Тогда при $i = k + 1$ получим

$$g_i (r_2 + r_1) = g_{k+1} r' - g_{k+1} r_1 + g_{k+1} r_1 = g_i r',$$

а при $i = 1, \ldots, k$

$$g_i (r_2 + r_1) = g_i r_2 + g_i r_1 = g_i r'.$$

Значит, в качестве r можно брать $r_2 + r_1$. Теорема доказана.

<u>Следствие 3</u>. Пусть G – группа, все нормальные делители которой совпадают со своими коммутантами и R – почтикольцо, порожденное всеми внутренними автоморфизмами группы G. Тогда для произвольных $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n \in G$ таких, что $h_i \in (g_i)$, $h_i - h_j \in (g_i - g_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, найдется

$h \in R$ такой, что $g_i h = h_i$, $i = 1, \ldots, n$ (через (g) обозначен нормальный делитель в G, порожденный элементом g).

Если в теореме 1 группа G конечна, то $R = R'$ и мы получаем полный ответ на вопрос: какие преобразования принадлежат R ? Если же G – бесконечная группа, то необязательно $R = R'$. Пусть, например, G – счетная простая группа. Тогда из следствия 3 вытекает, что почти-кольцо R, порожденное всеми внутренними автоморфизмами группы G, является плотным под-почти-кольцом почти-кольца $R' = S_0(G)$. Значит, R является счетным, так как оно порождается счетным множеством. Однако, множество $S_0(G)$ имеет мощность континуума. Следовательно, R – собственное под-почти-кольцо в R'.

Литература

1. С к о р н я к о в Л. А., Элементы теории структур. Москва, 1970.
2. B e t s c h, G., Primitive near-rings. Math. Z., 1973, 130, № 4, 351-361.
3. F r ö h l i c h, A., Distributively generated near-rings (II.Representation theory). Proc. London Math. Soc., 1958, 8, № 29, 95-108.
4. F r ö h l i c h, A., The near-ring, generated by the inner automorphisms of a finite simple group. J. London Math. Soc., 1958, 33, № 1, 95-107.
5. S c o t t, S. D., Formation radicals for near-rings. Proc. London Math. Soc., 1972, 25, № 3, 441-464.

Поступило
I IУ 1977

MÕNEDE RÜHMADE ENDOMORFISMIDE POOLT TEKITATUD RINGOIDIDEST

K.Kaarli

R e s ü m e e

Artiklis uuritakse ringoidi R, mis on tekitatud rühma G mingi kõiki siseautomorfisme sisaldava endomorfismide hulga poolt. Eeldusel, et mooduli G_R kõik alammoodulid ühtivad oma kommutandiga, tõestatakse, et R sisaldub tiheda alamringoidina teatavas suhteliselt lihtsa ehitusega ringoidis R'.

ON NEAR-RINGS GENERATED BY THE ENDOMORPHISMS OF SOME GROUPS

K.Kaarli

S u m m a r y

In this paper the following theorem has been proved.

<u>Theorem</u>. Let G be a group, let E be a set of endomorphisms of G containing all the inner automorphisms and R the near-ring generated by E. Denote by $S_0(G)$ the near-ring of all transformations of G preserving the zero and put

$$R' = \{t \in S_0(G) \mid g_1 - g_2 \in A \Rightarrow g_1 t - g_2 t \in A \text{ for any } A \underset{R}{\lhd} G\}.$$

If any submodule of G_R coincides with its R-commutator subgroup then R is a dense subnear-ring of R'. That is, for any $g_1, \dots, g_n \in G$ and $r' \in R'$ there exists $r \in R$ such that $g_i r = g_i r'$, $i = 1, \dots, n$.

This theorem generalizes the well-known theorem, due to Fröhlich [4]: the near-ring generated by all the inner automorphisms of finite, simple, non-abelian group G coincides with $S_0(G)$.

TRÜ Toimetised, 464 (1978), 13-27.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 13-27.

МНОГОЗНАЧНОСТЬ АКСИОМЫ О НОРМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

А.Таутс

Кафедра математического анализа

§ I. Общие положения

В [I] приведена аксиома: "Каждая нормальная функция имеет регулярное значение". Напомним, что нормальной называется функция, определенная на классе всех ординалов, принимающая ординальные значения и являющаяся строго возрастающей и непрерывной. Но так как всякая такая функция является не множеством, а собственным классом пар, то остается неоднозначность в том отношении, какими средствами вообще функции могут быть заданы. Самое сильное значение получает аксиома в том случае, если в этом отношении никаких ограничений нет, но возможны и более ограниченные понятия функции.

Вначале рассмотрим некоторые общие предложения без конкретизации, какой класс функций имеется в виду. Но всегда будем предполагать, что функции действуют из класса ординалов в класс ординалов.

Предположим, что класс функций такой, что если $f(x)$ и $g(x)$ функции, то и $f(g(x))$ тоже функция. Конечно, если $f(x)$ и $g(x)$ строго возрастающие, то такой же будет и $f(g(x))$. С непрерывностью положение аналогичное, так что из нормальности $f(x)$ и $g(x)$ вытекает нормальность $f(g(x))$. При этом x_0 является неподвижной точкой для $f(g(x))$ в точности в том случае, если x_0 является неподвижной точкой для $f(x)$ и $g(x)$.

Если $f(x)$ - нормальная функция, то для каждого x_0 существует для f неподвижная точка $x \geq x_0$, которую можно получить как $\sup\limits_n x_n$, где $n=0,1,\ldots$, а $x_{n+1}=f(x_n)$.

Определим теперь свойство ($*$):

если $f(x)$ строго возрастающая функция, неподвижные точки которой образуют собственный класс, то перечисление ее неподвижных точек тоже функция, т.е. для такой функции f существует строго возрастающая функция g, значения которой пробегают в точности все неподвижные точки функции f.

При этом, если f нормальна, то функция g, указанная в свойстве ($*$), тоже нормальна, так как предел неподвижных точек функции f в этом случае также окажется ее неподвижной точкой.

Следовательно, если класс функций имеет свойство($*$), то аксиому, данную в начале статьи, можно выразить в более сильной форме: "Каждая нормальная функция имеет регулярную неподвижную точку".

Если класс функций, кроме свойства ($*$), еще замкнут относительно суперпозиции и содержит все функции вида $h_a(x)=a+x$, где a - произвольный ординал, то из данной аксиомы вытекает, что регулярные неподвижные точки любой нормальной функции f образуют собственный класс, так как регулярная неподвижная точка x_0 функции $f(a+x)$ является регулярной неподвижной точкой и для f и удовлетворяет неравенству $x_0 \geq a$.

Предположим теперь, что класс функций содержит функцию $f_0(x)$, пробегающую все номера бет, т.е. $f_0(x)=\beth_x$ (2 , стр. 66). Функция $f_0(x)$, конечно, нормальна. Если x_0 - ее регулярная неподвижная точка, то x_0 недостижима, так как если $x < x_0$, где x кардинальное число, то $2^x \leq 2^{f_0(x)} = f_0(x+1) < f_0(x_0) = x_0$.

Если теперь $f(x)$ - любая нормальная функция, то регулярная неподвижная точка функции $f(f_0(x))$ является регулярной неподвижной точкой обоих функций f и f_0, следовательно, она является недостижимой неподвижной точкой функции f. Таким образом, мы можем резюмировать наши рассуждения в следующем результате: если класс функций замкнут относительно суперпозиции, имеет свойство (∗) и содержит все функции вида $h_a(x) = a + x$, а кроме них еще функцию бет $f_0(x)$, то аксиома, приведенная в начале статьи эквивалентна следующему, по своей форме более сильному предложению: "Недостижимые неподвижные точки любой нормальной функции образуют собственный класс." Тем самым окажется лишним другая аксиома из [I], требующая существования собственного класса недостижимых кардинальных чисел.

§ 2. Разветвленное исчисление предикатов.

Теперь укажем один конкретный способ задания функций и предикатов, а именно разветвленное исчисление предикатов высших порядков.

Сперва предположим, что у нас имеется некоторая (бесконечная или конечная, может быть, и пустая) совокупность знаков, которые мы будем называть <u>элементарными типами</u>.

Теперь определим индуктивно понятие <u>типа</u>, присваивая при этом каждому неэлементарному типу уровень в виде некоторого ординала.

I) Каждый элементарный тип есть тип.

2) Если J - некоторое множество и каждый a_i'' при $i \in J$ есть тип, а α - любой ординал, превышающий уровни неэлементарных типов, которые встречаются среди a_i'', $i \in J$, то $\alpha\langle a_i'' : i \in J\rangle$ есть тип уровня α. Если все типы a_i' элементарные, то α может быть любым ординалом, в том числе и 0.

Дальше предположим, что в нашем распоряжении находятся следующие символы:

I) для каждого типа a' - класс символов, называемых <u>константами</u> типа a';

2) для каждого типа a'' – класс символов $\{x_\iota^{(a'')}\}$, называемых <u>переменными</u> типа a'', где ι пробегает класс всех ординалов;

3) четыре символа логических операций $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$, называемых соответственно конъюнкцией, дизъюнкцией, импликацией и отрицанием;

4) три кванторных символа $\forall$, $\exists$, d, называемых соответственно квантором общности, квантором существования и функциональным квантором.

Теперь определим понятие <u>терма</u> и <u>формулы</u>, указывая при этом, какие переменные считаются связанными в каждом терме и в каждой формуле. Переменные, содержащиеся в терме или в формуле, но не связанные там, называются свободными переменными данного терма или данной формулы.

Определение индуктивно. При этом применяем понятие бесконечного выражения, приведенное в [3].

I) Каждая константа и каждая переменная некоторого элементарного типа есть терм данного типа. Терм такого вида не имеет связанных переменных.

2) Если $\mathfrak{A}$ – формула и $\langle x_\iota' : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ – семейство разных переменных, не связанных в формуле $\mathfrak{A}$, а α – такой ординал, что уровни неэлементарных типов переменных x_ι', $\iota \in \mathfrak{I}$, и связанных переменных формулы $\mathfrak{A}$ ниже α, а уровни неэлементарных типов свободных переменных и констант формулы $\mathfrak{A}$ не выше α, то ${}^{\alpha}\mathrm{d}\langle x_\iota' : \iota \in \mathfrak{I} \rangle \mathfrak{A}$ – терм типа $\alpha\langle a_\iota'' : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$, где a_ι'', $\iota \in \mathfrak{I}$, – тип переменной x_ι'.

Связанными переменными данного терма считаются связанные переменные формулы $\mathfrak{A}$ и переменные x_ι', $\iota \in \mathfrak{I}$.

3) Если P – переменная или константа типа $\langle a_\iota'' : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$, а $\langle a_\iota' : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ – семейство термов типов a_ι'', $\iota \in \mathfrak{I}$, то $P\langle a_\iota' : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ – формула. В этой формуле связанными переменными считаются связанные переменные термов a_ι', $\iota \in \mathfrak{I}$.

4) Если $\mathfrak{A}$ – формула, то $\neg\mathfrak{A}$ – формула. Связанными переменными в формуле $\neg\mathfrak{A}$ считаются связанные переменные формулы $\mathfrak{A}$.

5) Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ – формулы, у которых нет переменных, содержащихся свободными в одной и связанными в другой из них, то $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ – формула. Связанными переменными в ней считаются связанные переменные формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

6) Если $\langle \mathfrak{A}_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ – такое семейство формул, что нет переменных, содержащихся свободными в одной, а связанными в другой из данных формул, то $\bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota$ и $\bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota$ – формулы. Связанными переменными в них считаются связанные переменные формул $\mathfrak{A}_\iota, \iota \in \mathfrak{I}$.

7) Если $\mathfrak{A}$ – формула, а $\langle x'_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ – семейство разных переменных, не связанных в формуле $\mathfrak{A}$, то $\forall \langle x'_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle \mathfrak{A}$ и $\exists \langle x'_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle \mathfrak{A}$ – формулы. Связанными переменными в них считаются связанные переменные формулы $\mathfrak{A}$ и переменные x'_ι, $\iota \in \mathfrak{I}$.

Множество $\mathfrak{I}$ может в любом правиле, где оно встречается, быть бесконечным или конечным, в том числе, и пустым множеством.

Интерпретация данного формализма следующая. Каждому элементарному типу a'' поставим в соответствие некоторый класс объектов таким образом, что каждому элементу a данного класса соответствует некоторая константа a' типа a''.

Класс предикатов для неэлементарного типа a'' определяется индукцией по уровню типа a''.

Если a'' имеет вид $0\langle a''_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$, то каждый a''_ι – элементарный тип. Сперва поставим каждой константе a' любого типа a'' вида $0\langle a''_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ в соответствие некоторый предикат типа $\langle a''_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$, т.е. некоторую истинностную функцию на семействах $\langle a_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$, где каждый a_ι, $\iota \in \mathfrak{I}$, есть объект типа a''_ι. Потом для каждого типа a'' вида $0\langle a''_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ считаем предикатами типа a'' все предикаты, т.е. истинностные функции, выражаемые некоторой формулой $\mathfrak{A}$, где константы имеют элементарный тип или тип уровня 0, все связанные переменные имеют элементарный тип, а свободными являются только переменные некоторого семейства $\langle x'_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$, где тип переменной x'_ι есть a''_ι. Не требуется, чтобы все переменные из семейства $\langle x'_\iota : \iota \in \mathfrak{I} \rangle$ действительно встречались в данной формуле $\mathfrak{A}$. Обозначением такого предиката считается $\overset{\alpha}{\jmath}\langle x'_\iota : \iota \in J\rangle \mathfrak{A}$.

Пусть при некотором ординале α для каждого типа уровня, меньшего α, уже определен класс предикатов и каждой константе из этих типов поставлен в соответствие некоторый конкретный предикат из соответствующего класса. Теперь классы предикатов для типов уровня α определяются по следующему правилу. Сперва каждой константе любого типа a'' вида $\alpha\langle a''_\iota : \iota \in J\rangle$ поставим в соответствие некоторую истинностную функцию на семействах $\langle a_\iota : \iota \in J\rangle$, где каждый $a_\iota, \iota \in J$, принадлежит типу a''_ι. Потом для каждого типа a'' уровня α, т.е. типа, имеющего вид $\alpha\langle a''_\iota : \iota \in J\rangle$, считаем предикатами типа a'' все истинностные функции, выражаемые такими формулами $\mathfrak{A}$, где типы всех констант неэлементарного типа имеют уровень, не выше α, все связанные переменные неэлементарного типа имеют тип уровня, меньшего α, а свободными являются только переменные некоторого семейства $\langle x'_\iota : \iota \in J\rangle$, где тип переменной x'_ι, $\iota \in J$, есть a''_ι. Опять не требуется фактического существования в $\mathfrak{A}$ всех переменных x'_ι, $\iota \in J$. Такой предикат обозначается термом $\overset{\alpha}{\jmath}\langle x'_\iota : \iota \in J\rangle \mathfrak{A}$.

Обращаем внимание читателя на то, что так как классы предикатов всех типов более низких уровней уже определены, то содержание кванторов общности и существования в формуле $\mathfrak{A}$ известно. Также каждый терм в $\mathfrak{A}$ имеет тип с уровнем, меньшим α, и поэтому имеет интерпретацию. Если некоторый терм в $\mathfrak{A}$ вида $\overset{\beta}{\jmath}\langle y'_\iota : \iota \in J\rangle \mathfrak{B}$ содержит свободно некоторые переменные (так как они связаны кванторами вне терма), то уровни типов этих переменных не выше β. Конкретные значения этих переменных, как известно, выражаются формулами с семейством свободных переменных соответствующего типа. Константы в этих формулах имеют тип уровня, не высшего β, а связанные переменные имеют тип уровня, меньшего β. При таких значениях своих свободных переменных значение терма $\overset{\beta}{\jmath}\langle y'_\iota : \iota \in J\rangle \mathfrak{B}$ выражается термом, возникающим в результате подстановки данных формул вместо свободных переменных в терм $\mathfrak{A}\langle y_i': i\in \mathfrak{I}\rangle\mathfrak{B}$. Но и значение этого возникающего терма имеется в классе предикатов типа $\beta\langle b_i'': i\in\mathfrak{I}\rangle$, где b_i'' -тип переменной y_i' , $i\in\mathfrak{I}$.

§ 3. Сильная и слабая интерпретация аксиомы о нормальных функциях

Будем говорить о сильной интерпретации аксиомы о нормальных функциях, если нет никаких ограничений с точки зрения способов задания функций. Так как в этом случае функции могут быть заданы самым произвольным образом, то, конечно, класс функций замкнут относительно суперпозиции и имеет свойство (*) и, следовательно, имеют место и все результаты первого параграфа.

Чтобы определить слабую интерпретацию, будем рассматривать конкретный случай развлетвленного исчисления предикатов высших порядков, где имеется только один элементарный тип. Этому типу пусть соответствует класс всех множеств. Из констант неэлементарного типа пусть имеется только один бинарный предикат уровня 0, а именно предикат $\in$.

Пусть α - некоторый регулярный кардинал. Будем обозначать через G_α класс всех таких формул, мощность которых меньше α и уровень типа и индекс любой переменной в них также меньше α , а все значения индивидных констант принадлежат V_α (2 , стр. 35).

В действительности, G_α оказывается множеством. Из-за регулярности α множество формул G_α замкнуто относительно подстановок.

О предикате мы будем говорить, что он принадлежит G_α , если этот предикат выражается некоторой формулой из G_α. Если этот предикат окажется функцией, то будем считать функцию принадлежащей G_α.

Если f и g принадлежат G_α , то отношение $y=f(g(x))$ выразимо формулой $\exists z[z=g(x)\wedge y=f(z)]$ откуда вытекает, что G_α замкнуто относительно суперпозиции.

Пусть $f \in G_\alpha$ есть строго возрастающая функция. Пусть g есть перечисление ее неподвижных точек. Тогда отношение $y = g(x)$ можно выразить формулой

$$f(y) = y \wedge \exists h [\, \mathbf{Func}(h) \wedge \mathbf{Dom}(h) = x \wedge \forall z\, (z \in \mathbf{Range}(h) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow f(z) = z \wedge z < y) \wedge \forall \langle u, v, s, t\rangle (v = h(u) \wedge t = h(s) \wedge$$
$$\wedge\, u < s \rightarrow v < t)].$$

Отсюда вытекает, что $g \in G_\alpha$, т.е. G_α имеет свойство (*).

Если значение индивидной константы a принадлежит V_α, то отношение $y = a + x$ можно выразить формулой:

$$\exists h [\, \mathbf{Func}(h) \wedge \mathbf{Dom}(h) = x \wedge \forall z\, (z \in \mathbf{Range}(h) \leftrightarrow a \leq z < y) \wedge$$
$$\wedge \forall \langle u, v, s, t \rangle (v = h(u) \wedge t = h(s) \wedge u < s \rightarrow v < t)].$$

Следовательно, если $a \in V_\alpha$, то функция $a + x$ принадлежит G_α.

Наконец, если f_0 есть функция бет, то $y = f_0(x)$ выражается формулой:

$$\exists h \{ \mathbf{Func}(h) \wedge \mathbf{Dom}(h) = x \vee \{x\} \wedge h(0) = \omega \wedge \forall \langle u, v, s, t \rangle [v =$$
$$= h(u) \wedge t = h(s) \wedge s = u + 1 \rightarrow \mathbf{Card}(t) \wedge \exists g\, (\mathbf{Func}(g) \wedge$$
$$\mathbf{Range}(g) = t \wedge \forall z\, (z \in \mathbf{Dom}(g) \leftrightarrow z \subseteq v) \wedge \forall \langle m, n, p, q \rangle (m =$$
$$= g(n) \wedge p = g(q) \wedge n \neq q \rightarrow m \neq p))] \wedge \forall \langle u, v \rangle [v = h(u) \wedge$$
$$\wedge \mathbf{Lim}(u) \rightarrow \forall z\, (z \in v \leftrightarrow \exists \langle t, s \rangle (t < u \wedge s = h(t) \wedge z \in s))] \wedge$$
$$\wedge\, y = h(x) \}.$$

Следовательно, $f_0 \in G_\alpha$.

Слабую интерпретацию получим, если в качестве класса функций взять класс, состоящий из таких функций f, что $f \in G_\alpha$ хоть при некотором ординале α. Из соображений, приведенных выше, следует, что и в этом случае имеют место все результаты параграфа I.

Пусть α – некоторый регулярный кардинал. Переинтерпретируем наше развлетвленное исчисление предикатов с той точки зрения, что роль универсума индивидов будет играть V_α. С этой целью определим для каждого типа с уровнем и длиной, меньшими α, класс предикатов данного типа, который мы будем называть классом предикатов, релятивизированным через α. В ходе этого определения определим и соответствие между всеми индивидами и предикатами из релятивизированных классов и некоторыми индивидами и предикатами из общих, нерелятивизированных классов того же типа. Соответствие не предполагается взаимно однозначным.

Релятивизированным классом индивидов будет V_α. Каждому элементу из него соответствует этот элемент сам.

Пусть для некоторого $\beta<\alpha$ уже для всех типов с уровнями, меньшими β, и длинами, меньшими α, имеются релятивизированные классы и соответствия. Пусть $a''=\beta\langle a_i'': i\in J\rangle$ есть тип уровня β с длиной, меньшей α. Тогда каждой формуле $\mathfrak{A}$ из G_α, определяющей предикат типа a'' в общем классе, поставим в соответствие предикат на релятивизированных классах a_i'', $i\in J$, определяемый аналогично общему случаю, только все переменные в $\mathfrak{A}$ рассматриваются меняющимися в пределах соответствующих релятивизированных классов, а термы означают элементы из соответствующих релятивизированных классов.

Предикат из релятивизированного класса и предикат из общего класса того же типа считаются соответствующими друг другу, если существует формула $\mathfrak{A}\in G_\alpha$, определяющая оба эти предиката.

Будем называть регулярный кардинал α рефлективным, если α имеет следующее свойство: если $\mathfrak{A}$ есть формула из множества G_α и если свободным индивидным переменным в $\mathfrak{A}$ задать значения из V_α, а свободным неэлементарным переменным из G_α, то значение истинности формулы $\mathfrak{A}$ не меняется, если эту формулу интерпретировать в релятивизированных (через α) классах, задавая свободным переменным соответствующие значения.

Теперь мы в состоянии выразить в качестве аксиомы следующий <u>принцип</u> <u>рефлективности</u>: рефлективные кардиналы образуют собственный класс.

Непосредственно ясно, что из принципа рефлективности вытекает следующее предложение: для каждого множества формул существует регулярный кардинал α такой, что если свободным переменным задать значения из V_α и G_α, то задавая свободным переменным соответствующее значение, все данные формулы сохранят свои значения истинности при релятивизации. Действительно, в качестве α следует взять такой большой рефлективный кардинал, что все данные формулы принадлежат G_α.

Докажем теперь, что из принципа рефлективности следует аксиома о нормальных функциях в слабой интерпретации. Доказательство аналогично доказательствам подобных предложений в литературе.

Пусть f – некоторая нормальная функция в слабой интерпретации. Рассмотрим две формулы развлетвленного исчисления предикатов:

$$y=f(x) \quad \text{и} \quad \forall x \exists y \,(y=f(x)).$$

Пусть α – такой рефлективный кардинал, что обе эти формулы принадлежат G_α. В этом случае для x и y из V_α равенство $y=f(x)$ имеет место в релятивизированной интерпретации в точности в том случае, когда оно имеет место в общей интерпретации. Если это отношение в релятивизированной интерпретации выразить равенством $y=f^{(\alpha)}(x)$, то имеет место

$$\forall\langle x\in V_\alpha, y\in V_\alpha\rangle\,[y=f(x) \leftrightarrow y=f^{(\alpha)}(x).$$

Формула $\forall x\exists y(y=f(x))$ получит в релятивизированной интерпретации следующее содержание: $\forall x\in V_\alpha \exists y\in V_\alpha (y=f^{(\alpha)}(x))$, которое должно быть истинно, так как $\forall x \exists y\,(y=f(x))$ истинно. Но учитывая предыдущее, получим, что и $\forall x\in V_\alpha \exists y\in V_\alpha (y=f(x))$

истинно. Из-за нормальности функции f вытекает отсюда $f(\alpha)=\alpha$, что дает аксиому о нормальных функциях в слабой интерпретации.

Предположим теперь, что аксиома о нормальных функциях имеет место в сильной интерпретации.

Пусть для каждого регулярного кардинала α значением $\psi(\alpha)$ является первый такой регулярный кардинал $\beta>\alpha$, что для каждой формулы $\mathfrak{A}(x_\iota:\iota\in J_1, y_\iota:\iota\in J_2)$ из G_α, задавая переменным x_ι, $\iota\in J_1$, значения из V_α и G_α, если существуют значения переменных y_ι, $\iota\in J_2$, такие, что $\mathfrak{A}$ истинна (ложна), тогда эти значения для y_ι, $\iota\in J_2$, существуют в V_β и G_β. Такое β существует, так как V_α и G_α – множества.

Определим теперь функцию φ на ординалах следующим образом: $\varphi(0)=\omega$, $\varphi(\alpha+1)=\psi(\varphi(\alpha))$; если α – предельный ординал, то $\varphi(\alpha)=\sup\limits_{\eta<\alpha}\varphi(\eta)$.

Функция φ является нормальной. Пусть γ – ее регулярная неподвижная точка. Докажем, что γ – рефлективный кардинал.

Применяем индукцию для формул $\mathfrak{A}\in G_\gamma$ по уровню типов переменных в $\mathfrak{A}$, для данного уровня – по сложности формулы $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{A}$ имеет вид $x\in y$, то утверждение, выражающее рефлективность, тривиально.

Если утверждение имеет место для $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и всех $\mathfrak{A}_\iota$, $\iota\in J$, то оно имеет место и для $\neg\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$, $\bigvee_\iota\mathfrak{A}_\iota$ и $\bigwedge_\iota\mathfrak{A}_\iota$.

Пусть для $\mathfrak{A}$ утверждение имеет место. Рассмотрим формулу $\exists\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{A}$ (или $\forall\langle x'_\iota:\iota\in J\rangle\mathfrak{A}$). Зададим свооодным переменным этой формулы допустимые значения, т.е. значения из V_γ и G_γ. Из-за регулярности кардинала γ существует $\beta<\gamma$, такой, что $\mathfrak{A}\in G_\beta$, а выбранные значения для свободных переменных принадлежат V_β и G_β. Без ограничения общности можно предполагать $\beta=\varphi(\alpha)$ для некоторого $\alpha<\gamma$. Если теперь формула истинна (ложна), то можно выбирать значения для x'_ι, $\iota\in J$, из $V_{\varphi(\alpha+1)}$ и $G_{\varphi(\alpha+1)}$, а, значит, и из V_γ и G_γ такие, что $\mathfrak{A}$ истинна (ложна). Но по предложению индукции формула $\mathfrak{A}$ истинна (ложна) и в релятивизированной интерпретации при соответствующих значениях. Значит, $\exists\langle x_i' : i\in J\rangle\mathfrak{A}$ истинна ($\forall\langle x_i' : i\in J\rangle\mathfrak{A}$ ложна) в релятивизированной интерпретации при соответствующих значениях свободных переменных. С другой стороны, если $\exists\langle x_i' : i\in J\rangle\mathfrak{A}$ ложна ($\forall\langle x_i' : i\in J\rangle\mathfrak{A}$ истинна), то $\mathfrak{A}$ ложна (истинна) и во всех тех случаях, если переменным $x_i, i\in J$, задать значения из V_γ и G_γ. Но тогда и $\mathfrak{A}$ ложна (истинна) в релятивизированной интерпретации при соответствующих значениях. Следовательно, $\exists\langle x_i' : i\in J\rangle\mathfrak{A}$ ложна ($\forall\langle x_i : i\in J\rangle\mathfrak{A}$ истинна) в релятивизированной интерпритации.

Пусть формула имеет вид $P\langle a_i' : i\in J\rangle$, где P – свободная предикатная переменная, а a_i', $i\in J$ – термы. Пусть утверждение имеет место для формул, уровни типов переменных которых меньше уровня типа предиката P. Зададим предикату P значение, выражаемое через $\mathfrak{A}\in G_\gamma$. Возникающая истинностная функция из свободных переменных термов a_i', $i\in J$, определяется формулой $\mathfrak{A}^*$ из G_γ, получаемой подстановкой $\mathfrak{A}$ вместо P в первоначальную формулу. Если в релятивизированной интерпретации задать предикату P соответствующее значение, то получается истинностная функция, выраженная формулой $\mathfrak{A}^*$ в релятивизированной интерпретации. Но так как переменные в $\mathfrak{A}^*$ имеют более низкие уровни типов чем P, то для $\mathfrak{A}^*$ утверждение имеет место.

Итак, утверждение полностью доказано. Так как регулярные неподвижные точки функции φ образуют собственный класс, то существует нормальная функция $\mathfrak{F}$, перечисляющая замыкание этого класса.

Пусть δ – недостижимая неподвижная точка функции $\mathfrak{F}$. В этом случае δ является и неподвижной точкой функции φ. При этом δ – предельная точка тех $\gamma<\delta$, которые являются регулярными неподвижными точками для φ, так как

$\delta = \Phi(\delta) = \sup_{\alpha<\delta} \Phi(\alpha)$. Но так как все γ, а также и δ, - рефлективные, то для каждой $\mathfrak{A} \in G_{\mu}$, если задать ее свободным переменным значения из V_{μ} и G_{μ}, ее значение истинности совпадает с ее значениями истинности в релятивизированных через γ и через δ интерпретациях, если переменным задать соответствующие значения. А следовательно, совпадают эти релятивизированные значения между собой.

А так как релятивизированная через δ интерпретация формулы $\mathfrak{A}$ в модели V_{δ}, то V_{δ} является подмоделью нашей модели теории множеств, удовлетворяющей принципу рефлективности. Впрочем, и сама наша модель удовлетворяет этому принципу. Отметим еще, что и для модели V_{δ} в слабой интерпретации имеют место все результаты первого параграфа, так как все предположения выполнены.

Так как недостижимые неподвижные точки функции Φ образуют собственный класс, то наша модель теории множеств имеет собственный класс подмоделей с принципом рефлективности. Из этого видно, что аксиома о нормальных функциях в сильной интерпретации гораздо сильнее принципа рефлективности, тем более сильнее аксиомы о нормальных функциях в слабой интерпретации.

Следует отметить, что аксиома о нормальных функциях в сильной интерпретации выразима в исчисления предикатов второго порядка без разветвления. А так как из нее вытекает принцип рефлективности, касающийся разветвленного исчисления сколь угодно высоких порядков, то это значит, что разветвленное исчисление предикатов гораздо беднее исчисления предикатов без разветвления.

Литература

1. L e v y, A., Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. Pacif. J. Math., 1960, 10, 223-238.
2. D r a k e, F.R., Set Theory. Amsterdam, 1974.
3. C a r p, C.R., Languages with Expressions of Infinite Length. Amsterdam, 1964.

NORMAALFUNKTSIOONIDE AKSIOOMI MITMEMÕTTELISUS

A.Tauts

R e s ü m e e

Vaadeldakse aksioomi: "iga normaalfunktsioon omab regulaarset väärtust" mitmesuguseid interpretatsioone, olenevalt sellest, milliste vahenditega on funktsiooni esitamine lubatud. Tugev interpretatsioon tähendab, et funktsiooni esitusviisile mingeid kitsendusi pole seatud, nõrk interpretatsioon aga seda, et vaadeldakse ainult funktsioone, mis on esitatavad transfiniitse harunenud predikaatarvutuse kaudu.

Regulaarset ordinaali α nimetatakse reflektiivseks, kui iga valem transfiniitses harunenud predikaatarvutuses, mis on kirja pandud V_α vahenditega, säilitab oma tõeväärtuse, kui universum asendada V_α-ga. Sõnastatakse reflektsiooniprintsiip: reflektiivsete ordinaalide klass on tõkestamata. Tõestatakse, et reflektsiooniprintsiibist järeldub normaalfunktsioonide aksioom nõrgas interpretatsioonis, sama aksioomi tugevast interpretatsioonist järeldub aga mitte ainult reflektsiooniprintsiip, vaid ka alammudelite olemasolu, kus reflektsiooniprintsiip kehtib.

DIE VIELDEUTIGKEIT DES AXIOMS ÜBER DER NORMALFUNKTIONEN

A.Tauts

Z u s a m m e n f a s s u n g

Man betrachtet das Axiom: "Jede Normalfunktion hat einen regularen Wert". Die starke Interpretation dieses Axioms bedeutet, daß die Darlegung der Funktionen beschränkungslos ist, die schwache Interpretation aber, daß jede Funktion durch den transfiniten verzweigten Prädikatkalkül dargelegt sein soll.

Eine reguläre Ordinalzahl α wird reflektiv genannt, wenn jede Formel in dem transfiniten verzweigten Prädikatkalkül, die durch Mittel von V_α darlegbar ist, ihren Wahrheitswert bewahrt, wenn das Universum durch V_α versetzt wird. Es wird das Reflektionsprinzip formuliert: die Klasse der reflektiven Ordinalzahlen ist unbegrenzt. Es wird bewiesen,

daß aus dem Reflektionsprinzip das Axiom über der Normalfunktionen in der schwachen Interpretation ableitbar ist, aus der starken Interpretation desselben Axioms aber nicht nur das Reflektionsprintsip, sondern auch das Vorhandensein der Teilmodellen, in denen das Reflektionsprinzip gilt, ableitbar ist.

TRÜ Toimetised, 464 (1978), 28-36.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 28-36.

О КОНГРУЭНЦИЯХ В РЕШЕТКЕ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

Р.Пранк

Кафедра математической статистики и программирования

Обозначим через $\mathcal{E}$ решетку рекурсивно перечислимых подмножеств множества натуральных чисел N. Основные факты о структуре $\mathcal{E}$ изложены в монографии [2]. Там же можно найти и не приведенные здесь определения и обозначения из теории рекурсивных функций. Нужные алгебраические понятия имеются в [1]. В литературе высказывалось предположение, что успех в исследовании элементарной теории решетки $\mathcal{E}$ (см. [6]) может быть достигнут путем изучения факторрешеток $\mathcal{E}$ относительно некоторых конгруэнций [5, 7]. В настоящей статье рассмотрим соотношения конгруэнций и фильтров в решетке $\mathcal{E}$.

1. <u>Конгруэнции, идеалы и фильтры</u>. Пусть $\mathcal{L}$ – решетка. Отношение эквивалентности $\mathcal{C}$ между элементами $\mathcal{L}$ называется <u>конгруэнцией</u>, если $\mathcal{C}$ инвариантно относительно операций решетки $\cap$ и $\cup$, т.е. для любых $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathcal{L}$ выполняется

$$a_1 \equiv a_2 (\mathcal{C}) \quad \& \quad b_1 \equiv b_2 (\mathcal{C}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 \cap b_1 \equiv a_2 \cap b_2 (\mathcal{C}) \ \& \ a_1 \cup b_1 \equiv a_2 \cup b_2 (\mathcal{C}).$$

Отметим, что конгруэнции можно сравнивать по включению как множества пар. В решетке $\mathcal{E}$ чаще всего рассматривались конгруэнции

1) $A \equiv B \ (\mathcal{F}) \rightleftharpoons$ [симметричная разность $|A-B|$ конечна],
2) $A \equiv B \ (\mathcal{S}) \rightleftharpoons$ [$|A-B|$ иммунна],
3) $A \equiv B \ (\mathcal{H}) \rightleftharpoons$ [$|A-B|$ гипергипериммунна],
4) $A \equiv B \ (\mathcal{M}) \rightleftharpoons (\forall X \in \mathcal{E})$ [$A \cup X$ коконечно $\Leftrightarrow B \cup X$ коконечно].

Пусть $\mathcal{L}$ – дистрибутивная решетка с нулем и единицей, а $\mathcal{C}$ – конгруэнция в $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{C}$ определяет <u>нижнее ядро</u> – идеал $\Delta\mathcal{C}$, и <u>верхнее ядро</u> – фильтр $\nabla\mathcal{C}$ в $\mathcal{L}$:

$$\Delta\mathcal{C} = \{x \mid x \equiv 0 \ (\mathcal{C})\},$$
$$\nabla\mathcal{C} = \{x \mid x \equiv 1 \ (\mathcal{C})\}.$$

Для каждого идеала (фильтра) можно рассмотреть множество всех конгруэнций, для которых данный идеал (фильтр) является нижним (верхним) ядром. Общее положение здесь описывается следующими теоремами.

1. В решетке $\mathscr{L}$ существует взаимно однозначное соответствие между идеалами и отношениями конгруэнции тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}$ - дистрибутивная решетка с относительными дополнениями ([4], лемма 3).

2. Каждый идеал Δ определяет по правилам (I) и (II) соответственно наименьшее и наибольшее отношения конгруэнции $\underline{\mathfrak{C}}(\Delta)$ и $\bar{\mathfrak{C}}(\Delta)$ среди всех конгруэнций, для которых Δ является нижним ядром:

(I). $x \equiv y\ (\underline{\mathfrak{C}}(\Delta)) \Leftrightarrow (\exists t \in \Delta)[x \cup t = y \cup t]$.

(II). $x \equiv y\ (\bar{\mathfrak{C}}(\Delta)) \Leftrightarrow (\forall a \in \mathscr{L})[a \cap (x \cap y) \in \Delta \Rightarrow a \cap (x \cup y) \in \Delta]$

([3], теорема 1).

Аналогичные (дуальные) результаты имеют место и для фильтров. Очевидно, что $\mathcal{E}$ не удовлерворяет условиям первой теоремы. В качестве примера идеала и фильтра с различными $\underline{\mathfrak{C}}$ и $\bar{\mathfrak{C}}$ приводим идеал конечных множеств $\Delta\mathfrak{F}$ и фильтр коконечных множеств $\nabla\mathfrak{F}$. По правилам (I) и (II) получим

$$\underline{\mathfrak{C}}(\Delta\mathfrak{F}) = \underline{\mathfrak{C}}(\nabla\mathfrak{F}) = \mathfrak{F},$$

$$\bar{\mathfrak{C}}(\Delta\mathfrak{F}) = \mathscr{S},$$

$$\bar{\mathfrak{C}}(\nabla\mathfrak{F}) = \mathcal{M}.$$

Ввиду отсутствия в $\mathcal{E}$ интересных с точки зрения теории рекурсивных функций идеалов (см. п. 3) рассмотрим в дальнейшем конгруэнции с заданным верхним ядром.

2. <u>Достаточное условие минимальности конгруэнции</u>. Условие формулируем для класса решеток, введенного Лерманом в [7].

Пусть $\mathscr{L}$ - дистрибутивная решетка с нулем и единицей. Решетка $\mathscr{L}$ называется <u>сепаратной</u>, если для любых $a, b \in \mathscr{L}$ существуют элементы a_1 и b_1, такие, что $a_1 \cap b_1 = 0$ и $a_1 \cup b_1 = a \cup b$. Элемент a решетки $\mathscr{L}$ называется <u>рекурсивным</u>, если a имеет дополнение. Решетка $\mathscr{L}$ называется рекурсивно плотной, если для любого элемента $a > 0$ этой решетки существует рекурсивный элемент b, такой, что $0 < b \leqslant a$. Дистрибутивную решетку $\mathcal{L}$ с нулем и единицей называем решеткой типа $\mathcal{E}$, если $\mathcal{L}$ является сепаратной и рекурсивно плотной. Класс решеток типа $\mathcal{E}$ содержит многие связанные с $\mathcal{E}$ решетки (решетки $\mathcal{E}(\alpha)$ из теории α-рекурсивности, некоторые факторрешетки $\mathcal{E}$). С другой стороны, такие теоретико-решеточные [2] понятия теории рекурсивно перечислимых множеств как рекурсивность, простота, гипергиперпростота и др. имеют в решетках из этого класса обычные свойства.

Под отрезком $[a, b]$ в решетке понимаем множество $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Из результатов [5] (теоремы 2 и 3) следует, что конгруэнция $\mathcal{H}$ в решетке $\mathcal{E}$ может быть определена в теоретико-решеточных терминах, так как

$$A \equiv B\ (\mathcal{H}) \iff [\text{отрезок } [A \cap B, A \cup B] \text{ является булевой алгеброй}].$$

Следуя [7], принимаем эту равносильность как определение конгруэнции $\mathcal{H}$ в решетках типа $\mathcal{E}$. Имеем:

$$\nabla \mathcal{H} = \{x \mid [x, 1] - \text{булева алгебра}\}.$$

Теорема 1. Пусть $\mathcal{L}$ - решетка типа $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{C}$ - такая конгруэнция в $\mathcal{L}$, что

$$(\forall a, b \in \mathcal{L})[a \equiv b\ (\mathfrak{C}) \Rightarrow a \equiv b\ (\underline{\mathfrak{C}}(\nabla \mathcal{H}))].$$

Тогда $\mathfrak{C}$ - наименьшая конгруэнция с верхним ядром $\nabla \mathfrak{C}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых a, $b \in \mathcal{L}$ имеет место

$$a \equiv b\ (\mathfrak{C}) \Rightarrow a \equiv b\ (\underline{\mathfrak{C}}(\nabla \mathfrak{C})).$$

Допустим, что предположения теоремы выполнены и

$$a \equiv b\ (\mathfrak{C}) \tag{1}$$

Покажем, что существует $d \in \nabla \mathfrak{C}$, такой, что

$$a \cap d = b \cap d. \tag{2}$$

По предположению теоремы $a \equiv b(\underline{\mathfrak{C}}(\nabla \mathcal{H}))$, т.е. существует $\kappa \in \nabla \mathcal{H}$, для которого

$$\kappa \cap a = \kappa \cap b = \kappa \cap (a \cap b) = \kappa \cap (a \cup b). \tag{3}$$

Ясно, что $(a \cap b) \cup \kappa \in \nabla \mathcal{H}$, так как $(a \cap b) \cup \kappa \geqslant \kappa$. Сумма $(a \cup b) \cup \kappa$ является элементом булевой алгебры $[(a \cap b) \cup \kappa, 1]$, т.е. существует такой $d \in \mathcal{L}$, что

$$d \geqslant (a \cap b) \cup k, \tag{4}$$

$$d \cup (a \cup b \cup k) = 1, \tag{5}$$

$$d \cup (a \cup b \cup k) = (a \cap b) \cup k. \tag{6}$$

Покажем, что $d \in \nabla \mathfrak{C}$. По (5) и (4) имеем

$$1 = d \cup (a \cup b \cup k) = d \cup (a \cup b),$$

по (4): $d = d \cup (a \cap b)$.

Но $d \equiv d(\mathfrak{C})$ и из (1) следует $a \cup b \equiv a \cap b(\mathfrak{C})$.
Поэтому, $1 \equiv d(\mathfrak{C})$, т.е. $d \in \nabla \mathfrak{C}$.

Остается доказать, что имеет место (2). Преобразуем:

$$d \cap (a \cup b) = d \cap (a \cup b \cup k) \cap (a \cup b) = ((a \cap b) \cup k) \cap (a \cup b) =$$

$$= ((a \cap b) \cap (a \cup b)) \cup (k \cap (a \cup b)) = (a \cap b) \cup k \cap (a \cap b) =$$

$$= a \cap b = d \cap (a \cap b).$$

Здесь второе равенство следует из (6) и четвертое из (3). Элементы $d \cap a$ и $d \cap b$ заключаются по величине между крайними членами цепи равенств и следовательно равны между собой. Теорема доказана.

3. Сравнение $\mathfrak{C}$ и $\bar{\mathfrak{C}}$ для фильтра $\nabla \mathcal{S}$. Свойство подмножеств N называется рекурсивно инвариантным, если оно инвариантно относительно рекурсивных перестановок натурального ряда (т.е. общерекурсивных взаимно однозначных отображений N на N). Понятие рекурсивной инвариантности можно применить и к идеалам, фильтрам и конгруэнциям в $\mathcal{E}$, рассматривая их как классы подмножеств (пар подмножеств) N. Называем тривиальными конгруэнциями равенство и $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Аналогично [7], можно доказать:

1. Единственным нетривиальным рекурсивно инвариантным идеалом в $\mathcal{E}$ является идеал конечных множеств $\Delta \mathcal{F}$.

2. Максимальным нетривиальным рекурсивно инвариантным фильтром в $\mathcal{E}$ является фильтр простых и коконечных множеств $\nabla \mathcal{S}$.

3. Если $\mathfrak{C}$ - нетривиальная рекурсивно инвариантная конгруэнция в $\mathcal{E}$ и $A \equiv B(\mathfrak{C})$, то $|A - B|$ - иммунное множество. Следовательно, $\mathcal{S}$ является максимальной нетривиальной рекурсивно инвариантной конгруэнцией.

Все эти утверждения получаются легко из факта, что для любого бесконечного рекурсивного множества A с бесконечным дополнением существует такая рекурсивная перестановка p, что $p(A) = N \setminus A$.

Из максимальности $\mathcal{S}$ следует, что $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{E}}(\nabla \mathcal{S})$. Совпадают ли $\mathcal{S}$ и $\underline{\mathcal{E}}(\nabla \mathcal{S})$?

<u>Теорема 2.</u> Существуют рекурсивно перечислимые множества A и B, такие, что:

1) $A \subset B$,

2) для каждого простого множества S имеет место $(B \setminus A) \cap S \neq \emptyset$,

3) множество $B \setminus A$ иммунно.

<u>Доказательство</u>. Опишем процесс перечисления A и B при помощи маркерной техники Роджерса.

Имеется список всех натуральных чисел и счетные количества маркеров [A] и [B]. В ходе построения некоторым числам будут приписаны маркеры. Приписанный числу маркер [A] сохраняется до конца построения. Маркер [B] может в дальнейшем быть заменен на [A]. Определим:

$A = \{x \mid x$ получает маркер $[A]\}$,

$B = \{x \mid x$ получает какой-нибудь маркер$\}$.

Таким образом, $A \subseteq B$ и

$B \setminus A = \{x \mid x$ имеет к концу построения маркер $[B]\}$.

Для истинности утверждений 2) и 3) необходимо и достаточно, чтобы для всех $i \geqslant 0$ выполнялись условия

P_i : если W_i просто, то $(B \setminus A) \cap W_i \neq \emptyset$,

N_i : если W_i бесконечно, то $W_i \nsubseteq B \setminus A$.

Для удовлетворения условиям P_i будут числам присвоены маркеры [B], а для N_i – [A].

Пусть[1] $C_i = \{\langle i, n \rangle \mid n \in N\}$. Имеет место $N = \bigcup_i C_i$ и

---

[1] Через $\langle i, x \rangle$ обозначается код пары (i, x) – см. [1], стр. 90.

$C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$. В каждый момент процесса перечисления в каждом ножестве C_i будет находиться не более одного маркера [B]. В процессе построения перечисляются симультанно без повторений множества W_i ($i = 0, 1, \ldots$). На каждом шаге некоторое число x попадает в некоторое W_i. На некоторых шагах заключают, что некоторое условие N_i удовлетворено (раз и навсегда).

Шаг s. Пусть при перечислении получают "$x \in W_i$". Можно эффективно найти j, для которого $x \in C_j$.

Случай 1: $j < i$. Перейдут к $s+1$.

Случай 2: $j = i$, т.е. $x \in W_i \cap C_i$.

Подслучай а: x имеет уже маркер [A]. Перейдут к $s + 1$.

Подслучай в: некоторый элемент множества C_i имеет уже маркер [B]. Перейдут к $s + 1$.

Подслучай с: x не имеет маркера и ни одно число из C_i не имеет маркера [B]. Числу x припишут маркер [B]. Перейдут к $s + 1$.

Случай 3: $j > i$.

Подслучай а: уже заключено, что N_i удовлетворено. Перейдут к $s + 1$.

