ISSN 0494-7304 0132-053x

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

734

СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ
STRUKTUURID MUUTKONDADEL

Труды по математике и механике

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid

TARTU 1986

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 734 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ
STRUKTUURID MUUTKONDADEL

Труды по математике и механике

Matemaatika- ja mehhaanikaalaseid töid

ТАРТУ 1986

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 734.
СТРУКТУРЫ НА МНОГООБРАЗИЯХ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор А. Парринг.
Подписано к печати I4.03.1986.
МВ 03219.
Формат 60x90/I6.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 7,I4. Печатных листов 8,0.
Тираж 300.
Заказ № 245.
Цена I руб. I0 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, I4.
2 - 2

ОБ ЭВОЛЮТАХ ПОВЕРХНОСТИ M_2 С ПЛОСКОЙ НОРМАЛЬНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ В E_5

Т.Вировере

Кафедра алгебры и геометрии

Подмногообразия M_m с плоской нормальной связностью в евклидовых пространствах E_n были предметом многих исследований (см. обзор [6]). Рассматривались, в частности, и их эволюты (напр. в [12], [10]), изучение которых в общей теории подмногообразий в E_n значительно продвинул Р.Муллари [7].

В настоящей статье рассматриваются поверхности M_2 с плоской нормальной связностью в E_5. Проводится более углубленное исследование ее эволют, т.е. огибающих полей p-мерных нормалей, где $p \geqslant 2$, в том частном случае, когда $m=2$ и $n=5$. При $p=3$ эволюта является фокальной псевдоконгруенцией прямых в E_5; она используется для канонизации репера. К рассматриваемой поверхности M_2 в E_5 присоединяется ряд геометрических образов и исследуются их свойства и взаимосвязи. Основные результаты общей теории сформулированы в теореме I и предложениях I - 5. Обнаруживались интересные аналогии с теорией кривых в E_3, в частности, при изучении эволют при $p=2$.

В § 7 даны некоторые эквивалентные между собой условия, которые приводят к поверхности M_2, принадлежащей гиперсфере в E_5 (теорема 3). Полностью охарактеризованы рассматриваемые M_2, у которых эволюта, как псевдоконгруенция прямых в E_5, является нормальной (следствие к теореме 3).

§ I. Предварительные сведения

Пусть в E_n задано подмногообразие M_m. Оно является базой своего касательного векторного расслоения $T(M_m)$ и нормального векторного расслоения $T^{\perp}(M_m)$ со слоями, соответственно, $T_x(M_m)$ и $T_x^{\perp}(M_m)$ в точке $x \in M_m$. К последней присоединяется ортонормированный репер $\{x, \vec{e}_J\}$, где $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}_\alpha\}$ принадлежат, соответственно, к $T_x(M_m)$ и $T_x^{\perp}(M_m)$. Здесь и в дальнейшем индексы пробегают следующие значения: $J, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \ldots = 1, \ldots, n$; $i, j, k, \ldots = 1, \ldots, m$ и

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n.$

Деривационные формулы такого репера $\{x, \vec{e}_J\}$ имеют вид $d\vec{x} = \omega^J \vec{e}_J,\ d\vec{e}_J = \omega_J^K \vec{e}_K$, где $\omega_J^J = 0,\ \omega_J^K + \omega_K^J = 0$ и удовлетворены структурные уравнения

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J,\ d\omega_J^K = \omega_J^F \wedge \omega_F^K.$$

Кроме того

$$\omega^\alpha = 0. \qquad (I.I)$$

Отсюда путем дифференциального продолжения с помощью леммы Картана получаются уравнения

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j,\ b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \qquad (I.2)$$

в силу которых

$$\begin{aligned} d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j &= -\sum_\alpha b_{ik}^\alpha b_{j\ell}^\alpha \omega^k \wedge \omega^\ell, \\ d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta &= -\sum_i b_{ik}^\alpha b_{i\ell}^\beta \omega^k \wedge \omega^\ell. \end{aligned} \qquad (I.3)$$

Теперь деривационные формулы можно представить в виде

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j + \omega^i \vec{b}_{ij}, \\ d\vec{e}_\alpha &= -\sum_i b_{ij}^\alpha \omega^j \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \end{aligned}$$

где векторы $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ определяют <u>первую (главную) нормальную плоскость</u> $N_x^1 \subset T_x^\perp(M_m)$ к M_m в точке x.

<u>Индикатрисой нормальной кривизны</u> в точке x подмногообразия M_m называется множество $J^1 \in N_x^1$, которое описывается точкой с радиусом-вектором $\vec{x} + t^i t^j \vec{b}_{ij}$, если единичный вектор $\vec{t} = t^i \vec{e}_i$ вращается свободно в касательной плоскости $T_x(M_m)$. Плоскость R_{J^1} индикатрисы J^1 проходит через конечные точки векторов $\vec{x} + \vec{b}_{ii}$ и параллельна векторам $\vec{b}_{ij}, i \neq j$. <u>Перицентром</u> подмногообразия M_m в точке x называется в [7] точка c_x на прямой, проходящей в N_x^1 через x перпендикулярно к плоскости R_{J^1}, такая что $|\vec{c}_x - \vec{x}| = \frac{1}{p}$, где p – расстояние точки x от R_{J^1}.

Точка y с радиусом-вектором $\vec{y} = \vec{x} + y^\alpha \vec{e}_\alpha$ называется фокальной точкой подмногообразия M_m в точке x, если при некотором смещении $d\vec{x}$ точки x на M_m вектор $d\vec{y}$ принадлежит нормальной плоскости $T_x^\perp(M_m)$. Так как

$$d\vec{y} = (\omega^i + y^\alpha \omega_\alpha^i)\vec{e}_i + (dy^\alpha + y^\beta \omega_\beta^\alpha)\vec{e}_\alpha,$$

то для указанного смещения система

$$(\delta_{ij} - \sum_\alpha y^\alpha b_{ij}^\alpha)\omega^j = 0$$

имеет нетривиальное решение $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ и поэтому фокальные точки y составляют в каждом $T_x^\perp(M_m)$ <u>фокусную гиперповерхность</u> F_x порядка m с уравнением

$$\det|\delta_{ij} - \sum_\alpha y^\alpha b_{ij}^\alpha| = 0. \qquad (I.4)$$

Среди фокальных точек могут существовать точки, для которых вектор $d\vec{y}$ принадлежит нормальной плоскости $T_x^{\perp}(M_m)$ при любом смещении $d\vec{x}$ точки x на M_m. Они называются эволютными точками подмногообразия M_m в точке x, их множество $\mathfrak{I}_x$ определяется системой уравнений

$$\delta_{ij} - \sum_\alpha y^\alpha b_{ij}^\alpha = 0. \tag{I.5}$$

В [7] доказано, что $\mathfrak{I}_x$ содержит перицентр и является ортогональным дополнением к N_x^1 в $T_x^{\perp}(M_m)$. Множество $\bigcup\limits_{x\in M_m} \mathfrak{I}_x$ называется эволютой подмногообразия M_m.

Из уравнений (I.3) следует, что в расслоении касательных векторов $T_x(M_m)$ и в расслоении нормальных векторов $T_x^{\perp}(M_m)$ определены связности: соответственно, связность Леви-Чивита ∇ и нормальная связность $\nabla^{\perp}$. Правые части формул (I.3) являются, соответственно, их формами кривизны Ω_i^j и Ω_α^β.

Нормальное векторное поле $\vec{\xi} = \xi^\alpha \vec{e}_\alpha$ называется параллельным в нормальной связности $\nabla^{\perp}$, если [II; 6]

$$d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{I.6}$$

Согласно предложению 2 в [6] это равносильно тому, что подмногообразие M_{m+1}, образованное нормальной к M_m прямой с направляющим вектором $\vec{\xi}$, имеет ранг m, т.е. $T_y(M_{m+1})$ остается неизменным при смещении точки y по образующей.

§ 2. Канонизация репера

Ниже в настоящей статье рассматриваются поверхности M_2 с плоской нормальной связностью $\nabla^{\perp}$ в E_5, т.е. в дальнейшем $i,j,\ldots = 1,2$; $\alpha,\beta,\ldots = 3,4,5$ и $\Omega_\alpha^\beta = 0$. Последнее условие равносильно, в силу (I.3), условию коммутируемости

$$\sum_i \left(b_{ik}^\alpha b_{il}^\beta - b_{il}^\alpha b_{ik}^\beta\right) = 0.$$

матриц $B^\alpha = \| b_{ik}^\alpha \|$ и $B^\beta = \| b_{ik}^\beta \|$. В этом случае все эти матрицы приводимы одновременно к каноническому виду ортогональным преобразованием векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Направления этих векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, при которых

$$b_{ik}^\alpha = b_i^\alpha \delta_{ik}, \tag{2.I}$$

называются <u>главными направлениями</u> поверхности M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$, интегральные линии их полей - линиями кривизны [II].

Нормальные компоненты векторов кривизны линий кривизны называются <u>главными векторами кривизны</u>; ими являются

$$\vec{b}_i = b_i^\alpha \vec{e}_\alpha. \tag{2.2}$$

Поверхность M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ называется <u>картановой</u> [5], если ее главные векторы кривизны $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ линейно независимы в каждой точке $x \in M_2$. Главное нормальное пространство

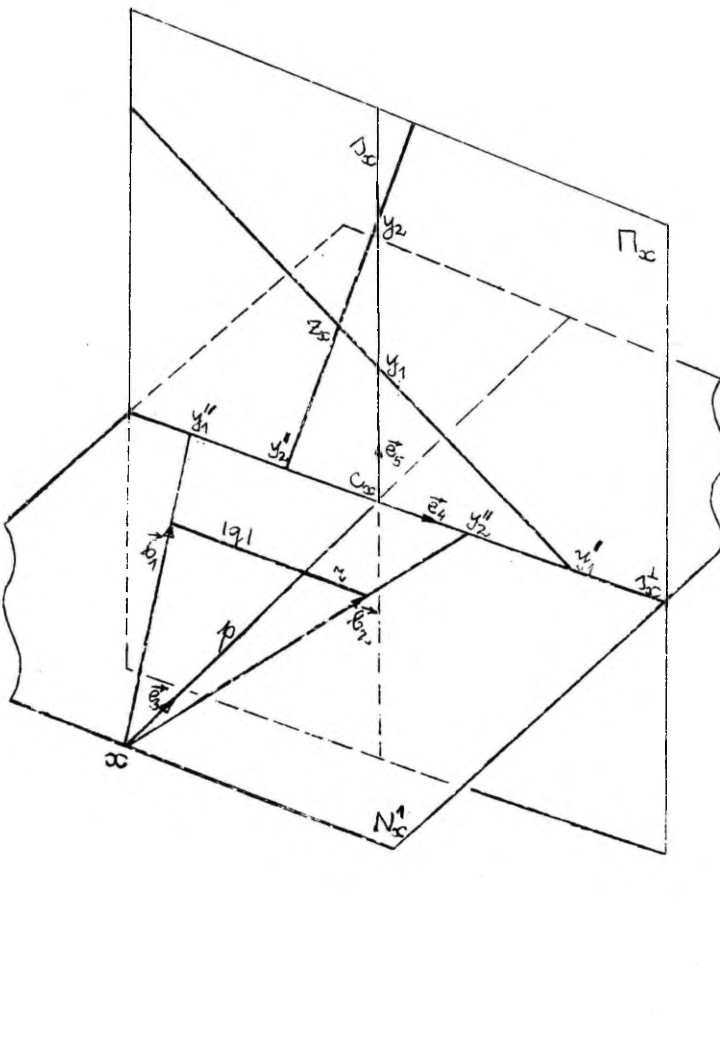

Рис. I

N^1_x такой M_2 имеет размерность 2, а ее индикатриса J^1 является отрезком на прямой R_{J^1}, описываемым точкой с радиусом-вектором $\vec{y}=\vec{x}+\sum_i (t^i)^2\vec{b}_i$, где $\sum_i (t^i)^2=1$.

В случае поверхности M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 фокусная гиперповерхность F_x в каждом $T^\perp_x(M_2)$ распадается, в силу (I.4) и (2.I), на две плоскости E^i_x размерности 2, называемые <u>фокальными плоскостями</u>; каждая из них определяется уравнением

$$1-\sum_\alpha y^\alpha b^\alpha_i=0,\ i=1,2. \qquad (2.3)$$

Главный вектор кривизны $\vec{b}_i$ направлен по нормали к E^i_x при каждом $i=1,2$.

Для картановой поверхности M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 $\operatorname{rang}(b^\alpha_i)=2$, значит фокальные плоскости E^i_x пересекаются по прямой, которая, в силу (I.5), является эволютной прямой $\Lambda_x=\cap E^i_x$ в $T^\perp_x(M_2)$ и состоит из эволютных точек для M_2 в точке $x\in M_2$.

Канонизируем репер так, чтобы $\vec{e}_5$ был направляющим вектором эволютной прямой Λ_x, а $\vec{e}_3$ был коллинеарен к радиусу-вектору перицентра. Тогда в уравнениях (2.3) должна отсутствовать координата y^5 и они должны быть удовлетворены при $y^3=\frac{1}{p}$, $y^4=0$. Это приводит к $b^5_i=0$, $b^3_1=b^3_2=p$, $p(q-r)\neq 0$, где $q=b^4_1$ и $r=b^4_2$ являются абсциссами конечных точек отрезка, являющегося индикатрисой J^1, если за начало на прямой R_{J^1} взята точка $R_{J^1}\cap xc_x$ (см. рис. I).

Формулы (I.2) принимают теперь вид

$$\omega^3_1=p\omega^1,\ \omega^3_2=p\omega^2,\ \omega^4_1=q\omega^1,\ \omega^4_2=r\omega^2,\ \omega^5_1=\omega^5_2=0, \qquad (2.4)$$

а их дифференциальное продолжение приводит к

$$\begin{aligned}
&\omega^2_1=\frac{1}{q-r}\left(l_1\omega^1+l_2\omega^2\right),\\
&\omega^4_3=\alpha_1\omega^1+\alpha_2\omega^2,\\
&\omega^5_3=r\beta_1\omega^1-q\beta_2\omega^2,\\
&\omega^5_4=-p(\beta_1\omega^1-\beta_2\omega^2), \qquad\qquad (2.5)\\
&dp=r\alpha_1\omega^1+q\alpha_2\omega^2,\\
&dq=(-p\alpha_1+\lambda_1)\omega^1+(-p\alpha_2+l_1)\omega^2,\\
&dr=(-p\alpha_1+l_2)\omega^1+(-p\alpha_2+\lambda_2)\omega^2.
\end{aligned}$$

Как видно, репер полностью канонизирован. Мы будем так выбранный репер называть <u>каноническим эволютным репером</u> картановой поверхности M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5.

<u>Теорема I</u>. Система (I.I), (2.4) и (2.5), определяющая картанову поверхность M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 в каноническом эволютном репере, находится в инволюции и определяет

эту M_2 с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Путем внешнего дифференцирования из (2.5) получается следующая система ковариантов:

$$
\begin{aligned}
&(r\,d\alpha_1 + \varphi_2\omega^2)\wedge\omega^1 + (q\,d\alpha_2 + \varphi_1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0,\\
&(d\alpha_1 + \bar\varphi_2\omega^2)\wedge\omega^1 + (d\alpha_2 + \bar\varphi_1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0,\\
&(r\,d\beta_1 + \psi_2\omega^2)\wedge\omega^1 + (-q\,d\beta_2 + \psi_1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0,\\
&(-p\,d\beta_1 + \bar\psi_2\omega^2)\wedge\omega^1 + (p\,d\beta_2 + \bar\psi_1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0,\\
&\left(\frac{dl_1}{q-r} + \rho_2\omega^2\right)\wedge\omega^1 + \left(\frac{dl_2}{q-r} + \rho_1\omega^1\right)\wedge\omega^2 = 0,\\
&(d\lambda_1 + \sigma_2\omega^2)\wedge\omega^1 + (dl_1 + \sigma_1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0,\\
&(dl_2 + \tau_2\omega^2)\wedge\omega^1 + (d\lambda_2 + \tau_1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0,
\end{aligned}
\qquad (2.6)
$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \bar\varphi_1, \bar\varphi_2, \psi_1, \psi_2, \bar\psi_1, \bar\psi_2, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ являются многочленами от p, q, r и от коэффициентов правых частей уравнений (2.5). Матрица полярной системы [I] для этой системы имеет вид

$$
\begin{Vmatrix}
r\xi^1 & 0 & 0 & q\xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & r\xi^1 & 0 & 0 & -q\xi^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{\xi^1}{q-r} & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi^2}{q-r} & 0\\
\xi^1 & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -p\xi^1 & 0 & 0 & p\xi^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^1 & \xi^2
\end{Vmatrix}.
$$

При параметрических ξ^1, ξ^2 определитель седьмого порядка этой матрицы отличен от нуля, значит $s_1 = 7$. С другой стороны, (2.6) содержит восемь независимых форм, поэтому $s_1 + s_2 = 8$, $s_2 = 1$ и число Картана $Q = s_1 + 2s_2 = 9$. После применения леммы Картана из (2.6) следует, что

$$
\begin{aligned}
&d\alpha_1 = A_1\omega^1 + \mu_2\omega^2;\quad d\alpha_2 = A_2\omega^2 + \mu_1\omega^1,\\
&d\beta_1 = B_1\omega^1 + \varkappa_2\omega^2;\quad d\beta_2 = B_2\omega^2 + \varkappa_1\omega^1,\\
&dl_1 = (q-r)L_{11}\omega^1 + (k_2 + (q-r)L_{12})\omega^2,\\
&dl_2 = (q-r)L_{22}\omega^2 + (k_1 + (q-r)L_{12})\omega^1,\\
&d\lambda_1 = \Lambda_1\omega^1 + (L_{11} + \chi_2)\omega^2;\quad d\lambda_2 = \Lambda_2\omega^2 + (L_{22} + \chi_1)\omega^1,
\end{aligned}
\qquad (2.7)
$$

где $\mu_1, \mu_2, \varkappa_1, \varkappa_2, k_1, k_2, \chi_1$ и χ_2 выражаются через коэффициенты правых частей уравнений (2.4) и (2.5). Новыми коэффициентами являются $A_1, A_2, B_1, B_2, L_{11}, L_{12}, L_{22}, \Lambda_1, \Lambda_2$; их число $N = 9$. Таким образом, $Q = N$, и рассматриваемая система находится следовательно в инволюции. Теорема доказана.

Картановы поверхности M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_5, у которых коэффициенты в правых частях первых трех уравнений (2.5) отличны от нуля, будем называть поверхностями основного типа.

§3. Трехмерная эволюта

Рассмотрим трехмерную эволюту $M_3 = \bigcup_{x\in M_2} J_x$ картановой поверхности M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ основного типа в E_5, являющуюся огибающей семейства нормальных пространств $T_x^{\perp}(M_2)$. Так как касательной к M_3 во всех точках прямой J_x является $T_x^{\perp}(M_2)$ и связность $\nabla^{\perp}$ плоская, то M_3 является локально-евклидовой (ср. [10], где показано, что эволюта для M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_4 является поверхностью нулевой гауссовой кривизны). По этой же причине M_3 имеет ранг 2 и обладает двумя семействами торсов [4]. На каждой прямолинейной образующей J_x имеется два ее 'фокуса - точки', которые смещаются вдоль J_x при некотором смещении точки x на M_2. Их мы будем называть эволютно-фокальными точками для $M_2 \subset E_5$ в точке $x \in M_2$.

Точку y_i на той или другой фокальной плоскости E_x^i, $i=1,2$, называем фокально-квазиэволютной точкой, если ее радиус-вектор $\vec{y_i}$ обладает свойством, что нормальная компонента смещения $d\vec{y_i}$ не выходит из E_x^i при любом смещении точки x на M_2.

Предложение I. Фокально-квазиэволютными точками картановой поверхности M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ основного типа в E_5 являются ее эволютно-фокальные точки и только они.

Доказательство. Пусть y с радиусом-вектором $\vec{y} = \vec{x} + y^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ лежит на E_x^i, т.е. $1 - \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} y^{\alpha} = 0$ и является фокально-квазиэволютной точкой, т.е. нормальная компонента $(dy^{\alpha} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha})\vec{e}_{\alpha}$ ее смещения $d\vec{y}$ ортогональна к $\vec{b_i}$:

$$\sum_{\alpha} b_i^{\alpha}(dy^{\alpha} + y^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha}) = 0. \tag{3.1}$$

Из первого условия дифференцированием получается, что

$$\sum_{\alpha}(b_i^{\alpha}dy^{\alpha} + db_i^{\alpha}y^{\alpha}) = 0$$

Отсюда

$$\sum_{\alpha}(db_i^{\alpha} + b_i^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha})y^{\alpha} = 0, \tag{3.2}$$

что вместе с (2.5) приводит при $i=1$ и $i=2$, соответственно, к системам

$$\begin{cases} (r-q)\alpha_1 y^3 - \lambda_1 y^4 + p(r-q)\beta_1 y^5 = 0, \\ l_1 y^4 = 0, \\ 1 - py^3 - qy^4 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (r-q)\alpha_2 y^3 - \lambda_2 y^4 - p(r-q)\beta_2 y^5 = 0, \\ l_2 y^4 = 0, \\ 1 - py^3 - ry^4 = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

определяющим, в случае M_2 основного типа, однозначно две точки y_1 и y_2 в $T_x^{\perp}(M_2)$ с радиусами-векторами

$$\vec{y}_1 = \vec{x} + \frac{1}{p}\vec{e}_3 - \frac{\alpha_1}{p^2\beta_1}\vec{e}_5 \quad u \quad \vec{y}_2 = \vec{x} + \frac{1}{p}\vec{e}_3 + \frac{\alpha_2}{p^2\beta_2}\vec{e}_5. \qquad (3.4)$$

Эти точки, как видно, лежат на эволютной прямой $s_x = \{ y \mid \vec{y} = \vec{x} + \frac{1}{p}\vec{e}_3 + t\vec{e}_5 \}$.

С другой стороны, эволютно-фокальные точки определяются как такие точки $y \in s_x$, у которых $d\vec{y} = [-\frac{dp}{p^2} + t\omega_5^3]\vec{e}_3 + [\frac{1}{p}\omega_3^4 + t\omega_5^4]\vec{e}_4 + [\frac{1}{p}\omega_3^5 + dt]\vec{e}_5$ коллинеарен к $\vec{e}_5$ при некотором смещении $d\vec{x}$. Отсюда для них, в силу (2.5), получается система

$$\begin{cases} r(\frac{\alpha_1}{p^2} + t\beta_1)\omega^1 + q(\frac{\alpha_2}{p^2} - t\beta_2)\omega^2 = 0, \\ (\frac{\alpha_1}{p^2} + t\beta_1)\omega^1 + (\frac{\alpha_2}{p^2} - t\beta_2)\omega^2 = 0, \end{cases}$$

которой удовлетворяют точки с радиусами-векторами (3.4) при, соответственно, $\omega^2 = 0$ и $\omega^1 = 0$. Предложение доказано.

<u>Замечание</u>. Если в предложении I не требовать, чтобы картанова M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ была основного типа, то могут прибавляться фокально-квазиэволютные точки, не являющиеся эволютно-фокальными точками. Это случится, если $\ell_1 = 0$ или $\ell_2 = 0$. Например, при $\ell_2 = 0$ фокально-квазиэволютные точки составляют на E_x^2 прямую, проходящую через эволютно-фокальную точку y_2, и высекаемую плоскостью в $T_x^{\perp}(M_2)$ с уравнением

$$(r-q)\alpha_2 y^3 - \lambda_2 y^4 - p(r-q)\beta_2 y^5 = 0.$$

Из (2.5) и (2.6) легко вывести, что картановы M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ и с $\ell_2 \equiv 0$ существуют с произволом семи функций одного аргумента. Геометрически они характеризуются тем, что линии кривизны одного семейства являются геодезическими.

§ 4. Соприкасающиеся гиперсферы

Понятия соприкасающихся сферы и окружности в E_3 (см. напр. [9]) допускают некоторые обобщения на случай картанова M_2 с плоской $\nabla^{\perp}$ в E_5.

Если на M_2 дана некоторая линия с натуральным параметром s, то вдоль нее $\vec{x} = \vec{x}(s)$. Пусть гиперсфера радиуса R, имеющая центр в точке C с радиусом-вектором $\vec{c}$, проходит через точку $s = s_0$ этой линии. Обозначая $\varphi(s) = [\vec{x}(s) - \vec{c}]^2 - R^2$ и $d(s) = |\vec{x}(s) - \vec{c}| - R$, имеем

$$\varphi(s) = d(s) \cdot [|\vec{x}(s) - \vec{c}| + R],$$

откуда видно, что при $s \to s_0$ расстояние $d(s)$ точки линии от гиперсферы является бесконечно малой величиной того же порядка, что и $\varphi(s)$, так как

$$\lim_{s\to s_0}\frac{\varphi(s)}{d(s)}=2R\neq 0.$$

Говорят, что линия имеет с гиперсферой касание порядка k, если $d(s)$, а следовательно и $\varphi(s)$, имеет относительно $s-s_0$ порядок малости $k+1$, т.е. если $\varphi(s_0)=\dot\varphi(s_0)=\ldots=\overset{(k)}{\varphi}(s_0)=0$.

Будем искать гиперсферы, с которыми линии кривизны картанова M_2 с плоской $\nabla^\perp$ имеют касание наибольшего возможного порядка и будем их называть соприкасающимися гиперсферами.

Непосредственно находим, что

$$\dot\varphi=2(\vec x-\vec c)\cdot\dot{\vec x},$$
$$\ddot\varphi=2[(\vec x-\vec c)\cdot\ddot{\vec x}+1],$$
$$\dddot\varphi=2[(\vec x-\vec c)\cdot\dddot{\vec x}+\dot{\vec x}\cdot\ddot{\vec x}].$$

Вдоль линии кривизны либо $\omega^1=ds,\ \omega^2=0$, либо $\omega^1=0$, $\omega^2=ds$. Поэтому $\dot{\vec x}=\vec e_i$, где $i=1$ в первом и $i=2$ во втором случае. Требование $\dot\varphi=0$ для обеих линий кривизны приводит к тому, что $\vec x-\vec c$ является нормальным к M_2 вектором, т.е. $\vec c=\vec x+y^\alpha\vec e_\alpha$. Далее, из (I.2) и (2.I) следует, что $(\vec x-\vec c)\cdot\ddot{\vec x}=-\sum_\alpha y^\alpha b_i^\alpha$ и поэтому из требования $\ddot\varphi=0$ для обеих линий кривизны получается, что центр гиперсферы должен находиться на прямой s_x с уравнениями (2.3). Требование $\dddot\varphi=0$, которое в силу $\dot{\vec x}\perp\ddot{\vec x}$ равносильно $(\vec x-\vec c)\cdot\dddot{\vec x}=0$ приводит к тому, что $y^\alpha\vec e_\alpha$ должен быть ортогонален к $\frac{d}{ds}(b_i^\alpha\vec e_\alpha)=\frac{1}{ds}(db_i^\alpha+b_i^\beta\omega_\beta^\alpha)\vec e_\alpha$, т.е. к условию (3.2) для той или другой линии кривизны. В итоге получается следующий результат

Предложение 2. В каждой точке x картановой поверхности M_2 с плоской $\nabla^\perp$ основного типа в E_5 существует две гиперсферы, с которыми любая линия на M_2, проходящая через x, имеет касание второго порядка, а та или другая линия кривизны имеет касание третьего порядка. Центры этих соприкасающихся гиперсфер находятся в эволютно-фокальных точках y_1 и y_2 прямой s_x.

Доказательство. Осталось лишь выяснить, что если обе линии кривизны имеют в точке x с гиперсферой касание второго порядка, то то же самое можно сказать для любой линии на M_2, проходящей через x. Это следует из того, что для этой линии $\dot{\vec x}=\frac{1}{ds}(\vec e_1\omega^1+\vec e_2\omega^2)$, а нормальная компонента вектора $\ddot{\vec{x}}$ равна $\frac{1}{ds^2}[b_1^\alpha(\omega^1)^2+b_2^\alpha(\omega^2)^2]\vec{e}_\alpha$.

Каждая из двух соприкасающихся гиперсфер, указанных в предложении 2, пересекается с соприкасающейся гиперплоскостью $T_x(M_2)\oplus N_x^1$ по 3-мерной сфере, центр которой находится в перицентре c_x, являющемся общей проекцией центров y_1 и y_2 этих гиперсфер на $T_x(M_2)\oplus N_x^1$. Так как в силу (3.4) у нас $\vec{y}_i=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3+y_i^5\vec{e}_5=\vec{c}_x+y_i^5\vec{e}_5$, то $\varphi_i(s)=[\vec{x}(s)-\vec{y}_i]^2-R_i^2=\varphi_c(s)-2y_i^5(\vec{x}(s)-\vec{c}_x)\vec{e}_5$, где $\varphi_c(s)=[\vec{x}(s)-\vec{c}_x]^2-\frac{1}{p^2}$ и учтено, что $R_i^2=\frac{1}{p^2}+(y_i^5)^2$. Отсюда $\dot{\varphi}_i(s_0)=\dot{\varphi}_c(s_0)$, $\ddot{\varphi}_i(s_0)=\ddot{\varphi}_c(s_0)$, в силу чего из касания второго порядка любой линии на M_2, проходящей через $x\in M_2$, с соприкасающимися гиперсферами следует ее касание того же порядка с рассматриваемой 3-сферой, являющейся их пересечением. Итак, получен следующий результат.

Предложение 3. В соприкасающейся гиперплоскости $T_x(M_2)\oplus N_x^1$ картановой поверхности M_2 с плоской $\nabla^\perp$ основного типа в E_5 существует единственная 3-мерная сфера, с которой любая линия на M_2, проходящая через x, имеет касание второго порядка. Центр этой 3-мерной сферы находится в перицентре c_x; радиусом ее является $\frac{1}{p}$.

Здесь вместо этой соприкасающейся 3-мерной сферы в $T_x(M_2)\oplus N_x^1$ можно взять также ее "большую 2-мерную сферу", которую из нее высекает 3-мерная плоскость, натянутая на $T_x(M_2)$ и перицентр c_x. Это пересечение является наиболее близким аналогом к соприкасающейся окружности кривой в E_3.

Этим считаем оправданным наименование перицентра в дальнейшем центром кривизны картановой поверхности основного типа с плоской $\nabla^\perp$.

§ 5. Полярная плоскость и полярная квазиэволюта

Плоскость в трехмерном нормальном пространстве $T_x^\perp(M_2)$ картановой поверхности M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5, проходящая через эволютную прямую J_x, ортогонально к прямой xc_x, будем называть полярной плоскостью поверхности M_2 в точке x. В эволютном каноническом репере она натянута на центр кривизны c_x с радиусом-вектором $\vec{c}_x=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3$ и на векторы $\vec{e}_4$ и $\vec{e}_5$.

Ищем в каждой полярной плоскости точки, обладающие свойством, что нормальные компоненты их смещения при смещении точки x вдоль той или другой линии кривизны принадлежат полярной плоскости. Аналитически это означает, что для точки y с радиусом-вектором $\vec{y}=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3+y^4\vec{e}_4+y^5\vec{e}_5$ и смещением

$$d\vec{y}=y^4\omega_4^i\vec{e}_i-\left[\frac{dp}{p^2}+y^4\omega_3^4+y^5\omega_3^5\right]\vec{e}_3+ \\ +\left[\frac{1}{p}\omega_3^4+dy^4-y^5\omega_4^5\right]\vec{e}_4+\left[\frac{1}{p}\omega_3^5+dy^5+y^4\omega_4^5\right]\vec{e}_5 \qquad (5.1)$$

должно быть $d\vec{y}\cdot\vec{e}_3=0$ при $\omega^1\neq 0, \omega^2=0$ или при $\omega^1=0$, $\omega^2\neq 0$, что в силу (2.5) приводит к

$$\alpha_1 y^4+r\beta_1 y^5+\frac{1}{p^2}r\alpha_1=0 \quad \text{или} \quad \alpha_2 y^4-q\beta_2 y^5+\frac{1}{p^2}q\alpha_2=0.$$

Искомые точки, как видно, заполняют на полярной плоскости две прямые, которые мы будем называть <u>полярно-квазифокальными прямыми</u>. Эти прямые проходят через эволютно-фокальные точки y_1, y_2 , как следует из (3.4).

Прямую на полярной плоскости, перпендикулярную к эволютной прямой s_x , проходящую через центр кривизны C_x будем называть <u>полярным перпендикуляром</u> и **обозначать** $s_x^\perp$. Полярно-квазифокальные прямые пересекают ее в точках y_1', y_2' с радиусами-векторами

$$\vec{y}_1'=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3-\frac{q}{p^2}\vec{e}_4,\quad \vec{y}_2'=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3-\frac{r}{p^2}\vec{e}_4,$$

которые симметричны относительно C_x точкам y_1'', y_2'' , по которым главные нормали с направляющими векторами $\vec{b}_1=p\vec{e}_3+q\vec{e}_4$, $\vec{b}_2=p\vec{e}_3+r\vec{e}_4$ пересекают полярный перпендикуляр $s_x^\perp$ и которые имеют радиусы-векторы

$$\vec{y}_1''=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3+\frac{q}{p^2}\vec{e}_4,\quad \vec{y}_2''=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3+\frac{r}{p^2}\vec{e}_4.$$

Эти точки y_1'' и y_2'' мы будем называть <u>главными полярными точками</u> (см. рис. I). Из (5.I) и (2.5) легко следует, что для y_1'' или y_2'' при смещении точки x вдоль линии кривизны, соответственно, $\omega^1\neq 0, \omega^2=0$ или $\omega^1=0, \omega^2\neq 0$ нормальная компонента смещения принадлежит главной нормальной плоскости N_x^1 , причем они являются единственными такими точками на $s_x^\perp$.

Так как y_1'' и y_2'' не могут совпасть в случае картановой M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 , то полярно-квазифокальные прямые также не могут совпасть. Если они пересекаются, т.е. если

$$q\alpha_1\beta_2+r\alpha_2\beta_1\neq 0, \qquad (5.2)$$

то их точка пересечения Z_x с радиусом-вектором

$$\vec{Z}_x=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e}_3-\frac{qr(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)}{p^2(q\alpha_1\beta_2+r\alpha_2\beta_1)}\vec{e}_4+\frac{(q-r)\alpha_1\alpha_2}{p^2(q\alpha_1\beta_2+r\alpha_2\beta_1)}\vec{e}_5 \qquad (5.3)$$

обладает свойством, что нормальная компонента ее смещения принадлежит полярной плоскости при любом смещении точки x на M_2 . Точку Z_x с этим свойством мы будем называть <u>по-</u>

лярно-квазиэволютной точкой в точке $x \in M_2$, а описываемое ею подмногообразие, (в общем случае двумерную поверхность) – полярной квазиэволютой.

Картанову M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 основного типа при (5.2) будем называть поверхностью M_2 генерального типа. Получено

Предложение 4. Картанова поверхность M_2 с плоской $\nabla^\perp$ генерального типа в E_5 характеризуется тем, что на каждой ее полярной плоскости имеется единственная полярно-квазиэволютная точка, являющаяся точкой пересечения полярно-квазифокальных прямых, каждая из которых проходит через соответствующую эволютно-фокальную точку и точку, симметричную относительно центра кривизны c_x главной полярной точке.

§ 6. Параллельные нормальные векторные поля и двумерные эволюты

Известно, что каждый нормальный вектор $\vec{\xi}_0$ картанова M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 может быть включен в нормальное векторное поле $\vec{\xi}$, параллельное в $\nabla^\perp$ и что в этом случае параллельно и поле $\xi^\perp$ 2-мерных направлений, ортогональное к $\vec{\xi}$ (см. напр. [II, 6]). Из доказанного в [6] (предложение 2) следует также, что этот случай характеризуется тем, что гиперповерхность M_4, образованная нормальной плоскостью, идущей в 2-направлении поля $\xi^\perp$, имеет ранг 2.

Также известно, что линейчатое подмногообразие M_3 ранга 2 обладает теми же самыми фокальными и метрическими свойствами, что конгруенция прямых в E_3 [4]; этим мы уже воспользовались в § 3. Аналогично, гиперповерхность M_4 ранга 2 обладает теми же свойствами, что конгруенция 2-мерных плоскостей в E_4.

Для последней доказано в [3], что она является конгруенцией касательных плоскостей к некоторой двумерной поверхности M_2 в E_4 тогда и только тогда, когда она вполне фокальна, т.е. ее фокальная квадрика распадается на две прямые, являющиеся фокальными прямыми.

Эти результаты наводят на мысль, что для каждого параллельного $\vec{\xi}$ на рассматриваемой M_2 в E_5 нормальные плоскости, определяемые по $\xi^\perp$, огибают некоторую двумерную поверхность M_2^ξ. Покажем, что это действительно так.

Итак, пусть на картановой M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 задано параллельно нормальное векторное поле $\vec{\xi} = \xi^\alpha \vec{e}_\alpha$, т.е. пусть удовлетворены (I.6). Тогда

$$d\vec{\xi} = \xi^\alpha \omega^i_\alpha \vec{e}_i . \qquad (6.1)$$

Точка y находится на указанной нормальной плоскости, если ее радиус-вектор $\vec{y}$ удовлетворяет условиям

$$(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{e}_i = 0,\ (\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{\xi} = 0,\ i=1,2 . \qquad (6.2)$$

Она является точкой двумерной поверхности, для которой эта плоскость касательная, если

$$d\vec{y}\cdot\vec{e}_i = 0,\ d\vec{y}\cdot\vec{\xi} = 0,\ i=1,2 . \qquad (6.3)$$

Дифференцирование дает из (6.2) в силу (6.I) - (6.3), что

$$-d\vec{x}\cdot\vec{e}_i + (\vec{y}-\vec{x})\cdot\omega^\alpha_i\vec{e}_\alpha = 0 .$$

Если $\vec{y} = \vec{x} + y^\alpha\vec{e}_\alpha$, то отсюда при $i=1$ и $i=2$ получаются условия

$$-\omega^1 + (py^3 + qy^4)\,\omega^1 = 0,$$
$$-\omega^2 + (py^3 + ry^4)\,\omega^2 = 0$$

и так как последние должны быть удовлетворены при любом смещении, то

$$1 - py^3 - qy^4 = 0, \qquad (6.4)$$
$$1 - py^3 - ry^4 = 0 .$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (2.3) и поэтому вместе с (6.2) определяют точку пересечения рассматриваемой нормальной плоскости с эволютной прямой Δ_x . В применяемом каноническом репере эта точка имеет координаты $y^3 = \frac{1}{p},\ y^4 = 0$, получаемые решением системы (6.4), и так как $\sum\limits_\alpha y^\alpha\xi^\alpha = 0$ в силу (6.2), то ее радиусом-вектором является

$$\vec{y} = \vec{x} + \frac{1}{p}\vec{e}_3 - \frac{\xi^3}{p\xi^5}\vec{e}_5 ;$$

здесь, конечно, предполагается, что $\xi^5 \neq 0$

Предложение 5. Поле двумерных нормальных плоскостей картановой M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5 состоит из касательных плоскостей некоторой двумерной поверхности тогда и только тогда, когда это поле параллельно в связности $\nabla^\perp$, а его плоскости непараллельны эволютной прямой Δ_x , или, что равносильно, поле нормалей к этим нормальным плоскостям, не содержащихся в N^1_x, параллельно в $\nabla^\perp$. При этом точка касания лежит на эволютной прямой.

Доказательство. Достаточность установлена выше. Необходимость вытекает из того, что гиперповерхность касательных плоскостей некоторой двумерной поверхности в E_5 имеет ранг 2. Если эти плоскости нормальны к рассматриваемой M_2 то из предложения 2 в [6] следует, что их поле параллельно в $\nabla^\perp$. Второе утверждение доказано выше.

Двумерную поверхность, указанную в предложении 5, естественно называть двумерной эволютой картановой M_2 с плоской $\nabla^\perp$. Так как параллельное поле $\vec{\xi}$ определяется любым заданием $\vec{\xi}_0 \in T_x^\perp(M_2)$, то такая M_2 имеет 2-параметрическое семейство 2-мерных эволют, которые заполняют 3-мерную эволюту $M_3 = \bigcup_{x \in M_2} \mathcal{J}_x$.

§ 7. Поверхности с совпадающими эволютно-фокальными точками

В предыдущих параграфах была построена общая теория картановых поверхностей M_2 с плоской $\nabla^\perp$ в E_5. Открылись возможности использовать полученные конструкции для выделения специальных классов этих поверхностей.

Прежде всего можно дать новую характеристику уже исследованным ранее поверхностям M_2 с плоской связностью ван-дер - Вардена - Бортолотти $\bar{\nabla} = \nabla \otimes \nabla^\perp$ [5]. Среди рассматриваемых нами поверхностей они выделяются дополнительным условием, что они имеют нулевую гауссову кривизну.

<u>Теорема 2</u>. Для картановой M_2 с плоской $\nabla^\perp$ и с несовпадающими эволютно-фокальными точками в E_5 следующие условия эквивалентны между собой:

I° M_2 имеет нулевую гауссову кривизну;

2° ее фокальные плоскости ортогональны;

3° ее эволютные прямые составляют нормальную (т.е. обладающую ортогональной поверхностью) псевдоконгруэнцию.

Доказательство. Гауссова кривизна $\mathcal{K}$ определяется как коэффициент в формуле

$$d\omega_1^2 = -\mathcal{K}\,\omega^1\wedge\omega^2$$

и так как $d\omega_1^2 = \omega_1^3\wedge\omega_3^2 + \omega_1^4\wedge\omega_4^2 = -(p^2+qr)\,\omega^1\wedge\omega^2$, то I° равносильно с $p^2+qr=0$, т.е. с $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$, что эквивалентно 2°.

Эволютные прямые составляют нормальную псевдоконгруэнцию, если условие

$$d\left(\vec{x} + \frac{1}{p}\vec{e}_3 + t\vec{e}_5\right) \perp \vec{e}_5$$

дает вполне интегрируемое пфаффово уравнение. Этим уравнением является

$$\frac{1}{p}\omega_3^5 + dt = 0$$

причем, в силу (2.5), внешний дифференциал левой части равен

$$d\left(\frac{1}{p}\omega_3^5 + dt\right) = \frac{1}{p^2}(p^2+qr)(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\,\omega^1\wedge\omega^2. \qquad (7.I)$$

Следовательно, из 2° следует 3°.

В случае несовпадающих эволютно-фокальных точек в силу (3.4)

$$-\frac{\alpha_1}{p^2\beta_1} \neq \frac{\alpha_2}{p^2\beta_2},$$

т.е. $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\neq 0$ и из 3^0 следует 1^0. Теорема доказана.

Заметим, что 1^0 и 2^0 эквивалентны между собой и без предположения об эволютно-фокальных точках, причем из них следует 3^0. Однако, свойство 3^0 имеет место и без того, что выполнены 1^0 и 2^0, именно, при $\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0$. Поэтому представляет интерес исследование класса поверхностей, описываемого следующей теоремой.

Теорема 3. Для картановой M_2 с плоской $\nabla^\perp$ генерального типа в E_5 следующие условия эквивалентны между собой:

1^0 ее эволютно-фокальные точки y_1 и y_2 совпадают на каждой эволютной прямой Δ_x ;

2^0 полярно-квазиэволютная точка z_x лежит на Δ_x для каждой точки $x\in M_2$;

3^0 существует параллельное в связности $\nabla^\perp$ поле нормалей, пересекающих эволютную прямую Δ_x.

Если M_2 обладает этими свойствами, то $y_1=y_2=z_x$ и эта точка абсолютно неподвижна в E_5 , причем M_2 принадлежит гиперсфере с центром z_x.

Доказательство. Выше выяснилось, что 1^0 равносильно **тождеству**

$$\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=0, \tag{7.2}$$

которое, в силу (5.3), эквивалентно 2^0.

Из 3^0 следует (7.2). Действительно, если (1.6) имеет место при $\xi^4=0$, то

$$\xi^3\omega_3^4-\xi^5\omega_4^5=0,$$

что, в силу (2.5), приводит к

$$\alpha_1\xi^3+p\beta_1\xi^5=0,$$
$$\alpha_2\xi^3-p\beta_2\xi^5=0$$

при $(\xi^3)^2+(\xi^5)^2\neq 0$, а это влечет (7.2).

Остается доказать, что из (7.2) следует 3^0 и остальные утверждения теоремы. Итак, пусть имеет место (7.2). Тогда существует функция γ на M_2 , так что

$$\beta_1=\gamma\alpha_1,\ \beta_2=-\gamma\alpha_2. \tag{7.3}$$

В силу (2.5) при этом

$$\omega_3^5=\gamma dp,\ \omega_4^5=-p\gamma\omega_3^4. \tag{7.4}$$

Отсюда внешним дифференцированием получается, что $d\gamma\wedge dp=0$, $[p d\gamma+\gamma(p^2\gamma^2+2)dp]\wedge\omega_3^4=0$, **раскрытие последнего дает уравнение**

$$d\gamma=-\frac{\gamma}{p}(p^2\gamma^2+2)dp. \tag{7.5}$$

Из (3.4), (5.3) и (7.3) следует

$$\vec{y_1}=\vec{y_2}=\vec{z_x}=\vec{x}+\frac{1}{p}\vec{e_3}-\frac{1}{p\gamma}\vec{e_5},$$

а (7.4) и (7.5) влекут

$$d\vec{z}_x = \vec{0}.$$

Теперь поле нормалей xz_x параллельно в связности $\nabla^\perp$, так как

$$d(\vec{z}_x - \vec{x}) = -d\vec{x} = -\omega^i \vec{e}_i \perp T_x^\perp(M_2).$$

При этом $d(\vec{z}_x - \vec{x})^2 = 2(\vec{z}_x - \vec{x})\cdot d(\vec{z}_x - \vec{x}) = 0$ т.е.

$$|\vec{z}_x - \vec{x}| = const.$$

а это говорит о том, что любая точка $x \in M_2$ принадлежит гиперсфере с центром в точке z_x . Теорема доказана.

Следствие. Если псевдоконгруэнция эволютных прямых картановой M_2 с плоской $\nabla^\perp$ основного типа в E_5 нормальна, то M_2 либо локально евклидова, либо принадлежит гиперсфере.

Действительно, в этом случае правая часть в (7.I) равна нулю и либо имеют место (7.2) и последнее утверждение теоремы 3, либо $p^2 + qr = 0$, т.е. $\mathcal{K} = 0$.

Замечание. Гиперсферу, которой принадлежит M_2 , удовлетворяющая условиям теоремы 3, можно рассматривать как ту, в которую сливаются обе соприкасающиеся гиперсферы во всех точках $x \in M_2$.

Литература

I. К а р т а н Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., МГУ, I962, 237 с.

2. К а р т а н Э., Риманова геометрия в ортогональном репере.(По лекциям Э.Картана, читанным в Сорбонне в I926-- I927 гг.; перев., обработка и ред. С.П.Финикова), М., Моск. ун-т, I960, 307 с.

3. Л у м и с т е Ю.Г., К теории многообразий плоскостей евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I966, I92, I2 - 46.

4. Л у м и с т е Ю.Г., Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства. Матем. сб., I96I, 55 (97), 4II - 420.

5. Л у м и с т е Ю.Г., Подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой и плоской связностью ван-- дер - Вардена - Бортолотти. Изв. высш. уч. зав., Математика, (в печати).

6. Л у м и с т е Ю.Г., Ч а к м а з я н А.В., Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны. Итоги науки и техники. ВИНИТИ, Проблемы геометрии, М., I98I, I2, 3 - 30.

7. М у л л а р и Р.Р., К теории многомерных поверхностей евклидова пространства. Тартуск. ун-т. Труды вычислительного центра, вып. I6, Тарту, I969, I27 с.

8. Н о р д е н А.П., Дифференциальная геометрия. М., I948.

9. Р а ш е в с к и й С.П., Курс дифференциальной геометрии. М.-Л., I950.

I0. Ч а к м а з я н А.В., Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной $\mathfrak{R}_2$ в E_4 . Докл. АН СССР, I962, I44, № 6, I233 - I236.

11. C h e n B.-Y., Geometry of submanifolds. (Pure and Appl. Math., No 22). New York, Marcel Dekker, 1973, 308 pp.

12. F a b r i c i u s - B j e r r e Fr. Sur les varietes a torsion nulle. Acta math., 1936, 66, 49 - 77.

Поступило
I5 XII I985

ON THE EVOLUTES OF A SURFACE M_2 WITH FLAT NORMAL CONNECTION IN E_5

T.Virovere

S u m m a r y

If a surface M_2 in E_5 has flat normal connection and its first normal planes are twodimensional (i.e. M_2 is of Cartan's type), then the envelope of its normal spaces (the evolute) is a focal pseudocongruence of striaght lines J_x orthogonal to these planes. It is shown that in every point $x \in M_2$ there exist two tangent hyperspheres which have third order tangency with one curvature lines through x There centres are focal points of the evolute pseudocongruence. The plane through J_x orthogonal to xc_x, where $c_x \in J_x$ and $xc_x \perp J_x$, is called polar plane. Points on it, whose infinitesimal displacements have normal components on the same polar plane, when x moves on one of curvature lines, constitute two straight lines, which in general intersect in a point Z_x. A $M_2 \in S_4(m) \subset E_5$ is characterized by one of next equivalent conditions: 1) $Z_x \in J_x$, 2) focal points of evolute pseudocongruence coincide, 3) there exists a parallel normal direction field, intersecting J_x in every $x \in M_2$. Every parallel normal direction field ξ generates a 2-evolute as an envelope of the plane field, orthogonal to ξ.

ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ДЮПЕНА С ГОЛОНОМНОЙ СЕТЬЮ ЛИНИИ КРИВИЗНЫ В E_4

М.Вяльяс

Кафедра алгебры и геометрии

В последнее время многие исследователи ввели в рассмотрение класс гиперповерхностей Дюпена, т.е. гиперповерхностей V_n в евклидовом пространстве E_{n+1}, главные кривизны которых имеют постоянные кратности и постоянны вдоль интегральных поверхностей соответствующих им распределений кривизны (см. [8, 9, 10]).

Хорошо известно, что в евклидовом пространстве E_3 поверхностями Дюпена являются лишь сферы, плоскости и циклиды Дюпена. Последние характеризуются тем, что их линии кривизны являются окружностями или прямыми (или их частями). В [4] и [5] это классификация обобщена для полных гиперповерхностей Дюпена V_n в E_{n+1} с двумя главными кривизнами с кратностями p и $n-p$ соответственно; при этом говорят о гиперциклидах Дюпена типа $(p, n-p)$. В [9] они классифицируются без предположения полноты с точки зрения геометрии Ли гиперсфер.

Гиперповерхности Дюпена с тремя различными главными кривизнами изучаются в [8] . Такие гиперповерхности при $n=3$ встречаются в классе конформно-евклидовых гиперповерхностей V_3 в E_4 (см. [I]). Гиперповерхности Дюпена V_3 в E_4, все линии кривизны которой окружности, плоскости которых для линии каждого семейства либо имеют общую прямую, либо параллельны между собой, рассмотрены в [2] , где они названы гиперциклидами Дюпена - Маннгейма и доказано, что они не только конформно-евклидовы, но имеют кроме того изотермическую сеть линии кривизны, которая , согласно результату Финци [6] , голономна. Полное геометрическое описание всех изотермических гиперповерхностей Дюпена V_n в E_{n+1} дано в [3] .

В настоящей статье доказывается, что в евклидовом пространстве E_4 существуют гиперповерхности Дюпена с тремя различными главными кривизнами, линии кривизны которых образуют голономную сеть, но которые не являются конформно-евклидовыми. Доказано, что у такой гиперповерхности плоскости окружностей кривизны одного и того же семейства в общем случае пересекаются всегда в одной неподвижной точке, которая может, в частности, быть бесконечно удалена или заменяться прямой, обычной или бесконечно удаленной. Проведена классификация всех гиперповерхностей Дюпена с голономной сетью окружностей кривизны по этим свойствам.

I. Пусть дана гиперповерхность V_3 в E_4. Присоединим к ее точке $\mathfrak{X} \in V_3$ ортонормальный подвижный репер так, что первые три его вектора касательные и идут в главных направлениях, т.е. дают канонический вид второй фундаментальной формы. Этот репер естественно называть каноническим. В формулах его инфинитезимального перемещения

$$dx = e_\jmath \omega^\jmath, \quad de_\varkappa = e_\jmath \omega^\jmath_\varkappa \ ; \ \jmath, \varkappa = 1,2,3,4 \qquad (I)$$

имеем $\omega^\varkappa_\jmath = -\omega^\jmath_\varkappa$ и

$$\omega^4 = 0 \ , \ \omega^4_p = k_p \omega^p \ ; \ p = 1,2,3 \qquad (2)$$

(по индексу p не суммировать!), где k_1, k_2, k_3 - главные кривизны поверхности V_3. Предположим, что все они разные, т.е. $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$. Теперь дифференциальное продолжение системы (2) приводит к

$$\omega^q_p = \Gamma_{rp}\omega^p - \Gamma_{rq}\omega^q + (k_p - k_q)^{-1}\lambda\,\omega^r, \qquad (3)$$

$$dk_p = a_p\omega^p + (k_p - k_q)\Gamma_{rp}\omega^q + (k_p - k_r)\Gamma_{qp}\omega^r, \qquad (4)$$

где здесь и в дальнейшем p, q, r - любая перестановка чисел I, 2, 3.

Так как главные кривизны гиперповерхности Дюпена, по определению, постоянны вдоль соответствующих им линий кривизны, то в формулах (4) имеет место равенство $a_p = 0$. Пусть линии кривизны составляют голономную сеть. Тогда уравнение $\omega^q = 0$ вполне интегрируемо и поэтому $\lambda = 0$. Следовательно (3) и (4) принимают вид

$$\omega^q_p = \Gamma_{rp}\omega^p - \Gamma_{rq}\omega^q, \qquad (5)$$

$$dk_p = (k_p - k_q)\Gamma_{rp}\omega^q + (k_p - k_r)\Gamma_{qp}\omega^r. \qquad (6)$$

Дальнейшее продолжение уравнений (5) приводит к

$$d\Gamma_{rp} = A_{rpp}\omega^p + [A_{rpq} + \tfrac{1}{2}(2\Gamma^2_{rp} + \Gamma_{pq}\Gamma_{qp} + k_p k_q)]\omega^q + \Gamma_{qp}(\Gamma_{rp} - \Gamma_{pr})\omega^r, \qquad (7)$$

где $A_{rpq} = -A_{rqp}$. При этом внешнее дифференцирование уравнений (6) приводит лишь к соотношению

$$A_{rpp}(k_p - k_q) = 0,$$

откуда в силу $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$ следует, что $A_{rpp} = 0$ и уравнения (7) принимают вид

$$d\Gamma_{rp} = [A_{rpq} + \tfrac{1}{2}(2\Gamma^2_{rp} + \Gamma_{pq}\Gamma_{qp} + k_p k_q)]\omega^q + \Gamma_{qp}(\Gamma_{rp} - \Gamma_{pr})\omega^r, \qquad (8)$$

где

$$A_{rpq} = -A_{rqp}. \tag{9}$$

Отсюда при дифференциальном продолжении получается

$$dA_{rpq} = \Gamma_{rq}(\Gamma_{rp}^2 + \tfrac{1}{2}\Gamma_{qp}^2 + \tfrac{1}{2}k_p^2 + A_{rpq})\omega^p - \Gamma_{rp}(\Gamma_{rq}^2 + \tfrac{1}{2}\Gamma_{pq}^2 + \tfrac{1}{2}k_q^2 + A_{rqp})\omega^q +$$
$$+ \Big[(\tfrac{1}{2}A_{qrp} + A_{rpq} + \tfrac{3}{4}\Gamma_{pr}\Gamma_{rp} + \tfrac{1}{4}k_p k_r)\Gamma_{pq} -$$
$$- (\tfrac{1}{2}A_{prq} + A_{rqp} + \tfrac{3}{4}\Gamma_{qr}\Gamma_{rq} + \tfrac{1}{4}k_q k_r)\Gamma_{qp}\Big]\omega^r, \tag{I0}$$

т.е. система (2), (5), (6), (8), (I0) является замкнутой. Легко проверить, что (9) и (I0) согласованы в том смысле, что не дают никаких дополнительных соотношений. После некоторых вычислений получается, что эта система вполне интегрируема. Итог можно сформулировать следующим образом.

<u>Теорема I</u>. Гиперповерхность Дюпена V_3 в E_4 с голономной сетью линии кривизны и с тремя различными главными кривизнами определяется в каноническом репере вполне интегрируемой системой, которая состоит из уравнений (2), (5), (6), (8) и (I0) при конечных соотношениях (9), где p, q, r — произвольная перестановка чисел I, 2, 3.

Из результатов [I] следует, что такая гиперповерхность Дюпена является конформно-евклидовой тогда и только тогда, когда $\Gamma_{pq} = \Gamma_{qp}$ при всех парах чисел I, 2, 3.

2. Класс рассмотренных в теореме I гиперповерхностей V_3 в E_4 обозначим через $\mathfrak{D}_3$. Оказывается, что их можно характеризовать в более общем классе некоторыми геометрическими свойствами следующим образом.

<u>Теорема 2.</u> Гиперповерхность V_3 в E_4 с $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$, линии кривизны которой составляют голономную сеть, является гиперповерхностью Дюпена тогда и только тогда, когда удовлетворено одно из следующих условий:

I) все ее линии кривизны - окружности или прямые или их части,

2) она является огибающей трех различных двухпараметрических семейств гиперсфер или плоскостей,

3) все три ее фокальные гиперповерхности вырождаются.

<u>Доказательство. Необходимость</u>. Пусть V_3 в E_4 является гиперповерхностью Дюпена, описываемой в теореме I.

Вдоль ее линии кривизны, на которой $\omega^q = \omega^r = 0$, главная кривизна k_p постоянна и при $k_p \neq 0$ точка C_p с радиусом-вектором $c_p = x + k_p^{-1} e_4$, как легко установить, неподвижна. Следовательно, вдоль этой линии происходит касание рассматриваемой гиперповерхности V_3 с гиперсферой, центр которой находится в точке C_p и радиус равен k_p^{-1}. Линия является характеристикой 2-параметрического семейства гиперсфер и поэтому есть окружность. Если $k_p = 0$, то вдоль соответствующей линии кривизны вектор e_4 не изменится, т.е. вдоль этой линии V_3 касается с гиперплоскостью, ортогональной к e_4, и линия есть прямая. Этим необходимость условий I), 2) и 3) доказана.

Достаточность. Пусть гиперповерхность V_3 в E_4 с $k_1 \neq k_2 \neq k_3 \neq k_1$, линии кривизны которой составляют голономную сеть, отнесена к каноническому реперу. Тогда в этом репере удовлетворяется система уравнений (2), (4), (5) и (7).

Рассмотрим линию кривизны, вдоль которой $\omega^q = \omega^n = 0$. Для нее из (I) получим $dx = e_p \omega^p$, $de_p = (\Gamma_{np} e_q + \Gamma_{qp} e_n + k_p e_4)\omega^p$,

$$d(\Gamma_{np} e_q + \Gamma_{qp} e_n + k_p e_4) = -(\Gamma_{np}^2 + \Gamma_{qp}^2 + k_p^2) e_p \omega^p + (A_{npp} e_q + A_{qpp} e_n + a_p e_4)\omega^p.$$

Линии кривизны этого семейства являются окружностями тогда и только тогда, когда в уравнениях (4) и (7) имеют место $a_p = 0$ и $A_{npp} = 0$. Они будут прямыми когда $k_p = 0$. Следовательно, условие I) приводит к V_3 класса $\mathfrak{D}_3$.

Пусть удовлетворено 2). Так как характеристики 2-параметрического семейства гиперсфер или -плоскостей являются всегда линиями кривизны огибающей, то в этом случае удовлетворено I).

Наконец, пусть удовлетворено 3). Фокальная гиперповерхность рассматриваемой гиперповерхности V_3 описывается точкой $\mathcal{Y}_p$ с радиусом-вектором $y_p = x + k_p^{-1} e_4$, которая определена лишь при $k_p \neq 0$ $(p = 1, 2, 3)$. Ее касательная гиперплоскость натянута на векторы $(k_p - k_q)(k_p e_q - \Gamma_{np} e_4)$, $(k_p - k_n)(k_p e_n - \Gamma_{qp} e_4)$, $a_p e_4$. Система этих векторов имеет ранг, меньше, чем три, тогда и только тогда, когда $a_p = 0$, $p = 1, 2, 3$ (причем ранг, в силу предположений на k_1, k_2 и k_3, равен всегда 2); значит V_3 принадлежит классу $\mathfrak{D}_3$. Теорема доказана.

3. Пусть V_3 является гиперповерхностью Дюпена класса $\mathfrak{D}_3$ и пусть у нее $k_p \neq 0$; класс таких V_3 обозначим $\mathfrak{D}_3(p)$. Плоскость окружности кривизны радиуса k_p^{-1} определяется точкой $\mathcal{X}$ и векторами e_p, $f_p = \Gamma_{np} e_q + \Gamma_{qp} e_n + k_p e_4$. Ищем на ней точку $\mathcal{Y}$ с радиусом-вектором $y = x + \xi e_p + \eta(\Gamma_{np} e_q + \Gamma_{qp} e_n + k_p e_4)$ так, чтобы смещение dy этой точки принадлежало рассматрваемой плоскости при смещении этой плоскостй в данном семействе. Так как при этом вектор dy должен иметь нулевые коэффициенты при e_q и e_n, то мы получим систему

$$\begin{aligned} 1 - \xi\Gamma_{nq} + \eta B_{npq} &= 0, \\ 1 - \xi\Gamma_{qn} + \eta B_{qpn} &= 0, \end{aligned} \qquad (II)$$

где $B_{\kappa pq} = A_{\kappa pq} - \frac{1}{2}(\Gamma_{pq}\Gamma_{qp} + k_p k_q)$.

Гиперповерхность Дюпена V_3 класса $\mathfrak{D}_3(p)$ будем называть гиперповерхностью общего типа, если у нее

$$\Gamma_{q\kappa} B_{\kappa pq} - \Gamma_{\kappa q} B_{qp\kappa} \neq 0 .$$

В этом случае на каждой плоскости окружности кривизны рассматриваемого семейства система (II) определяет единственную точку y с радиусом-вектором

$$y = x + \frac{(B_{\kappa pq} - B_{qp\kappa}) e_p + (\Gamma_{\kappa q} - \Gamma_{q\kappa}) f_p}{\Gamma_{q\kappa} B_{\kappa pq} - \Gamma_{\kappa q} B_{qp\kappa}} . \qquad (12)$$

Непосредственный подсчет с помощью формул (I), (2), (5), (6), (8) - (I0) покажет, что $dy = 0$; поэтому имеет место

<u>Теорема 3.</u> Пусть V_3 является гиперповерхностью Дюпена общего типа в классе $\mathfrak{D}_3(p)$. Тогда плоскости ее окружностей кривизны радиуса k_p^{-1} пересекаются в одной неподвижной точке.

4. Рассмотрим гиперповерхности Дюпена V_3 класса $\mathfrak{D}_3(p)$, у которых при одной конкретной четной перестановке $\bar p, \bar q, \bar\kappa$ индексов I, 2, 3 имеет место

$$\Gamma_{\bar q \bar\kappa} B_{\bar\kappa \bar p \bar q} - \Gamma_{\bar\kappa \bar q} B_{\bar q \bar p \bar\kappa} = 0 . \qquad (13)$$

Тогда в общем случае существует гладкая функция $\mu_{\bar p}$ на V_3 , такая что

$$\Gamma_{\bar\kappa \bar q} = \mu_{\bar p} \Gamma_{\bar q \bar\kappa} , \quad B_{\bar\kappa \bar p \bar q} = \mu_{\bar p} B_{\bar q \bar p \bar\kappa} . \qquad (14)$$

Отсюда после дифференцирования получим уравнение

$$d\mu_{\bar p} = (\mu_{\bar p} - 1)(\mu_{\bar p}\Gamma_{\bar q \bar\kappa}\omega^{\bar p} + \mu_{\bar p}\Gamma_{\bar p \bar\kappa}\omega^{\bar q} + \Gamma_{\bar p \bar q}\omega^{\bar\kappa}) \qquad (15)$$

которое, как нетрудно установить, вполне интегрируемо в классе $\mathfrak{D}_3$ при (I4). Получится следующий результат.

<u>Теорема 4.</u> Пусть V_3 является гиперповерхностью Дюпена класса $\mathfrak{D}_3(p)$, для которой имеет место (I3) при одной конкретной перестановке $\bar p, \bar q, \bar\kappa$ индексов I, 2, 3. Тогда эта гиперповерхность определяется в каноническом репере системой, которая состоит из следующих уравнений:

(2), где $p = 1, 2, 3$,

(5) и (6), где p, q, κ — любая перестановка из I, 2, 3 и подставлены (I4),

(8), где p, q, κ — любая перестановка из I, 2, 3, кроме $\bar p, \bar\kappa, \bar q$ и подставлены (9) и (I4),

(I0), где p, q, κ - либо $\bar p, \bar q, \bar\kappa$ либо $\bar\kappa, \bar p, \bar q$ и подставлены (9) и (I4),

и уравнения (I5). Эта система вполне интегрируема, рассматриваемая V_3 существует с произволом постоянных.

В ситуации теоремы 4 неподвижная точка (I2), где следует положить $p=\bar{p}$,бесконечно удалена; плоскости окружности кривизны радиуса k_p^{-1} все параллельны направлению вектора

$$m_p = B_{qpr} e_p + \Gamma_{qr}(\Gamma_{rp} e_q + \Gamma_{qp} e_r + k_p e_4) \qquad (16)$$

которое оказывается неподвижным, так как для дифференциала этого вектора получаем

$$dm_p = m_p[\Gamma_{qr}\omega^p + \Gamma_{rp}\omega^q + \Gamma_{qp}\omega^r + \Gamma_{pr}(1-\mu_p)\omega^q]. \quad (17)$$

Рассматриваемый класс гиперповерхностей Дюпена обозначим через $\mathfrak{D}_3^\infty(p)$.

При $\mu_p=1$ гиперповерхность класса $\mathfrak{D}_3^\infty(p)$ обладает свойством Маннгейма для окружностей кривизны радиуса k_p^{-1} (см. [7] с. 291): плоскости этих окружностей составляют пучок, т.е. либо а) проходят через неподвижную прямую, либо б) параллельны между собой. Покажем это.

а) Пусть $\Gamma_{qr} = \Gamma_{rq} \neq 0$; тогда прямая, проходящая через точку с радиусом-вектором $x + \Gamma_{qr}^{-1} e_p$ в направлении вектора (16), является неподвижной, так как дополнительно к (17) имеем

$$d(x + \Gamma_{qr}^{-1} e_p) = \Gamma_{qr}^{-2} m_p \omega^p.$$

Класс гиперповерхностей Дюпена с этим свойством обозначим через $\bar{\mathfrak{D}}_3(p)$.

б) Пусть $\Gamma_{qr} = \Gamma_{rq} = 0$; тогда плоскости окружностей кривизны радиуса k_p^{-1} сохраняют свое 2-направление, потому что тогда при любом смещении точки x на рассматриваемой гиперповерхности $de_p = (\Gamma_{rp} e_q + \Gamma_{qp} e_r + k_p e_4)\omega^p$ и

$$d(\Gamma_{rp} e_q + \Gamma_{qp} e_r + k_p e_4) = -(\Gamma_{rp}^2 + \Gamma_{qp}^2 + k_p^2) e_p \omega^p + \\ +(\Gamma_{rp} e_q + \Gamma_{qp} e_r + k_p e_4)(\Gamma_{rp}\omega^q + \Gamma_{qp}\omega^r).$$

Класс гиперповерхностей Дюпена с этим свойством обозначим через $\bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p)$.

<u>Предложение I.</u> Гиперповерхность Дюпена класса $\mathfrak{D}_3$ принадлежит классу $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cup \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p)$ тогда и только тогда, когда плоскости окружностей кривизны радиуса k_p^{-1} составляют пучок.

<u>Доказательство.</u> Осталось показать достаточность. Пусть V_3 является гиперповерхностью Дюпена класса $\mathfrak{D}_3$.

Если все плоскости ее окружностей кривизны радиуса k_p^{-1} проходят через одну прямую, то любая точка этой прямой определяется условием, что она не выходит из этой плоскости при смещении последней в рассматриваемом семействе. Следовательно, эта прямая определяется любым из уравнений (11), система которых должна поэтому иметь ранг I. Это приводит к тождествам (14) при $\mu_p=1$ и поэтому к $V_3 \in \bar{\mathfrak{D}}_3(p)$.

Если все плоскости окружностей кривизны радиуса k_p^{-1} параллельны, то de_p при любом смещении точки $\mathfrak{X}$ на V_3 выражается линейно через e_p и $\Gamma_{\kappa p}e_q + \Gamma_{qp}e_\kappa + k_p e_4$. Так как $de_p = (\Gamma_{\kappa p}e_q + \Gamma_{qp}e_\kappa + k_p e_4)\omega^p - \Gamma_{\kappa q}e_q\omega^q - \Gamma_{q\kappa}e_\kappa\omega^\kappa$, то это приводит к $\Gamma_{\kappa q} = \Gamma_{q\kappa} = 0$ и, следовательно, к $V_3 \in \mathfrak{D}_3^\infty(p)$. Предложение доказано.

5. Рассмотрим гиперповерхность Дюпена V_3 класса $\mathfrak{D}_3(\bar p,\bar q) = \mathfrak{D}_3(\bar p)\cap\mathfrak{D}_3(\bar q)$ у которой при одной конкретной перестановке $\bar p, \bar q, \bar \kappa$ индексов 1, 2, 3 имеют место

$$\Gamma_{\bar q\bar\kappa}B_{\bar\kappa\bar p\bar q} - \Gamma_{\bar\kappa\bar q}B_{\bar q\bar p\bar\kappa} = 0 \quad \text{и} \quad \Gamma_{\bar\kappa\bar p}B_{\bar p\bar q\bar\kappa} - \Gamma_{\bar p\bar\kappa}B_{\bar\kappa\bar q\bar p} = 0 . \qquad (18)$$

Теперь существуют гладкие функции $\mu_{\bar p}$ и $\mu_{\bar q}$ на V_3, такие что

$$\Gamma_{\bar\kappa\bar q} = \mu_{\bar p}\Gamma_{\bar q\bar\kappa}, \quad B_{\bar\kappa\bar p\bar q} = \mu_{\bar p}B_{\bar q\bar p\bar\kappa}, \qquad (19)$$

$$\Gamma_{\bar p\bar\kappa} = \mu_{\bar q}\Gamma_{\bar\kappa\bar p}, \quad B_{\bar p\bar q\bar\kappa} = \mu_{\bar q}B_{\bar\kappa\bar q\bar p}. \qquad (20)$$

Аналогично как в п. 4 отсюда получаются два уравнения

$$d\mu_{\bar p} = (\mu_{\bar p}-1)(\mu_{\bar p}\Gamma_{\bar q\bar\kappa}\omega^{\bar p} + \mu_{\bar p}\Gamma_{\bar p\bar\kappa}\omega^{\bar q} + \Gamma_{\bar p\bar q}\omega^{\bar\kappa}_{\bar p}), \qquad (21)$$

$$d\mu_{\bar q} = (\mu_{\bar q}-1)(\mu_{\bar q}\Gamma_{\bar\kappa\bar p}\omega^{\bar q}_{\bar q} + \mu_{\bar q}\Gamma_{\bar q\bar p}\omega^{\bar\kappa} + \Gamma_{\bar q\bar\kappa}\omega), \qquad (22)$$

система которых, как нетрудно установить, вполне интегрируема в классе $\mathfrak{D}_3$ при (19) и (20). Мы приходим к следующему результату.

Теорема 5. Пусть V_3 является гиперповерхностью Дюпена класса $\mathfrak{D}_3(\bar p,\bar q)$, для которой имеют место (18) при одной конкретной перестановке $\bar p, \bar q, \bar\kappa$ индексов 1, 2, 3. Тогда эта гиперповерхность определяется в каноническом репере системой, которая состоит из следующих уравнений:

(2), где $p = 1, 2, 3$,

(5) и (6), где p, q, κ - любая перестановка из 1, 2, 3 и подставлены (19) и (20),

(8), где p, q, κ — любая перестановка из 1, 2, 3, кроме $\bar p, \bar\kappa, \bar q$ и $\bar\kappa, \bar q, \bar p$ и подставлены (9), (19) и (20),

(10), где p, q, κ - подстановка $\bar p, \bar q, \bar\kappa$ и подставлены (9), (19) и (20) и уравнения (21) и (22). Эта система вполне интегрируема, рассматриваемая V_3 существует с произволом постоянных.

Класс гиперповерхностей Дюпена, описываемых в теореме 5, обозначим через $\mathfrak{D}_3^\infty(\bar p)\cap\mathfrak{D}_3^\infty(\bar q) = \mathfrak{D}_3^\infty(\bar p,\bar q)$. У гиперповерхности этого класса плоскости окружностей кривизны радиуса $k_{\bar p}^{-1}$ параллельны неподвижному направлению вектора $m_{\bar p}$ и плоскости окружностей кривизны радиуса $k_{\bar q}^{-1}$ параллельны неподвижному направлению вектора $m_{\bar q}$. При $\mu_p = 1$ в классе $\mathfrak{D}_3^\infty(p,q)$ возникают подклассы $\bar{\mathfrak{D}}_3(p)\cap\mathfrak{D}_3^\infty(q)$ и $\bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p)\cap\mathfrak{D}_3^\infty(q)$, а при $\mu_p = \mu_q = 1$ - подклассы $\bar{\mathfrak{D}}_3(p,q) \equiv \bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \mathfrak{D}_3(q)$, $\bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p,q) \equiv \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(q)$ и $\bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(q)$.

Из результатов п. 4 получается:

Следствие. Гиперповерхность Дюпена класса $\mathfrak{D}_3$ принадлежит одному из классов $\bar{\mathfrak{D}}_3(p,q)$, $\bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p,q)$, $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(q)$ и $\bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(q)$ при одной конкретной перестановке p, q, r тогда и только тогда, когда плоскости окружностей кривизны составляют пучок как при радиусе k_p^{-1}, так и при k_q^{-1}.

6. Рассмотрим гиперповерхности Дюпена V_3 класса $\mathfrak{D}_3(p,q,r) \equiv \mathfrak{D}_3(p) \cap \mathfrak{D}_3(q) \cap \mathfrak{D}_3(r)$ у которых при всех перестановках p, q, r индексов I, 2, 3 имеет место

$$\Gamma_{qr} B_{rpq} - \Gamma_{rq} B_{qpr} = 0. \tag{23}$$

Тогда существуют гладкие функции μ_p $(p = 1,2,3)$ на V_3 так, что

$$\Gamma_{rq} = \mu_p \Gamma_{qr}, \quad B_{rpq} = \mu_p B_{qpr} \tag{24}$$

при всех четных перестановках p, q, r. Обозначим $\Gamma_{qr}, \Gamma_{rp}, \Gamma_{pq}$, соответственно, через l_p, l_q, l_r. Теперь получаются уравнения

$$d\mu_p = (\mu_p - 1)(\mu_p l_p \omega^p + \mu_p \mu_q l_q \omega^q + l_r \omega^r), \tag{25}$$

где p, q, r — любая четная перестановка из I, 2, 3. Их система вполне интегрируема в классе $\mathfrak{D}_3$ при (24). В общем случае (9) и (24) позволяют вместе выразить A_{rpq} через коэффициенты уравнений (2) и (5), поэтому самостоятельная роль уравнений (I0) исчезает здесь полностью. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 6. Пусть V_3 является гиперповерхностью Дюпена класса $\mathfrak{D}_3(p,q,r)$ для которой имеет место (23) при всех перестановках p, q, r индексов I, 2, 3. Тогда эта гиперповерхность определяется в каноническом репере системой, которая состоит из уравнений (2), (5). (6), (8) и (25) - где p, q, r любая четная перестановка из I, 2, 3, в которые следует сделать подстановки (9) и (24). Эта система вполне интегрируема, рассматриваемая V_3 существует произволом постоянных.