Подслучай в: еще не заключили, что N_i удовлетворено.

Подподслучай 1): x имеет маркер [A]. Заключают, что N_i удовлетворено. Перейдут к $s + 1$.

Подподслучай 2): x имеет маркер [B] или не имеет маркера. Числу x припишут [A] и заключают, что N_i удовлетворено. Перейдут к $s + 1$.

<u>Лемма 1</u>. В каждом множестве C_j ($j \geq 0$) не более чем j чисел получают маркер [A].

Маркер [A] может быть приписан к числам из C_j только в подподслучае 3в2) для удовлетворения условию N_i, где $i < j$. Для каждого такого N_i ставят не более одного маркера. Лемма доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пусть W_i - простое множество. Тогда

$$W_i \cap (B \setminus A) \neq \emptyset .$$

5

При предположении леммы множество $W_i \cap C_i$ бесконечно. Если бы оно было конечно, то множество $C_i \setminus (W_i \cap C_i)$ было бы бесконечное перечислимое подмножество дополнения W_i.

Следовательно, после каждой замены маркера [B] в C_i маркером [A] снова возникает подслучай 2c и ставится маркер [B]. В силу леммы 1 маркер [B] заменяют на [A] только конечное число раз и, наконец, около некоторого числа $x \in C_i \cap W_i$ остается [B]. Это число x и является элементом $W_i \cap (B \setminus A)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если W_i бесконечно, то $W_i \nsubseteq B \setminus A$.

Каждое множество C_j может содержать не более одного элемента из $B \setminus A$, так как по 2в в множестве C_j никогда не будет более одного маркера [B]. Отсюда, если бесконечное множество W_i является подмножеством $B \setminus A$, то W_i содержит элементы некоторых таких C_j, что $j > i$.

Рассмотрим шаг s, на котором впервые для данного i в процессе симультанного перечисления получают "$x \in W_i$" и x оказывается элементом C_j с $j > i$. Для данного i случай 3 возникает впервые и поэтому пока еще не может быть заключено, что N_i удовлетворено. Если x не получил маркер [A] раньше (для удовлетворения какому-нибудь другому условию N_k), то x получает [A] на шаге s. В обоих подподслучаях имеем $x \in A$, т.е.

$$x \in W_i \quad \text{и} \quad x \notin B \setminus A .$$

Лемма доказана.

Утверждения 2) и 3) теперь следуют из лемм 2 и 3. Утверждение 1) следует из 2), так как $A \subseteq B$. Теорема доказана.

Следствие. В решетке $\mathcal{E}$ конгруэнции $\mathcal{S}$ и $\underline{\mathfrak{c}}(\nabla\mathcal{S})$ не совпадают.

Для доказательства рассмотрим множества A и B из теоремы. В силу 1), $|A - B| = B \setminus A$. Из 2) и 3) получим соответственно

$$A \not\equiv B \ (\underline{\mathfrak{c}}(\nabla\mathcal{S})) \quad \text{и} \quad A \equiv B \ (\mathcal{S}) .$$

Литература

1. Биркгоф Г., Теория структур. Москва, 1952.
2. Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Москва, 1972.
3. Арешкин Г. Я., Об отношениях конгруэнций в дистрибутивных структурах с нулевым элементом. Докл. АН СССР, 1953, 90, № 4, 485-486.
4. Grätzer, G., Schmidt, E. T., Ideals and congruence relations in lattices. Acta Math. Acad.Sci. Hung., 1958, 9, 137-175.
5. Lachlan, A. H., On the lattice of recursively enumerable sets. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, 130, № 1, 1-37.
6. Lachlan, A. H., The elementary theory of recursively enumerable sets. Duke Math. J., 1968, 35. №1, 123-147.
7. Lerman, M., Congruence relations, filters, ideals, and definability in lattices of α-recursively enumerable sets. J. Symb. Log., 1976, 41, № 2, 405-418.

Поступило
1 IV 1977

KONGRUENTSIDEST REKURSIIVSELT GENEREERITAVATE HULKADE VÕRES

R.Prank

Resümee

Vaadeldakse kongruentside seost ideaalide ja filtritega. Antakse piisav tingimus selleks, et kongruents nulli ja ühikuga distributiivses separaatses rekursiivselt tihedas võres [7] oleks minimaalne sama ülemise tuumaga kongruentside hulgas. Näidatakse, et lihtsuskongruents $\mathcal{S}$ rekursiivselt genereeritavate hulkade võres $\mathcal{E}$ pole minimaalne.

ON CONGRUENCE RELATIONS IN THE LATTICE OF RECURSIVELY ENUMERABLE SETS

R.Prank

S u m m a r y

Let $\mathscr{L}$ be a distributive lattice with greatest element 1, C a congruence relation in $\mathscr{L}$, and $\nabla C = \{x \mid x \equiv 1 (C)\}$. The congruence relation C is minimal for filter ∇C [3] if

$$x \equiv y (C) \Leftrightarrow (\exists t \in \nabla C)[x \cap t = y \cap t].$$

The element κ of $\mathscr{L}$ is hyperhypersimple if the set of elements $\geqslant \kappa$ is a Boolean algebra.

<u>Theorem 1</u>. Let $\mathscr{L}$ be a distributive separated recursively dense lattice [7] and C a congruence relation in $\mathscr{L}$ such that

$$a \equiv b (C) \Rightarrow (\exists \kappa)[\kappa \text{ hyperhypersimple } \& \ a \cap \kappa = b \cap \kappa].$$

Then C is minimal for the filter ∇C.

<u>Theorem 2</u>. There exist recursively enumerable sets A and B such that

1) $A \subset B$,

2) if S is any simple set, then $(B - A) \cap S \neq \emptyset$,

3) $B - A$ is immune.

<u>Corollary</u>. The congruence relation $\mathscr{S}$ ('simple with') in lattice $\mathcal{E}$ of r. e. sets is not minimal for filter $\nabla \mathscr{S}$.

TRÜ Toimetised,
464 (1978), 37-46.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1978, 464, 37-46.

СЕМАНТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОСТОГО ТЕКСТА

М.Койт

Кафедра математической статистики и программирования

В статье [1] определяется утилитарная семантика $\mathfrak{M}^*$, как некоторое множество кортежей алфавита $\mathfrak{D}=\{A_1, A_2, \ldots, A_n, R_1, R_2, \ldots, R_m\}$, и приводится алгоритм $Z_o[\mathfrak{D}, \mathfrak{A}]$, который каждому элементу М утилитарной семантики (понятию) ставит в соответствие определенный кортеж $T = Z_o(M)$ алфавита $\mathfrak{A}$ (синтезирует текст Т понятия М).

В настоящей статье предлагается обратный, анализирующий алгоритм Z_a, перерабатывающий любой кортеж Т алфавита $\mathfrak{A}$ в соответствующее понятие М (смысл текста Т). Алгоритм составляется в предположении, что текст любого понятия $M_i \in \mathcal{G}^*$ представим в виде

$$T_{i_1} T_{i_2} T_{i_3} T_{i_4} T_{i_5} ;$$

где T_{i_2}, T_{i_4} - тексты компонент M_i^j и M_i^{3-j} понятия M_i ($j = 1$ или $j = 2$); T_{i_1}, T_{i_3}, T_{i_5} - некоторые кортежи алфавита $\mathfrak{A}$; $Z_o(M_i) \subseteq Z_o(M_k)$ ни для одной пары понятий $M_i, M_k \in \mathcal{G}^* (i \neq k)$.

Пусть задан текст $T = T_1 T_2 \ldots T_p$. Построим алгоритм Z_a в виде композиции нескольких алгоритмов.

1. Обозначение начала текста

Алгоритм

$$Z_1 = {>}\Lambda \Rightarrow \omega_1$$

заключительно преобразует кортеж Т в кортеж $Q_1 = \omega_1 T$.

2. Обозначение исходов анализа

Алгоритмом

$$
\begin{aligned}
Z_2 = & > \omega_1 T_{i_1} \dots T_{i_q} \to \omega_2 T_{i_1} \omega_1 T_{i_2} \dots T_{i_q} \\
& \qquad (T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_q} = Z_0(R_h A_j A_k) \\
& \qquad \text{для некоторого понятия } R_h A_j A_k \in \mathfrak{G}^*) \\
& > \omega_1 T_i \to T_i \omega_1 \\
& > \omega_1 \to \omega_5 \\
& > \omega_6 T_i'' \to T_i'' \omega_6 > \omega_6 \omega_7 \to \omega_7 \omega_8 > \omega_6 \to \omega_3 \\
& > T_i \omega_3 \to \omega_3 T_i' T_i'' > T_i'' \omega_3 \to \omega_3 T_i' T_i'' \\
& > \omega_2 \omega_3 \to \omega_3 \omega_7 > \omega_3 \to \omega_4 > \omega_4 T_i' \to T_i' \omega_4 \\
& > \omega_4 T_i'' \to T_i'' \omega_4 > \omega_4 \omega_7 \to \omega_5 > T_i'' T_j' \to T_j' T_i'' \\
& > \omega_7 T_j' \to T_j' \omega_7 > T_{i_k}' T_{i_k}'' \omega_4 \to A_k \\
& \qquad (Z_0(A_k) = T_{i_k};\ A_k \in \mathfrak{S}^*) \\
& > T_i' \omega_4 \to \omega_4 > T_i'' \omega_4 \to \omega_4 > \omega_4 \to \Lambda > T_i'' \omega_5 \to \omega_5 T_i''
\end{aligned}
$$

кортеж Q_1 перерабатывается в кортеж $Q_2 = P' P''$, где в кортеже P' алфавита $\mathfrak{A}' \cup \{\omega_5\}$ через букву ω_5 обозначено первое начало возможного анализа, а в кортеже P'' алфавита $\mathfrak{A}'' \cup \{\omega_7\}$ буквой ω_7 обозначены все остальные начала, причем проекция кортежа P на алфавит $\mathfrak{A}$ – кортеж T.

3. Первое сокращение

Алгоритм

$$
\begin{aligned}
Z_3 = & > \omega_8 T_{i_1}' \dots T_{i_q}' \to R_h A_j' A_k \omega_8 T_{i_r}'' \\
& \qquad (T_{i_1} \dots T_{i_q} = Z_0(R_h A_j A_k), \\
& \qquad R_h A_j A_k \in \mathfrak{G}^*,\ Z_0(A_j) = T_{i_r}) \\
& > T_i' R_h \to R_h T_i' > T_i' A_j' \to A_j' T_i' > T_i' A_k \to A_k T_i' \\
& > T_i' \omega_8 \to \omega_8 T_i' \qquad (R_h \in \mathfrak{R};\ A_j, A_k \in \mathfrak{S})
\end{aligned}
$$

перерабатывает кортеж Q_2 в кортеж

$$Q_3 = R_h A_j' A_k \omega_8 T_1' T_2' \dots T_{\ell_1}' T_{\ell_2}''' T_{\ell_3}' \dots T_p' P'',$$

где $T_{\ell_1+1} \dots T_{\ell_2} \dots T_{\ell_3-1} = Z_0(R_h A_j A_k)$, при $R_h A_j A_k \in \mathfrak{G}^*$, и $T_{\ell_2} = Z_0(A_j)$.

4. Повторное сокращение

В результате применения алгоритма

$$Z_4 = > \omega_8 T'_{i_1} \ldots T'''_{i_n} \ldots T'_{i_q} \to R^{\cdot}_k A^{\cdot}_\kappa \omega_9 T'''_{i_n}$$

$$(T_{i_1} \ldots T_{i_n} \ldots T_{i_q} = Z_o(R_k A_j A_\kappa),$$

$$R_k A_j A_\kappa \in g^*,\ Z_o(A_j) = T_{i_n})$$

$$> \omega_8 T'_{i_1} \ldots T'''_{i_n} \ldots T'_{i_q} \to R^{\cdot}_k A''_j \omega_9 T'''_{i_s}$$

$$(T_{i_1} \ldots T_{i_n} \ldots T_{i_q} = Z_o(R_k A_j A_\kappa),$$

$$R_k A_j A_\kappa \in g^*,\ Z_o(A_j) = T_{i_s}),$$

$$1 \le s \le q,\quad Z_o(A_\kappa) = T_{i_n})$$

$$> \omega_8 T'_i \to T'_i \omega_8 > \varepsilon_1 R^{\cdot}_k \to R_k \varepsilon_1$$

$$(\varepsilon_1 \in \{T'_i, R_\kappa, A^{\cdot}_j, A'_j\})$$

$$> T'_i A^{\cdot}_j \to A^{\cdot}_j T'_i > \varepsilon_2 A''_j \to A''_j \varepsilon_2$$

$$(\varepsilon_2 \in \{T'_i, R_k, A_\kappa\})$$

$$> A'_\kappa A''_j \to A''_j A_\kappa > R^{\cdot}_k \to R_k > A^{\cdot}_j \to A_j$$

$$> A''_j \to A_j$$

$$(R_k \in \mathfrak{R};\ A_j, A_\kappa \in \mathfrak{S})$$

$$> T'_i \omega_9 \to \omega_9 T'_i > \omega_9 \to \omega_8$$

к кортежу Q_3 получается кортеж

$$Q_4 = M_1 A^{\cdot}_j M_2 T'_1 \ldots T'_q \omega_8 T'''_n T'_s \ldots T'_p R^{\cdot},$$

причем $M = M_1 A_j A_2 \in \mathfrak{M}^*$ (доказательство аналогично доказательству теоремы 3 в статье [1]), $Z_o(M) = T_{q+1} \ldots T_n \ldots T_{s-1}$; $T_n = Z_o(A_j)$.

5. Проверка на продолжение

Алгоритм

$$Z_5 = > \omega_8 T'''_i \to T'''_i \omega_9 > \omega_9 T'_i \to \omega_{10} T'_i$$

$$> T'_i T''_j \omega_9 \to \omega_{10} > \omega_6 T''_i \to \omega_{11} \omega_6 T''_i$$

$$> \omega_9 \omega_7 \to \omega_{11} \omega_6 \omega_7$$

перерабатывает кортеж Q_4 в некоторый кортеж Q_5:

если $T_1' \ldots T_q' = T_s' \ldots T_p' = P'' = \Lambda$, то

$Q_5 = Q_{51} = M_1 A_j' M_2 T_h''' \omega_9'$;

если $T_1' \ldots T_q' \neq \Lambda$, $T_s' \ldots T_p' = P'' = \Lambda$, то

$Q_5 = Q_{52} = M_1 A_j' M_2 T_1' \ldots T_{q-1}' \omega_{10}$;

при $T_1' \ldots T_q' = T_s' \ldots T_p' = \Lambda$, $P'' \neq \Lambda$ имеем

$Q_5 = Q_{53} = M_1 A_j' M_2 T_h''' \omega_{11} \omega_6 P''$;

если $T_1' \ldots T_q' \neq \Lambda$, $T_s' \ldots T_p' = \Lambda$, $P'' \neq \Lambda$, то

$Q_5 = Q_{54} = M_1 A_j' M_2 T_1' \ldots T_{q-1}' \omega_{10} P''$;

при $T_s' \ldots T_p' \neq \Lambda$ получаем кортеж

$Q_5 = Q_{55} = M_1 A_j' M_2 T_1' \ldots T_q' T_h''' \omega_{10} T_s' \ldots T_p' P''$.

6. Первое сокращение справа

Алгоритм

$$Z_6 = > \omega_{10} T_{i_1}' \ldots T_{i_q}' \to R_h^- A_j'^- A_k^- \omega_{12} T_{i_h}^{\cdot}$$
$$(T_{i_1} \ldots T_{i_q} = Z_0(R_h A_j A_k);\ R_h A_j A_k \in \mathcal{G}^*,\ Z_0(A_j) = T_{i_h})$$
$$> T_i' \varepsilon_3 \to \varepsilon_3 T_i' > \omega_{10} T_i' \to T_i' \omega_{10}$$
$$(\varepsilon_3 \in \{R_h^-, A_j'^-, A_j^-\})$$

работает следующим образом:

$Z_6(Q_{5i}) = Q_{6i}$ при $i = 1,2,3,4$;

$Z_6(Q_{55}) = Q_{65} = M_1 A_j' M_2 R_h^- A_l'^- A_k^- T_1' \ldots T_q' T_h''' T_s' \ldots$
$\ldots T_v' \omega_{12} T_t^{\cdot} T_u' \ldots T_p' P''$,

где $T_{v+1} \ldots T_t \ldots T_{u-1} = Z_0(R_h A_l A_k)$, $R_h A_l A_k \in \mathcal{G}^*$,
$Z_0(A_l) = T_t$.

7. Повторное сокращение справа

Пусть задан алгоритм

$$Z_7 = > \omega_{12} T_{i_1}' \ldots T_{i_h}^{\cdot} \ldots T_{i_q}' \to R_h^{\cdot} A_j^{\cdot} \omega_{13} T_{i_h}^{\cdot}$$
$$(T_{i_1} \ldots T_{i_h} \ldots T_{i_q} = Z_0(R_h A_j A_k),$$
$$R_h A_j A_k \in \mathcal{G}^*,\ Z_0(A_j) = T_{i_h})$$
$$> \omega_{12} T_{i_1}' \ldots T_{i_h}^{\cdot} \ldots T_{i_q}' \to R_h^{\cdot} A_j'' \omega_{13} T_{i_s}^{\cdot}$$
$$(T_{i_1} \ldots T_{i_h} \ldots T_{i_q} = Z_0(R_h A_j A_k),$$

$$R_h A_j A_\kappa \in \mathscr{G}^*, \ Z_o(A_j) = T_{i_s}, \ Z_o(A_\kappa) = T_{i_\kappa})$$

$$> \omega_{12} T_i' \to T_i' \omega_{12} > \varepsilon_4 R_h^{\cdot} \to R_h^{\cdot} \varepsilon_4$$

$$(\varepsilon_4 \in \{T_i', R_h^-, A_j^-, A_j^{'-}\})$$

$$> T_i' A_\kappa^{\cdot} \to A_\kappa^{\cdot} T_i' > \varepsilon_5 A_j'' \to A_j'' \varepsilon_5$$

$$(\varepsilon_5 \in \{T_i', R_h^-, A_\kappa^-\})$$

$$> A_\kappa^{'-} A_j'' \to A_j'' A_\kappa^- > R_h^{\cdot} \to R_h^- > A_j^{\cdot} \to A_j^-$$

$$> A_j^{*} \to A_j^{'-} > T_i' \omega_{13} \to \omega_{13} T_i' > \omega_{13} \to \omega_{12}.$$

В результате применения алгоритма Z_7 к кортежу Q_6 получается кортеж Q_7, причем $Q_7 = Q_{7i} = Q_{6i}$, если $i = 1, 2, 3, 4$;

$$Q_7 = Q_{75} =$$

$$= M_1 A_j' M_2 T_1' \ldots T_q' T_\kappa''' N_1^- A_\ell^{'-} N_2^- T_1' \ldots T_\omega' \omega_{12} T_x^{\cdot} T_y' \ldots T_p' P'',$$

если $Q_6 = Q_{65}$. Здесь $N_1 A_\ell N_2 \in \mathfrak{M}^*$,

$$Z_o(N_1 A_\ell N_2) = T_{\omega+1} \ldots T_x \ldots T_{y-1}, \ Z_o(A_\ell) = T_x.$$

8. Соединяющее сокращение

Пусть задан алгоритм

$$Z_8 = \ > \varepsilon_6 \varepsilon_7 \to \varepsilon_7 \varepsilon_6$$

$$(\varepsilon_6 \in \{T_i', T_i'''\}; \ \varepsilon_7 \in \{R_h^-, A_j^-, A_j^{'-}\})$$

$$> \omega_{12} T_{i_1}' \ldots T_{i_\kappa}''' \ldots T_{i_s}' \ldots T_{i_t}^{\cdot} \ldots T_{i_q}' \to R_h^{\cdot} \omega_{14} \omega_8 T_{i_\kappa}'''$$

$$(T_{i_1} \ldots T_{i_\kappa} \ldots T_{i_s} \ldots T_{i_t} \ldots T_{i_q} = Z_o(R_h A_j A_\kappa),$$

$$R_h A_j A_\kappa \in \mathscr{G}^*;$$

$$Z_o(A_j) = T_{i_\kappa}, \ Z_o(A_\kappa) = T_{i_t}) \qquad (1)$$

$$> \omega_{12} T_{i_1}' \ldots T_{i_\kappa}''' \ldots T_{i_s}' \ldots T_{i_t}^{\cdot} \ldots T_{i_q}' \to R_h^{\cdot} \omega_{15} \omega_8 T_{i_t}^{'''}$$

$$(T_{i_1} \ldots T_{i_\kappa} \ldots T_{i_s} \ldots T_{i_t} \ldots T_{i_q} = Z_o(R_h A_j A_\kappa),$$

$$R_h A_j A_\kappa \in \mathscr{G}^*, \quad Z_o(A_j) = T_{i_t},$$

$$Z_o(A_\kappa) = T_{i_\kappa}) \qquad (2)$$

6

$> T_i''' \omega_{12} \to \omega_{12} T_i'' > T_i' \omega_{12} \to \omega_{12} T_i'$

$> \varepsilon_8 R_k^{\cdot} \omega_{14} \to R_k^{\cdot} \omega_{14} \varepsilon_8$

$(\varepsilon_8 \in \{T_i', R_k, A_j, A_j'\})$

$> R_i^{-} R_k^{\cdot} \omega_{14} \to R_k^{\cdot} \omega_{14} R_i > A_j^{-} R_k^{\cdot} \omega_{14} \to R_k^{\cdot} \omega_{14} A_j$

$> A_j'^{-} R_k^{\cdot} \omega_{14} \to R_k^{\cdot} \omega_{14} A_j > R_k^{\cdot} \omega_{14} \to R_k$

$> \varepsilon_9 \varepsilon_{10} \to \varepsilon_{10} \varepsilon_9$

$(\varepsilon_9 \in \{R_i, A_j, A_j'\},$

$\varepsilon_{10} \in \{R_k^{-}, A_k^{-}, A_k'^{-}\})$

$> \varepsilon_{11} R_k^{\cdot} \omega_{15} \to R_k^{\cdot} \omega_{15} \varepsilon_{11}$

$(\varepsilon_{11} \in \{T_i', R_k, A_j\})$

$> R_i^{-} R_k^{\cdot} \omega_{15} \to R_k^{\cdot} \omega_{15} R_i > A_j^{-} R_k^{\cdot} \omega_{15} \to R_k^{\cdot} \omega_{15} A_j$

$> A_j'^{-} R_k^{\cdot} \omega_{15} \to R_k^{\cdot} \omega_{15} A_j' > A_j' R_k^{\cdot} \omega_{15} \to R_k^{\cdot} \omega_{15} A_j'$

$> R_k^{\cdot} \omega_{15} \to R_k$.

Алгоритм Z_8 перерабатывает кортеж Q_7 в определенный кортеж Q_8 . Если $Q_7 = Q_{7i}$, то $Q_8 = Q_{8i} = Q_{7i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Если $Q_7 = Q_{75}$ и левая часть некоторой из формул (1) или (2) входит в кортеж Q_{75} , то

$$Q_8 = Q_{85} = K_1 A_e' K_2 T_1' \ldots T_{q_1}' \omega_8 T_{\kappa_1}''' T_{\lambda_1}' \ldots T_p' P'',$$

где $K_1 A_e K_2 \in \mathfrak{M}^*$, $T_{q_1+1} \ldots T_{\lambda_1-1} = Z_0(K_1 A_e K_2)$, $Z_0(A_e) = T_{\kappa_1}$.

Если $Q_7 = Q_{75}$, но левая часть ни одной из формул (1),(2) не входит в кортеж Q_{75} , то

$$Q_8 = Q_{86} = N_i^{\cdot} A_l'^{-} N_2^{-} M_1 A_j' M_2 \omega_{12} T_1' \ldots$$

$$\ldots T_q' T_\kappa''' T_\lambda' \ldots T_w' T_x^{\cdot} T_y' \ldots T_p' P'' .$$

9. Выход из тупика

Алгоритмом

$Z_9 = \; > \varepsilon_{12} \omega_{10} \to \omega_{10}$

$(\varepsilon_{12} \in \{T_i', T_i''', R_k, A_j, A_j'\})$

$> \omega_{10} T_i' \to \omega_{10}$

$> \varepsilon_{13}\, \omega_{12} \to \omega_{12}$

$$(\varepsilon_{13} \in \{R_i, A_j, A_j', R_i^-, A_j^-, A_j'^-\})$$

$> \omega_{12}\, \varepsilon_{14} \to \omega_{12}$

$$(\varepsilon_{14} \in \{T_i', T_i''', T_i^{\cdot}\})$$

$> \omega_{10} \to \Lambda > \omega_{12} \to \Lambda > T_i'''\omega_9 \to \Lambda > T_i'''\omega_{11} \to \omega_{11}$

кортеж Q_8 перерабатывается в кортеж Q_9.

Если $Q_8 = Q_{81}$, то

$Q_9 = Q_{91} = M_1 A_j' M_2$,

где $M_1\ A_j\ M_2 \in \mathfrak{M}^*$, $Z_0(M_1\ A_j\ M_2) = T$.

Если $Q_8 = Q_{82}$, то $Q_9 = Q_{92} = \Lambda$.

При $Q_8 = Q_{83}$ получаем кортеж

$Q_9 = Q_{93} = M_1 A_j' M_2\, \omega_{11}\, \omega_6\, P''$.

При $Q_8 = Q_{84}$ имеем $Q_9 = Q_{94} = P''$,

при $Q_8 = Q_{85}$ получаем $Q_9 = Q_{95} = Q_{85}$.

Если $Q_8 = Q_{86}$, то $Q_9 = Q_{96} = P''$.

Пусть Z_{10} - повторение композиции

$Z_{11} = Z_4 > Z_5 > \ldots > Z_9$,

управляемое алгоритмом

$Z_{12} = > \varepsilon_{15} \to \Lambda$

$$(\varepsilon_{15} \in \{R_k^-, A_j^-, A_j'^-, R_k, A_j, A_j', T_i', T_i''', T_i^{\cdot}, T_i'', \omega_k \mid k = 3, 7, 9, 10, 11, 12\}).$$

Композицию Z_{11} повторно применяют к обрабатываемому кортежу тогда и только тогда, когда $Q_8 = Q_{85}$, поскольку алгоритм Z_{12} аннулирует все буквы, кроме ω_8 .

Пусть Z_{13} - повторение алгоритма

$Z_{14} = Z_2 > Z_3 > Z_{10}$,

управляемое алгоритмом

$Z_{15} = > \varepsilon_{16} \to \Lambda$

$$(\varepsilon_{16} \in \{T_i', T_i''', R_k, R_k^-, A_j, A_j', A_j^-, A_j'^-, \omega_k \mid k = 9, 10, 11\}).$$

Алгоритм Z_{14} управляет переходом к новому началу анализа.

10. Окончающий алгоритм

$$Z_{16} = > A'_j \rightarrow A_j \qquad (A_j \in \mathfrak{S})$$

заменяет букву A'_j алфавита $\mathfrak{S}'$ соответствующей буквой $A_j \in \in \mathfrak{S}$.

Образуем алгоритм

$$Z_a = Z_1 > Z_{13} > Z_{16} .$$

Алгоритм Z_a работает следующим образом.

Применением алгоритма Z_1 слева к кортежу Т прибавляется буква ω_1 . Затем применяют алгоритм Z_{13} . Процесс начинается с применения алгоритма Z_2 . Обозначаются все подкортежи (являющиеся текстами некоторых понятий $M \in \mathcal{G}^*$), с которых может начинаться анализ. Если таких начал нет, то имеется две возможности. При Т = $Z_0(A_i)$ получается простое понятие A_i . В противном случае кортеж Т аннулируется. Если число возможных начал отлично от нуля, то полученный кортеж анализируется, начиная с первого (слева) отмеченного подкортежа, который сокращается до текста T_i первой компоненты M_i^1 соответствующего понятия $M_i \in \mathcal{G}^*$. Вместе с тем начинается образование понятия (алгоритм Z_3). Затем применяется алгоритм Z_{10} , являющийся повторением композиции Z_{11} , которое управляется алгоритмом Z_{13} . В полученном кортеже сокращаются тексты понятий $M_j \in \mathcal{G}^*$, содержащие в качестве подтекста выделенный текст T_i . Одновременно вводятся дополнения в образуемое понятие (алгоритм Z_4). Если сокращение оказывается невозможным, то имеется две возможности (алгоритм Z_5): либо заданный текст уже сокращен до текста некоторого простого понятия и образовано некоторое понятие N , либо (если текст не исчерпан) следует анализировать подтекст, находящийся справа от отмеченного текста T_i . Подкортеж сокращается до текста T_k некоторого простого понятия и образуется соответствующее понятие Р (алгоритмы Z_6 и Z_7). Алгоритм Z_8 сокращает оставшийся текст, содержащий отмеченные подтексты T_i и T_k и образует понятие, компонентами которого являются понятия N и Р. Алгоритм Z_9 аннулирует сокращаемый кортеж и образуемое понятие в тех случаях, если невозможен дальнейший анализ (либо отмеченный текст T_i оказывается концом сокращаемого кортежа, либо справа от текста T_i невозможно сокращение, либо подкортеж, содержащий отмеченные тексты T_i и T_k, не является текстом понятия). Если оставшийся кортеж (текст) не пуст (это проверяется алгоритмом Z_{12}), то повторяется алгоритм Z_{11}. В противном случае уже совершен анализ текста некоторым способом и либо получено понятие, являющееся смыслом заданного текста, либо пустой кортеж, если анализ с выбранного начала пошел в тупик. Теперь проверяется (алгоритм Z_{15}), попробованы ли все возможные исходы анализа. В утвердительном случае применяется оканчивающий алгоритм Z_{16}. В отрицательном случае повторяется алгоритм Z_{13}.

Таким образом, результатом применения алгоритма Z_a к кортежу T является либо пустой кортеж, если T не является текстом понятия, либо кортеж

$$P_1 \omega_{11} P_2 \omega_{11} \cdots P_q ,$$

где $P_i = Z_c(T)$ - возможные смыслы текста T; $i = 1, 2, \ldots$, $q \geqslant 1$.

Наконец отметим, что анализ и синтез текста имеют существенное значение в разных задачах, связанных с автоматической обработкой информации, как, например, автоматический поиск информации, перевод с одного алгоритмического языка на другой, автоматическое составление рефератов, изучение процессов ситуационного управления большими системами или группового принятия решений и т.д.

Литература

1. К о й т М., Некоторые свойства элементарно-утилитарного языка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 263-294.

Поступило
1 IV 1977

LIHTSA TEKSTI SEMANTILINE ANALÜÜS

M.Koit

R e s ü m e e

Artiklis konstrueeritakse algoritm Z_a - Markovi normaalalgoritmide kompositsioon -, mis leiab antud tingimusi rahuldava teksti kõik tähendused ja osutub seega töös [1] esitatud sünteesialgoritmi pöördalgoritmiks.

SEMANTISCHE ANALYSE EINES EINFACHEN TEXTS

M.Koit

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dem Artikel konstruiert man ein Markow'scher Algorithmus Z_{a_1} der alle Bedeutungen eines gegebene Bedingungen befriedigenden Texts findet und damit ein Umkehralgorithmus für den synthesierenden Algorithmus [1] ist.

TRÜ Toimetised,
464 (1978), 47-58.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1978, 464, 47-58.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

Введение

Хорошо известно, какую роль в дифференциальной геометрии играет теорема де Рама, сводящая изучение односвязных римановых многообразий к изучению только голономно неприводимых многообразий. В дальнейшем Ву [12] нашел локальный аналог разложения де Рама для односвязных псевдоримановых многообразий, а Номидзу [6] и Костант ([8] уточнили нюансы этого разложения на случай, когда исходное многообразие наделено структурой редуктивного однородного пространства.

Учитывая обнаруженную Сэйглом [10] связь между голономной неприводимостью редуктивного однородного пространства и строением некоторой неассоциативной алгебры, естественно возникающей на всяком таком пространстве, в данной работе найден аналог разложения де Рама касательного пространства $T_o(M)$ для целого класса естественно-редуктивных псевдоримановых пространств M, определяемого как класс редуктивных "максимально не симметрических" однородных пространств.

1. Предварительные сведения

Пусть G является связной группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и H – некоторая замкнутая подгруппа группы G с подалгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется редуктивной парой, если в $\mathfrak{g}$ существует такое подпространство $\mathfrak{m}$, называемое редуктивным дополнением или оснащением, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ (прямая сумма) и $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Соответствующее однородное пространство G/H называется (локально) редуктивным [3, 9]. В случае $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}$ редуктивная пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется симметрической и G/H (локально) симметрическим однородным пространством.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ - редуктивная пара с фиксированным разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$. Условимся проекцию вектора или подпространства из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$ (соответственно $\mathfrak{m}$) обозначать индексом $\mathfrak{h}$ (соответственно $\mathfrak{m}$); например, для $\mathfrak{X} \in \mathfrak{g}$ имеем $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{X}_{\mathfrak{m}}$. Следуя [10], редуктивное дополнение $\mathfrak{m}$ наделяется структурой неассоциативной антикоммутативной алгебры с умножением

$$\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y} = [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]_{\mathfrak{m}} \text{ для любых } \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{m}.$$

Эта алгебра связана с канонической связностью без кручения ∇ на G/H:

$$(\nabla_{\mathfrak{X}^*} \mathfrak{Y}^*)_o = \frac{1}{2} \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y} .$$

Очевидно, что редуктивная пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ является симметрической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = 0$. Нас будут интересовать случаи, когда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ не является симметрической парой.

Для фиксированного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dot{+} \mathfrak{m}$ из тождеств алгебры Ли следуют равенства

(1) $\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y} = - \mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{X}$;

(2) $[\mathfrak{X}, [\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}]_{\mathfrak{h}}] + [\mathfrak{Y}, [\mathfrak{Z}, \mathfrak{X}]_{\mathfrak{h}}] + [\mathfrak{Z}, [\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]_{\mathfrak{h}}] =$
$= (\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}) \cdot \mathfrak{Z} + (\mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{Z}) \cdot \mathfrak{X} + (\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{X}) \cdot \mathfrak{Y}$;

(3) $[\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}]_{\mathfrak{h}} + [\mathfrak{Y} \cdot \mathfrak{Z}, \mathfrak{X}]_{\mathfrak{h}} + [\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]_{\mathfrak{h}} = 0$;

(4) $[[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}]_{\mathfrak{h}}, \mathfrak{U}] = [[\mathfrak{X}, \mathfrak{U}], \mathfrak{Y}]_{\mathfrak{h}} + [\mathfrak{X}, [\mathfrak{Y}, \mathfrak{U}]]_{\mathfrak{h}}$;

(5) $[\mathfrak{U}, \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{Y}] = [\mathfrak{U}, \mathfrak{X}] \cdot \mathfrak{Y} + \mathfrak{X} \cdot [\mathfrak{U}, \mathfrak{Y}]$,

где $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{U} \in \mathfrak{h}$. Из равенства (5), в частности, следует, что отображение
$\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{U} : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{X} \mapsto [\mathfrak{X}, \mathfrak{U}]$ для $\mathfrak{X} \in \mathfrak{m}$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{h}$,
является дифференцированием алгебры $\mathfrak{m}$; обозначим $\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{U} = \mathfrak{D}(\mathfrak{U})$.

Алгебра m называется простой, если $m^2 \neq 0$ и m не содержит собственных идеалов, Оказывается, что голономно неприводимые редуктивные пространства G/H можно характеризовать в терминах алгебры m. Например, если G/H – односвязное псевдориманово пространство, то оно является голомно неприводимым относительно канонической связности без кручения тогда и только тогда, когда алгебра m проста [10].

Пусть g – полупростая алгебра Ли и h – ее подалгебра. Пара (g,h) называется парой Киллинга, если в g существует такое подпространство m, что $g = h \dotplus m$ и $B(h,m) = 0$, где B – форма Киллинга алгебры g. В этом случае дополнительное подпространство m определено однозначно и $m = h^{\perp} = \{X \in g \mid B(X,h) = 0\}$. Однородные пространства, локально определяемые парами Киллинга, являются частным случаем аффинно-однородных пространств П.К.Рашевского [3] и естественно-редуктивны в смысле Кобаяси и Номидзу [6].

Невырожденность и инвариантность формы Киллинга B на алгебре Ли g [2] влечет невырожденность и инвариантность ее ограничения на алгебре m [4], т.е. для любых $X,Y,Z \in m$ имеет место

$$B(X \cdot Y, Z) = B(X, Y \cdot Z).$$

Подробнее с некоторыми результатами о парах Киллинга можно ознакомиться в работе [4].

2. Пары Киллинга с идеально ненулевым умножением в m.

Пара Киллинга (g,h) называется парой Киллинга с идеально ненулевым умножением в m, если алгебра m не содержит идеалов n, удовлетворяющих условию $n^2 = 0$.

Следующие предложения указывают на существование указанных пар Киллинга.

<u>Предложение 1</u>. Любая несимметрическая пара Киллинга (g,h) с компактной g является парой Киллинга с идеально ненулевым умножением в m.

7

Доказательство. Пусть существует такой собственный идеал n в m, что $n^2=0$. Тогда

$$0=B(n^2,m)=B(n\cdot n,m)=B(n,n\cdot m)\subset B(n,n),$$

что противоречит отрицательной определенности формы Киллинга компактной алгебры g ([2]).

Введем отображение

$$L(X): m\to m,\ Y\mapsto X\cdot Y;\quad X,Y\in m.$$

На алгебре m, равно как и на произвольной конечномерной алгебре, можно определить форму Киллинга $\widetilde{B}(X,Y)$, полагая

$$\widetilde{B}(X,Y)=\mathrm{tr}(L(X)\cdot L(Y)).$$

Предложение 2. Пусть (g,h) - пара Киллинга. Если ограничение формы Киллинга B алгебры g на m совпадает с формой Киллинга самой алгебры m, то пара (g,h) есть пара Киллинга с идеально ненулевым умножением в m.

Доказательство. Пусть (g,h) - произвольная редуктивная пара с разложением $g=h+m$ и n - идеал в m, удовлетворяющий условию $n^2=0$. Выберем базис в n и дополним его до базиса в m. Тогда для $X\in n$, $Y\in m$ преобразования $L(X)$ и $L(Y)$ будут иметь вид

$$\begin{pmatrix}0&0\\ *&0\end{pmatrix}\ \text{и}\ \begin{pmatrix}*&0\\ *&*\end{pmatrix},$$

соответственно. Следовательно, $\mathrm{tr}(L(X)L(Y))=0$, и потому $\widetilde{B}(n,m)=0$, где $\widetilde{B}$ - форма Киллинга алгебры m. Отсюда следует, что в случае невырожденности формы $\widetilde{B}$, алгебра m не содержит идеалов n, удовлетворяющих условию $n^2=0$. Теперь наше утверждение следует из невырожденности ограничения формы Киллинга B алгебры g на m.

В общем случае имеет место формула $B(X,Y)=\mathrm{tr}(\mathrm{ad}_g X\cdot \mathrm{ad}_g Y)=\mathrm{tr}(L(X)L(Y))+2\,\mathrm{tr}\,\sigma(X,Y)=\widetilde{B}(X,Y)+2\,\mathrm{tr}\,\sigma(X,Y)$,

где

$$\sigma(X,Y): m\to m,\ Z\mapsto [X,[Y\,Z]_h]\ \text{для}\ X,Y,Z\in m\ ([11]).$$

Следовательно, ограничение формы Киллинга B алгебры g на m совпадает с формой Киллинга $\tilde{B}$ алгебры m тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} \delta(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = 0$.

3. Разложение алгебры m .

Теорема 1. Пусть (g, h) - пара Киллинга с идеально ненулевым умножением в m и алгебра m не проста. Тогда m является прямой суммой $hol\,(B)$ - инвариантных простых идеалов

$$m = m_0 \oplus m_1 \oplus \ldots \oplus m_n, \tag{1}$$

причем это разложение ортогонально относительно формы Киллинга алгебры g и

(a) $[h, m_i] \subset m_i$;

(b) $[m_i, m_i] \subset h + m_i \quad (m_i \cdot m_i \subset m_i)$;

(c) $[m_i, m_j] = 0$ для $i \neq j$; $i, j = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. В силу непростоты алгебра m содержит собственный идеал. Тогда, согласно лемме 5 из [10], множество собственных $\mathfrak{D}(h)$ -инвариантных идеалов алгебры m не пусто. Пусть идеал m_0 минимален в этом множестве, т.е. $m_0 \neq 0$ и не существует идеалов, строго промежуточных между 0 и m_0. Пусть, далее, m_0' обозначает ортогональное дополнение к m_0 относительно B , т.е. $m_0' = \{\mathfrak{X} \in m \mid B(\mathfrak{X}, m_0) = 0\}$. В силу равенств

$$B([m_0', h], m_0) = B(m_0', [h, m_0]) = 0,$$
$$B(m_0' \cdot m, m_0) = B(m_0', m \cdot m_0) = 0,$$

оно также является $\mathfrak{D}(h)$ - инвариантным идеалом в m . Покажем, что $m_0 \cap m_0' = 0$. Если это не так, то минимальность m_0 влечет за собой включение $m_0 \subset m_0'$. Это означает, что $B(m_0, m_0) = 0$,откуда $B(m_0^2, m) = B(m_0, m_0 \cdot m) = 0$. Следовательно, $m_0^2 = 0$, вопреки условию.

Итак, мы установили, что $m_0 \cap m_0' = 0$,т.е. ограничение формы B на m_0 невырождено,[1] и потому m является

---

[1] Подпространство m_0 является B-подпространством в смысле [7].

прямой суммой подпространств m_0 и m_0'. Равенство $B(m_0,m_0')=0$ влечет $0=B(m_0,m_0'\cdot m)=B(m_0\cdot m_0',m)$. Но $B(m_0\cdot m_0',h)=0$, потому $B(m_0\cdot m_0',g)=0$ и $m_0\cdot m_0'=0$. Следовательно, $[m_0,m_0']\subset h$ и $B([m_0,m_0'],m)=0$. Далее, $B([m_0,m_0'],h)=B(m_0,[m_0',h])\subset$ $\subset B(m_0,m_0')=0$. В итоге $B([m_0,m_0'],g)=0$ и $[m_0,m_0']=0$.

Из включений

$$[h,h]\subset h,\ [h,m_0]\subset m_0,\ [m_0,m_0]=[m_0,m_0]_h+m_0\cdot m_0\subset h+m_0$$

вытекает, что $h_0=h+m_0$ является подалгеброй Ли в g. Так как $B(h_0,m_0')=0$, то (g,h_0) – пара Киллинга. Она является парой Киллинга с идеально ненулевым умножением в m_0'. Действительно, если n–такой идеал в m_0', что $n^2=0$, то n является идеалом и в m, так как $n\cdot m=n\cdot(m_0+m_0')=n\cdot m_0'\subset n$ (ведь $n\cdot m_0=0$), что противоречит условию. Теперь, если m_0' проста, дальнейшее разложение невозможно. Если же m_0' непроста, то условия теоремы наследуются парой (g,h_0), и процесс продолжается до тех пор, пока m не разложится в прямую сумму простых идеалов, взаимно ортогональных относительно формы B. Так как алгебра голономии $hol(B)$ связности, определяемой формой $B(X,Y)$, порождена всеми отображениями $L(X)$ [11], то все m_i являются $hol(B)$ – инвариантными. Заключения (a) – (c) следует непосредственно из доказательства.

Покажем, что полученное разложение (1) алгебры m является аналогом разложения де Рама касательного пространства $T_o(M)=m$. С этой целью уточним формулировку теоремы де Рама на случай риманова однородного пространства.

Теорема (де Рам [6]). Пусть $M=G/H$ – односвязное риманово естественно редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением $g=h+m$ и Φ – группа голономии римановой связности. Тогда

1) имеет место разложение

$$m=\bar{m}_0\oplus\bar{m}_1\oplus\ldots\oplus\bar{m}_p \tag{2}$$

в прямую сумму взаимно ортогональных Φ-инвариантных подпространств, единственное с точностью до порядка; Φ действует тривиально на $\bar{m}_0$ и неприводимо на $\bar{m}_j\ (1\leq j\leq p)$.

2) имеет место соответствующее разложение $M = M_0 \times M_1 \times \ldots \times M_p$ в прямое произведение римановых пространств таких, что $\bar{m}_j$ является касательным пространством для M_j ($0 \le j \le p$).

Заметим, что в разложении (2) каждое $\bar{m}_j$ ($j = 0, 1, \ldots, p$) является идеалом в m, так как $[\bar{m}_j, \bar{m}_j] \subset h + \bar{m}_j$, $\bar{m}_i \cdot \bar{m}_j = 0$ $(i \neq j)$ (см. [6], стр. 213). Далее, всякий коммутативный идеал $\bar{m}_k$ алгебры m является центральным (действительно, $\bar{m}_k \cdot m = \bar{m}_k \cdot \bar{m}_k = 0$), и потому алгебра m раскладывается в прямую сумму своего центра s и подалгебры k, не содержащей коммутативных идеалов, подобно тому, как любая редуктивная алгебра Ли разложима в прямую сумму своего центра и полупростой подалгебры. В разложении $m = \bigoplus_{j=0}^{p} \bar{m}_j$ можно изменить порядок таким образом, чтобы $s = \bar{m}_0 \oplus \ldots \oplus \bar{m}_s$ и $k = \bar{m}_{s+1} \oplus \ldots \oplus \bar{m}_p$ давали, соответственно, центр и "полупростую" подалгебру алгебры m. Тогда справедлива

Теорема 2. Пусть $M = G/H$ - односвязное риманово редуктивное однородное пространство с фиксированным разложением $g = h + m$. Тогда $m = s \oplus k$, где s и k - идеалы в m, причем $s \cdot m = 0$. Имеет место соответствующее разложение

$$G/H = G_1/H \times G_2/H,$$

где G_1/H - симметрическое пространство с касательным пространством s, а G_2/H - несимметрическое пространство с идеально ненулевым умножением в касательном пространстве k..

Из данной теоремы следует, что односвязные римановы однородные пространства G/H, определяемые парами Киллинга (g, h) с идеально ненулевым умножением в m, образуют естественный класс редуктивных "максимально не симметрических" пространств.

Теорема 3. Пусть $M = G/H$ - односвязное однородное пространство, определяемое парой Киллинга (g, h) с идеально ненулевым умножением в m. Тогда в случае положительной определенности формы B на m (т.е. в случае риманова пространства G/H) разложение (1) алгебры m является разложением де Рама касательного пространства $T_0(M) = m$.

Доказательство. Как указано выше, в разложении де Рама (2) каждое $\bar{m}_j$ является идеалом в m. Далее, риманова связность, определяемая формой B, совпадает с канонической связностью без кручения, и потому алгебра голономии $hol(B)$ этой связности совпадает с алгеброй Ли, определяемой отображениями $L(X): m \to m, Y \to X \cdot Y$ ([11]). Пусть теперь некоторая алгебра $\bar{m}_j$ непроста, т.е. содержит собственный идеал $\bar{n}_j$ (в предположениях теоремы $\bar{m}_j^2 \neq 0$). Ввиду $\bar{n}_j \cdot \bar{m}_j^{\perp} = 0$ (здесь

$$\bar{m}_j^{\perp} = \{X \in m \mid B(X, \bar{m}_j) = 0\} \quad \text{и} \quad m = \bar{m}_j \oplus m_j^{\perp}),$$

подпространство $\bar{n}_j$ является идеалом и в m, т.е. $L(m)$ - приводимым подпространством, что противоречит голономной неприводимости $\bar{m}_j$, и потому алгебра $\bar{m}_j$ проста.