Класс гиперповерхностей, описываемых в теореме 6, обозначим $\mathfrak{D}_3^\infty(p) \cap \mathfrak{D}_3^\infty(q) \cap \mathfrak{D}_3^\infty(r) \equiv \mathfrak{D}_3^\infty(p,q,r)$.

В нем можно различить ряд подклассов:

$$\mathfrak{D}_3^\infty(p) \cap \mathfrak{D}_3^\infty(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(r),$$

$$\mathfrak{D}_3^\infty(p) \cap \mathfrak{D}_3^\infty(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r),$$
$$\mathfrak{D}_3^\infty(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(r),$$
$$\mathfrak{D}_3^\infty(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r),$$
$$\mathfrak{D}_3^\infty(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r).$$

Особо следует выделить подкласс $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(r) \equiv$ $\equiv \bar{\mathfrak{D}}_3(p,q,r)$, который соответствует случаю $\mu_p = \mu_q = \mu_r = 1$ и который совпадает с одним подклассом конформно-евклидовых гиперповерхностей в E_4 — именно подклассом $C_3^{(3)}$ (см. [I]). Гиперповерхности **этого класса обладают изотермической** сетью из линий кривизны; в [2] они называются гиперциклидами Дюпена - Маннгейма; их строение исследовано в [3].

Введенные выше подклассы позволяют в $C_3^{(3)}$ указать еще следующий непустой подкласс $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r)$.
Что касается содержащихся в нем $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r)$ и $\bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r)$, то они оказываются пустыми. Достаточно показать это для первого, так как второй является для него предельным.

<u>Предложение 2.</u> Класс гиперповерхностей Дюпена $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap$ $\cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r)$ является пустым.

<u>Доказательство.</u> Допустим, что в классе $\mathfrak{D}_3(p,q,r)$ существует гиперповерхность V_3 подкласса $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^\infty(r)$. Тогда для нее должны иметь место равенства

$$\Gamma_{rq} = \Gamma_{qr}, \quad \Gamma_{pr} = \Gamma_{rp} = \Gamma_{qp} = \Gamma_{pq} = 0.$$

Из соответствующих формул (8) получаем, что

$$A_{rpq} + \frac{1}{2} k_p k_q = 0,$$
$$A_{qpr} + \frac{1}{2} k_p k_r = 0,$$
$$A_{rqp} + \frac{1}{2} k_p k_q = A_{qrp} + \frac{1}{2} k_r k_p.$$

Если здесь использовать соотношения (9), то легко получается равенство

$$k_p(k_q - k_r) = 0,$$

которое противоречит предположению $V_3 \in \mathfrak{D}_3(p,q,r)$. Предложение доказано.

Литература

I. Вяльяс М., Существование и классы конформно-евклидовых гиперповерхностей с тремя различными главными кривизнами в E_4. Изв. АН ЭстССР, 35, № 3 (в печати).

2. Вяльяс М.Э., Лумисте Ю.Г., Изотермические

гиперповерхности и трехмерные гиперциклиды Дюпена-Маннгейма. Матем. заметки (в печати).

3. Л у м и с т е Ю.Г., Конструкция Кэли - Каталана для изотермических гиперповерхностей Дюпена., Настоящий сборник.

4. C e c i l T. E., R y a n P. I., Focal sets taut embeddings and the cyclides of Dupin. - Math. Ann. 1978, v. 236, № 2, p. 177-190.

5. C e c i l T. E., R y a n P. I., Conformal geometry and the cyclides of Dupin. - Can. J. Math. 1980, v. 32, № 4, p. 767-782.

6. F i n z i A., Le ipersuperficie a tre dimensioni che si possono rapresentare conformente sullo spazio euclideo. - Atti ist. Veneto, 1902-1903, v. 62, p. 1049-1062.

7. L i l i e n t h a l R., Besondere Flächen. - Enz. d. Math. Wissensch., 1905, III B5, s. 269-353.

8. M i y a o k a R. Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures. - Math. Z., 1984, v. 187, № 4, p. 433-452.

9. P i n k a l l U. Dupin hypersurfaces. - Math. Ann., 1985, v. 270, № 3, p. 427-440.

10. T h o r g b e r g s s o n G. Dupin hypersurfaces. - Bull. London Math. Soc., 1983, v. 15, № 5, p. 493-498.

Поступило

15 XI 1985

DUPIN HYPERSURFACES WITH HOLONOMIC NET OF CURVATURE LINES IN E_4

M.Väljas

S u m m a r y

Dupin hypersurface is a hypersurface V_n in Euclidean space E_{n+1} which has constant multiplicities of the principal curvatures and each of latter is constant along its leaf of the curvature distribution [8,9,10].

Dupin hypersurfaces in E_3 are only spheres, planes and Dupin cyclides (i.e. hypersurfaces V_2 in E_3 whose curvature lines are circles or straight lines).

Dupin hypersurface V_n with two distinct principal curvatures of multiplicities p and $n-p$ are classified in [4,5,9].

Dupin hypersurfaces with three distinct principal curvatures were investigated in [8]. Those of them in E_4, whose planes of the curvature circles at each family have a common straight line or are parallel each other, are in [2] called Dupin-Mannghelm hypercyclide; they have the property that their nets of curvature lines are isothermal and therefore they are conformally flat (see [2]).

In this paper we prove the existence of Dupin hypersurfaces V_3 in E_4 with three distinct principal curvatures and with holonomic net of curvature lines (Theorem 1). The class of such Dupin hypersurfaces V_3 in E_4 (in general they are not conformally flat) we denote by $\mathfrak{D}_3$. It is proved for a general $V_3 \in \mathfrak{D}_3$ that it's planes of curvature circles of a given family have the fixed intersection point (Theorem 3).

In the class $\mathfrak{D}_3$ several subclasses are separated by the next characteristic properties:

$\mathfrak{D}_3(p)$ - the planes of a family of curvature cicles with radius k_p^{-1} are parallel in a fixed direction (i.e. their fixed intersection point is infinity),

$\bar{\mathfrak{D}}_3(p)$ - the planes of a family of curvature circles with radius k_p^{-1} have a fixed common straight line,

$\bar{\mathfrak{D}}_3^{\infty}(p)$ - the planes of a family of curvature circles with radius k_p^{-1} are parallel (i.e. the latter straight line is infinity).

A classification of Dupin hypersurfaces $V_3 \in \mathfrak{D}_3$ is given by means of these notations.

In particular there is proved that $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^{\infty}(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^{\infty}(r)$ is emty (Proposition 2); of course $\bar{\mathfrak{D}}_3^{\infty}(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^{\infty}(q) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3^{\infty}(r)$ is emty too. The subclass $\bar{\mathfrak{D}}_3(p) \cap \bar{\mathfrak{D}}_3(q) \cap (\bar{\mathfrak{D}}_3(r) \cup \bar{\mathfrak{D}}_3^{\infty}(r))$ is the subclass of Dupin-Mannheim hypercyclides V_3 in E_4 or the subclass of conformally flat $V_3 \in \mathfrak{D}_3$.

О ГЕОМЕТРИИ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ m НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЯХ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И С РАЗЛИЧНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Х.Кильп
Кафедра алгебры и геометрии

1. Задание квазилинейной системы $S^1_{m2[1]}$ дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками определяет расслоение многообразия независимых и зависимых переменных M_{m+2} на m-мерные слои M_m с двумерной базой M_2. База M_2 является пространством независимых переменных системы. При этом, на m-мерных слоевых многообразиях M_m задаются m-ткани и на двумерных интегральных многообразиях системы m-ткани характеристик (см. [1]).

В настоящей работе доказывается обратное утверждение. Пусть дано локально тривиальное дифференцируемое расслоение M_{m+2} с двумерной базой и с m-мерными слоевыми многообразиями и на слоевых многообразиях даны m-ткани. Пусть в этом расслоении дано дифференцируемое сечение и на нем m-ткань. Тем самым на многообразии M_{m+2} реализуется структура, эквивалентная структуре некоторой квазилинейной системы $S^1_{m2[1]}$.

2. Пусть на $(m+2)$-мерном дифференцируемом многообразии M_{m+2}, локальные координаты (x^λ, u^α) которого являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^\lambda=0$, $\omega^\alpha=0$ $(\lambda, \mu, \ldots = 1, 2;\ \alpha, \beta, \ldots = 3, 4, \ldots, m+2)$ задана квазилинейная система $S^1_{m2[1]}$ дифференциальных уравнений

$$u^\alpha_1 = h_{\alpha\beta}\,(x^\lambda, u^\gamma)\, u^\beta_2 + f^\alpha\,(x^\lambda, u^\gamma) \tag{I}$$

с различными корнями $\lambda^\alpha = \lambda^\alpha(x^\lambda, u^\gamma)$ характеристического уравнения $\det \| h_{\alpha\beta} - \lambda E \| = 0$. Преобразования, сохраняющие квазилинейность данной системы, имеют вид $'x^\lambda = {'x^\lambda}(x^\mu)$, $'u^\alpha = {'u^\alpha}(x^\lambda, u^\beta)$. Если (x^λ) - первые интегралы вполне интегрируемой системы $\omega^\lambda=0$, то допустимые преобразования задают локальное расслоение многообразия M_{m+2} на m-мерные слои M_m с двумерной базой M_2, являющейся пространством независимых переменных (x^λ). Характеристические кривые задаются теперь на интегральных многообразиях системы $S^1_{m2[1]}$ уравнениями $\omega^{2\alpha} \equiv \omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1 = 0$. Структурные уравнения многообразия M_{m+2} с заданной на нем квазилинейной системой $S^1_{m2[1]}$ имеют вид (см. [I]):

$$\omega^\alpha \wedge (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) = 0, \tag{2}$$

$$d\omega^\lambda = \omega^\lambda_\mu \wedge \omega^\mu, \tag{3}$$

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\alpha \wedge \omega^\alpha + \omega^\alpha_0 \wedge (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) + a^\alpha_{\gamma 1} \omega^\gamma \wedge \omega^1 + a^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \tag{4}$$

$$d\lambda^\alpha + \lambda^\alpha(\omega^1_1 - \omega^2_2) - (\lambda^\alpha)^2 \omega^1_2 + \omega^2_1 = \lambda^\alpha_\mu \omega^\mu + \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta, \tag{5}$$

причем

$$d(\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) = (\omega^2_2 + \lambda^\alpha \omega^1_2 - \lambda^\alpha_0 \omega^1) \wedge \omega^{2\alpha} + \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega^1.$$

Заданная на многообразии M_{m+2} квазилинейная система $S^1_{m2[1]}$ восстанавливается по последним структурным уравнениям (2), (3), (4).

Инфинитезимальные перемещения касательного репера имеют вид

$$d\bar{e}_1 = -\omega^1_1 \bar{e}_1 - \omega^2_1 \bar{e}_2 - \lambda^\beta \omega^\beta_0 \bar{e}_\beta,$$

$$d\bar{e}_2 = -\omega^1_2 \bar{e}_1 - \omega^2_2 \bar{e}_2 - \omega^\beta_0 \bar{e}_\beta,$$

$$d\bar{e}_\alpha = -\omega^\alpha_\alpha \bar{e}_\alpha.$$

На слоевых многообразиях M_m задается m-ткань, причем векторы $\bar{e}_\alpha$ являются касательными к линиям ткани. На интегральных многообразиях системы задается m-ткань характеристик, причем векторы $\bar{e}_1 - \lambda^\alpha \bar{e}_2$ являются касательными к линиям этой ткани.

3. Ставим обратную задачу. Пусть дано локально тривиальное дифференцируемое расслоение $\pi: M_{m+2} \to M_2$ с двумерной базой M_2 и с m-мерными слоевыми многообразиями M_m. Пусть на типовом слое F_m задана m-ткань. Пусть дано дифференцируемое сечение $s: M_2 \to M_{m+2}$ и на нем m-ткань. Структура расслоения многообразия M_{m+2} с m-тканями на слоевых многообразиях M_m влечет существование подмногообразия таких реперов $r^1_u = \{\bar{e}_{\lambda u}, \bar{e}_{\alpha u}\}$ в каждой точке $u \in M_{m+2}$, что векторы $\bar{e}_\alpha$ касательны к слоевым многообразиям M_m и касательны там линиям m-ткани.

Рассмотрим такие подвижные реперы многообразия M_{m+2}, что векторы $\underset{s(x)}{\bar e_\lambda} \in \underset{s(x)}{T}(s(M_2))$. Векторы, направленные по касательным к линиям m-ткани на многообразии $s(M_2)$ и инвариантные в смысле многообразия $s(M_2)$, обозначим через $\underset{s(x)}{\bar e_1} - \tilde\lambda^\alpha \underset{s(x)}{\bar e_2}$. Пусть координаты $\hat x^\lambda$ базы M_2 являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^\lambda = 0$, а координаты (x^λ, u^α) многообразия M_{m+2}, где $x^\lambda = \pi^{-1}(\hat x^\lambda)$, являются первыми интегралами вполне интегрируемой системы $\omega^\lambda = 0$, $\omega^\alpha = 0$. Тогда на M_m формы $\tilde\omega^\alpha = \omega^\alpha|_{M_m}$, $\tilde\omega^\alpha_\alpha = \omega^\alpha_\alpha|_{M_m}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\tilde\omega^\alpha = \tilde\omega^\alpha_\alpha \wedge \tilde\omega^\alpha + \tilde a^\alpha_{\beta\gamma}\, \tilde\omega^\beta \wedge \tilde\omega^\gamma.$$

На $s(M_2)$ формы $\tilde\omega^\lambda = \omega^\lambda|_{s(M_2)}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\tilde\omega^\lambda = \tilde\omega^\lambda_\mu \wedge \tilde\omega^\mu,$$

$$d(\tilde\omega^2 + \tilde\lambda^\alpha \omega^1) = \Omega \wedge (\tilde\omega^2 + \tilde\lambda^\alpha \omega^1) + \Lambda^\alpha_{01}(\tilde\omega^2 + \tilde\lambda^\alpha \tilde\omega^1) \wedge \tilde\omega^1,$$

где $\Omega = (\tilde\omega^2_2 + \tilde\lambda^\alpha \tilde\omega^1_2)$.

Так как направления $\bar e_1 - \tilde\lambda^\alpha \bar e_2$ инвариантны на $s(M_2)$, т.е.

$$d(\bar e_1 - \tilde\lambda^\alpha \bar e_2) =$$
$$= -(\tilde\omega^1_1 - \tilde\lambda^\alpha \tilde\omega^1_2)(\bar e_1 - \tilde\lambda^\alpha \bar e_2) - (d\tilde\lambda^\alpha + \tilde\lambda^\alpha(\tilde\omega^1_1 - \tilde\omega^2_2) - (\tilde\lambda^\alpha)^2 \tilde\omega^1_2 + \tilde\omega^2_1)\bar e_2,$$

то

$$d\tilde\lambda^\alpha + \tilde\lambda^\alpha(\tilde\omega^1_1 - \tilde\omega^2_2) - (\tilde\lambda^\alpha)^2 \tilde\omega^1_1 + \tilde\omega^2_1 - \tilde\lambda^\alpha_1 \tilde\omega^1 + \tilde\lambda^\alpha_0 (\tilde\omega^2 + \tilde\lambda^\alpha \omega^1).$$

В пространствах $T_u(M_{m+2})$ имеем

$$d\bar e_\lambda = -\omega^\mu_\lambda \bar e_\mu - \omega^\beta_\lambda \bar e_\beta,$$

$$d\bar e_\alpha = -\omega^\alpha_\alpha \bar e_\alpha.$$

С помощью отображения $(s\pi)^{-1} = \pi^{-1} s^{-1}$ распространим величины $\tilde\lambda^\alpha$ на все многообразие M_{m+2}, тогда

$$d\lambda^\alpha + \lambda^\alpha(\omega^1_1 - \omega^2_2) - (\lambda^\alpha)^2 \omega^1_2 + \omega^2_1 = \lambda^\alpha_1 \omega^1 + \lambda^\alpha_0 (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1),$$

при этом

$$d(\bar e_1 - \lambda^\alpha \bar e_2) =$$
$$= -(\omega^1_1 - \lambda^\alpha \omega^1_2)(\bar e_1 - \lambda^\alpha \bar e_2) - (\omega^\beta_1 - \lambda^\alpha \omega^\beta_2)\bar e_\beta.$$

Далее, линия m-ткани, касательная к векторному полю $\bar e_\alpha$ в M_m, задает локальную однопараметрическую группу преобразований $(\varphi_t)_\alpha$, которую можно рассматривать как группу преобразований многообразия M_{m+2}.

Отнесем вектор $(\bar e_1 - \lambda^\alpha \bar e_2)\, s(M_2)$ к вектору $\bar e_\alpha$ при соответствующем α и потребуем инвариантность поля $\bar e_1 - \lambda^\alpha \bar e_2$ относительно группы $(\varphi_t)_\alpha$, что равносильно равенству нулю производной Ли $\mathcal{L}_{\bar e_\alpha}(\bar e_1 - \lambda^\alpha \bar e_2)$ (см. [2]). Так как

$$\mathcal{L}_{\bar e_\alpha}(\bar e_1 - \lambda^\alpha \bar e_2) = [\bar e_\alpha, \bar e_1 - \lambda^\alpha \bar e_2] = -(\omega^\alpha{}_1 + \lambda^\alpha \omega^\alpha{}_2)\, \bar e_\alpha,$$

то $\omega^\alpha{}_1 = \lambda^\alpha \omega^\alpha{}_2$, $\alpha = 3, 4, \ldots, m+2$.

Тем самым получены структурные уравнения

$$\begin{aligned} d\omega^\lambda &= \omega^\lambda{}_\mu \wedge \omega^\mu, \\ d\omega^\alpha &= \omega^\alpha{}_\alpha \wedge \omega^\alpha + \omega^\alpha{}_2 \wedge (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) + \\ &\quad + a^\alpha{}_{\gamma 1}\, \omega^\gamma \wedge \omega^1 + a^\alpha{}_{\beta\gamma}\, \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \\ d\lambda^\alpha &= \lambda^\alpha (\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) - (\lambda^\alpha)^2 \omega^1{}_2 = \lambda^\alpha{}_\mu\, \omega^\mu \end{aligned} \tag{6}$$

(сравни с формами (3), (4), (5)).

4. На многообразии M_{m+2} определяется поле 2-мерных плоскостей $u \to \Gamma_u \in T_u(M_{m+2})$, определяемых в каждой точке u свободным базисом

$$\bar E_\lambda = \bar e_\lambda + \Gamma^\beta{}_\lambda \bar e_\beta$$

и характеризуемое уравнениями

$$d\Gamma^\alpha_\lambda - \Gamma^\alpha_\lambda \omega^\alpha_\alpha + \Gamma^\alpha_\mu \omega^\mu_\lambda - \omega^\alpha_\lambda = \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \omega^\mu + \Gamma^\alpha_{\lambda\gamma} \omega^\gamma.$$

Здесь

$$\begin{aligned} d\Gamma^\alpha_1 - \Gamma^\alpha_1 \omega^\alpha_\alpha + \Gamma^\alpha_1 \omega^1_1 + \Gamma^\alpha_2 \omega^2_1 - \lambda^\alpha \omega^\alpha_2 &= \Gamma^\alpha_{1\mu} \omega^\mu + \Gamma^\alpha_{1\gamma} \omega^\gamma, \\ d\Gamma^\alpha_2 - \Gamma^\alpha_2 \omega^\alpha_\alpha + \Gamma^\alpha_1 \omega^1_2 + \Gamma^\alpha_2 \omega^2_2 - \omega^\alpha_2 &= \Gamma^\alpha_{1\mu} \omega^\mu + \Gamma^\alpha_{2\gamma} \omega^\gamma. \end{aligned}$$

Найдем

$$\begin{aligned} d(\lambda^\alpha \Gamma^\alpha_2) &= \lambda^\alpha \Gamma^\alpha_2 \omega^\alpha_\alpha - \lambda^\alpha \Gamma^\alpha_2 \omega^1_1 - \Gamma^\alpha_2 \omega^2_1 + \lambda^\alpha(\lambda^\alpha \Gamma^\alpha_2 - \Gamma^\alpha_1)\omega^1_2 + \\ &\quad + \lambda^\alpha \omega^\alpha_2 + {}'\Gamma^\alpha_{o\mu} \omega^\mu + {}'\Gamma^\alpha_{o\gamma} \omega^\gamma. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что не ограничивая общности, можно взять $\Gamma^\alpha_1 = \lambda^\alpha \Gamma^\alpha_2$, т.е. m-параметрическое семейство 2-мерных плоскостей Γ_u, аннулирует систему $\omega^\alpha = \Gamma^\alpha_2(\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1)$, или, что то же самое,

$$\omega^\alpha \wedge (\omega^2 + \lambda^\alpha \omega^1) = 0$$

(сравни с формулами (2)). При $\Gamma^\alpha_\lambda = 0$ получим плоскости $T_u(s(M_2))$.

В результате выделилось подмногообразие реперов, реализующее на многообразии M_{m+2} структуру, эквивалентную структуре квазилинейной системы $S^1_{m\ell[1]}$ с различными характеристиками, причем характеристические корни λ^α являются лишь функциями независимых переменных (см. формулы (5)).

Тем самым доказана

Теорема. Пусть дано $(m+\ell)$-мерное локально тривиальное дифференцируемое расслоение $M_{m+\ell}$ с двумерной базой и с m-мерными слоевыми многообразиями. Пусть на слоевых многообразиях даны m-ткани. Пусть в данном расслоении дано дифференцируемое сечение и на нем m-ткань. Тогда на многообразии $M_{m+\ell}$ реализуется структура, эквивалентная структуре квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с m неизвестными функциями двумя независимыми переменными и с различными характеристиками, характеристические корни которой являются функциями лишь независимых переменных.

Литература

1. Кильп Х. О., Квазилинейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при m неизвестных функциях двух независимых переменных и с несовпадающими характеристиками (Геометрическая теория). Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 63-85.
2. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Проблемы геометрии. М., ВИНИТИ АН СССР, 1979, 9, 5-216.

Поступило
25 XII 1985

ON GEOMETRY OF SOME SYSTEMS OF THE FIRST ORDER QUASI-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES m UNKNOWN FUNCTIONS AND DIFFERENT CHARACTERISTICS

H.Kilp

S u m m a r y

The geometric theory of systems, mentioned in the heading, by the method of E.Cartan was founded by the author in her paper [1]. The geometrical structure of manifold of independent and dependent variables with such system on it was described in the paper [1].

In the present paper some inverse problem is resolved.

КОНСТРУКЦИЯ КЭЛИ-КАТАЛАНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ ДЮПЕНА

Ю.Лумисте
Кафедра алгебры и геометрии

Введение

Гиперповерхность M_n в евклидовом пространстве E_{n+1} называется гиперповерхностью Дюпена (см. [11 , 12 , 13]), если кратности ее главных кривизн постоянны на M_n, а сами главные кривизны постоянны вдоль интегральных подмногообразий соответствующих им главных распределений.

В настоящей статье рассматриваются следующие классы гиперповерхностей Дюпена: 1) изотермические и 2) с кратностями $n-1$ и 1 главных кривизн, отличных от нуля. Выясняется их геометрическое строение в терминах евклидовой геометрии в E_{n+1}.

Гиперповерхность M_n в E_{n+1} называется изотермической, если M_n можно покрыть атласом, в каждой карте которого первая и вторая фундаментальные формы имеют, соответственно, виды

$$ds^2 = e^{2\sigma}(du_1^2 + \ldots + du_n^2), \qquad (0.1)$$
$$b_{ij}du^i du^j = \sum \lambda_i du_i^2,$$

где σ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – функции от точки $X \in M_n$. Все изотермические гиперповерхности M_n в E_{n+1} при $n \geq 3$ описаны в [3]. Такая гиперповерхность является либо 1) сферическим веером: гиперповерхностью, составленной из $(n-1)$-сфер, построенных на полярных радиусах некоторой плоской линии, как на диаметрах, причем в гиперплоскостях, ортогональных к 2-плоскости этой линии (направляющей линии), либо 2) гиперцилиндром с $(n-1)$-мерными плоскими образующими, либо 3) гиперциклидой Дюпена – Маннгейма в E_4 : гиперповерхностью Дюпена в E_4 с тремя различными главными кривизнами, отличными от нуля, у которой плоскости линий кривизны (окружностей) составляют три пучка, либо 4) гиперконусом Клиффорда в E_4 : совокупностью прямых в E_4 , проходящих через фиксированную точку (вершину) и составляющих с проходящей через нее фиксированной плоскостью постоянный угол.

Гиперциклида Дюпена – Маннгейма и гиперконус Клиффорда в E_4 являются гиперповерхностями Дюпена, а среди остальных изотермических гиперповерхностей в E_{n+1} при $n \geqslant 3$ гиперповерхностями Дюпена являются сферические вееры с направляющей окружностью (см. [3], Предложение 2) и круговые конусы, и только они.

Геометрическое строение последних двух ясно из их конструкции; они имеют кратности $n-1$ и 1 главных кривизн. Ясно также геометрическое строение гиперконуса Клиффорда в E_4 : его прямолинейные образующие пересекают гиперсферу $S_3 \subset E_4$ с центром в вершине в точках поверхности Клиффорда. Последняя при стереографической проекции отображается в циклиду Дюпена в E_3, для которой известна конструкция Кэли-Каталана (см. [10], стр. 292), позволяющая ее легко строить из окружностей, являющихся ее линиями кривизны.

В настоящей статье в п. 2 показывается, как эта конструкция может быть обобщена для гиперциклиды Дюпена - Маннгейма в E_4 (теорема 1). В качестве подготовительной работы в п. 1 дается новое обоснование классической конструкции Кэли-Каталана; кроме того доказывается изотермичность циклиды Дюпена, установленная еще Дарбу [7], а также классическая теорема Маннгейма ([10], стр. 291).

Заметим, что конструкция изотермической ($1, n-1$) -циклиды Дюпена в виде сферического веера с направляющей окружностью является аналогом конструкции классической Кэли-Каталана.

Этими конструкциями выяснена геометрическая сущность основных результатов аналитических исследований, проведенных в [8, 9], где найдены решения уравнений Гаусса и Петерсона - Кодацци для коэффициентов правых частей в (0.1) и (0.2). Один класс решений (Case 4 в [9]) соответствует нашей гиперциклиде Дюпена - Маннгейма и покажет существование конформно плоской гиперповерхности в E_4 с тремя различными и отличными от нуля главными кривизнами. (Аналогичный пример с $k_3 = 0$ дал ранее Вербицкий [1]; см. также [2], где аналитически найдены все конформно плоские гиперповерхности в E_4 с различными и отличными от нуля главными кривизнами и где наиболее простой класс состоит из гиперциклид Дюпена - Маннгейма.)

В § 2 настоящей статьи дано естественное обобщение конструкции Кэли-Каталана для общих ($1, n-1$) -циклид Дюпена (теорема 3). Предварительно (теорема 2) доказано, что для них справедливо естественное обобщение классической теоремы Маннгейма.

§ 1. Гиперциклиды Дюпена - Маннгейма в E_4

1. Целесообразно начать изложение с классических циклид Дюпена в E_3 с привлечением современного аппарата. Пусть у поверхности в E_3 главные кривизны различны, отличны от нуля и постоянны вдоль соответствующих им линий кривизны. В каноническом репере тогда (см. напр. [4], стр. 133-134)

$$\omega^3=0\,,\ \omega_i^3=k_i\omega^i \qquad \text{(По } i \text{ не суммировать!)}, \tag{1.1}$$

$$dk_i=0\,(\mathrm{mod}\,\omega^j),\ k_1\neq k_2,\ k_1k_2\neq 0. \tag{1.2}$$

(Здесь и в дальнейшем в п. 1 либо $i=1, j=2$, либо $i=2, j=1$). Дифференциальным продолжением из (1.1) получаются

$$\omega_i^j=l_j\omega^i-l_i\omega^j\,,\ dk_i=a_i\omega^i+l_j(k_i-k_j)\omega^j, \tag{1.3}$$

а из (1.2) следует, что $a_i=0$. Дифференциальное продолжение уравнений (1.3) при $a_i=0$ приводит к

$$dl_i=\tfrac{1}{2}[l_1^2+l_2^2+k_ik_j+(k_i-k_j)k_3]\omega^i, \tag{1.4}$$

где k_3 — некоторый новый инвариант поверхности, для которого из (1.4) в свою очередь получается

$$dk_3=l_i(k_3-k_i)\omega^i+l_j(k_3-k_j)\omega^j \tag{1.5}$$

Система из (1.1), (1.3) при $a_i=0$, (1.4) и (1.5) вполне интегрируема и определяет рассматриваемую поверхность с произволом 9 постоянных.

Эта поверхность изотермическая. В самом деле, из указанной системы следует, что $d(l_1\omega^1+l_2\omega^2)=0$, так что, по крайней мере локально, $l_1\omega^1+l_2\omega^2=d\sigma$. Поэтому $d(e^{\sigma}\omega^i)=0$ и существуют такие локальные параметры u_i , что $\omega^i=e^{-\sigma}du_i$ и $ds^2=e^{-2\sigma}(du_1^2+du_2^2)$, причем u_i-линиями являются линии кривизны.

Из (1.3) и (1.4) следует, что k_i и l_i зависят только от одного параметра: $k_i=k_i(u_j)$, $l_i=l_i(u_i)$
Так как при $u_j=\mathrm{const}$, т.е. при $\omega^j=0$ имеем
$dx=e_i\omega^i\,,\ de_i=(l_je_j+k_ie_3)\omega^i\,,\ d(l_je_j+k_ie_3)=-(l_j^2+k_i^2)e_i\omega^i$,
где l_j и k_i постоянны, то каждая линия кривизны является окружностью с радиусом $(l_j^2+k_i^2)^{-1/2}$ и центром в точке C_i с радиусом вектором $c_i=x+(l_j^2+k_i^2)^{-1}(l_je_j+k_ie_3)$. Вдоль каждой окружности кривизны точка F_i с радиусом-вектором $f_i=x+k_i^{-1}e_3$ неподвижна, так как $df_i=0\,(\mathrm{mod}\,\omega^j)$, причем на этой окружности происходит касание поверхности со сферой с центром F_i и радиусом k_i^{-1} . Следовательно, рассматриваемая поверхность является дважды каналовой поверхностью, называемой циклидой Дюпена.

У циклиды Дюпена с $l_1 l_2 \neq 0$ плоскости окружностей кривизны одного семейства проходят через фиксированную прямую μ_i, которая идет через точку Z_i с радиусом-вектором $z_i = x + l_i^{-1} e_i$ в направлении вектора

$$m_i = [l_i^2 - l_j^2 - k_1 k_2 - (k_i - k_j) k_3] e_i + 2 l_i (l_j e_j + k_i e_3),$$

так как $dz_i = \frac{1}{2} l_i^{-2} m_i \omega^i$, $dm_i = 2 k_i l_i (l_1 \omega^1 + l_2 \omega^2) m_i$ (теорема Маннгейма). Здесь $m_1 \perp m_2$, поэтому направления прямых μ_1 и μ_2, которые мы будем называть прямыми Маннгейма, перпендикулярны. Так как $(c_i - z_j) m_i = 0$, то центры окружностей кривизны лежат в плоскости ν_i, проходящей через μ_j и ортогональной к μ_i, причем плоскости этих окружностей проходят через μ_i. Следовательно, каждая такая окружность, а вместе с тем и циклида Дюпена, симметрична относительно ν_i.

Окружности кривизны, лежащие на плоскостях симметрии ν_1 и ν_2, называются главными окружностями. Через каждую точку X_0 циклиды, лежащую на оси симметрии $\nu_1 \cap \nu_2$, проходят две главных окружности, радиусами которых являются обратные величины к значениям главных кривизн в этой точке. Поэтому в каждой плоскости ν_i лежат две главных окружности с центрами на $\nu_1 \cap \nu_2$, причем на этих окружностях $k_i^{-1} = (l_i^2 + k_i^2)^{-1/2}$, т.е. $l_i = 0$.

Концы общего перпендикуляра прямых μ_1 и μ_2 называются главными точками O_1 и O_2 Здесь O_i имеет радиус-вектор

$$o_i = x + 2(m_i^2)^{-1} \{ l_i [l_1^2 + l_2^2 + k_i (2k_i - k_j) + (k_j - k_i) k_3] e_i + \\ + [l_1^2 + l_2^2 + k_1 k_2 + (k_i - k_j) k_3](l_j e_j + k_i e_3) \}.$$

Если в качестве X взять ранее упомянутую точку X_0, в которой l_1 и l_2 обращаются в нуль, то эта формула упрощается:

$$o_i = x_0 + 2k_i [k_1 k_2 + (k_i - k_j) k_3]^{-1}.$$

Плоскости окружностей кривизны, проходящие через μ_i, пересекаются с ν_i по прямым, проходящим через O_i. Сами эти окружности кривизны пересекаются с ν_i в точках главных окружностей на ν_i. Отсюда следует, что O_i является центром подобия этих главных окружностей. Мы приходим к следующей конструкции Кэли - Каталана: циклида Дюпена получается, если взять на плоскости две окружности, провести через их центр подобия прямые, их пересекающие, выбрать пары точек пересечения так, что касательные к окружностям в точках одной пары непараллельны и на отрезках между точками каждой пары, как на диаметрах, строить окружности в плоскостях, перпендикулярных к первоначальной плоскости. Все построенные окружности образуют циклиду Дюпена.

2. Переходим к гиперциклиде Дюпена - Маннгейма в E_4. В [3] выяснено, что она определяется вполне интегрируемой системой

$$\omega^4=0,\ \omega_p^4=k_p\omega^p,\ \omega_p^q=\ell_q\omega^p-\ell_p\omega^q, \tag{2.1}$$

$$dk_p=\ell_q(k_p-k_q)\omega^q+\ell_r(k_p-k_r)\omega^r, \tag{2.2}$$

$$d\ell_p=\frac{1}{2}\left[\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2+k_p(k_q+k_r)-k_qk_r\right]\omega^p, \tag{2.3}$$

где p,q,r является произвольной перестановкой из 1, 2, 3, а k_1, k_2 и k_3 — различные и отличные от нуля главные кривизны. Гиперциклиды Дюпена - Маннгейма составляют простейший класс конформно плоских гиперповерхностей в E_4, главные кривизны которых обладают этими свойствами (см. [2]), причем единственный класс изотермических гиперповерхностей в E_4 с этими свойствами (см. [3]).

Аналогично, как в п. 1, устанавливается, что линия кривизны в направлении вектора e_p является окружностью, так как при $\omega^q=\omega^r=0$ имеем

$$dx=e_p\omega^p,\ de_p=(\ell_qe_q+\ell_re_r+k_pe_4)\omega^p,$$

$$d(\ell_qe_q+\ell_re_r+k_pe_4)=-(\ell_q^2+\ell_r^2+k_p^2)e_p\omega^p.$$

Центр этой окружности находится в точке C_p с радиусом-вектором

$$c_p=x+(\ell_q^2+\ell_r^2+k_p^2)^{-1}(\ell_qe_q+\ell_re_r+k_pe_4),$$

причем радиусом окружности является $(\ell_q^2+\ell_r^2+k_p^2)^{-1/2}$.

Вдоль каждой окружности кривизны точка F_p с радиусом-вектором $f_p=x+k_p^{-1}e_4$ неподвижна, так как $df_p=0\ (\mathrm{mod}\ \omega^q,\omega^r)$. Поэтому эта окружность является линией касания гиперциклиды Дюпена - Маннгейма со сферой с центром F_p и радиусом k_p^{-1}. Следовательно, мы имеем дело с трижды 2-каналовой гиперповерхностью (т.е. с огибающей трех различных 2-параметрических семейств гиперсфер одновременно).

Ниже мы предполагаем, что ни один из ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 не обращается в нуль тождественно и говорим в этом случае о гиперциклиде Дюпена - Маннгейма общего типа (случай, когда, например, $\ell_3=0$ получается предельным переходом).

Плоскости окружностей кривизны одного семейства гиперциклиды Дюпена - Маннгейма общего типа проходят через фиксированную прямую μ_p, которая идет через точку Z_p с радиусом-вектором $z_p=x+\ell_p^{-1}e_p$ в направлении вектора

$$m_p=\left[\ell_p^2-\ell_q^2-\ell_r^2+k_qk_r-k_p(k_q+k_r)\right]e_p+2\ell_p(\ell_qe_q+\ell_re_r+k_pe_4),$$

так как $dz_p=\frac{1}{2}\ell_p^{-2}m_p\omega^p,\ dm_p=2k_p\ell_p(\ell_p\omega^p+\ell_q\omega^q+\ell_r\omega^r)m_p$.

Непосредственно проверяется что $m_p\perp m_q$, т.е. на-

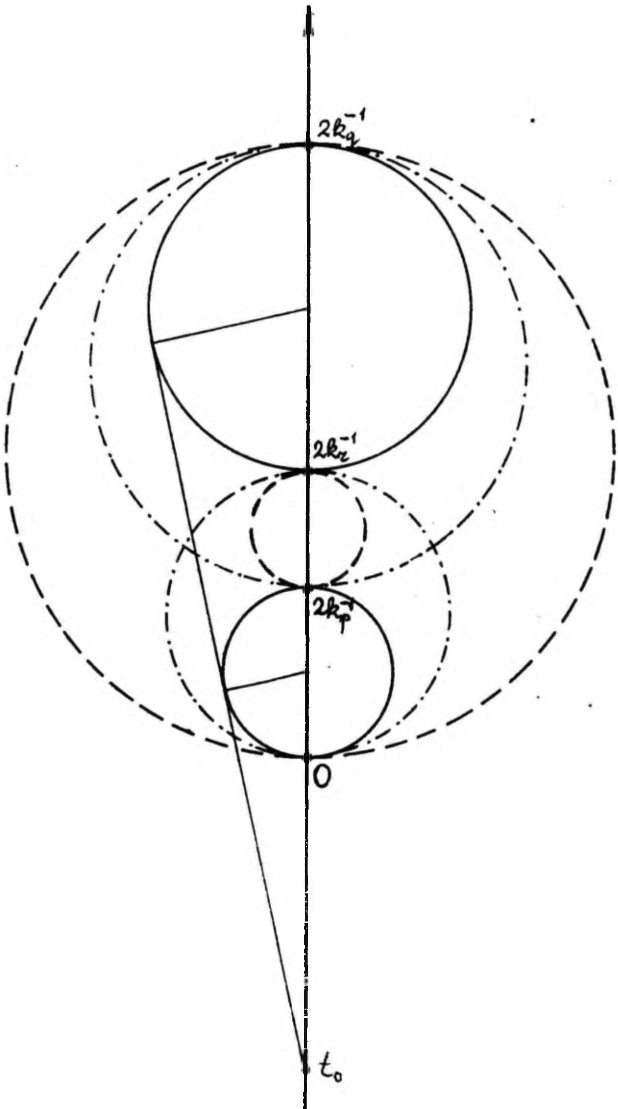

Рис. I

правления трех прямых μ_1, μ_2, μ_3 попарно ортогональны. Для радиусов-векторов $z_q = x + l_q^{-1} e_q$ и $z_r = x + l_r^{-1} e_r$ точек Z_q и Z_r прямых μ_q и μ_r имеем

$$(z_q - z_r) m_p = 0.$$

Поэтому существуют три гиперплоскости ν_1, ν_2, ν_3, которые содержат две из этих прямых и ортогональны к третьей; нумеруем их так, что ν_p содержит μ_q и μ_r и ортогональна к μ_p.

Центр C_p окружности кривизны лежит в гиперплоскости ν_p, так как $(c_p - z_q) m_p = 0$. Кроме того, плоскость этой окружности проходит через прямую μ_p, ортогональную к ν_p. Следовательно, каждая из этих окружностей кривизны, а вместе с ними и гиперциклида Дюпена - Маннгейма, симметрична относительно гиперплоскости ν_p. Гиперплоскости ν_1, ν_2 и ν_3 являются, таким образом, гиперплоскостями симметрии рассматриваемой гиперциклиды, которая поэтому симметрична также относительно их пересечений $\nu_1 \cap \nu_2$, $\nu_2 \cap \nu_3$, $\nu_3 \cap \nu_1$ и $\nu_1 \cap \nu_2 \cap \nu_3$. Последнее из них есть прямая, являющаяся общим перпендикуляром прямых μ_1, μ_2 и μ_3.

Сечение рассматриваемой гиперциклиды Дюпена - Маннгейма **гиперплоскостью** симметрии ν_r называется главным сечением. Оно оказывается циклидой Дюпена в ν_r. Действительно, из симметричности гиперциклиды относительно ν_r следует, что ее нормаль в любой точке X_0 сечения лежит в ν_r, т.е. ортогональна к m_r. Следовательно, во всех точках X_0 имеем $m_r e_4 = 0$, что равносильно $l_r = 0$. Вдоль сечения, таким образом, $dl_r = 0$, а это равносильно $\omega^r = 0$. Сечение является той интегральной поверхностью пфаффова уравнения $\omega^r = 0$ на гиперциклиде, на которой $l_r = 0$. Если учесть эти равенства в уравнениях (2.1), (2.2) и (2.3), то получается система (1.1), (1.3) (при $a_i = 0$), (1.4) и (1.5), определяющая циклиду Дюпена, с той только разницей, что вместо i, j и 3 теперь p, q и r, а вместо e_3 теперь e_4.

Три циклиды Дюпена, являющиеся главными сечениями, имеют общую ось симметрии $\nu_1 \cap \nu_2 \cap \nu_3$. Через точку X_0 пересечения этой оси с гиперциклидой проходят три окружности кривизны гиперциклиды с радиусами k_p^{-1}, k_q^{-1} и k_r^{-1}, которые попарно лежат на одном главном сечении. Если вращением в E_4 вокруг оси $\nu_1 \cap \nu_2 \cap \nu_3$ привести 2-плоскости этих окружностей в совпадение, то получается картина, представленная на рис. 1, где окружности одной плоскости проведены одинаковой линией, а точки на оси $\{X : x = x_0 + t e_4\}$ указаны значением параметра t.

Точки пересечения оси с прямыми μ_p, μ_q и μ_r определяются при этом значениями параметра

$$\frac{2k_p}{k_p(k_q+k_r)-k_qk_r}, \quad \frac{2k_q}{k_q(k_p+k_r)-k_pk_r}, \quad \frac{2k_r}{k_r(k_p+k_q)-k_pk_q}. \qquad (2.4)$$

Это нетрудно установить, если найти сперва выражения радиусов-векторов этих точек в произвольной точке X, используя задание, например, μ_p радиусом-вектором ее точки z_p и направляющим вектором m_p, а затем перейти к точке X_0 на оси, положив $\ell_p = \ell_q = \ell_r = 0$.

Определим, с другой стороны, центр подобия окружностей на одной плоскости. Для нахождения его абсциссы t_0 получается уравнение (см. рис. 1)

$$\frac{-t_0 + k_p^{-1}}{k_p^{-1}} = \frac{-t_0 + k_q^{-1} + k_r^{-1}}{k_q^{-1} - k_r^{-1}},$$

решением которого является среднее из значений (2.4).

Получается следующее обобщение конструкции Кэли - Каталана.

Теорема 1. Гиперциклида Дюпена - Маннгейма общего типа получается, если 1) взять в некоторой гиперплоскости ν циклиду Дюпена, 2) найти те центры подобия окружностей, являющихся ее главными сечениями, через которые проходят ее прямые Маннгейма, 3) провести через третий центр подобия всевозможные прямые, пересекающие ее, 4) выбрать пары точек пересечения с непараллельными ее касательными плоскостями и 5) на отрезках между точками каждой пары, как на диаметрах, строить окружности в плоскостях, ортогональных к ν. Все эти окружности образуют гиперциклиду Дюпена - Маннгейма.

Таким образом, гиперциклида Дюпена - Маннгейма определяется однозначно любым из трех своих главных сечений, являющихся циклидами Дюпена. При этом для каждой циклиды Дюпена в некоторой гиперплоскости пространства E_4 существует точно одна гиперциклида Дюпена-Маннгейма в E_4, для которой она является одним из главных сечений. Аналитически это следует из того, что по системе (1.1), (1.3) (при $a_i = 0$), (1.4) и (1.5) однозначно восстанавливается система (2.1), (2.2) и (2.3).

Другим следствием проведенных рассуждений является то, что циклиды Дюпена объединяются естественным образом в тройки таких, которые являются главными сечениями одной гиперциклиды Дюпена - Маннгейма. В частности выяснено геометрическое значение инварианта k_3 в уравнении (1.4): см. рис. 1.

§ 2. Геометрия $(n-1,1)$-гиперповерхности Дюпена в E_{n+1}

3. Гиперповерхность Дюпена в E_{n+1} с кратностями $n-1$ и 1 главных кривизн исследована в [5, 6] под названием $(n-1,1)$-циклиды Дюпена. Мы будем называть ее $(n-1,1)$-гиперповерхностью Дюпена. Ниже изучение ее геометрического строения доводится до обобщенной конструкции Кэли - Каталана для них.

Пусть гиперповерхность в E_{n+1} имеет в каждой точке две различные и отличные от нуля главные кривизны k и k_n с кратностями, соответственно, $n-1$ и 1, которые постоянны вдоль интегральных подмногообразий соответствующих им главных распределений. В каноническом репере тогда

$$\omega^{n+1}=0,\ \omega_i^{n+1}=k\omega^i,\ \omega_n^{n+1}=k_n\omega^n, \qquad (3.1)$$

где $i=1,\dots,n-1$, а $k\neq k_n$ и $kk_n\neq 0$. Отсюда после дифференциального продолжения при $n>2$ получаются

$$\omega_i^n=\ell_n\omega^i-\ell_i\omega^n,\ dk=(k-k_n)\ell_n\omega^n,\ dk_n=(k_n-k)\ell_i\omega^i+a_n\omega^n, \qquad (3.2)$$

и так как у гиперповерхности Дюпена $dk_n=0\ (\mathrm{mod}\ \omega^1,\dots,\omega^{n-1})$, то здесь $a_n=0$.

Следующее дифференциальное продолжение приводит теперь к уравнениям

$$d\ell_i=\ell_j(\omega_i^j+\ell_i\omega^j)+(\ell_n^2+kk_n-h)\omega^i, \qquad (3.3)$$

$$d\ell_n=h\omega^n; \qquad (3.4)$$

из них аналогично следует, что

$$dh=h(\ell_i\omega^i)+(3h-\sum\ell_i^2-\ell_n^2-k_n^2)\ell_n\omega^n, \qquad (3.5)$$

а внешнее дифференцирование последнего уравнения дает тождество. Следовательно, $(n-1,1)$-гиперповерхность Дюпена в E_{n+1} определяется вполне интегрируемой системой (3.1), (3.2) при $a_n=0$, (3.3), (3.4) и (3.5), т.е. с произволом $3(n+1)$ постоянных.

Заметим, что при $n=2$ отсюда получается система Пфаффа для классической циклиды Дюпена (см. § 1, п. 1), если обозначить $k=k_1$ и вместо h ввести k_3 формулой

$$h=\tfrac{1}{2}[\ell_1^2+\ell_2^2+k_1k_2+(k_2-k_1)k_3].$$

Уравнение $\omega^n=0$ и система $\omega^i=0$ определяют на $(n-1,1)$-гиперповерхности Дюпена главные распределения, и для их интегральных подмногообразий, соответственно,

$$dx=e_i\omega^i,\ \ de_i=e_j\omega_i^j+(\ell_ne_n+ke_{n+1})\omega^i,$$

$$d(\ell_ne_n+ke_{n+1})=-(\ell_n^2+k^2)e_i\omega^i$$

и

$$dx = e_n\omega^n, \quad de_n = (\Sigma l_i e_i + k_n e_{n+1})\omega^n,$$
$$d(\Sigma l_i e_i + k_n e_{n+1}) = -(\Sigma l_i^2 + k_n^2)e_n\omega^n.$$
Отсюда видно, что при $kk_n \neq 0$ этими интегральными подмногообразиями являются, соответственно, $(n-1)$-сфера и окружность. Центр $(n-1)$-сферы находится в точке C с радиусом-вектором
$$c = x + (l_n^2 + k^2)^{-1}(l_n e_n + ke_{n+1}),$$
ее радиусом является $(l_n^2 + k^2)^{-1/2}$. Центр окружности находится в точке C_n с радиусом-вектором
$$c_n = x + (\Sigma l_i^2 + k_n^2)^{-1}(\Sigma l_i e_i + k_n e_{n+1}),$$
ее радиусом является $(\Sigma l_i^2 + k_n^2)^{-1/2}$.

Вдоль $(n-1)$-сферы точка F с радиусом-вектором $f = x + k^{-1}e_{n+1}$ **неподвижна и k постоянно,** поэтому вдоль нее происходит касание $(n-1, 1)$-гиперповерхности Дюпена с гиперсферой с центром F и радиусом k^{-1}. Аналогично, вдоль окружности точка F_n с радиусом-вектором $f_n = x + k_n^{-1}e_{n+1}$ неподвижна и k_n постоянна, поэтому вдоль нее происходит касание рассматриваемой гиперповерхности Дюпена с гиперсферой с центром F_n и радиусом k_n^{-1}. Таким образом, эта гиперповерхность является одновременно 1-каналовой и $(n-1)$-каналовой.

Для нее справедлива следующая обобщенная теорема Маннгейма.

Теорема 2. У $(n-1,1)$-гиперповерхности Дюпена в E_{n+1} гиперплоскости ее $(n-1)$-сфер кривизны имеют общую $(n-1)$-плоскость или параллельны, а 2-плоскости ее окружностей кривизны имеют общую прямую или параллельны.

Доказательство. Характеристика семейства гиперплоскостей $(n-1)$-сфер кривизны состоит из точек Y, для радиусов-векторов $y = x + y^i e_i + y^n(l_n e_n + ke_{n+1})$ которых dy принадлежит этой же гиперплоскости. Это приводит к уравнению
$$1 - y^i l_i + y^n(h - l_n^2 - kk_n) = 0.$$

Если не все коэффициенты при $y^1, \ldots, y^n$ равны нулю, то определяется $(n-1)$-плоскость, проходящая через точки с радиусами-векторами
$$y_\kappa = x + l_\kappa^{-1}e_\kappa; \; \kappa = 1, \ldots, n-1; \; y_n = x - (h - l_n^2 - kk_n)^{-1}(l_n e_n + ke_{n+1}).$$
Здесь предполагается, что векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ в касательной $(n-1)$-плоскости $(n-1)$-сферы кривизны выбраны так, что все $l_1, \ldots, l_{n-1}$ отличны от нуля. Нормальным вектором характеристической $(n-1)$-плоскости является
$$n = -l_i e_i + (h - l_n^2 - kk_n)(l_n^2 + k^2)^{-1}(l_n e_n + ke_{n+1}).$$
Эта $(n-1)$-плоскость неподвижна, так как $dy_\kappa \cdot n = 0$,

$dy_n \cdot n = 0$, как показывают несложные вычисления.

Если $l_1 = \ldots = l_{n-1} = h - l_n^2 - kk_n = 0$, то, как нетрудно показать

$$de_i = e_j\omega_i^j + (l_n e_n + k e_{n+1})\omega^i,$$

$$d(l_n e_n + k e_{n+1}) = -(l_n^2 + k^2)e_i\omega^i + (l_n e_n + k e_{n+1})l_n\omega^n,$$

т.е. гиперплоскости $(n-1)$-сфер кривизны параллельны.

Аналогично, 2-плоскость окружности кривизны, проходящая через точку X с направляющими векторами e_n и $\sum l_i e_i + k_n e_{n+1}$ при $l_n \neq 0$ содержит неподвижную прямую, проходящую через точку Z_n с радиусом-вектором $z_n = x + l_n^{-1} e_n$ в направлении вектора

$$m_n = (l_n^2 - h)e_n + l_n(\sum l_i e_i + k_n e_{n+1});$$

здесь $dz_n = l_n^{-2} m_n \omega^n$, $dm_n = m_n(l_i\omega^i + l_n\omega^n)$ при $l_n = 0$ аналогичные вышеприведенным вычисления покажут, что все 2-плоскости окружностей кривизны параллельны. Теорема доказана.

На случай $(n-1,1)$-гиперциклид Дюпена общего типа, т.е. с непараллельными гиперплоскостями $(n-1)$-сфер кривизны и с непараллельными 2-плоскостями окружностей кривизны, обобщается естественным образом конструкция Кэли - Каталана.

Теорема 3. Чтобы получить $(n-1,1)$-гиперповерхность Дюпена общего типа в E_{n+1} следует в некоторой 2-плоскости взять две окружности, провести через их центр подобия прямые, их пересекающие, выбрать пары точек пересечения так, что касательные к окружностям в точках одной пары непараллельны и на отрезках между точками каждой пары, как на диаметрах, строить $(n-1)$-сферы в гиперплоскостях, перпендикулярных к первоначальной 2-плоскости. Все построенные таким образом $(n-1)$-сферы образуют $(n-1,1)$-гиперциклиду Дюпена.

Доказательство. Общая $(n-1)$-плоскость μ всех гиперплоскостей $(n-1)$-сфер кривизны имеет направляющие векторы

$$m_k = (h - l_n^2 - kk_n)e_k + l_n(l_n e_n + k e_{n+1}).$$

Так как $m_k \cdot m_n = 0$, то $(n-1)$-направление этой $(n-1)$-плоскости ортогонально к направлению общей прямой μ_n 2-плоскостей окружностей кривизны. Центр $(n-1)$-сферы кривизны находится в точке C с радиусом-вектором

$$c = x + (l_n^2 + k^2)^{-1}(l_n e_n + k e_{n+1}),$$

и поэтому центры всех $(n-1)$-сфер кривизны лежат на 2-плоскости ν_n, проходящей через μ_n ортогонально к μ, так как $(c - z_n)\cdot m_k = 0$. Аналогично, центры C_n всех окружностей кривизны, имеющие радиусы-векторы

$$c_n = x + (\sum l_i^2 + k_n^2)^{-1}(\sum l_i e_i + k_n e_{n+1}),$$

лежат на гиперплоскости ν, проходящей через μ ортогонально к μ_n , так как $(c_n - y_\kappa)\cdot m_n = 0$. Поэтому $(n-1,1)$-гиперповерхность Дюпена симметрична относительно ν_n и ν , а следовательно и относительно их пересечения $\nu_n \cap \nu$, которое является ее осью симметрии. Сечения гиперциклиды ее 2- и $(n-1)$ -плоскостями симметрии будем называть главными сечениями, а ее осью симметрии $\nu_n \cap \nu$ — главными точками. Через каждую главную точку проходит окружность кривизны, лежащая в ν_n , и $(n-1)$-сфера кривизны, лежащая в ν , причем в данной главной точке их диаметры на оси имеют неравные длины $2k_n^{-1}$ и $2k^{-1}$. Другие концы этих диаметров являются также главными, поэтому главных точек на оси имеется, вообще говоря, четыре, и главные сечения представляют собой пару окружностей на ν_n и пару $(n-1)$-сфер на ν.

Если взять подходящую через ось $\nu_n \cap \nu$ произвольную 2-плоскость $\nu_n^{\perp}$ перпендикулярную к ν_n , и перечень $(n-1,1)$-гиперповерхность Дюпена 3-плоскостью, натянутой на ν_n и $\nu_n^{\perp}$, то в качестве пересечения получается циклида Дюпена, которая может быть получена конструкцией Кэли - Каталана на базе окружностей главного сечения на ν_n. Остается на окружностях этой конструкции, перпендикулярных к ν_n , как на больших окружностях, строить $(n-1)$-сферы в гиперплоскостях, перпендикулярных к этой 3-плоскости циклиды Дюпена, чтобы получить исходную $(n-1,1)$ -гиперповерхность Дюпена. Теорема доказана.

Заметим, что изотермическая $(n-1,1)$ -гиперповерхность Дюпена, являющаяся сферическим веером с направляющей окружностью, получается в этой конструкции в том случае, когда одна из окружностей, из которых состоит главное сечение на ν_n , вырождается в точку.

Литература

1. Вербицкий Л.Л., О гиперповерхностях трех измерений, реализующих конформно евклидову метрику. Тр. семинара по вект. и тензорн. анализу, 1963, вып. XII, 333 - 354.
2. Вяльяс М., Существование и классы конформно-евклидовых гиперповерхностей с тремя различными главными кривизнами в . Изв. АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. н., 1986, № 3.
3. Вяльяс М.Э., Лумисте Ю.Г., Изотермические гиперповерхности и трехмерные гиперциклиды Дюпена -

– Маннгейма. Матем. заметки (в печати).
4. Картан Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Изд. МГУ, 1962, 237 с.
5. Cecil T., Ryan P., Focal sets, taut embeddings and the cyclides of Dupin. – Math. Ann., 1978, 236, 177–190.
6. Cecil T., Ryan P., Conformal geometry and the cyclides of Dupin. – Canad. J. Math., 1980, No 4, 767–782.
7. Darboux G., Sur les surfaces orthogonales. – Ann. Èc. Norm., 1866, 3, 97–141.
8. Lancaster G. M., A characterization of certain conformally euclidean spaces of class one. – Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21, 623–628.
9. Lancaster G. M., Canonical metrics for certain conformally euclidean spaces of dimension three and codimension one. – Duke Math. J., 1973, 40, 1–8.
10. Lilienthal R., Besondere Flächen. – Enz. d. Math. Wissenschaft, 1905, III B5, 269–353.
11. Miyaoka R., Compact Dupin hypersurfaces with three principal curvatures. – Math. Z., 1984, 187, 433–452.
12. Pinkall U., Dupin hypersurfaces. – Math. Ann. 1985, 270, 427–440.
13. Thorbergsson G., Dupin hypersurfaces. – Bull. London Math. Soc., 1983, 15, 493–498.

Поступило
10 IX 1985

CAYLEY-CATALAN CONSTRUCTION FOR SOME DUPIN HYPERSURFACES

Ü.Lumiste

Summary

Dupin hypersurface in an Euclidean space E_{n+1} is the hypersurface, which has constant multiplicities of the principal curvatures and the latter are constant along leaves of their principal distributions [11–13]. For general Dupin surface (Dupin cyclide) in E_3 the Cayley-Catalan construction is well-known ([10], p. 292).

In the present paper this construction is generalized for 1) isothermic Dupin hypersurfaces with nonvanishing prin-

cipal curvatures in E_{n+1}, $n \geq 3$ (they are found in [1] and are: a) Dupin-Mannheim hypercyclide in E_{n+1} and b) hypersurface in E_{n+1}, generated by $(n-1)$-spheres which diameters are radius-vectors of points of a circle in its plane and which lies in hyperplanes orthogonal to the plane of the circle), 2) Dupin hypersurfaces with two principal curvatures of multiplicities 1 and $n-1$ in E_{n+1}. The construction for the case 2) is a direct generalization of the classical Cayley-Catalan construction and in a particular case coincides with the former definition of 1b). For the case 1a) the construction is analogous but is based on a Dupin cyclide in a hyperplane E_3 in E_4. Every Dupin-Mannheim hypercyclide contains three associated Dupin cyclides as its sections with three symmetry hyperplanes.

7

НЕПРИВОДИМЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ТРЕТЬЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ

Ю.Лумисте

1. После цикла глубоких исследований Вилмса, Валдена и Феруса [19, 20, 13, 14], которыми выяснено строение подмногообразия с параллельной второй фундаментальной формой α_2 в евклидовом пространстве E_n, интересы в этой области обратились к обобщениям на случаи более общих объемлющих пространств. Подмногообразия M_m с параллельной α_2 в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ рассматривал В.Мирзоян [3], их строение в некотором частном случае при $c>0$ выяснил Мацуяма [16]. В произвольном римановом пространстве их исследовал Штрюбинг [18], а в симметрическом пространстве Найтох [17]. В псевдоевклидовом пространстве некоторые такие подмногообразия рассматривал Мэгид [15].

В другом направлении представляет интерес переход к изучению подмногообразий M_m в E_n с параллельной третьей фундаментальной формой α_3. Так как $\alpha_3=\bar\nabla\alpha_2$, где $\bar\nabla$ — линейный оператор ковариантного дифференцирования смешанного тензора на M_m в E_n относительно связности ван-дер-Вардена–Бортолотти, а параллельность α_2 или α_3 означает, что, соответственно, $\bar\nabla\alpha_2=0$ или $\bar\nabla\alpha_3=0$, то условие параллельности α_3 включает в качестве частного случая $\alpha_3=0$ также условие параллельности α_2. Поэтому исследования подмногообразий с параллельной α_3 расширяют известные результаты о подмногообразиях с параллельной α_2 и используют их.

Такие исследования были начаты в [4, 5, 2, 9, 10]. Недавно выяснилось [1], что подмногообразия M_m с параллельной α_3 в E_n распадаются на произведения подмногообразий M_{m_i} с параллельной α_3 в некоторых E_{m_i}, попарно вполне ортогональных в E_n, которые сами эти способом уже не распадаются и являются в этом смысле неприводимыми. Знание таких неприводимых M_m с параллельной α_3 позволяет легко перечислить все подмногообразия с параллельной α_3 в E_n.

В настоящей статье найдены все неприводимые M_m с параллельной α_3 в E_n при $m=1$, $m=2$ и $n-m=1$. В частности завершается перечисление всех M_2 с параллельной α_3 в E_4, начатое в [2]*.

Теорема 1. Подмногообразие M_1 (т.е. линия) с параллельной α_3 в E_n является при $\alpha_3=0$ либо прямой E_1, либо окружностью $S_1(r)$, а при $\alpha_3\neq 0$ либо спиралью Корню $C_1(a)$ на плоскости E_2, либо сферической спиралью Корню $C_1^S(a,r)$ на сфере $S_2(r)\subset E_3$.

Теорема 2. Гиперповерхность M_{n-1} с параллельной α_3 в E_n является при $\alpha_3=0$ либо плоскостью E_{n-1}, либо гиперсферой $S_{n-1}(r)$, либо произведением сферы $S_p(r)$ и плоскости E_{n-p-1}, а при $\alpha_3\neq 0$ произведением плоской спирали Корню $C_1(a)$ и плоскости E_{n-2}. Неприводимыми среди них являются лишь гиперсферы $S_{n-1}(r)$.

Теорема 3. Неприводимая поверхность M_2 с параллельной α_3 в E_4 является при $\alpha_3=0$ сферой $S_2(r)$ в E_3, а при $\alpha_3\neq 0$ поверхностью $B_2(c,r)$ в гиперсфере $S_3(r)$, образованной сферическими бинормалями линии с натуральными уравнениями $k=cs$, $\varkappa=-\frac{1}{r}$ в сферической геометрии, где $c=\mathrm{const}$ и r — радиус гиперсферы $S_3(r)$.

В евклидовом пространстве E_5 прибавляется одна неприводимая поверхность M_2 с параллельной α_2 (см. [13]): поверхность Веронезе $V_2(r)$, которая является таким изометрическим погружением эллиптической плоскости кривизны $\frac{1}{3r^2}$ в $S_4(r)$ (см. [12]), при котором все движения эллиптической плоскости индуцируются вращениями в E_5 вокруг центра гиперсферы $S_4(r)$ (т.е. которая является "максимально симметричной поверхностью" по Р.Муллари [6] ; см. также [8]).

Предварительные результаты о поверхностях M_2 с параллельной α_3 в E_5 получены в [9] и [10]. Полную классификацию поверхностей M_2 с параллельной α_3 в E_n дает следующая теорема.

Теорема 4. Поверхность M_2 с параллельной α_3 в евклидовом пространстве E_n есть одна из следующего списка:

Поверхности с $\alpha_3=0$ (т.е. с параллельной α_2):
неприводимые 1) $S_2(r)\subset E_3\subset E_n$, 2) $V_2(r)\subset S_4(r)\subset E_5\subset E_n$,
приводимые 3) $E_1\times E_2=E_2\subset E_n$, 4) $S_1(r)\times E_1\subset E_3\subset E_n$,
5) $S_1(r)\times S_1(r')\subset S_3(\sqrt{r^2+r'^2})\subset E_4\subset E_n$.

Поверхности с $\alpha_3\neq 0$:
неприводимая 6) $B_2(c,r)\subset S_3(r)\subset E_4\subset E_n$,

---

*Авторы благодарны К.Рийвес, указавшей на неполноту классификации и на неточности в [2], частично исправленные в добавлении к [2] при корректуре.

приводимые $7)\ C_1(a)\times E_1\subset E_3\subset E_n$, $8)\ C_1(a)\times S_1(r)\subset E_4\subset E_n$,
$9)\ C_1(a)\times C_1(a')\subset E_4\subset E_n$, $10)\ C_1^S(a,r)\times E_1\subset E_4\subset E_n$,
$11)\ C_1^S(a,r)\times S_1(r')\subset E_5\subset E_n$,
$12)\ C_1^S(a,r)\times C_1(a')\subset E_5\subset E_n$,
$13)\ C_1^S(a,r)\times C_1^S(a',r')\subset E_6\subset E_n$.

Заметим, что здесь сферы $S_2(r)\subset E_3$ и поверхности Веронезе $V_2(r)\subset S_4(r)\subset E_5$ являются примерами стандартно погруженных симметрических R-пространств, которыми по [13] исчерпываются все неприводимые подмногообразия с параллельной α_2 в E_n. Замечательно, что в классе неприводимых поверхностей M_2 с параллельной α_3 в E_n к ним прибавляются лишь поверхности $B_2(c,r)\subset S_3(r)\subset E_4$, описанные в теореме 3.

2. Для главного расслоения $\mathcal{O}(E_n)$ ортогональных реперов

$$d\vec{x}=\vec{e}_J\omega^J,\quad d\vec{e}_J=\vec{e}_K\omega^K_J\quad (c\ \omega^K_J+\omega^J_K=0),\qquad (1)$$

$$d\omega^J=\omega^K\wedge\omega^J_K,\quad d\omega^J_K=\omega^L_K\wedge\omega^J_L,\qquad (2)$$

где $J,K,\ldots=1,\ldots,n$, а для расслоения $\mathcal{O}(M_m,E_n)$ адаптированных к M_m реперов, кроме того,

$$\omega^\alpha=0,\quad \omega^\alpha_i=b^\alpha_{ij}\omega^j\quad (c\ b^\alpha_{ij}=b^\alpha_{ji}),\qquad (3)$$

$$\bar\nabla b^\alpha_{ij}=b^\alpha_{ijk}\omega^k\quad (c\ b^\alpha_{ijk}=b^\alpha_{ikj}),\qquad (4)$$

$$\bar\nabla b^\alpha_{ijk}\wedge\omega^k=b^\beta_{ij}\Omega^\alpha_\beta-b^\alpha_{kj}\Omega^k_i-b^\alpha_{ik}\Omega^k_j,\qquad (5)$$

где $i,j,\ldots=1,\ldots,m$; $\alpha,\beta,\ldots=m+1,\ldots,n$, $\bar\nabla$ является ковариантным дифференцированием в связности ван-дер-Вардена — Бортолотти, а

$$\Omega^\alpha_\beta=d\omega^\alpha_\beta-\omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma,\quad \Omega^i_j=d\omega^i_j-\omega^k_j\wedge\omega^i_k\qquad (6)$$

—2-формы кривизны, соответственно, нормальной связности $\nabla^\perp$ и Леви-Чивита связности подмногообразия M_m. Здесь (2) получаются внешним дифференцированием из (1), а среди (3) - (5) следующие уравнения получаются из предыдущих дифференциальным продолжением (т.е. внешним дифференцированием и применением леммы Картана; более подробный вывод см. [2]). В частности,

$$\bar\nabla b^\alpha_{ij}=db^\alpha_{ij}-b^\alpha_{kj}\omega^k_i-b^\alpha_{ik}\omega^k_j+b^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta,\qquad (7)$$

$$\bar\nabla b^\alpha_{ijk}=db^\alpha_{ijk}-b^\alpha_{ljk}\omega^l_i-b^\alpha_{ilk}\omega^l_j-b^\alpha_{ijl}\omega^l_k+b^\beta_{ijk}\omega^\alpha_\beta.\qquad (8)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\Omega^\alpha_\beta = -\sum_i b^\beta_{ik} b^\alpha_{il}\, \omega^k \wedge \omega^l, \quad \Omega^i_j = -\sum_\alpha b^\alpha_{jk} b^\alpha_{il}\, \omega^k \wedge \omega^l. \quad (9)$$

3. Параллельность α_2 или α_3 равносильно, соответственно, с $\bar\nabla b^\alpha_{ij} = 0$ или $\bar\nabla b^\alpha_{ijk} = 0$, причем из (4) и (8) видно, что первое равенство влечет второе.

В силу (5) при параллельной

$$b^\beta_{ij}\Omega^\alpha_\beta - b^\alpha_{kj}\Omega^k_i - b^\alpha_{ik}\Omega^k_j = 0. \quad (10)$$

4. Доказательство теоремы 1.

При $m=1$ адаптацию репера можно довести до построения сопровождающего базиса Френе, причем для линии в некотором $E_p \subset E_n$ имеют место следующие формулы Френе (см. напр. [7], с. 258): $d\vec x = \vec e_1 ds$,

$$d\vec e_1 = \vec e_2 k_1 ds, \quad d\vec e_2 = -\vec e_1 k_1 ds + \vec e_3 k_2 ds,$$
$$d\vec e_3 = -\vec e_2 k_2 ds + \vec e_4 k_3 ds, \ldots, \quad d\vec e_p = -\vec e_{p-1} k_{p-1} ds.$$

Следовательно, в (3) в данном случае $\omega^1 = ds$ и

$$b^2_{11} = k_1, \quad b^3_{11} = \ldots = b^n_{11} = 0.$$

Из (4) в силу того, что $\omega^3_2 = k_2 ds$, $\omega^4_2 = \ldots = \omega^n_2 = 0$, получим

$$b^2_{111} = \dot k_1, \quad b^3_{111} = k_1 k_2, \quad b^4_{111} = \ldots = b^n_{111} = 0,$$

а из $\bar\nabla b^\alpha_{ijk} = 0$ в силу $\omega^4_3 = k_3 ds, \omega^5_3 = \ldots = \omega^n_3 = 0$ следует, что

$$\ddot k_1 - k_1 k_2^2 = 0, \quad (k_1 k_2)^{\cdot} + \dot k_1 k_2 = 0, \quad k_1 k_2 k_3 = 0. \quad (11)$$

Если в последнем равенстве $k_1 = 0$, то $de_1 = 0$ и M_1 является прямой. Если $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$, то $\ddot k_1 = 0$ и $k_1 = as + b$, где a и b — постоянные. При $a = 0$ получим окружность, при $a \neq 0$, после подходящего изменения начала параметра s, плоскую линию с натуральным уравнением $k_1 = as$, т.е. спираль Корню $C_1(a)$.

Пусть $k_1 k_2 \neq 0$. Тогда $k_3 = 0$ и $p = 3$. Среднее уравнение (11) примет вид

$$\frac{\dot k_2}{k_2} = -2\frac{\dot k_1}{k_1}$$

и отсюда $k_2 = c k_1^{-2}$, $c = \mathrm{const} \neq 0$. Подстановка в первое уравнение (11) дает уравнение $\ddot k_1 = c^2 k_1^{-3}$, решением которого является

$$k_1 = \sqrt{As^2 + 2\alpha s + B}$$

с постоянными A, α и B, где $AB - \alpha^2 = c^2$. Здесь $AB \neq 0$, поэтому подходящим изменением начала параметра s получим

$$k_1 = \sqrt{As^2 + B}, \qquad k_2 = \pm\frac{\sqrt{AB}}{As^2 + B}.$$

Нетрудно проверить, что линия с такими натуральными уравнениями находится на сфере $S_2(r)$ радиуса $r = \frac{1}{B}$, центр C которой имеет радиус-вектор

$$\vec{c} = \vec{x} - \frac{1}{\sqrt{As^2+B}}\left(\vec{e}_2 \mp \sqrt{\frac{A}{B}}\, s\vec{e}_3\right).$$

Геодезическая кривизна этой линии на сфере $S_2(r)$ равна

$$k = as,$$

где $a = \pm\sqrt{A}$, т.е. линия является сферической спиралью Корню $C_1^S(a,r)$. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. При $m = n-1$ направим векторы репера $\vec{e}_i$ в собственные направления тензора b^n_{ij} (т.е. в главные направления гиперповерхности). Тогда $b^n_{ij} = k_i \delta_{ij}$ и в (9) $\Omega^n_n = 0$, $\Omega^j_i = -k_i k_j \omega^i \wedge \omega^j$ (не суммировать!), а из (10) следует, что

$$(k_i - k_j) k_i k_j = 0, \quad i \neq j. \tag{12}$$

Если все k_i равны нулю, то M_{n-1} является гиперплоскостью, т.е. произведением прямых. Если $k_1 \neq 0$, $k_2 = \ldots = k_{n-1} = 0$, то

$$\omega^n_1 = k_1 \omega^1, \quad \omega^n_a = 0,$$

где $a, b, \ldots = 2, \ldots, n-1$ и отсюда внешним дифференцированием получается, что

$$\omega^1_a = \lambda_a \omega^1, \quad dk_1 = \mu\omega^1 - k_1\lambda_a\omega^a.$$

Теперь подстановки в (4) дают:

$$b^n_{111} = \mu, \quad b^n_{11a} = -k_1\lambda_a, \quad b^n_{1ab} = b^n_{abc} = 0,$$

а из $\bar\nabla b^n_{ijk} = 0$ при $i=1, j=a, k=b$ следует, что все $\lambda_a = 0$, т.е. $\omega^1_a = 0$. Это приводит к тому, что (1) примет вид

$$d\vec{x} = \vec{e}_1\omega^1 + \vec{e}_a\omega^a, \quad d\vec{e}_1 = \vec{e}_n k_1 \omega^1, \quad d\vec{e}_n = -\vec{e}_1 k_1 \omega^1, \quad d\vec{e}_a = \vec{e}_b \omega^b_a,$$

т.е. M_{n-1} является произведением некоторой плоской линии с $(n-2)$-мерной плоскостью и поэтому приводима. Из теоремы 1 следует, что эта плоская линия может быть либо окружность, либо плоская спираль Корню.