Теперь желаемый результат явится следствием следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{L}$ - конечномерная неассоциативная алгебра такая, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_m = \mathcal{K}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_n,$$

где $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{K}_j$ - простые идеалы алгебры $\mathcal{L}$ ($i = 1, \ldots, m$) $j = 1, \ldots, n$). Тогда $m = n$ и для каждого $\mathcal{L}_i$ существует $\mathcal{K}_{j(i)}$ такой, что $\mathcal{L}_i = \mathcal{K}_{j(i)}$.

Доказательство. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ рассмотрим идеал $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{K}_j$. Если $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{K}_j = 0$, то $\mathcal{L}_1 \mathcal{K}_j \subset \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{K}_j = 0$. Так как $\mathcal{L} = \mathcal{K}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_n$, то $\mathcal{L}_1 \mathcal{L} = 0$, и потому $\mathcal{L}_1^2 = 0$, что противоречит простоте $\mathcal{L}_1$. Значит для некоторого $j = j(1)$ идеал $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{K}_{j(1)} \neq 0$ и тогда

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{K}_{j(1)} = \mathcal{K}_{j(1)},$$

в силу простоты идеалов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{K}_{j(1)}$. Аналогично изложенному, найдется $j(2)$ такое, что $\mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_{j(2)}$ и $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{K}_{j(1)} + \mathcal{K}_{j(2)}$, и далее, по индукции, для каждого $\mathcal{L}_i$ найдется соответствующий $\mathcal{K}_{j(i)}$. Лемма доказана, а с ней доказана и теорема 3.

Следовательно, полученное нами разложение (1):

$$m = m_0 \oplus m_1 \oplus \ldots \oplus m_n$$

действительно является аналогом разложения де Рама касательного пространства $T_0(M) = m$ односвязного псевдориманова однородного пространства $M = G/H$, определяемого парой Киллинга $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ с идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}$.

4. Разложение однородных пространств

Редуктивная пара $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ называется эффективной, если $\mathfrak{h}$ не содержит нетривиальных идеалов алгебры $\mathfrak{g}$ (в этом случае группа G действует на G/H эффективно). Как показано в [4], для всякой эффективной пары Киллинга $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ имеет место равенство $\mathfrak{h} = [\mathfrak{m},\mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}}$.

<u>Теорема 4.</u> Пусть $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ - эффективная пара Киллинга. В предположениях теоремы 1, если $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=0}^{n} \mathfrak{m}_i$ - прямая сумма разложения $\mathfrak{m}$ на $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ - инвариантные подпространства, то

(1) $\mathfrak{g}_i = [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i$ являются идеалами в $\mathfrak{g}$;

(2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$.

<u>Доказательство.</u> Так как каждое $\mathfrak{m}_i$ является $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ -инвариантным подпространством, то подпространства $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}}$ являются идеалами в $\mathfrak{h}$ ([4], лемма 4) и потому

$$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{h}] = [[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i,\mathfrak{h}] \subset [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i = \mathfrak{g}_i .$$

Далее

$$[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}] = [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_0 + \ldots + \mathfrak{m}_n] = [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i] \subset [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i = \mathfrak{g}_i ,$$

и, наконец,

$$[[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}},\mathfrak{m}] \subset [[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i],\mathfrak{m}] \subset [[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}],\mathfrak{m}_i] =$$

$$= [[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i \cdot \mathfrak{m},\mathfrak{m}_i] \subset [[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i] \subset$$

$$\subset [\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} + \mathfrak{m}_i = \mathfrak{g}_i .$$

Тем самым доказано, что

$$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}_i ,$$

вследствие чего подпространства $\mathfrak{g}_i$ являются идеалами в $\mathfrak{g}$. Из эффективности пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ следует

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_{\mathfrak{h}} = [\sum_{i=0}^{r} \mathfrak{m}_i, \sum_{i=0}^{r} \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=0}^{r} [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=0}^{r} \mathfrak{h}_i ,$$

так как $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0$ при $i \neq j$. Покажем, что полученная сумма является прямой суммой. Пусть $X \in \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_j$ для некоторого $i \neq j$. Тогда $X \in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j$ и поэтому

$$[X, \mathfrak{m}] \subset [X, \mathfrak{g}_0] + \ldots + [X, \mathfrak{g}_r] = 0 .$$

В силу точности линейного представления изотропии $\mathcal{D}(\mathfrak{h})$ имеем $X = 0$ и потому $\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{h}_j = 0$. Теперь $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{h}_r$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_r$, что и доказывает утверждение.

Аналогичная теорема для случая римановых редуктивных пространств была получена Б.Костантом в [8] .

Следствие 1. Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ – эффективная пара Киллинга с идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}$. Тогда простота алгебры Ли $\mathfrak{g}$ влечет простоту алгебры $\mathfrak{m}$.

А.Сэйглом в работе [10] указано соотношение между голономной неприводимостью редуктивного несимметрического пространства G/H с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и простотой алгебры $\mathfrak{m}$.

Теорема (Сэйгл). Пусть G/H – односвязное редуктивное однородное пространство и $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ – редуктивное разложение. Если $\mathfrak{m}^2 \neq 0$ и G/H голономно неприводимо относительно канонической связности без кручения, то алгебра $\mathfrak{m}$ проста. Обратно, если G/H является псевдоримановым и $\mathfrak{m}$ проста, то G/H голономно неприводимо.

Из следствия 1 и теоремы Сэйгла непосредственно вытекает

Теорема 5. Пусть G/H – односвязное псевдориманово однородное пространство, определяемое эффективной парой Киллинга $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ с идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}$, и G проста. Тогда G/H голономно неприводимо относительно канонической связности без кручения.

Полученная теорема дополняет известный результат о связи голономной неприводимости пространства G/H с простотой группы G в случае римановых пространств ([6] , стр. 215).

Как следует из построения теоремы 4, редуктивная пара ($\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$) является прямой суммой своих подпар ($\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i$) [5] и, в силу соответствия между подпарами редуктивной пары ($\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$) и вполне геодезическими подмногообразиями соответствующего редуктивного пространства G/H [1], имеет место

Теорема 6. Пусть $M = G/H$ -односвязное однородное пространство, определяемое эффективной парой Киллинга ($\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$) с идеально ненулевым умножением в $\mathfrak{m}$, и алгебра $\mathfrak{m}$ не проста. Тогда имеет место разложение

$$G/H = G_0/H_0 \times G_1/H_1 \times \ldots \times G_k/H_k,$$

где каждое $M_i = G_i/H_i$ является вполне геодезическим подмногообразием в G/H.

Литература

1. Васильев А. М., О вполне геодезических подмногообразиях однородных пространств. Докл. АН СССР, 1959, 128, № 2, 223-226.
2. Джекобсон Н., Алгебры Ли, Москва, 1964.
3. Рашевский П. К., О геометрии однородных пространств. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прил. к геометрии, мех. и физ. Моск. ун-т, 1952, 9, 49-74.
4. Фляйшер А. Г., Об одном классе редуктивных пространств. Тр. Геом. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1974, 6, 267-276.
5. Фляйшер А. Г., Заметки о редуктивных парах. Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1975, 355, 27-34.
6. Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundation of differential geometry. Vol. II. New-York - London, 1969.
7. Koh, S. S., On affine symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 119, № 2, 291-309.
8. Kostant, B., On differential geometry and homogeneous spaces II. Proc. Nat. Acad. Sci., 1956, 42, 354-357.

9. N o m i z u, K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, 76, 33-65.

10. S a g l e, A. A., On antikommutative algebras and homogeneous spaces. J. Math. and Mech., 1967, 16, 1381-1394.

11. S a g l e, A. A., Some homogeneous Einstein manifolds. Nagoya Math. J., 1970, 39, 81-106.

12. W u, H., On the de Rham decomposition theorem. Illinois J. Math., 1964, 8, 291-311.

Поступило
15 X 1977

ÜHEST PSEUDO-RIEMANNI HOMOGEENSETE RUUMIDE KLASSIST

A.Pljaiser

R e s ü m e e

Selles artiklis uuritakse loomulikke reduktiivseid homogeenseid ruume, mis on lokaalselt määratud Killingi'i paaridega [4]. Põhiline resultaat: reduktiivne üheselt sidus homogeenne ruum G/H, mis on poollihtsal rühmal G määratud tingimustega infinitesimaalsele struktuurile G/H, laguneb oma täielikult geodeetiliste alammuutkondade otsekorrutiseks või on holonoomselt taandumatu (kanooniliste seoste suhtes väändeta).

ON A CLASS OF PSEUDO-RIEMANNIAN HOMOGENEOUS SPACES

A.Fleischer

S u m m a r y

In this paper we study naturally - reductive homogeneous spaces locally defined by Killing pairs [4]. The Killing pairs, in which algebra m doesn't contain ideals with zero multiplication are of special interest. Homogeneous spaces, defined by such pairs, prove to be much similar to the Riemannian reductive space. In particular, the B.Kostant decomposition [8] takes place in it,

$$G/H = G_1/H_1 \times \ldots \times G_k/H_k .$$

TRÜ Toimetised,
464 (1978), 59-74.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1978, 464, 59-74.

О ПОДМНОГООБРАЗИЯХ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ВТОРОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

В.Мирзоян
Кафедра алгебры и геометрии

Введение

В последние годы вышли в свет ряд статей, посвященных подмногообразиям с параллельной второй фундаментальной формой в евклидовом пространстве (см. [6-10]). Вектор средней кривизны таких подмногообразий параллелен в нормальном расслоении. Поэтому такие подмногообразия включаются в класс подмногообразий, допускающих параллельное нормальное векторное поле, которые (в более общем случае) рассматривались в [1]. В частности, оказалось, что подмногообразие, допускающее параллельное нормальное векторное поле, несет ортогональную сопряженную систему поверхностей. Подмногообразия с сопряженными системами подробно исследованы в [4].

Имеется целый ряд работ о подмногообразиях с параллельным вектором средней кривизны (см. обзор [2]), причем, в некоторых из них на нормальную связность накладывается условие тривиальности.

В настоящей работе рассматриваются подмногообразия с параллельной второй фундаментальной формой римановых пространств постоянной кривизны, причем рассматривается как общий случай, так и случай с тривиальной нормальной связностью. В первом случае доказывается теорема 4, обобщающая соответствующий результат в [7] , а во втором случае - теорема 5, обобщающая соответствующий результат в [10]. Теорема 2 является вспомогательной, а теорема 3 о псевдоомбилических подмногообразиях носит общий характер. Все теоремы доказаны в § 2. В § 1 приведены необходимые сведения из римановой геометрии.

Все понятия, касающиеся пространств постоянной кривизны, можно найти в монографии [3].

Пользуясь случаем выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю профессору Ю.Лумисте за постановку задачи и постоянную помощь, оказанную им мне при написании настоящей работы.

§ 1. Необходимые сведения из римановой геометрии

1. Пусть M_m является m-мерным подмногообразием односвязного риманова пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ размерности n ($n > m$) и кривизны c. Обозначим через $\tilde{\nabla}$ риманову связность в $M_n(c)$, а через $T(M_m)$ и $N(M_m)$ – касательное и нормальное расслоения подмногообразия M_m соответственно. Связность $\tilde{\nabla}$ индуцирует в касательном и нормальном расслоениях связности ∇ и $\nabla^{\perp}$ соответственно. Для произвольных касательных векторных полей X, Y и произвольного нормального векторного поля ξ верны следующие формулы:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$
$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla^{\perp}_X \xi .$$

Первая формула называется формулой Гаусса, а вторая – формулой Вейнгартена. Первые слагаемые в правых частях этих формул принадлежат касательному расслоению, а вторые – нормальному расслоению. В формуле Гаусса α является билинейной симметрической формой и называется второй фундаментальной формой подмногообразия M_m. В формуле Вейнгартена A_ξ

является симметрическим эндоморфизмом касательного пространства $T_p(M_m)$ к M_m в точке p и называется вторым фундаментальным тензором подмногообразия M_m. Если $\tilde{g}$ – метрика на $M_n(c)$, а g – метрика на M_m, индуцированная метрикой $\tilde{g}$, то имеет место соотношение

$$\tilde{g}(\alpha(X,Y),\xi) = g(A_\xi(X),Y),$$

где $X, Y \in T_p(M_m)$ – произвольные касательные векторы, а $\xi \in N_p(M_m)$ – произвольный нормальный вектор ($N_p(M_m)$ – нормальное пространство к M_m в точке p). Пусть векторы $e_1,\ldots,e_m$ образуют ортонормированный базис в $T_p(M_m)$, а векторы $e_{m+1},\ldots,e_n$ образуют ортонормированный базис в $N_p(M_m)$. Положим $\alpha(e_i,e_j) = b^\beta_{ij}e_\beta$, где $i,j = 1,\ldots,m$, $\beta = m+1,\ldots,n$. Функции b^α_{ij} называются компонентами второй фундаментальной формы α. Они симметричны по нижним индексам.

Вектором средней кривизны подмногообразия M_m называется вектор

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\alpha(e_i,e_i) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} b^\beta_{ii}e_\beta .$$

2. Нормальное векторное поле ξ на M_m называется параллельным в нормальном расслоении (или просто параллельным), если $\nabla^\perp_X \xi = 0$ для любого касательного векторного поля X.

Вторая фундаментальная форма α подмногообразия M_m называется параллельной, если для произвольных касательных векторных полей X, Y, Z имеет место

$$\nabla^\perp_X(\alpha(Y,Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y,\nabla_X Z) = 0.$$

Подмногообразие M_m называется вполне геодезическим, если $\alpha \equiv 0$.

Подмногообразие M_m называется омбилическим относительно нормального векторного поля ξ, если на M_m существует такая функция λ, что $A_\xi = \lambda I$, где I – тождественное преобразование. Если это условие выполняется при $\xi = H$, то подмногообразие M_m называется псевдоомбилическим. Если подмногообразие M_m является омбилическим относительно каждого нормального векторного поля, то оно называется вполне омбилическим.

Подмногообразие M_m называется минимальным, если $H=0$.

Обозначим через R^N тензор кривизны нормальной связности. Если на подмногообразии M_m тождественно выполняется условие $R^N = 0$, то нормальная связность $\nabla^\perp$ называется плоской. Известно ([5]), что $R^N=0$ тогда и только тогда, когда $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi = 0$ для любых нормальных векторных полей ξ и η. Если нормальная связность $\nabla^\perp$ плоская, то каждый нормальный вектор $\xi \in N_p(M_m)$ локально можно продолжить до параллельного нормального векторного поля.

3. Наряду с приведенной выше символикой и терминологией для удобства вычислений будет использован также метод подвижного репера. Пусть $x \in M_n(c)$ – некоторая точка. Тогда уравнения инфинитезимального смещения подвижного ортонормированного репера $(x, e_1, \dots, e_n)$ определяются формулами ([1])

$$
\begin{aligned}
dx &= \omega^J e_J, \\
de_J &= -c\omega^J x + \omega_J^K e_K,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где $J, K, L, \dots = 1, \dots, n$, $\omega_J^K + \omega_K^J = 0$. Путем внешнего дифференцирования этих уравнений получаются следующие структурные уравнения:

$$
\begin{aligned}
d\omega^J &= \omega^K \wedge \omega_K^J, \\
d\omega_K^J &= \omega_K^L \wedge \omega_L^J + c\,\omega^J \wedge \omega^K.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Если точка x принадлежит подмногообразию M_m и произвол подвижного репера ограничивается требованием, чтобы $e_i \in T_x(M_m)$, $i, j = 1, \ldots, m$, то в(1) имеет место $\omega^\alpha = 0$, $\alpha, \beta = m+1, \ldots, n$. Подстановка результата в (2) дает $\omega_i^\alpha \wedge \omega^i = 0$ и в силу леммы Картана имеем

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \qquad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha . \tag{3}$$

В этой формуле функции b_{ij}^α и являются компонентами второй фундаментальной формы α.

§ 2. Подмногообразия с параллельной второй фундаментальной формой

1. Р.Валден доказал следующее предложение.

Теорема 1. (см. [10]). Пусть M связное, односвязное, полное риманово многообразие и A ковариантно постоянное симметрическое поле преобразований касательного расслоения многообразия M. Тогда

а) собственные значения A постоянны;

б) распределения

$$T^\lambda = \{ X \in T_x(M);\ A(X) = \lambda X \},$$

где $T_x(M)$ – касательное пространство к M в точке x, X-касательный вектор, а λ – собственное значение преобразования A, параллельны и инволютивны;

в) M разлагается в прямое произведение интегральных подмногообразий M^λ, соответствующих распределениям T^λ. Каждое M^λ является вполне геодезическим в M.

Пусть теперь M_m является m-мерным связным, односвязным, полным подмногооообразием с параллельной второй фундаментальной формой односвязного риманова пространства постоянной кривизны $M_n(c)$. Тогда вектор средней кривизны H подмногообразия M_m параллелен в нормальном расслоении, т.е. $\nabla^\perp H = 0$. Условие параллельности второй фундаментальной формы в терминах A_{e_α}, где e_α – базисное нормальное векторное поле, записывается следующим образом ([6], формула (II)):

$$0 = \nabla^*_X A_{e_\alpha} = \nabla_X A_{e_\alpha} - \sum_{\beta=m+1}^{n} \omega_\alpha^\beta(X) A_{e_\beta} ,$$

где через ∇^* обозначена сумма Уитни связностей ∇ и $\nabla^\perp$. Выбирая e_{m+1} параллельным H и используя условие параллельности H в нормальном расслоении мы получим $\omega_{m+1}^\beta = 0$, $\beta = m+2, \ldots, n$. Тогда в предыдущем равенстве при $\alpha = m+1$ исчезает второе слагаемое и условие ковариантной постоянности A_H относительно связности ∇^* сводится к условию ковариантной постоянности относительно связности ∇. Таким образом мы приходим к условиям теоремы 1. Поэтому, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – собственные значения A_H, то утверждения а), б), в) теоремы 1 выполняются и, следовательно, M_m разлагается в прямое произведение интегральных подмногообразий M^{λ_s}, $s = 1, \ldots, k$, соответствующих распределениям

$$T^{\lambda_s} = \{ Y \in T_x(M_m);\ A_H(Y) = \lambda_s Y \},$$

причем каждое M^{λ_s} является вполне геодезическим в M_m.

Следующие леммы дают некоторые дальнейшие свойства подмногообразий M^{λ_s}.

<u>Лемма 1</u>. Вторая фундаментальная форма α_s любого вполне геодезического подмногообразия M^{λ_s} в M_m является ограничением на M^{λ_s} второй фундаментальной формы α подмногообразия M_m.

<u>Доказательство</u>. Итак, пусть α_s – вторая фундаментальная форма M^{λ_s} относительно $M_n(c)$, а α_s' – вторая фундаментальная форма M^{λ_s} в M_m. Обозначим через ∇' связность в касательном расслоении подмногообразия M^{λ_s}, индуцированную связностью ∇. Пусть

$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in T(M^{\lambda_s})$ – касательные векторные поля. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y} &= \nabla_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y} + \alpha(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \\ &= \nabla'_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y} + \alpha'_s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + \alpha(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}). \end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \alpha'_s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + \alpha(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}).$$

Так как M^{λ_s} является вполне геодезическим в M_m, то $\alpha'_s \equiv 0$ и предыдущее равенство принимает вид:

$$\alpha_s(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \alpha(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \tag{5}$$

откуда и следует утверждение леммы.

Заметим, что из второго равенства в (4) и из $\alpha'_s \equiv 0$ следует, что

$$\nabla_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y} = \nabla'_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y}. \tag{6}$$

Лемма 2. Пусть M_m является подмногообразием с параллельной второй фундаментальной формой в $M_n(c)$ и M^{λ_s} – некоторым его подмногообразием, определенным по теореме 1 с помощью A_H. Если $\xi \in N(M_m)$ – произвольное нормальное векторное поле, $\mathfrak{X} \in T(M^{\lambda_s})$ – произвольное касательное векторное поле, а $\tilde{A}_\xi$ – второй фундаментальный тензор подмногообразия M^{λ_s}, соответствующий полю ξ, то

$$\tilde{A}_\xi(\mathfrak{X}) = A_\xi(\mathfrak{X}), \tag{7}$$

$$\nabla'^{\perp}_{\mathfrak{X}} \xi = \nabla^{\perp}_{\mathfrak{X}} \xi, \tag{8}$$

где $\nabla'^{\perp}$ – нормальная связность подмногообразия M^{λ_s}.

Доказательство. Рассматривая поле $\mathfrak{X}$ как касательное векторное поле к M_m, можем написать

$$\tilde{\nabla}_{\mathfrak{X}} \xi = -A_\xi(\mathfrak{X}) + \nabla^{\perp}_{\mathfrak{X}} \xi.$$

С другой стороны, если рассматривать поле ξ как нормальное векторное поле к подмногообразию M^{λ_s}, то будем иметь

$$\tilde{\nabla}_{\mathfrak{X}}\xi = -\tilde{A}_{\xi}(\mathfrak{X}) + \nabla'^{\perp}_{\mathfrak{X}}\xi.$$

Таким образом

$$-A_{\xi}(\mathfrak{X}) + \nabla^{\perp}_{\mathfrak{X}}\xi = -\tilde{A}_{\xi}(\mathfrak{X}) + \nabla'^{\perp}_{\mathfrak{X}}\xi. \tag{9}$$

Пусть теперь $\mathfrak{Y} \in T(M^{\lambda_s})$ – другое касательное векторное поле. Так как вектор средней кривизны H подмногоообразия M_m параллелен в нормальном расслоении, то из уравнения Риччи (см. [5], стр. 47) следует, что

$$g([A_H, A_{\xi}]\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = 0.$$

Из этого равенства и из произвольности полей $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ следует, что

$$[A_H, A_{\xi}] = A_H A_{\xi} - A_{\xi} A_H = 0,$$

т.е. A_H и A_{ξ} коммутируют. Поэтому, если $Z \in T^{\lambda_s}$ – касательный вектор, то $A_H A_{\xi}(Z) = A_{\xi} A_H(Z) = \lambda_s A_{\xi}(Z)$ и, следовательно, $A_{\xi}(Z) \in T^{\lambda_s}$. Таким образом распределения T^{λ_s} инвариантны относительно A_{ξ}. Отсюда следует, что в равенстве (9) в левой части $-A_{\xi}(\mathfrak{X})$ принадлежит касательному расслоению подмногообразия M^{λ_s}. В правой же части этого равенства касательному расслоению подмногообразия M^{λ_s} принадлежит $-\tilde{A}_{\xi}(\mathfrak{X})$. Следовательно,

$$A_{\xi}(\mathfrak{X}) = \tilde{A}_{\xi}(\mathfrak{X}), \qquad \nabla^{\perp}_{\mathfrak{X}}\xi = \nabla'^{\perp}_{\mathfrak{X}}\xi.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. В предположениях леммы 2 вторая фундаментальная форма α_s подмногообразия M^{λ_s} параллельна.

Доказательство. Пусть $X, Y, Z \in T(M^{\lambda_s})$ - произвольные касательные векторные поля. На основании равенств (5), (6), (8) можем написать:

$$\nabla_X'^{\perp}(\alpha_s(Y,Z)) - \alpha_s(\nabla_X' Y, Z) - \alpha_s(Y, \nabla_X' Z) =$$

$$= \nabla_X^{\perp}(\alpha(Y,Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) = 0 .$$

Второе равенство следует из параллельности α. Лемма доказана.

2. Таким образом, каждое интегральное подмногообразие M^{λ_s} можем рассматривать как подмногообрази пространства $M_n(c)$ с параллельной второй фундаментальной формой. Обозначим через H_s вектор средней кривизны подмногообразия M^{λ_s}. Тогда $\nabla'^{\perp} H_s = 0$ и A_{H_s} является ковариантно постоянным относительно связности ∇'. Применяя снова теорему 1 к подмногообразию M^{λ_s}, мы можем продолжать процесс разбиения подмногообразия M_m на прямые произведения интегральных подмногообразий, соответствующих распределениям, построенным для A_{H_s} таким же образом, как и для A_H. Далее, процесс разбиения повторяется аналогичным образом. Пусть M является каким-либо интегральным подмногообразием, полученным на каком-то этапе процесса разбиения подмногообразия M_m. Пусть η - вектор средней кривизны этого подмногообразия и A_η - второй фундаментальный тензор, соответствующий вектору η. Если A_η имеет в касательном расслоении $T(M)$ только одно собственное значение, допустим λ, то M далее не разлагается в прямое произведение новых интегральных подмногообразий и является псевдоомбилическим подмногообразием пространства $M_n(c)$. Если же A_η имеет более одного собственного значения, то процесс разбиения M можно продолжать до тех пор, пока не придем к псевдоомбилическим подмногообразиям. Таким образом,

подмногообразие M_m разлагается в прямое произведение подмногообразий M^j, $j=1,\ldots,k$, являющихся псевдоомбилическими подмногообразиями пространства $M_n(c)$. Обозначим через H_j вектор средней кривизны подмногообразия M^j, а через μ_j единственное собственное значение A_{H_j}. Так как H_j параллелен в нормальном расслоении, то применяя результаты работы [1] к подмногообразию M^j, получим, что M^j принадлежит ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых в $M_n(c)$ с центром $x+\frac{1}{\mu_j}e_{m+1}=a$, где a - постоянный вектор, x - точка M^j, а нормальный вектор e_{m+1} выбран так, что $H_j=\mu_j e_{m+1}$. Следовательно, при $c\geqslant 0$ каждое M^j принадлежит сфере, а при $c<0$ M^j принадлежит или сфере, или эквидистантной поверхности, или орисфере.

Так как касательные пространства подмногообразий M^j и M^i, $i,j=1,\ldots,k$, $i\neq j$, ортогональны, а направления векторов касательного пространства к M^j сопряжены с направлениями векторов касательного пространства к M^i, то, подытоживая предыдущие рассуждения, можем сформулировать следующее предложение.

<u>Теорема 2</u>. Пусть M_m является m-мерным, связным, односвязным, полным подмногообразием с параллельной второй фундаментальной формой односвязного риманова пространства постоянной кривизны $M_n(c)$. Тогда M_m разлагается в прямое произведение

$$M_m = M_1 \times \ldots \times M_k$$

подмногообразий M^j, $j=1,\ldots,k$, составляющих ортогональную сопряженную систему на M_m. Каждое M^j 1) является псевдоомбилическим подмногообразием пространства $M_n(c)$; 2) принадлежит ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых пространства $M_n(c)$; 3) является вполне геодезическим в M_m; 4) имеет параллельную вторую фундаментальную форму.

Верно следующее предложение.

Теорема 3. Пусть M_m является m-мерным псевдоомбилическим подмногообразием односвязного риманова пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ ($m < n$). Вектор средней кривизны H подмногообразия M_m параллелен тогда и только тогда, когда M_m является минимальным подмногообразием ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых пространства $M_n(c)$.

Доказательство. Необходимость.
Пусть $T_x(M_m)$ и $N_x(M_m)$ - касательное и нормальное пространства к M_m в точке x. Пусть векторы e_i, $i=1,\dots,m$, образуют ортонормированный базис в $T_x(M_m)$, а векторы e_β, $\beta=m+1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в $N_x(M_m)$. Направим единичный нормальный вектор e_{m+1} по направлению вектора средней кривизны H. Тогда мы будем иметь

$$H=\lambda e_{m+1}, \tag{10}$$

где λ - средняя кривизна. Такой выбор вектора e_{m+1} влечет следующие два условия:

$$b^{m+1}_{ij}=\lambda\delta_{ij}, \quad i,j=1,\dots,m, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} b^{\alpha}_{ii}=0, \quad \alpha=m+2,\dots,n, \tag{12}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Равенства (10), (11), (12) верны для любого псевдоомбилического подмногообразия.

Применяя условия параллельности вектора средней кривизны к (10), получим

$$0=\nabla^{\perp}H=d\lambda e_{m+1}+\lambda\omega^{\alpha}_{m+1}e_{\alpha},$$

где $\alpha=m+2,\dots,n$. Из этого равенства следует, что $\omega^{\alpha}_{m+1}=0$, $\lambda=\mathrm{const}$. В силу этих условий и с помощью формул (3), (11) получим, что $d(x+\frac{1}{\lambda}e_{m+1})=0$. Следовательно, $x+\frac{1}{\lambda}e_{m+1}=a$, где a - постоянный вектор. Отсюда вытекает, что M_m принадлежит ортогональной гиперповерхности связки прямых пространства $M_n(c)$ с центром $a=x+\frac{1}{\lambda}e_{m+1}$. Из (10) следует, что вектор средней кривизны H ортогонален к гиперповерхности, а поэтому M_m является минимальным подмногообразием этой гиперповерхности.

Достаточность. Пусть M_m является минимальным подмногообразием ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых пространства $M_n(c)$. Тогда вектор средней кривизны ортогонален к гиперповерхности. Если опять вектор e_{m+1} выбрать как и раньше, т.е. так, чтобы выполнялись условия (10), (11), (12), то центр связки прямых определится формулой

$$x+\pi e_{m+1}=a, \tag{13}$$

где π - некоторая функция, a - постоянный вектор, а x - точка подмногообразия. Дифференцируя равенство (13) и используя (1), (3), (11) получим

$$(1-\pi\lambda)\,\omega^i e_i+d\pi e_{m+1}+\pi\omega^{\alpha}_{m+1}e_{\alpha}=0.$$

Отсюда немедленно следует, что $\lambda=\frac{1}{\pi}=\mathrm{const}$, $\omega^{\alpha}_{m+1}=0$, где $\alpha=m+2,\dots,n$. Полученные условия являются необходимыми и достаточными условиями параллельности вектора средней кривизны, что непосредственно следует из формулы $\nabla^{\perp}H=d\lambda\, e_{m+1}+\lambda\omega^{\alpha}_{m+1}e_{\alpha}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Аналогичное предложение доказано в [11] в случае $M_n(c)=R_n$.

Опираясь на теорему 3 и теорему 2 можем сформулировать следующее предложение.

Теорема 4. В предположениях теоремы 2 подмногообразия M_m разлагается в прямое произведение подмногообразий M^j, $j=1,\dots,k$, таких, что каждое M^j является минимальным подмногообразием ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых пространства $M_n(c)$ и имеет параллельную вторую фундаментальную форму.

Замечание 2. Случай, когда $M_n(c) = R_n$ рассмотрен в [7].

3. Пусть, теперь, M_m является подмногообразием с параллельной второй фундаментальной формой пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ и предположим, что нормальная связность плоская. Тогда для любых нормальных векторных полей ξ и η преобразования A_ξ и A_η коммутируют, т.е. $A_\xi A_\eta = A_\eta A_\xi$ и в нормальном расслоении существует $n-m$ взаимно ортогональных единичных векторных полей $e_{m+1}, \dots, e_n$, параллельных в нормальном расслоении. Рассмотрим ковариантно постоянные A_{e_α}, $\alpha = m+1, \dots, n$. Пусть $\alpha = m+1$. Определим распределения

$$T^{\lambda_{m+1}} = \{ X \in T_x(M_m);\ A_{e_{m+1}}(X) = \lambda_{m+1} X \},$$

где λ_{m+1} пробегает собственные значения $A_{e_{m+1}}$. Применяя теорему 1 мы получим, что M_m разлагается в прямое произведение интегральных подмногообразий $M^{\lambda_{m+1}}$, соответствующих распределениям $T^{\lambda_{m+1}}$. Так как все A_{e_α} коммутируют между собой, то подпространства $T^{\lambda_{m+1}}$ инвариантны относительно всех A_{e_β}, $\beta = m+2, \dots, n$. Из леммы 2 и леммы 3 следует, что все A_{e_β} ковариантно постоянны. Определим теперь распределения

$$T^{\lambda_{m+2}} = \{ X \in T^{\lambda_{m+1}};\ A_{e_{m+2}}(X) = \lambda_{m+2} X \}$$

в каждом $T^{\lambda_{m+1}}$, где λ_{m+2} пробегает собственные значения $A_{e_{m+2}}$ в $T^{\lambda_{m+1}}$. Опять применим теорему 1 и найдем интегральные подмногообразия $M^{\lambda_{m+2}}$, соответствующие распределениям $T^{\lambda_{m+2}}$, в прямое произведение которых разлагается $M^{\lambda_{m+1}}$.

Далее все повторяется точно также для $A_{e_{m+3}}$ и так до тех пор, пока не исчерпаются все A_{e_α}. В итоге мы найдем такие интегральные подмногообразия M^k, $k = 1, \dots, k$, что касательные пространства $T_x(M^k)$ $(x \in M^k)$ будут собственными подпространствами для всех A_{e_α}. Поэтому на каждом $T_x(M^k)$ каждое A_{e_α} будет иметь только одно собственное значение. Обозначим через α_k вторую фундаментальную форму подмногообразия M^k, которая получена ограничением второй фундаментальной формы α подмногообразия M_m на M^k. Пусть $X, Y \in T_x(M^k)$ - произвольные касательные векторы к M^k в точке x. Тогда

$$\tilde{g}(\alpha_k(X,Y), e_\alpha) = g(A_{e_\alpha}(X), Y) = \lambda_\alpha g(X,Y)$$

для любого e_α, $\alpha = m+1, \ldots, n$, где λ_α - единственное собственное значение A_{e_α} на собственном подпространстве $T_x(M^k)$. Полученное условие является условием вполне омбиличности подмногообразия M^k в $M_n(c)$. На основании 2) теоремы 2 заключаем, что каждое подмногообразие M^k принадлежит ортогональной гиперповерхности некоторой связки прямых пространства $M_n(c)$ и является вполне омбилическим в $M_n(c)$. Следовательно, каждое M^k является или сферой, или эквидистантной поверхностью, или орисферой.

Итак, верно следующее предложение.

Теорема 5. Пусть M_m является связным, односвязным полным подмногообразием с параллельной второй фундаментальной формой и плоской нормальной связностью односвязного риманова пространства постоянной кривизны $M_n(c)$. Тогда M_m разлагается в прямое произведение $M_m = M^1 \times \ldots \times M^r$ подмногообразий M^k, где каждое M^k, $k = 1, \ldots, r$, является или сферой, или эквидистантной поверхностью, или орисферой.

Замечание 3. Случай, когда $M_n(c) = R_n$ рассмотрен в [10].

Литература

1. Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В., Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1974, 5(14), 148-157.

2. Л у м и с т е Ю. Г., Дифференциальная геометрия подмногообразий. В сб. "Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)". Москва, 1975, 13, 273-340.

3. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства. Москва, 1969.

4. Р ы ж к о в В. В. Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, 7, 179-226.

5. C h e n B.-Y., Geometry of submanifolds. New York, 1973.

6. E r b a c h e r, J., Isometric immersions of constant mean curvature and triviality of the normal connection. Nagoya Math. J., 1971, 45, 139-165.

7. F e r u s, D., Produkt-Zerlegungen von Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform. Math. Ann., 1974, 211, 1-5.

8. F e r u s, D., Immersionen mit paralleler zweiter Fundamentalform. Manuscripta Math., 1974, 12, 153-162.

9. F e r u s, D., Immersions with parallel second fundamental form. Math. Z., 1974, 140, 87-92.

10. W a l d e n, R., Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Sphären. Manuscripta Math., 1973, 10, 91-102.

11. Y a n o, K., C h e n, B.-Y., Minimal submanifolds of a higher dimensional sphere. Tensor, N. S., 1971, 22, 369-373.

Поступило
1 IУ 1977

PARALLEELSE TEISE FUNDAMENTAALVORMIGA ALAMMUUTKONDADEST KONSTANTSE KÕVERUSEGA RUUMIDES

V.Mirzojan

R e s ü m e e

Paralleelse teise fundamentaalvormiga alammuutkondi eukleidilises ruumis R_n on uuritud artiklites [6-10]. Käesolevas töös vaadeldakse sama omadusega alammuutkondi konstantse kõverusega ruumides $M_n(c)$, kus c on ruumi kõverus. Tõestatakse, et täielik ühelisidus m-mõõtmeline alammuutkond M_m paralleelse teise fundamentaalvormiga

ühelisidusaa ruumis $M_n(c)$ osutub oma alammuutkondade M^i korrutiseks, $i=1,\dots,k$, selliselt et iga M^i on ruumi $M_n(c)$ sirgete teatava sidumi ortogonaalse hüperpinna minimaalne alammuutkond paralleelse teise fundamentaalvormiga (teoreem 4). Kui lisaks eelnevale nõuda, et M_m normaalne seostus oleks triviaalne, siis iga M^i osutub seejuures kas sfääriks, orisfääriks või ekvidistantpinnaks (teoreem 5).

ON SUBMANIFOLDS WITH PARALLEL SECOND FUNDAMENTAL FORM IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

V.Mirzojan

S u m m a r y

Submanifolds with parallel second fundamental form in Euclidean space R_n were considered in [6-10].In the present article analogous submanifolds in n-dimensional space of constant curvature $M_n(c)$,curvature c, are being investigated. The basic result is the following. If M_m is m-dimensional complete, connected, simple connected submanifold with parallel second fundamental form in $M_n(c)$, then M_m is direct product of submanifolds M^i, $i=1,\dots,k$, where every M^i is the minimal submanifold of orthogonal hypersurface some bunch of line in $M_n(c)$ and has parallel second fundamental form. If the normal connection is flat, then every M^i is a sphere, or an orisphere, or an equidistant hypersurface.

TRÜ Toimetised,
464 (1978), 75-97.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1978, 464, 75-97.

ОДНОРОДНЫЕ ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_5

К. Рийвес
Кафедра алгебры и геометрии

1. Вводные замечания. В работе исследуются однородные фактор-пространства $G(5)/H$ группы Ли движений $G(5)=O(5)*T_5$ вещественного евклидова пространства R_5 по ее замкнутым подгруппам Ли H. Полный перечень собственных связных подгрупп Ли $H\subset G(5)$ дан в [4] (стр. 52-53) и содержит 58 типов подгрупп Ли движений H. Для большинства из этих типов существует с точностью до внутреннего автоморфизма только одна подгруппа данного типа. Она будет замкнутой. В случае остальных типов существует либо 1-, либо 2-параметрическое семейство несопряженных подгрупп Ли соответствующего типа, которое всегда содержит замкнутые подгруппы. Имеющиеся 58 типов собственных подгрупп Ли группы $G(5)$ можно разделить на две серии. Именно,

к серии 1 относятся подгруппы, орбиты $V_m\subset R_5$ максимальных размерностей которых не содержатся в некоторой гиперплоскости R_4 пространства R_5, а также подгруппа $H=G(4)$ всех движений гиперплоскости R_4;

к серии 2 относятся подгруппы, орбиты максимальных размерностей которых содержатся в некоторой гиперплоскости R_4 пространства R_5. Иными словами, серия 2 содержит все собственные подгруппы Ли H группы движений $G(4)$. Их 28 типов (см. [5]).

Методом, описанном в [5], в п. 2 настоящей работы перечисляются все нередуктивные пространства $G(5)/H$, а в п. 3 дается полный перечень редуктивных пространств $G(5)/H$, которые, как известно [6], допускают инвариантную аффинную связность. Оказывается, что их существует 25 типов. Все они подвергаются еще более подробному исследованию. Указывается, какие из них будут симметрическими, какие приводимыми или даже вполне приводимыми, а также характеризуется строение соответсвующих алгебр Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}(5)$. (Здесь через $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}(5)$ обозначены алгебры Ли групп Ли H и $G(5)$.)

В дальнейшем применяются понятия и обозначения, введенные в [5], заменяя лишь всюду индекс 4 на 5. Напомним некоторые из них. <u>Флагом</u> $\mathfrak{F}$ пространства R_5 называется конфигурация $V(R_{m_0}) \subset V(R_{m_1}) \subset \ldots \subset V(R_{m_\ell}), R_{m_{\ell+1}} \subset \ldots \subset R_{m_k} \subset R_5$, где 1) $V(R_m)$ является пространством векторов плоскости R_m пространства R_5, 2) $V(R_{m_\ell}) \subset V(R_{m_{\ell+1}})$ и 3) $0 \le \ell \le k$. Если $\ell = 0$, $m_0 = 0$, $0 \le m_1 < \ldots < m_k < 5$, то флаг $\mathfrak{F}$ называется <u>точечным</u> и обозначается через $\{m_1, \ldots, m_k\}$. Если $0 \le \ell < k$, $0 < m_0 < \ldots < m_k < 5$, то флаг $\mathfrak{F}$ называется <u>векторно-точечным</u> и обозначается через $[m_0, \ldots, m_\ell; m_{\ell+1}, \ldots, m_k\}$. Если $\ell = k$, $0 < m_0 < \ldots < m_k < 5$, то флаг $\mathfrak{F}$ называется <u>векторным</u> и обозначается через $[m_0, \ldots, m_k]$.

Если все векторные пространства или плоскости некоторого флага $\mathfrak{F}$ инварианты при всех движениях подгруппы Ли $H \subset G(5)$, то H называется <u>приводимой с инвариантным флагом</u> $\mathfrak{F}$. Если инвариантного относительно движений подгруппы Ли H флага $\mathfrak{F}$ в R_5 не существует, то H называется <u>неприводимой</u>. Приводимая подгруппа H называется <u>подгруппой стационарности флага</u> $\mathfrak{F}$, если H содержит все движения в R_5, относительно которых $\mathfrak{F}$ инвариантен, и <u>винтовой подгруппой</u> в противном случае.

Введем следующие обозначения:

$\mathfrak{K}^{5,m}$ – класс связных подгрупп Ли H группы $G(5)$, орбиты максимальной размерности которых m-мерны $(1 \le m \le 5)$;

$K^{5,m}(\mathfrak{F})$ – подгруппа стационарности флага $\mathfrak{F}$;

$K^{5,m}_{\kappa}(\mathfrak{F})$ – κ-параметрическая винтовая подгруппа в подгруппе стационарности флага $\mathfrak{F}$;

$K^{5,m}_{\kappa}$ – κ-параметрическая неприводимая подгруппа;

$R_m^{[m_0, \ldots, m_k]}$ – m-мерная плоскость в R_5 (при $m = 5$ все R_5) с фиксированным в ней векторным флагом $[m_0, \ldots, m_k]$;

S_m – m-мерная сфера в R_5 $(m = 1, \ldots, 4)$;

$R_{m_1} \times S_{m_2}$ – $(m_1 + m_2)$-мерный цилиндр вращения с m_1-мерными образующими, ортогональными к плоскости вращения $(m_1 + m_2 \le 5)$;

$S_{m_1} \times S_{m_2}$ – $(m_1 + m_2)$-мерная поверхность переноса сферы $S_{m_1} \subset R_{m_1+1}$ по сфере $S_{m_2} \subset R_{m_2+1}$, где плоскости R_{m_1+1}, R_{m_2+1} взаимно ортогональны в R_5 $(m_1 + m_2 \le 3)$;

$R_1 \times S_1 \times S_1$ – цилиндр с одномерными образующими R_1, построенный на поверхности Клиффорда $S_1 \times S_1$ плоскости R_4, ортогональной к R_1 в R_5;

$\Gamma_{(m)}$ – винтовая линия в R_m;

$R_{m_1} \times \Gamma_{(m_2)}$ – цилиндр с m_1-мерными образующими R_{m_1}, построенный на винтовой линии плоскости R_{m_2}, вполне ортогональной к R_{m_1} в R_5 $(m_1 + m_2 \leq 5)$;

$S_1 \times \Gamma_{(3)}$ – поверхность переноса окружности $S_1 \subset R_2$ вдоль винтовой линии $\Gamma_{(3)} \subset R_3$, где R_2, R_3 вполне ортогональны в R_5;

$\Gamma \times \Gamma$ – 2-мерная поверхность, получаемая при винтовом движении линии постоянной кривизны, находящейся на поверхности Клиффорда $S_1 \times S_1$ плоскости R_4, ортогональной к оси R_1 винтового движения в R_5.

Основные результаты п. 2 и п. 3 представляются в виде таблиц. В первой из них указываются подгруппы Ли $H \subset G(5)$, для которых соответствующие фактор-пространства будут нередуктивными. Во второй перечисляются подгруппы $H \subset G(5)$, которым соответствуют редуктивные пространства $G(5)/H$.

В п. 4 результаты настоящей работы сравниваются с результатами [5]. При этом особое внимание обращается на пространства $G(5)/H$ при подгруппах H из серии 2.

Для целостности изложения целесообразно напомнить основные этапы предложенной в [5] методики исследования. Пусть $\{M, e_J\}$, $J = 1,\dots,5$ является ортонормированным подвижным репером в R_5, присоединенным к точке $M \in R_5$. Его инфинитезимальное перемещение определено формулами

$$dM = \omega^K e_K, \quad J, K, \dots = 1,\dots,5, \qquad (1)$$
$$de_J = \omega^K_J e_K, \quad \omega^K_J + \omega^J_K = 0,$$

где $\{\omega^K, \omega^K_J\}$ – множество базисных инвариантных форм группы движений $G(5)$, удовлетворяющих структурным уравнениям

$$d\omega^K = \omega^L \wedge \omega^K_L, \qquad (2)$$
$$d\omega^K_J = \omega^L_J \wedge \omega^K_L .$$

Пусть r-параметрическая подгруппа Ли $H \subset G(5)$ задается вполне интегрируемой системой

$$\theta^a = 0, \quad a = r+1,\dots, \quad \dim G(5) = 15, \qquad (3)$$

где θ^a независимы и являются линейными комбинациями форм ω^K, ω^K_J с постоянными коэффициентами. Тогда возможен переход к системе $\{\vartheta^x, \theta^a \mid x = 1,\dots,r;\ a = r+1,\dots,15\}$ базисных инвариантных форм группы $G(5)$, в которой

$$\vartheta^{\alpha} = \Omega^{\alpha} + p^{\alpha}_{a}\theta^{a} \qquad (4)$$

и Ω^{α} являются базисными инвариантными формами подгруппы Ли $H \subset G(5)$, а p^{α}_{a} – некоторые неизвестные постоянные. Для этой системы структурные уравнения представляются в виде

$$d\vartheta^{\alpha} = -\frac{1}{2}C^{\alpha}_{\beta\gamma}\vartheta^{\beta}\wedge\vartheta^{\gamma} - C^{\alpha}_{\beta c}\vartheta^{\beta}\wedge\theta^{c} - \frac{1}{2}C^{\alpha}_{bc}\theta^{b}\wedge\theta^{c}, \qquad (5А)$$

$$d\theta^{a} = -C^{a}_{\beta c}\vartheta^{\beta}\wedge\theta^{c} - \frac{1}{2}C^{a}_{bc}\theta^{b}\wedge\theta^{c}. \qquad (5Б)$$

Исследуемые пространства $G(5)/H$ будут редуктивными тогда и только тогда, когда

$$C^{\alpha}_{\beta c} = 0. \qquad (6)$$

Если имеют место также равенства

$$C^{a}_{bc} = 0, \qquad (7)$$

то соответствующее пространство – симметрическое.

Уравнения $\vartheta^{\alpha} = 0$ $(\alpha = 1,\dots,r)$ задают оснащающее пространство m для подгруппы H в $G(5)$, т.е. $g(5) = f \dotplus m$. Пространство $G(5)/H$ называется приводимым, если существует $\mathrm{ad}\,f$-инвариантное подпространство $n \subset m$. В этом случае множество форм $\{\theta^{a} \mid a = r+1,\dots,15\}$ разбивается на две части $\{\theta^{a}\} = \{\theta^{i}\} \cup \{\theta^{u}\}$ так, что

$$C^{i}_{\alpha u} = 0, \qquad (8)$$

и число форм θ^{u} равняется $\dim n$. Пространство $G(5)/H$ будет вполне приводимым, если, кроме того, имеют место и равенства

$$C^{u}_{\alpha i} = 0. \qquad (9)$$

Последние соотношения означают $\mathrm{ad}\,f$-инвариантность подпространства, дополнительного к n в m.

Известно (см. [4], стр. 82), что подалгебра Ли $f \subset g(5)$ над полем ненулевой характеристики полупроста тогда и только тогда, когда ее матрица Киллинга $\|B_{\alpha\beta}\|$ невырождена. При этом

$$B_{\alpha\beta} = C^{\delta}_{\alpha\gamma}C^{\gamma}_{\beta\delta}. \qquad (10)$$

В дальнейшем, при изучении вопроса о приводимости редуктивных пространств $G(5)/H$ будут применяться лишь условия (8), (9), хотя в некоторых частных случаях могли бы быть использованы более общие соображения.

г. <u>нередуктивные фактор-пространства $G(5)/H$</u>. Основные результаты исследования формулируются в терминах приводимости подгрупп H и инвариантных флагов $\mathfrak{F}$ в виде нижеследующих предложений.

<u>Предложение 1</u>. Если подгруппа Ли движений H из серии 1 является 3-параметрической винтовой подгруппой с инвариантным точечным флагом $\mathfrak{F} = \{0\}$, т.е. $H = K_3^{5,3}\{0\}$, то однородное фактор-пространство $G(5)/K_3^{5,3}\{0\}$ будет нередуктивным.

<u>Замечание.</u> Подгруппа $K_3^{5,3}\{0\} \subset G(5)$ действует в пространстве R_5 нетранзитивно. Ее орбитами максимальной размерности будут трехмерные поверхности V_3 на гиперсферах $S_4 \subset R_5$. Но двумерными орбитами подгруппы $K_3^{5,3}\{0\}$ являются поверхности Веронезе, или, иными словами, регулярные изометрические погружения эллиптической плоскости S_2 в пространство R_5 (см. [3], стр. 106). Поэтому пространство $G(5)/K_3^{5,3}\{0\}$ допускает интерпретацию в виде пространства эквивалентных поверхностей Веронезе. Тем самым, предложение 1 утверждает, что пространство поверхностей Веронезе является нередуктивным.

<u>Доказательство предложения 1.</u> Нужно показать, что система для определения коэффициентов r^α_a в выражениях (4), которая является следствием условий (6) редуктивности, полученной из (5А) при учете системы (3) и условий (2), является в случае подгруппы $K_3^{5,3}\{0\}$ несовместной.

Так как подгруппа Ли движений $K_3^{5,3}\{0\}$ выделяется в группе $G(5)$ вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\begin{aligned}\omega^4 = \omega^5 = \omega^2_1 \mp A\omega^2 \mp 2A\omega^3 = \omega^3_1 \pm A\omega^3 = \omega^4_1 - A\omega^1 = \\ = \omega^5_1 = \omega^3_2 \mp 0{,}5A\omega^1 = \omega^4_2 + A\omega^3 = \omega^5_2 \mp \sqrt{1{,}5}A(\omega^2+\omega^3) = \\ = \omega^4_3 + A\omega^2 + 2A\omega^3 = \omega^5_3 \mp \sqrt{1{,}5}A(\omega^2+3\omega^3) = \omega^5_4 = 0\end{aligned}$$

(см. [3], стр. 106), то, с учетом (3), получается следующая система форм $\{\Theta^a \mid a=4,\dots,15\}$:

$$\begin{aligned}&\Theta^4 = \omega^4,\ \Theta^5 = \omega^5,\ \Theta^6 = \omega^2_1 \mp A\omega^2 \mp 2A\omega^3,\ \Theta^7 = \omega^3_1 \pm A\omega^3,\\ &\Theta^8 = \omega^4_1 - A\omega^1,\ \Theta^9 = \omega^5_1,\ \Theta^{10} = \omega^3_2 \mp 0{,}5A\omega^1,\ \Theta^{11} = \omega^4_2 + A\omega^3,\\ &\Theta^{12} = \omega^5_2 \mp \sqrt{1{,}5}A(\omega^2+\omega^3),\ \Theta^{13} = \omega^4_3 + A\omega^2 + 2A\omega^3,\\ &\Theta^{14} = \omega^5_3 \mp \sqrt{1{,}5}A(\omega^2+3\omega^3),\ \Theta^{15} = \omega^5_4 .\end{aligned} \tag{11}$$

Эта система форм дополняется по (4) до полного базиса инвариантных форм группы $G(5)$ формами

$$\vartheta^{\alpha} = \omega^{\alpha} + p^{\alpha}_{a}\Theta^{a}, \quad \alpha = 1,2,3, \tag{12}$$

где

$$p^{\alpha}_{a}\Theta^{a} = (-Ap^{\alpha}_{8} \mp 0{,}5Ap^{\alpha}_{10})\omega^{1} + (\mp Ap^{\alpha}_{6} \mp \sqrt{1{,}5}Ap^{\alpha}_{12} + Ap^{\alpha}_{13} \mp \sqrt{1{,}5}Ap^{\alpha}_{14})\omega^{2} +$$
$$+(\mp 2Ap^{\alpha}_{6} \pm Ap^{\alpha}_{7} + Ap^{\alpha}_{11} \mp \sqrt{1{,}5}Ap^{\alpha}_{12} + 2Ap^{\alpha}_{13} \mp 3\sqrt{1{,}5}Ap^{\alpha}_{14})\omega^{3} +$$
$$+p^{\alpha}_{4}\omega^{4} + p^{\alpha}_{5}\omega^{5} + p^{\alpha}_{6}\omega^{2}_{1} + \ldots + p^{\alpha}_{15}\omega^{5}_{4}, \quad \alpha = 1,2,3$$

Для краткости изложения опускаются подробные вычисления выражений коэффициентов $C^{\alpha}_{\beta c}$ через p^{α}_{a}, которые получаются дифференцированием (12) при учете выражений

$$\omega^{\alpha} = \vartheta^{\alpha} - p^{\alpha}_{a}\Theta^{a}\ (\alpha = 1,2,3),\ \omega^{2}_{1} = \pm A\vartheta^{2} \pm 2A\vartheta^{3} + (\mp Ap^{2}_{a}\Theta^{a} \mp 2Ap^{3}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{6}),$$
$$\omega^{3}_{1} = \mp A\vartheta^{3} + (\pm Ap^{3}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{7}),\quad \omega^{4}_{1} = A\vartheta^{1} + (-Ap^{1}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{8}),$$
$$\omega^{5}_{1} = \Theta^{9},\quad \omega^{3}_{2} = \pm 0{,}5A\vartheta^{1} + (\mp 0{,}5Ap^{1}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{10}),$$
$$\omega^{4}_{2} = -A\vartheta^{3} + (Ap^{3}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{11}),$$
$$\omega^{5}_{2} = \pm\sqrt{1{,}5}A\vartheta^{2} \pm \sqrt{1{,}5}A\vartheta^{3} + (\mp\sqrt{1{,}5}Ap^{2}_{a}\Theta^{a} \mp \sqrt{1{,}5}Ap^{3}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{12}),$$
$$\omega^{4}_{3} = -A\vartheta^{2} - 2A\vartheta^{3} + (Ap^{2}_{a}\Theta^{a} + 2Ap^{3}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{13}),$$
$$\omega^{5}_{3} = \pm\sqrt{1{,}5}A\vartheta^{2} \pm 3\sqrt{1{,}5}A\vartheta^{3} + (\mp\sqrt{1{,}5}Ap^{2}_{a}\Theta^{a} \mp 3\sqrt{1{,}5}Ap^{3}_{a}\Theta^{a} + \Theta^{14}),$$
$$\omega^{5}_{4} = \Theta^{15}$$

в уравнениях (2). Приведем здесь целиком лишь соотношения, являющиеся следствием уравнений $C^{1}_{\beta c}=0$. Именно, при таком предположении имеют место

$$p^{1}_{4} = 0,\ p^{1}_{5} = Ap^{1}_{15},\ p^{1}_{6} = p^{1}_{7} = 0,\ Ap^{1}_{8} = 1 \mp 0{,}5Ap^{1}_{10},$$
$$p^{1}_{9} = p^{1}_{11} = p^{1}_{12} = p^{1}_{13} = p^{1}_{14} = 0;$$
$$p^{2}_{4} = p^{2}_{5} = 0,\ p^{2}_{6} = -0{,}75p^{1}_{10} \pm (2A)^{-1},\ p^{2}_{7} = -1{,}5p^{1}_{10} \pm A^{-1},$$
$$p^{2}_{8} = p^{2}_{9} = p^{2}_{10} = 0,\ p^{2}_{11} = \mp 1{,}5p^{1}_{10} + 0{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{15} + A^{-1},$$
$$p^{2}_{12} = 1{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{10} \pm 0{,}5p^{1}_{15},\ p^{2}_{13} = \pm 0{,}75p^{1}_{10} + 1{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{15} - (2A)^{-1},$$
$$p^{2}_{14} = -0{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{10} \pm 1{,}5p^{1}_{15},\ p^{2}_{15} = 0;$$
$$p^{3}_{4} = p^{3}_{5} = p^{3}_{6} = 0,\ p^{3}_{7} = 0{,}75p^{1}_{10} \mp (2A)^{-1};\ p^{3}_{8} = p^{3}_{9} = p^{3}_{10} = 0,$$
$$p^{3}_{11} = \pm 0{,}75p^{1}_{10} - 0{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{15} - (2A)^{-1},\ p^{3}_{12} = -0{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{10} \mp 0{,}5p^{1}_{15},$$
$$p^{3}_{13} = -0{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{15},\ p^{3}_{14} = 0{,}5\sqrt{1{,}5}p^{1}_{10} \mp 0{,}5p^{1}_{15},\ p^{3}_{15} = 0,$$

причем p^{1}_{10} и p^{1}_{15} пока произвольные. Если же выписать еще уравнения, соответствующие соотношениям $C^2_{28} = C^3_{28} = 0$ и $C^2_{29} = C^3_{29} = 0$, то имеют место

$$\pm Ap^1_8 - Ap^2_7 \mp Ap^2_{11} = 0,$$
$$\pm 0{,}5Ap^1_8 - Ap^3_7 \mp Ap^3_{11} = 0,$$
$$\pm Ap^1_9 \pm \sqrt{1{,}5}Ap^2_6 \pm \sqrt{1{,}5}Ap^2_7 \mp Ap^2_{12} = 0,$$
$$\pm 0{,}5Ap^1_9 \pm \sqrt{1{,}5}Ap^3_6 \pm \sqrt{1{,}5}Ap^3_7 \mp Ap^3_{12} = 0.$$

Эта система превращается в систему для определения p^1_{10} и p^1_{15}, если подставить в нее полученные ранее выражения:

$$2{,}5Ap^1_{10} \mp 0{,}5\sqrt{1{,}5}Ap^1_{15} = \pm 1,$$
$$-1{,}75Ap^1_{10} \pm 0{,}5\sqrt{1{,}5}Ap^1_{15} = \mp 1{,}5,$$
$$\mp 3{,}75\sqrt{1{,}5}Ap^1_{10} - 0{,}5Ap^1_{15} = -1{,}5\sqrt{1{,}5},$$
$$\pm 1{,}25\sqrt{1{,}5}Ap^1_{10} + 0{,}5Ap^1_{15} = 0{,}5\sqrt{1{,}5}.$$

Попарное сложение первых и последних двух уравнений системы дает

$$0{,}75Ap^1_{10} = \mp 0{,}5, \quad \mp 2{,}5Ap^1_{10} = -1.$$

Но эти равенства не могут выполняться одновременно. Следовательно, пространство $G(5)/K_3^{5,3}\{0\}$, т.е. пространство поверхностей Веронезе, является нередуктивным. Предложение 1 доказано.

<u>Предложение 2</u>. Если подгруппа Ли движений H из серии 2 является либо 7-, либо 8-параметрической винтовой подгруппой с инвариантным точечным флагом $\mathfrak{F} = \{4\}$, т.е. $H = K_7^{5,4}\{4\}$ или $H = K_8^{5,4}\{4\}$, то соответствующие однородные фактор-пространства $G(5)/H$ будут нередуктивными.

<u>Доказательство</u>. Нужно провести выкладки, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве предложения 1. Для примера укажем здесь некоторые основные моменты в случае подгруппы $K_7^{5,4}\{4\}$, которая действует транзитивно на гиперплоскостях $R_4 \subset R_5$. Эта подгруппа определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^5 = \omega^5_1 = \omega^3_2 - \omega^4_1 = \omega^4_2 + \omega^3_1 = \omega^5_2 = \omega^4_3 - \omega^2_1 = \omega^5_3 = \omega^5_4 = 0.$$

Тем самым система форм

$$\theta^x = \omega^5, \quad \theta^y = \omega^5_1, \quad \theta^{10} = \omega^3_2 - \omega^4_1, \quad \theta^{11} = \omega^4_2 + \omega^5_1, \quad \theta^{12} = \omega^5_2,$$
$$\theta^{13} = \omega^4_3 - \omega^2_1, \quad \theta^{14} = \omega^5_3, \quad \theta^{15} = \omega^5_4$$

11

дополняется до полного базиса инвариантных форм группы $G(5)$ формами

$$\vartheta^1=\omega^1+p^1_a\theta^a,\ \vartheta^2=\omega^2+p^2_a\theta^a,\ \vartheta^3=\omega^3+p^3_a\theta^a,\ \vartheta^4=\omega^4+p^4_a\theta^a,$$
$$\vartheta^5=\omega^2_1+p^5_a\theta^a,\ \vartheta^6=\omega^3_1+p^6_a\theta^a,\ \vartheta^7=\omega^4_1+p^7_a\theta^a,\ a=8,\dots,15.$$

Если выразить все формы $\{\omega^{\varkappa},\omega^{\varkappa}_{\mathfrak{z}}\}$ через формы $\{\vartheta^{\alpha},\theta^a\}$, учитывая выписанные соотношения, то с помощью структурных уравнений (2) внешнее дифференцирование форм ϑ^1, ϑ^2 дает

$$\begin{aligned}
d\vartheta^1 &= \vartheta^1\wedge[p^1_8\theta^9]+\vartheta^2\wedge[p^5_a\theta^a+p^1_8\theta^{12}]+\vartheta^3\wedge[p^6_a\theta^a+p^1_8\theta^{14}]+\\
&+\vartheta^4\wedge[p^7_a\theta^a+p^1_8\theta^{15}]+\vartheta^5\wedge[-p^2_a\theta^a+p^1_9\theta^{12}-p^1_{12}\theta^9+p^1_{14}\theta^{15}-p^1_{15}\theta^{14}]+\\
&+\vartheta^6\wedge[-p^3_a\theta^a+p^1_9\theta^{14}-p^1_{14}\theta^9-p^1_{12}\theta^{15}+p^1_{15}\theta^{12}]+\\
&+\vartheta^7\wedge[-p^4_a\theta^a+p^1_9\theta^{15}+p^1_{12}\theta^{14}-p^1_{14}\theta^{12}-p^1_{15}\theta^9]+\vartheta\wedge\vartheta+\theta\wedge\theta,\\
d\vartheta^2 &= \vartheta^1\wedge[-p^5_a\theta^a+p^2_8\theta^9]+\vartheta^2\wedge[p^2_8\theta^{12}]+\vartheta^3\wedge[p^7_a\theta^a-\theta^{10}+p^2_8\theta^{14}]+\\
&+\vartheta^4\wedge[p^6_a\theta^a+\theta^{11}+p^2_8\theta^{15}]+\vartheta^5\wedge[p^1_a\theta^a+p^2_9\theta^{12}-p^2_{12}\theta^9+p^2_{14}\theta^{15}-p^2_{15}\theta^{14}]+\\
&+\vartheta^6\wedge[p^4_a\theta^a+p^2_9\theta^{14}-p^2_{14}\theta^9-p^2_{12}\theta^{15}+p^2_{15}\theta^{12}]+\\
&+\vartheta^7\wedge[-p^3_a\theta^a+p^2_9\theta^{15}+p^2_{12}\theta^{14}-p^2_{14}\theta^{12}-p^2_{15}\theta^9]+\vartheta\wedge\vartheta+\theta\wedge\theta.
\end{aligned}$$

Здесь условно через $\vartheta\wedge\vartheta$ и $\theta\wedge\theta$ обозначены формы, являющиеся линейными комбинациями произведений вида $\vartheta^{\beta}\wedge\vartheta^{\gamma}$ и $\theta^{\delta}\wedge\theta^{\varepsilon}$, соответственно. При предположении редуктивности рассматриваемого пространства $G(5)/K^{5,4}_4\{4\}$ из условий (6) и из равенств $C^1_{19}=p^1_8$, $C^2_{2,12}=p^2_8$ следует, что $p^1_8=p^2_8=0$. Но тогда не могут одновременно обращаться в нуль $C^1_{3,11}$ и $C^2_{4,11}$, а также $C^1_{4,10}$ и $C^2_{3,10}$, так как

$$C^1_{3,11}=p^6_{11},\quad C^2_{4,11}=p^6_{11}+1$$

и

$$C^1_{4,10}=p^7_{10},\quad C^2_{3,10}=p^7_{10}-1.$$

Тем самым доказано, что пространство $G(5)/K^{5,4}_4\{4\}$ является нередуктивным. Аналогичного вида противоречия возникнут в случае предположения редуктивности пространства $G(5)/K^{5,4}_8\{4\}$.

<u>Предложение 3</u>. Если подгруппа Ли $H\in \text{Я}^{5,m}$ группы Ли движений $G(5)$ приводима с инвариантным векторно-точечным или векторным флагом, или неприводима, то однородное фактор-пространство $G(5)/H$ будет нередуктивным.

Для краткости изложения подробное доказательство опускается, так как оно проводится от противного вполне аналогично доказательствам предложений 1 и 2. Именно, для каждой упомянутой в предложении 3 подгруппы предполагается, что соответствующее пространство $G(5)/H$ редуктивно. Не останавливаясь на выкладках, отметим лишь, что системы для определения коэффициентов μ^{α}_{a} в выражениях (4), соответствующие условиям

Таблица 1

Собственные подгруппы Ли движений $H \subset G(5)$, для которых однородные фактор-пространства $G(5)/H$ нередуктивны

Серия	Приводимые с точечным флагом		Приводимые с векторно-точечным флагом		Приводимые с векторным флагом		Неприводимые	
	Тип подгруппы	Орбиты макс. размерн	Тип подгруппы	Орбиты макс. размерн.	Тип подгруппы	Орбиты макс. размерн.	Тип подгруппы	Орбиты макс. разм.
1	$K_5^{5,3}\{0\}$	$V_3 \subset S_4$	$K^{5,4}[1,2;3]$ $K^{5,4}[1;3\}$ $K^{5,4}[1;2\}$ $K_3^{5,3}[1,2;3\}$ $K_4^{5,3}[1;3\}$ $K_4^{5,4}[1;3\}$	$R_3^{[1,2]} \times S_1$ $R_3^{[1]} \times S_4$ $R_2^{[1]} \times S_2$ $R_2^{[1]} \times \Gamma_{(3)}$ $R_1 \times \Gamma_{(3)}$ $R_3^{[1]} \times S_1$	$K^{5,5}[1,2,3,4]$ $K^{5,5}[1,2,3]$ $K^{5,5}[1,3]$ $K^{5,5}[1,2]$ $K^{5,5}[2]$ $K^{5,5}[1]$ $K_5^{5,5}[1,2,3]$ $K_5^{5,5}[1,3]$ $K_6^{5,5}[1,3]$ $K_8^{5,5}[1]$ $K_9^{5,5}[1]$	$R_5^{[1,2,3,4]}$ $R_5^{[1,2,3]}$ $R_5^{[1,3]}$ $R_5^{[1,2]}$ $R_5^{[2]}$ $R_5^{[1]}$ $R_5^{[1,2,3]}$ $R_5^{[1,3]}$ $R_5^{[1,3]}$ $R_5^{[1]}$ $R_5^{[1]}$	$K_8^{5,5}$	R_5
2	$K_7^{5,4}\{4\}$ $K_8^{5,4}\{4\}$	R_4 R_4	$K^{5,2}[1;2,3,4\}$ $K^{5,3}[1,2;3,4\}$ $K^{5,3}[1;2,3]$ $K^{5,3}[1;3,4\}$ $K^{5,4}[1;2,3,4]$ $K^{5,4}[1,2;4\}$ $K^{5,4}[2;4]$ $K^{5,4}[1;4\}$ $K_2^{5,2}[1;2,3\}$ $K_3^{5,3}[1;3,4\}$ $K_4^{5,4}[1,2;4\}$ $K_5^{5,4}[2;4\}$	$R_2^{[1]}$ $R_3^{[1,2]}$ $R_2^{[1]} \times S_1$ $R_3^{[1]}$ $R_4^{[1,2,3]}$ $R_4^{[1,2]}$ $R_4^{[2]}$ $R_4^{[1]}$ $R_1 \times \Gamma_{(3)}$ $R_3^{[1]}$ $R_4^{[1,2]}$ $R_4^{[2]}$				

редуктивности (6), оказываются несовместными во всех 18 случаях приводимых подгрупп Ли $H \subset G(5)$ с инвариантными векторно-точечными флагами $\mathfrak{F}$ (из них 6 относятся к серии 1). То же верно для 11 случаев приводимых подгрупп Ли $H \subset G(5)$ с инвариантными векторными флагами $\mathfrak{F}$ (они все из серии 1, так как действуют в пространстве R_5 транзитивно), а также для единственной неприводимой собственной подгруппы Ли движений $H = K_8^{5,5}$ в группе $G(5)$.

Результаты предложений 1 – 3 представлены кратко в таблице 1.

3. <u>Редуктивные фактор-пространства $G(5)/H$</u>. Для указанных фактор-пространств имеет место следующее утверждение.

<u>Предложение 4</u>. Однородное фактор-пространство $G(5)/H$ группы Ли движений $G(5)$ вещественного евклидова пространства R_5 по ее замкнутой подгруппе Ли $H \in \mathfrak{R}^{5,m}$ редуктивно тогда и только тогда, когда подгруппа H приводима с инвариантным точечным флагом $\mathfrak{F}$, но не совпадает ни с одной из подгрупп $K_3^{5,5}\{0\}$, $K_4^{5,4}\{4\}$, $K_8^{5,4}\{4\}$, рассматриваемых в предложениях I и 2.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u> условий предложения является прямым следствием результатов предыдущего пункта. Действительно, подгруппы Ли $H \in \mathfrak{R}^{5,m}$ могут по определению быть либо неприводимыми, либо приводимыми с инвариантными точечными, векторно-точечными или векторными флагами $\mathfrak{F}$. Если пространство $G(5)/H$ является редуктивным, то, с учетом предложений 1, 2 и 3, существует единственная возможность – подгруппа Ли $H \subset G(5)$ приводима с инвариантным точечным флагом и при этом $H \notin \{K_3^{5,5}\{0\},\ K_4^{5,4}\{4\},\ K_8^{5,4}\{4\}\}$.

<u>Достаточность</u>. Покажем совместность всех систем, которые являются следствием условий (6) для определения коэффициентов r^{α}_{a} в выражениях (4) в каждом случае приводимых подгрупп Ли H с инвариантными точечными флагами $\mathfrak{F}$, не рассмотренных в предложениях 1 и 2.

В случае редуктивности $G(5)/H$ вычисление коэффициентов $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$, наряду с коэффициентами $C^{\alpha}_{\rho c}$, в выражениях (5А) дает по формулам (10) возможность характеризации структуры подалгебр Ли $\mathfrak{f}$. Также проверяются условия (7) симметричности, условия (8) и (9) приводимости и вполне приводимости, исходя из соотношений (5Б). Мы не будем приводить подробных выкладок для всех 25 типов собственных подгрупп Ли $H \in \mathfrak{R}^{5,m}$ ($m = 1, 2, 3, 4$), удовлетворяющих предположению сформулированного предложения. Отметим, что среди них к серии 1 относится 11 типов подгрупп $H \subset G(5)$. Ограничимся здесь только двумя наиболее характерными случаями: 1) винтовой подгруппой $H = K_2^{5,2}\{1,3\}$ из серии 1 (№ 21 по таблице 2); 2) подгруппой стационарности $H = K^{5,3}\{2,3\}$ из серии 2 (№ 8 по таблице 2).

1) Рассмотрим подгруппу $H = K_2^{5,2}\{1,3\}$ – 2-параметрическую винтовую подгруппу из серии 1, орбиты максимальной размерности которой 2-мерны. Как показано в [2], семейство двумерных орбит этой подгруппы содержит поверхности трех основных видов в зависимости от того, является ли индикатриса нормальной кривизны орбиты эллипсом или отрезком и, кроме того, от расположения точки орбиты на ортооптической окружности индикатрисы. Если индикатриса является эллипсом, то орбиты V_2 замкнутой подгруппы $K_2^{5,2}\{1,3\}$ будут винтовыми поверхностями $\Gamma \times \Gamma$, получаемыми при винтовом движении некоторой замкнутой линии V_1 постоянной кривизны, находящейся на поверхности Клиффорда гиперплоскости R_4, ортогональной в R_5 к оси R_1 винтового движения. Линия V_1 является либо замкнутой кривой $\Gamma_{(4)}$, либо окружностью S_1. Если индикатрисой орбиты V_2 будет отрезок и точка $M \in V_2$ совпадает с одним из его концов, то орбитами V_2 замкнутой подгруппы $K_2^{5,2}\{1,3\}$ будут прямые цилиндры $R_1 \times \Gamma_{(4)}$, построенные на замкнутых линиях постоянной кривизны $\Gamma_{(4)}$ в гиперплоскостях R_4, вполне ортогональных к образующим R_1. Если же индикатриса является отрезком, но точка $M \in V_2$, находящаяся на его ортооптической окружности, не совпадает ни с одной из его концевых точек, то орбита V_2 является поверхностью переноса $S_1 \times \Gamma_{(3)}$ винтовых линий плоскостей R_3 вдоль окружностей плоскостей R_2, вполне ортогональных к R_3 в R_5.

Подгруппа $K_2^{5,2}\{1,3\}$, орбитами которых являются $\Gamma \times \Gamma$, выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = \omega^2_1 = \omega^3_1 - (\alpha + a)\omega^1 - \omega^4_1 - \beta\omega^1 - b\omega^2 =$$
$$= \omega^5_1 = \omega^3_2 - (\alpha - a)\omega^2 = \omega^4_2 - b\omega^1 - \beta\omega^2 = \omega^5_2 = \omega^4_3 =$$
$$= \omega^5_3 + \frac{\beta A_6 - bA_7}{\alpha - a}\omega^1 - \frac{bA_6 - \beta A_7}{\alpha + a}\omega^2 = \omega^5_4 - A_6\omega^1 - A_7\omega^2 = 0, \quad (11)$$

где, кроме условий $a > b > 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$,

$$a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0, \tag{12А}$$

$$b(\alpha - a)A_6^2 + 2a\beta A_6 A_7 - b(\alpha + a)A_7^2 - 2ab(\alpha^2 - a^2) = 0, \tag{12Б}$$

выполняются еще некоторые дополнительные (см. [2], стр. 107 – 125). Другие описанные орбиты получаются из $\Gamma \times \Gamma$ предельным переходом: при $b \to 0$, $\beta = 0$ орбитами подгруппы $K_2^{5,2}\{1,3\}$ будут $R_1 \times \Gamma_{(4)}$ и при $b \to 0$, $\beta \neq 0$, соответственно, $S_1 \times \Gamma_{(3)}$. Исследуем подробнее случай пространства $G(5)/K_2^{5,2}\{1,3\}$, которое допускает интерпретацию в виде 13-мерного пространства прямых цилиндров $R_1 \times \Gamma_{(4)}$. Соответствующая подгруппа $K_2^{5,2}\{1,3\}$ определяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = \omega^2_1 = \omega^3_1 - 2\alpha\omega^1 = \omega^4_1 = \omega^5_1 = \omega^3_2 =$$
$$= \omega^4_2 = \omega^5_2 = \omega^4_3 - A_3\omega^1 = \omega^5_3 - A_5\omega^1 = \omega^5_4 - A\omega^1 = 0, \tag{13}$$

которую при подходящем изменении обозначений, по сказанному выше, можно получить из (11) при $b \to 0$, $\beta = 0$. Следовательно, по (3) системой форм $\{\Theta^a | a = 3, \ldots, 15\}$ будет

$$\Theta^3 = \omega^3,\ \Theta^4 = \omega^4,\ \Theta^5 = \omega^5,\ \Theta^6 = \omega^2_1,\ \Theta^7 = \omega^3_1 - 2\alpha\omega^1,$$
$$\Theta^8 = \omega^4_1,\ \Theta^9 = \omega^5_1,\ \Theta^{10} = \omega^3_2,\ \Theta^{11} = \omega^4_2,\ \Theta^{12} = \omega^5_2,$$
$$\Theta^{13} = \omega^4_3 - A_3\omega^1,\ \Theta^{14} = \omega^5_3 - A_5\omega^1,\ \Theta^{15} = \omega^5_4 - A\omega^1.$$

Она дополняется до полного базиса инвариантных форм группы $G(5)$ формами .

$$\vartheta^1 = \omega^1 + \mu^1_a\Theta^a = (1 - 2\alpha\mu^1_7 - A_3\mu^1_{13} - A_5\mu^1_{14} - A\mu^1_{15})\omega^1 + \mu^1_3\omega^3 + \ldots + \mu^1_{15}\omega^5_4,$$
$$\vartheta^2 = \omega^2 + \mu^2_a\Theta^a = (-2\alpha\mu^2_7 - A_3\mu^2_{13} - A_5\mu^2_{14} - A\mu^2_{15})\omega^1 + \omega^2 + \mu^2_3\omega^3 + \ldots + \mu^2_{15}\omega^5_4. \tag{14}$$

Учитывая теперь следующие из этих соотношений выражения

$$\omega^3_1 = 2\alpha\vartheta^1 + (-2\alpha\mu^1_a\Theta^a + \Theta^7),\ \omega^4_3 = A_3\vartheta^1 + (-A_3\mu^1_a\Theta^a + \Theta^{13}),$$
$$\omega^5_3 = A_5\vartheta^1 + (-A_5\mu^1_a\Theta^a + \Theta^{14}),\ \omega^5_4 = A\vartheta^1 + (-A\mu^1_a\Theta^a + \Theta^{15})$$

в структурных уравнениях (2), внешнее дифференцирование форм (14) дает

$$d\vartheta^1 = \vartheta^1 \wedge [\{2\alpha(1 - 2\alpha\mu^1_7 - A_3\mu^1_{13} - A_5\mu^1_{14} - A\mu^1_{15}) - A_3\mu^1_4 - A_5\mu^1_5\}\Theta^3 +$$
$$+ (A_3\mu^1_3 - A\mu^1_5)\Theta^4 + (A_5\mu^1_3 + A\mu^1_4)\Theta^5 + 2\alpha\mu^1_{10}\Theta^6 + (\mu^1_3 - A_3\mu^1_8 - A_5\mu^1_9)\Theta^7 +$$
$$+ (\mu^1_4 + A_3\mu^1_7 - A\mu^1_9 - 2\alpha\mu^1_{13})\Theta^8 + (\mu^1_5 + A_5\mu^1_7 + A\mu^1_8 - 2\alpha\mu^1_{14})\Theta^9 +$$
$$+ (-2\alpha\mu^1_6 - A_3\mu^1_{11} - A_5\mu^1_{12})\Theta^{10} + (A_3\mu^1_{10} - A\mu^1_{12})\Theta^{11} + (A_5\mu^1_{10} + A\mu^1_{11})\Theta^{12} +$$
$$+ (2\alpha\mu^1_8 - A\mu^1_{14} + A_5\mu^1_{15})\Theta^{13} + (2\alpha\mu^1_9 + A\mu^1_{13} - A_3\mu^1_{15})\Theta^{14} + (-A_5\mu^1_{13} + A_3\mu^1_{14})\Theta^{15}] +$$
$$+ \vartheta^2 \wedge [-(1 - 2\alpha\mu^1_7 - A_3\mu^1_{13} - A_5\mu^1_{14} - A\mu^1_{15})\Theta^6 + \mu^1_3\Theta^{10} + \mu^1_4\Theta^{11} + \mu^1_5\Theta^{12}] + \Theta \wedge \Theta,$$

$$
\begin{aligned}
d\vartheta^2 = \vartheta^1\wedge[\{&-2\alpha(2\alpha\mu^2_7+A_3\mu^2_{13}+A_5\mu^2_{14}+A\mu^2_{15})-A_3\mu^2_4-A_5\mu^2_5\}\Theta^3+\\
&+(A_3\mu^2_3-A\mu^2_5)\Theta^4+(A_5\mu^2_3+A\mu^2_4)\Theta^5+(1-2\alpha\mu^2_{10})\Theta^6+(\mu^2_3-A_3\mu^2_8-A_5\mu^2_9)\Theta^7+\\
&+(\mu^2_4+A_3\mu^2_7-A\mu^2_9-2\alpha\mu^2_{13})\Theta^8+(\mu^2_5+A_5\mu^2_7+A\mu^2_8-2\alpha\mu^2_{14})\Theta^9+\\
&+(-2\alpha\mu^2_6-A_3\mu^2_{11}-A_5\mu^2_{12})\Theta^{10}+(A_3\mu^2_{10}-A\mu^2_{12})\Theta^{11}+(A_5\mu^2_{10}+A\mu^2_{11})\Theta^{12}+\\
&+(2\alpha\mu^2_8-A\mu^2_{14}+A_5\mu^2_{15})\Theta^{13}+(2\alpha\mu^2_9+A\mu^2_{13}-A_3\mu^2_{15})\Theta^{14}+\\
&+(-A_5\mu^2_{13}+A_3\mu^2_{14})\Theta^{15}]+\vartheta^2\wedge[(2\alpha\mu^2_7+A_3\mu^2_{13}+A_5\mu^2_{14}+A\mu^2_{15})\Theta^6+\\
&+\mu^2_3\Theta^{10}+\mu^2_4\Theta^{11}+\mu^2_5\Theta^{12}]+\Theta\wedge\Theta,
\end{aligned}
$$

где, также как и раньше, через $\Theta\wedge\Theta$ обозначены формы, являющиеся линейными комбинациями произведений вида $\Theta^b\wedge\Theta^c$. Решением линейной относительно μ^1_a, μ^2_a системы, получаемой из условий (6) редуктивности, будет в исследуемом случае

$$
\begin{aligned}
&\mu^1_3=\mu^1_4=\mu^1_5=\mu^1_6=0,\\
&\mu^1_7=(4\alpha A_5)^{-1}[(4\alpha^2-A_3^2-A_5^2-A^2)\mu^1_{14}+A_5],\\
&\mu^1_8=(4\alpha A)^{-1}[(4\alpha^2+A_3^2+A_5^2+A^2)\mu^1_{14}-A_5],\\
&\mu^1_9=-A_3(4\alpha AA_5)^{-1}[(4\alpha^2+A_3^2+A_5^2+A^2)\mu^1_{14}-A_5],\\
&\mu^1_{10}=\mu^1_{11}=\mu^1_{12}=0,\ \mu^1_{13}=A_3A_5^{-1}\mu^1_{14},\\
&\mu^1_{15}=(2AA_5)^{-1}[(A^2-4\alpha^2-A_3^2-A_5^2)\mu^1_{14}+A_5],\\
&\mu^2_3=\mu^2_4=\mu^2_5=\mu^2_6=0,\\
&\mu^2_7=(4\alpha A_5)^{-1}(4\alpha^2-A_3^2-A_5^2-A^2)\mu^2_{14},\ \mu^2_8=(4\alpha A)^{-1}(4\alpha^2+A_3^2+A_5^2+A^2)\mu^2_{14},\\
&\mu^2_9=-A_3(4\alpha AA_5)^{-1}(4\alpha^2+A_3^2+A_5^2+A^2)\mu^2_{14},\ \mu^2_{10}=(2\alpha)^{-1},\ \mu^2_{11}=-A_5(2\alpha A)^{-1},\\
&\mu^2_{12}=A_3(2\alpha A)^{-1},\ \mu^2_{13}=A_3A_5^{-1}\mu^2_{14},\ \mu^2_{15}=(2AA_5)^{-1}(A^2-4\alpha^2-A_3^2-A_5^2)\mu^2_{14}.
\end{aligned}
$$

Решение содержит два параметра μ^1_{14}, μ^2_{14}. Следовательно, для подгруппы $K_2^{5,2}\{1,3\}$, задаваемой системой (13), оснащение, которое определяет редуктивную структуру пространства замкнутых прямых цилиндров $R_1\times\Gamma_{(4)}$, существует с 2-параметрическим произволом. В его уравнениях $\vartheta^1=0$, $\vartheta^2=0$ имеют место

$$
\begin{aligned}
\vartheta^1 &= \mu^1_7(\mu^1_{14})\omega^3_1+\mu^1_8(\mu^1_{14})\omega^4_1+\mu^1_9(\mu^1_{14})\omega^5_1+\mu^1_{13}(\mu^1_{14})\omega^4_3+\\
&+\mu^1_{14}\omega^5_3+\mu^1_{15}(\mu^1_{14})\omega^5_4,\\
\vartheta^2 &= \omega^2+\mu^2_7(\mu^2_{14})\omega^3_1+\mu^2_8(\mu^2_{14})\omega^4_1+\mu^2_9(\mu^2_{14})\omega^5_1+(2\alpha)^{-1}\omega^3_2-A_5(2\alpha A)^{-1}\omega^4_2+\\
&+A_3(2\alpha A)^{-1}\omega^5_2+\mu^2_{13}(\mu^2_{14})\omega^4_3+\mu^2_{14}\omega^5_3+\mu^2_{15}(\mu^2_{14})\omega^5_4.
\end{aligned}
$$

Для более подробного исследования редуктивного пространства цилиндров $R_1 \times \Gamma_{(4)}$ запишем некоторые внешние дифференциалы форм θ^a. Именно,

$$d\theta^6 = d\omega^2_1 = \vartheta^1\wedge(-2\alpha\theta^{10}) + (2\alpha p^1_a\theta^a - \theta^7)\wedge\theta^{10} - \theta^8\wedge\theta^{11} - \theta^9\wedge\theta^{12},$$

$$d\theta^{10} = d\omega^3_2 = \vartheta^1\wedge(2\alpha\theta^6 + A_3\theta^{11} + A_5\theta^{12}) - (2\alpha p^1_a\theta^a - \theta^7)\wedge\theta^6 -$$
$$-(A_3 p^1_a\theta^a - \theta^{13})\wedge\theta^{11} - (A_5 p^1_a\theta^a - \theta^{14})\wedge\theta^{12},$$

$$d\theta^{11} = d\omega^4_2 = \vartheta^1\wedge(-A_3\theta^{10} + A\theta^{12}) - \theta^6\wedge\theta^8 + (A_3 p^1_a\theta^a - \theta^{13})\wedge\theta^{10} -$$
$$-(Ap^1_a\theta^a - \theta^{15})\wedge\theta^{12},$$

$$d\theta^{12} = d\omega^5_2 = \vartheta^1\wedge(-A_5\theta^{10} - A\theta^{11}) - \theta^6\wedge\theta^9 + (A_5 p^1_a\theta^a - \theta^{14})\wedge\theta^{10} +$$
$$+(Ap^1_a\theta^a - \theta^{15})\wedge\theta^{11}.$$

С одной стороны, отсюда следует, что $C^6_{8,11} = C^6_{9,12} = C^{11}_{6,8} = -1, C^{12}_{6,9} = -1$, т.е. условия (7) симметричности не выполняются. С другой стороны, при $\{i\} = \{6, 10, 11, 12\}$ и $\{u\} = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 14, 15\}$ от нуля отличны лишь следующие $C^i_{\beta a}$:

$$C^6_{1,10} = -2\alpha,\ C^{10}_{1,6} = 2\alpha,\ C^{10}_{1,11} = A_3,\ C^{10}_{1,12} = A_5,$$
$$C^{11}_{1,10} = -A_3,\ C^{11}_{1,12} = A,\ C^{12}_{1,10} = -A_5,\ C^{12}_{1,11} = -A.$$

Тем самым, для рассматриваемого пространства условия приводимости (8) выполняются. Но так как

$$d\theta^3 = d\omega^3 = \vartheta^1\wedge(A_3\theta^4 + A_5\theta^5 + \theta^7) + \vartheta^2\wedge\theta^{10} + \theta\wedge\theta,$$

где, как и раньше $\theta\wedge\theta$ обозначает линейную комбинацию произведений вида $\theta^b\wedge\theta^c$, то $C^3_{2,10} = 1$ и условия полной приводимости (9) в фиксированном нами базисе не выполняются.

Нами доказано, что редуктивное пространство замкнутых цилиндров $R_1 \times \Gamma_{(4)}$ является несимметрическим и приводимым. Отметим также, что при $H = K_2^{5,2}\{1,3\}$ имеет место $\dim \mathfrak{f} = 2$, которое влечет неполупростоту алгебры Ли $\mathfrak{f}$ этой подгруппы.

Если интерпретировать пространство $G(5)/K_2^{5,2}\{1,3\}$ как пространство винтовых поверхностей $\Gamma\times\Gamma$, то аналогичное приведенному доказательство дает, что это пространство редуктивное и оснащение, определяющее его редуктивную структуру, определено однозначно. При интерпретации пространства $G(5)/K_2^{5,2}\{1,3\}$ как пространства поверхностей переноса $S_1\times\Gamma_{(3)}$, оно также редуктивно, но соответствующее оснащение определяется 2-параметрическим произволом, как и в случае пространства цилиндров $R_1 \times \Gamma_{(4)}$.

Как пространство поверхностей $\Gamma \times \Gamma$, так и пространство поверхностей $S_1 \times \Gamma_{(3)}$ является несимметрическим, а вопрос об их приводимости остается открытым. В фиксированных нами базисах $\{\vartheta^\alpha, \theta^a\}$ условия (8) не выполняются.

2) Рассмотрим случай подгруппы $H = K^{5,3}\{2,3\}$ из серии 2. Она определяется в группе движений $G(5)$ вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4 = \omega^5 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^5{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 = \omega^5{}_2 =$$
$$= \omega^4{}_3 - a_5^2\omega^3 = \omega^5{}_3 = \omega^5{}_4 = 0,$$

где $a_5^2 \neq 0$, и ее орбитами максимальной размерности будут цилиндры с двумерными образующими, построенные на окружностях плоскостей R_2, вполне ортогональных к образующим, т.е. $V_3 = R_2 \times S_1 \subset R_4$ (см. [3], стр. 92).