Пусть $k_1 \neq 0, \ldots, k_p \neq 0, k_{p+1} = \ldots = k_{n-1} = 0$, где $2 \leqslant p \leqslant n-1$. Из (12) следует, что $k_1 = \ldots = k_p = k \neq 0$. Если $p < n-1$, то (3) дает:

$$\omega^n_{i_1} = k\omega^{i_1}, \quad \omega^n_{i_2} = 0,$$

где $i_1, j_1, \ldots = 1, \ldots, p$; $i_2, j_2, \ldots = p+1, \ldots, n-1$. Отсюда внешним дифференцированием получается, что

$$\omega^{i_1}_{j_2} = \lambda_{j_2}\omega^{i_1}, \quad dk = -k\lambda_{j_2}\omega^{j_2}.$$

Теперь подстановки в (4) дают:

$$b^n_{i_1 j_1 k_1} = 0, \quad b^n_{i_1 i_1 j_2} = -k\lambda_{j_2}, \quad b^n_{i_1 j_1 k_2} = 0 \ (i_1 \neq j_1), \quad b^n_{i_1 j_2 k_2} = b^n_{i_2 j_2 k_2} = 0,$$

а из $\bar\nabla b^n_{ijk} = 0$ при $i = j_1, j = j_2, k = k_2$ следует, что все $\lambda_j = 0$, т.е. $dk = 0$, $\omega^{i_1}_{j_2} = 0$. Это приводит к тому, что (1) примет вид

$$d\vec{x} = \vec{e}_{i_1}\omega^{i_1} + \vec{e}_{j_2}\omega^{j_2}, \quad d\vec{e}_{i_1} = \vec{e}_{j_1}\omega^{j_1}_{i_1} + \vec{e}_n k\omega^{i_1}, \quad d\vec{e}_n = -k\vec{e}_{i_1}\omega^{i_1},$$

$$d\vec{e}_{j_2} = e_{k_2}\omega^{k_2}_{j_2},$$

где $k = \mathrm{const}$. Гиперповерхность M_{n-1} является произведением сферы $S_p(r)$ радиуса $r = k^{-1}$, центр c который имеет радиус-вектор $\vec{c} = \vec{x} + \frac{1}{k}\vec{e}_n$, и плоскости E_{n-p-1}.

Если $p = n-1$, то M_{n-1} является гиперсферой $S_{n-1}(r)$. Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3. Применим для M_2 в E_4 канонический репер, построенный в [II], с. 253. Тогда

$$\begin{aligned} &b^3_{11} = \alpha + a, \quad b^3_{12} = 0, \quad b^3_{22} = \alpha - a, \\ &b^4_{11} = \beta \qquad\quad b^4_{12} = b, \quad b^4_{22} = \beta, \end{aligned} \tag{I3}$$

где $a \geqslant b \geqslant 0$. Из (9) следует, что

$$\Omega^4_3 = -2ab\,\omega^1\wedge\omega^2, \quad \Omega^2_1 = (a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2)\omega^1\wedge\omega^2,$$

а из (I0) получается

$$ab\beta = 0, \quad a(a^2+2b^2-\alpha^2-\beta^2) = 0,$$
$$b\,(2a^2+b^2+a\alpha-\alpha^2-\beta^2) = 0, \; ab\alpha = 0.$$

Отсюда либо $a = b = 0$, либо

$$a > 0, \quad b = a^2-\alpha^2-\beta^2 = 0. \tag{I4}$$

В первом случае M_2 является вполне омбилической и есть, как известно, либо плоскость (при $\alpha = \beta = 0$), либо сфера $S_2(r)$. Остается исследовать второй случай.

Подстановка (I3) при (I4) в (4) дает:

$$d(\alpha+a) - \beta\omega^4_3 = b^3_{111}\omega^1 + b^3_{112}\omega^2, \tag{I5}$$
$$2a\,\omega^2_1 = b^3_{112}\omega^1 + b^3_{122}\omega^2, \tag{I6}$$
$$d(\alpha-a) - \beta\,\omega^4_3 = b^3_{122}\omega^1 + b^3_{222}\omega^2, \tag{I7}$$
$$2a\,\omega^4_3 = b^4_{111}\omega^1 - b^4_{222}\omega^2,$$
$$d\beta + (\alpha-a)\,\omega^4_3 = b^4_{222}\omega^2,$$
$$b^4_{112} = b^4_{122} = 0,$$

где

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha-a)\,b^3_{111} + (\alpha+a)\,b^3_{122} = -\beta\,b^4_{111}, \\ &(\alpha-a)\,b^3_{112} + (\alpha+a)\,b^3_{222} = -\beta\,b^4_{222}. \end{aligned}\right. \tag{I8}$$

Если теперь учесть $\bar\nabla b^\alpha_{ijk} = 0$ при $\alpha = 4$ и при тройке (i,j,k), равной (I,I,2) или (I,2,2), то получается, что

$$b^3_{112}\,b^4_{111} = 0, \quad b^3_{122}\,b^4_{222} = 0, \quad b^3_{112}\,b^4_{222} = b^3_{122}\,b^4_{111},$$

а это равносильно

$$4a^2\omega^2_1\,\omega^4_3 = 0. \tag{I9}$$

Пусть здесь $\omega^2_1 = 0$, т.е. $b^3_{112} = b^3_{122} = 0$. Тогда в силу (13) и (14)

$$d\vec{e}_1 = \vec{f}_3\omega^1, \quad d\vec{e}_2 = \vec{f}_4\omega^2,$$

где векторы

$$\vec{f}_3 = (\alpha+a)\vec{e}_3 + \beta\vec{e}_4, \quad \vec{f}_4 = (\alpha-a)\vec{e}_3 + \beta\vec{e}_4$$

взаимно ортогональны. Для них находим

$$d\vec{f}_3 = \{-[(\alpha+a)^2+\beta^2]\vec{e}_1 + [b^3_{111}\vec{e}_3 + b^4_{111}\vec{e}_4]\}\omega^1,$$
$$d\vec{f}_4 = \{-[(\alpha-a)^2+\beta^2]\vec{e}_2 + [b^3_{222}\vec{e}_3 + b^4_{222}\vec{e}_4]\}\omega^2,$$

причем вторые квадратные скобки, в силу (14) и (18), коллинеарны, соответственно, к $\vec{f}_3$ и $\vec{f}_4$. Если $\beta \neq 0$, то ортогональные $\vec{f}_3$ и $\vec{f}_4$ отличны от нуля, и M_2 является произведением линий, определяемых уравнениями $\omega^1=0$ или $\omega^2=0$. Если $\beta=0$, то один из векторов $\vec{f}_3$ и $\vec{f}_4$ равен нулю в силу (14), а другой коллинеарен к $\vec{e}_3$. Пусть, например, $\vec{f}_3 = 2a\vec{e}_3$, $\vec{f}_4=0$. Тогда $d\vec{e}_1 = 2a\vec{e}_3\omega^1$, $d\vec{e}_3 = -2a\vec{e}_1\omega^1 + \vec{e}_4\omega^4_3$, $d\vec{e}_4 = -\vec{e}_3\omega^4_3$, $d\vec{e}_2 = 0$ и M_2 также является произведением аналогичных линий, причем линии с $\omega^1=0$ — прямые. Таким образом, при $\omega^2_1=0$ поверхность M_2 приводима.

Остается исследовать случай, когда в (19) $\omega^4_3=0$. В этом случае все $b^4_{ijk}=0$ и $\beta = const$.

При $\beta=0$ мы получили бы из (14), что либо $\alpha+a=0$, либо $\alpha-a=0$. В первом случае $b^3_{111}=b^3_{112}=0$ и условие $\bar{\nabla} b^3_{112}=0$ дало бы $(b^3_{122})^3=0$, т.е. опять $\omega^2_1=0$, что приводит к приводимости M_2. Аналогичный результат получился бы во втором случае.

Итак, пусть $\beta\neq 0$, $\alpha^2 \neq a^2$. Из (18) теперь следует, что

$$b^3_{111}(\alpha-a) + b^3_{122}(\alpha+a) = 0, \quad b^3_{112}(\alpha-a) + b^3_{222}(\alpha+a) = 0,$$

в силу чего существуют λ и μ, такие, что

$$b^3_{111} = \lambda(\alpha+a), \quad b^3_{122} = -\lambda(\alpha-a), \quad b^3_{112} = \mu(\alpha+a), \quad b^3_{222} = -\mu(\alpha-a).$$

Из (15) и (17) $\dfrac{d(\alpha+a)}{\alpha+a} = -\dfrac{d(\alpha-a)}{\alpha-a} = \lambda\omega^1 + \mu\omega^2.$

После внешнего дифференцирования и раскрытия по лемме Картана получим

$$d\lambda - \mu\omega^2_1 = \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \tag{20}$$
$$d\mu + \lambda\omega^2_1 = \tau\omega^1 + \varphi\omega^2. \tag{21}$$

Подстановка в $\bar{\nabla} b^\alpha_{ijk}=0$ приводит теперь к соотношениям

$$\sigma = \mu^2 a^{-1}(\alpha+a) - \lambda^2, \quad \tau = -a^{-1}\alpha\lambda\mu, \quad \varphi = \lambda^2 a^{-1}(\alpha+a) + \mu^2, \tag{22}$$
$$\lambda^2(\alpha-a) + \mu^2(\alpha+a) = 0.$$

Последнее из них дает после умножения на $\alpha+a$, что

$$-\lambda^2\beta^2+\mu^2(\alpha+a)^2=0;$$
следовательно, существует ψ , такое, что
$$\lambda=2a\beta^{-1}(\alpha+a)\psi,\quad \mu=\varepsilon\, 2a\psi,$$
где $\varepsilon=\pm 1$. Теперь (16) и (15) сводятся к
$$\omega_1^2=\psi(\varepsilon A\omega^1+\beta\omega^2),\quad dA=\varepsilon\beta^{-1}(A^2+\beta^2)\omega_1^2,$$
где $A=\alpha+a$. Из (14) следует, что $(\alpha-a)=-\beta^2A^{-1}$; поэтому $2a=A^{-1}(A^2+\beta^2)$, $2\alpha=A^{-1}(A^2-\beta^2)$. По формулам (22)
$$\sigma=\beta^{-2}(\beta^4-A^4)\psi^2,\ \tau=\varepsilon A^{-1}\beta^{-1}(\beta^4-A^4)\psi^2,\ \varphi=A^{-2}(\beta^4-A^4)\psi^2.$$
Подстановка в (20) и (21) дает:
$$d\psi=\varepsilon\psi\left(\frac{2\beta}{A}-\frac{3A}{\beta}\right)\omega_1^2.$$

Таким образом, рассматриваемая M_2 в E_4 определяется вполне интегрируемой системой (которая была анонсирована в добавлении к [2] ; см. также [9])
$$\omega^3=\omega^4=0,\ \omega_1^3=A\omega^1,\ \omega_2^3=-\frac{\beta^2}{A}\omega^2,\ \omega_1^4=\beta\omega^1,\ \omega_2^4=\beta\omega^2,$$
$$dA=\frac{\varepsilon}{\beta}(A^2+\beta^2)\omega_1^2,\quad \omega_1^2=\psi(\varepsilon A\omega^1+\beta\omega^2),\ \omega_3^4=0,$$
$$d\psi=\varepsilon\psi\left(\frac{2\beta}{A}-\frac{3A}{\beta}\right)\omega_1^2,\quad \beta=\mathrm{const}\neq 0,\ \varepsilon=\pm 1.$$

Отсюда следует, что точка $c\in E_4$ с радиусом-вектором $\vec{c}=\vec{x}+\frac{1}{\beta}\vec{e}_4$ неподвижна, так как $d\vec{c}=0$. Следовательно M_2 принадлежит гиперсфере $S_3(r)$ с центром c и радиусом $r=\beta^{-1}$. Относительно начальной точки c ее точка определяется радиусом-вектором $\vec{x}^*=\vec{x}-\vec{c}=-r\vec{e}_4$.

Одно семейство асимптотических линий на M_2 в сферической геометрии гиперсферы $S_3(r)$ определяется уравнением $A\omega^1+\varepsilon\beta\omega^2=0$. Поворачиваем базис $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, выбирая в качестве $\vec{e}_{1'}$ единичный касательный вектор линии этого семейства. Тогда
$$\vec{e}_{1'}=(A^2+\beta^2)^{-1/2}(\beta\vec{e}_1-\varepsilon A\vec{e}_2);\quad \vec{e}_{2'}=(A^2+\beta^2)^{-1/2}(A\vec{e}_1+\varepsilon\beta\vec{e}_2),$$
$$\omega^{1'}=(A^2+\beta^2)^{-1/2}(\beta\omega^1-\varepsilon A\omega^2),\quad \omega^{2'}=(A^2+\beta^2)^{-1/2}(A\omega^1+\varepsilon\beta\omega^2)$$
и
$$d\vec{e}_{1'}=-\frac{1}{r^2}\vec{x}^*\omega^{1'}+\vec{e}_3\frac{1}{r}\omega^{2'},$$
$$d\vec{e}_{2'}=-\frac{1}{r^2}\vec{x}^*\omega^{2'}+\vec{e}_3\left(\frac{1}{r}\omega^{1'}+H\omega^{2'}\right),$$
где $H=(A-\frac{\beta^2}{A})$ — удвоенная средняя кривизна поверхности M_2 в сферической геометрии. Простые вычисления покажут, что $dH=p\omega^{2'}$, где $p=\mathrm{const}\neq 0$. (Ее связь с предыдущими величинами следующая: $p=\psi A^{-2}\beta^{-1}(A^2+\beta^2)^{5/2}$.)
Так как $\omega_{1'}^{2'}=0$ и попрежнему $\omega_3^4=0$, то M_2 имеет нулевую гауссову кривизну и плоскую нормальную связность в E_4 .
При этом $\omega^{1'}$ и $\omega^{2'}$ - полные дифференциалы и поэтому
$$\omega^{1'}=ds_1,\quad \omega^{2'}=ds_2.$$

Рассмотренные выше асимптотические линии, семейство которых определяется уравнением $\omega^{2'}=0$, или $s_2=const$, являются большими окружностями гиперсферы $S_3(r)$ и, следовательно, геодезическими в сферической геометрии. Для их ортогональной траектории, определяемой уравнением $\omega^{1'}=0$, или $s_1==const$ сферическая главная нормаль идет по вектору $\vec{e}_3$, а H является ее сферической кривизной k_S. Так как $d\vec{e}_3==-k_S\vec{e}_{2'}ds_2-\frac{1}{r}\vec{e}_{1'}ds_2$ при $s_1=const$, то кручением этой траектории в сферической геометрии является $\varkappa_S=-\frac{1}{r}$, а бинормаль идет в направлении вектора $\vec{e}_{1'}$, т.е. совпадает с рассмотренным выше асимптотическим геодезическим. При этом вдоль изучаемой траектории $\frac{dk_S}{ds_2}=p$, т.е. $k_S=ps_2+q$. Подходящим преобразованием параметра s_2 получается для этой траектории следующие натуральные уравнения в сферической геометрии:

$$k_S=ps_2,\quad \varkappa_S=-\frac{1}{r}\quad ;\ p=const,\ r=const.$$

Теорема 3 доказана.

7. Доказательство теоремы 4. Применим для M_2 в E_n частично канонизированный репер, который обобщает репер, примененный в п. 6 и при $n=5$ использовался, например, в [8]. В этом репере дополнительно к (13) имеют место

$$b^5_{11}=\gamma,\quad b^5_{12}=0,\quad b^5_{22}=\gamma, \tag{23}$$

$$b^{\xi}_{ij}=0\ ;\quad \xi,\eta,\ldots=6,\ldots,n. \tag{24}$$

Из (9) следует, что теперь

$$\Omega^2_1=(a^2+b^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)\omega^1\wedge\omega^2,\ \Omega^4_3=-2ab\omega^1\wedge\omega^2,\ \Omega^{\varrho}_3=\Omega^{\varrho}_4=\Omega^{\varrho}_{\sigma}=0,$$

где $\varrho,\sigma,\ldots=5,\ldots,n$, а (10) сводятся к

$$ab\beta=0,\quad a(a^2+2b^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)=0, \tag{25}$$
$$b(2a^2+b^2+a\alpha-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)=0,\quad ab\alpha=0.$$

I. Пусть здесь $ab\neq0$. Тогда $\alpha=\beta=0$, $b=a\neq0$, $\gamma=a\sqrt{3}\neq0$. Подстановка в (4) дает следующие соотношения:

$$b^3_{111}-b^3_{122}=2b^4_{112},\qquad b^3_{112}-b^3_{222}=2b^4_{122},$$
$$b^3_{111}+b^3_{122}=\sqrt{3}(b^5_{111}-b^5_{122}),\qquad b^3_{112}+b^3_{222}=\sqrt{3}(b^5_{112}-b^5_{222}),$$
$$b^4_{111}+b^4_{122}=-2\sqrt{3}b^5_{112},\qquad b^4_{112}+b^4_{222}=-2\sqrt{3}b^5_{122},$$
$$b^5_{111}+b^5_{122}=2\sqrt{3}b^4_{112},\qquad b^5_{112}+b^5_{222}=2\sqrt{3}b^4_{122}$$
$$b^3_{112}=-b^4_{111}+\sqrt{3}b^5_{112},\qquad b^3_{122}=-b^4_{112}+\sqrt{3}b^5_{122}.$$

В силу параллельности α_3 в (8) имеем $\bar{\nabla}b^{\alpha}_{ijk}=0$ и поэтому при внешнем дифференцировании из (8) получается, что

$$b^{\beta}_{ijk}\Omega^{\alpha}_{\beta}-b^{\alpha}_{\ell jk}\Omega^{\ell}_i-b^{\alpha}_{i\ell k}\Omega^{\ell}_j-b^{\alpha}_{ij\ell}\Omega^{\ell}_k=0.$$

Отсюда при $\alpha=\varrho$ следует, что $b^{\varrho}_{ijk}=0$; в частности

$b^5_{ijk}=0$ и теперь из предыдущих соотношений вытекает, что $b^4_{ijk}=b^3_{ijk}=0$. Таким образом, $\alpha_3=0$ и следовательно α_2 параллельна.

Сделав подстановки в $\bar\nabla b^\alpha_{ij}=0$ имеем $da=2\omega^2_1-\omega^4_3=$ $=\omega^\gamma_3=\omega^\gamma_4=\omega^\xi_5=0$. Вместе с $\omega^\gamma=0$, $\omega^3_1=a\omega^1$, $\omega^3_2=-a\omega^2$, $\omega^4_1=a\omega^2$, $\omega^4_2=a\omega^1$, $\omega^5_1=\sqrt3 a\omega^1$, $\omega^5_2=\sqrt3 a\omega^2$, $\omega^\xi_1=\omega^\xi_2=0$ получим теперь вполне интегрируемую систему (ср. [6], [8], [9]). Формулы (1) принимают вид

$$
\begin{aligned}
d\vec x &= \vec e_1\omega^1+\vec e_2\omega^2,\\
d\vec e_1 &= \vec e_2\omega^2_1+a(\vec e_3\omega^1+\vec e_4\omega^2+\sqrt3\,\vec e_5\omega^1),\\
d\vec e_2 &= -\vec e_1\omega^2_1+a(-\vec e_3\omega^2+\vec e_4\omega^1+\sqrt3\,\vec e_5\omega^2),\\
d\vec e_3 &= -a(\vec e_1\omega^1-\vec e_2\omega^2)+2\vec e_4\omega^2_1,\\
de_4 &= -a(\vec e_1\omega^2+\vec e_2\omega^1)-2\vec e_4\omega^2_1,\\
de_5 &= -\sqrt3 a(\vec e_1\omega^1+\vec e_2\omega^2), \qquad d\vec e_\xi=\vec e_\eta\omega^\eta_\xi .
\end{aligned}
$$

Отсюда видно, что рассматриваемая M_2 принадлежит некоторому E_5. Так как $\vec c=\vec x+\frac{1}{\sqrt3 a}\vec e_5$ постоянный вектор, то $M_2\subset S_4(r)$, где $r=\frac{1}{\sqrt3 a}$.

В [6] найдены уравнения трехмерного конуса, при пересечении которого с гиперсферой $S_4(r)$ получается изучаемая M_2:

$$x_1x_2=x_3(-\sqrt{x_3^2+x_4^2}+\sqrt3\ x_5),\quad x_2^2-x_1^2=2x_4(-\sqrt{x_3^2+x_4^2}+\sqrt3\ x_5)$$

(здесь по сравнению с [6] сделаны замены $1\leftrightarrow2$, $3\leftrightarrow4$). Поэтому M_2 в параметрическом виде задается уравнениями

$$x_1=\frac{1}{\sqrt3}u^2u^3,\qquad x_2=\frac{1}{\sqrt3}u^3u^1,\qquad x_3=\frac{1}{\sqrt3}u^1u^2,$$

$$x_4=\frac{1}{2\sqrt3}[(u^1)^2-(u^2)^2],\qquad x_5=\frac16[(u^1)^2+(u^2)^2-2(u^3)^2],$$

где

$$(u^1)^2+(u^2)^2+(u^3)^2=3r$$

и совпадает с классической поверхностью Веронезе $V_2(r)$.

II. Пусть $ab=0$. Если $a=b=0$, то M_2 является вполне омбилической и поэтому есть либо плоскость E_2, либо сфера $S_2(r)\subset E_3$. Остается исследовать неприводимые M_2 с параллельной $\alpha_3\neq0$ в E_n в случае, когда $a>0$, $b=0$. Что касается приводимых M_2 с параллельной α_3, то для них, в силу теоремы 2, возможны лишь случаи 4), 5) и 7)—13), указанные в теореме 4.

Итак, пусть $b=0$, $a>0$. Подходящим поворотом векторов репера $\vec e_4$ и $\vec e_5$ в их плоскости можно сделать $\gamma=0$ (см. [8]), после чего (23) - (25) принимают вид

$$b^\gamma_{ij}=0\ ;\ \gamma,\sigma,\ldots=5,\ldots,n$$

и (14). Подстановка в (4) при $\alpha=4$ и $\alpha=\rho$ дает, в частности

$$b^{\varphi}_{112} = b^{\varphi}_{122} = 0\ ;\quad \varphi, \psi, \ldots = 4, \ldots, n,$$

и теперь из $\bar{\nabla} b^{\varphi}_{112} = 0$ и $\bar{\nabla} b^{\varphi}_{122} = 0$ получается, аналогично как в п. 6, что

$$b^3_{112} b^{\varphi}_{111} = 0, \quad b^3_{122} b^{\varphi}_{222} = 0, \quad b^3_{112} b^{\varphi}_{222} = b^3_{122} b^{\varphi}_{111},$$

а это равносильно

$$4a^2 \omega^2_1 \omega^{\varphi}_3 = 0.$$

Случай, когда $\omega^2_1 = 0$, приводит в силу теоремы Г из [1] к приводимому M_2 с параллельной α_3 и плоской $\bar{\nabla}$ (так как при $b = 0$, $a^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0$ у нас $\Omega^2_1 = \Omega^{\varphi}_3 = \Omega^{\varphi}_{\psi} = 0$) и поэтому к одной из поверхностей 4), 5) и 7) — 13).

Если $\omega^{\varphi}_3 = 0$, то аналогично как в п. 6 получается, что все $b^{\varphi}_{ijk} = 0$, а из (4) при $\alpha = \rho$ следует, что $\beta \omega^{\rho}_4 = 0$. При $\beta = 0$ получилось бы, как и в п. 6, что $\omega^2_1 = 0$. Поэтому нас интересует случай, когда $\omega^{\rho}_4 = 0$. Теперь формулы (1) принимают вид

$$\begin{aligned}
d\vec{x} &= \vec{e}_1\omega^1 + \vec{e}_2\omega^2, \\
d\vec{e}_1 &= \vec{e}_2\omega^2_1 + \vec{e}_3\omega^3_1 + \vec{e}_4\omega^4_1, \\
d\vec{e}_2 &= -\vec{e}_1\omega^2_1 + \vec{e}_3\omega^3_2 + e_4\omega^4_2, \\
d\vec{e}_3 &= -\vec{e}_1\omega^3_1 - \vec{e}_2\omega^3_2, \\
d\vec{e}_4 &= -\vec{e}_1\omega^4_1 - \vec{e}_2\omega^4_2, \qquad d\vec{e}_{\rho} = \vec{e}_{\sigma}\omega^{\sigma}_{\rho}.
\end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемая неприводимая M_2 с параллельной $\alpha_3 \neq 0$ принадлежит некоторому E_4 и поэтому описывается теоремой 3, т.е. является поверхностью $B_2(c, r) \subset S_3(r)$. Теорема 4 доказана.

Литература

1. Л у м и с т е Ю.Г. Приводимость подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой. - Теор. и прикл. вопросы матем. I. Тезисы докл. конф. 26 -27 сент. 1985. ТГУ. Тарту, 1985, с. 105 - 107.
2. Л у м и с т е Ю.Г., М и р з о я н В. Подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой. - Учен. зап. Тартуск. ун-та, 1984, № 665, с. 42 - 54.
3. М и р з о я н В., О подмногообразиях с параллельной второй фундаментальной формой в пространствах постоянной кривизны. - Учен. зап. Тартуск. ун-та, 1978, № 464, с. 59 - 74.
4. М и р з о я н В.А., Подмногообразия с параллельной фун-

даментальной формой высшего порядка. Тарту, 1978, - 47 с. (Рукопись, деп. в ВИНИТИ АН СССР; РЖМат, 1978, 10 А 542 ДЕП).

5. Мирзоян В.А. Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем.- Пробл. геометрии. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1983, т. 14, с. 73 - 100.

6. Муллари Р., О максимально симметричных поверхностях многомерного эвклидова пространства. - Учен. зап. Тартуск. ун-та, 1962, № 129, с. 62 - 73.

7. Постников М.М., Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М., 1979. - 312 с.

8. Рийвес К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. I. - Учен. зап. Тартуск. ун-та, 1970, № 253 с. 96 - 126.

9. Рийвес К.В., Поверхности $V_2 \subset E_5$ с параллельной третьей фундаментальной формой, имеющие плоскую нормальную связность. - Тезисы докладов УI Прибалтийской конф. по соврем. проблемам дифф. геом. и их прилож., Таллин, 1984, с. 103 - 104.

10. Рийвес К.В., О поверхностях $V_2 \subset E_5$ с параллельной третьей фундаментальной формой, имеющих неплоскую нормальную связность. - Восьмая всесоюзн. научн. конф. по соврем. проблемам дифф. геом. Тезисы докладов. Одесса, 1984, с. 131.

11. Риманова геометрия в ортогональном репере. По лекциям Э.Картана. Пер. и ред. С.П.Финикова. М., Изд. МГУ, 1960. - 307 с.

12. Солодовников А.С., Модели эллиптических пространств. - Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу, 1961, № 11, с. 293 - 308.

13. Ferus D. Immersions with parallel second fundamental form. - Math. Z., 1974, B. 140, S. 87-93.

14. Ferus D. Symmetric submanifolds of euclidean space. - Math. Ann., 1980, B. 247, S. 81-93.

15. Magid M. A. Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms. - Tsukuba J. Math., 1984, v. 8, p. 31-54.

16. Matsuyama Y. Minimal submanifolds in S^N and R^N. - Math. Z. 1980, B. 175, S. 275-282.

17. Naitoh H. Isotropic submanifolds with parallel second fundamental forms in symmetric spaces.- Osaka J.

Math., 1980, v.17, p. 95-110.

18. S t r ü b i n g W. Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds. - Math. Ann., 1979, B. 245, S. 37-44.

19. V i l m s J. Submanifolds of euclidean space with parallel second fundamental form. - Proc. Amer. Math. Soc., 1972, v. 32, p. 263-267.

20. W a l d e n R. Untermannigfaltigkeiten mit paralleler zweiter Fundamentalform in euklidischen Räumen und Sphären.- Manuscr. math., 1973, H.10, S. 91-102.

Поступило
I2 XII I985

SMALL-DIMENSIONAL IRREDUCIBLE SUBMANIFOLDS WITH PARALLEL THIRD FUNDAMENTAL FORM

Ü.Lumiste

S u m m a r y

Submanifolds with second fundamental form α_2 parallel in the van-der-Waerden - Bortolotti connection $\bar{\nabla}$ are found in Euclidean spaces [19,20,13,14] and investigated in several other ambient spaces [3,15-18]. The third fundamental form $\bar{\nabla}\alpha_2=\alpha_3$ is said to be parallel in $\bar{\nabla}$, if $\bar{\nabla}\alpha_3=0$ (particularly if $\alpha_3=0$, i.e. if α_2 is parallel).

Submanifolds with $\bar{\nabla}\alpha_3=0$ in Euclidean spaces are investigated in [2,4,5,9,10]. In the present paper all complete curves, surfaces and hypersurfaces with $\bar{\nabla}\alpha_3=0$ are found in E_n. In case $\alpha_3\neq 0$ they are: Cornu spiral $C_1(a)$ in E_2 and spherical Cornu spiral $C_1^S(a,r)$ in $S_2(r)\subset E_3$; product of one such spiral with a straight line or a circle, product two such spirals and the only irreducible surface with $\bar{\nabla}\alpha_3=0, \alpha_3\neq 0$ — spherical regulus $B_2(c,r)$, generated by spherical binormals of a curve in $S_3(r)\subset E_4$ with spherical natural equations $k_s=cs$, $\varkappa_s=-\frac{1}{r}$; product of $C_1(a)$ and plane E_{n-2} in E_n. Irreducible (i.e. non-product) surface with $\alpha_3=0$ in E_n is either sphere $S_2(r)\subset E_3$ or Veronese surface $V_2(r)\subset S_4(r)\subset E_5$, but the only irreducible hypersurface with $\bar{\nabla}\alpha_3=0$ in E_n is hypersphere $S_{n-1}(r)$ (which have $\alpha_3=0$).

НОРМАЛЬНАЯ ДЕФЕКТНОСТЬ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

В.Мирзоян

Ереванский политехнический институт им. К.Маркса

Введение

Пространство дефектности риманова многообразия и пространство относительной дефектности подмногообразия евклидова пространства, относящиеся к тензору кривизны, были введены и изучены в [5]. В частности была доказана теорема об инволютивности распределения, образованного пространством дефектности риманова многообразия. На основании неравенства между размерностями указанных пространств и коразмерностью подмногообразия были сделаны важные выводы о невозможности некоторых изометрических погружений в евклидовы пространства. Исследование пространств дефектности и относительной дефектности продолжалось в работах [6 - 9].

В работе [3] автором было определено понятие пространства нормальной дефектности подмногообразия евклидова пространства. Были изучены также некоторые свойства этого пространства. В частности в [3] доказана теорема об инволютивности распределения, образуемого на подмногообразии пространством нормальной дефектности и указана связь с пространствами дефектности и относительной дефектности.

Настоящая работа посвящена изучению свойств пространства нормальной дефектности подмногообразия в римановом многообразии. Расширяются и углубляются результаты, полученные в [3]. Дано несколько определений пространства нормальной дефектности и показана их эквивалентность. Выведены необходимые и достаточные инволютивности распределения T_1 пространств нормальной дефектности (теорема 1) и указаны некоторые случаи, когда они удовлетворены (теорема 3). Найдены условия, при которых размерности подмногообразия и его пространства нормальной дефектности имеют одинаковую четность (теоремы 4 и 6), и сделаны следствия о невозможности некоторых изометрических погружений. В случае пространства постоянной кривизны доказаны некоторые геометрические свойства подмногообразия, на котором распределение T_1 и ортогонально дополняющее его распределение $T_1^{\perp}$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы (теорема 7).

§ 1. Необходимые сведения из геометрии подмногообразий

Пусть M является m-мерным подмногообразием n-мерного риманова многообразия $\tilde{M}$. Риманова связность $\tilde{\nabla}$ многообразия $\tilde{M}$ индуцирует в касательном $T(M)$ и нормальном $T^{\perp}(M)$ расслоениях подмногообразия M естественные связности: в $T(M)$ связность Леви Чивита ∇ индуцированной метрики на M, а в $T^{\perp}(M)$ нормальную связность $\nabla^{\perp}$, которая векторным полям X и ξ, как сечениям в $T(M)$ и $T^{\perp}(M)$, соответственно, ставит в соответствие в точке $x \in M$ компоненту ковариантной производной $(\tilde{\nabla}_X \xi)_x$ во втором прямом слагаемом $T_x^{\perp}(M)$ разложения $T_x(\tilde{M}) = T_x(M) \oplus T_x^{\perp}(M)$. При этом для любых касательных к M векторных полей X, Y и любого нормального к M векторного поля ξ имеют место формулы ([4], с. 38,40)

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha_2(X, Y), \tag{1}$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^{\perp} \xi, \tag{2}$$

где в правых частях первые слагаемые в точке $x \in M$ принадлежат $T_x(M)$, а вторые — $T_x^{\perp}(M)$. В формуле (1) α_2 является билинейной симметрической формой со значениями в $T_x^{\perp}(M)$. Она называется второй фундаментальной формой подмногообразия M. В формуле (2) A_ξ в точке $x \in M$ является симметрическим эндоморфизмом пространства $T_x(M)$ и называется вторым фундаментальным тензором подмногообразия M, соответствующим нормальному векторному полу ξ. Форма α_2 и тензор A_ξ связаны между собой тождеством ([4], с. 41)

$$g(A_\xi(X), Y) = \tilde{g}(\alpha_2(X, Y), \xi),$$

где g и $\tilde{g}$ – метрики в $T(M)$ и $T(\tilde{M})$ соответственно. Подмногообразие M называется вполне геодезическим, если $\alpha_2 = 0$. Если $A_\xi = \lambda I$, где λ — некоторая функция, I — тождественное преобразование, то M называется омбилическим относительно нормального векторного поля ξ. Если M является омбилическим относительно каждого нормального векторного поля, то оно называется вполне омбилическим подмногообразием.

Пусть $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ – векторные поля на $\tilde{M}$ и $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ —коммутатор полей $\tilde{X},\tilde{Y}$. Тензор $\tilde{R}$, определяемый равенством

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{Z},$$

называется тензором кривизны многообразия M . Как известно, тензор R обладает следующими свойствами ([4] , с.15,16):

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} + \tilde{R}(\tilde{Y},\tilde{Z})\tilde{X} + \tilde{R}(\tilde{Z},\tilde{X})\tilde{Y} = 0, \qquad (3)$$

$$(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{R})(\tilde{Y},\tilde{Z}) + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{R})(\tilde{Z},\tilde{X}) + (\tilde{\nabla}_{\tilde{Z}}\tilde{R})(\tilde{X},\tilde{Y}) = 0. \qquad (4)$$

Эти равенства называются, соответственно, первым и вторым тождествами Бианки. Тензор $R^{\perp}$, определенный равенством

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y\xi - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi,$$

где X,Y — произвольные касательные, а ξ — произвольное нормальное к M векторные поля, называется тензором кривизны нормальной связности. Указанные тензоры связаны между собой уравнением Риччи ([4] , с. 47)

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,\eta) = \tilde{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) - g([A_\xi,A_\eta]X,Y), \qquad (5)$$

где η — нормальное векторное поле, а $[A_\xi,A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. Нормальная компонента $(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}$ вектора $\tilde{R}(X,Y)Z$,где X,Y,Z — касательные к M векторные поля, входит в уравнение Кодации ([4] , с. 46)

$$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\bar{\nabla}_X\alpha_2)(Y,Z) - (\bar{\nabla}_Y\alpha_2)(X,Z), \qquad (6)$$

где $\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^{\perp}$ обозначает связность ван дер Вардена - Бортолотти. Если многообразие $\tilde{M}$ является пространством постоянной кривизны, то уравнения Риччи и Кодации принимают, соответственно, следующий вид ([4] , с. 47)

$$\tilde{g}(R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta) = g([A_\xi,A_\eta]X,Y), \qquad (7)$$

$$(\bar{\nabla}_X\alpha_2)(Y,Z) = (\bar{\nabla}_Y\alpha_2)(X,Z). \qquad (8)$$

Если $R^{\perp}=0$, то говорят, что нормальная связность подмногообразия M плоская.

За всеми остальными сведениями отсылаем к монографии [4].

§ 2. Пространство нормальной дефектности подмногообразия

В касательном пространстве $T_x(M)$ в точке $x\in M$ определим подпространство $T_1(x)$ равенством

$$T_1(x) = \{X\in T_x(M)\ ;\ R^{\perp}(X,Y)=0 \quad \forall Y\in T_x(M)\}.$$

Это подпространство будем называть, как и в [3] , пространством нормальной дефектности подмногообразия M в точке x, а его размерность $\mu_1(x)$ — индексом нормальной дефектности в этой точке. Очевидно, что нормальная связность $\nabla^\perp$ подмногообразия M является плоской тогда и только тогда, когда $\mu_1(x)=m$ в каждой точке $x\in M$.

Если $R^\perp_x \neq 0$, $x\in M$, то $\mu(x)\leq m-2$. Действительно, пусть $\mu_1(x)=m-1$. Тогда $R^\perp(X,Y)=0$ для любых $X\in T_1(x)$ и $Y\in T_1(x)^\perp$, где $T_1(x)^\perp$ — одномерное ортогональное дополнение к $T_1(x)$ в $T_x(M)$. Отсюда следует, что $R^\perp(X,Y)=0$ для любых $X,Y\in T_x(M)$, что противоречит условию $R^\perp_x\neq 0$.

Приведем еще один способ определения пространства $T_1(x)$. Для каждого $Y\in T_x(M)$ определим в $T_x(M)$ пространство $T_x(Y)$ следующим образом:

$$T_x(Y)=\{Z\in T_x(M);\ R^\perp(Y,Z)=0\}.$$

Точно так же, как в [3], можно доказать, что

$$T_1(x)=\bigcap_{Y\in T_x(M)} T_x(Y).$$

Если пространство $T_1(x)$ в некоторой области $\mathcal{U}\subset M$ имеет постоянную размерность μ_1, то в этой области возникает μ_1-мерное распределение T_1. В настоящем параграфе исследуется вопрос об инволютивности этого распределения. В случае объемлющего евклидова пространства этот вопрос решен положительно [3]. В общем случае справедлива следующая

Теорема 1. Для того, чтобы распределение T_1 было инволютивным, необходимо и достаточно, чтобы для любых векторных полей $X, Y\in T_1$ и произвольного касательного к M векторного поля Z выполнялось равенство

$$(\bar\nabla_X R^\perp)(Y,Z)=(\bar\nabla_Y R^\perp)(X,Z). \qquad (9)$$

Доказательство. Пусть векторные поля X, Y, Z такие как в условии теоремы, а ξ — произвольное нормальное к векторное поле. Тогда

$$(\bar\nabla_X R^\perp)(Y,Z)\xi=\nabla^\perp_X(R^\perp(Y,Z)\xi)-R^\perp(\nabla_X Y,Z)\xi-$$
$$-R^\perp(Y,\nabla_X Z)\xi-R^\perp(Y,Z)\nabla^\perp_X\xi=$$
$$=-R^\perp(\nabla_X Y,Z)\xi;$$

вычисляя аналогично, получим

$$(\bar\nabla_Y R^\perp)(X,Z)\xi=-R^\perp(\nabla_Y X,Z)\xi.$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая, что связность ∇ имеет нулевое кручение, т.е. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, будем иметь

$$(\bar{\nabla}_X R^\perp)(Y,Z)\xi - (\bar{\nabla}_Y R^\perp)(X,Z)\xi = R^\perp(Z,[X,Y])\xi.$$

Отсюда в силу произвольности Z и ξ и следует, что условие (9) необходимо и достаточно для инволютивности распределения T_1. Теорема доказана.

Замечание I. Если векторные поля X, Y, Z такие как в условии теоремы 1, то $(\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X,Y)\xi = 0$ для произвольного нормального к M векторного поля ξ. В силу этого необходимое и достаточное условие (9) инволютивности распределения T_1 можно представить также в виде

$$(\bar{\nabla}_X R^\perp)(Y,Z) + (\bar{\nabla}_Y R^\perp)(Z,X) + (\bar{\nabla}_Z R^\perp)(X,Y) = 0, \quad (9')$$

где $X, Y \in T_1$, а Z — произвольное касательное к M векторное поле.

Теорема 2. Если тензор кривизны $R^\perp$ нормальной связности $\nabla^\perp$ параллелен в связности $\bar{\nabla}$, то распределение T_1 инволютивно и его листы являются вполне геодезическими в M.

Доказательство. Пусть $\bar{\nabla}_Z R^\perp = 0$ для любого касательного к M векторного поля Z. Тогда (9) удовлетворено. Если $Y \in T_1$, а X, Z -- произвольные, то

$$0 = (\bar{\nabla}_Z R^\perp)(Y,X) = -R^\perp(\nabla_Z Y, X).$$

Следовательно, $\nabla_Z Y \in T_1$ для любого Z; поэтому распределение T_1 параллельно и его листы вполне геодезичны. Теорема доказана.

Замечание 2. В этом случае ортогональное дополнение $T_1^\perp$ к T_1 также будет параллельным распределением.

§ 3. Случаи с инволютивным распределением T_1

Ниже мы укажем некоторые случаи, когда равенство (9) имеет место для любых касательных к M векторных полей X, Y, Z. Тогда условие теоремы 1 автоматически выполнено и распределение T_1 инволютивно.

Пусть $\tilde{R}_{ABC}{}^D$, $R_{ij\alpha}{}^\beta$, b^α_{ij} обозначают, соответственно, компоненты тензоров $\tilde{R}$, $R^\perp$ и второй фундаментальной формы α_2 относительно любого адаптированного к M ортонормированного репера, где индексы пробегают следующие значения: $A,B,C,D = 1,\dots,n$; $i,j,k,\ell = 1,\dots,m$; $\alpha,\beta,\gamma = m+1,\dots,n$.

Через ω^A_B, ω^j_i, ω^β_α обозначаются 1-формы связностей $\tilde{\Gamma}$, ∇, $\nabla^\perp$ соответственно. Как известно

$$\omega_A^B+\omega_B^A=0,\quad \omega_i^j+\omega_j^i=0,\quad \omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0.$$

Пусть (9) имеет место для всех X, Y, Z, тогда оно равносильно следующему равенству:

$$\bar\nabla_k R_{ij\alpha}{}^\beta+\bar\nabla_i R_{jk\alpha}{}^\beta+\bar\nabla_j R_{ki\alpha}{}^\beta=0, \tag{10}$$

где $\bar\nabla_k=\bar\nabla_{e_k}$.

Вычислим левую часть этого равенства. Так как уравнение Риччи (5) равносильно уравнению

$$R_{ij\alpha}{}^\beta=b_{\alpha j}^{\,k}b_{ki}^\beta-b_{\alpha i}^{\,k}b_{kj}^\beta+\tilde R_{ij\alpha}{}^\beta,$$

где $b_{\alpha i}^{\,k}=b_{ki}^\alpha$, то мы имеем

$$\begin{aligned}\bar\nabla R_{ij\alpha}{}^\beta=&(\bar\nabla_k b_{\alpha j}^{\,\ell})b_{\ell i}^\beta+b_{\alpha j}^{\,\ell}(\bar\nabla_k b_{\ell i}^\beta)-\\&-(\bar\nabla_k b_{\alpha i}^{\,\ell})b_{\ell j}^\beta-b_{\alpha i}^{\,\ell}(\bar\nabla_k b_{\ell j}^\beta)+\bar\nabla_k R_{ij\alpha}{}^\beta.\end{aligned} \tag{11}$$

Уравнение Кодации (6) равносильно уравнению

$$\bar\nabla_i b_{jk}^\alpha=\bar\nabla_j b_{ik}^\alpha+\tilde R_{ijk}{}^\alpha. \tag{12}$$

Поэтому, заменяя в (11) $\bar\nabla_k b_{\alpha i}^{\,\ell}$ и $\bar\nabla_k b_{\ell j}^\beta$, получим

$$\begin{aligned}\bar\nabla R_{ij\alpha}{}^\beta=&(\bar\nabla_k b_{\alpha j}^{\,\ell})b_{\ell i}^\beta+b_{\alpha j}^{\,\ell}(\bar\nabla_k b_{\ell i}^\beta)-(\bar\nabla_i b_{\alpha k}^{\,\ell})b_{\ell j}^\beta-b_{\alpha i}^{\,\ell}(\bar\nabla_j b_{\ell k}^\beta)-\\&-\tilde R_{ki\alpha}{}^\ell b_{\ell j}^\beta-\tilde R_{kj\ell}{}^\beta b_{\alpha i}^{\,\ell}+\bar\nabla_k\tilde R_{ij\alpha}{}^\beta.\end{aligned}$$

Если в этом равенстве произвести круговую перестановку индексов k, i, j, то получим еще два аналогичных равенства. Складывая все эти равенства и делая необходимые сокращения, будем иметь

$$\begin{aligned}\bar\nabla_k R_{ij\alpha}{}^\beta+\bar\nabla_i R_{jk\alpha}{}^\beta+\bar\nabla_j R_{ki\alpha}{}^\beta=&-\tilde R_{ki\alpha}{}^\ell b_{\ell j}^\beta-\tilde R_{kj\ell}{}^\beta b_{\alpha i}^{\,\ell}\\&-\tilde R_{ij\alpha}{}^\ell b_{\ell k}^\beta-\tilde R_{ik\ell}{}^\beta b_{\alpha j}^{\,\ell}-R_{jk\alpha}{}^\ell b_{\ell i}^\beta-\tilde R_{ji\ell}{}^\beta b_{\alpha k}^{\,\ell}+\\&+\bar\nabla_k\tilde R_{ij\alpha}{}^\beta+\bar\nabla_i R_{jk\alpha}{}^\beta+\bar\nabla_j R_{ki\alpha}{}^\beta.\end{aligned} \tag{13}$$

Так как

$$\begin{aligned}\bar\nabla_k\tilde R_{ij\alpha}{}^\beta=&\,e_k(\tilde R_{ij\alpha}{}^\beta)+\tilde R_{ij\alpha}{}^\gamma\omega_\gamma^\beta(e_k)+\tilde R_{ij\alpha}{}^\ell\omega_\ell^\beta(e_k)-\\&-\tilde R_{ij\gamma}{}^\beta\omega_\alpha^\gamma(e_k)-\tilde R_{ij\ell}{}^\beta\omega_\alpha^\ell(e_k)-\tilde R_{\ell j\alpha}{}^\beta\omega_i^\ell(e_k)-\tilde R_{\gamma j\alpha}{}^\beta\omega_i^\gamma(e_k)-\\&-\tilde R_{i\ell\alpha}{}^\beta\omega_j^\ell(e_k)-\tilde R_{i\gamma\alpha}{}^\beta\omega_j^\gamma(e_k),\end{aligned}$$

то учитывая, что $\omega_i^\alpha(e_k)=b_{ik}^\alpha$ и $\omega_\alpha^i=-\omega_i^\alpha$, получим

$$\begin{aligned}\bar\nabla_k\tilde R_{ij\alpha}{}^\beta=\bar\nabla_k\tilde R_{ij\alpha}{}^\beta+\tilde R_{ij\alpha}{}^\ell b_{\ell k}^\beta+\tilde R_{ij\ell}{}^\beta b_{\alpha k}^{\,\ell}-\\-\tilde R_{\gamma j\alpha}{}^\beta b_{ik}^\gamma-\tilde R_{i\gamma\alpha}{}^\beta b_{jk}^\gamma.\end{aligned}$$

Если в этом равенстве сделать круговую перестановку индексов

k, i, j, то получим еще два аналогичных равенства. Складывая все три равенства, делая необходимые сокращения и учитывая тождество Бианки (4), получим

$$\bar{\nabla}_k \tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\beta} + \bar{\nabla}_i \tilde{R}_{jk\alpha}{}^{\beta} + \bar{\nabla}_j R_{ki\alpha}{}^{\beta} =$$

$$= - R_{ij\ell}{}^{\beta} b_{\alpha k}^{\ell} - \tilde{R}_{jk\ell}{}^{\beta} b_{\alpha i}^{\ell} - \tilde{R}_{ki\ell}{}^{\beta} b_{\alpha j}^{\ell} - \tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\ell} b_{\ell k}^{\beta} - \tilde{R}_{jk\alpha}{}^{\ell} b_{\ell i}^{\beta} - \tilde{R}_{ki\alpha}{}^{\ell} b_{\ell j}^{\beta}$$

Подставляя в (13) и учитывая кососимметричность $\tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\beta}$ по индексам i, j, будем иметь

$$\bar{\nabla}_k R_{ij\alpha}{}^{\beta} + \bar{\nabla}_i R_{jk\alpha}{}^{\beta} + \bar{\nabla}_j R_{ki\alpha}{}^{\beta} = -2\,(\tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\ell} b_{\ell k}^{\beta} + \tilde{R}_{jk\alpha}{}^{\ell} b_{\ell i}^{\beta} + \tilde{R}_{ki\alpha}{}^{\ell} b_{\ell j}^{\beta}). \qquad (14)$$

Тождество (14) выполняется для любого подмногообразия M в произвольном римановом многообразии $\tilde{M}$. Опираясь на это тождество, укажем некоторые случаи, когда имеет место равенство (10), а следовательно и (9) для любых X, Y, Z.

(А) Подмногообразие M является вполне геодезическим в $\tilde{M}$, т.е. $b_{ij}^{\beta} = 0$.

(Б) Подмногообразие M является вполне омбилическим, т.е. $b_{ij}^{\beta} = \lambda^{\beta} \delta_{ij}$ (δ_{ij} – символ Кронекера). Действительно, в этом случае имеем

$$\tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\ell} \lambda^{\beta} \delta_{\ell k} + \tilde{R}_{jk\alpha}{}^{\ell} \lambda^{\beta} \delta_{\ell i} + \tilde{R}_{ki\alpha}{}^{\ell} \lambda^{\beta} \delta_{\ell j} =$$

$$= -\lambda^{\beta} (\tilde{R}_{ijk}{}^{\alpha} + \tilde{R}_{jki}{}^{\alpha} + \tilde{R}_{kij}{}^{\alpha}) = 0,$$

где последнее равенство написано на основании тождества Бианки (3). Итак, правая часть в (14) равна нулю и равенство (10) выполняется.

(В) Подмногообразие M является омбилическим относительно некоторого $(n-m-1)$-мерного подрасслоения нормального расслоения $T^{\perp}(M)$. Действительно, пусть $b_{ij}^{\varsigma} = \lambda^{\varsigma} \delta_{ij}$, $\varsigma = m+2, \dots, n$, т.е. пусть M является омбилическим относительно нормальных векторных полей $e_{m+2}, \dots, e_n$. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получим, что правая часть в (14) равна нулю при $\beta = m+2, \dots, n$. Из (14) в силу $\tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\beta} + \tilde{R}_{ij\beta}{}^{\alpha} = 0$, получим

$$\tilde{R}_{ij\alpha}{}^{\ell} b_{\ell k}^{\beta} + \tilde{R}_{jk\alpha}{}^{\ell} b_{\ell i}^{\beta} + \tilde{R}_{ki\alpha}{}^{\ell} b_{\ell j}^{\beta} =$$

$$= -(\tilde{R}_{ij\beta}{}^{\ell} b_{\ell k}^{\alpha} + \tilde{R}_{jk\beta}{}^{\ell} b_{\ell i}^{\alpha} + \tilde{R}_{ki\beta}{}^{\ell} b_{\ell j}^{\alpha}).$$

Теперь очевидно, что правая часть в (14) равна нулю также при $\beta = m+1$.

(Г) Вторая фундаментальная форма подмногообразия M является параллельной, т.е. $\bar{\nabla}_i b_{jk}^{\alpha} = 0$. В этом случае из (12) имеем $\tilde{R}_{ijk}{}^{\alpha} = 0$. Тогда правая часть в (14) равна нулю.

(Д) Имеют место $\tilde{R}_{ijk}^{\alpha}=0$. Это условие равносильно каждому из следующих условий: $\bar{\nabla}_k b_{ij}^{\alpha}=\bar{\nabla} b_{kj}^{\alpha}$, $(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}=0$ $(\tilde{R}(X,Y)\xi)^{T}=0$ для любых касательных к M векторных полей X, Y, Z и любого нормального векторного поля ξ, где $(\tilde{R}(X,Y)\xi)^{T}$ есть касательная компонента вектора $\tilde{R}(X,Y)\xi$. Первое из этих условий совпадает фактически с (8).

(Е) Объемлющее многообразие M является пространством постоянной кривизны. Тогда условие $(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp}=0$ выполняется для любых касательных к M векторных полей X, Y, Z ([4] , с. 47). Следовательно, правая часть в (14) равна нулю тождественно.

Замечая, что (А) и (Б) являются частными случаями (В), а (Г) - частным случаем (Д), можем сформулировать следующую теорему (в которую мы включаем и часть Теоремы 2).

<u>Теорема 3.</u> Пусть пространство нормальной дефектности $T_1(x)$ подмногообразия M риманова многообразия $\tilde{M}$ в некоторой области $\mathcal{U}\subset M$ имеет постоянную размерность. Тогда каждое из нижеперечисленных условий является достаточным, чтобы в области $\mathcal{U}$ распределение T_1 было инволютивным:

(а) многообразие $\tilde{M}$ является пространством постоянной кривизны;

(б) M является омбилическим относительно $(n-m-1)$-мерного подрасслоения нормального расслоения, где $n=\dim\tilde{M}$, $m=\dim M$;

(в) вторая фундаментальная форма α_2 подмногообразия M удовлетворяет условию

$$(\bar{\nabla}_X\alpha_2)(Y,Z)=(\bar{\nabla}_Y\alpha_2)(X,Z)$$

для любых касательных к M векторных полей X, Y, Z;

(г) тензор кривизны $R^{\perp}$ нормальной связности $\nabla^{\perp}$ является параллельным в связности $\bar{\nabla}$.

Во всех указанных случаях тензор $R^{\perp}$ удовлетворяет уравнению

$$(\bar{\nabla}_X R^{\perp})(Y,Z)+(\bar{\nabla}_Y R^{\perp})(Z,X)+(\bar{\nabla}_Z R^{\perp})(X,Y)=0$$

для любых касательных к подмногообразию M векторных полей X, Y, Z.

Замечание 3. Локальное строение подмногообразия M, вторая фундаментальная форма которой удовлетворяет условию (в) теоремы 3, может при некоторых дополнительных предложениях быть описано.

Пусть, например, подмногообразие M допускает такое нормальное векторное поле ξ, что $[A_\xi, A_\eta]=0$ для любого нормального векторного поля η. (Такое поле было в [2] названо коммутирующим). Тогда подпространства собственных векторов T^{λ_t} $(t=1,\dots,h)$, отвечающих собственным значениям λ_t тензора A_ξ, будут инвариантны относительно всех тензоров A_η и достаточные условия инволютивности образуемых ими распределений, сформулированные в [2] (теорема 3) будут выполняться. Кроме того подпространства T^{λ_t} будут попарно ортогональны и сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2. Итак, при указанном дополнительном условии M несет ортогональную сопряженную систему.

§ 4. Размерность пространства нормальной дефектности

Определение пространства нормальной дефектности можно представить также в следующем виде:

$$T_1(x)=\{X=X^i e_i \in T_x(M);\ R_{ij\alpha}^{\ \ \beta} X^i=0\}, \qquad (15)$$

$i,j=1,\dots,m;\ \alpha,\beta=m+1,\dots,n$. Если хотя бы при одной фиксированной паре значений α,β $\det(R_{ij\alpha}^{\ \ \beta})\neq 0$, то система в (15) имеет только нулевое решение и пространство $T_1(x)$ пусто, Следовательно, условие

$$\det(R_{ij\alpha}^{\ \ \beta})=0$$

для любых α,β является необходимым для того, чтобы пространство $T_1(x)$ было непустым или, что то же самое, чтобы система в (15) имела ненулевые решения.

Пусть коразмерность подмногообразия M равна 2. Тогда $\alpha,\beta=m+1,\ m+2$ и система в (15) сводится к следующей системе:

$$R_{ij\,m+1}^{\ \ m+2} X^i=0. \qquad (16)$$

Заметим, что если $m=\dim M$ является нечетным числом, то $\det(R_{ij\,m+1}^{\ \ m+2})=0$ (определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка всегда равен нулю) и система (16) всегда имеет ненулевые решения.

Очевидно, что индекс нормальной дефектности $\mu_1(x)$ для подмногообразия коразмерности 2 можно определить по формуле

$$\mu_1(x)=m-\operatorname{rang} R_x^{\perp}. \qquad (17)$$

Покажем, что четности чисел $\mu_1(x)$ и m совпадают. Пусть адаптированный к подмногообразию M ортонормированный репер специализирован так, что $e_u \in T_1(x)$; $u = 1, \dots, \mu_1(x)$. Тогда остальные векторы $e_r \in T_x(M)$; $r, s = \mu_1(x)+1, \dots, m$, будут ортогональны к $T_1(x)$. Подставляя в (16) координаты векторов e_u , получим $R_{uj\,m+1}^{\ \ \ m+2} = 0$. Следовательно, $rang\,(R_{ij\,m+1}^{\ \ \ m+2}) = rang\,(R_{rs\,m+1}^{\ \ \ m+2}) = m - \mu_1(x)$. С другой стороны $m - \mu_1(x)$ является порядком квадратной матрицы $(R_{rs\,m+1}^{\ \ \ m+2})$, поэтому $det\,|R_{rs\,m+1}^{\ \ \ m+2}| \neq 0$, и так как эта матрица кососимметрическая, то число $m - \mu_1(x)$ должно быть четное. Итак, справедлива следующая

Теорема 4. Пусть M является m-мерным подмногообразием $(m+2)$-мерного риманова многообразия $\tilde{M}$. Тогда в каждой точке $x \in M$ четность индекса нормальной дефектности $\mu_1(x)$ совпадает с четностью m.

Следствие 1. Риманово многообразие M четной (нечетной) размерности m не может быть изометрически погружено в $(m+2)$-мерное риманово многообразие $\tilde{M}$ так, чтобы индекс нормальной дефектности погружения хотя бы в одной точке $x \in M$ был нечетным (четным).

Пусть $\mathcal{R}$ —симметрическое тензорное поле на M , компоненты которого определяются по формуле

$$\mathcal{R}_{ij} = R_{ik\alpha}^{\ \ \ \beta}\, R_{j\ \ \beta}^{\ k\alpha} . \tag{18}$$

Если координаты вектора $X = X^i e_i$ удовлетворяют системе в (15), то $\mathcal{R}_{ij} X^i = 0$. Обратно, если $\mathcal{R}_{ij} X^i = 0$, то

$$\mathcal{R}_{ij} X^i X^j = R_{ik\alpha}^{\ \ \ \beta} X^i\, R_{j\ \ \beta}^{\ k\alpha} X^j = 0$$

Следовательно, $R_{ik\alpha}^{\ \ \ \beta} X^i = 0$ и пространство $T_1(x)$ мы можем определить как множество векторов $X = X^i e_i \in T_x(M)$ таких, что $\mathcal{R}_{ij} X^i = 0$. Иначе говоря, $T_1(x)$ является подпространством собственных векторов тензора $\mathcal{R}$, отвечающих нулевому собственному значению. Тогда, очевидно, индекс нормальной дефектности можем определить по следующей общей формуле

$$\mu_1(x) = m - rang\,\mathcal{R}_x . \tag{19}$$

Заметим, что $\mathcal{R}_{ij} X^i X^j \geq 0$ для любого вектора $X = X^i e_i \in T_x(M)$, причем $\mathcal{R}_{ij} X^i X^j > 0$ тогда и только тогда, когда $X \notin T_1(x)$. Следовательно, если пространство $T_1(x)$ пусто, то квадратичная форма $\mathcal{R}_{ij} X^i X^j$ является положительно определенной.

Пусть $X = X^i e_i$ — некоторое касательное к M векторное поле и мы положим $\varphi = X^i X_i$, где в ортонормированном репере $X_i = X^i$. Применяя к этой функции оператор

Лапласа $\Delta = \delta^{pq}\nabla_p\nabla_q$; $p,q = 1,\dots,m$, получим

$$\frac{1}{2}\Delta\Psi = X^i\delta^{pq}\nabla_p\nabla_q X_i + (\nabla_p X^i)(\nabla^p X_i),$$

где $\nabla^p = \delta^{pq}\nabla_q$. Если X_i удовлетворяют уравнению $\Delta X_i = \mathcal{R}_{ij}X^i$, то с учетом неравенства $\mathcal{R}_{ij}X^iX^j \geqslant 0$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\Delta\Psi = \mathcal{R}_{ij}X^iX^j + (\nabla_p X^i)(\nabla^p X_i) \geqslant 0.$$

Если подмногообразие M компактно, то из последнего неравенства, в силу леммы Хопфа ([4] , с. 11), получим $\nabla_p X_i = 0$, $\mathcal{R}_{ij}X^iX^j = 0$, т.е. векторное поле X параллельно в связности ∇ и $X_x \in T_1(x)$ в каждой точке $x \in M$. Если $T_1(x) = \{0\}$ в каждой точке, то квадратичная форма $\mathcal{R}_{ij}X^iX^j$ положительно определенная и из $\mathcal{R}_{ij}X^iX^j = 0$ получаем $X^i = 0$, т.е. X — нулевое векторное поле. Итак, справедлива следующая

Теорема 5. Пусть на компактном подмногообразии M риманова многообразия $\tilde{M}$ компоненты X^i некоторого касательного векторного поля X относительно ортонормированного репера удовлетворяют условию

$$\Delta X_i = \mathcal{R}_{ij}X^j \quad ; \quad i,j = 1,\dots,\dim M,$$

где Δ — оператор Лапласа, а $\mathcal{R}_{ij}$ определены равенством (18). Тогда векторное поле X параллельно в связности ∇ и $X_x \in T_1(x)$ в каждой точке $x \in M$. Если $T_1(x) = \{0\}$, то указанному условию удовлетворяют только компоненты нулевого векторного поля.

Замечание 4. Тензор $\mathcal{R}$ можно использовать также и для описания строения подмногообразия M . Пусть тензор $\mathcal{R}$ является параллельным в связности ∇ . (Это случится, например, если тензор кривизны нормальной связности $R^{\perp}$ параллелен в связности ван дер Вардена - Бортолотти, т.е. если $\bar{\nabla}_k R_{ij\alpha}^{\ \ \beta} = 0$, тогда, очевидно $\nabla_k\mathcal{R}_{ij} = 0$). Тогда можно показать, что распределения

$$T^{\lambda_u} : x \in M \longmapsto T_x^{\lambda_u} = \{X \in T_x(M) ; \ \mathcal{R}(X) = \lambda_u X\},$$

где λ_u $(u = 1,\dots,t)$ — собственные значения $\mathcal{R}$, инволютивны и параллельны. Следовательно, их интегральные многообразия являются вполне геодезическими в M . Кроме того, все λ_u постоянны. Доказательство этих утверждений в точности повторяет доказательство второго утверждения теоремы 7 в [2].

§ 5. Случай объемлющего пространства постоянной кривизны

В настоящем параграфе будем предполагать, что объемлющее многообразие $\widetilde{M}$ является пространством постоянной кривизны и обозначать его через $\widetilde{M}(c)$, где c —кривизна пространства. Покажем, что в этом случае пространство нормальной дефектности $T_1(x)$ подмногообразия M можно определять различными способами, при этом будут выявляться новые свойства этого пространства.

Точно также, как в [3] (Лемма 1), можно доказать с помощью (7), что условия $X \in T_1(x)$ и $[A_\xi, A_\eta]X = 0$ для любых $\xi, \eta \in T_x^\perp(M)$ эквивалентны. Поэтому пространство $T_1(x)$ можно для подмногообразия $M \subset \widetilde{M}(c)$ определить и равенством

$$T_1(x) = \{X \in T_x(M) ;\ [A_\xi, A_\eta]X = 0 \quad \forall \xi, \eta \in T_x^\perp(M)\}.$$

Покажем, что ортогональное дополнение $T_1^\perp(x)$ к $T_1(x)$ в $T_x(M)$ содержит $\mathrm{Im}\,[A_\xi, A_\eta]$ для любых $\xi, \eta \in T_x^\perp(M)$. Действительно, из уравнения Риччи (7) имеем

$$g([A_\xi, A_\eta]X, Y) = -g(X, [A_\xi, A_\eta]Y).$$

Отсюда следует, что $[A_\xi, A_\eta]Y \perp X$ для любого $X \in T_1(x)$. Следовательно, $[A_\xi, A_\eta]Y \in T_1^\perp(x)$.

Поэтому $T_1^\perp(x)$ инвариантно относительно операторов $[A_\xi, A_\eta]^2$. Эти операторы симметрические. Действительно,

$$g([A_\xi, A_\eta]^2 X, Y) = -g([A_\xi, A_\eta]X, [A_\xi, A_\eta]Y) =$$
$$= g(X, [A_\xi, A_\eta]^2 Y)$$

для любых $X, Y \in T_x(M)$.

Если $X \in T_1(x)$, то $[A_\xi, A_\eta]^2 X = 0$ для любых $\xi, \eta \in T_x^\perp(M)$. Следовательно, $T_1(x) \subset T_x^{\xi\eta}$, где $T_x^{\xi\eta}$ обозначает подпространство собственных векторов оператора $[A_\xi, A_\eta]^2$, отвечающих нулевому собственному значению. Обратно, если $X \in T_x^{\xi\eta}$ для любых ξ, η , то

$$0 = g([A_\xi, A_\eta]^2 X, X) = -g([A_\xi, A_\eta]X, [A_\xi, A_\eta]X).$$

Отсюда, в силу невырожденности метрики g , имеем $[A_\xi, A_\eta]X = 0$ для любых ξ, η и, следовательно, $X \in T_1(x)$. Таким образом, пространство $T_1(x)$ можно определить равенством

$$T_1(x) = \{X \in T_x(M) ;\ [A_\xi, A_\eta]^2 X = 0 \quad \forall \xi, \eta \in T_x^\perp(M)\}.$$

Если все собственные значения какого-либо оператора $[A_\xi, A_\eta]^2$ отличны от нуля, т.е. $\det [A_\xi, A_\eta]^2 \neq 0$, то $T_1(x) = \{0\}$. Заметим, что собственные значения операторов $[A_\xi, A_\eta]^2$ неположительны. Действительно, если $[A_\xi, A_\eta]^2 X = \lambda X$, то

$$g([A_\xi,A_\eta]X,[A_\xi,A_\eta]X)=-g([A_\xi,A_\eta]^2X,X)=$$
$$=-g(\lambda X,X)=-\lambda g(X,X).$$

Отсюда, в силу положительной определенности метрики g, следует, что $\lambda \leqslant 0$.

В дальнейшем нам понадобится понятие p-мерного вполне коммутирующего подрасслоения N^p нормального расслоения $T^\perp(M)$, введенное автором в [2]. Напомним его определение.

Подрасслоение N^p нормального расслоения $T^\perp(M)$ называется вполне коммутирующим, если каждое нормальное векторное поле ξ, такое, что $\xi_x \in N^p_x$, $x\in M$, является коммутирующим, т.е. второй фундаментальный тензор A_ξ коммутирует с тензорами A_η для любого нормального векторного поля η.

Теорема 6. Пусть m-мерное подмногообразие M n-мерного пространства постоянной кривизны $\tilde{M}(c)$ допускает $(n-m-2)$-мерное вполне коммутирующее подрасслоение нормального расслоения. Тогда в каждой точке $x\in M$ четность индекса нормальной дефектности $\mu_1(x)$ совпадает с четностью m.

Доказательство. Пусть подрасслоение N^{n-m-2} является вполне коммутирующим и пусть адаптированный к M ортонормированный репер выбран так, что $e_{m+3},\dots,e_n$ принадлежат N^{n-m-2}. Тогда e_{m+1}, e_{m+2} ортогональны к N^{n-m-2} и $[A_{e_\varrho},A_{e_\sigma}]=[A_{e_\varrho},A_{e_{m+1}}]=[A_{e_\varrho},A_{e_{m+2}}]=0$; $\varrho,\sigma=m+3,\dots,n$. Отсюда и из уравнения Риччи (7) при $X=e_i$, $Y=e_j$ получим $R_{ij\varrho}{}^{\sigma}=0$, $R_{ij\,m+1}{}^{\varrho}=0$, $R_{ij\,m+2}{}^{\varrho}=0$. Следовательно, система в (15) для настоящего случая сводится к системе (16). Рассуждая аналогично, как при выводе теоремы 4, получим, что $\mu_1(x)$ и m имеют одинаковую четность.

Следствие 2. Риманово многообразие M четной (нечетной) размерности m не может быть изометрически погружено в n-мерное пространство постоянной кривизны $\tilde{M}(c)$ так, чтобы это погружение допускало $(n-m-2)$-мерное вполне коммутирующее подрасслоение нормального расслоения и чтобы его индекс нормальной дефектности $\mu_1(x)$ хотя бы в одной точке $x\in M$ был нечетным (четным).

Замечание 5. Условие теоремы 6 выполняется, в частности, для подмногообразия M

1) омбилического относительно $(n-m-2)$-мерного подрасслоения N^{n-m-2} нормального расслоения или

2) допускающего $(n-m-2)$-мерное параллельное подрасслоение нормального расслоения, такое, что в нем индуцируется плоская связность или
3) имеющего 2-мерное первое нормальное пространство $N_1(x)$ в каждой точке $x \in M$ (здесь заметим, что $N_1(x)$ является ортогональным дополнением подпространства нормальных векторов ξ таких, что $A_\xi = 0$, до нормального пространства $T_x^\perp(M)$).

Для доказательства достаточно отметить, что указанные выше подрасслоения в случаях 1) и 2) являются вполне коммутирующими, а 3) есть частный случай случая 1) (см. [2]).

Пусть в некоторой окрестности $\mathcal{U} \subset M$ $\dim T_1(x) = \mu_1 = const$. Тогда в силу теоремы 3 в этой окрестности распределение T_1 инволютивно.

Предполагаем теперь, распределение T_1 и его ортогональное дополнение $T_1^\perp$ в $T(M)$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 подмногообразия M. (Это имеет место, например, когда M допускает коммутирующее нормальное векторное поле ξ, а $T_1(x)$ совпадает с подпространством собственных векторов второго фундаментального тензора A_ξ, отвечающих некоторому собственному значению λ, или же является прямой суммой некоторых таких собственных подпространств). При этом предположении в каждой точке $x \in \mathcal{U}$ имеем $\alpha_2(X,Y)=0$ для любого $X \in T_1(x)$ и любого $Y \in T_1^\perp(x)$. Если адаптированный к M ортонормированный репер выбран так, что $e_u \in T_1(x)$ $(u,v,w = 1,\dots,\mu_1)$ и следовательно $e_r \in T_1^\perp(x)$ $(r,s = \mu_1+1,\dots,m)$, то $\alpha_2(e_u,e_r) = b^\alpha_{ur} e_\alpha = 0$. Отсюда следует, что $b^\alpha_{ur} = 0$. Тогда $\omega^\alpha_r(e_u) = 0$, т.е. $\omega^\alpha_r = 0$ на интегральном многообразии M_1 распределения T_1, и расслоение $T^\perp(M)|_{M_1}$ как подрасслоение нормального расслоения для M_1, является параллельным на M. Покажем, что в нем индуцируется плоская связность. Действительно, так как в выбранном репере $R_{uv\alpha}{}^\beta = 0$, то мы имеем

$$\sum_w (b^\alpha_{uw} b^\beta_{wv} - b^\alpha_{vw} b^\beta_{wu}) + \sum_r (b^\alpha_{ur} b^\beta_{rv} - b^\alpha_{vr} b^\beta_{ru}) = 0.$$

В этом равенстве вторая сумма, очевидно, равна нулю, а первая сумма представляет из себя компоненту $\bar{R}_{uv\alpha}{}^\beta$ тензора кривизны нормальной связности подмногообразия M_1. Следовательно $\bar{R}_{uv\alpha}{}^\beta = 0$ для любых α, β и связность в $T^\perp(M)$ плоская.

Если, кроме того, тензор $R^\perp$ параллелен в связности ван дер Вардена - Бортолотти, то распределения T_1 и $T_1^{\perp}$ в силу Замечания 3 инволютивны и параллельны, т.е. их интегральные многообразия M_1 и $M_1^{\perp}$ вполне геодезичны в M. В этом случае M_1 является подмногообразием с плоской нормальной связностью. Покажем, что $M_1^{\perp}$ в каждой своей точке имеет нулевой индекс нормальной дефектности. Действительно, тензор кривизны нормальной связности $M_1^{\perp}$ — это ограничение на $M_1^{\perp}$ тензора кривизны подмногообразия M и он имеет компоненты $R_{rs\alpha}{}^{\beta}$. Если для некоторого вектора $X = X^r e_r$ имеет место $R_{rs\alpha}{}^{\beta} X^r = 0$, то в силу $b^{\alpha}_{ur} = 0$, получим, что

$$R_{us\alpha}{}^{\beta} X^u + R_{rs\alpha}{}^{\beta} X^r = 0, \qquad R_{uv\alpha}{}^{\beta} X^u + R_{rv\alpha}{}^{\beta} X^r = 0,$$

где $X^u = 0$. Следовательно, X принадлежит пространству нормальной дефектности $T_1(x)$ подмногообразия M, т.е. является касательным к M_1. Тогда $X^r = 0$ и $M_1^{\perp}$ имеет нулевой индекс нормальной дефектности. Итак, справедлива следующая

Теорема 7. Пусть M является m-мерным подмногообразием n-мерного пространства постоянной кривизны $\tilde{M}(c)$. Если в каждой точке $x \in M$ пространство $T_1(x)$ и его ортогональное дополнение $T_1^{\perp}(x)$ в $T_x(M)$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы α_2 подмногообразия M, то нормальное расслоение $T^{\perp}(M)$, как подрасслоение нормального расслоения интегрального многообразия M_1 распределения T_1, является параллельным и в нем индуцируется плоская связность. Если, кроме того, тензор кривизны нормальной связности $R^{\perp}$ подмногообразия M параллелен в связности ван дер Вардена - Бортолотти, то M_1 есть подмногообразие с плоской нормальной связностью. При этом распределение $T_1^{\perp}$ инволютивно и вполне геодезично и его интегральное многообразие $M_1^{\perp}$ имеет нулевой индекс нормальной дефектности в каждой точке.

В заключение укажем, что локальное строение подмногообразия, допускающего параллельное подрасслоение нормального расслоения, в котором индуцируется плоская связность, описано в [I].

Литература

I. Лумисте Ю.Г., Чакмазян А.В., Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны. - Проблемы геометрии. Т.I2 (Итоги науки и техн.

ВИНИТИ АН СССР), М., 1981, 3 - 30.
2. Мирзоян В.А., Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем. - Проблемы геометрии. Т.14 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР), М., 1983, 73 - 100.
3. Мирзоян В.А., Нормальная дефектность подмногообразия. - Докл.АН Арм.ССР, 1983, ХХУП, №1, 11 - 15.
4. Chen B. Y. Geometry of submanifolds. - New-York, Marcel Dekker, 1973.
5. Chern S. S. and Kuiper N. H. Some theorems on the isometric imbeddings of compact Riemannian manifolds in Euclidean space. - Ann. of Math., 1952, v. 56, No. 3, p. 422.430.
6. Ferus D. On the completeness of nullity foliations. - Michigan Math J., 1971, v. 18, p. 61-64.
7. Hartman P. On isometric immersion in Euclidean space of manifolds with nonnegative sectional curvature. - Trans. of Amer. Math. Soc., 1965, v.115, p. 94-109.
8. Maltz R. The nullity spaces of the curvature operator. - Cahiers Top. et Geom. Diff. 1966, v. 8, p. 1-20,
9. Maltz R. The nullity spaces of curvature - like tensors. - J. Diff. Geom. 1972, v. 7, p. 519-523.

15 IX 1985

THE NORMAL NULLITY OF SUBMANIFOLD IN A RIEMANNIAN MANIFOLD

V. Mirzoyan

Summary

The normal nullity space of submanifold in an Euclidean space was introduced by the normal connection curvature tensor in 3 as an analog of the nullity space of the Levi-Civita curvature tensor (see 5-9).