Теперь

$$\begin{aligned}&\theta^5 = \omega^4,\ \theta^6 = \omega^5,\ \theta^7 = \omega^3{}_1,\ \theta^8 = \omega^4{}_1,\ \theta^9 = \omega^5{}_1,\ \theta^{10} = \omega^3{}_2,\\ &\theta^{11} = \omega^4{}_2,\ \theta^{12} = \omega^5{}_2,\ \theta^{13} = \omega^4{}_3 - a_5^2\omega^3,\ \theta^{14} = \omega^5{}_3,\ \theta^{15} = \omega^5{}_4.\end{aligned} \tag{15}$$

Эта система форм $\{\theta^a \mid a = 5,\dots,15\}$ дополняется до полного базиса инвариантных форм группы Ли $G(5)$ формами

$$\vartheta^1 = \omega^1 + p^1{}_a\theta^a = \omega^1 - a_5^2 p^1{}_{13}\omega^3 + p^1{}_5\omega^4 + \dots + p^1{}_{15}\omega^5{}_4,$$
$$\vartheta^2 = \omega^2 + p^2{}_a\theta^a = \omega^2 - a_5^2 p^2{}_{13}\omega^3 + p^2{}_5\omega^4 + \dots + p^2{}_{15}\omega^5{}_4,$$
$$\vartheta^3 = \omega^3 + p^3{}_a\theta^a = (1 - a_5^2 p^3{}_{13})\omega^3 + p^3{}_5\omega^4 + \dots + p^3{}_{15}\omega^5{}_4,$$
$$\vartheta^4 = \omega^2{}_1 + p^4{}_a\theta^a = -a_5^2 p^4{}_{13}\omega^3 + \omega^2{}_1 + p^4{}_5\omega^4 + \dots + p^4{}_{15}\omega^5{}_4.$$

Их внешнее дифференцирование, с учетом структурных уравнений (2), дает

$$\begin{aligned}d\vartheta^1 = {}&\vartheta^1\wedge[-a_5^2p^1{}_{13}\theta^7 + p^1{}_5\theta^8 + p^1{}_6\theta^9] + \vartheta^2\wedge[p^4{}_a\theta^a - a_5^2p^1{}_{13}\theta^{10} + p^1{}_5\theta^{11} +\\ &+ p^1{}_6\theta^{12}] + \vartheta^3\wedge[-a_5^4p^1{}_{13}\theta^5 - (1 + a_5^2p^1{}_8)\theta^7 + a_5^2p^1{}_7\theta^8 - a_5^2p^1{}_{11}\theta^{10} +\\ &+ a_5^2p^1{}_{10}\theta^{11} + p^1{}_5\theta^{13} + (p^1{}_6 + a_5^2p^1{}_{15})\theta^{14} + a_5^2p^1{}_{14}\theta^{15}] + \vartheta^4\wedge[-p^2{}_a\theta^a -\\ &- p^1{}_{10}\theta^7 - p^1{}_{11}\theta^8 - p^1{}_{12}\theta^9 + p^1{}_7\theta^{10} + p^1{}_8\theta^{11} + p^1{}_9\theta^{12}] - \vartheta^2\wedge\vartheta^4 + \theta\wedge\theta,\\ d\vartheta^2 = {}&\vartheta^1\wedge[-p^4{}_a\theta^a - a_5^2p^2{}_{13}\theta^7 + p^2{}_5\theta^8 + p^2{}_6\theta^9] + \vartheta^2\wedge[-a_5^2p^2{}_{13}\theta^{10} +\\ &+ p^2{}_5\theta^{11} + p^2{}_6\theta^{12}] + \vartheta^3\wedge[-a_5^4p^2{}_{13}\theta^5 - a_5^2p^2{}_8\theta^7 + a_5^2p^2{}_7\theta^8 -\\ &-(1 + a_5^2p^2{}_{11})\theta^{10} + a_5^2p^2{}_{10}\theta^{11} + p^2{}_5\theta^{13} + (p^2{}_6 + a_5^2p^2{}_{15})\theta^{14} +\end{aligned}$$

12

$$+a_5^2 p^2{}_{14}\theta^{15}] + \vartheta^4\wedge[p^1{}_a\theta^a - p^2{}_{10}\theta^7 - p^2{}_{11}\theta^8 - p^2{}_{12}\theta^9 + p^2{}_7\theta^{10} +$$
$$+ p^2{}_8\theta^{11} + p^2{}_9\theta^{12}] + \vartheta^1\wedge\vartheta^4 + \theta\wedge\theta,$$

$$d\vartheta^3 = \vartheta^1\wedge[(1-a_5^2 p^3{}_{13})\theta^7 + p^3{}_5\theta^8 + p^3{}_6\theta^9] + \vartheta^2\wedge[(1-a_5^2 p^3{}_{13})\theta^{10} + p^3{}_5\theta^{11} +$$
$$+ p^3{}_6\theta^{12}] + \vartheta^3\wedge[a_5^2(1-a_5^2 p^3{}_{13})\theta^5 - a_5^2 p^3{}_8\theta^7 + a_5^2 p^3{}_7\theta^8 - a_5^2 p^3{}_{11}\theta^{10} +$$
$$+ a_5^2 p^3{}_{10}\theta^{11} + p^3{}_5\theta^{13} + (p^3{}_6 + a_5^2 p^3{}_{15})\theta^{14} + a_5^2 p^3{}_{14}\theta^{15}] + \vartheta^4\wedge[-p^3{}_{10}\theta^7 -$$
$$- p^3{}_{11}\theta^8 - p^3{}_{12}\theta^9 + p^3{}_7\theta^{10} + p^3{}_8\theta^{11} + p^3{}_9\theta^{12}] + \theta\wedge\theta,$$

$$d\vartheta^4 = \vartheta^1\wedge[-a_5^2 p^4{}_{13}\theta^7 + p^4{}_5\theta^8 + p^4{}_9\theta^9] + \vartheta^2\wedge[-a_5^2 p^4{}_{13}\theta^{10} + p^4{}_5\theta^{11} +$$
$$+ p^4{}_6\theta^{12}] + \vartheta^3\wedge[-a_5^4 p^4{}_{13}\theta^5 - a_5^2 p^4{}_8\theta^7 + a_5^2 p^4{}_7\theta^8 - a_5^2 p^4{}_{11}\theta^{10} +$$
$$+ a_5^2 p^4{}_{10}\theta^{11} + p^4{}_5\theta^{13} + (p^4{}_6 + a_5^2 p^4{}_{15})\theta^{14} + a_5^2 p^4{}_{14}\theta^{15}] + \vartheta^4\wedge[-p^4{}_{10}\theta^7 -$$
$$- p^4{}_{11}\theta^8 - p^4{}_{12}\theta^9 + p^4{}_7\theta^{10} + p^4{}_8\theta^{11} + p^4{}_9\theta^{12}] + \theta\wedge\theta .$$

Следующая при условиях (6) из этих соотношений система будет совместной, если

$$p^1{}_5 = p^1{}_6 = p^1{}_7 = 0,\ p^1{}_8 = -a_5^{-2},\ p^1{}_{10} = p^1{}_{11} = p^1{}_{13} = p^1{}_{14} = p^1{}_{15} = 0,$$
$$p^2{}_5 = p^2{}_6 = p^2{}_7 = p^2{}_8 = 0,\ p^2{}_9 = -p^1{}_{12},\ p^2{}_{10} = 0,\ p^2{}_{11} = -a_5^{-2},$$
$$p^2{}_{12} = p^1{}_9,\ p^2{}_{13} = p^2{}_{14} = p^2{}_{15} = 0,$$
$$p^3{}_5 = p^3{}_6 = p^3{}_7 = p^3{}_8 = p^3{}_9 = p^3{}_{10} = p^3{}_{11} = p^3{}_{12} = 0,\ p^3{}_{13} = a_5^{-2},$$
$$p^3{}_{14} = p^3{}_{15} = 0,\quad p^4{}_a = 0\ \ (a = 5, \dots, 15).$$

Решение содержит параметры $p^1{}_9$, $p^1{}_{12}$. Таким образом, оснащение подгруппы $K^{5,3}\{2,3\}$, определяющее редуктивную структуру пространства $G(5)/K^{5,3}\{2,3\}$, существует с 2-параметрическим произволом и в его уравнениях $\vartheta^\alpha = 0$ справедливо

$$\vartheta^1 = \omega^1 - a_5^{-2}\omega^4{}_1 + p^1{}_9\omega^5{}_1 + p^1{}_{12}\omega^5{}_2,$$
$$\vartheta^2 = \omega^2 - p^1{}_{12}\omega^5{}_1 - a_5^{-2}\omega^4{}_2 + p^1{}_9\omega^5{}_2 .$$
$$\vartheta^3 = a_5^{-2}\omega^4{}_3,\ \ \vartheta^4 = \omega^2{}_1 .$$

Запишем в принятом нами сокращенном виде подходяще сгруппированным образом внешние дифференциалы форм $\{\theta^a \mid a=5,\dots,15\}$. С учетом (15) и (2) получим

$$d\theta^5 = d\omega^4 = \vartheta^1\wedge\theta^8 + \vartheta^2\wedge\theta^{11} + \vartheta^3\wedge\theta^{13} + \vartheta\wedge\theta,$$

$$d\theta^7 = d\omega^3_1 = a_5^2\vartheta^3\wedge\theta^8 + \vartheta^4\wedge\theta^{10} + \theta\wedge\theta,$$
$$d\theta^8 = d\omega^4_1 = -a_5^2\vartheta^3\wedge\theta^7 + \vartheta^4\wedge\theta^{11} + \theta\wedge\theta,$$
$$d\theta^{10} = d\omega^3_2 = a_5^2\vartheta^3\wedge\theta^{11} - \vartheta^4\wedge\theta^7 + \theta\wedge\theta,$$
$$d\theta^{11} = d\omega^4_2 = -a_5^2\vartheta^3\wedge\theta^{10} - \vartheta^4\wedge\theta^8 + \theta\wedge\theta,$$
$$d\theta^{13} = d\omega^4_3 - a_5^2 d\omega^3 = -a_5^2\vartheta^1\wedge\theta^7 - a_5^2\vartheta^2\wedge\theta^{10} - a_5^4\vartheta^3\wedge\theta^5 + \theta\wedge\theta;$$
$$d\theta^6 = d\omega^5 = \vartheta^1\wedge\theta^9 + \vartheta^2\wedge\theta^{12} + \vartheta^3\wedge\theta^{14} + \theta\wedge\theta,$$
$$d\theta^9 = d\omega^5_1 = \vartheta^4\wedge\theta^{12} + \theta\wedge\theta,$$
$$d\theta^{12} = d\omega^5_2 = -\vartheta^4\wedge\theta^9 + \theta\wedge\theta,$$
$$d\theta^{14} = d\omega^5_3 = a_5^2\vartheta^3\wedge\theta^{15} - (p^3_a\theta^a - \theta^{13})\wedge\theta^{15} + \theta^7\wedge\theta^9 - \theta^{10}\wedge\theta^{12},$$
$$d\theta^{15} = d\omega^5_4 = a_5^2\vartheta^3\wedge\theta^{14} + (p^3_a\theta^a - \theta^{13})\wedge\theta^{14} - \theta^8\wedge\theta^9 - \theta^{11}\wedge\theta^{12}.$$

Из этих выражений следует, что при $\{i\} = \{5,7,8,10,11,13\}$ и $\{u\} = \{6,9,12,14,15\}$ выполняются условия (8), (9) полной приводимости пространства $G(5)/K^{5,3}\{2,3\}$, но в силу $C^{14}_{7,9} = 1$, $C^{14}_{10,12} = C^{15}_{8,9} = C^{15}_{11,12} = -1$, не выполняются условия (7).

Нами доказано, что пространство $G(5)/K^{5,3}\{2,3\}$, допускающее интерпретацию в виде 11-мерного пространства цилиндров $R_2\times S_1$, является редуктивным, вполне приводимым и несимметрическим. Алгебра Ли $\mathfrak{f}$ подгруппы Ли $H = K^{5,3}\{2,3\}$ будет неполупростой, так как по выражениям $d\vartheta^\alpha$ $(\alpha = 1,\dots,4)$ единственным отличным от нуля элементом матрицы Киллинга $\|B_{\alpha\beta}\|$ является $B_{44} = C^\delta_{4\gamma}C^\gamma_{4\delta} = C^2_{41}C^1_{42} = -1$ и, следовательно, матрица $\|B_{\alpha\beta}\|$ – вырождена.

Редуктивность всех остальных пространств $G(5)/H$, где подгруппа Ли $H\in\mathfrak{K}^{5,m}$ приводима с инвариантным точечным флагом $\mathfrak{F}$ и $H\neq\{K_5^{5,3}\{0\}, K_7^{5,4}\{4\}, K_8^{5,4}\{4\}\}$, доказывается вполне аналогично приведенным частным случаям.

Замечание. Среди редуктивных пространств $G(5)/H$ симметрическими будут те и только те, для которых подгруппа Ли $H\subset G(5)$ содержится в классе $\mathfrak{K}^{5,4}$ и является подгруппой стационарности некоторого точечного флага $\mathfrak{F}$ в пространстве R_5.

Условиям замечания удовлетворяют подгруппы $K^{5,4}\{0\}$, $K^{5,4}\{1\}$, $K^{5,4}\{2\}$, $K^{5,4}\{3\}$, $K^{5,4}\{4\}$. Для доказательства сформулированного утверждения следует показать, что только в случае перечисленных подгрупп Ли движений H, кроме условий редуктивности

(6) пространства $G(5)/H$, выполняются и условия (7) его симметричности. Подробные выкладки опускаются. Они аналогичны приведенным в доказательстве предложения 4.

Результаты, полученные при исследовании всех редуктивных пространств $G(5)/H$ вышеописанным образом, представлены в таблице 2. Таблица начинается с перечисления соответствующих подгрупп $H = K^{5,m}(\mathfrak{F})$ стационарности точечных флагов, затем указываются винтовые подгруппы $H = K_{\imath}^{5,m}(\mathfrak{F})$. Внутри этих классов подгруппы упорядочены по возрастанию m – максимальной размерности орбиты V_m и по возрастанию числа $\imath$ параметров подгруппы. Звездочкой у порядкового номера подгруппы отмечены подгруппы серии 2.

По определению, в случае приводимости пространства $G(5)/H$ справедливо $m = \varkappa \dot{+} \varkappa'$, где подпространство $\varkappa$ является $\mathrm{ad}\,\mathfrak{f}$-инвариантным и $\dim \varkappa < \dim m = \dim G(5)/H$. Если рассматриваемое пространство вполне приводимо, то и $\varkappa'$ будет $\mathrm{ad}\,\mathfrak{f}$- инвариантным. Имеет место $\dim \varkappa + \dim \varkappa' = \dim G(5)/H$. Наше исследование показало, что когда пространство $G(5)/H$ вполне приводимо, то m иногда представимо в виде прямой суммы более, чем двух $\mathrm{ad}\,\mathfrak{f}$--инвариантных подпространств: $m = \varkappa_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \varkappa_\nu$, $\nu \geqslant 2$, где $\dim \varkappa_1 + \ldots + \dim \varkappa_\nu = \dim G(5)/H$. В столбце 9 таблицы 2 указаны соответствующие размерности в убывающем порядке.

4. Сравнение однородных фактор-пространств $G(5)/H$ и $G(4)/H$. При сравнении результатов п. 2 и 3, сводка которых дана в таблицах 1-2, с соответствующими результатами работы [5] (стр. 27-31), можно отметить следующее.

Среди однородных фактор-пространств группы Ли движений $G(4)$ вещественного евклидова пространства R_4 по ее замкнутым подгруппам Ли H редуктивными являются те и только те, для которых подгруппа $H \in \mathfrak{R}^{4,m}$ приводима с инвариантным точечным флагом $\mathfrak{F}$. Но среди пространств $G(5)/H$ существуют и такие нередуктивные пространства, для которых подгруппа $H \in \mathfrak{R}^{5,m}$ приводима с инвариантным точечным флагом $\mathfrak{F}$. По предложениям 1, 2 таких подгрупп H три типа: $K_2^{5,2}\{\ldots, 3\}$, $K_7^{5,4}\{4\}$, $K_8^{5,4}\{4\}$. Последние две из них относятся к серии 2, так как их 4-мерными орбитами являются гиперплоскости $R_4 \subset R_5$. Во множестве $\mathfrak{R}^{4,m}$ подгрупп Ли группы движений $G(4)$ соответствующими подгруппами будут неприводимые $K_7^{4,4}$ и $K_8^{4,4}$, действующие

Таблица 2

Редуктивные однородные фактор-пространства $G(5)/H$

№	Тип подгруппы $H \subset G(5)$	Орбиты максим. размерностей	Число r парам. подгруппы $H \subset G(5)$	Размерность пространства $G(5)/H$	Число парам. оснащения $\mathfrak{m}$	Симметричность	Приводимость	Размерности ad$\mathfrak{f}$-инвариантных подпространств в $\mathfrak{m}$	Подалгебра $\mathfrak{f}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1*	$K^{5,1}\{1,2,3,4\}$	R_1	1	14	10	нет	вполне приводимо	2,2,2,2,1,1,1,1,1,1	неполупроста
2*	$K^{5,1}\{0,1,2,3\}$	S_1	1	14	6	нет	вполне приводимо	3,3,3,2,1,1,1	неполупроста
3*	$K^{5,2}\{1,2,3\}$	$R_1 \times S_1$	2	13	4	нет	вполне приводимо	4,4,4,1	неполупроста
4*	$K^{5,2}\{0,2,3\}$	$S_1 \times S_1$	2	13	2	нет	вполне приводимо	8,5	неполупроста
5*	$K^{5,2}\{2,3,4\}$	R_2	3	12	6	нет	вполне приводимо	3,3,3,1,1,1	неполупроста
6*	$K^{5,2}\{0,1,2\}$	S_2	3	12	3	нет	вполне приводимо	4,4,3,1	неполупроста
7	$K^{5,3}\{1,3\}$	$R_1 \times S_1 \times S_1$	3	12	0	нет	приводимо	4	неполупроста
8*	$K^{5,3}\{2,3\}$	$R_2 \times S_1$	4	11	2	нет	вполне приводимо	6,5	неполупроста
9*	$K^{5,3}\{1,4\}$	$R_1 \times S_1$	4	11	3	нет	вполне приводимо	6,5	неполупроста
10	$K^{5,3}\{0,2\}$	$S_2 \times S_1$	4	11	0	нет	приводимо	2	неполупроста
11*	$K^{5,3}\{3,4\}$	R_3	6	9	2	нет	вполне приводимо	4,4,1	неполупроста
12*	$K^{5,3}\{0,1\}$	S_3	6	9	0	нет	вполне приводимо	5,4	полупроста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
13	$K^{5,3}$ {2}	$R_2 \times S_2$	6	9	0	да	приводимо	3	неполупроста
14	$K^{5,4}$ {1}	$R_1 \times S_3$	7	8	0	да	приводимо	4	неполупроста
15	$K^{5,4}$ {3}	$R_3 \times S_1$	7	8	0	да	приводимо	2	неполупроста
16	$K^{5,4}$ {4}	R_4	10	5	1	да	приводимо	1	неполупроста
17	$K^{5,4}$ {0}	S_4	10	5	0	да	приводимо	1	полупроста
18*	$K_1^{5,4}$ {1,2}	$\Gamma_{(3)}$	1	14	4	нет	вполне приводимо	5,4,4,1	неполупроста
19*	$K_1^{5,4}$ {0,2,3}	$\Gamma_{(4)}$	1	14	2	нет	вполне приводимо	9,5	неполупроста
20	$K_1^{5,4}$ {1,3}	$\Gamma_{(5)}$	1	14	2	нет	приводимо	4	неполупроста
21	$K_2^{5,2}$ {1,3}	а) $\Gamma \times \Gamma$	2	13	0	нет			неполупроста
		б) $R_1 \times \Gamma_{(4)}$	2	13	2	нет	приводимо	9	неполупроста
		в) $S_1 \times \Gamma_{(3)}$	2	13	2	нет			неполупроста
22*	$K_3^{5,3}$ {0,1}	S_3	3	12	0	нет	вполне приводимо	7,5	полупроста
23*	$K_4^{5,3}$ {0,1}	S_3	4	11	2	нет	вполне приводимо	6,5	полупроста
24	$K_4^{5,4}$ {1}	$R_1 \times S_3$	4	11	3	нет	приводимо	3	неполупроста
25	$K_5^{5,4}$ {1}	$R_1 \times S_3$	5	10	0	нет	приводимо	6	неполупроста

в пространстве R_4 транзитивно без инвариантных флагов. Определенные ими пространства $G(4)/K_7^{4,4}$ и $G(4)/K_8^{4,4}$ являются по результатам [5] также нередуктивными.

Вообще при всех подгруппах $H \in \mathfrak{R}^{5,m}$ из серии 2 редуктивным пространствам $G(5)/H$ соответствуют редуктивные пространства $G(4)/H$, а нередуктивным $G(5)/H$ – нередуктивные $G(4)/H$. Действительно, 14 типов подгрупп $H \in \mathfrak{R}^{5,m}$ отмеченных в таблице 2 звездочкой, и 14 типов подгрупп серии 2, перечисленных в таблице 1, составляют полный перечень собственных подгрупп Ли группы движений $G(4)$. Характеристика пространств $G(4)/H$ относительно редуктивности, полученная в [5], совпадает с указанным нами разделением подгрупп серии 2 в таблицы 1 и 2. При этом в общем случае редуктивных пространств $G(5)/H$ число параметров оснащения m подгруппы H, определяющего редуктивную структуру пространства $G(5)/H$, больше чем число параметров оснащения, определяющего редуктивную структуру в соответствующем пространстве $G(4)/H$. Только для подгрупп $H = K^{5,3}\{0,1\}$ ($\equiv K^{4,3}\{0\}$)(№ 12 по таблице 2) и $H = K_3^{5,3}\{0,1\}$ ($\equiv K_3^{4,3}\{0\}$) (№ 22 по таблице 2), трехмерными орбитами которых являются сферы $S_3 \subset R_4 \subset R_5$, искомое оснащение определено однозначно как в случае пространства $G(5)/H$, так и в случае пространства $G(4)/H$.

Учитывая предложение работы [5] (стр. 26) и замечание п. 3 настоящей работы, можно сформулировать следующий общий результат.

<u>Предложение 5</u>. Пусть $G(n)$ является группой Ли движений вещественного евклидова пространства R_n, т.е. $G(n) = O(n) * T_n$, где $n = 4,5$. Однородное фактор-пространство $G(n)/H$ группы $G(n)$ по ее замкнутым подгруппам Ли H симметрично тогда и только тогда, когда подгруппа H является такой подгруппой стационарности точечного флага, что ее орбиты максимальной размерности будут гиперповерхностями V_{n-1} пространства R_n. Как уже отмечалось, при $n = 5$ симметрическими являются только пространства $G(5)/H$, для которых $H \in \{K^{5,4}\{0\}$, $K^{5,4}\{1\}$, $K^{5,4}\{2\}$, $K^{5,4}\{3\}$, $K^{5,4}\{4\}\}$ (№ 13, 14, 15, 16, 17 по таблице 2). Эти подгруппы H относятся к серии 1. По предложению 5 однородные пространства $G(5)/H$ будут несимметрическими при всех подгруппах $H \in \{K^{5,3}\{2,3\}$, $K^{5,3}\{1,4\}$, $K^{5,3}\{3,4\}$, $K^{5,3}\{0,1\}\}$ (№ 8, 9, 11, 12 по таблице 2) из серии 2, так

как их орбиты максимальной размерности трехмерны. Но в то же время, по тому же предложению 5, однородные пространства $G(4)/H$, определенные с помощью этих подгрупп серии 2, симметрические.

Исследование приводимости редуктивных пространств $G(5)/H$ показывает, что при всех подгруппах H из серии 2 они будут вполне приводимыми.

Наконец, отметим, что кроме подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ подгруппы $H = K^{5,4}\{0\}$ (№ 17 по таблице 2), изоморфной алгебре Ли группы $O(5)$, все алгебры Ли $\mathfrak{h}$ подгрупп $H \subset G(5)$ из серии 1 неполупросты.

Литература

1. Д ж е к о б с о н Н., Алгебры Ли. Москва, 1964.
2. Р и й в е с К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 96-126.
3. Р и й в е с К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 83-109.
4. Р и й в е с К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. III. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 39-56.
5. Р и й в е с К., Ф л я й ш е р А., Однородные фактор-пространства группы движений евклидова пространства R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 23-40.
6. N o m i z u, K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, 76, 33-65.

Поступило
1 IV 1977

EUKLEIDILISE RUUMI R_5 LIIKUMISTE RÜHMA HOMOGEENSED FAKTOR-RUUMID

K.Riives

R e s ü m e e

Töödes [2-4] on leitud reaalse eukleidilise ruumi liikumiste rühma $G(5)$ kõik paarikaupa mittekonjugeeritud sidusad Lie alamrühmad H. Kasutades meetodit, mis on kirjeldatud artiklis [5], on käesolevas töös uuritud kõigi vastavate homogeensete faktor-ruumide $G(5)/H$ omadusi. Vaadeldavate ruumide hulgast on välja eraldatud reduktiivsed ja neid on vaadeldud üksikasjalikumalt. Lõpuks on tehtud mõned võrdlevad märkused käesoleva töö ja [5] tulemuste kohta.

HOMOGENEOUS FACTOR-SPACES OF THE GROUP OF MOTIONS IN EUCLIDEAN SPACE R_5

K.Riives

S u m m a r y

In the [2-4] all connected Lie subgroups H unconjugated in pairs are found in the group of motions $G(5)$ in real Euclidean space R_5. In this paper by the method described in [5] properties of all corresponding homogeneous factor-spaces $G(5)/H$ are examined. From these spaces the reductive ones are excluded and they are studied in greater detail. The paper concludes with some remarks comparing the results of this paper and [5].

TRÜ Toimetised, 464 (1978), 98–115.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 98–115.

О ГЕОМЕТРИИ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА m-ПАР И ЕГО МНОГООБРАЗИИ

Л.Туулметс

Кафедра алгебры и геометрии

Пространством $\mathfrak{I}_{n,m}$ m-пар в проективном пространстве P_n называется совокупность конфигураций (L_m, l_p), $p = n-m-1$, состоящих из m и $(n-m-1)$-мерных непересекающихся плоскостей L_m и l_p в P_n [16]. Различные многообразия m-пар являлись объектом изучения многих исследователей. Из авторов, которые не упомянуты в обзорах Р.М.Гейдельмана [1] и Ю.Г.Лумисте [7], следует отметить работы Г.С. Измайловой [2], Б.С.Сушникова [23] (1-пары), Э. М. Кондаковой и Е.Т.Ивлева [3] (0-пары) и А.Е.Масленкова [8–9].

В пространство $\mathfrak{I}_{n,m}$ можно ввести инвариантную метрику, причем пространство $\mathfrak{I}_{n,m}$ с такой метрикой является симметрическим псевдоримановым пространством [13] размерности $2N = 2(m+1)(n-m)$. Группой его движения является проективная группа $GP(n,R)$ (см. [6]). В своих работах [11–15] Б.А.Розенфельд показал, что пространство $\mathfrak{I}_{n,m}$ является пространством П.К.Рашевского. Пространство m-пар изометрично грассмановому многообразию m-плоскостей в комплексном пространстве $P_n(i)$, построенному над алгеброй двойных чисел [13].

В настоящей статье в § 1 показывается, что пространство $\mathfrak{I}_{n,m}$ является пространством Эйнштейна с постоянной скалярной кривизной. Выясняется также, что пространство $\mathfrak{I}_{n,m}$ является пространством с двумя метриками. Кроме псевдоримановой метрики в $\mathfrak{I}_{n,m}$ определяется некоторая инвариантная симплектическая метрика. Оказывается, что пространство

$\mathfrak{T}_{n,m}$ имеет ряд аналогичных свойств с псевдокелеровым пространством.

В § 2 найдены формы связности для расслоенных пространств, связанных с a-мерным подмногообразием $\mathfrak{T}_{n,m}(a)$ пространства $\mathfrak{T}_{n,m}$. Найден ряд тензоров и инвариантные квадратичные формы подмногообразия $\mathfrak{T}_{n,m}(a)$.

В § 3 статьи рассматриваются вырожденные семейства m-пар.

§1. Пространство $\mathfrak{T}_{n,m}$ m-пар в P_n

1. Выбор подвижного репера. С каждой m-парой $\{L_m, \ell_p\}$ в $\mathfrak{T}_{n,m}$ присоединяем полуканонический подвижной репер так, что точки репера A_i [1] находятся на основной плоскости L_m, а остальные точки репера A_α расположены в дополнительной плоскости ℓ_p [10]. Формулы инфинитезимального перемещения выбранного таким образом подвижного репера имеют вид

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha, \quad dA_\alpha = \omega_\alpha^j A_j + \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω_v^u удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega_v^u = \omega_v^w \wedge \omega_w^u, \tag{1.2}$$

здесь формы Пфаффа ω_i^α и ω_α^i линейно независимы и могут быть выбраны в качестве базисных форм пространства $\mathfrak{T}_{n,m}$. Упорядочим формы ω_i^α и ω_α^i следующим образом

$$\omega_i^\alpha = \psi^{\binom{\alpha}{i}} = \psi^A, \quad \omega_\alpha^i = \psi^{\binom{i}{\alpha}} = \psi^P \tag{1.3}$$

$$A = i(n-m)+q, \quad \alpha = m+q, \quad P = \mathcal{N}+A.$$

---

[1] Во всей статье

$i, j, k, \ldots = 0, 1, \ldots, m, \quad \mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \ldots = 0, \ldots, 2\mathcal{N},$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n, \quad A, B, C, D, \ldots = 1, \ldots, \mathcal{N},$

$s, t, u, \ldots = 1, \ldots, a, \quad P, Q, R, S, \ldots = \mathcal{N}+1, \ldots, 2\mathcal{N},$

$s_1, t_1, u_1, \ldots = 1, \ldots, a_1, \quad P = \mathcal{N}+A,\ Q = \mathcal{N} = B,\ R = \mathcal{N}+C,\ S = \mathcal{N}+D,$

$s_2, t_2, u_2, \ldots = a_1+1, \ldots, a, \quad \binom{\alpha}{i} \to A,\ \binom{\beta}{j} \to B,\ \binom{\gamma}{k} \to C,\ \binom{\varepsilon}{\ell} \to D,$

$u, v, w, \ldots = 0, \ldots, n, \quad \binom{i}{\alpha} \to P,\ \binom{j}{\beta} \to Q,\ \binom{k}{\gamma} \to R,\ \binom{\ell}{\varepsilon} \to D.$

Обозначим элементы дуального базиса, т.е. базисные элементы для касательного пространства $T(\pi_{n,m})$ в точке x через $e_A = e^i_\alpha$ и $e_P = e^\alpha_i$. Элементы касательного пространства будем в дальнейшем называть векторами. В силу дуальности тогда

$$\omega^\alpha_i(e^j_\beta) = \delta^\alpha_\beta \delta^j_i = \delta^A_B, \qquad \omega^\alpha_i(e^\beta_j) = 0, \tag{1.4}$$

$$\omega^i_\alpha(e^\beta_j) = \delta^\beta_\alpha \delta^i_j = \delta^B_A, \qquad \omega^i_\alpha(e^j_\beta) = 0.$$

2. <u>Псевдориманова метрика пространства</u> $\pi_{n,m}$. Квадратичная форма

$$ds^2 = -\omega^\alpha_i \omega^i_\alpha = g_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} \psi^{\mathfrak{I}} \psi^{\mathfrak{J}} = 2 g_{AQ} \psi^A \psi^Q, \tag{1.5}$$

где

$$2 g_{AQ} = 2 g_{\binom{i}{\alpha}\binom{\beta}{j}} = -\delta_{AQ} - \delta^i_j \delta^\beta_\alpha, \tag{1.6}$$

$$g_{AB} = g_{PQ} = 0$$

является в пространстве $\pi_{n,m}$ инвариантной формой и определяет в нем псевдориманову метрику индекса $\mathcal{N}$. Матрица метрического тензора $g_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ имеет вид

$$g_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} = -\begin{pmatrix} 0 & E_{\mathcal{N}} \\ E_{\mathcal{N}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Структурные уравнения пространства $\pi_{n,m}$ имеют вид

$$d\psi^A = \psi^B \wedge \psi^A_B, \qquad d\psi^P = \psi^Q \wedge \psi^P_Q, \tag{1.7}$$

где

$$\psi^A_Q = \psi^P_A = 0, \tag{1.8}$$

$$\psi^A_B = \delta^j_i \omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^j_i = \psi^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}}, \tag{1.9}$$

и форма кручения пространства $\pi_{n,m}$ равна нулю. Из уравнения инвариантности метрики

$$dg_{\mathfrak{I}\mathfrak{J}} = g_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}} \psi^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{I}} + g_{\mathfrak{I}\mathfrak{K}} \psi^{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{J}},$$

получаем

$$\psi^{A}_{B}+\psi^{P}_{Q}=0, \quad P=\mathcal{N}+A, \quad Q=\mathcal{N}+B. \tag{1.10}$$

При внешнем дифференцировании уравнения (1.9) найдем, что

$$d\psi^{A}_{B}=\psi^{C}_{B}\wedge\psi^{A}_{C}+\Omega^{A}_{B}. \tag{1.11}$$

Формы кривизны Ω^{A}_{B} имеют виды

$$\Omega^{A}_{B}=\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)}{}^{(i)}_{(j)}=\delta^{j}_{i}\omega^{k}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{k}-\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{\gamma}_{i}\wedge\omega^{j}_{\gamma}, \tag{1.12}$$

$$\Omega^{A}_{Q}=\Omega^{\mathcal{B}}_{A}=0, \quad \Omega^{A}_{B}+\Omega^{P}_{Q}=0,$$

или

$$\Omega^{A}_{B}=2R^{A}_{BCS}\psi^{C}\wedge\psi^{S}, \quad R^{A}_{BCS}=-R^{A}_{BSC}, \tag{1.13}$$

где тензор кривизны $R^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}\mathcal{K}L}$ выражается следующим образом

$$2R^{A}_{BCS}=2R^{(\alpha)(i)}_{(\beta)(j)(k)(\varepsilon)}{}^{(\ell)}=-(\delta^{j}_{i}\delta^{k}_{\ell}\delta^{\varepsilon}_{\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma}+\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{k}_{i}\delta^{j}_{\ell}\delta^{\varepsilon}_{\gamma}), \tag{1.14}$$

$$R^{P}_{QCS}=R^{B}_{ACS}, \quad R^{A}_{Q\mathcal{K}L}=R^{Q}_{A\mathcal{K}L}=R^{A}_{BCB}=R^{A}_{BRS}=R^{P}_{QRS}=0. \tag{1.15}$$

При внешнем дифференцировании системы (1.7), в силу (1.8 – –13), получаем первые тождества Бианки

$$\psi^{B}\wedge\Omega^{A}_{B}=0, \quad \psi^{Q}\wedge\Omega^{P}_{Q},$$

откуда, в силу (1.13), имеем

$$R^{A}_{(BCS)}=0, \quad R^{P}_{(QCS)}=0, \tag{1.16}$$

где

$$R^{A}_{(BCS)}=R^{A}_{BCS}+R^{A}_{CSB}+R^{A}_{SCB}.$$

Отпустив индексы в соотношении (1.14), получаем

$$R_{\mathcal{J}\mathcal{J}\mathcal{K}L}=g_{\mathcal{M}\mathcal{J}}R^{\mathcal{M}}{}_{\cdot\mathcal{J}\mathcal{K}L}, \tag{1.17}$$

откуда, в силу (1.6), (1.14–17), имеем

$$\begin{aligned} R_{PBCS}&=-R_{BPCS},\\ R_{PBCS}&=R_{CSPB}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$R_{AB\mathcal{K}L} = R_{PQ\mathcal{K}L} = R_{\mathcal{K}LCB} = R_{\mathcal{K}LRS},$$
$$R_{PBCS} + R_{PCSB} = 0 .$$

Для нахождения канонического вида метрической формы ds^2 совершим преобразование базиса

$$\psi^A = \vartheta^P + \vartheta^A, \qquad \psi^P = \vartheta^P - \vartheta^A, \tag{1.19}$$

которому соответствует преобразование векторов дуального базиса

$$\varepsilon_A = e_P + e_A, \qquad \varepsilon_P = e_P - e_A . \tag{1.20}$$

Базис $S = \{\varepsilon_\jmath\}$ будем называть каноническим базисом. Компоненты метрического тензора $g_{\jmath\jmath}$ в каноническом базисе следующие:

$$g_{AB} = \delta_{AB}, \quad g_{PQ} = -\delta_{PQ}, \quad g_{AP} = 0, \quad \det|g| \neq 0 .$$

Метрическая форма ds^2 в новом каноническом базисе имеет вид

$$ds^2 = \sum_A (\vartheta^A)^2 - \sum_P (\vartheta^P)^2 = g_{\jmath\jmath}\, \vartheta^\jmath \vartheta^\jmath .$$

Следовательно, квадратичная форма ds^2 не выреждена и определяет в пространстве $\mathcal{T}_{n,m}$ псевдориманову метрику индекса N .

3. Пространство $\mathcal{T}_{n,m}$ как пространство Эйнштейна.

Если тензор Риччи и основной метрический тензор пропорциональны, то многообразие $\mathcal{T}_{2N}$ является пространством Эйнштейна (см. [11] , стр. 99).

Теорема 1.[2] Многообразие $\mathcal{T}_{n,m}$ является пространством Эйнштейна с постоянной скалярной кривизной $(m+1)(n-m)(n+1)$.

---

[2] Теорема сформулирована без доказательства в тезисах [20].

Доказательство. Из выражения тензора кривизны (1.14) при помощи свертывания получаем тензор Риччи

$$2R_{\beta s} = 2R_{\binom{\beta}{j}\binom{\ell}{\varepsilon}} = 2R^{\binom{\kappa}{\ell}}_{\binom{\beta}{j}\binom{\kappa}{\ell}\binom{\ell}{\varepsilon}} = -(n+1)\delta^{j}_{\ell}\delta^{\varepsilon}_{p} = 2(n+1)g_{\beta s},$$

$$R_{\beta s} = R_{s\beta}. \qquad (1.21)$$

В силу (1.6) и (1.14-15) имеем

$$R_{\gamma\gamma} = (n+1)g_{\gamma\gamma}.$$

Умножая тензор Риччи $R_{\beta s}$ на

$$g^{\beta R} = g^{\binom{p}{j}\binom{\kappa}{f}} = -2\delta^{\kappa}_{j}\delta^{p}_{f},$$

получаем

$$R^{R}_{s} = R^{\binom{\kappa}{f}}_{\binom{\ell}{\varepsilon}} = R_{\beta s}g^{\beta R} = (n+1)g_{\beta s}g^{\beta R} = (n+1)\delta^{R}_{s} = (n+1)\delta^{\kappa}_{\ell}\delta^{\varepsilon}_{f}.$$

В результате полного свертывания тензора R^{R}_{s} найдем скалярную кривизну R пространства $\pi_{n,m}$

$$R = R^{s}_{s} = (n+1)\delta^{s}_{s} = (n+1)N, \quad N = (m+1)(n-m). \qquad (1.22)$$

Теорема доказана.

4. Симплектическая метрика пространства $\pi_{n,m}$. Многообразие $\mathfrak{M}_{2N}$ называется симплектическим пространством, если она допускает 2-форму

$$\mathfrak{R} = a_{\gamma\gamma}\psi^{\gamma}\wedge\psi^{\gamma},$$

которая является действительной, замкнутой, кососимметрической и имеет всюду ранг $2N$ ([4] , отр. 178). Говорят, что форма $\mathfrak{R}$ переместима ([4] , стр. 162) с метричекой формой

$$\omega = g_{\gamma\gamma}\psi^{\gamma}\psi^{\gamma},$$

если тензоры $a_{\gamma\gamma}$ и $g_{\gamma\gamma}$ этих форм связаны соотношением переместимости

$$a_{\gamma\varkappa}a_{\gamma L}g^{\varkappa L} = g_{\gamma\gamma}. \qquad (1.23)$$

Собственно-риманово многообразие, на котором определена симплектическая метрика с формой Ω, называется почти келеровым многообразием ([4] , стр. 177), или A-пространством (последнее название введено П.А.Широковым в 1925 году [21]).

Почти келерово многообразие без кручения называется псевдокелеровым многообразием ([4] , стр. 178).

Если форма Ω связана с метрической формой ω соотношением

$$a_{y\varkappa}a_{\mathfrak{z}L}g^{\varkappa L} = -g_{y\mathfrak{z}}, \tag{1.24}$$

то будем говорить, что формы Ω и ω (или тензоры $a_{y\mathfrak{z}}$ и $g_{y\mathfrak{z}}$ кософеременстимы).

Пространство $\pi_{n,m}$ имеет аналогичные свойства с псевдокелеровым пространством.

<u>Теорема 2</u>. Пространство $\pi_{n,m}$ m-пар в проективном пространстве P_n является псевдоримановым пространством индекса $N=(m+1)(n-m)$ размерности $2N$, где определена симплектическая метрика, причем тензор псевдоримановой метрики $g_{y\mathfrak{z}}$ и тензор симплектической метрики $a_{y\mathfrak{z}}$ кософеременстимы.

<u>Доказательство</u>. Пространство $\pi_{n,m}$ имеет две метрики. Кроме псевдоримановой метрики в пространстве $\pi_{n,m}$ определено и симплектическая метрика. Легко убедиться, что внешняя квадратичная форма

$$\Omega = \omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_i = -\delta^i_j \delta^\beta_\alpha \omega^\alpha_i \wedge \omega^j_\beta = 2a_{AQ}\psi^A \wedge \psi^Q \tag{1.25}$$

является замкнутой, т.е. $d(\omega^i_\alpha \wedge \omega^\alpha_i) = 0$, и ковариантно инвариантной формой. Она инвариантно связана с m-парой. Коэффициенты $a_{y\mathfrak{z}}$ формы Ω образуют ковариантно инвариантный тензор $\nabla a_{y\mathfrak{z}} = 0$. Матрица тензора $a_{y\mathfrak{z}}$ в выбранном репере имеет вид

$$\| a_{y\mathfrak{z}} \| = -\begin{pmatrix} 0 & E_N \\ -E_N & 0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$2a_{AQ} = -\delta^i_j \delta^\beta_\alpha , \quad a_{AQ} = -a_{QA} , \quad a_{AB} = a_{PQ} = 0 . \qquad (1.26)$$

Отсюда видно, что $\det|a_{yz}| \neq 0$ и тензор a_{yz} поэтому определяет симплектическую структуру в пространстве $\pi_{n,m}$. При этом тензор симплектической метрики a_{yz} связан с тензором псевдоримановой метрики g_{yz} условием косоперестимости. Теорема доказана.

Если ввести обозначения

$$a_y{}^z = a_{yx} g^{zx} ,$$

то соотношение (I.24) примет вид

$$a_y{}^z \cdot a_z{}^x = \delta_y^x .$$

Матрица тензора a_y^z имеет тогда вид

$$\|a_{yz}\| = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix} .$$

Тензор $a_y{}^z$ определяет в $\pi_{n,m}$ инволюцию так, что $\varphi^2 = \varepsilon$, где ε тождественный оператор. Свертыванием тензора кривизны можно построить еще один кососимметрический тензор T_{yz}, которое естественно называть тензором объемной кривизны пространства $\pi_{n,m}$

$$2T_{CS} = R^A_{ACS} = -(n+1)\delta^k_\ell \delta^\varepsilon_\gamma , \qquad T_{AB} = T_{PQ} = 0 .$$

В силу (I.26) и (I.14-I5) получаем

$$T_{yz} = (n+1) a_{yz} .$$

Имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 3. В пространстве $\pi_{n,m}$ тензор T_{yz} объемной кривизны пропорционален тензору a_{yz} симплектической метрики.

Отметим, что такие пространства с двумя метриками, где тензоры псевдоримановой метрики и симплектической метрики связаны соотношением косопереместимости, рассмотрены А.П.Широковым как $2N$-мерные пространства симметричной аффинной связности, в которых даны два поля действительных N-векторов [21] .

5. <u>Пространство $\mathbb{T}_{n,m}$ как пространства Рашевского</u>. По результатам Розенфельда [13-15] пространство $\mathbb{T}_{n,m}$ является пространством Рашевского ([12], стр. 230). Тем самым оно дважды расслаивается на n-параметрические семейства n-мерных поверхностей расслоения. При наших обозначениях поверхности расслоения определяется вполне интегрируемыми системами

$$(\mathrm{I})\ \omega_i^{\alpha} = 0 \qquad \text{и} \qquad (\mathrm{II})\ \omega_{\alpha}^{i} = 0 \ .$$

Известно, что через каждую точку пространства проходит одна и только одна поверхность каждого семейства, поверхности разных семейств пересекаются не более чем в одной точке. Поверхности обоих семейств являются вполне геодезическими поверхностями и обладают абсолютным параллелизмом ([12] , стр. 228).

Из соотношения (1.5) и (1.23) следует, что пространства расслоения являются вполне изотропными поверхностями. На этих поверхностях вырождаются как псевдориманова метрика (1,5) пространства $\mathbb{T}_{n,m}$, так и симплектическая метрика (1.23) пространства $\mathbb{T}_{n,m}$.

§ 2. Подмногообразия m-пар пространства $\mathbb{T}_{n,m}$

Пусть в n-мерном проективном пространстве P_n дано a-параметрическое семейство m-плоскостей, которое будем называть основным семейством. Если с каждой плоскостью основного семейства $\{L_m\}$ присоединять каким-то единственным образом дополнительную плоскость $\ell_p, p=n-m-1$, не имеющую общих точек с данной плоскостью оснащение в смысле Картана [13]), то появляется второе семейство, которое в общем случае зависит от a_1 параметров $a_1 \leq a$. Последнее будем называть дополнительным семейством и обозначим через $\{\ell_p\}$. Основное семейство вместе с дополнительным семейством образуют многообразие $\pi_{n,m}(a)$, элементами которого являются пары $\{L_m, \ell_p\}$. Многообразие $\pi_{n,m}(a)$ является подмногообразием пространства m-пар $\pi_{n,m}$.

В настоящем параграфе рассмотрим случай, когда $a_1 = a$. Основное семейство $\{L_m\}$ образует в соответствующем грассмановом многообразии a-мерное дифференцируемое подмногообразие. Последнее обозначим через B_a . Если θ^s составляет корепер в каждой точке некоторой области $\mathcal{U} \subset B_a$, то система $\theta^s = 0$ вполне интегрируема, т.е. $d\theta^s = \theta^t \wedge \theta^s_t$, и первые интегралы этой системы определяют координаты точек области $\mathcal{U}$ [5]. При фиксировании некоторой точки многообразия B_a фиксируется и соответствующая плоскость основного семейства (также фиксируется и плоскость дополнительного семейства). Отсюда вытекает, что основное семейство определяет расслоенное пространство $\mathcal{H}_1(B_a)$ (аналогично, дополнительное семейство определяет $\mathcal{H}_2(B_a)$), слоями которого являются плоскости основного семейства $\{L_m\}$ (дополнительного семейства $\{\ell_p\}$).

Определением дополнительного семейства ℓ_p (оснащением[3]) в P_n определена связность в расслоенных пространствах $\mathcal{H}_\mu(B_a)$, $\mu = 1,2$, формами связности которых являются соответственно формы $\omega^i_j - \delta^i_j \omega^0_0$ и $\omega^\alpha_\beta - \delta^\alpha_\beta \omega^n_n$.

Из (1.1) следует, что

$$\omega^\alpha_i = \lambda^\alpha_{is}\theta^s, \tag{2.1}$$

$$\omega^i_\alpha = \lambda^i_{\alpha s}\theta^s. \tag{2.2}$$

Система величин $\{\lambda^\alpha_{is}, \lambda^i_{\alpha s}\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения [10]. В силу (2.1-2) структурные уравнения расслоенных пространств $\mathcal{H}_\mu(B_a)$ имеют вид

[3] Отметим, что в случае метрического пространства оснащение и связность индуцируются естественным образом метрикой пространства.

$\mathcal{H}_1(B_a)$:

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \Omega_j^i, \tag{2.3}$$

где

$$\Omega_j^i = \omega_j^\alpha \wedge \omega_\alpha^i = Q_{jst}^i \theta^s \wedge \theta^t = \frac{1}{2} R_{jst}^i \theta^s \wedge \theta^t, \tag{2.4}$$

$$Q_{jst}^i = \lambda_{js}^\alpha \lambda_{\alpha t}^i, \quad R_{jst}^i = 2Q_{j[st]}^i. \tag{2.5}$$

$\mathcal{H}_2(B_a)$:

$$d\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \Omega_\beta^\alpha, \tag{2.6}$$

где

$$\Omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^j \wedge \omega_j^\alpha = Q_{\beta st}^\alpha \theta^s \wedge \theta^t = \frac{1}{2} R_{\beta st}^\alpha \theta^s \wedge \theta^t, \tag{2.7}$$

$$Q_{\beta st}^\alpha = \lambda_{is}^\alpha \lambda_{\beta t}^i, \quad R_{\beta st}^\alpha = 2Q_{\beta[st]}^\alpha. \tag{2.8}$$

При продолжении соотношений (2.3-6) найдем

$$d\lambda_{is}^\alpha = \lambda_{ks}^\alpha \omega^k + \lambda_{it}^\alpha \theta^t - \lambda_{is}^\beta \omega_\beta^\alpha + \lambda_{ist}^\alpha \theta^t, \; \lambda_{ist}^\alpha = \lambda_{its}^\alpha, \tag{2.9}$$

$$d\lambda_{\alpha s}^i = \lambda_{\beta s}^i \omega_\alpha^\beta + \lambda_{\alpha t}^i \theta^t - \lambda_{\alpha s}^k \omega_k^i + \lambda_{\alpha st}^i \theta^t, \; \lambda_{\alpha st}^i = \lambda_{\alpha ts}^i, \tag{2.10}$$

$$\nabla Q_{jst}^i = Q_{jstu}^i \theta^u, \quad \nabla Q_{\beta st}^\alpha = Q_{\beta stu}^\alpha \theta^u, \tag{2.11}$$

$$\nabla R_{jst}^i = R_{jstu}^i \theta^u, \quad \nabla R_{\beta st}^\alpha = R_{\beta stu}^\alpha \theta^u, \tag{2.12}$$

где

$$\nabla Q_{jst}^i = dQ_{jst}^i - Q_{kst}^i \omega_j^k + Q_{jst}^k \omega_k^i - Q_{jut}^i \theta_s^u - Q_{jsu}^i \theta_t^u; \tag{2.13}$$

$$\nabla Q_{\beta st}^\alpha = dQ_{\beta st}^\alpha - Q_{\gamma st}^\alpha \omega_\beta^\gamma + Q_{\beta st}^\gamma \omega_\gamma^\alpha - Q_{\beta ut}^\alpha \theta_s^u - Q_{\beta su}^\alpha \theta_t^u, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} \nabla R_{jst}^i &= dR_{jst}^i - R_{kst}^i \omega_j^k + R_{jst}^k \omega_k^i - R_{jut}^i \theta_s^u - R_{jsu}^i \theta_t^u, \\ \nabla R_{\beta st}^\alpha &= dR_{\beta st}^\alpha - R_{\gamma st}^\alpha \omega_\beta^\gamma + R_{\beta st}^\gamma \omega_\gamma^\alpha - R_{\beta ut}^\alpha \theta_s^u - R_{\beta su}^\alpha \theta_t^u, \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$Q_{jst}^i = \lambda_{js}^\alpha \lambda_{\alpha t}^i + \lambda_{\alpha t}^i \lambda_{jsu}^\alpha, \tag{2.15}$$

$$Q^{\alpha}_{\beta stu} = \lambda^{i}_{\beta s}\lambda^{\alpha}_{itu} + \lambda^{\alpha}_{it}\lambda^{i}_{\beta su}, \tag{2.15}$$

$$R^{i}_{jstu} = 2Q^{i}_{js[tu]} = \lambda^{i}_{\alpha t}\lambda^{\alpha}_{jsu} - \lambda^{i}_{\alpha u}\lambda^{\alpha}_{ist},$$

$$R^{\alpha}_{\beta stu} = 2Q^{\alpha}_{\beta s[tu]}$$

$$Q^{i}_{j[stu]} = 0, \quad Q^{\alpha}_{\beta[stu]} = 0, \quad R^{i}_{j(stu)} = 0, \quad R^{\alpha}_{\beta(stu)} = 0, \tag{2.16}$$

$$R^{i}_{jstu} + R^{i}_{jtsu} = 0, \quad R^{\alpha}_{\beta stu} + R^{\alpha}_{\beta tsu} = 0. \tag{2.17}$$

Свертыванием тензора Q^{i}_{jst} получаем новые тензоры

$$Q^{(1)}_{st} = Q^{i}_{ist}, \qquad Q^{(2)}_{st} = Q^{\alpha}_{\alpha st}. \tag{2.18}$$

Из соотношений (2.5), (2.8) и (2,18) следует теорема

<u>Теорема 4</u>. Тензор $Q^{(1)}_{st}$ расслоенного пространства $H_1(B_a)$ равен тензору $Q^{(2)}_{st}$ расслоенного пространства $H_2(B_2)$, т.е.

$$Q_{st} = Q^{(1)}_{st} = Q^{(2)}_{st}.$$

Разделим тензор Q_{st} на симметрическую и антисимметрическую части, т.е.

$$Q_{st} = S_{st} + T_{st}, \tag{2.19}$$

где

$$S_{st} = Q_{(st)} = \tfrac{1}{2}(\lambda^{\alpha}_{is}\lambda^{i}_{\alpha t} + \lambda^{\alpha}_{it}\lambda^{i}_{\alpha s})$$

и

$$T_{st} = Q_{[st]} = \tfrac{1}{2}(\lambda^{\alpha}_{is}\lambda^{i}_{\alpha t} - \lambda^{i}_{\alpha t}\lambda^{\alpha}_{is}).$$

Если форма

$$\omega = -S_{st}\theta^{s}\theta^{t}$$

не вырождена, то она определяет в многоообразии $\pi_{n,m}(a)$ псевдориманову метрику, индуцированную псевдоримановой метрикой пространства $\pi_{n,m}$.

Легко убедиться, что квадратичная внешняя форма

$$\Omega = T_{st}\theta^{s}\wedge\theta^{t}$$

инвариантно связана с m-парой в многообразии $\pi_{n,m}(a)$ и в случае невырождения ($\det(T_{st}) \neq 0$) она определяет в $\pi_{n,m}(a)$ симплектическую метрику, индуцированную симплектической метрикой пространства $\pi_{n,m}$. Она может быть не вырождена только тогда, когда $m = 2m_1$.

§ 3. Вырожденные подмнhoгообразия m-пар пространства $\pi_{n,m}$

Подмногообразие m-пар называется вырожденным подмногообразием (вырожденным семейством) $\pi_{n,m}(a, a_1)$ m-пар, если семейства плоскостей m-пар зависят от разного числа параметров.

Предполагаем, что основное семейство m-пар зависит от a параметров и дополнительное семейство a_1-пар зависит от a_1 параметров, $0 \leq a_1 < a$. Тогда

$$\omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha s_1}^i \theta^{s_1}. \qquad (3.1)$$

Получаем отображение $B_a \to B_{a_1}$. Система $\theta^{s_1} = 0$ вполне интегрируема, т.е.

$$d\theta^{s_1} = \theta^{t_1} \wedge \theta_{t_1}^{s_1}, \qquad (3.2)$$

и определяет расслоение многообразия B_a на $(a - a_1)$-мерные подмногообразия $\tilde{B}_b$, $b = a - a_1$ – полные прообразы элементов B_{a_1}. В случае вырожденного семейства соотношения (2.9–10), (2.4–5) и (2.7–8) имеют вид

$$d\lambda_{is_1}^\alpha = \lambda_{js_1}^\alpha \omega_i^j - \lambda_{is_1}^\beta \omega_\beta^\alpha + \lambda_{jt_1}^\alpha \theta_{s_1}^{t_1} + \lambda_{is_1t_1}^\alpha \theta^{t_1},$$
$$d\lambda_{\alpha s_1}^i = \lambda_{\beta s_1}^i \omega_\alpha^\beta - \lambda_{\alpha s_1}^k \omega_k^i + \lambda_{\alpha t_1}^i \theta_{s_1}^{t_1} + \lambda_{\alpha s_1 t_1}^i \theta^{t_1},$$

где

$$\lambda_{\alpha s_1 t_1}^i = \lambda_{\alpha t_1 s_1}^i, \qquad \lambda_{is_1t_1}^\alpha = \lambda_{it_1s_1}^\alpha,$$
$$\Omega_j^i = Q_{jst_1}^i \theta^s \wedge \theta^{t_1}, \qquad Q_{jst_1}^i = \lambda_{js}^\alpha \lambda_{\alpha t_1}^i,$$
$$\Omega_\beta^\alpha = Q_{\beta st_1}^\alpha \theta^s \wedge \theta^{t_1}, \qquad Q_{\beta st_1}^\alpha = \lambda_{is}^\alpha \lambda_{\beta t_1}^i.$$

Аналогично изменяются и соотношения (2.9-17).

Аналогично тому, как было сделано в § 2, тензор $Q_{s_1 t_1}$ можно разделить на две части.

$$Q_{s_1 t_1} = S_{s_1 t_1} + T_{s_1 t_1},$$

где

$$S_{s_1 t_1} = Q_{(s_1 t_1)}, \quad T_{s_1 t_1} = Q_{[s_1 t_1]}.$$

В случае, если $\det|S_{s_1 t_1}| \neq 0$, введем обозначение $S_{s_1 t_1} = g_{s_1 t_1}$ и квадратичная форма

$$\omega = g_{s_1 t_1} \theta^{s_1} \theta^{t_1}$$

определяет на B_{a_1} псевдориманову метрику, индуцированную псевдоримановой метрикой пространства m-пар.

Если $\det|T_{s_1 t_1}| \neq 0$, то внешняя квадратичная форма

$$\Omega = T_{s_1 t_1} \theta^{s_1} \wedge \theta^{t_1}$$

определяет на B_{a_1} симплектическую метрику, индуцированную симплектической метрикой пространства m-пар $\mathfrak{T}_{n,m}$.

Одним частным случаем вырожденных подмногообразий m-пар является случай, когда дополнительное семейство состоит только из одной плоскости, которая является так называемой $(n-m)$-мерной осью проективного пространства P_n (случай $a_1 = 0$). В таком случае

$$\omega_\alpha^i = 0 \tag{3.3}$$

и уравнение (3.3) определяет абсолют в проективном пространстве. Исследование подмногообразия m-пар в этом случае сводится к исследованию основного семейства в центрированном проективном пространстве, где действует проективгая аксиальная группа. Подробнее на этом случае не будем останавливаться.

Другим частным случаем вырожденных подмногообразий m-пар имеется дело при изучении тагненциально вырожденных поверхностей, оснащенных по Картану.

Если в проективном пространстве P_n дано a-мерное тангенциально вырожденная поверхность [17], оснащенная по Картану, то семейство нормальных плоскостей (основное семейство) зависит от a параметров, а семейство a-мерных касательных плоскостей (дополнительное семейство $p=a$) зависит от a_1 параметров $0 < a_1 < a$.

Литература

1. Гейдельман Р. М., Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах. В сб. "Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР)" М., 1967, 323-374.
2. Измайлова Г. С., К теории пар, составленных конгруэнцией прямых и псевдоконгруэнций $(n - 2)$ - мерных плоскостей в P_n. Тр. Моск. ин-та инж. ж-д. трансп., 1970, 361, 49-56.
3. Кондакова Э. М., Ивлев Е. Т., О некоторых геометрических объектов - семейства невырожденных нуль-пар в P_n. Геометр. сб. Тр. Томск. ун-та. Сер. мех-мат., 1972, 212, 87-95.
4. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии. Москва, 1960.
5. Лумисте Ю. Г., Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 6-41.
6. Лумисте Ю. Г., Расслояемые семейства I-пар четырехмерного проективного пространства. Уч. зап.Тартуск. ун-та, 1967, 206, 10-21.
7. Лумисте Ю. Г., Дифференциальная геометрия подмногообразий. В сб. "Алгебра. Топология. Геометрия. 1965 (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР)", М., 1975, 18, 273-340.
8. Масленков А. Е., К дифференциальной геометрии многообразий m-пар проективного пространства. Деп. в ВИНИТИ от 5 июля 1976.г. № 2517-13, 13 стр.

9. М а с л е н к о в А. Е. Расслояемые многообразия $(m-1)$-пар в проективном пространстве. Деп. в ВИНИТИ от 2 июля 1976 г. № 2491-76, 18 стр.
10. О с т и а н у Н. М., Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве. Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1969, 2, 247-262.
11. П е т р о в А. З., Пространства Эйнштейна. Москва, 1961.
12. Р а ш е в с к и й П. К. Скалярное поле в расслоенном пространстве. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1948, 7, 225-248.
13. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Проективно-дифференциальная геометрия семейств пар $P_m + P_{n-m-1}$ в P_n. Матем.сб. 1949, 24, № 3, 405-428.
14. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Симметрические пространства и их геометрические приложения. Добавления к книге Э.Картана "Геометрия групп Ли и симметрические пространства". Москва, 1949.
15. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Об унитарных и расслоенных пространствах. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1949, 7, 260-275.
16. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства. Москва, 1969.
17. Р ы ж к о в В. В., О тангенциально вырожденных поверхностях. Докл. АН СССР, 1960, 135, № 1, 19-22.
18. С у ш н и к о в Б. С., О многообразии $E(1,2,2)$ в P_4. Геометр. сб. Томск. ун-та, 1973, 246, 87-97.
19. Т у у л м е т с Л., Подмногообразия вырожденных m-пар плоскостей в проективном пространстве P_n. Тезисы докладов УI Всес. геометр. конф. Вильнюс, 1975, 242.
20. Т у у л м е т с Л., Многообразие m-пар в проективном пространстве P_n. Тезисы докл. Всес. научн. конф. 150 лет геометрии Лобачевского. Казань, 1976, 198.
21. Ш и р о к о в А. П., К вопросу об А-пространствах. В сб. "125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского". Москва - Ленинград, 1952, 195-200.

Поступило
1 IУ 1977

HOMOGEENSE m-PAARIDE RUUMI JA SELLE ALAMMUUTKONDADE GEOMEETRIAST

L.Tuulmets

R e s ü m e e

Projektiivses ruumis P_n antud m-paariks nimetatakse mittelõikuvate tasandite L_m ja ℓ_{n-m-1} paari (L_m, ℓ_{n-m-1}). Kõigi paaride $\{(L_m, \ell_{n-m-1})\}$ hulk on sümmeetriline homogeenne ruum $\mathfrak{T}_{n,m}$. Ruum $\mathfrak{T}_{n,m}$ on pseudo-Riemanni ruum [13] ning omab Raševski kihtruumi struktuuri [13-15].

Artikli esimene paragrahv on pühendatud m-paaride ruumi $\mathfrak{T}_{n,m}$ mõningate üldiste omaduste uurimisele. Näidatakse, et ruum $\mathfrak{T}_{n,m}$ on konstantse skalaarse kõverusega Einsteini ruum (pseudo-Riemanni meetrika meetriline tensor on võrdeline Ricci tensoriga). Peale pseudo-Riemanni meetrika on ruumis $\mathfrak{T}_{n,m}$ määratud veel invariantne sümplektiline meetrika, kusjuures neid meetrikaid määravad ruutvormid on seotud kaldvahetuvuse tingimusega. Sümplektilise meetrika tensor on võrdeline mahttensoriga. Ruumil $\mathfrak{T}_{n,m}$ kui kahe meetrikaga ruumil on rida analoogilisi omadusi pseudo-Kähleri ruumiga.

Artikli kaks viimast paragrahvi on pühendatud ruumi $\mathfrak{T}_{n,m}$ teatavate alammuutkondade uurimisele. Eraldi vaadeldakse kidumata alammuutkondi $\mathfrak{T}_{n,m}(a)$ (m-paaride a-parameetrilisi parvi) ja kidunud alammuutkondi $\mathfrak{T}_{n,m}(a, a_1)$ (m-paari tasandid sõltuvad erinevast arvust parameetritest). Viimaste kohta saadavad tulemused üldistavad mitmeid tulemusi tsentreeritud projektiivse ruumi ja tangentsiaalselt kidunud pindade teooriast.

A CONTRIBUTION TO THE GEOMETRY OF HOMOGENEOUS SPACE OF m-PAIRS AND ITS SUBMANIFOLDS

L.Tuulmets

S u m m a r y

A pair of unintersecting planes of dimension m and $n-m-1$ in n-dimensional projective space P_n is called a m-pair. Set of all m-pairs in P_n is a symmetric pseudo-Riemannian space $\mathfrak{T}_{n,m}$ with a structure of Rashevs-

ki's fibered space [13-15].

In this paper it is proved that the space $\mathfrak{T}_{n,m}$ is an Einstein space i.e. the Ricci tensor of the pseudo-Riemannian metric of $\mathfrak{T}_{n,m}$ is proportional to metric tensor. Besides the pseudo-Riemannian metric, an invariant symplectic metric is determined in the space $\mathfrak{T}_{n,m}$. Both these metrics are connected by condition of anticommutativity (1.24). Tensor of symplectic metrics is proportional to the volume curvature tensor. The space $\mathfrak{T}_{n,m}$ being a space of two metrics has several properties, analogues to the properties of the pseudo-Kähler space.

In the second part of the paper submanifolds $\mathfrak{T}_{n,m}(a)$ of space $\mathfrak{T}_{n,m}$ are considered. A submanifold of m-pairs in the space $\mathfrak{T}_{n,m}$ is called degenerated if his components as submanifolds of m- and $(n-m-1)$-dimensional planes have unequal dimensions. Some local properties of the nondegenerated and degenerated submanifolds of m-pairs are obtained.

TRÜ Toimetised,
464 (1978), 116-136.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1978, 464, 116-136.

МНОГООБРАЗИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ $2m$-ПЛОСКОСТЕЙ И СФЕРИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

А.Парринг
Кафедра алгебры и геометрии

Введение

Настоящая статья продолжает тематику статей [2, 3]. Оказывается,что аффинно-симплектическое пространство Sp_{2n} индуцирует целый ряд псевдоевклидовых векторных пространств ${}^{\mathcal{L}(\mu)}E_{\mathcal{N}(\mu)}$, где индекс $\mu = 1, \ldots, n$ (см. § 1). Найдены структурные уравнения этих пространств (см. § 2). Каждое a-мерное многообразие B_a симплектических $2m$-плоскостей порождает два канонических расслоения $\pi : E \to B_a$ и $p : V \to B_a$ (см. [2]) с общей базой B_a; их слоями являются соответственно симплектические $2m$-плоскости Sp_{2m}, как точечные многообразия и ортогональные дополнения $V^{\perp}(Sp_{2m})$ к $V(Sp_{2m})$ до всего векторного пространства $V(Sp_{2n})$ (см. § 3). Эти расслоения индуцируют ряд векторных канонических расслоений $\pi_\mu : V_\mu \to B_a$ и $p_\mu : V_\mu \to B_a$. Их слоями являются образы $V_\mu(Sp_{2m})$ и $V_\mu^{\perp}(Sp_{2m})$ из ${}^{\mathcal{L}(\mu)}E_{\mathcal{N}(\mu)}$ соответственно слоев $V(Sp_{2m})$ и $V^{\perp}(Sp_{2m})$. Обобщаются понятия углов и стационарных углов, данные в [2]. Эти понятия найдены с новой точки зрения. Наконец, определяются сферические отображения ψ_1 и ψ_2 соответственно первого и второго рода грассманова многообразия G_n симплектических $2m$-плоскостей. Образы $\psi_1(B_a)$ и $\psi_2(B_a)$ многообразия $B_a \subset G_n$ являются подмногообразиями некоторой сферы (см. § 4).

§ 1. Псевдоевклидовы пространства ${}^{\ell(\mu)}E_{N(\mu)}$, индуцированные симплектическим пространством Sp_{2n}

Пусть Sp_{2n} – аффинно-симплектическое пространство и $G = \|g_{\jmath k}\|$ – регулярная кососимметрическая матрица, определяющая метрику в нем. Здесь $\jmath, j, \ldots = 1, \ldots, 2n$. Соответствующее симплектическое векторное пространство обозначим $V(Sp_{2n})$. Рассмотрим теперь векторное пространство $\Lambda_{2\mu}(Sp_{2n})$ 2μ-векторов пространства $V(Sp_{2n})$, где $1 \le \mu \le n$. Оказывается, что симплектическая структура в $V(Sp_{2n})$ превращает $\Lambda_{2\mu}(Sp_{2n})$ в псевдоевклидово пространство. Действительно, пусть

$$g_{(\mathcal{X}_1\ldots\mathcal{X}_{2\mu})(\mathcal{L}_1\ldots\mathcal{L}_{2\mu})} = \begin{vmatrix} g_{\mathcal{X}_1\mathcal{L}_1} & \cdots & g_{\mathcal{X}_1\mathcal{L}_{2\mu}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\mathcal{X}_{2\mu}\mathcal{L}_1} & \cdots & g_{\mathcal{X}_{2\mu}\mathcal{L}_{2\mu}} \end{vmatrix} = (2\mu)!\, g_{[\mathcal{X}_1[\mathcal{L}_1}\, g_{|\mathcal{X}_2|\mathcal{L}_2} \cdots g_{\mathcal{X}_{2\mu}]\mathcal{L}_{2\mu}]} \quad (1.1)$$

– произвольный минор порядка 2μ матрицы G. Здесь $1 \le \mathcal{X}_1 < \ldots < \mathcal{X}_{2\mu} \le 2n$ и $1 \le \mathcal{L}_1 < \ldots < \mathcal{L}_{2\mu} \le 2n$, а каждый набор индексов типа $(\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_{2\mu})$ рассматривается как один индекс. Предположим также, что $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{2\mu}$ в индексе $(\mathcal{X}_1 \ldots \mathcal{X}_{2\mu})$ упорядочены. Возникает матрица $G_{(2\mu)} = \|g_{(\mathcal{X}_1\ldots\mathcal{X}_{2\mu})(\mathcal{L}_1\ldots\mathcal{L}_{2\mu})}\|$. Поскольку

$$g_{(\mathcal{X}_1\ldots\mathcal{X}_{2\mu})(\mathcal{L}_1\ldots\mathcal{L}_{2\mu})} = \begin{vmatrix} g_{\mathcal{X}_1\mathcal{L}_1} & \cdots & g_{\mathcal{X}_1\mathcal{L}_{2\mu}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\mathcal{X}_{2\mu}\mathcal{L}_1} & \cdots & g_{\mathcal{X}_{2\mu}\mathcal{L}_{2\mu}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -g_{\mathcal{L}_1\mathcal{X}_1} & \cdots & -g_{\mathcal{L}_{2\mu}\mathcal{X}_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -g_{\mathcal{L}_1\mathcal{X}_{2\mu}} & \cdots & -g_{\mathcal{L}_{2\mu}\mathcal{X}_{2\mu}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} g_{\mathcal{L}_1\mathcal{X}_1} & \cdots & g_{\mathcal{L}_1\mathcal{X}_{2\mu}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{\mathcal{L}_{2\mu}\mathcal{X}_1} & \cdots & g_{\mathcal{L}_{2\mu}\mathcal{X}_{2\mu}} \end{vmatrix} = g_{(\mathcal{L}_1\ldots\mathcal{L}_{2\mu})(\mathcal{X}_1\ldots\mathcal{X}_{2\mu})},$$

то матрица $G_{(2\mu)}$ симметрична. Преобразованием базиса в $V(Sp_{2n})$ можно матрицу G привести к виду

$$G = \begin{Vmatrix} O & E \\ -E & O \end{Vmatrix} \quad (1.2)$$

Тогда в каждой строке матрицы $G_{(2k)}$ все элементы – нули, кроме одного элемента, равного 1. Число единиц, находящихся на главной диагонали и вне его, равно соответственно C_n^k и $C_{2n}^{2k} - C_n^k$. Следовательно, матрица $G_{(2k)}$ имеет $\mathcal{L}(k) = \frac{1}{2}(C_{2n}^{2k} - C_n^k)$ собственных значений -1, а остальные собственные значения все 1. Итак, $\Lambda_{2k}(Sp_{2n})$ представляет собой псевдоевклидово векторное пространство ${}^{\mathcal{L}(k)}E_{\mathcal{N}(k)}$ размерности $\mathcal{N}(k) = C_{2n}^{2k}$ и индекса $\mathcal{L}(k)$.

Пусть $\{\vec{e}_{\varkappa}\}$ – симплектический базис пространства, т.е. базис в котором G имеет вид (1.2), а $\{\vec{e}_{j_1} \wedge \vec{e}_{j_2} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{j_{2k}}\}$ – базис в ${}^{\mathcal{L}(k)}E_{\mathcal{N}(k)}$, индуцированный базисом $\{\vec{e}_{\varkappa}\}$. При переходе к новому симплектическому базису $\vec{e}_j{}' = A_j^{\varkappa} \vec{e}_{\varkappa}$ с матрицей $A = \| A_j^{\varkappa} \|$ из симплектической группы $Sp(G)$, возникает и преобразование базиса в ${}^{\mathcal{L}(k)}E_{\mathcal{N}(k)}$:

$$\vec{e}{}'_{j_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}{}'_{2k} = (A_{j_1}^{\varkappa_1} \vec{e}_{\varkappa_1}) \wedge \ldots \wedge (A_{j_{2k}}^{\varkappa_{2k}} \vec{e}_{\varkappa_{2k}}) = A_{j_1}^{[\varkappa_1} A_{j_2}^{\varkappa_2} \ldots A_{j_{2k}}^{\varkappa_{2k}]} \vec{e}_{\varkappa_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{\varkappa_{2k}}.$$

Возникает матрица

$$A_{(2k)} = \| A_{(\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \ldots \mathcal{L}_{2k})}^{(\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_{2k})} \| = \| A_{\mathcal{L}_1}^{[\varkappa_1} A_{\mathcal{L}_2}^{\varkappa_2} \ldots A_{\mathcal{L}_{2k}}^{\varkappa_{2k}]} \| . \qquad (1.3)$$

Итак,

$$\vec{e}{}'_{j_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}{}'_{j_{2k}} = A_{(j_1 \ldots j_{2k})}^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2k})} \vec{e}_{\varkappa_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{\varkappa_{2k}} .$$

Поскольку произведению AB соответствует произведение $A_{(2k)} B_{(2k)}$ и матрице A^{-1} соответствует $A_{(2k)}^{-1}$ (см.[1]), то группа $Sp(G)$ индуцирует группу, которую обозначим $Sp_{(2k)}(G)$. Для каждой матрицы $A \in Sp(G)$ существует такая матрица S, что SAS^{-1} имеет диагональный вид (см., например, [2])

$$SAS^{-1} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{Vmatrix} = \mathfrak{A} . \qquad (1.4)$$

Поскольку $|A| = 1$ при $A \in Sp(G)$, то

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n = |\mathfrak{A}| = |SAS^{-1}| = |A| = 1.$$

Выражению $A = S^{-1} \mathfrak{A} S$ в $Sp_{(2k)}(G)$ соответствует $A_{(2k)} = S_{(2k)}^{-1} \mathfrak{A}_{(2k)} S_{(2k)}$; поэтому получаем $|A_{(2k)}| = |\mathfrak{A}_{(2k)}| = |\mathfrak{A}|^{\mathcal{N}(k)} = |A|^{\mathcal{N}(k)} = 1$.

Матрицу G, заданную формулой (1.2), можно также преобразовать к виду

$$SGS^{-1} = G' = i \begin{Vmatrix} E & O \\ O & -E \end{Vmatrix}, \qquad (1.5)$$

откуда снова следует, что $|G_{(2p)}| = |S^{-1}_{(2p)} G'_{(2p)} S_{(2p)}| = |G'_{(2p)}| = |G|^{N(p)} = 1$, так как $|G| = 1$. В (1.5) символ i – мнимая единица.

В общем случае, группа $Sp_{(2p)}(G)$ является подгруппой группы ${}^{\mathcal{L}(p)}\theta_{N(p)}$. Здесь через ${}^{\mathcal{L}(p)}\theta_{N(p)}$ обозначена группа, которая сохраняет матрицу $G_{(2p)}$ неизменной, т.е.

$$A_{(2p)} G_{(2p)} A^{T}_{(2p)} = G_{(2p)} . \qquad (1.6)$$

Если $A \in Sp(G)$, то

$$AGA^{T} = G, \qquad (1.7)$$

следовательно, $A_{(2p)}$ удовлетворяет уравнению (1.6), из чего следует, что $Sp_{(2p)}(G) \subset {}^{\mathcal{L}(p)}\theta_{N(p)}$.

Отметим, что $\dim {}^{\mathcal{L}(p)}E_{N(p)} = \dim {}^{\mathcal{L}(n-p)}E_{N(n-p)}$, так как $C^{2p}_{2n} = C^{2(n-p)}_{2n}$. Из (1.5) еще следует, что $G_{(2p)} = G^{*}_{(2n-2p)}$, где знак $*$ обозначает "транспонирование" относительно второй главной диагонали.

§ 2. Структурные уравнения пространства ${}^{\mathcal{L}(p)}E_{N(p)}$

Элемент $\omega = \| \omega^{J}_{K} \|$ алгебры Ли группы $Sp(G)$ в формулах инфинитезимального перемещения $d\vec{e}_J = \omega^{K}_{J} \vec{e}_K$ удовлетворяет уравнению

$$\omega G + G \omega^{T} = 0, \qquad (2.1)$$

равносильному

$$g_{\mathcal{L}K}\, \omega^{\mathcal{L}}_{J} + g_{J\mathcal{L}}\, \omega^{\mathcal{L}}_{K} = 0 . \qquad (2.1')$$

Последнее получим из (1.7), подставляя туда разложение

$$A = E + \omega + \ldots . \qquad (2.2)$$

Формы ω^{J}_{K} удовлетворяют, кроме того, структурным уравнениям

$$d\omega^{K}_{J} = \omega^{\mathcal{L}}_{J} \wedge \omega^{K}_{\mathcal{L}} .$$

Находим соответствующие формулы для пространства ${}^{\varkappa(\mu)}E_{N(\mu)}$ с группой $Sp_{(2\mu)}(G)$. В разложении

$$A_{(2\mu)} = E_{(2\mu)} + \omega_{(2\mu)} + \ldots \tag{2.3}$$

матрица $\omega_{(2\mu)} = \| \omega^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} \|$ определяет инфинитезимальное перемещение базиса $\{\vec{e}_{\jmath_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{\jmath_{2\mu}}\}$ формулами

$$d(\vec{e}_{\jmath_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2\mu}) = \omega^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} \vec{e}_{\varkappa_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{\varkappa_{2\mu}} . \tag{2.4}$$

Элемент $\omega_{(2\mu)}$ алгебры Ли удовлетворяет некоторым ограничениям, которые получим из (1.6), подставляя туда (2.1). Сравнение членов первого порядка дает

$$\omega_{(2\mu)} G_{(2\mu)} + G_{(2\mu)} \omega^{T}_{(2\mu)} = 0 , \tag{2.5}$$

которое равносильно соотношениям

$$g_{(\ell_1 \ldots \ell_{2\mu})(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})} \omega^{(\ell_1 \ldots \ell_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} + g_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})(\ell_1 \ldots \ell_{2\mu})} \omega^{(\ell_1 \ldots \ell_{2\mu})}_{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})} = 0 . \tag{2.5'}$$

Поскольку $\omega_{(2\mu)}$ является элементом алгебры Ли группы $Sp_{(2\mu)}(G) \subset {}^{\varkappa(\mu)}\theta_{N(\mu)}$, то дополнительно к условиям (2.5) он удовлетворяет еще некоторым условиям. Именно, чтобы получить элемент $\omega_{(2\mu)}$ алгебры Ли группы $Sp_{(2\mu)}(G)$, находим его выражение через элементы $\omega = \| \omega^{\varkappa}_{\jmath} \|$ алгебры Ли группы $Sp(G)$. Для этого подставим в (1.3) разложения (2.2) и (2.3). Получим

$$\delta^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} + \omega^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} = (\delta_{\jmath_1} + \omega_{\jmath_1})^{[\varkappa_1} \ldots (\delta_{\jmath_{2\mu}} + \omega_{\jmath_{2\mu}})^{\varkappa_{2\mu}]} .$$

Здесь обозначено

$$(\delta_{\jmath_\varrho} + \omega_{\jmath_\varrho})^{\varkappa_\varrho} = \delta^{\varkappa_\varrho}_{\jmath_\varrho} + \omega^{\varkappa_\varrho}_{\jmath_\varrho} ,$$

где $\varrho, \ldots = 0, 1, \ldots, \mu$. Приравнивая члены первого порядка, получим

$$\omega^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} = \delta^{[\varkappa_1}_{\jmath_1} \ldots \delta^{\varkappa_{2\mu-1}}_{\jmath_{2\mu-1}} \omega^{\varkappa_{2\mu}]}_{\jmath_{2\mu}} + \delta^{[\varkappa_1}_{\jmath_1} \ldots \omega^{\varkappa_{2\mu-1}}_{\jmath_{2\mu-1}} \delta^{\varkappa_{2\mu}]}_{\jmath_{2\mu}} + \ldots + \omega^{[\varkappa_1}_{\jmath_1} \delta^{\varkappa_2}_{\jmath_2} \ldots \delta^{\varkappa_{2\mu}]}_{\jmath_{2\mu}} \tag{2.6}$$

В этих формулах ω удовлетворяет соотношению (2.1). Внешнее дифференцирование (2.4) дает структурные уравнения пространства ${}^{\varkappa(\mu)}E_{N(\mu)}$:

$$d\omega^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} = \omega^{(\ell_1 \ldots \ell_{2\mu})}_{(\jmath_1 \ldots \jmath_{2\mu})} \wedge \omega^{(\varkappa_1 \ldots \varkappa_{2\mu})}_{(\ell_1 \ldots \ell_{2\mu})} . \tag{2.7}$$

§ 3. Расслоение симплектических $2m$-плоскостей и с ним индуцированные расслоения

Пусть a-мерное дифференцируемое многообразие, образованное из симплектических $2m$-плоскостей Sp_{2m} пространства Sp_{2n}; обозначим его B_a или, более точно, $B_a(2m,2n)$. Его кобазис θ^α $(\alpha,\beta,\dots,\lambda = 1, \dots, a)$ в некоторой области $\mathcal{U} \subset B_a$ удовлетворяет уравнениям структуры

$$d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta . \tag{3.1}$$

Многообразие B_a определяет каноническое расслоение $\pi: E \to B_a$ с базой B_a. Его слоями являются симплектические $2m$-плоскости Sp_{2m} как точечные многообразия. Ортогональные дополнения $V^\perp(Sp_{2m})$ к симплектическим векторным пространствам $V(Sp_{2m})$ до всего пространства $V(Sp_{2n})$ определяет другое векторное каноническое расслоение $p: V \to B_a$, базой которого является B_a, а слоями являются $2(n-m)$-мерные симплектические векторные пространства $V^\perp(Sp_{2m})$. В Sp_{2n} можно выбрать такие подвижные реперы $\{M; \vec{e}_i, \vec{e}_p\}$, что $\{M; \vec{e}_i\}$, где $i, j, \dots, r = 1, \dots, 2m$, определяет Sp_{2m}, а $\{\vec{e}_p\}$, где $p, q, \dots = 2m + 1, \dots, 2n$, есть ортогональное дополнение $V^\perp(Sp_{2m})$. В этом случае

$$g_{ip} = g_{pi} = 0 ,$$

и, следовательно, из (2.1') получаем

$$\omega^k_q = g_{qp} g^{ki} \omega^p_i . \tag{3.2}$$

Возникают уравнения

$$\omega^p = \Lambda^p_\alpha \theta^\alpha , \qquad \omega^p_i = \Lambda^p_{i\alpha} \theta^\alpha , \tag{3.3}$$

вследствие которых структурными уравнениями расслоения являются

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega^i_j + \Omega^i , \\ d\omega^i_j &= \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \Omega^i_j \end{aligned} \tag{3.4}$$

вместе с (3.1). Здесь

$$\Omega^i = \omega^p \wedge \omega^i_p = P^i_{\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta = T^i_{\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta,$$
$$\Omega^i_j = \omega^p_j \wedge \omega^i_p = Q^i_{j\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta = R^i_{j\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta \tag{3.5}$$

и

$$P^i_{\alpha\beta} = g_{pq}g^{ij}\Lambda^p_{j\alpha}\Lambda^q_{\beta}, \qquad T^i_{\alpha\beta} = P^i_{[\alpha\beta]},$$
$$Q^i_{j\alpha\beta} = g_{pq}g^{il}\Lambda^p_{j\alpha}\Lambda^q_{l\beta}, \qquad R^i_{j\alpha\beta} = Q^i_{j[\alpha\beta]}.$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\omega^k_q = A^k_{q\alpha}\theta^\alpha, \tag{3.6}$$

где

$$A^k_{q\alpha} = g_{qp}g^{ki}\Lambda^p_{i\alpha}.$$

Поэтому структурными уравнениями расслоения $p: V^1 \to B_a$ являются

$$d\omega^q = \omega^r_q \wedge \omega^q_r + \Omega^p_q$$

вместе с (3.1). Здесь

$$\Omega^q_p = \omega^i_p \wedge \omega^q_i = Q^q_{p\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta = R^q_{p\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta$$

и

$$Q^q_{p\alpha\beta} = g_{pr}g^{ki}\Lambda^r_{i\alpha}\Lambda^q_{k\beta}, \qquad R^q_{p\alpha\beta} = Q^q_{p[\alpha\beta]}.$$

Условия (3.2) дают некоторые условия на элементы $g_{(\mathcal{J}_1\dots\mathcal{J}_{2p})(\mathcal{X}_1\dots\mathcal{X}_{2p})}$ матрицы $G_{(2p)}$ в $^{\mathcal{L}(p)}E_{N(p)}$. Из (1.1) следует, что $g_{(\mathcal{J}_1\dots\mathcal{J}_{2p})(\mathcal{X}_1\dots\mathcal{X}_{2p})}$ всегда равен нулю, если число индексов типа i в наборе индексов $\mathcal{J}_1,\dots,\mathcal{J}_{2p}$ не равно аналогичному числу в наборе индексов $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_{2p}$, т.е.

$$g_{(i_1\dots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\dots p_{2p})(j_1\dots j_\tau q_{\tau+1}\dots q_{2p})} = 0,$$

если $\varsigma \neq \tau$. Следовательно, $G_{(2p)}$ – клеточная матрица с клетками

$$G^\varsigma_{(2p)} = \| g_{(i_1\dots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\dots p_{2p})(k_1\dots k_\varsigma q_{\varsigma+1}\dots q_{2p})} \|.$$

Поскольку

$$|G_{(2p)}| = |G^0_{(2p)}||G^1_{(2p)}|\dots|G^{2p}_{(2p)}| \neq 0,$$

то $|G^\varsigma_{(2p)}| \neq 0$. Из (2.5) следует

$$g_{(k_1\dots k_\tau r_{\tau+1}\dots r_{2p})(j_1\dots j_\tau q_{\tau+1}\dots q_{2p})}\,a^{(k_1\dots k_\tau r_{\tau+1}\dots r_{2p})}_{(i_1\dots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\dots p_{2p})} +$$
$$+ g_{(i_1\dots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\dots p_{2p})(k_1\dots k_\varsigma r_{\varsigma+1}\dots r_{2p})}\,a^{(k_1\dots k_\varsigma r_{\varsigma+1}\dots r_{2p})}_{(j_1\dots j_\tau q_{\tau+1}\dots q_{2p})} = 0$$

и отсюда

$$\omega^{(k_1\dots k_\xi q_{\xi+1}\dots i_{2\mu})}_{(i_1\dots i_\xi p_{\xi+1}\dots p_{2\mu})} = -g^{(k_1\dots k_\xi k_{\xi+1}\dots k_{2\mu})(j_1\dots j_\xi q_{\xi+1}\dots q_{2\mu})}\cdot \tag{3.7}$$

$$\cdot g_{(i_1\dots i_\xi p_{\xi+1}\dots p_{2\mu})(\ell_1\dots \ell_\xi \lambda_{\xi+1}\dots \lambda_{2\mu})}\,\omega^{(\ell_1\dots\ell_\xi\lambda_{\xi+1}\dots\lambda_{2\mu})}_{(j_1\dots j_\xi q_{\xi+1}\dots q_{2\mu})}.$$

Каждая симплектическая $2m$-плоскость $Sp_{2m}\subset Sp_{2n}$ определяет в $^{\mathcal{L}(\mu)}E_{N(\mu)}$ некоторое векторное подпространство $V_{(\mu)}(Sp_{2m})$ размерности $C^{2\mu}_{2m}$. Аналогично $V^{\perp}(Sp_{2m})\subset$ $\subset V(Sp_{2n})$ также определяет в $^{\mathcal{L}(\mu)}E_{N(\mu)}$ векторное подпространство $V^{\perp}_{(\mu)}(Sp_{2m})$ размерности $C^{2\mu}_{2(n-m)}$. Итак, добавочно к каноническим расслоениям $\pi: E\to B_a$ и $p: V^{\perp}\to B_a$ возникают новые канонические расслоения $\pi_{(\mu)}: V_{(\mu)}\to B_a$ и $p_{(\mu)}: V^{\perp}_{(\mu)}\to B_a$ с базой B_a; слоями являются соответственно $V_{(\mu)}(Sp_{2m})$ и $V^{\perp}_{(\mu)}(Sp_{2m})$.

Найдем теперь структурные уравнения сперва расслоения $\pi_{(\mu)}: V_{(\mu)}\to B_a$, а потом расслоения $p_{(\mu)}: V^{\perp}_{(\mu)}\to B_a$.

Слой $V_{(\mu)}(Sp_{2m})$ задается базисом $\{\vec e_{i_1}\wedge\dots\wedge\vec e_{i_{2\mu}}\}$. Поскольку

$$d(\vec e_{i_1}\wedge\dots\wedge\vec e_{i_{2\mu}}) = \omega^{(k_1\dots k_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})}\,\vec e_{k_1}\wedge\dots\wedge\vec e_{k_{2\mu}} \pmod{\theta^{\alpha}},$$

то из (2.4) для расслоения $\pi_{(\mu)}: V_{(\mu)}\to B_a$ следуют:

$$\omega^{(k_1\dots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})} = \Lambda^{(k_1\dots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})\alpha}\,\theta^{\alpha}.$$

Учитывая (2.6),

$$\omega^{(k_1\dots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})} = \delta^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\omega^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \delta^{[k_1}_{i_1}\dots\omega^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}}+\dots+\omega^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}}$$

и (3.3), находим, что $\Lambda^{(k_1\dots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})}$ выражается через $\Lambda^{p}_{i\alpha}$ по формулам

$$\Lambda^{(k_1\dots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})\alpha} = \delta^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\Lambda^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}\alpha} + \delta^{[k_1}_{i_1}\dots\Lambda^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}\alpha}\delta^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}}+\dots+\Lambda^{[k_1}_{i_1\alpha}\dots\delta^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}},$$

или равносильным им

$$2\mu\,\Lambda^{(k_1\dots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})} = (-1)^0\delta^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}]}_{i_{2\mu-1}}\Lambda^{p_{2\mu}}_{i_{2\mu}\alpha}+\dots+$$

$$+(-1)^{\xi}\delta^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{\xi-1}}_{i_{\xi-1}}\delta^{k_\xi}_{i_{\xi+1}}\dots\delta^{k_{2\mu-1}]}_{i_{2\mu}}\Lambda^{p_{2\mu}}_{i_\xi\alpha}+\dots+(-1)^{2\mu-1}\delta^{[k_1}_{i_2}\dots\delta^{k_{2\mu-1}]}_{i_{2\mu}}\Lambda^{p_{2\mu}}_{i_1\alpha}.$$

Из (2.7) вытекает

$$d\omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})} = \omega^{(k_1\dots k_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})}\wedge\omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(k_1\cdots k_{2\mu})} + \Omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})}\,. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})} &= \omega^{(k_1\cdots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})}\wedge\omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(k_1\cdots k_{2\mu-1}p_{2\mu})} = \\ &= Q^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta = R^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu}]}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta,\end{aligned} \tag{3.9}$$

где, с учетом (3.17'),

$$Q^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})\alpha\beta} = -g^{(j_1\cdots j_{2\mu})(\ell_1\dots\ell_{2\mu})}g_{(k_1\cdots k_{2\mu-1}p_{2\mu})(m_1\cdots m_{2\mu-1}q_{2\mu})}\cdot$$

$$\cdot\Lambda^{(k_1\cdots k_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})\alpha}\Lambda^{(m_1\cdots m_{2\mu-1}p_{2\mu})}_{(\ell_1\cdots\ell_{2\mu})\beta}$$

и

$$R^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})} = Q^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})[\alpha\beta]}\,.$$

Первую часть соотношений (3.9), с учетом (3.7) и (2.6), можно еще записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})} &= (\delta^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\omega^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \delta^{[k_1}_{i_1}\dots\omega^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \dots + \omega^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{p_{2\mu}]}_{i_{2\mu}})\wedge \\ &\wedge(\delta^{[j_1}_{k_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{k_{2\mu-1}}\omega^{j_{2\mu}]}_{p_{2\mu}} + \delta^{[j_1}_{k_1}\dots\omega^{j_{2\mu-1}}_{k_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{p_{2\mu}} + \dots + \omega^{[j_1}_{k_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{k_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}) = \\ &= \frac{1}{2\mu}\{\delta^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}]}_{i_{2\mu-1}}\omega^{p_{2\mu}}_{i_{2\mu}} - \delta^{[k_1}_{i_1}\dots\delta^{k_{2\mu-1}|}_{i_{2\mu}}\omega^{p_{2\mu}}_{i_{2\mu-1}} + \dots + (-1)^{2\mu-1}\delta^{[k_1}_{i_2}\dots\delta^{k_{2\mu-1}]}_{i_{2\mu}}\omega^{p_{2\mu}}_{i_1}\}\wedge \\ &\wedge\{\delta^{[j_1}_{k_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{k_{2\mu-1}}\omega^{j_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}\} = \frac{1}{2\mu}\{\omega^{p_{2\mu}}_{i_{2\mu}}\wedge(\delta^{[j_1}_{[i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}]}\omega^{j_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}) - \omega^{p_{2\mu}}_{i_{2\mu-1}}\wedge \\ &\wedge(\delta^{[j_1}_{[i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-2}}_{i_{2\mu-2}}\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu}]}\omega^{j_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}) + \dots + (-1)^{2\mu-1}\omega^{p_{2\mu}}_{i_1}\wedge(\delta^{[j_1}_{[i_2}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu}}\omega^{j_{2\mu}]}_{p_{2\mu}})\} = \\ &= \delta^{[j_1}_{[i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\Omega^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}]} + \delta^{[j_1}_{[i_1}\dots\Omega^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}]} + \dots + \Omega^{[j_1}_{[i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}]} = \\ &= \delta^{[j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\Omega^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \delta^{[j_1}_{i_1}\dots\Omega^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \dots + \Omega^{[j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}}\,.\end{aligned}$$

Следовательно, формы кривизны $\Omega^{(j_1\dots j_{2\mu})}_{(i_1,\dots,i_{2\mu})}$ расслоения $\pi_{(\mu)}: V_{(\mu)} \to B_a$ выражаются через формы кривизны Ω^j_i расслоения $\pi: E \to B_a$:

$$\Omega^{(j_1\dots j_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})} = \delta^{[j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\Omega^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \delta^{[j_1}_{i_1}\dots\Omega^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \dots + \Omega^{[j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}}.$$

Также имеет место

$$Q^{(j_1\dots j_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})\alpha\beta} = \delta^{[j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}Q^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}\alpha\beta} + \delta^{[j_1}_{i_1}\dots Q^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}\alpha\beta}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \dots + Q^{[j_1}_{i_1\alpha\beta}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}}$$

и

$$R^{(j_1\dots j_{2\mu})}_{(i_1\dots i_{2\mu})\alpha\beta} = \delta^{[j_1}_{i_1}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}R^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}\alpha\beta} + \delta^{[j_1}_{i_1}\dots R^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}\alpha\beta}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}} + \dots + R^{[j_1}_{i_1\alpha\beta}\dots\delta^{j_{2\mu-1}}_{i_{2\mu-1}}\delta^{j_{2\mu}]}_{i_{2\mu}}.$$

Уравнения (3.1) и (3.8) есть структурные уравнения расслоения $\pi_{(\mu)}: V_{(\mu)} \to B_a$.

Расслоение $p_{(\mu)}: V^{\perp}_{(\mu)} \to B_a$ задается уравнениями

$$\omega^{(i_1 q_2\dots q_{2\mu})}_{(p_1\dots p_{2\mu})} = A^{(i_1 q_2\dots q_{2\mu})}_{(p_1\dots p_{2\mu})\alpha}\theta^\alpha,$$

причем, в силу (2.6) и (3.6), имеет место

$$A^{(i_1 q_2\dots q_{2\mu})}_{(p_1\dots p_{2\mu})} = \delta^{[i_1}_{p_1}\delta^{q_2}_{p_2}\dots A^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}} + \dots + \delta^{[i_1}_{p_1}A^{q_2}_{p_2\alpha}\dots\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}} + A^{[i_1}_{p_1\alpha}\delta^{q_2}_{p_2}\dots\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}.$$

Его структурными уравнениями являются (3.1) вместе с уравнениями

$$d\omega^{(q_1\dots q_{2\mu})}_{(p_1\dots p_{2\mu})} = \omega^{(r_1\dots r_{2\mu})}_{(p_1\dots p_{2\mu})}\wedge\omega^{(q_1\dots q_{2\mu})}_{(r_1\dots r_{2\mu})} + \Omega^{(q_1\dots q_{2\mu})}_{(p_1\dots p_{2\mu})}. \qquad (3.10)$$

Здесь

$$\Omega^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})}=\omega^{(i_1i_2\cdots i_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})}\wedge\omega^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(i_1i_2\cdots i_{2\mu})}=Q^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta-$$

$$=R^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})\alpha\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta$$

формы кривизны. Кроме того,

$$Q^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})\alpha\beta}=\delta^{[q_1}_{p_1}\cdots\delta^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}Q^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}\alpha\beta}+\delta^{[q_1}_{p_1}\cdots Q^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}+\ldots+$$

$$+Q^{[q_1}_{p_1\alpha\beta}\cdots\delta^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}},$$

$$R^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})\alpha\beta}=\delta^{[q_1}_{p_1}\cdots\delta^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}R^{q_{2\mu}}_{p_{2\mu}\alpha\beta}+\delta^{[q_1}_{p_1}\cdots R^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}\alpha\beta}\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}+\ldots+$$

$$+R^{[q_1}_{p_1\alpha\beta}\cdots\delta^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}$$

и

$$\Omega^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})}=\delta^{[q_1}_{p_1}\cdots\delta^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}\Omega^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}+\delta^{[q_1}_{p_1}\cdots\Omega^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}+\ldots+$$

$$+\Omega^{[q_1}_{p_1}\cdots\delta^{q_{2\mu-1}}_{p_{2\mu-1}}\delta^{q_{2\mu}]}_{p_{2\mu}}.$$

Внешнее дифференцирование формул (3.4), (3.5) и (3.8),(3.10) дает

$$d\Omega^j_i=\Omega^j_k\wedge\omega^k_i-\Omega^k_i\wedge\omega^j_k,$$
$$d\Omega^q_p=\Omega^q_r\wedge\omega^r_p-\Omega^r_p\wedge\omega^q_r$$

и

$$d\Omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})}=\Omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(k_1\cdots k_{2\mu})}\wedge\omega^{(k_1\cdots k_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})}-\Omega^{(k_1\cdots k_{2\mu})}_{(i_1\cdots i_{2\mu})}\wedge\omega^{(j_1\cdots j_{2\mu})}_{(k_1\cdots k_{2\mu})},$$

$$d\Omega^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})}=\Omega^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(r_1\cdots r_{2\mu})}\wedge\omega^{(r_1\cdots r_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})}-\Omega^{(r_1\cdots r_{2\mu})}_{(p_1\cdots p_{2\mu})}\wedge\omega^{(q_1\cdots q_{2\mu})}_{(r_1\cdots r_{2\mu})}.$$

§ 4. Углы. Стационарные углы

Пусть $\vec{u}_{(2\mu)} \in {}^{\varkappa(\mu)}E_{N(\mu)}$. Вектор $\vec{u}_{(2\mu)}$ называем изотропным, если $|\vec{u}_{(2\mu)}| = 0$, и неизотропным, если $|\vec{u}_{(2\mu)}| \neq 0$. Длина неизотропного вектора может быть вещественной и мнимой. Если $|\vec{u}_{(2\mu)}| \neq 0$ и $|\vec{v}_{(2\mu)}| \neq 0$, то с помощью скалярного умножения можно определить угол $\varphi_{(\mu)}$ между векторами $\vec{u}_{(2\mu)}$ и $\vec{v}_{(2\mu)}$ формулой

$$\cos\varphi_{(\mu)} = \frac{\langle \vec{u}_{(2\mu)}, \vec{v}_{(2\mu)} \rangle}{|\vec{u}_{(2\mu)}|\,|\vec{v}_{(2\mu)}|}.$$

Здесь возможны следующие типы углов (см., например, [2]).