Here this notion is generalized to the case of submanifold in a Riemannian space. Several definitions are given for it with proofs of their equivalency. Necessary and sufficient conditions are proved for involutority of the normal nullity distribution (Theorem 1). Some cases are indicated, when these conditions are involved (Theorem 3).By the codi-

mension 2 (and in a more general case) the dimensions of the submanifold and the normal nullity space are even or odd simultaneously (Theorem 4 (and 6)). Two consequences are made for the impossibility of some isometric immersions. The geometry of submanifold is investigated, if T_1 and T_1 are conjugated with respect to the second fundamental form and the ambient manifold is a constant curvature space (Theorem 7).

ДВУМЕРНЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА Sp_4

А.Парринг, А.Саарне
Кафедра алгебры и геометрии

Целью данной работы является исследование двумерных симплектических поверхностей в 4-мерном симплектическом пространстве Sp_4.

Симплектическое пространство - это аффинное пространство с регулярной кососимметрической метрикой. Кососимметричность метрики вызывает некоторые трудности по сравнению с евклидовой геометрией, например, длина каждого вектора здесь равна нулю. Кроме того, в симплектическом пространстве существуют такие подпространства, в которых метрика частично и даже полностью вырождается.

По этой причине в Sp_4 существуют поверхности двух типов: с симплектическими или с аффинными касательными плоскостями. В этой статье рассматриваются поверхности с симплектическими касательными плоскостями, называемые симплектическими поверхностями. Симплектические поверхности размерности $2m$ впервые в отечественной литературе рассматривались в [I, 2].

Применяются конструкции, имеющие явный геометрический смысл. В силу этого многие геометрически выделенные величины автоматически имеют геометрическое содержание. Существенными источниками являются статьи [3 - 6].

Проводится классификация симплектических поверхностей в Sp_4, исходя из следующих трех принципов.

Во-первых, имея в виду что с каждой симплектической поверхностью связаны два главных расслоения: главное расслоение касательных реперов и главное расслоение нормальных реперов, оба со своими связностями, дается первая классификация двумерных симплектических поверхностей по формам кривизны этих связностей.

Вторая классификация двумерных симплектических поверхностей получается по типам фокальных подмногообразий касательных и нормальных плоскостей (см. [6]). Выясняется взаимосвязь между двумя классификациями (см. ниже теорема 3.4).

В-третьих, к исследованию привлекается сферическое отображение (см. [4]), которое каждой точке поверхности сопоставляет сферический образ касательной плоскости, являющийся точкой единичной сферы S_4 псевдоевклидова пространства ${}^2E_6$. Исследуется, какими будут сферические образы симплектических поверхностей. В общем случае образ поверхности является двумерным подмногообразием и классификация поверхностей проводится по типам фокальных множеств и индикатрис кривизны их образов.

§I. Сферическое отображение двумерных симплектических подпространств симплектического векторного пространства Sp_4

I. Четырехмерное симплектическое пространство Sp_4 – это аффинное пространство, в котором задано кососимметрическое регулярное скалярное умножение $\langle\ ,\ \rangle$. Формы Пфаффа ω^J и ω^J_K $(J, K, \ldots = 1, \ldots, 4)$, в формулах перемещения

$$d\vec{M} = \omega^J \vec{e}_J, \qquad d\vec{e}_J = \omega^K_J \vec{e}_K \tag{I.I}$$

подвижного репера $\{M; \vec{e}_J\}$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega^J_K, \qquad d\omega^J_K = \omega^L_K \wedge \omega^J_L \tag{I.2}$$

и уравнениям

$$dg_{JK} = g_{LK}\omega^L_J + g_{JL}\omega^L_K, \tag{I.3}$$

где $g_{JK} = \langle \vec{e}_J, \vec{e}_K \rangle$. Базис $\{\vec{e}_J\}$ можно выбрать так, что регулярная кососимметрическая матрица $G = \|g_{JK}\|$ имеет вид

$$G = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix} \tag{I.4}$$

где

$$I = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad 0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Базис в этом случае называется симплектическим.

Из (I.3) следует, что тогда $\omega = \|\omega^J_K\|$ имеет вид

$$\omega = \begin{Vmatrix} \omega^1_1 & \omega^2_1 & \omega^3_1 & \omega^4_1 \\ \omega^1_2 & -\omega^1_1 & \omega^3_2 & \omega^4_2 \\ -\omega^4_2 & \omega^4_1 & \omega^3_3 & \omega^4_3 \\ \omega^3_2 & -\omega^3_1 & \omega^3_4 & -\omega^3_3 \end{Vmatrix}. \tag{I.5}$$

2. В [4] дано отображение симплектического векторного пространства Sp_4 в псевдоевклидово пространство ${}^2E_6$. Напомним коротко эту конструкцию.

Пусть V_4 и V_6 векторные пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ и $\{\vec{e}_K\}$ и $\{\vec{E}_\alpha\}$ произвольно фиксированные базисы, соответственно, в V_4 и V_6, где $\alpha, \beta = 1, \ldots, 6$. Определим отображение $\Lambda : V_4 \times V_4 \longrightarrow V_6$,

II

$(\vec{x},\vec{y}) \longmapsto \vec{x}\wedge\vec{y}$ формулой

$$\vec{x}\wedge\vec{y}=\begin{vmatrix}x^1 & x^2\\ y^1 & y^2\end{vmatrix}\vec{E}_1+\begin{vmatrix}x^1 & x^3\\ y^1 & y^3\end{vmatrix}\vec{E}_2+\begin{vmatrix}x^1 & x^4\\ y^1 & y^4\end{vmatrix}\vec{E}_3+$$
$$+\begin{vmatrix}x^2 & x^3\\ y^2 & y^3\end{vmatrix}\vec{E}_4+\begin{vmatrix}x^2 & x^4\\ y^2 & y^4\end{vmatrix}\vec{E}_5+\begin{vmatrix}x^3 & x^4\\ y^3 & y^4\end{vmatrix}\vec{E}_6, \qquad (I.6)$$

где $x^\jmath$ и $y^\jmath$ координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ относительно базиса $\{\vec{e}_\jmath\}$. Отображение $\wedge$ обладает свойствами: 1° $\vec{x}\wedge\vec{y}=-\vec{y}\wedge\vec{x}$, 2° $(\vec{x}+\vec{y})\wedge\vec{z}=\vec{x}\wedge\vec{z}+\vec{y}\wedge\vec{z}$, 3° $(\alpha\vec{x})\wedge\vec{y}=\alpha\,\vec{x}\wedge\vec{y}$. Из определения отображения следует, например, что

$$\vec{E}_1=\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2,\quad \vec{E}_2=\vec{e}_1\wedge\vec{e}_3,\quad \vec{E}_3=\vec{e}_1\wedge\vec{e}_4,$$
$$\vec{E}_4=\vec{e}_2\wedge\vec{e}_3,\quad \vec{E}_5=\vec{e}_2\wedge\vec{e}_4,\quad \vec{E}_6=\vec{e}_3\wedge\vec{e}_4. \qquad (I.7)$$

При $\jmath<\varkappa$ переобозначим $\vec{e}_\jmath\wedge\vec{e}_\varkappa=\vec{e}_{(\jmath\varkappa)}$. Следовательно, базис $\{\vec{E}_\alpha\}$ можно также записать в виде $\{\vec{e}_{(\jmath\varkappa)}\}$.

3. Рассмотрим преобразование базиса $\{\vec{e}_\varkappa\}\longrightarrow\{\vec{e}\,'_\varkappa\}$ в V_4, данное формулой $\vec{e}\,'_\varkappa=A^\alpha_\varkappa\vec{e}_\alpha$, где матрица $A=\|A^\jmath_\varkappa\|$ - элемент полной линейной группы $GL(4,\mathbb{R})$. Это преобразование базиса индуцирует преобразование базиса $\{\vec{e}_{(\jmath\varkappa)}\}\longrightarrow\{\vec{e}\,'_{(\jmath\varkappa)}\}$ в V_6 формулой
$\vec{e}\,'_{(\varkappa_1\varkappa_2)}=\mathcal{A}^{(\alpha_1\alpha_2)}_{(\varkappa_1\varkappa_2)}\vec{e}_{(\alpha_1\alpha_2)}$, где

$$\mathcal{A}^{(\alpha_1\alpha_2)}_{(\varkappa_1\varkappa_2)}=\begin{Vmatrix}A^{\alpha_1}_{\varkappa_1} & A^{\alpha_2}_{\varkappa_1}\\ A^{\alpha_1}_{\varkappa_2} & A^{\alpha_2}_{\varkappa_2}\end{Vmatrix}. \qquad (I.8)$$

Матрица $\mathcal{A}=\|\mathcal{A}^{(\alpha_1\alpha_2)}_{(\varkappa_1\varkappa_2)}\|$ есть (6×6)-матрица и называется ассоциированной матрицей матрицы A. Вообще, по формуле (I.8) можно каждой матрице A сопоставить однозначно определенную матрицу $\mathcal{A}$, так что возникает отображение $\varphi: M_4\longrightarrow M_6$, где M_4 и M_6 - множества матриц, соответственно, порядков 4 и 6, Отображение φ имеет следующие свойства ([4]):

I$^\circ$ $\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$,

2° $\varphi(A^T)=\varphi(A)^T$,

3° если у нас A регулярная матрица, то и $\varphi(A)$ регулярна, причем $\varphi(A^{-1})=\varphi(A)^{-1}$.

Свойство 3° означает, что $\varphi: M_4\longrightarrow M_6$ индуцирует отображение $\varphi: GL(4,\mathbb{R})\longrightarrow GL(6,\mathbb{R})$, которое по I$^\circ$ является гомоморфизмом групп.

<u>Теорема I.I.</u> (см. [4], стр. II3). Образ $\varphi(GL(4,\mathbb{R}))$ является подгруппой группы $GL(6,\mathbb{R})$.

Элементарный подсчет размерностей покажет, что группа $\varphi(GL(4,\mathbb{R}))$ является собственной подгруппой.

4. Пусть векторное пространство V_4 является симплектическим, т.е. пространством Sp_4. С каждым базисом $\{\vec{e}_\varkappa\}$ связана регулярная кососимметрическая матрица $G = \| g_{\varkappa\lambda} \|$. В отображении φ ей соответствует регулярная 6×6 матрица $\varphi(G) = \mathcal{G}$ с общим элементом

$$g_{(\varkappa_1\varkappa_2)(\lambda_1\lambda_2)} = \begin{vmatrix} g_{\varkappa_1\lambda_1} & g_{\varkappa_1\lambda_2} \\ g_{\varkappa_2\lambda_1} & g_{\varkappa_2\lambda_2} \end{vmatrix}. \tag{I.9}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{G}$ симметрична. Она дает возможность определить в V_6 скалярное умножение $\langle \ , \ \rangle$, положив

$$\langle \vec{e}_{(\varkappa_1\varkappa_2)}, \vec{e}_{(\lambda_1\lambda_2)} \rangle = g_{(\varkappa_1\varkappa_2)(\lambda_1\lambda_2)} \tag{I.10}$$

и, вообще, для векторов $\vec{X} = x^{(\varkappa_1\varkappa_2)} \vec{e}_{(\varkappa_1\varkappa_2)}$ и $\vec{Y} = y^{(\varkappa_1\varkappa_2)} \vec{e}_{(\varkappa_1\varkappa_2)}$

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = g_{(\varkappa_1\varkappa_2)(\lambda_1\lambda_2)} x^{(\varkappa_1\varkappa_2)} y^{(\lambda_1\lambda_2)}. \tag{I.11}$$

Здесь, конечно, суммирование производится по парам, где $\varkappa_1 < \varkappa_2$ и $\lambda_1 < \lambda_2$. Если базис $\{\vec{e}_\varkappa\}$ симплектический, то G имеет вид (I.4) и , следовательно,

$$\mathcal{G} = \varphi(G) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{I.12}$$

Вычисляя канонический вид матрицы $\mathcal{G}$, получим, что V_6 превращается в псевдоевклидово пространство ${}^2E_6$.

Отображение $\varphi: GL(4,\mathbb{R}) \longrightarrow GL(6,\mathbb{R})$ можно дальше сузить на симплектическую группу $G(Sp_4)$ и получить

$$\varphi: G(Sp_4) \longrightarrow GL(6,\mathbb{R}).$$

Если $A \in G(Sp_4)$, то $AGA^T = G$, из чего следует $\varphi(AGA^T) = \varphi(G)$. Учитывая свойства отображения φ, мы получим $\varphi(A)\varphi(G)\varphi(A)^T = \varphi(G)$, или $\mathcal{A}\mathcal{G}\mathcal{A}^T = \mathcal{G}$. Следовательно, $\mathcal{A} = \varphi(A)$ является элементом группы $G({}^2E_6)$, т.е. группы, элементы которых удовлетворяют $\mathcal{A}\mathcal{G}\mathcal{A}^T = \mathcal{G}$. Итак, мы имеем отображение $\varphi: G(Sp_4) \longrightarrow G({}^2E_6)$.

Теорема I.2. Образ $\varphi(G(Sp_4))$ симплектической группы $G(Sp_4)$ является подгруппой группы $G({}^2E_6)$.

Доказательство. Для произвольных $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \varphi(G(Sp_4))$ существуют $A, B \in G(Sp_4)$ такие, что $\varphi(A) = \mathcal{A}$ и $\varphi(B) = \mathcal{B}$. Так как $AB^{-1} \in G(Sp_4)$, то $(AB^{-1})G(AB^{-1})^T = G$, из чего по свойствам φ, получим $(\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1})\mathcal{G}(\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1})^T = \mathcal{G}$.

Элемент группы $G(Sp_4)$ в общем случае зависит от 10 параметров, а элемент группы $G({}^2E_6)$ от 21 параметра. Следовательно, подгруппа $\Psi(G(Sp_4))$ является собственной.

5. Пусть Sp_2 - двумерное симплектическое подпространство симплектического векторного пространства Sp_4. Возьмем такой симплектический базис $\{\vec{e}_{\varkappa}\}=\{\vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, что линейная оболочка $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ дает. Sp_2, где $i, j, \ldots = 1, 2$ и $\alpha, \beta, \ldots = 3, 4$. Обозначим через $Gr(2;4)$ множество всех двумерных симплектических подпространств пространства Sp_4. Каждому $Sp_2 = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \in Gr(2;4)$ сопоставим $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_{(12)} = \vec{E}_1 \in {}^2E_6$. По (I.II) длина $|\vec{e}_{(12)}| = 1$. Преобразуя базис $\{\vec{e}_i\}$ в Sp_2 в новый симплектический базис $\vec{e}_i' = A_i^j \vec{e}_j$, где $\|A_i^j\| \in G(Sp_2)$, мы получим $\vec{e}'_{(12)} = det\|A_i^j\| \, \vec{e}_{(12)}$. Поскольку $det\|A_i^j\| = 1$, то $\vec{e}'_{(12)} = \vec{e}_{(12)}$. Следовательно, мы получим отображение

$$\Lambda: \; Gr(2;4) \longrightarrow {}^2E_6 .$$

Пусть ${}^2\mathcal{E}_6$ (точечное) псевдоевклидово пространство и ${}^2E_6$ его направляющее псевдоевклидово векторное пространство. Зафиксируем в ${}^2\mathcal{E}_6$ некоторую произвольную точку O. Множество $S_5 = \{X \mid X \in {}^2\mathcal{E}_6, \; |\vec{OX}| = 1\}$ есть единичная сфера центром O. По вектору $\vec{e}_{(12)}$ определим точку M на сфере S_5, такую, что $\vec{OM} = \vec{e}_{(12)}$. Возникает отображение $\rho: Gr(2;4) \longrightarrow S_5$, в котором $Sp_2 = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \mapsto \vec{e}_{(12)} \mapsto M$.

<u>Определение.</u> Отображение $\rho: Gr(2;4) \longmapsto S_5$ назовем сферическим отображением множества двумерных симплектических подпространств симплектического векторного пространства Sp_4.

6. Симплектический базис $\{\vec{e}_{\varkappa}\}$ в Sp_4 определяет в ${}^2E_6$ базис $\{\vec{E}_\Omega\} = \{\vec{e}_{(\mathfrak{I}\varkappa)}\}$, который по (I.I2) не является ортонормированным. Построим теперь по нему четыре ортонормированных базиса. В последующих параграфах мы в том или ином случае будем выбирать наиболее подходящий из них.

Переходим от $\{\vec{E}_\Omega\}$ к $\{\vec{E}'_\Omega\}$ с помощью формул

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_1, \quad \vec{E}_2' = 1/\sqrt{2}(\mp\vec{E}_3 - \vec{E}_4), \quad \vec{E}_3' = 1/\sqrt{2}(\varepsilon\vec{E}_2 \mp \vec{E}_5), \qquad (I.I3)$$
$$\vec{E}_6' = \vec{E}_6, \quad \vec{E}_4' = 1/\sqrt{2}(\pm\vec{E}_3 - E_4), \quad \vec{E}_5' = 1/\sqrt{2}(\mp\varepsilon\vec{E}_2 - \vec{E}_5),$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Матрица $G = \|\hat{g}_{\Omega\Sigma}\|$, где $\hat{g}_{\Omega\Sigma} = \langle \vec{E}_\Omega, \vec{E}_\Sigma \rangle$, имеет диагональный вид с диагональю

$$(1, \; \mp 1, \; \mp \varepsilon, \; \pm 1, \; \pm \varepsilon, \; 1). \qquad (I.I4)$$

Формулам $d\vec{e}_{\varkappa} = \omega_{\varkappa}^{\,\mathfrak{I}} \vec{e}_{\mathfrak{I}}$ соответствуют формулы $d\vec{E}_\Omega' = \Sigma_\Omega^\Sigma \vec{E}'_\Sigma$, где Σ_Ω^Σ, как покажет несложный подсчет (см. [4]), выражаются через $\omega_{\varkappa}^{\mathfrak{I}}$ следующим образом:

$$\Sigma_1^1 = \ldots = \Sigma_6^6 = \Sigma_1^6 = \Sigma_6^1 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_1^2 = \pm\Sigma_2^1 = \mp\Sigma_2^6 = -\Sigma_6^2 = 1/\sqrt{2}\,(\omega_1^3 \mp \omega_2^4),\\
&\Sigma_1^3 = \pm\varepsilon\Sigma_3^1 = \mp\varepsilon\Sigma_3^6 = -\Sigma_6^3 = 1/\sqrt{2}\,(\pm\omega_1^4 + \varepsilon\omega_2^3),\\
&\Sigma_1^4 = \mp\Sigma_4^1 = \pm\Sigma_4^6 = -\Sigma_6^4 = 1/\sqrt{2}\,(\omega_1^3 \pm \omega_2^4),\\
&\Sigma_1^5 = \mp\varepsilon\Sigma_5^1 = \pm\varepsilon\Sigma_5^6 = -\Sigma_6^5 = 1/\sqrt{2}\,(\omega_1^4 \mp \varepsilon\omega_2^3),\\
&\Sigma_2^3 = -\varepsilon\Sigma_3^2 = \tfrac{1}{2}\,[(\omega_1^2 - \varepsilon\omega_2^1) \pm (\omega_3^4 - \varepsilon\omega_4^3)],\\
&\Sigma_2^4 = \Sigma_4^2 = -\omega_1^1 + \omega_3^3, \qquad\qquad (I.15)\\
&\Sigma_2^5 = \varepsilon\Sigma_5^2 = \tfrac{1}{2}\,[\pm(\omega_1^2 + \varepsilon\omega_2^1) + (\omega_3^4 + \varepsilon\omega_4^3)],\\
&\Sigma_3^4 = \varepsilon\Sigma_4^3 = \tfrac{1}{2}\,[-(\varepsilon\omega_1^2 + \omega_2^1) \pm (\varepsilon\omega_3^4 + \omega_4^3)],\\
&\Sigma_3^5 = \Sigma_5^3 = \mp(\omega_1^1 + \omega_3^3),\\
&\Sigma_4^5 = -\varepsilon\Sigma_5^4 = \tfrac{1}{2}\,[\mp(\omega_1^2 - \varepsilon\omega_2^1) + (\omega_3^4 - \varepsilon\omega_4^3)].
\end{aligned}
$$

При этом удовлетворяются, конечно, структурные уравнения

$$d\Sigma_\sigma^\tau = \Sigma_\sigma^\iota \wedge \Sigma_\iota^\tau . \qquad (I.16)$$

7. Обозначая $\vec{E}_1' = \vec{M}$, $\vec{u}_\varkappa = \vec{E}_{\varkappa+1}'$ и $\theta^\jmath = \Sigma_1^{\jmath+1}$, $\theta_\varkappa^\jmath = \Sigma_{\varkappa+1}^{\jmath+1}$, где $\jmath, \jmath, \ldots = 1, \ldots, 4$, будем иметь

$$d\vec{M} = \theta^\alpha \vec{u}_\alpha, \qquad d\vec{u}_\varkappa = \theta_\varkappa^\alpha \vec{u}_\alpha + \Sigma_{\varkappa+1}^1 (\vec{M} - \vec{E}_6') \qquad (I.17)$$

и в силу (I.16)

$$d\theta^\jmath = \theta^\alpha \wedge \theta_\alpha^\jmath \qquad (I.18)$$

и

$$
\begin{aligned}
&d\theta_1^2 = \theta_1^\alpha \wedge \theta_\alpha^2 \pm 2\,\theta^1 \wedge \theta^2, && d\theta_3^1 = \theta_3^\alpha \wedge \theta_\alpha^1 \mp 2\,\theta^3 \wedge \theta^1,\\
&d\theta_1^3 = \theta_1^\alpha \wedge \theta_\alpha^3 \pm 2\,\theta^1 \wedge \theta^3, && d\theta_3^2 = \theta_3^\alpha \wedge \theta_\alpha^2 \mp 2\,\theta^3 \wedge \theta^2,\\
&d\theta_1^4 = \theta_1^\alpha \wedge \theta_\alpha^4 \pm 2\,\theta^1 \wedge \theta^4, && d\theta_3^4 = \theta_3^\alpha \wedge \theta_\alpha^4 \mp 2\,\theta^3 \wedge \theta^4, \qquad (I.19)\\
&d\theta_2^1 = \theta_2^\alpha \wedge \theta_\alpha^1 \mp 2\varepsilon\,\theta^2 \wedge \theta^1, && d\theta_4^1 = \theta_4^\alpha \wedge \theta_\alpha^1 \mp 2\varepsilon\,\theta^4 \wedge \theta^1,\\
&d\theta_2^3 = \theta_2^\alpha \wedge \theta_\alpha^3 \pm 2\varepsilon\,\theta^2 \wedge \theta^3, && d\theta_4^2 = \theta_4^\alpha \wedge \theta_\alpha^2 \mp 2\varepsilon\,\theta^4 \wedge \theta^2,\\
&d\theta_2^4 = \theta_2^\alpha \wedge \theta_\alpha^4 \pm 2\varepsilon\,\theta^2 \wedge \theta^4, && d\theta_4^3 = \theta_4^\alpha \wedge \theta_\alpha^3 \mp 2\varepsilon\,\theta^4 \wedge \theta^3,
\end{aligned}
$$

$$d\theta_1^1 = d\theta_2^2 = d\theta_3^3 = d\theta_4^4 = 0.$$

Эти формулы (I.18) и (I.19) являются структурными уравнениями четырехмерного подмногообразия $\rho\,(Gr\,(2;4))$ на единичной сфере $S_5 \subset {}^2E_6$. Так как $d\,(\vec{E}_1' + \vec{E}_6') = \vec{0}$, то $\vec{E}' + \vec{E}_6'$ постоянен. В силу (I.13) все векторы $\vec{u}_\varkappa = \vec{E}_{\varkappa+1}$ перпендикулярны к вектору $\vec{E}_1' + \vec{E}_6'$. Следовательно, подмногообразие $\rho\,(Gr\,(2;4))$ является четырехмерной сферой S_4 в S_5.

В правых частях формул (I.19) последние члены, которые мы обозначим через $\Pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$, являются формами кривизны индуцируемой на $\varrho(Gr(2;4)) = S_4$ связностью Леви-Чивита. С их помощью (I.13) записываются в виде

$$d\theta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = \theta^{\alpha}_{\mathcal{K}} \wedge \theta^{\mathcal{J}}_{\alpha} + \Pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}. \tag{I.20}$$

По формулам $\Pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = P^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{Y}\mathcal{T}}\,\theta^{\mathcal{Y}} \wedge \theta^{\mathcal{T}}$ определяются компоненты тензора кривизны $P^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{Y}\mathcal{T}}$ этой связности. Из них отличны от нуля только те компоненты, у которых $\mathcal{K} = \mathcal{Y}$ и $\mathcal{T} = \mathcal{J}$. Обозначим они через $P^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = P^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}\mathcal{K}\mathcal{J}}$. Из (I.19) следует, что

$$\left\| P^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} \right\| = \pm 2 \begin{Vmatrix} 0 & I & I & I \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ -I & -I & 0 & -I \\ -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{Vmatrix}.$$

В дальнейшем нам будут нужны выражения форм $\theta^{\mathcal{J}}$ и $\theta^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$ через $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$; именно они осуществляют сферическое отображение $\varrho: Gr(2;4) \longrightarrow S_4$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \theta^1 &= 1/\sqrt{2}(\omega^3_1 \mp \omega^4_2), & \theta^2 &= 1/\sqrt{2}(\pm\omega^4_1 + \varepsilon\omega^3_2), \\ \theta^3 &= 1/\sqrt{2}(\omega^3_1 \pm \omega^4_2), & \theta^4 &= 1/\sqrt{2}(\omega^4_1 \mp \varepsilon\omega^3_2) \end{aligned} \tag{I.21}$$

и

$$\begin{aligned} \theta^2_1 &= -\varepsilon\,\theta^1_2 = \tfrac{1}{2}\left[(\omega^2_1 - \varepsilon\omega^1_2) \pm (\omega^4_3 - \varepsilon\omega^3_4)\right], \\ \theta^3_1 &= \theta^1_3 = -\omega^1_1 + \omega^3_3, \\ \theta^4_1 &= \varepsilon\,\theta^1_4 = \tfrac{1}{2}\left[\pm(\omega^2_1 + \varepsilon\omega^1_2) + (\omega^4_3 - \varepsilon\omega^3_4)\right], \\ \theta^3_2 &= \varepsilon\,\theta^2_3 = \tfrac{1}{2}\left[-(\varepsilon\omega^2_1 + \omega^1_2) \pm (\varepsilon\omega^4_3 + \omega^3_4)\right], \\ \theta^4_2 &= \theta^2_4 = \mp(\omega^1_1 + \omega^3_3), \\ \theta^4_3 &= -\varepsilon\,\theta^3_4 = \tfrac{1}{2}\left[\mp(\omega^2_1 - \varepsilon\omega^1_2) + (\omega^4_3 - \varepsilon\omega^3_4)\right], \\ \theta^1_1 &= \theta^2_2 = \theta^3_3 = \theta^4_4 = 0. \end{aligned} \tag{I.22}$$

Кроме того для матрицы $\| a_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \|$, где $a_{\mathcal{J}\mathcal{K}} = \langle \vec{u}_{\mathcal{J}}, \vec{u}_{\mathcal{K}} \rangle$; получим:

$$\| a_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \| = \begin{Vmatrix} \mp I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm\varepsilon \end{Vmatrix} \tag{I.23}$$

§2. Главные расслоения, связанные с симплектической поверхностью.

I. Пусть V_2 - двумерная поверхность в симплектическом пространстве Sp_4. Симплектичность поверхности V_2 означает, что касательная плоскость $T_M(V_2)$, а следовательно и нормальная плоскость $T_M^{\perp}(V_2)$, в каждой точке $M \in V_2$

симплектичны. Подвижной репер $\{M; \vec{e}_x\}$ выбираем так, что $\vec{e}_i \in T_M(V_2)$ и $\vec{e}_\alpha \in T_M^\perp(V_2)$, где $i, j, \ldots = 1, 2$ и $\alpha, \beta, \ldots = 3, 4$. Тогда

$$g_{i\alpha} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha \rangle = 0 \qquad (2.1)$$

и

$$dM = \omega^s \vec{e}_s, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^s \vec{e}_s + \omega_i^\beta \vec{e}_\beta, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^s \vec{e}_s + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \qquad (2.2)$$

Дифференциальными уравнениями поверхности V_2 являются кроме того $\omega^\alpha = 0$, а продолжение последних уравнений с помощью (1.2) приводит к

$$\omega_i^\alpha = b_{ik}^\alpha \omega^k, \qquad b_{ik}^\alpha = b_{ki}^\alpha. \qquad (2.3)$$

Возникает главное расслоение $\pi: \mathcal{R}(V_2) \longrightarrow V_2$ всех касательных к V_2 реперов $\{M; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ с базой V_2, структурной группой $GL(2, \mathbb{R})$ и проекцией $\pi: \{M; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \longrightarrow M$

Аналогично возникает главное расслоение $\pi^\perp: \mathcal{R}^\perp(V_2) \to V_2$ всех нормальных к V_2 реперов $\{M; \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ с базой V_2, структурной группой $GL(2, \mathbb{R})$ и проекцией $\pi^\perp: \{M; \vec{e}_3, \vec{e}_4\} \to M$.

Из (1.2) и (1.3) в силу (2.3) получаются структурные уравнения этих главных расслоений, которые имеют вид (см., например, [6], стр. 88)

$$d\omega_k^i = \omega_k^s \wedge \omega_s^i + \frac{1}{2} \Omega_k^i, \qquad (2.4)$$

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta + \frac{1}{2} \Omega_\alpha^\beta, \qquad (2.5)$$

где

$$\Omega_k^i = R_{kst}^i \omega^s \wedge \omega^t, \qquad \Omega_\alpha^\beta = R_{\alpha st}^\beta \omega^s \wedge \omega^t$$

и

$$R_{kst}^i = 2 g_{\alpha\beta} g^{im} b_{k[s}^\alpha b_{|m|t]}^\beta, \quad R_{\alpha st}^\beta = 2 g_{\alpha\gamma} g^{il} b_{l[s}^\gamma b_{|i|t]}^\beta. \qquad (2.6)$$

Из этих уравнений следует, что в обеих из этих главных расслоений определены связности, для которых Ω_k^i и Ω_α^β являются формами кривизны, а (2.6) - тензорами кривизны. У последних существенными компонентами являются лишь R_{k12}^i и $R_{\alpha 12}^\beta$. Все остальные компоненты равны нулю или выражаются через них. Обозначим $R_k^i = R_{k12}^i$ и $R_\alpha^\beta = R_{\alpha 12}^\beta$. Из (2.6) следует, что

$$R_k^i = 2 g_{\alpha\beta} g^{il} b_{k[1}^\alpha b_{|l|2]}^\beta, \qquad R_\alpha^\beta = 2 g_{\alpha\gamma} g^{il} b_{l[1}^\gamma b_{|i|2]}^\beta. \qquad (2.7)$$

Обозначим $R_{ik} = g_{is} R_k^s$ и $R_{\alpha\beta} = g_{\alpha\gamma} R_\beta^\gamma$. Так как

$$R_{ik} = 2 g_{\alpha\gamma} g_{\beta\sigma} g^{il} b_{l[1}^\sigma b_{|i|2]}^\gamma,$$

то легко установить $R_{ik} = R_{ki}$. Аналогично получим, что $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$.

Симплектическая метрика в Sp_4 позволяет оба рассматриваемых главных расслоения редуцировать к структурной группе

$G(Sp_2)$. Для этого нужно лишь базисы $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{e}_\alpha\}$ считать симплектическими. Тогда $G_1 = \|g_{ij}\|$ и $G_2 = \|g_{\alpha\beta}\|$ имеют в силу (I.4) вид

$$G_1 = G_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \mathrm{I} \\ -\mathrm{I} & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2.8}$$

в силу чего

$$G_1^{-1} = G_2^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2.9}$$

Заметим, что симплектическая группа $G(Sp_2)$ совпадает с группой $SL(2, \mathbb{R})$ матриц A с $\det A = 1$.

Нетрудно проверить, что при

$$\vec{e}_i{}' = A_i^j \vec{e}_j, \qquad \vec{e}_\alpha{}' = A_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \qquad \det\|A_i^j\| = \det\|A_\alpha^\beta\| = 1 \tag{2.10}$$

имеем

$$'R_k^i = A_k^l R_l^s \tilde{A}_s^i, \qquad 'R_\alpha^\beta = A_\alpha^\gamma R_\gamma^\delta \tilde{A}_\delta^\beta, \tag{2.11}$$

где $\|\tilde{A}_i^j\| = \|A_i^j\|^{-1}$ и $\|\tilde{A}_\alpha^\beta\| = \|A_\alpha^\beta\|^{-1}$. Следовательно, R_k^i и R_α^β являются тензорами. Тензорами являются также R_{ik} и $R_{\alpha\beta}$. Обозначим

$$R = \|R_k^i\|, \qquad \mathcal{R} = \|R_\alpha^\beta\|, \qquad \hat{R} = \|R_{ik}\|, \qquad \hat{\mathcal{R}} = \|R_{\alpha\beta}\|.$$

Матричная запись формул (2.II) следующая

$$'R = A_1 R A_1^{-1}, \qquad '\mathcal{R} = A_2 \mathcal{R} A_2^{-1}, \tag{2.12}$$

где $A_1 = \|A_i^j\|$ и $A_2 = \|A_\alpha^\beta\|$. Аналогично

$$'\hat{R} = A_1 \hat{R} A_1^T, \qquad '\hat{\mathcal{R}} = A_2 \hat{\mathcal{R}} A_2^T. \tag{2.13}$$

Наконец, отметим, что из (2.7) с учетом (2.8) и (2.9) следует

$$\begin{aligned} &R_1^1 = b_{11}^4 b_{22}^3 - b_{11}^3 b_{22}^4, && R_1^2 = 2(b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3), \\ &R_2^1 = 2(b_{22}^3 b_{12}^4 - b_{22}^4 b_{12}^3), && R_2^2 = -R_1^1 \end{aligned} \tag{2.14}$$

и

$$\begin{aligned} &R_3^3 = b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{11}^4 b_{22}^3 - 2b_{12}^3 b_{12}^4, && R_4^4 = -R_3^3, \\ &R_3^4 = 2[b_{11}^4 b_{22}^4 - (b_{12}^4)^2], && R_4^3 = 2[-b_{11}^3 b_{22}^3 + (b_{12}^3)^2]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Для R_{ij} и $R_{\alpha\beta}$ получим

$$\begin{aligned} &R_{11} = R_1^2, && R_{12} = R_{21} = R_2^2 = -R_1^1, && R_{22} = -R_2^1, \\ &R_{33} = R_3^4, && R_{34} = R_{43} = R_4^4 = -R_3^3, && R_{44} = -R_4^3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Непосредственно проверяется, что

$$\det\|R_k^i\| = \det\|R_\alpha^\beta\|. \tag{2.17}$$

2. Теперь вернемся к симметрическим матрицам $\hat{R} = \|R_{ik}\|$ и $\hat{\mathcal{R}} = \|R_{\alpha\beta}\|$. Так как они по (2.13) преобразуются независимо друг от друга, то мы можем их одновременно привести к

диагональному виду преобразованием базисов $\{\vec{e}_i\} \longrightarrow \{\vec{e}_i'\}$ и $\{\vec{e}_\alpha\} \longrightarrow \{\vec{e}_\alpha'\}$ соответственно в касательной и нормальной плоскостях с помощью подходящих элементов из группы $G(\mathcal{J}/p_2) = SL(2, \mathbb{R})$. Для матрицы $\hat{R}$ получаются виды

1) $\hat{R} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & \pm a \end{Vmatrix}$, где $a \neq 0$, если $\operatorname{rank} \hat{R} = 2$, (2.18)

2) $\hat{R} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, где $a \neq 0$, если $\operatorname{rank} \hat{R} = 1$, (2.19)

3) $\hat{R} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, если $\operatorname{rank} \hat{R} = 0$. (2.20)

Каноническим видам (2.18) - (2.20) соответствуют, в силу (2.16), следующие виды матрицы $R = \| R^i_k \|$:

1) $R = \begin{Vmatrix} 0 & a \\ \mp a & 0 \end{Vmatrix}$, 2) $R = \begin{Vmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, 3) $R = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $a \neq 0$.

Аналогичные канонические виды получаются для $\hat{\mathcal{R}}$:

1) $\hat{\mathcal{R}} = \begin{Vmatrix} b & 0 \\ 0 & \pm b \end{Vmatrix}$, 2) $\hat{\mathcal{R}} = \begin{Vmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, 3) $\hat{\mathcal{R}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $b \neq 0$

и, соответственно,

1) $\mathcal{R} = \begin{Vmatrix} 0 & b \\ \mp b & 0 \end{Vmatrix}$, 2) $\mathcal{R} = \begin{Vmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, 3) $\mathcal{R} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, $b \neq 0$.

Итак, матрицы R и $\mathcal{R}$ приводимы независимо друг от друга к одному из следующих видов:

I. $\begin{Vmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{Vmatrix}$, II. $\begin{Vmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{Vmatrix}$, III. $\begin{Vmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, IV. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$,

где $c = a$ для R и $c = b$ для $\mathcal{R}$.

Для канонических видов I и II имеем $\det R \neq 0$ и $\det \mathcal{R} \neq 0$, а для видов III и IV имеем $\det R = 0$ и $\det \mathcal{R} = 0$.

Теперь разделим все двумерные симплектические поверхности симплектического пространства Sp_4 по каноническим видам матриц R и $\mathcal{R}$. Получаемые соответствующие классы поверхностей V_2 в Sp_4 обозначим $R(I), \ldots, R(IV)$ и $\mathcal{R}(I), \ldots, \mathcal{R}(IV)$.