1) Имеет место $(|\vec{u}_{(2\mu)}||\vec{v}_{(2\mu)}|)^2 > 0$ и $-1 \leqslant \frac{\langle \vec{u}_{(2\mu)}, \vec{v}_{(2\mu)} \rangle}{|\vec{u}_{(2\mu)}||\vec{v}_{(2\mu)}|} \leqslant 1$. Тогда угол $\varphi_{(\mu)}$ – вещественное число.

2) Имеет место $(|\vec{u}_{(2\mu)}||\vec{v}_{(2\mu)}|)^2 > 0$ и $\frac{\langle \vec{u}_{(2\mu)}, \vec{v}_{(2\mu)} \rangle}{|\vec{u}_{(2\mu)}||\vec{v}_{(2\mu)}|} > 1$. Тогда существует вещественное число $\psi_{(\mu)}$ такое, что $\cos\varphi_{(\mu)} = \operatorname{ch}\psi_{(\mu)} = \cos i\psi_{(\mu)}$, т.е. угол $\varphi_{(\mu)} = i\psi_{(\mu)}$ – чисто мнимое число.

3) Имеет место $(|\vec{u}_{(2\mu)}||\vec{v}_{(2\mu)}|)^2 > 0$ и $\frac{\langle \vec{u}_{(2\mu)}, \vec{v}_{(2\mu)} \rangle}{|\vec{u}_{(2\mu)}||\vec{v}_{(2\mu)}|} < -1$. Тогда существует вещественное $\psi_{(\mu)}$ такое, что $\cos\varphi_{(\mu)} = -\operatorname{ch}\psi_{(\mu)} = \cos(\pi - i\psi_{(\mu)})$, т.е. угол $\varphi_{(\mu)} = \pi - i\psi_{(\mu)}$, где $\psi_{(\mu)} \neq 0$.

4) Имеет место $(|\vec{u}_{(2\mu)}||\vec{v}_{(2\mu)}|)^2 < 0$. Тогда существует вещественное $\psi_{(\mu)} \neq 0$ такое, что $\cos\varphi_{(\mu)} = i\operatorname{sh}\psi_{(\mu)} = \cos(\frac{\pi}{2} - i\psi_{(\mu)})$.

Пусть ${}^{\varkappa}E_N$ – некоторое псевдоевклидово векторное пространство, а $W = L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\varkappa)$ и $W' = L(\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_\varkappa)$ – – его подпространства соответственно с независимыми образующими $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\varkappa$ и $\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_\varkappa$. Обозначим через $\vec{w} \in W$ и $\vec{w}' \in W'$ произвольные векторы вещественной длины. Поскольку угол φ между двумя векторами $\vec{w}$ и $\vec{w}'$ не изменяется при переходе к векторам $\lambda\vec{w}$ и $\lambda'\vec{w}'$ с $\lambda > 0$ и $\lambda' > 0$, то, не ограничивая общности, можно предполагать $|\vec{w}| = |\vec{w}'| = 1$.

<u>Определение</u>. Угол φ между векторами $\vec{w} \in W$ и $\vec{w}' \in W'$ с $|\vec{w}| = |\vec{w}'| = 1$ называем стационарным углом между подпространствами W и W', если $\cos\varphi = \langle \vec{w}, \vec{w}' \rangle$ имеет стационарное значение.

Условия

$$\langle \vec{w}_a, \vec{w} - \cos\varphi \cdot \vec{w}' \rangle = 0,$$
$$\langle \vec{w}'_b, \vec{w} - \cos\varphi \cdot \vec{w} \rangle = 0, \qquad (4.1)$$

где $a = 1,\ldots,\mathcal{K}$ и $b = 1,\ldots,\mathcal{L}$, являются условиями стационарности (см., например, [2, 4]).

Ниже мы применим формулы (4.2) в случае симплектических $2m$-плоскостей из $\pi: E \to B_a$. Векторное пространство $V(Sp_{2m})$, определяемое симплектической $2m$-плоскостью Sp_{2m}, имеет разные 2μ-мерные симплектические подпространства $V(Sp_{2\mu})$. Здесь μ одно из чисел $1,\ldots,m$, но при этом фиксированное. (Отметим, что в $V(Sp_{2m})$, кроме симплектических подпространств, существуют также подпространства с нерегулярной кососимметрической метрикой; см., например, [2, 5]).

Подпространства $V(Sp_{2m}) \subset V(Sp_{2n})$ и $V(Sp_{2\mu}) \subset V(Sp_{2m})$ индуцируют в ${}^{\mathcal{L}(\mu)}E_{\mathcal{N}(\mu)}$ подпространства $V_{(\mu)}(Sp_{2m})$ и $V_{(\mu)}(Sp_{2\mu})$. При этом $\dim V_{(\mu)}(Sp_{(2\mu)}) = 1$. Оказывается, что каждый $\vec{x}_{(2\mu)} \in V_{(\mu)}(Sp_{2\mu})$ имеет вещественную длину. Для доказательства этого факта задаем $V(Sp_{2\mu})$ с симплектическим базисом $\{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{2\mu}\}$; тогда матрица $\|\langle \vec{a}_a, \vec{a}_b\rangle\| = g_{ab}$, где $a, b = 1,\ldots,2\mu$, имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}.$$

Векторам $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_{2\mu}$ в $V_{(\mu)}(Sp_{2\mu})$ соответствует вектор $\vec{a}_{(2\mu)} = \vec{a}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{a}_{2\mu}$ длины

$$|\vec{a}_{(2\mu)}| = \sqrt{\langle \vec{a}_{(2\mu)}, \vec{a}_{(2\mu)}\rangle} = \sqrt{g_{(1\ldots2\mu)(1\ldots2\mu)}} = \sqrt{|g_{ab}|} = 1.$$

Каждый $\vec{x}_{(2\mu)} \in V_{(\mu)}(Sp_{2\mu})$ представим в виде $\vec{x}_{(2\mu)} = \lambda \vec{a}_{(2\mu)}$, откуда следует, что $|\vec{x}_{(2\mu)}|$ является вещественным.

<u>Определение</u>. Углом между симплектическими 2μ-мерными подпространствами $Q = L(\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_{2\mu})$ и $Q' = L(\vec{q}'_1,\ldots,\vec{q}'_{2\mu})$ называем угол $\varphi_{(\mu)}$ между одномерными векторными подпространствами $L(\vec{q}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{q}_{2\mu})$ и $L(\vec{q}'_1 \wedge \ldots \wedge \vec{q}'_{2\mu})$ в псевдоевклидовом пространстве ${}^{\mathcal{L}(\mu)}E_{\mathcal{N}(\mu)}$.

Пусть $\{M; \vec{e}_i\}$ и $\{M; \vec{e}'_i\}$ – две бесконечно близкие симплектические $2m$-плоскости расслоения $\pi: E \to B_a$. Кроме того, пусть $W = L(\vec{e}_i)$ и $W' = L(\vec{e}'_i)$ индуцированные с ними симплектические векторные пространства, а $Q = L(\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_{2\mu})$ и

$Q' = L(\vec{q}_1', \ldots, \vec{q}_{2\mu}')$ — соответственно их симплектические 2μ-мерные подпространства. Подпространствам $W, W' \in V(Sp_{2m})$ соответствуют в ${}^{\mathcal{L}(\mu)}E_{N(\mu)}$ подпространства $W_{(\mu)} = L(\vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}})$ и $W'_{(\mu)} = L(\vec{e}\,'_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}\,'_{i_{2\mu}})$, а подпространствам Q и Q' — одномерные подпространства $Q_{(\mu)} = L(\vec{q}_1 \wedge \ldots \wedge \vec{q}_{2\mu}) \subset W_{(\mu)}$ и $Q'_{(\mu)} = L(\vec{q}_1' \wedge \ldots \wedge \vec{q}_{2\mu}') \subset W'_{(\mu)}$. Теперь имеем возможность определить стационарные углы между подпространствами $W_{(\mu)}$ и $W'_{(\mu)}$, используя векторы $\vec{q}_{(2\mu)} \in Q_{(\mu)}$ и $\vec{q}\,'_{(2\mu)} \in Q'_{(\mu)}$.

Определение. Каждый стационарный угол $\varphi_{(\mu)}$ между $W_{(\mu)}$ и $W'_{(\mu)}$ называем μ-стационарным углом между симплектическими $2m$-плоскостями $\{M; \vec{e}_i\}$ и $\{M'; \vec{e}_i'\}$.

Формулы (4.1) получают в данной ситуации вид

$$\langle \vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}, \vec{v}_{(2\mu)} - \cos\varphi_{(\mu)} \cdot \vec{u}_{(2\mu)} \rangle = 0,$$
$$\langle \vec{e}\,'_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}\,'_{i_{2\mu}}, \vec{u}_{(2\mu)} - \cos\varphi_{(\mu)} \cdot \vec{v}_{(2\mu)} \rangle = 0 .$$

Подставляя в последние разложения

$$\vec{e}\,'_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}\,'_{i_{2\mu}} = \vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}} + d(\vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}) + \frac{1}{2} d^2(\vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}) + \ldots,$$
$$\vec{v}_{(2\mu)} = \vec{u}_{(2\mu)} + d\vec{u}_{(2\mu)} + \frac{1}{2} d^2 \vec{u}_{(2\mu)} + \ldots,$$
$$\cos\varphi_{(\mu)} = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2_{(\mu)} + \ldots,$$
$$\operatorname{ch}\varphi_{(\mu)} = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2_{(\mu)} + \ldots,$$

и приравнивая нулю члены одного порядка, получим для углов типа 1), 2) и 3) следующие результаты.

Для первого и второго типа имеет место:

$$\begin{aligned} &\langle \vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}, d\vec{u}_{(2\mu)} \rangle = 0, \\ &\langle \vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}, d^2\vec{u}_{(2\mu)} \pm \varphi^2_{(\mu)} \vec{u}_{(2\mu)} \rangle = 0, \\ &\langle d(\vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}), d\vec{u}_{(2\mu)} \rangle = \pm \varphi^2_{(\mu)} \langle \vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}, \vec{u}_{(2\mu)} \rangle. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Нижние знаки соответствуют второму типу.

Третий тип. Приравнивая члены нулевого порядка, получаем $\langle \vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_{2\mu}}, \vec{u}_{(2\mu)} \rangle = 0$. Свертывание последних с координатами $u^{i_1 \ldots i_{2\mu}}$ вектора $\vec{u}_{(2\mu)}$ дает $\langle \vec{u}_{(2\mu)}, \vec{u}_{(2\mu)} \rangle = 0$, но у нас $|\vec{u}_{(2\mu)}| = 1$. Следовательно, среди стационарных углов, реализующихся между двумя бесконечно близкими симплектическими $2m$-плоскостями, нет углов третьего типа.

Чтобы переписать условия (4.2) в координатном виде, находим выражения векторов $d(\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2\mu}})$ и $d\vec{u}_{(2\mu)}$:

$$d(\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2\mu}})=\omega_{(i_1\ldots i_{2\mu})}^{(j_1\ldots j_{2\mu})}\vec{e}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{j_{2\mu}}+\omega_{(i_1\ldots i_{2\mu})}^{(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})}\vec{e}_{j_1}\wedge\ldots$$
$$\ldots\wedge\vec{e}_{j_{2\mu-1}}\wedge\vec{e}_{p_{2\mu}}, \tag{4.3}$$
$$d\vec{u}_{(2\mu)}=d(u^{(i_1\ldots i_{2\mu})}\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2\mu}})=\nabla u^{(i_1\ldots i_{2\mu})}\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots$$
$$\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2\mu}}+u^{(j_1\ldots j_{2\mu})}\omega_{(j_1\ldots j_{2\mu})}^{(i_1\ldots i_{2\mu-1}p_{2\mu})}\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2\mu-1}}\wedge\vec{e}_{p_{2\mu}}$$

Здесь обозначено

$$\nabla u^{(i_1\ldots i_{2\mu})}=du^{(i_1\ldots i_{2\mu})}+u^{(j_1\ldots j_{2\mu})}\omega_{(j_1\ldots j_{2\mu})}^{(i_1\ldots i_{2\mu})}.$$

Теперь из (4.2$_1$) получаем

$$\nabla u^{(j_1\ldots j_{2\mu})}g_{(i_1\ldots i_{2\mu})(j_1\ldots j_{2\mu})}+u^{(k_1\ldots k_{2\mu})}\omega_{(k_1\ldots k_{2\mu})}^{(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})}g_{(i_1\ldots i_{2\mu})(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})}=0$$

Поскольку $g_{(i_1\ldots i_{2\mu})(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})}=0$, то $\nabla u^{(j_1\ldots j_{2\mu})}=$ $=0$. Итак,

$$d\vec{u}_{(2\mu)}=u^{(j_1\ldots j_{2\mu})}\omega_{(j_1\ldots j_{2\mu})}^{(i_1\ldots i_{2\mu-1}p_{2\mu})}\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2\mu-1}}\wedge\vec{e}_{p_{2\mu}}. \tag{4.4.}$$

Подставим теперь в (4.2$_2$) выражения из (4.3) и (4.4):

$$\langle\omega_{(i_1\ldots i_{2\mu})}^{(j_1\ldots j_{2\mu})}\vec{e}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{j_{2\mu}}+\omega_{(i_1\ldots i_{2\mu})}^{(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})}\vec{e}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{j_{2\mu-1}}\wedge\vec{e}_{p_{2\mu}},$$
$$u^{(k_1\ldots k_{2\mu})}\omega_{(k_1\ldots k_{2\mu})}^{(\ell_1\ldots \ell_{2\mu-1}p_{2\mu})}\vec{e}_{\ell_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{\ell_{2\mu-1}}\wedge\vec{e}_{q_{2\mu}}\rangle=$$
$$=\pm\varphi_{(\mu)}^{1}\langle\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2\mu}},\, u^{(j_1\ldots j_{2\mu})}\vec{e}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{j_{2\mu}}\rangle.$$

Последнему равносильно

$$\omega_{(i_1\ldots i_{2\mu})}^{(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})}u^{(k_1\ldots k_{2\mu})}\omega_{(k_1\ldots k_{2\mu})}^{(\ell_1\ldots \ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}g_{(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})(\ell_1\ldots\ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}=$$
$$=\pm\varphi_{(\mu)}^{2}u^{(j_1\ldots j_{2\mu})}g_{(i_1\ldots i_{2\mu})(j_1\ldots j_{2\mu})},$$

или

$$\{g^{(m_1\ldots m_{2\mu})(i_1\ldots i_{2\mu})}\omega_{(i_1\ldots i_{2\mu})}^{(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})}\omega_{(k_1\ldots k_{2\mu})}^{(\ell_1\ldots \ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}g_{(j_1\ldots j_{2\mu-1}p_{2\mu})(\ell_1\ldots\ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}\mp$$
$$\mp\varphi_{(\mu)}^{2}\delta_{k_1}^{[m_1}\ldots\delta_{k_{2\mu}}^{m_{2\mu}]}\}u^{(k_1\ldots k_{2\mu})}=0.$$

Отсюда, учитывая (3.7), следует

$$\{\omega_{(\ell_1\ldots \ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}^{(m_1\ldots m_{2\mu})}\omega_{(k_1\ldots k_{2\mu})}^{(\ell_1\ldots \ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}\pm\varphi_{(\mu)}^{2}\delta_{k_1}^{[m_1}\ldots\delta_{k_{2\mu}}^{m_{2\mu}]}\}u^{(k_1\ldots k_{2\mu})}=0.$$

Так как $\vec{u}_{(2\mu)} \neq \vec{0}$, то последняя система имеет ненулевое решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$|\omega^{(m_1\dots m_{2\mu})}_{(\ell_1\dots\ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}\omega^{(\ell_1\dots\ell_{2\mu-1}q_{2\mu})}_{(\kappa_1\dots\kappa_{2\mu})} - \psi_{(\mu)}\delta^{(m_1\dots m_{2\mu})}_{(\kappa_1\dots\kappa_{2\mu})}| = 0. \quad (4.5)$$

Здесь $\psi_{(\mu)} = \mp\psi^2_{(\mu)}$ и применено обозначение, аналогичное (1.1). По § 1 уравнение (4.5) можно записать

$$|(\omega^m_q\omega^q_\kappa - \psi_{(\mu)}\delta^m_\kappa)^{(\mu)}| = 0,$$

откуда

$$|\omega^m_q\omega^q_\kappa - \psi_{(\mu)}\delta^m_\kappa| = 0. \quad (4.6)$$

Последнее уравнение вообще не зависит от выбора μ. Значит, стационарных углов будет только одна серия, а не m серий. Уравнение (4.6) можно записать в виде (см. [2])

$$\psi^{2m}_{(\mu)} - \Phi_1\psi^{2m-1}_{(\mu)} + \Phi_2\psi^{2m-2}_{(\mu)} - \dots + \Phi_{2m} = 0,$$

где

$$\Phi_i = S_{\alpha_1\dots\alpha_{2i}}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{2i}}$$

и

$$S_{\alpha_1\dots\alpha_{2i}} = Q^{[\kappa_1}_{\kappa_1(\alpha_1\alpha_2}\dots Q^{\kappa_{2i}]}_{|\kappa_{2i}|\alpha_{4i-1}\alpha_{4i})}.$$

Здесь по индексам $\alpha_1,\dots,\alpha_{4i}$ проведено симметризирование.

Примечание. Формулы (4.2) применимы и для нахождения стационарных углов двух бесконечно близких симплектических $2(n-m)$-направлений, перпендикулярных соответственно к симплектическим $2m$-плоскостям $\{M;\vec{e}_i\}$ и $\{M';\vec{e}'_i\}$.

§ 5. Сферическое отображение расслоений

$\pi : E \to B_a$ и $p : V^1 \to B_a$

Из псевдоевклидовых векторных пространств ${}^{\mathscr{L}(\mu)}E_{\mathscr{N}(\mu)}$ рассмотрим пространство с $\mu = n - m$. Пусть ${}^{\mathscr{L}(\mu)}\mathcal{E}_{\mathscr{N}(\mu)}$ - некоторое точечное псевдоевклидово пространство, направляющим пространством которого является ${}^{\mathscr{L}(\mu)}E_{\mathscr{N}(\mu)}$. При таком $\mu = n - m$ открывается возможность каждой симплектической $2m$-плоскости $\{M; \vec{e}_i\}$ из Sp_{2n} сопоставить единичный вектор $\vec{e}_{2m+1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2n} \in {}^{\mathscr{L}(\mu)}E_{\mathscr{N}(\mu)}$, индуцированный ортогональным дополнением к $\{M; \vec{e}_i\}$. Вектор $\vec{e}_{2m+1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2n}$ действительно единичный, так как

$$|\vec{e}_{2m+1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2n}| = \sqrt{\langle \vec{e}_{2m+1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2n}, \vec{e}_{2m+1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2n} \rangle} = \sqrt{|G_2|} = \sqrt{\begin{vmatrix} O & E \\ -E & O \end{vmatrix}} = 1.$$

Возникает отображение

$$\psi_1 : G\kappa \to S,$$

где $G\kappa$ - грассманново многообразие всех симплектических $2m$-плоскостей в Sp_{2n}, а S - единичная сфера в ${}^{\mathscr{L}(\mu)}\mathcal{E}_{\mathscr{N}(\mu)}$ с центром в некоторой точке $\mathcal{O}$. Это отображение ψ_1 сопоставляет плоскости $\{M; \vec{e}_i\}$ такую точку $\mathcal{M}_1 \in S$, что

$$\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{M}_1} = \mathcal{M}_1 = \vec{e}_{2m+1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2n}.$$

Это отображение называем сферическим отображением первого рода. Теперь находим структурные уравнения образа $\psi_1(G\kappa)$. Касательное пространство сферы S в точке $\mathcal{M}_1$ определяется репером $\{\mathcal{M}_1; \vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_\varrho} \wedge \vec{e}_{p_{\varrho+1}} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{p_{2\mu}}\}$, где $\varrho = 1, \ldots, 2\mu$. Сфера S характеризуется формулами инфинитезимального перемещения

$$d\vec{\mathcal{M}}_1 = \omega^{(i_1 p_2 \ldots p_{2\mu})}_{(2m+1 \ldots 2n)} \vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{p_2} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{p_{2\mu}} + \omega^{(2m+1 \ldots 2n)}_{(2m+1 \ldots 2n)} \vec{e}_{2m+1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{2n},$$

$$d(\vec{e}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{i_\varrho} \wedge \vec{e}_{p_{\varrho+1}} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{p_{2\mu}}) =$$

$$= \sum_{\tau=\varrho}^{\varrho+2} \omega^{(j_1 \ldots j_{\tau-1} q_\tau \ldots q_{2\mu})}_{(i_1 \ldots i_\varrho p_{\varrho+1} \ldots p_{2\mu})} \vec{e}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{j_{\tau-1}} \wedge \vec{e}_{q_\tau} \wedge \ldots \wedge \vec{e}_{q_{2\mu}}. \qquad (5.1)$$

Учитывая, что

$$G_1 = \| g_{ij} \| = \begin{Vmatrix} O & E \\ -E & O \end{Vmatrix}, \quad G_2 = \| g_{pq} \| = \begin{Vmatrix} O & E \\ -E & O \end{Vmatrix},$$

а также формулы (2.1), получим

$$\omega^{(2m+1\ldots 2n)}_{(2m+1\ldots 2n)} = \frac{1}{(2n-2m)!}(\omega^{2m+1}_{2m+1}+\ldots+\omega^{2n}_{2n}) = 0 .$$

Переобозначим еще

$$\omega^{(i_1 p_2\cdots p_{2\kappa})} = \omega^{(i_1 p_2\cdots p_{2\kappa})}_{(2m+1\ldots 2n)} .$$

Формула (5.1_1) получает вид

$$d\vec{\mathcal{M}}_1 = \omega^{(i_1 p_2\cdots p_{2\kappa})}\vec{e}_{i_1}\wedge\vec{e}_{p_2}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{p_{2\kappa}} .$$

Из (2,7) находим теперь структурные уравнения сферы:

$$d\omega^{(i_1 p_2\cdots p_{2\kappa})} = \omega^{(j_1 q_2\cdots q_{2\kappa})}\wedge\omega^{(i_1 p_2\cdots p_{2\kappa})}_{(j_1 q_2\cdots q_{2\kappa})}$$

и

$$d\omega^{(j_1\cdots j_{\varsigma-1}q_\varsigma\cdots q_{2\kappa})}_{(i_1\cdots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\cdots p_{2\kappa})} = \sum_{j=\varsigma-1}^{\varsigma}\omega^{(\kappa_1\cdots\kappa_j r_{j+1}\cdots r_{2\kappa})}_{(i_1\cdots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\cdots p_{2\kappa})}\wedge\omega^{(j_1\cdots j_{\varsigma-1}q_\varsigma\cdots q_{2\kappa})}_{(\kappa_1\cdots\kappa_j r_{j+1}\cdots r_{2\kappa})} ,$$

$$d\omega^{(j_1\cdots j_\varsigma q_{\varsigma+1}\cdots q_{2\kappa})}_{(i_1\cdots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\cdots p_{2\kappa})} = \sum_{j=\varsigma-1}^{\varsigma+1}\omega^{(\kappa_1\cdots\kappa_j r_{j+1}\cdots r_{2\kappa})}_{(i_1\cdots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\cdots p_{2\kappa})}\wedge\omega^{(j_1\cdots j_\varsigma q_{\varsigma+1}\cdots q_{2\kappa})}_{(\kappa_1\cdots\kappa_j r_{j+1}\cdots r_{2\kappa})} , \qquad (5.2)$$

$$d\omega^{(j_1\cdots j_{\varsigma+1}q_{\varsigma+2}\cdots q_{2\kappa})}_{(i_1\cdots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\cdots p_{2\kappa})} = \sum_{j=\varsigma}^{\varsigma+1}\omega^{(\kappa_1\cdots\kappa_j r_{j+1}\cdots r_{2\kappa})}_{(i_1\cdots i_\varsigma p_{\varsigma+1}\cdots p_{2\kappa})}\wedge\omega^{(j_1\cdots j_{\varsigma+1}q_{\varsigma+2}\cdots q_{2\kappa})}_{(\kappa_1\cdots\kappa_j r_{j+1}\cdots r_{2\kappa})} .$$

Теперь рассматриваем псевдоевклидово пространство ${}^{\mathcal{L}(\kappa)}E_{\mathcal{N}(\kappa)}$ с $\kappa = m$ и некоторое точечное псевдоевклидово пространство ${}^{\mathcal{L}(\kappa)}\mathsf{E}_{\mathcal{N}(\kappa)}$, направляющим пространством которого является ${}^{\mathcal{L}(\kappa)}E_{\mathcal{N}(\kappa)}$. Каждой симплектической $2m$-плоскости $\{M;\vec{e}_i\}$ из Sp_{2n} сопоставим теперь единичный вектор $\vec{e}_1\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{2m}$ индуцированный с этой плоскостью. Снова возникает отображение $\psi_2 : G\kappa \to S$. Это отображение ψ_2 сопоставляет плоскости $\{M;\vec{e}_i\}$ точку $\mathcal{M}\in S$ с

$$\vec{0\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{e}_1\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{2m} .$$

Это отображение называем сферическим отображением второго рода. Сфера S характеризуется подвижным репером $\{\mathcal{M}; \vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_\varsigma}\wedge\wedge\vec{e}_{p_{\varsigma+1}}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{p_{2\kappa}}\}$, где $\varsigma = 0,\ldots,2m-1$, а инфинитезимальные перемещения последнего задаются формулами

$$d\vec{\mathcal{M}} = \omega^{i_1\cdots i_{2m-1}p_{2m}}\vec{e}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\vec{e}_{i_{2m-1}}\wedge\vec{e}_{p_{2m}}$$

и (5.1_2), где $\varrho = 0,\ldots,2m-1$. Здесь обозначено

$$\omega_{1\ldots 2m}^{i_1\ldots i_{2m-1}p_{2m}} = \omega^{i_1\ldots i_{2m-1}p_{2m}}$$

и учтено, что

$$\omega_{(1\ldots 2m)}^{(1\ldots 2m)} = 0 .$$

Структурные уравнения образа $\psi_2(G_K)$ следуют из (2.7). Они состоят из

$$d\omega^{(i_1\ldots i_{2m-1}p_{2m})} = \omega^{(j_1\ldots j_{2m-1}q_{2m})} \wedge \omega_{(j_1\ldots j_{2m-1}q_{2m})}^{(i_1\ldots i_{2m-1}p_{2m})}$$

и (5.2), где ϱ пробегает значения, указанные выше.

Если рассматривать $B_a \subset G_K$, то образ $\psi_{\mathfrak{A}}(B_a)$ $(\mathfrak{A}=1,2)$ индуцирует в $\psi_{\mathfrak{A}}(G_K)$ подмногообразие, причем

$$\dim \psi_{\mathfrak{A}}(B_a) = \operatorname{rang} \| \Lambda_{i_1}^{p},\ldots,\Lambda_{i_a}^{p} \| \leq a .$$

Возникают также структурные уравнения многообразия $\psi_{\mathfrak{A}}(B_a)$, но найти их в общем случае не так просто. Для конкретных классов многообразия B_a удается их найти (см. [3]). Тогда также можно построить дополнительные геометрические образы, как индикатриса нормальной кривизны и фокальная поверхность касательных плоскостей многообразия $\psi_{\mathfrak{A}}(B_a)$.

Литература

1. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. Москва, 1968.
2. Парринг А., Семейства симплектических плоскостей в аффинно-симплектическом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 21-45.
3. Парринг А., Сферическое отображение конгруэнций симплектических плоскостей пространства Sp_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 111-118.
4. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. Москва. 1955.
5. Яглом И. М., О линейных подпространствах симплектического пространства. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, механ. и физ. Моск. ун-т, 1952, 9, 309-318.

Поступило
13 I 1977

SÜMPLEKTILISE $2m$-TASANDITE MUUTKOND JA SFÄÄRILINE KUJUTUS

A.Parring

R e s ü m e e

Artikkel jätkab artiklite [2,3] temaatikat. Osutub, et afiinne-sümplektiline ruum Sp_{2n} tekitab terve rea pseudoeukleidilisi vektorruume ${}^{\varkappa(\mu)}E_{N(\mu)}$ $(\mu = 1,\dots,n)$. Sümplektiliste $2m$-tasandite Sp_{2m} iga muutkond B_a tekitab kaks kanoonilist kihtkonda $\pi: E \to B_a$ ja $p: V \to B_a$ baasiga B_a (vt. [2]); viimaste kihtideks on vastavalt sümplektilised $2m$-tasandid kui punktimuutkonnad ja $V(Sp_{2m})$ ortogonaalsed täiendid $V^{\perp}(Sp_{2m})$ kogu vektorruumini $V(Sp_{2n})$. Märgitud kihtkonnad indutseerivad seeria kanoonilisi vektorkihtkondi $\pi_\mu: V_\mu \to B_a$ ja $p_\mu: V_\mu^{\perp} \to B_a$. Nende kihtideks on $V_\mu(Sp_{2m})$ ja $V_\mu^{\perp}(Sp_{2m})$, mis on vastavalt kihtide $V(Sp_{2m})$ ja $V^{\perp}(Sp_{2m})$ kujutused. Üldistatakse nurga ja statsionaarsete nurkade mõiste (vt. [2]). Lõpuks antakse sümplektiliste $2m$-tasandite Grassmanni muutkonna $G\varkappa$ esimest ja teist liiki sfääriline kujutus. Muutkonna $B_a \subset G\varkappa$ kujutised $\Psi_1(B_a)$ ja $\Psi_2(B_a)$ on teatava sfääri alammuutkonnad.

DIE MANNIGFALTIGKEIT DER SYMPLEKTISCHEN $2m$-EBENEN UND DIE SPHÄRISCHE ABBILDUNG

A.Parring

Z u s a m m e n f a s s u n g

Dieser Artikel ist eine Fortsetzung der Thematik der Artikel [2,3]. Es wird gezeigt, daß der affine symplektische Raum Sp_{2n} eine Reihe pseudoeukliedischer Vektorräume ${}^{\varkappa(\mu)}E_{N(\mu)}$ $(\mu = 1,\dots,n)$ induziert. Jede a-dimensionale Mannigfaltigkeit B_a der symplektischen $2m$-Ebenen induziert zwei kanonische Faserräume $\pi: E \to B_a$ und $p: V \to B_a$ mit der Basis B_a (s. [2]); die Fasern sind entsprechend die symplektischen $2m$-Ebenen Sp_{2m} als Punktenräume und ihre orthogonalen Ergänzungen $V^{\perp}(Sp_{2m})$. Diese Faserräume induzieren ihrerseits eine Reihe kanonischer Faserräume

$\pi_\mu : V_\mu \longrightarrow B_a$ und $p_\mu : V_\mu^\perp \longrightarrow B_a$. Ihre Fasern sind entsprechend die Abbilder $V_\mu(Sp_{2m})$ und $V_\mu^\perp(Sp_{2m})$ der Faser $V(Sp_{2m})$ und $V^\perp(Sp_{2m})$ im Raum $^{\varkappa(\mu)}E_{N(\mu)}$. Es werden die Begriffe des Winkels und der stationaren Winkel verallgemeinert (s. [2]). Zum Schluß definiert man die sphärischen Abbildungen $\Psi_{\mathfrak{A}}$ $(\mathfrak{A} = 1, 2)$ der Graßmannschen Mannigfaltigkeit $G\kappa$ der symplektischen $2m$-Ebenen. Die Abbilder $\Psi_{\mathfrak{A}}(B_a)$ der Mannigfaltigkeit $B_a \subset G\kappa$ sind die Untermannigfaltigkeiten der Einheitssphäre.

TRÜ Toimetised, 464 (1978), 137-145.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 137-145.

О ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ПРОСТРАНСТВА ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ НОРМАЛЬНЫХ Р-НАПРАВЛЕНИЙ

А.Чакмазян

Кафедра алгебры и геометрии

1. В [1] изучалось локальное строение подмногообразия V_m пространства постоянной привизны V_n^c, допускающего параллельное p—мерное подрасслоение нормального расслоения. В этой работе были определены фокальные образцы p-мерного параллельного подрасслоения N^p подмногообразия V_m и его дополнительного подрасслоения N^{n-m-p} и изучалось строение таких V_m, для которых фокусная поверхность F подрасслоения N^p имеет s различных компонент краткостей $p_1, \dots, p_s$ $(p_1+p_2+\dots+p_s=m)$, а фокусная поверхность Φ подрасслоения N^{n-m-p} не имеет кратных компонент. Настоящая работа является продолжением работы [3].

2. Известно, что как евклидово пространство E_n, так и неевклидовы пространства - эллиптическое пространство S_n и гиперболическое пространство ${}^1S_n$ - можно рассматривать как проективные пространства, метризованные при помощи некоторой квадрики, называемой абсолютом пространства [1]. Любую точку, лежащую на поляре точки x по отношению к абсолюту пространства S_n, назовем вектором в точке x. В V_n^c рассмотрим репер, состоящий из точки x и из n единичных попарно ортогональных векторов $e_J (J,L,K=1,2,\dots,n)$. Инфинитезимальное перемещение такого репера определяется формулами

$$dx=\omega^J e_J, \qquad de_J=-c\omega^J x+\omega_J^K e_K, \tag{1}$$

в которых пфаффовы формы ω^J и ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$d\omega^J=\omega^K\wedge\omega_K^J, \quad d\omega_K^J=\omega_K^L\wedge\omega_L^J+c\,\omega^J\wedge\omega^K, \tag{2}$$

18

и уравнениям инвариантности абсолюта

$$\omega_j^k + \omega_k^j = 0, \tag{3}$$

где постоянная c равна кривизне пространства.

Рассмотрим m-мерное подмногообразие V_m, погруженное в n-мерное пространства V_n^c постоянной кривизны c. Тогда возникает его касательное и нормальное векторные расслоения $T(V_m)$ и $N(V_m)$. К этим расслоениям присоединим ортонормированный подвижной репер так, что $e_i \in T_x(V_m)$ $(i, j, k = 1, \ldots, m)$ $e_\alpha \in N_x(V_m)$ $(\alpha, \beta, \gamma = m+1, \ldots, n)$. Из [3] следует, что в таком случае $\omega^\alpha = 0$. Продолжая последнее уравнение, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha. \tag{4}$$

Величины b_{ij}^α образуют второй фундаментальный или асимптотический тензор подмногообразия V_m. Формы ω_j^i определяют аффинную связность без кручения в касательном расслоении $T(V_m)$ подмногообразия V_m. Формы ω_β^α определяют связность в нормальном расслоении $N(V_m)$, которую называют нормальной связностью [4]. Формы кривизны Ω_β^α этой связности имеют, в силу уравнений (2) и (3), вид

$$\Omega_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = -\sum_i b_{ik}^\beta b_{il}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l,$$

а ее тензор кривизны выражается формулой

$$R_{\beta kl}^\alpha = -\sum_i b_{i[k}^\beta b_{l]i}^\alpha. \tag{5}$$

Говорят, что нормальная связность является плоской, если результат параллельного переноса любого нормального вектора ξ не зависит от пути на подмногообразии V_m. Нормальная связность будет плоской тогда и только тогда, когда ее форма кривизны Ω_β^α тождественно обращается в нуль, что равносильно условию $R_{\beta kl}^\alpha = 0$.

3. Пусть подмногообразие V_m допускает p-мерное параллельное подрасслоение $N^p(V_m)$. Тогда его ортогональное $(n-m-p)$-мерное подрасслоение $N^{n-m-p}(V_m)$ тоже будет параллельным [2]. Выберем репер в $N(V_m)$ так, что его векторы e_π $(\pi, \rho, \sigma = m+1, \ldots, m+p)$ принадлежали подрасслоению $N^p(V_m)$, а векторы

e_a $(a, b, c = m+p+1, \dots, n)$ – дополнительному подрасслоению $N^{n-m-p}(V_m)$. Аналитическое условие параллельности подрасслоения $N^p(V_m)$ имеет вид

$$\sum_l b^{\pi}_{i[k} b^{a}_{l]l} = 0 . \qquad (6)$$

Уравнения фокусных поверхностей параллельных подрасслоений N^p и N^{n-m-p} имеют соответственно следующий вид:

$$F: \qquad (\sum_q x^q b^q_{ij} - \delta_{ij}) = 0, \qquad (7)$$

$$\Phi: \qquad (\sum_a x^a b^a_{ij} - \delta_{ij}) = 0, \qquad (8)$$

Пусть фокусная поверхность F имеет s различных компонент $F_a(u, v, w = 1, 2, \dots, s)$ кратностей $p_1, \dots, p_s (p_1+p_2+\dots+p_s = m)$ соответственно, а фокусная поверхность Φ не имеет кратных компонент. Тогда матрица $B^{\pi} = \| b^{\pi}_{ij} \|$ приводится к диагональному виду, а матрица $B^{a} = \| b^{a}_{ij} \|$ —блочно-диагональному виду (см. [3]). При этом в каждом касательном слое T_x подмногообразия V_m лежит s собственных подпространств матриц B^{π}, которые взаимно ортогональны и имеют размерности P_u $(p_1+p_2+ +\dots+p_s = m)$. На подмногообразии V_m они образуют s распределений $L_u: x \longmapsto (L_u)_x$ размерности P_u . Будем считать, что векторы репера e_{i_a} , где $i_u, j_u = p_1+\dots+p_{u-1}+1, \dots p_1+p_2+\dots+p_u$, принадлежат p_u-мерному подпространству L_u . Тогда мы получим

$$b^{\pi}_{i_u j_u} = b^{\pi}_u \delta_{i_u j_u} , \quad b^{\pi}_{i_u j_v} = 0, \quad u \neq v. \qquad (9)$$

В силу (9) из соотношения (6) получим

$$b^{a}_{k_u i_v} = 0 ; \quad u \neq v. \qquad (10)$$

Тогда уравнения (7) фокусной поверхности F примет вид

$$\prod_{u=1}^{s} (\sum_{\pi} b^{\pi}_u x^{\pi} - 1)^{p_u} = 0 .$$

Следовательно, фокусная поверхность F распадается на s плоскостей размерности $(p-1)$ каждая u с кратностью P_u $(p_1+\dots+p_s = m)$.

Таким образом, каждая P_u-кратная компонента F_u поверхности F является $(p-1)$—мерной плоскостью в N^p_x , уравнение которой имеет вид $\sum_{\pi} b^{\pi}_u x^{\pi} - 1 = 0$. В силу (9) и (10) из (4) получим

$$\omega^{\pi}_{i_u} = b^{\pi}_u \omega^{i_u}, \quad \omega^{a}_{i_u} = b^{a}_{i_u j_u} \omega^{j_u} \qquad (11)$$

Если продолжать уравнения первой группы и применять лемму Картана, то получим (см. [1])

$$d b^{\pi}_u + b^{\varrho}_u \omega^{\pi}_{\varrho} = \sum_{v \neq u} A^{u}_{j_v} \omega^{j_v}, \quad p_u > 1. \qquad (12)$$

В [3] доказано, что распределение L_u является инволютивным, а это означает, что V_m несет ортогональную сопряженную систему из s семейств поверхностей. В этом случае каждое распределение L_u огибает $(m-p_u)$— параметрическое семейство p_u—мерных поверхностей V_{p_u}, принадлежащих V_m. Уравнения V_{p_u} в построенном выше репере имеет вид

$$\omega^{i_v} = 0 \quad (v = 1, \dots, u-1, u+1, \dots s).$$

Теперь докажем следующую теорему:

<u>Теорема 1</u>. Интегральная поверхность V_{p_u} рапределения L_u при $p_u > 1$ лежит на эквидистантной гиперповерхности плоскостной компоненты F_u фокусной поверхности F подрасслоения N^p.

<u>Доказательство</u>. Сперва покажем, что плоскостная компонента F_u: $\sum_{\pi} b^{\pi}_u x^{\pi} - 1 = 0$ фокусной поверхности F остается неподвижной при движении вдоль интегральной поверхности V_{p_u} распределения L_u. Рассмотрим точки

$$f_{\pi} = b^{\pi}_u x + e_{\pi},$$

Определяющие плоскость F_u, где π – фиксировано. В силу (12) отсюда при дифференцировании получим

$$d f_{\pi} = -\sum_{\varrho} \omega^{\pi}_{\varrho} f_{\varrho} + x \sum_{v \neq u} A^{u}_{j_v} \omega^{j_v} + b^{\pi}_u \sum_{v \neq u} \omega^{i_v} e_{i_v} -$$

$$-\sum_{i_v} b^{\pi}_{i_v k_w} \omega^{k_w} e_{i_v}, \quad u \neq v, \; w \neq u, v.$$

Следовательно,

$$d f_{\pi} = -\sum_{\varrho} \omega^{\pi}_{\varrho} f_{\varrho} (\bmod \omega^{j_v}, \; v \neq u),$$

что и доказывает неподвижность плоскости F_u при $\omega^{j_v} = 0 (v \neq u)$.

Теперь покажем, что расстояние точки x этой интегральной поверхности V_{p_u} от плоскости F_u постоянно вдоль V_{p_u}. Определим расстояние точки x от плоскости $\sum_{\pi} b_u^{\pi} x^{\pi} - 1 = 0$. Это расстояние определяется величиной

$$\mathcal{R} = \Big(\sum_{\pi}(b_u^{\pi})^2\Big)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{т.е.} \quad \mathcal{R}^{-2} = \sum_{\pi}(b_u^{\pi})^2 .$$

В силу (12)

$$d(\mathcal{R}^{-2}) = -2\sum_{\pi}\sum_{\varrho} b_u^{\pi} b_u^{\varrho} \omega_{\varrho}^{\pi} + 2\sum_{\pi} b_u^{\pi} \sum_{v\neq u} A_{j_v}^{u} \omega^{j_v} .$$

Так как ω_{ϱ}^{π} кососимметричны, то здесь первая группа слагаемых равна нулю и поэтому

$$d(\mathcal{R}^{-2}) = 0 \quad (\mathrm{mod}\, \omega^{j_v},\ v \neq u).$$

Это и означает, что V_{p_u} принадлежит эквидистатной гиперповерхности плоскости F_u.

Следствие 1. В случае, когда фокусная поверхность F подрасслоения N^{p} состоит из одной m-кратной $(p-1)$—мерной плоскости, все p-мерные слои N^{p} проходят через неподвижную $(p-1)$—мерную плоскость, т.е. подмногообразие, образованное плоскостями N^{p} вдоль подмногообразия V_m, является конусом с $(p-1)$—мерной вершиной.

В силу (6), (9) и (10) из (5) получим следующие компоненты тензора кривизны связности в нормальном расслоении

$$R^{\pi}_{akl} = 0, \quad R^{\pi}_{\varrho kl} = 0, \quad R^{a}_{\pi kl} = 0, \quad R^{b}_{ak_u l_u} = \sum_{i_u} b^{a}_{i_u[k_u} b^{b}_{l_u]i_u} .$$

Из этих соотношений вытекает, что нормальная связность подмногообразия V_m не является плоской. Вдоль интегральной поверхности V_{p_u} нормали $N(V_m)$ образуют нормальные расслоения. Предположим, что нормальная связность этого расслоения вдоль V_{p_u} плоская; это будет тогда и только тогда, когда $R^{b}_{ak_u l_u} = 0$ при фиксированном u, т.е.

$$\sum_{i_u} b^{a}_{i_u[k_u} b^{b}_{l_u]i_u} = 0 . \qquad (13)$$

Объединение последнего выражения с (6) дает

$$\sum_{i_u} b^{\alpha}_{i_u[k_u} b^{\alpha}_{\ell_u]i_u} = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим пучок симметрических тензоров

$$b_{i_u k_u} = \lambda_\alpha b^{\alpha}_{i_u k_u}$$

и назовем его пучком основных тензоров подмногообразия V_{p_u}. Этот пучок назовем простым, если в нем есть хотя бы один тензор $b_{i_u k_u}(\lambda_o)$, имеющий различные собственные значения.

Из (14) следует, что

$$\sum_{i_u} b_{i_u[k_u} b^{\alpha}_{\ell_u]i_u} = 0. \tag{15}$$

Пусть пучок основных тензоров для V_{p_u} является простым. Тогда в нем $b_{i_u k_u}(\lambda_o)$ может быть приведен в некотором ортонормированном репере к диагональному виду, т.е.

$$b_{i_u k_u}(\lambda_o) = b_{i_u} \delta_{i_u k_u}, \tag{16}$$

где $b_{k_u} \neq b_{\ell_u}$ при $k_u \neq \ell_u$. Тогда в силу (16) из (15) получим $(b_{k_u} - b_{\ell_u}) b^{\alpha}_{k_u \ell_u} = 0$, и поэтому $b^{\alpha}_{i_u k_u} = 0$ при $\ell_u \neq k_u$, т.е.

$$b^{\alpha}_{i_u j_u} = b^{\alpha}_{i_u} \delta_{i_u j_u} \tag{17}$$

при фиксированном u. Это означает, что все асимптотические тензоры $b^{\alpha}_{i_u j_u}$ интегральной поверхности V_{p_u} приводятся к диагональному виду, т.е. V_{p_u} несет сеть линий кривизны. Верно и обратное утверждение: если интегральная поверхность несет сеть линий кривизны, то ее нормальная связность будет плоской. Действительно, выбирая векторы e_{i_u} репера касательными к сети линий кривизны, получим

$$b^{\alpha}_{i_u j_u} = 0, \quad g_{i_u j_u} = 0 \text{ при } i_u \neq j_u .$$

Подставляя эти значения в (5), получим $R^{\alpha}_{\beta i_u k_u} = 0$, что и требовалось доказать. Получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для того, чтобы нормальная связность расслоения $N(V_m)$ вдоль интегральной поверхности V_{p_u} с простым пучком основных тензоров была плоской, необходимо и достаточно, чтобы эта интегральная поверхность V_{p_u} несла сеть линий кривизны подмногообразия V_m.

4. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть в пучке основных тензоров выделен некоторый тензор $b_{i_u j_u}(\lambda)$ который имеет s различных собственных значений $\lambda'_1, \dots, \lambda'_s$ кратностей $p'_1, \dots, p'_s$ ($p'_1 + p'_2 + \dots + p'_s = p_u$). Тогда с помощью преобразования репера его матрицу можно привести к виду

$$\begin{Vmatrix} \lambda'_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & \lambda'_1 & & & & & & \\ & & & \lambda'_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda'_2 & & & \\ & 0 & & & & & \lambda'_s & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda'_s \end{Vmatrix}$$

При этом в каждом касательном слое $T_x V_{p_u}$ интегральной поверхности V_{p_u} лежит s собственных подпространств тензора $b_{i_u j_u}(\lambda)$, которые имеет размерности p'_u ($u = 1, 2, \dots, s$). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если на интегральной поверхности V_{p_u} некоторый тензор $b_{i_u j_u}(\lambda)$ в пучке основных тензоров имеет s различных собственный значений $\lambda'_1, \dots, \lambda'_s$ кратностей соответственно $p'_1, \dots, p'_s$ ($p'_1 + p'_2 + \dots + p'_s = p_u$), то V_{p_u} несет слабо голономно ортогональную сопряженную систему из s семейств поверхностей (если $p_u > 1$) или линий (если $p_u = 1$).

Доказательство этой теоремы проводится подобно тому, как это сделано в [3] (см. [3], теорема 3).

Литература

1. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства. Москва, 1955.
2. Ч а к м а з я н А. В., Подмногообразия с параллельным P-мерным подрасслоением нормального расслоения. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1976, № 8, 107-110.
3. Ч а к м а з я н А. В., Об одном классе подмногообразий в $V_{\bar{c}}^{n}$ с параллельным P-мерным подрасслоением нормального расслоения. Мат. заметки, 1977, 22, № 4, 477-483.
4. C h e n B a n g Y e n., Geometry of submanifolds. New York, Marcel Dekker, 1973.

Поступило
15 X 1977

ALAMMUUTKONDADEST PARALLEELSE NORMAALSE P-SIHTIDE VÄLJAGA KONSTANTSE KÔVERUSEGA RUUMIDES

A. Tŝakmazjan

R e s ü m e e

Artiklis [3] on uuritud sellise alammuutkonna V_m lokaalset ehitust konstantse kõverusega ruumis V_n^c millel on olemas paralleelne P-môôtmeliste normaalsihtide väli. Seal on sisse toodud nii selle välja N^P kui ka ortogonaalsete $(n-m-p)$-môôtmeliste sihtide välja N^{n-m-p} fokaalpinnad F ja Φ ning uuritud juhtu, mil F on s erineva komponendiga ja neil on kordsused $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $(p_1+p_2+\ldots+p_s=m)$, kuid Φ ei oma kordseid komponente. Käesolevas töös tôestatakse järgmine teoreem. Olgu L_u $(u=1,\ldots,s)$ teise fundamentaaltensori alammaatriksite omaalamruumid. Jaotuse L_u integraalpind V_{p_u} on juhul $p_u>1$ fokaalpinna F tasapinnalise komponendi F_u ekvidistanthüperpinnal. Tôestatakse samuti, et alammuutkonna V_m normaalseostus piki integraalpinda V_{p_u} on nullkôverusega parajasti siis, kui V_{p_u} kannab V_m kôverusjoonte vôrku.

ON SUBMANIFOLDS WITH PARALLEL FIELD OF NORMAL P-DIRECTIONS IN CONSTANT CURVATURE SPACES

A.Tchakmazjan

S u m m a r y

In [3] the local structure of submanifolds V_m with parallel field of normal P-dimensional subspaces in space V_n^c of constant curvature c is investigated. The focal algebraic surfaces F and Φ of this field N^p and of the complementary field N^{n-m-p} are introduced and the case, when F has s distinct components with multiplicities $p_1, p_2, \dots, p_s$ $(p_1 + p_2 + \dots + p_s = m)$ and Φ has no multiple components, is investigated. In this paper the following theorem is proved. Let L_u $(u = 1, 2, \dots, s)$ be eigensubspaces of submatrices of second fundamental tensor of V_m. Integral surface V_{p_u} of distributation L_u lies in case $p_u > 1$ on the equidistantal hypersurface of plane component F_u of focal surface F. It is also shown that normal connection of V_m along V_{p_u} is flat iff the net of curvature lines of V_m lies on V_{p_u}.

TRÜ Toimetised, 464 (1978), 146-155.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 146-155.

О ГЕОМЕТРИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Х.Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

§1. Введение

Рассматривается аналитическое расслоенное многообразие M_{m+2}, на котором определена квазилинейная система дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками. Общая геометрическая теория таких систем с помощью метода внешних форм Э. Картана и инвариантного теоретико-группового метода Г.Ф.Лаптева-А.М.Васильева была построена автором в работе [2]. Задание квазилинейной системы дифференциальных уравнений на многообразии M_{m+2} определяет расслоение многообразия M_{m+2} на m-мерные слои M_m с двумерной базой M_2. Последняя является пространством независимых переменных системы. В настоящей работе строится аффинная связность на главном расслоении с базой M_{m+2}, слоем которого над произвольной точкой $x \in M_{m+2}$ является многообразие линейных реперов в касательном пространстве $T_x(M_m)_x$ слоя $(M_m)_x$, проходящего через точку x. Рассмотрение локальное.

§2. Структурные уравнения

1. Пусть M_{m+2} ~~m+2~~-мерное аналитическое многообразие, локальные координаты (x^λ, u^α) которого являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^\lambda = 0, \omega^\alpha = 0$ $(\lambda, \mu, \nu, \ldots = 1,2; \alpha, \beta, \gamma, \ldots = 3, 4, \ldots, m+2)$. Пусть на M_{m+2} задана квазилинейная система

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} = \sum_\beta h_{\alpha\beta}(x^\lambda, u^\gamma) \frac{\partial u^\beta}{\partial x^2} + f^\alpha(x^\lambda, u^\gamma).$$

Пусть характеристическое уравнение $\det\| h_{\alpha\beta} - \lambda E \| = 0$ системы S^1_{m2} имеет m различных корней λ^α. Система S^1_{m2} остается квазилинейной при преобразованиях вида

$$'x^\lambda = 'x^\lambda(x^\mu), \quad 'u^\alpha = 'u^\alpha(x^\lambda, u^\beta). \tag{1}$$

Пусть (x^λ) являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^\lambda=0$. Допустимые преобразования (1) системы S^1_{m2} задают локальное расслоение многообразия M_{m+2} на m-мерные слои M_m с двумерной базой M_2, являющейся пространством независимых переменных (x^λ). После такой канонизации подвижного репера многообразия M_{m+2}, которая всегда возможна, характеристические кривые на интегральных многообразиях системы S^1_{m2} задаются уравнениями $\omega^{2\alpha}\equiv\omega^2+\lambda^\alpha\omega^1=0$. Требование существования m различных характеристик позволяет продолжить канонизацию так, что структурные уравнения многообразия M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной системой S^1_{m2} с различными характеристиками приводятся к следующим (см. [2]):

$$\omega^\alpha\wedge\omega^{2\alpha}=0,$$

$$d\omega^1=\omega^1_\kappa\wedge\omega^\kappa, \tag{2}$$

$$d\omega^\alpha=\omega^\alpha_\alpha\wedge\omega^\alpha+\omega^\alpha_0\wedge\omega^{2\alpha}+a^\alpha_{\gamma1}\omega^\gamma\wedge\omega^1+a^\alpha_{\gamma\beta}\omega^\gamma\wedge\omega^\beta, \tag{3}$$

$$d\lambda^\alpha+\lambda^\alpha(\omega^1_1-\omega^2_2)-(\lambda^\alpha)^2\omega^1_2+\omega^2_1=\lambda^\alpha_\kappa\omega^\kappa+\lambda^\alpha_\beta\omega^\beta. \tag{4}$$

Здесь введено обозначение $\omega^\alpha_2\equiv\omega^\alpha_0$, тогда $\omega^\alpha_1=\lambda^\alpha\omega^\alpha_0$; индекс „0" отвечает форме $\omega^{2\alpha}$. Дальнейшее продолжение дает:

$$\begin{gathered}d\omega^\alpha_\alpha=\omega^\alpha_{\alpha0}\wedge\omega^{2\alpha}+\omega^\alpha_{\alpha\alpha}\wedge\omega^\alpha+\dots,\\ d\omega^\alpha_0=\omega^\alpha_0\wedge(\omega^\alpha_\alpha+\omega^2_2+\lambda^\alpha\omega^1_2)+\lambda^\alpha_2\omega^\alpha_0\wedge\omega^1-a^\alpha_{\gamma1}\omega^\gamma_0\wedge\omega^1+\\ +a^\alpha_{\gamma1}\omega^1_2\wedge\omega^\gamma+a^\alpha_{[\gamma\beta]}\omega^\beta_0\wedge\omega^\gamma=\omega^\alpha_{00}\wedge\omega^{2\alpha}+\omega^\alpha_{0\alpha}\wedge\omega^\alpha+\dots,\end{gathered} \tag{5}$$

где невыписанные члены линейно выражаются через $\omega^\alpha\wedge\omega^\beta$, $\omega^\alpha\wedge\omega^\kappa$, $\omega^\kappa\wedge\omega^\ell$;

$$\begin{gathered}da^\alpha_{\gamma1}+a^\alpha_{\gamma1}(\omega^\gamma_\gamma-\omega^\alpha_\alpha+\omega^1_1-\lambda^\alpha\omega^1_2)-\lambda^\alpha_\gamma\omega^\alpha_0+(\lambda^\beta-\lambda^\alpha)a^\alpha_{[\gamma\beta]}\omega^\beta_0=\\ =a^\alpha_{\gamma1\kappa}\omega^\kappa+a^\alpha_{\gamma1\beta}\omega^\beta,\end{gathered} \tag{6}$$

$$da^\alpha_{\gamma\beta}+a^\alpha_{\gamma\beta}(\omega^\gamma_\gamma+\omega^\beta_\beta-\omega^\alpha_\alpha)=a^\alpha_{\gamma\beta\kappa}\omega^\kappa+a^\alpha_{\gamma\beta\delta}\omega^\delta. \tag{7}$$

Из продолжения уравнений (4), (6), (7) выпишем лишь ту часть, которая понадобится в последующем:

$$d\lambda^\alpha_\beta+\lambda^\alpha_\beta(\omega^1_1-\omega^2_2-2\lambda^\alpha\omega^1_2+\omega^\beta_\beta)=\lambda^\alpha_{\beta\kappa}\omega^\kappa+\lambda^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma. \tag{8}$$

Далее,

$$\begin{gathered}da^\alpha_{\gamma\beta1}+a^\alpha_{\gamma\beta1}(\omega^\gamma_\gamma+\omega^\beta_\beta-\omega^\alpha_\alpha+\omega^1_1)+a^\alpha_{\gamma\beta2}\omega^2_1+a^\alpha_{\gamma\beta\delta}\lambda^\delta\omega^\delta_0-\\ -a^\alpha_{\gamma\beta}(\lambda^\gamma\omega^\gamma_{\gamma0}+\lambda^\beta\omega^\beta_{\beta0}-\lambda^\alpha\omega^\alpha_{\alpha0})\simeq0,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}da^\alpha_{\gamma\beta2}+a^\alpha_{\gamma\beta2}(\omega^\gamma_\gamma+\omega^\beta_\beta-\omega^\alpha_\alpha+\omega^2_2)+a^\alpha_{\gamma\beta1}\omega^1_2+a^\alpha_{\gamma\beta\delta}\omega^\delta_0-\\ -a^\alpha_{\gamma\beta}(\omega^\gamma_{\gamma0}+\omega^\beta_{\beta0}-\omega^\alpha_{\alpha0})\simeq0,\end{gathered} \tag{10}$$

$$da^\alpha_{\gamma\beta\varepsilon}+a^\alpha_{\gamma\beta\delta}(\omega^\gamma_\gamma+\omega^\beta_\beta+\omega^\delta_\delta-\omega^\alpha_\alpha)-a^\alpha_{\gamma\beta}(\delta^\gamma_\delta-\delta^\beta_\delta-\delta^\alpha_\delta)\omega^\delta_{\delta\delta}\simeq0, \tag{11}$$

где „≈ 0" равносильно „$= 0 \mod \omega^{\lambda}, \omega^{x}$" и δ^{α}_{β} - символы Кронекера.

2. Рассмотрим главное расслоение, базой которого является многообразие M_{m+2}, слоем над произвольной точкой $x \in M_{m+2}$ является многообразие линейных реперов в касательном пространстве $T_x(M_m)_x$ слоя $(M_m)_x$, проходящего через точку x. Величины $\Gamma^{\alpha}_{\lambda}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ определяют аффинную связность на указанном главном расслоении, соответствующую формам (см. [3 - 4])

$$\tilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu} \omega^{\mu}, \qquad (12)$$
$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} + \Gamma_{\beta\mu} \omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^{\gamma},$$

если

$$d\tilde{\omega}^{\alpha} = \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} \wedge \tilde{\omega}^{\beta} + R^{\alpha}_{\beta\gamma} \tilde{\omega}^{\beta} \wedge \tilde{\omega}^{\gamma} + K^{\alpha}_{\beta\mu} \tilde{\omega}^{\beta} \wedge \omega^{\mu} + K^{\alpha}_{\lambda\mu} \omega^{\lambda} \wedge \omega^{\mu},$$
$$d\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} \wedge \tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \tilde{\omega}^{\gamma} \wedge \tilde{\omega}^{\delta} + K^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} \tilde{\omega}^{\gamma} \wedge \omega^{\mu} + K^{\alpha}_{\beta\lambda\mu} \omega^{\lambda} \wedge \omega^{\mu}, \qquad (13)$$

где $R^{\alpha}_{\beta\gamma}, K^{\alpha}_{\beta\mu}, R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}, K^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}, K_{\lambda\mu}, K_{\beta\lambda\mu}$ составляют объект кручения-кривизны.

В пространстве M_{m+2}, с заданной на нем квазилинейной системой S^{1}_{m2} с различными характеристиками существует такая связность, если, во-первых,

$$d\Gamma^{\alpha}_{1} + \Gamma^{\alpha}_{\mu} \omega^{\mu}_{1} - \Gamma^{\alpha}_{1} \omega^{\alpha}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha} \omega^{\alpha}_{0} = \Gamma^{\alpha}_{1\mu} \omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{1\beta} \omega^{\beta},$$
$$d\Gamma^{\alpha}_{2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu} \omega^{\mu}_{2} - \Gamma^{\alpha}_{2} \omega^{\alpha}_{\alpha} + \omega^{\alpha}_{0} = \Gamma^{\alpha}_{2\mu} \omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{2\beta} \omega^{\beta}, \qquad (14)$$

поскольку тогда

$$d\tilde{\omega}^{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\alpha} \wedge \omega^{\alpha} + a^{\alpha}_{\beta 1} \omega^{\beta} \wedge \omega^{1} + a^{\alpha}_{\beta\gamma} \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{1\mu} \omega^{\mu} \wedge \omega^{1} + \Gamma^{\alpha}_{2\beta} \omega^{\beta} \wedge \omega^{2}, \qquad (15)$$

откуда

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma} = a^{\alpha}_{\beta\gamma},$$
$$K^{\alpha}_{\beta\mu} + (R^{\alpha}_{\beta\gamma} - R^{\alpha}_{\gamma\beta}) \Gamma^{\gamma}_{\mu} = \delta^{1}_{\mu} a^{\alpha}_{\beta 1} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}, \quad K^{\alpha}_{1\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu 1} \qquad (16)$$
$$R^{\alpha}_{\beta\gamma} \Gamma^{\beta}_{\lambda} \Gamma^{\gamma}_{\mu} + K^{\alpha}_{\beta\mu} \Gamma^{\beta}_{\lambda} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda},$$
$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta} \omega^{\alpha}_{\alpha}. \qquad (17)$$

Уравнения (14)-(17) получились как следствия при подстановке соотношений $(12)_1$ в $(13)_1$, с учетом уравнений (2)-(4). В силу последних соотношений (17) и вида уравнений (15) соотношения $(12)_2$ можно брать в виде

$$\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha} = \omega^{\alpha}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} \omega^{\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} \omega^{\alpha}. \qquad (18)$$

Если, во-вторых,

$$
\begin{aligned}
&d\Gamma^{\alpha}_{\alpha 1}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\omega^{\mu}_{1}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}\lambda^{\alpha}\omega^{\alpha}_{0}+\lambda^{\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha 0}=\Gamma^{\alpha}_{\alpha 1\mu}\omega^{\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha 1\beta}\omega^{\beta},\\
&d\Gamma^{\alpha}_{\alpha 2}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\omega^{\mu}_{2}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}\omega^{\alpha}_{0}+\ \ \omega^{\alpha}_{\alpha 0}=\Gamma^{\alpha}_{\alpha 2\mu}\omega^{\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha 2\beta}\omega^{\beta},\\
&d\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{\alpha}_{\alpha\alpha}=\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha\mu}\omega^{\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha\beta}\omega^{\beta},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

то, действительно,

$$
d\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha}=\tilde{\omega}^{\beta}_{\alpha}\wedge\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta}+R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma}\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\gamma}+K^{\alpha}_{\alpha\beta\mu}\tilde{\omega}^{\beta}\wedge\omega^{\mu}+K^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu}\omega^{\lambda}\wedge\omega^{\mu},
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}a^{\alpha}_{\beta\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha\beta},\\
&R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{\lambda}\Gamma^{\gamma}_{\mu}+K^{\alpha}_{\alpha\beta\mu}\Gamma^{\beta}_{\lambda}=\Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu},\quad K^{\alpha}_{\alpha\lambda\mu}=\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu\lambda},\\
&K^{\alpha}_{\alpha\beta\mu}+(R^{\alpha}_{\alpha\beta\gamma}-R^{\alpha}_{\alpha\gamma\beta})\Gamma^{\gamma}_{\mu}=\delta^{1}_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}a^{\alpha}_{\beta 1}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu\beta}-\delta^{\alpha}_{\beta}(\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha\mu}-\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu\alpha}),
\end{aligned}
$$

и теперь, чтобы согласовать уравнения (17) с (18), нужно уравнения (16) заменить на

$$
K^{\alpha}_{\beta\mu}+(R^{\alpha}_{\beta\gamma}-R^{\alpha}_{\gamma\beta})\Gamma^{\gamma}_{\mu}=\delta^{1}_{\mu}a^{\alpha}_{\beta 1}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}+\delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}.
$$

Последние соотношения и уравнения (19) получились в результате подстановки соотношений (18) в (13) и учета уравнений (2)-(5). Итак, верна

Лемма. Если структурные уравнения многообразия M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной системой S^{*}_{m2} с различными характеристиками приведены к виду (2)-(5), то величины Γ^{α}_{μ}, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}$ удовлетворяющие уравнениям вида (14) и (19), определяют в главном расслоении линейных реперов касательных пространств $T_x(M_m)_x$ слоев $(M_m)_x$, $x\in M_{m+2}$ над базой M_{m+2} аффинную связность с формами связности

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\omega}^{\alpha}=\omega^{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\mu}\omega^{\mu},\\
&\tilde{\omega}^{\alpha}_{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\alpha}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}\omega^{\mu}+\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}\omega^{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

§3. Объект связности

1. Нашей целью является выразить величины Γ^{α}_{μ}, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}$, $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha}$ через коэффициенты структурных уравнений задачи. Для этого преобразуем структурные уравнения задачи к виду (14), (19) подобно тому, как аналогичная задача решается в работе [1].

В структурные уравнения (14) величин $\Gamma^{\alpha}_{\lambda}$ входят лишь двухиндексные формы ω^{λ}_{μ}, ω^{α}_{α}, ω^{α}_{0}. Из структурных уравнений задачи такое положение лишь в уравнениях (6). Для достижения нашей цели нужно из уравнений (6) выразить формы ω^{α}_{0}. Формы ω^{α}_{0} входят в уравнения (6) с коэффицентами $\lambda^{\alpha}_{\gamma}$,

$a^{\beta}_{[\gamma\alpha]}(\lambda^{\alpha}-\lambda^{\beta})$. Следовательно, из уравнений (6) формы ω^{α}_{o} можно выразить лишь в случае, если у объектов $\{\lambda^{\alpha}_{\gamma}\}$, $\{a^{\alpha}_{[\gamma\alpha]}\}$ существуют обратные к ним объекты.

Пусть $\det\|\lambda^{\alpha}_{\gamma}\|\neq 0$. Определим величины $\tilde{\lambda}^{\beta}_{\alpha}$ так, чтобы

$$\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\alpha}\lambda^{\beta}_{\gamma}=\delta_{\alpha}^{\beta},\quad \sum_{\gamma}\lambda^{\gamma}_{\beta}\tilde{\lambda}^{\alpha}_{\gamma}=\delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{21}$$

Величины $\tilde{\lambda}^{\beta}_{\alpha}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\tilde{\lambda}^{\beta}_{\alpha}-\tilde{\lambda}^{\beta}_{\alpha}(\omega^{\beta}_{\beta}+\omega^{1}_{1}-\omega^{\alpha}_{\alpha}-2\lambda^{\alpha}\omega^{1}_{2})\simeq 0.$$

Если обозначить $\nabla a^{\alpha}_{\gamma 1}=da^{\alpha}_{\gamma 1}+a^{\alpha}_{\gamma 1}(\omega^{\gamma}_{\gamma}-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{1}_{1}-\lambda^{\alpha}\omega^{1}_{2})$ и аналогично $\nabla\tilde{\lambda}^{\beta}_{\alpha}$, $\nabla(\tilde{\lambda}^{\beta}_{\varrho}a^{\alpha}_{\beta 1})$, то

$$\nabla(\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{\gamma 1})=\nabla\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{\gamma 1}+\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}\nabla a^{\alpha}_{\gamma 1}.$$

Свертывая уравнения (6) с $\tilde{\lambda}^{\beta}_{\alpha}$ и учитывая последнее, мы получим

$$d\Big(\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{\gamma 1}\Big)+\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{\gamma 1}[-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+(2\lambda^{\varrho}-\lambda^{\alpha})\omega^{1}_{2}]-$$
$$-\delta^{\alpha}_{\varrho}\omega^{\alpha}_{o}+\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{[\gamma\beta]}(\lambda^{\beta}-\lambda^{\alpha})\omega^{\beta}_{o}\simeq 0,$$

откуда при $\varrho=\alpha$

$$d\Big(\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}_{\gamma 1}\Big)+\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}_{\gamma 1}(-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+\lambda^{\alpha}\omega^{1}_{2})-\omega^{\alpha}_{o}+$$
$$+\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}_{[\gamma\beta]}(\lambda^{\beta}-\lambda^{\alpha})\omega^{\beta}_{o}\simeq 0, \tag{22}$$

и при $\varrho\neq\alpha$

$$d\Big(\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{\gamma 1}\Big)+\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{\gamma 1}[-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+(2\lambda^{\varrho}-\lambda^{\alpha})\omega^{1}_{2}]+$$
$$+\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{[\gamma\beta]}(\lambda^{\beta}-\lambda^{\alpha})\omega^{\beta}_{o}\simeq 0.$$

Введем обозначения

$$\mathfrak{T}^{\alpha}_{\varrho\beta}=\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{[\gamma\beta]}(\lambda^{\beta}-\lambda^{\alpha}),\qquad \mathfrak{T}_{\beta}=\mathfrak{T}^{\alpha}_{\alpha\beta};$$
$$\mathcal{K}^{\alpha}_{\varrho 1}=\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\varrho}a^{\alpha}_{\gamma 1},\qquad \mathcal{K}_{1}=\mathcal{K}^{\alpha}_{\alpha 1}. \tag{23}$$

Перепишем уравнения (22), используя введенные обозначения:

$$d\mathcal{K}_{1}+\mathcal{K}_{1}(-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+\lambda^{\alpha}\omega^{1}_{2})-\omega^{\alpha}_{o}+\mathfrak{T}_{\beta}\omega^{\beta}_{o}\simeq 0, \tag{24}$$

$$d\mathcal{K}^{\alpha}_{\varrho 1}+\mathcal{K}^{\alpha}_{\varrho 1}[-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+(2\lambda^{\varrho}-\lambda^{\alpha})\omega^{1}_{2}]+\mathfrak{T}^{\alpha}_{\varrho\beta}\simeq 0. \tag{25}$$

При этом

$$d\mathfrak{T}_{\beta}+\mathfrak{T}_{\beta}[\omega^{\beta}_{\beta}-\omega^{\alpha}_{\alpha}+(\lambda^{\alpha}-\lambda^{\beta})\omega^{1}_{2}]\simeq 0,$$

$$d\mathfrak{T}^{\alpha}_{\varrho\beta}+\mathfrak{T}^{\alpha}_{\varrho\beta}[\omega^{\beta}_{\beta}-\omega^{\alpha}_{\alpha}+(2\lambda^{\varrho}-\lambda^{\beta}-\lambda^{\alpha})\omega^{1}_{2}]\simeq 0.$$

Задача свелась к тому, чтобы из уравнений (25) выразить формы ω^{β}_{o}. Для этого нужно построить объект $\{\tilde{\mathfrak{T}}^{\varrho\beta}_{\alpha}\}$, обратный к $\{\Gamma^{\alpha}_{\varsigma\rho}\}$, для чего достаточно определение объекта $\{\tilde{a}^{[\rho\gamma]}_{\alpha}\}$, обратного к $\{a^{\alpha}_{[\rho\gamma]}\}$, т.е. удовлетворяющего соотношениям

$$\sum_{\rho,\delta}\tilde{a}^{[\rho\delta]}_{\alpha}\, a^{\gamma}_{[\delta\rho]}=\delta^{\gamma}_{\alpha},\quad \sum_{\alpha,\beta}\tilde{a}^{[\varsigma\delta]}_{\alpha}\, a^{\alpha}_{[\delta\gamma]}=\delta^{\varsigma}_{\gamma},\quad \sum_{\alpha,\rho} a^{\alpha}_{[\varphi\rho]}\,\tilde{a}^{[\rho\delta]}_{\alpha}=\delta^{\delta}_{\varphi}. \qquad (26)$$

Некоторые более общие возможности существования и определения подобных обратных объектов, рассмотрены в §2 работы [1].

Теперь, обозначив

$$\tilde{\Gamma}^{\varsigma\rho}_{\alpha}=\frac{1}{\lambda^{\varsigma}-\lambda^{\alpha}}\,\tilde{a}^{[\varsigma\gamma]}_{\alpha}\lambda^{\rho}_{\gamma}, \qquad (27)$$

получим, что

$$\sum_{\rho,\delta}\tilde{\Gamma}^{\rho\delta}_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\rho}=\delta^{\alpha}_{\gamma},\quad \sum_{\alpha,\rho}\tilde{\Gamma}^{\varsigma\rho}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}=\delta^{\varsigma}_{\gamma},\quad \sum_{\alpha,\rho}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma}\tilde{\Gamma}^{\varsigma\rho}_{\alpha}=\delta^{\varsigma}_{\gamma}. \qquad (28)$$

Величины $\tilde{\Gamma}^{\varsigma\rho}_{\alpha}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\tilde{\Gamma}^{\varsigma\rho}_{\alpha}-\tilde{\Gamma}^{\varsigma\rho}_{\alpha}[\omega^{\varsigma}_{\varsigma}-\omega^{\alpha}_{\alpha}+(2\lambda^{\rho}-\lambda^{\varsigma}-\lambda^{\alpha})\omega^{1}_{2}]\simeq 0.$$

Свертывая уравнения (25) с $\tilde{\Gamma}^{\varsigma\rho}_{\alpha}$ и учитывая, что

$$\nabla(\tilde{\Gamma}^{\rho\varsigma}_{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varsigma1})=\nabla\tilde{\Gamma}^{\rho\varsigma}_{\alpha}\cdot\mathcal{H}^{\alpha}_{\varsigma1}+\tilde{\Gamma}^{\rho\varsigma}_{\alpha}\cdot\nabla\mathcal{H}^{\alpha}_{\varsigma1},$$

получим

$$d\Big(\sum_{\varsigma}\tilde{\Gamma}^{\delta\varsigma}_{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varsigma1}\Big)+\Big(\sum_{\varsigma}\tilde{\Gamma}^{\delta\varsigma}_{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varsigma1}\Big)(-\omega^{\delta}_{\delta}+\omega^{2}_{2}+\lambda^{\delta}\omega^{1}_{2})+\delta^{\delta}_{\beta}\omega^{\beta}_{0}\simeq 0. \qquad (29)$$

Обозначив

$$\mathcal{H}^{\delta}_{1}=\sum_{\varsigma}\tilde{\Gamma}^{\delta\varsigma}_{\alpha}\mathcal{H}^{\alpha}_{\varsigma1}=\frac{1}{\lambda^{\delta}-\lambda^{\alpha}}\sum_{\gamma}\tilde{a}^{[\delta\gamma]}_{\alpha}a^{\alpha}_{\gamma1}, \qquad (30)$$

можно уравнения (29) переписать в виде

$$d\mathcal{H}^{\delta}_{1}+\mathcal{H}^{\delta}_{1}(-\omega^{\delta}_{\delta}+\omega^{2}_{2}+\lambda^{\delta}\omega^{1}_{2})+\omega^{\delta}_{0}\simeq 0. \qquad (31)$$

Далее

$$d(\Gamma_{\beta}\mathcal{H}^{\beta}_{1})+\Gamma_{\beta}\mathcal{H}^{\beta}_{1}(-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+\lambda^{\alpha}\omega^{1}_{2})+\Gamma_{\beta}\omega^{\beta}_{0}\simeq 0$$

и

$$d\Big(\mathcal{H}_{1}-\sum_{\beta}\Gamma_{\beta}\mathcal{H}^{\beta}_{1}\Big)+\Big(\mathcal{H}_{1}-\sum_{\beta}\Gamma_{\beta}\mathcal{H}^{\beta}_{1}\Big)(-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+\lambda^{\alpha}\omega^{1}_{2})-\omega^{\alpha}_{0}\simeq 0. \qquad (32)$$

Введем обозначение

$$\mathcal{K}_{1}=\mathcal{H}_{1}-\Gamma_{\beta}\mathcal{H}^{\beta}_{1}=$$

$$=\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}_{\gamma1}-\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\tilde{\lambda}^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}_{[\gamma\rho]}\frac{\lambda^{\rho}-\lambda^{\alpha}}{\lambda^{\rho}-\lambda^{\varkappa}}\sum_{\delta}\tilde{a}^{[\rho\delta]}_{\varkappa}a^{\varkappa}_{\delta1}, \qquad (33)$$

тогда уравнения (32) можно переписать в виде

$$d\mathcal{K}_{1}+\mathcal{K}_{1}(-\omega^{\alpha}_{\alpha}+\omega^{2}_{2}+\lambda^{\alpha}\omega^{1}_{2})-\omega^{\alpha}_{0}\simeq 0. \qquad (34)$$

Сравнив уравнения (31) и (34) со второй группой уравнений

(14), можно утверждать, что в роли величин Γ^α_1 можно брать либо 1) $\Gamma^\alpha_1 = -\mathcal{H}^\alpha_1$, либо 2) $\Gamma^\alpha_2 = -\mathcal{K}_1$, если соответственно брать

1) $\Gamma^\alpha_1 = -x^\alpha \mathcal{H}^\alpha_1$ и 2) $\Gamma^\alpha_1 = -x^\alpha \mathcal{K}_1$

и, при этом, последние величины удовлетворяют первой группе уравнений (14), что действительно так:

$$d(x^\alpha \mathcal{H}^\alpha_1) + x^\alpha \mathcal{H}^\alpha_1(-\omega^\alpha_\alpha + \omega^1_1) + \mathcal{H}_1 \omega^2_1 - x^\alpha \omega^\alpha_o \simeq 0,$$
$$d(x^\alpha \mathcal{K}_1) + x^\alpha \mathcal{K}_1(-\omega^\alpha_\alpha + \omega^1_1) + \mathcal{K}_1 \omega^2_1 - x^\alpha \omega^\alpha_o \simeq 0.$$

2. Далее нужно построить величины $\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}, \Gamma^\alpha_{\alpha 1}, \Gamma^\alpha_{\alpha 2}$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (19), в которые входят из трехиндексных форм лишь $\omega^\alpha_{\alpha\alpha}, \omega^\alpha_{\alpha o}$. Из структурных уравнений задачи такое положение лишь в уравнениях (9), (10), (11). Рассмотрим уравнения (11) и по ним находим

$$da^\alpha_{[\gamma\beta]\delta} + a^\alpha_{[\gamma\beta]\delta}(\omega^\gamma_\gamma + \omega^\beta_\beta + \omega^\delta_\delta - \omega^\alpha_\alpha) - a^\alpha_{[\gamma\beta]}(\delta^\gamma_\delta + \delta^\beta_\delta - \delta^\alpha_\delta)\omega^\delta_{\alpha\alpha} \simeq 0,$$

где $a^\alpha_{[\gamma\beta]\delta} = a^\alpha_{\gamma\beta\delta} - a^\alpha_{\beta\gamma\delta}$. Отсюда, при $\delta=\alpha$, получим

$$da^\alpha_{[\gamma\beta]\alpha} + a^\alpha_{[\gamma\beta]\alpha}(\omega^\gamma_\gamma + \omega^\beta_\beta) + a^\alpha_{[\gamma\beta]}\omega^\alpha_{\alpha\alpha} \simeq 0.$$

Свертывание последних уравнений с $\tilde{a}^{[\beta\gamma]}_\delta$ с учетом

$$\tilde{a}^{[\beta\gamma]}_\delta \nabla a^\alpha_{[\gamma\beta]\alpha} = \nabla(\tilde{a}^{[\beta\gamma]}_\delta a^\alpha_{[\gamma\beta]\alpha}) - \nabla\tilde{a}^{[\beta\gamma]}_\delta a^\alpha_{[\gamma\beta]\alpha}$$

дает, что величины

$$A^\alpha_{\delta\alpha} = \sum_{\beta\gamma} \tilde{a}^{[\beta\gamma]}_\delta a^\alpha_{[\gamma\beta]\alpha} \tag{34}$$

удовлетворяют структурным уравнениям

$$dA^\alpha_{\delta\alpha} + A^\alpha_{\delta\alpha}\omega^\delta_\delta + \delta^\alpha_\delta \omega^\alpha_{\alpha\alpha} \simeq 0.$$

Следовательно, величины $A^\alpha_{\alpha\alpha}$ можно брать в роли $\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha}$, также как и $-A^\alpha_{\alpha\alpha}$.

Для нахождения величин $\Gamma^\alpha_{\alpha 2}$ воспользуемся уравнениями (10). Из них при $\gamma=\alpha$ получим

$$da^\alpha_{[\alpha\beta]2} + a^\alpha_{[\alpha\beta]2}(\omega^\beta_\beta - \omega^\alpha_\alpha + \omega^2_2) + a^\alpha_{[\alpha\beta]1}\omega^1_2 +$$
$$+ a^\alpha_{[\alpha\beta]\delta}\omega^\delta_o - a^\alpha_{[\alpha\beta]}\omega^\beta_{\beta o} \simeq 0,$$

где $a^\alpha_{[\alpha\beta]\mu} = a^\alpha_{\alpha\beta\mu} - a^\alpha_{\beta\alpha\mu}$.

Введем обозначения

$$A^\mu_\mu = \sum_\alpha \tilde{a}^{[\gamma\alpha]}_\alpha a^\alpha_{[\alpha\gamma]\mu}, \quad A^\gamma_\delta = \sum_\alpha \tilde{a}^{[\gamma\alpha]}_\alpha a^\alpha_{[\alpha\gamma]\delta}, \tag{35}$$

тогда

$$dA^\gamma_2 + A^\gamma_2\omega^2_2 + A^\gamma_1\omega^1_2 + \sum_\delta A^\gamma_\delta\omega^\delta_o - \omega^\gamma_{\delta o} \simeq 0.$$

Для достижения нашей цели из последних уравнений нужно исключить формы ω^δ_0, $\delta \neq \gamma$, подставив их из соотношений (31). Если учесть, что

$$dA^\gamma_\delta + A^\gamma_\delta \omega^\delta_\delta \simeq 0,$$

$$A^\gamma_\delta \nabla H^\delta_1 = \nabla(A^\gamma_\delta H^\delta_1) - \nabla A^\gamma_\delta \cdot H^\delta_1,$$

$$\nabla(A^\gamma_\delta H^\delta_1) = d(A^\gamma_\delta H^\delta_1) + (A^\gamma_\delta H^\delta_1)(\omega^2_2 + \lambda^\delta \omega^1_2) \simeq 0,$$

и обозначить

$$A^\alpha_{\alpha 2} = A^\alpha_2 - \sum_{\delta, \delta \neq \alpha} A^\alpha_\delta H^\delta_1, \qquad A^\alpha_{\alpha 1} = A^\alpha_1 - \sum_{\delta, \delta \neq \alpha} A^\alpha_\delta H^\delta_1 \lambda^\delta,$$

то получим

$$dA^\alpha_{\alpha 2} + A^\alpha_{\alpha 2}\omega^2_2 + A^\alpha_{\alpha 1}\omega^1_2 + A^\gamma_\gamma \omega^\gamma_0 - \omega^\gamma_{\gamma 0} \simeq 0.$$

Сравнив последние соотношения со второй группой уравнений (19), можно утверждать, что роль величин $\Gamma^\alpha_{\alpha 2}$ в силах удовлетворить величины $-A^\alpha_{\alpha 2}$, если при этом считать $\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} = -A^\alpha_{\alpha\alpha}$ и величины $-A^\alpha_{\alpha 1}$ удовлетворяют первой группе уравнений (19). Проверим последнее. Имеем

$$dA^\gamma_1 + A^\gamma_1 \omega^1_1 + A^\gamma_2 \omega^2_1 + \sum_\delta A^\gamma_\delta \lambda^\delta \omega^\delta_0 - \lambda^\gamma \omega^\gamma_{\gamma 0} \simeq 0.$$

Исключим отсюда формы $\lambda^\delta \omega^\delta_0$, $\delta \neq \gamma$. Для этого воспользуемся соотношениями

$$A^\gamma_\delta \nabla H^\delta_1 = \nabla(A^\gamma_\delta \cdot \lambda^\delta H^\delta_1) - \nabla A^\gamma_\delta \cdot \lambda^\delta H^\delta_1,$$

$$\nabla(A^\gamma_\delta \cdot \lambda^\delta H^\delta_1) = d(A^\gamma_\delta \cdot \lambda^\delta H^\delta_1) + (A^\gamma_\delta \cdot \lambda^\delta H^\delta_1)\omega^1_1 + A^\gamma_\delta H^\delta_1 \omega^2_1.$$

Получим, что

$$dA^\alpha_{\alpha 1} + A^\alpha_{\alpha 1}\omega^1_1 + A^\alpha_{\alpha 2}\omega^2_1 + A^\gamma_\gamma \omega^\gamma_0 - \lambda^\gamma \omega^\gamma_{\gamma 0} \simeq 0,$$

что и требовалось доказать.

Итак, верна

Теорема. Если существуют величины λ^β_γ, $\tilde{a}^{[\beta\gamma]}_\alpha$, удовлетворяющие соответственно соотношениям (21), (26), то на многообразии M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной системой S^1_{m2} с различными характеристиками, величины

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\alpha} = -\sum_{\beta,\mu} \tilde{a}^{[\beta\mu]}_\alpha a^\alpha_{[\mu\beta]\alpha},$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha 1} = -\sum_\delta \tilde{a}^{[\alpha\delta]}_\delta a^\delta_{[\delta\alpha]1} + \sum_{\delta,\delta\neq\alpha} \sum_\beta \tilde{a}^{[\alpha\beta]}_\beta a^\beta_{[\beta\alpha]\delta} \cdot \lambda^\delta \Gamma^\delta_1,$$

$$\Gamma^\alpha_{\alpha 2} = -\sum_\delta \tilde{a}^{[\alpha\delta]}_\delta a^\delta_{[\delta\alpha]2} + \sum_{\delta,\delta\neq\alpha} \sum_\beta \tilde{a}^{[\alpha\beta]}_\beta a^\beta_{[\beta\alpha]\delta} \cdot \Gamma^\delta_1,$$

где либо

1) $\Gamma^\delta_2 = -\varkappa^\delta_1$, $\Gamma^\delta_1 = -\lambda^\delta \varkappa^\delta_1$,

либо

2) $\Gamma^{\delta}_{2} = -\mathcal{K}_{1}$, $\Gamma^{\delta}_{1} = -\lambda^{\delta}\mathcal{K}_{1}$,
и только они определяют аффинную связность на главном расслоении, базой которого является многообразие M_{m+2}, а слоем над точкой $x \in M_{m+2}$ – многообразие линейных реперов касательного пространства $T_x(M_m)_x$, соответствующую формам (20).

3. В работе [2] показано, что равенство нулю объектов $\{\lambda^{\alpha}_{\beta}\}$, $\{a^{\alpha}_{\beta\gamma}\}$ необходимо и достаточно для того, чтобы данная система S^1_{m2} при некотором выборе зависимых и независимых переменных становилась почти линейной. Следовательно, в случае почти линейной, а тем более линейной системы, не возможно построить объекты $\{\tilde{\lambda}^{\rho}_{\alpha}\}$, $\{\tilde{a}^{[\rho\gamma]}_{\alpha}\}$ и не существует такой аффинной связности на указанном главном расслоении.

Литература

1. Близникас В. И., Аффинные связности, присоединенные к квазилинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. Изв. высш.учебн. заведений. Математика, 1968, № 1, 18–22.

2. Кильп Х. О., Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками геометрическая теория. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 63–85.

3. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, 2, 275–382.

4. Лумисте Ю. Г., Теория связностей в расслоенных пространствах (Итоги науки "Алгебра. Топология. Геометрия. 1969". М., 1971), 123–168.

Поступило
1 X 1977

KAHE SÕLTUMATU MUUTUJAGA JA ERINEVATE KARAKTERISTIKUTEGA I JÄRKU KVAASILINEAARSETE OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMIDE GEOMEETRIAST

H.Kilp

R e s ü m e e

Vaadeldakse kahe sõltumatu muutuja, m otsitava funktsiooni ja erinevate karakteristikutega I järku kvaasilineaarseid osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteeme analüütilisel muutkonnal M_{m+2}. Selliste süsteemide üldine geomeetriline teooria loodi autori poolt Cartani meetodi abil töös [2]. Käesolevas artiklis leitakse afiinne seostus, mis määratakse antud süsteemi poolt muutkonnal M_{m+2}.

ABOUT THE GEOMETRY OF THE SYSTEMS OF THE FIRST ORDER QUASI-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES AND WITH DIFFERENT CHARACTERISTICS

H.Kilp

S u m m a r y

The systems of the first order quasi-linear partial differential equations with two independent variables, m unknown functions and with different characteristics are investigated. The geometric theory of such systems by the method of Cartan was founded by the author in her paper [2]. In this paper the affine connection related with the system is studied.

TRÜ Toimetised, 464 (1978), 156-157.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 156-157.

ИСПРАВЛЕНИЕ К СТАТЬЕ "О ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛУКОЛЕЦ С НУЛЕМ"

В.Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

В моей статье "О гомологической классификации полуколец с нулем" (Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366. 42-75) в доказательстве леммы 9 допущена ошибка. Рассматриваемое там множество $\mathcal{A}y\mathcal{A}$ (стр. 57, второй абзац снизу), вообще говоря, не является идеалом в полукольце $\mathcal{A}$, поскольку не обязано быть замкнутым относительно сложения. Лемма 9 использовалась лишь для доказательства теоремы 4. Допущенная ошибка не влияет на справедливость этой теоремы. Мы дадим здесь более простое доказательство теоремы 4. не использующее лемму 9.

Доказательство теоремы 4 основывается на следующей лемме и следствии из нее.

<u>Лемма</u>. Пусть $\mathcal{A}$ – полукольцо с аддитивно внешним нулем, над которым все полумодули из Λ инъективны. Тогда в произвольном $\mathcal{A}$-полумодуле $\mathcal{K}\in\Lambda$ существует элемент $y_{\mathcal{K}}\in\mathcal{K}$ такой, что $y_{\mathcal{K}}+k=y_{\mathcal{K}}$ для любого $k\in\mathcal{K}$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим $\mathcal{A}$-полумодуль $\mathcal{M}=\mathcal{A}\times\mathcal{K}\in\Lambda$. Определим в нем отношение σ также как в лемме 7, положив $(a_1,m_1)\sigma(a_2,m_2)$, если $a_1=a_2$ и для любого $c\in\mathcal{A}$ из $a_1c=0$ следует $m_1c=m_2c$. Повторив рассуждения из леммы 7, мы убедимся, что σ является конгруэнцией на $\mathcal{M}$ и построим вложение i модуля $\mathcal{K}$ в $\mathcal{M}/\sigma$. Так как все $\mathcal{A}$-полумодули инъективны, то мы также, как в лемме 7, получим существование элемента $y=y_{\mathcal{K}}$ такого, что $y_{\mathcal{K}}+k=y_{\mathcal{K}}$ для любого $k\in\mathcal{K}$. (Остальная часть доказательства леммы 7 здесь не нужна). Лемма доказана.

<u>Следствие</u>. Если все полумодули из Λ над полукольцом $\mathcal{A}$ с аддитивно внешним нулем инъективны, то $\mathcal{A}=0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathcal{F}$ – свободный $\mathcal{A}$-полумодуль из Λ со счетным множеством свободных образующих $\{f_i \mid i\in\mathcal{N}\}$. По доказанной выше лемме существует $y_{\mathcal{F}}\in\mathcal{F}$, удовлетворяющий $y_{\mathcal{F}}+f=y_{\mathcal{F}}$ для любого $f\in\mathcal{F}$. Элемент $y_{\mathcal{F}}$ выражается в виде конечной суммы $y_{\mathcal{F}}=f_{i_1}a_1+\ldots+f_{i_n}a_n$, где $i_1,\ldots,i_n\in\mathcal{N}$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathcal{A}$. Пусть $j\notin\{i_1,\ldots,i_n\}$, $j\in\mathcal{N}$. Тогда

$$f_{i_1}a_1+\ldots+f_{i_n}a_n=y_{\mathfrak{F}}=y_{\mathfrak{F}}+f_j=f_{i_1}a_1+\ldots+f_{i_n}a_n+f_j. \qquad (1)$$

Отображение $f_j\to 1\in A$, $f_i\to 0\in A$ при любом $i\in N$ $(i\neq j)$ должно продолжаться до A-гомоморфизма $\psi:\mathfrak{F}\to A$. Тогда $\psi(f_j)=1$ и $\psi(f_{i_k})=0$ для всех $k=1,\ldots,n$. Применяя ψ к обеим частям равенства (1), получим

$$0=0+1\quad,$$

что, ввиду специальности A, влечет $1 = 0$, т.е. $A=0$.

Теперь можно сразу доказать теорему 4. Доказательство достаточности и первый абзац необходимости остаются без изменения. Остальная часть доказательства теоремы 4 должна быть следующей:

По лемме I A/ϱ - специальное полукольцо с аддитивно внешним нулем и по теореме I все A/ϱ-полумодули инъективны. По доказанному выше следствию $A/\varrho=0$, что противоречит нетривиальности ϱ. Теорема доказана.

Леммы 6, 7, 9 из статьи должны быть заменены доказанными здесь леммой и следствием. Лемма 8 корректна и должна быть оставлена, поскольку она используется в следующем параграфе.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 464. ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ И РАССЛОЕНИЙ. Труды по математике и механике XXII. На русском языке. Резюме на эстонском, немецком и английском языках. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, I8. Ответственный редактор Э. Реймерс. Корректоры В.Фляйшер, Л.Арива. Сдано в печать 2I.07.78. Бумага печатная 30x45 I/4. Печ. листов I0,0. Учетно-издат. листов 7,96. Тираж 400. МВ 05087. Типография ТГУ, ЭССР, г. Тарту, ул. Пялсони, I4. Зак. № 97I. Цена I руб. 20 коп.