<u>Теорема 2.1.</u> Следующие пересечения классов $V_2 \subset Sp_4$ оказываются пустыми: $R(I) \cap \mathcal{R}(II)$, $R(I) \cap \mathcal{R}(III)$, $R(I) \cap \mathcal{R}(IV)$, $R(II) \cap \mathcal{R}(I)$, $R(II) \cap \mathcal{R}(III)$, $R(II) \cap \mathcal{R}(IV)$, $R(III) \cap \mathcal{R}(I)$, $R(III) \cap \mathcal{R}(II)$, $R(III) \cap \mathcal{R}(IV)$, $R(IV) \cap \mathcal{R}(I)$ и $R(IV) \cap \mathcal{R}(III)$.

<u>Доказательство.</u> Так как в силу (2.17) $\det R = \det \mathcal{R}$, то $R(I) \cap \mathcal{R}(III)$, $R(I) \cap \mathcal{R}(IV)$, $R(II) \cap \mathcal{R}(III)$, $R(II) \cap \mathcal{R}(IV)$, $R(III) \cap \mathcal{R}(I)$, $R(III) \cap \mathcal{R}(II)$, $R(IV) \cap \mathcal{R}(I)$ и $R(IV) \cap \mathcal{R}(II)$ пусты. Для $R(I) \cap \mathcal{R}(II)$ и $R(II) \cap \mathcal{R}(I)$ условие

12

$\det R = \det \mathcal{R}$ дает $a^2+b^2=0$, а это противоречит условиям $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Остается установить, что $R(III) \cap \mathcal{R}(IV) = \varnothing$. Так как в этом случае $R_1^2 \neq 0$, $R_2^1 = 0$ и $R_2^\beta = 0$, то из (2.14) и (2.15) следует:

$$b_{11}^4 b_{22}^3 - b_{11}^3 b_{22}^4 = 0, \qquad b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{11}^4 b_{22}^3 - 2 b_{12}^3 b_{12}^4 = 0,$$
$$b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3 \neq 0, \qquad b_{11}^4 b_{22}^4 - (b_{12}^4)^2 = 0,$$
$$b_{22}^3 b_{12}^4 - b_{22}^4 b_{12}^3 = 0, \qquad (b_{12}^3)^2 - b_{11}^3 b_{22}^3 = 0.$$

Эти условия несовместны. Действительно, записав первое из них в виде

$$\begin{vmatrix} b_{11}^4 & b_{22}^4 \\ b_{11}^3 & b_{22}^3 \end{vmatrix} = 0,$$

находим, что $b_{22}^4 = \lambda b_{11}^4$ и $b_{22}^3 = \lambda b_{11}^3$. Третье условие теперь дает $\lambda (b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3) = 0$, откуда $\lambda = 0$. Следовательно, $b_{22}^3 = b_{22}^4 = 0$. Из пятого и шестого условий следует, что $b_{12}^4 = 0$ и $b_{12}^3 = 0$; получается противоречие со вторым условием. Теорема доказана.

Следствие. Симплектические поверхности $V_2 \subset Sp_4$ распадаются на следующие классы: $A_1 = R(I) \cap \mathcal{R}(I)$, $A_2 = R(II) \cap \mathcal{R}(II)$, $A_3 = R(III) \cap \mathcal{R}(III)$, $A_4 = R(IV) \cap \mathcal{R}(III)$ и $A_5 = R(IV) \cap \mathcal{R}(IV)$.

3. Специализация репера так, что матрицы $\| R_{ij} \|$ и $\| R_{\alpha\beta} \|$ имеют диагональные виды, соответствующие классам $A_1, \dots, A_5$, приводит к соответствующим соотношениям между компонентами b_{ij}^α.

Если $V_2 \in A_1$, то $R_1^1 = 0$, $R_1^2 = R_2^1 \neq 0$, $R_3^3 = 0$, $R_3^4 = R_4^3 \neq 0$. Из (2.14) и (2.15) получим

$$\begin{aligned}
& b_{11}^4 b_{22}^3 - b_{11}^3 b_{22}^4 = 0, \\
& b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3 = -(b_{22}^4 b_{12}^3 - b_{22}^3 b_{12}^4) \neq 0, \\
& b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{11}^4 b_{22}^3 - 2 b_{12}^3 b_{12}^4 = 0, \\
& b_{11}^4 b_{22}^4 - (b_{12}^4)^2 = - b_{11}^3 b_{22}^3 + (b_{12}^3)^2 \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Из второго условия следует, что b_{11}^3 и b_{11}^4 не могут быть равны нулю одновременно. Поэтому из первого условия получим, что $b_{22}^4 = \lambda b_{11}^4$ и $b_{22}^3 = \lambda b_{11}^3$. Теперь второе условие дает

$$b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3 = \lambda (b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3) \neq 0$$

и это вместе с остальными условиями приводит к $\lambda = 1$ и

$$b_{22}^4 = b_{11}^4, \quad b_{22}^3 = b_{11}^3, \quad b_{11}^3 b_{11}^4 - b_{12}^3 b_{12}^4 = 0,$$
$$(b_{11}^4)^2 - (b_{12}^4)^2 = -(b_{11}^3)^2 + (b_{12}^3)^2 \neq 0.$$

Отсюда аналогично $b_{12}^4 = \mu b_{11}^3$, $b_{11}^4 = \mu b_{12}^3$ и

$$\mu^2 [(b_{12}^3)^2 - (b_{11}^3)^2] = (b_{12}^3)^2 - (b_{11}^3)^2 \neq 0.$$

Отсюда $\mu = \varepsilon = \pm 1$. Итак, мы имеем $b_{22}^4 = b_{11}^4 = \varepsilon b_{12}^3$, $b_{22}^3 = b_{11}^3 = \varepsilon b_{12}^4$ и $(b_{11}^3)^2 = (b_{12}^3)^2 \neq 0$. Здесь можно ограничиваться случаем $\varepsilon = 1$, так как при $\varepsilon = 1$ преобразование $\vec{e}_1' = \vec{e}_2$ и $\zeta_2' = -\zeta_2$, сохраняющее канонический вид матрицы R_1, приводит к случаю $\varepsilon = -1$.

Следовательно, для поверхностей из класса $\mathcal{A}_1$ справедливы

$$b_{22}^4 = b_{11}^4 = -b_{12}^3, \quad b_{22}^3 = b_{11}^3 = -b_{12}^4, \quad (b_{11}^3)^2 - (b_{12}^3)^2 \neq 0, \qquad (2.22)$$

$$R_1^2 = R_3^4 = 2\left[(b_{12}^3)^2 - (b_{11}^3)^2\right].$$

Если $V_2 \in \mathcal{A}_2$, то аналогично получим

$$b_{22}^4 = -b_{11}^4 = b_{12}^3, \quad b_{22}^3 = -b_{11}^3 = -b_{12}^4, \quad (b_{11}^3)^2 + (b_{12}^3)^2 \neq 0 \qquad (2.23)$$

и

$$R_1^2 = -R_3^4 = 2\left[(b_{11}^3)^2 + (b_{12}^3)^2\right].$$

Ниже мы будем исследовать поверхности классов $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ совместно записывая (2.22) и (2.23) с помощью $\varepsilon = \pm 1$:

$$b_{22}^2 = \varepsilon b_{11}^2, \quad b_{11}^4 = -b_{12}^3, \quad b_{11}^3 = -\varepsilon b_{12}^4, \quad (b_{11}^3)^2 - \varepsilon (b_{12}^3)^2 \neq 0 \qquad (2.24)$$

и

$$R_1^2 = \varepsilon R_3^4 = 2\left[(b_{12}^3)^2 - \varepsilon (b_{11}^3)^2\right]. \qquad (2.25)$$

Здесь $\varepsilon = 1$ при $V_2 \in \mathcal{A}_1$ и $\varepsilon = -1$ при $V_2 \in \mathcal{A}_2$.

Пусть теперь $V_2 \in \mathcal{A}_3$; тогда $R_1^1 = -R_2^2 = 0$, $R_1^2 \neq 0$, $R_2^1 = 0$, $R_3^3 = -R_4^4 = 0$, $R_3^4 \neq 0$ и $R_4^3 = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} &b_{11}^4 b_{12}^3 - b_{11}^3 b_{22}^4 = 0, && b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{11}^4 b_{22}^3 - 2 b_{12}^3 b_{12}^4 = 0, \\ &b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3 \neq 0, && b_{11}^4 b_{22}^4 - (b_{12}^4)^2 \neq 0, \\ &b_{22}^3 b_{12}^4 - b_{22}^4 b_{12}^3 = 0, && -b_{11}^3 b_{22}^3 + (b_{12}^3)^2 = 0. \end{aligned} \qquad (2.26)$$

Из условия второго ряда следует, что b_{11}^3 и b_{11}^4 не могут быть равны нулю одновременно. Поэтому из первого условия $b_{22}^4 = \lambda b_{11}^4$ и $b_{22}^3 = \lambda b_{11}^3$. Подстановка их в первое условие третьего ряда дает, что $\lambda = 0$, т.е. $b_{22}^3 = b_{22}^4 = 0$, вследствие чего и $b_{12}^3 = 0$. Итак, для поверхностей из класса $\mathcal{A}_3$ справедливы

$$b_{22}^4 = 0, \quad b_{22}^3 = 0, \quad b_{12}^3 = 0, \quad b_{11}^3 \neq 0, \quad b_{12}^4 \neq 0 \qquad (2.27)$$

и

$$R_1^2 = 2 b_{11}^3 b_{12}^4, \qquad R_3^4 = -2 (b_{12}^4)^2. \qquad (2.28)$$

Пусть $V_2 \in \mathcal{A}_4$; тогда $R_i^j = 0$, $R_3^3 = R_4^4 = R_4^3 = 0$ и $R_3^4 \neq 0$, т. е.

$$\begin{aligned} &b_{11}^4 b_{22}^3 - b_{11}^3 b_{22}^4 = 0, && b_{11}^3 b_{22}^4 + b_{11}^4 b_{22}^3 - 2 b_{12}^3 b_{12}^4 = 0, \\ &b_{11}^3 b_{12}^4 - b_{11}^4 b_{12}^3 = 0, && -b_{11}^3 b_{22}^3 + (b_{12}^3)^2 = 0, \\ &b_{22}^3 b_{12}^4 - b_{22}^4 b_{12}^3 = 0, && b_{11}^4 b_{22}^4 - (b_{12}^4)^2 \neq 0. \end{aligned} \qquad (2.29)$$

Условия первого столбца дают, что ряды $(b^3_{11}, b^3_{12}, b^3_{22})$ и $(b^4_{11}, b^4_{12}, b^4_{22})$ пропорциональны причем в силу последнего условия второго столбца второй из них ненулевой. Следовательно, $b^3_{ij} = \lambda b^4_{ij}$, и теперь второе условие второго столбца приводит к $\lambda = 0$, т.е. к $b^3_{ij} = 0$.
Следовательно, для поверхностей класса $\mathcal{A}_4$ получаем

$$b^3_{ij} = 0 \tag{2.30}$$

и

$$R^4_3 = 2[b^4_{11} b^4_{22} - (b^4_{12})^2] \neq 0. \tag{2.3I}$$

Пусть, наконец, $V_2 \in \mathcal{A}_5$; тогда $R_i^j = 0$ и $R_\alpha^\beta = 0$, т.е.

$$b^4_{11} b^3_{22} - b^3_{11} b^4_{22} = 0, \qquad b^3_{11} b^4_{22} + b^4_{11} b^3_{22} - 2 b^3_{12} b^4_{12} = 0,$$
$$b^3_{11} b^4_{12} - b^4_{11} b^3_{12} = 0, \qquad b^4_{11} b^4_{22} - (b^4_{12})^2 = 0,$$
$$b^3_{22} b^4_{12} - b^4_{22} b^3_{12} = 0, \qquad -b^3_{11} b^3_{22} + (b^3_{12})^2 = 0.$$

Из условий первого столбца опять следует, что $b^3_{ij} = 0$ и b^4_{ij} пропорциональны, а условия второго столбца приводят к тому, что $(b^\alpha_{12})^2 = b^\alpha_{11} b^\alpha_{22}$.

Оформим полученные результаты (2.24), (2.27), (2.30) и (2.3I) в виде таблицы.

Класс поверхностей	Условия на компоненты тензора b^α_{ij} в специализированном репере
$\mathcal{A}_1$ $(\varepsilon = 1)$ $\mathcal{A}_2$ $(\varepsilon = -1)$	$b^\alpha_{22} = \varepsilon b^\alpha_{11}$, $b^4_{12} = -\varepsilon b^3_{11}$, $b^4_{11} = -b^3_{12}$, $R^2_1 = \varepsilon R^4_3 = 2[(b^3_{12})^2 - \varepsilon (b^3_{11})^2]$
$\mathcal{A}_3$	$b^\alpha_{22} = b^3_{12} = 0$, $b^3_{11} \neq 0$, $b^4_{12} \neq 0$, $R^2_1 = 2 b^3_{11} b^4_{12}$, $R^4_3 = -2(b^4_{12})^2$
$\mathcal{A}_4$	$b^3_{ij} = 0$, $R^4_3 = 2[b^3_{11} b^4_{11} - (b^4_{12})^2] \neq 0$
$\mathcal{A}_5$	b^3_{ij} и b^4_{ij} пропорциональны, $(b^\alpha_{12})^2 = b^\alpha_{11} b^\alpha_{22}$

(2.32)

§3. Классификация симплектических поверхностей по типам фокальных множеств.

I. В исследовании симплектических поверхностей $V_2 \subset Sp_4$ можно применить теорию конгруэнций симплектических плоскостей пространства Sp_4, разработанную в [3]. С симплектической поверхностью $V_2 \subset Sp_4$ связаны две конгруэнции симплектических плоскостей: конгруэнция касательных плоскостей $T(V_2) = \{T_M(V_2) \mid M \in V_2\}$ и конгруэнция нормальных плоскостей $T^\perp(V_2) = \{T^\perp_M(V_2) \mid M \in V_2\}$. Строение фокальных множеств этих конгруэнций характеризует строение симплектической поверхности V_2.

Сперва определим фокальное множество конгруэнции $T(V_2)$. Точка $X \in T_M(V_2)$ с радиусом-вектором $\vec{x} = \vec{M} + x^i \vec{e}_i$ называется фокальной точкой, если
$$d\vec{x} = (\omega^i + dx^i + x^j \omega^i_j)\vec{e}_i + x^j \omega^\alpha_j \vec{e}_\alpha$$
в некотором направлении $\vec{y} = y^i \vec{e}_i \neq \vec{0}$ принадлежит плоскости $T_M(V_2)$. Множество фокальных точек на симплектической плоскости $T_M(V_2)$ конгруэнции $T(V_2)$ называется фокальным множеством. Множество фокальных точек симплектической плоскости $T_M(V_2)$ фокальное множество обозначим через $f(M)$. Из определения фокальной точки следует, что для нее система $(x^j b^\alpha_{jk}) y^k = 0$ должна иметь ненулевое решение $\vec{y} = y^k \vec{e}_k$, что приводит к уравнению $\det \| x^j b^\alpha_{jk} \| = 0$, принимающему вид
$$(b^3_{11} b^4_{12} - b^3_{12} b^4_{11})(x^1)^2 + (b^3_{11} b^4_{22} - b^3_{22} b^4_{11}) x^1 x^2 + (b^3_{12} b^4_{22} - b^3_{22} b^4_{12})(x^2)^2 = 0,$$
или, после использования (2.14),
$$R^2_1 (x^1)^2 - 2 R^1_1 x^1 x^2 - R^1_2 (x^2)^2 = 0. \qquad (3.1)$$
Аналогично найдем уравнение фокального множества $f^\perp(M)$ конгруэнции $T^\perp(V_2)$ на плоскости $T^\perp_M(V_2)$. Для точки $X \in T^\perp_M(V_2)$ имеем $\vec{x} = \vec{M} + x^\alpha \vec{e}_\alpha$, а из
$$d\vec{x} = (\omega^i + x^\beta \omega^i_\beta)\vec{e}_i + (dx^\alpha + x^\beta \omega^\alpha_\beta)\vec{e}_\alpha$$
для фокальной точки получим
$$\det \| \delta^i_j + x^\beta g_{\beta\gamma} g^{ik} b^\gamma_{kj} \| = 0,$$
откуда
$$[-(b^4_{12})^2 + b^4_{11} b^4_{22}](x^3)^2 + (2 b^3_{12} b^4_{12} - b^3_{11} b^4_{22} - b^3_{22} b^4_{11}) x^3 x^4 +$$
$$+ [-(b^3_{12})^2 + b^3_{11} b^3_{22}](x^4)^2 + 1 = 0.$$
Это уравнение фокального множества $f^\perp(M)$ принимает по (2.15), таким образом, вид
$$R^4_3 (x^3)^2 - 2 R^3_3 x^3 x^4 - R^3_4 (x^4)^2 + 2 = 0. \qquad (3.2)$$

2. Теперь проведем классификацию двумерных симплектических поверхностей $V_2 \subset Sp_4$ по типам фокальных множеств $f(M)$ и $f^\perp(M)$ и исследуем ее взаимоотношение с классами $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_5$.

Сперва найдем типы фокального множества $f(M)$ при классах $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_5$.

Если $V_2 \in \mathcal{A}_1$, то в силу (2.14) имеем $R^2_1 = R^1_2 \neq 0$ и $R^1_1 = 0$. Из (3.1) получим $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$, т.е. фокальное множество $f(M)$ является парой пересекающихся в точке $M \in V_2$ прямых.

Если $V_2 \in \mathcal{A}_2$, то $R^2_1 = -R^1_2 \neq 0$ и $R^1_1 = 0$. Из (3.1) получим $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$. Фокальное множество $f(M)$ является парой мнимых, пересекающихся в точке $M \in V_2$, прямых.

Если $V_2 \in \mathcal{A}_3$, то $R^2_1 \neq 0$ и $R^1_1 = R^1_2 = 0$. Из (3.1) получим $(x^1)^2 = 0$. Фокальное множество $f(M)$ является парой совпадающих прямых, проходящих через точку $M \in V_2$.

Если V_2 принадлежит классам A_4 или A_5, то $R^i_i = 0$. Значит, $f(M) = T_M(V_2)$.

Сформулируем результаты в виде двух теорем.

Теорема 3.I. Фокальное множество $f(M)$ симплектической поверхности $V_2 \subset Sp_4$ является либо I) парой вещественных пересекающихся прямых, либо 2) парой мнимых пересекающихся прямых, либо 3) парой совпадающих прямых, либо 4) совпадает с $T_M(V_2)$.

Соответственно будем говорить, что V_2 принадлежит классу B_1, B_2, B_3 либо B_4. Например, если $f(M)$ есть пара совпадающих прямых, то $V_2 \in B_3$.

Теорема 3.2. Связь между двумя классификациями следующая: $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$, $B_3 = A_3$ и $B_4 = A_4 \cup A_5$.

Проведем аналогичную классификацию симплектических поверхностей $V_2 \subset Sp_4$ по типам фокального множества $f^\perp(M)$.

Если $V_2 \in A_1$, то в силу (2.I5) имеем $R^4_3 = R^3_4 = b \neq 0$ и $R^3_3 = 0$. Из (3.2) получим $b(x^3)^2 - b(x^4)^2 + 2 = 0$. Фокальное множество $f^\perp(M)$ есть гипербола.

Если $V_2 \in A_2$, то $R^4_3 = -R^3_4 = b \neq 0$ и $R^3_3 = 0$. Из (3.2) следует, что $R^4_3 < 0$. Уравнением фокального множества $f^\perp(M)$ будет $b(x^3)^2 + b(x^4)^2 + 2 = 0$. Фокальное множество $f^\perp(M)$ есть эллипс.

Если $V_2 \in A_3$, то в силу (2.I5) и (2.32) имеем $R^3_4 = R^3_3 = 0$ и $R^4_3 = b < 0$. Уравнение (3.2) получает вид $b(x^3)^2 = -2$. Фокальным множеством является пара параллельных вещественных прямых.

Если $V_2 \in A_4$, то в силу (2.I5) имеем $b(x^3)^2 = -2$. Поскольку b может быть, согласно (2.32) положительным или отрицательным, то фокальным множеством $f^\perp(M)$ является пара вещественных или мнимых параллельных прямых.

Если $V_2 \in A_5$, то $R^\beta_\alpha = 0$. Следовательно, уравнение (3.2) не имеет решений и $f^\perp(M) = \varnothing$.

Теорема 3.3. Фокальное множество $f^\perp(M)$ симплектической поверхности $V_2 \subset Sp_4$ является либо I) гиперболой, либо 2) эллипсом, либо 3) парой вещественных параллельных прямых, либо 4) парой мнимых параллельных прямых, либо 5) пустым множеством.

Соответственно будем говорить, что V_2 принадлежит C_1, C_2, C_3, C_4 либо C_5.

Теорема 3.4. Эти классификации связаны следующим образом: $\mathcal{A}_1 = C_1$, $\mathcal{A}_2 = C_2$, $\mathcal{A}_5 = C_5$ и $(\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4) \setminus C_3 = C_4$.

§4. Сферический образ двумерной симплектической поверхности.

С помощью сферического отображения $\rho: Gr(2;4) \longrightarrow S_4$, построенного в §I, можно определить отображение $\rho_T: V_2 \longrightarrow S_4$, положив $V_2 \ni M \longmapsto T_M(V_2) = \{M; \vec{e}_i\} \longmapsto \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \longmapsto \mathcal{M} \in S_4$. Напомним, что $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \longmapsto \mathcal{M}$ означает, что $\vec{\theta\mathcal{M}} = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, где $\theta \in {}^2\mathcal{E}_6$ - некоторая фиксированная точка. Выясним размерность образа $\rho_T(V_2)$ и то, какова будет метрика в его касательной и нормальной плоскостях.

Если V_2 принадлежит классу $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$, то из таблицы (2.32) получим, что

$$\omega_1^3 = b_{11}^3\omega^1 + b_{12}^3\omega^2, \qquad \omega_2^3 = b_{12}^3\omega^1 + \varepsilon b_{11}^3\omega^2, \qquad (4.I)$$
$$\omega_1^4 = -(b_{12}^3\omega^1 + \varepsilon b_{11}^3\omega^2), \qquad \omega_2^4 = -\varepsilon(b_{11}^3\omega^1 + b_{12}^3\omega^2).$$

относительно некоторого симплектического репера $\{M; \vec{e}_i, \vec{e}_{\bar{i}}\}$. Отсюда $\omega_2^4 = -\varepsilon\omega_1^3$ и $\omega_2^3 = -\omega_1^4$. Из (I.2I) следует, что

$$\theta^1 = 1/\sqrt{2}\,(\omega_1^3 \pm \varepsilon\omega_1^3), \qquad \theta^3 = 1/\sqrt{2}\,(\omega_1^3 \mp \varepsilon\omega_1^3),$$
$$\theta^2 = 1/\sqrt{2}\,(\pm\omega_1^4 - \varepsilon\omega_1^4)_2, \qquad \theta^4 = 1/\sqrt{2}\,(\omega_1^4 \mp \varepsilon\omega_1^4).$$

При выборе базиса $\{\vec{E}'_\Pi\}$ в §I рассматривались 4 возможности. Если $V_2 \in \mathcal{A}_1$, то в формулах (I.I3) берем знак "+", и если $V_2 \in \mathcal{A}_2$, то знак "-". Тогда подмногообразие $\rho_T(V_2)$ в S_4 выделяется одинаковыми уравнениями, несмотря на то, принадлежит ли V_2 классу $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$:

$$\theta^2 = 0, \quad \theta^3 = 0, \quad \theta^1 = \sqrt{2}\,\omega_1^3, \quad \theta^4 = \sqrt{2}\,\omega_1^4. \qquad (4.2)$$

Для произвольной точки $\mathcal{M} \in \rho_T(V_2)$ имеем $d\vec{\mathcal{M}} = \theta^1\vec{u}_1 + \theta^4\vec{u}_4$. Следовательно, $\dim \rho_T(V_2) = 2$. Поскольку касательная плоскость $T_\mathcal{M}(\rho_T(V_2))$ является подпространством касательной плоскости $T_\mathcal{M}(S_4)$, то можно найти ортогональное дополнение $T_\mathcal{M}^\perp(\rho_T(V_2))$ к $T_\mathcal{M}(\rho_T(V_2))$ до $T_\mathcal{M}(S_4)$. Конечно, $T_\mathcal{M}^\perp(\rho_T(V_2))$ не всегда определяется в силу метрики в $T_\mathcal{M}(S_4)$. Назовем двумерную плоскость $T_\mathcal{M}^\perp(\rho_T(V_2))$ нормальной плоскостью к подмногообразию $\rho_T(V_2)$ в точке $\mathcal{M}$. В силу (I.23) метрика касательной плоскости $T_\mathcal{M}(\rho_T(V_2)) = \{\mathcal{M}; \vec{u}_1, \vec{u}_4\}$ и метрика нормальной плоскости $T_\mathcal{M}^\perp(\rho_T(V_2)) = \{\mathcal{M}; \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ определяются, соответственно, матрицами

$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \qquad \|a_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix},$$

если $V_2 \in \mathcal{A}_1$, и матрицами

$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}, \qquad \|a_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{Vmatrix},$$

если $V_2 \in A_2$. Здесь $i, j, \ldots = 1, 4$ и $\alpha, \beta, \ldots = 2, 3$. Итак, у $V_2 \in A_1$ касательная и нормальная плоскости в каждой точке M подмногообразия $g_T(V_2)$ псевдоевклидовы типа ${}^1E_2$, а у $V_2 \in A_2$, касательная и нормальная плоскости, соответственно, типа E_2 и ${}^2E_2$.

Если $V_2 \in A_3$, то из таблицы (2.32) получим, что

$$\omega_1^3 = b_{11}^3 \omega^1, \quad \omega_1^4 = b_{11}^4 \omega^1 + b_{12}^4 \omega^2, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^4 = b_{12}^4 \omega^1. \tag{4.3}$$

Из (I.2I) при верхних знаках следует

$$\theta^1 = 1/\sqrt{2}\,(b_{11}^3 - b_{12}^4)\,\omega^1, \qquad \theta^3 = 1/\sqrt{2}\,(b_{11}^3 + b_{12}^4)\,\omega^1,$$

$$\theta^2 = 1/\sqrt{2}\,(b_{11}^4 \omega^1 + b_{12}^4 \omega^2), \qquad \theta^4 = 1/\sqrt{2}\,(b_{11}^4 \omega^1 + b_{12}^4 \omega^2).$$

Отсюда

$$\theta^2 = \theta^4, \qquad (b_{11}^3 + b_{12}^4)\,\theta^1 - (b_{11}^3 - b_{12}^4)\,\theta^3 = 0, \tag{4.4}$$

где $b_{11}^3 + b_{12}^4$ и $b_{11}^3 - b_{12}^4$ не равны нулю одновременно. Пусть, например, $b_{11}^3 - b_{12}^4 \neq 0$, тогда из (4.4) следует, что $\theta^3 = k\theta^1$, где $k = (b_{11}^3 + b_{12}^4)(b_{11}^3 - b_{12}^4)^{-1}$. Следовательно, многообразие $g_T(V_2)$ задается уравнениями $\theta^4 = \theta^2$ и $\theta^3 = k\theta^1$. Для произвольной точки $M \in g_T(V_2)$ имеем

$$d\vec{M} = \theta^2(\vec{u}_2 + \vec{u}_4) + \theta^1(\vec{u}_1 + k\vec{u}_3),$$

т.е. касательная плоскость подмногообразия $g_T(V_2)$ в точке M определяется векторами $\vec{a}_1 = \vec{u}_1 + k\vec{u}_3$ и $\vec{a}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$. С помощью (I.23) получим

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = k^2 - 1, \qquad \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle = 0,$$

где $k^2 - 1 = 4\, b_{11}^3 b_{12}^4 (b_{11}^3 - b_{12}^4)^{-2} \neq 0$.

Следовательно, у $V_2 \in A_3$ касательная плоскость $T_M(g_T(V_2))$ полуизотропна.

Если $V_2 \in A_4$, то по таблице (2.32)

$$\omega_1^3 = 0, \qquad \omega_1^4 = b_{11}^4 \omega^1 + b_{12}^4 \omega^2, \qquad \omega_2^3 = 0, \qquad \omega_2^4 = b_{12}^4 \omega^1 + b_{22}^4 \omega^2.$$

Если в формулах (I.2I) берем верхний знак, то $\theta^4 = \theta^2$ и $\theta^3 = -\theta^1$. Для произвольной точки $M \in g_T(V_2)$ имеем

$$d\vec{M} = \theta^1(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) + \theta^2(\vec{u}_2 + \vec{u}_4).$$

Касательная плоскость $T_M(g_T(V_2))$ в точке $M \in g_T(V_2)$ определяется векторами $\vec{a}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$ и $\vec{a}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_4$. В силу (I.23) получим $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle = \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle = 0$.

Следовательно, касательная плоскость $T_M(g_T(V_2))$ вполне изотропна, т.е. является аффинной плоскостью.

Наконец, пусть $V_2 \in A_5$. В этом случае по таблице (2.32) ω_i^3 и ω_i^4 пропорциональны. и $\omega_1^\alpha \wedge \omega_2^\alpha = [b_{11}^4 b_{22}^4 - (b_{12}^4)^2]\,\omega^1 \wedge \omega^2 = 0$, т.е. ω_1^α и ω_2^α также пропорциональны. В итоге θ^1, θ^2, θ^3 и θ^4 в силу формул (I.2I) оказываются кратными некоторой форме, скажем θ, и для точки $M \in g_T(V_2)$ получим

$$d\vec{M} = \theta(\lambda^1 \vec{u}_1 + \lambda^2 \vec{u}_2 + \lambda^3 \vec{u}_3 + \lambda^4 \vec{u}_4).$$

Подмногообразие $\rho\tau(V_2)$ является линией (или точкой, если $\lambda^1=\lambda^2=\lambda^3=\lambda^4=0$).

Сформулируем полученные результаты в виде следующих теорем.

Теорема 4.I. Если двумерная симплектическая поверхность $V_2 \subset Sp_4$ принадлежит одному из классов A_1, A_2, A_3 или A_4, то подмногообразие $\rho\tau(V_2)$ является двумерным, а если $V_2 \in A_5$, то $\rho\tau(V_2)$ одномерно (или точка).

Теорема 4.2. Для двумерной симплектической поверхности $V_2 \subset Sp_4$ класса A_1 касательная плоскость $T_M(\rho\tau(V_2))$ и нормальная плоскость $T_M^{\perp}(\rho\tau(V_2))$ являются псевдоевклидовыми плоскостями типа ${}^1E_2$; если $V_2 \in A_2$, то $T_M(\rho\tau(V_2))$ и $T_M^{\perp}(\rho\tau(V_2))$ являются, соответственно, плоскостями типов E_2 и ${}^2E_2$. Если $V_2 \in A_3$, то $T_M(\rho\tau(V_2))$ является полуизотропной. Если $V_2 \in A_4$, то $T_M(\rho\tau(V_2))$ является вполне изотропной (т.е. аффинной). Если $V_2 \in A_5$, то $\rho\tau(V_2)$ оказывается линией или точкой.

§5. Классификация подмногообразий $\rho\tau(V_2)$ при классах A_1 и A_2 по типам фокального множества.

I. Найдем сперва структурные уравнения подмногообразия $\rho\tau(V_2)$, если V_2 принадлежит A_1 или A_2. Мы исходим из структурных уравнений (I.I8) и (I.I9) единичной сферы S_4. Из (I.I8) получим

$$d\theta^{\alpha} = \theta^{i}\wedge\theta^{\alpha}_{i} + \theta^{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{\beta}, \tag{5.I}$$

где $i,j,\ldots = 1,4$ и $\alpha,\beta,\ldots = 2,3$. Из (4.2) получим $\theta^{\alpha}=0$, откуда $d\theta^{\alpha}=0$. Следовательно, (5.I) влечет $\theta^{i}\wedge\theta^{\alpha}_{i}=0$. Отсюда по лемме Картана

$$\theta^{\alpha}_{i} = B^{\alpha}_{ik}\theta^{k}, \qquad B^{\alpha}_{ik}=B^{\alpha}_{ki}. \tag{5.2}$$

Здесь, конечно, B^{α}_{ik} выражаются через b^{α}_{ij} и их продолжения b^{α}_{ijk}. Для этого придется продолжить $\pm\omega^4_1+\varepsilon\omega^4_2=0$ и $\omega^3_1\pm\omega^4_2=0$ и в полученных формулах ω^1 и ω^2 выразить через θ^1 и θ^4.

Из структурных уравнений (I.I8) и (I.I9), в силу $\theta^{\alpha}=0$, теперь следует

$$d\theta^{i}=\theta^{j}\wedge\theta^{i}_{j}, \qquad d\theta^{i}_{k}=\theta^{j}_{k}\wedge\theta^{i}_{j}+\tfrac{1}{2}\overline{\Pi}^{i}_{k},$$
$$d\theta^{\alpha}_{\beta}=\theta^{\gamma}_{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{\gamma}+\tfrac{1}{2}\overline{\Pi}^{\alpha}_{\beta}, \tag{5.3}$$

где

$$\overline{\Pi}^{i}_{k}=2\left(\theta^{\alpha}_{k}\wedge\theta^{i}_{\alpha}+\tfrac{1}{2}\Pi^{i}_{k}\right), \qquad \overline{\Pi}^{\alpha}_{\beta}=2\left(\theta^{i}_{\beta}\wedge\theta^{\alpha}_{i}+\tfrac{1}{2}\Pi^{\alpha}_{\beta}\right). \tag{5.4}$$

Формы $\overline{\Pi}^{i}_{k}$ и $\overline{\Pi}^{\alpha}_{\beta}$ можно представить в виде

$$\overline{\Pi}^{i}_{K} = \overline{P}^{i}_{K s t}\, \theta^{s}\wedge\theta^{t}, \qquad \overline{\Pi}^{\alpha}_{\beta} = \overline{P}^{\alpha}_{\beta s t}\, \theta^{s}\wedge\theta^{t}.$$

Теперь уравнения (5.3) принимают вид

$$d\theta^{1} = \theta^{4}\wedge\theta^{1}_{4}, \qquad d\theta^{4} = \theta^{1}\wedge\theta^{4}_{1},$$

$$d\theta^{4}_{1} = \tfrac{1}{2}\overline{P}^{4}_{114}\, \theta^{1}\wedge\theta^{4}, \qquad d\theta^{3}_{2} = \tfrac{1}{2}\overline{P}^{3}_{214}\, \theta^{1}\wedge\theta^{4}.$$

Здесь мы учитывали (I.2I):
Из (I.I8), с учетом (5.2), получим

$$d\theta^{4}_{1} = \left[\begin{vmatrix} B^{2}_{11} & B^{2}_{14} \\ B^{2}_{41} & B^{2}_{44}\end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} B^{3}_{11} & B^{3}_{14} \\ B^{3}_{41} & B^{3}_{44}\end{vmatrix} \pm 1\right] \theta^{1}\wedge\theta^{4},$$

$$d\theta^{3}_{2} = \left[-\varepsilon \begin{vmatrix} B^{2}_{11} & B^{2}_{41} \\ B^{3}_{11} & B^{3}_{41}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B^{2}_{41} & B^{2}_{44} \\ B^{3}_{44} & B^{3}_{44}\end{vmatrix}\right] \theta^{1}\wedge\theta^{4},$$

откуда

$$\overline{P}^{4}_{114} = 2\left[\begin{vmatrix} B^{2}_{11} & B^{2}_{14} \\ B^{2}_{41} & B^{2}_{44}\end{vmatrix} - \varepsilon \begin{vmatrix} B^{3}_{11} & B^{3}_{41} \\ B^{3}_{44} & B^{3}_{44}\end{vmatrix} \pm 1\right],$$

$$\overline{P}^{3}_{214} = 2\left[-\varepsilon \begin{vmatrix} B^{2}_{11} & B^{2}_{41} \\ B^{3}_{11} & B^{3}_{41}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B^{2}_{44} & B^{2}_{44} \\ B^{3}_{44} & B^{3}_{44}\end{vmatrix}\right].$$

2. Уравнениями фокальных множеств $F(M)$ и $F^{\perp}(M)$ касательного и нормального семейств $T(\mathcal{S}_T(V_2)) = \{T_M(\mathcal{S}_T(V_2)) \mid M \in \mathcal{S}_T(V_2)\}$ и $T^{\perp}(\mathcal{S}_T(V_2))$ $\{T^{\perp}_M(\mathcal{S}_T(V_2)) \mid M \in \mathcal{S}_T(V_2)\}$ двумерного подмногообразия $\mathcal{S}_T(V_2)$ в случае, когда V_2 принадлежит классу $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$ будут

$$(B^{2}_{41}B^{2}_{14} - B^{3}_{41}B^{3}_{41})(x^{1})^{2} + (B^{2}_{11}B^{3}_{44} - B^{2}_{44}B^{3}_{11})x^{1}x^{4} + (B^{2}_{41}B^{3}_{44} - B^{2}_{44}B^{3}_{41})(x^{4})^{2} = 0 \qquad (5.5)$$

и

$$\varepsilon\left[(B^{2}_{41})^{2} - B^{2}_{11}B^{2}_{44}\right](x^{2})^{2} + (B^{2}_{11}B^{3}_{44} + B^{3}_{11}B^{2}_{44} - 2B^{2}_{41}B^{3}_{41})x^{2}x^{3} +$$
$$+\left[(B^{3}_{41})^{2} - B^{3}_{11}B^{3}_{44}\right](x^{3})^{2} + 1 = 0. \qquad (5.6)$$

Теорема 5.I. Фокальное множество $F(M)$ для поверхностей V_2 , принадлежащей классам $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$, является: I) либо парой вещественных пересекающихся прямых, либо 2) парой мнимых пересекающихся прямых, либо 3) парой совпадающих прямых и либо 4) $F(M) = T_M(\mathcal{S}_T(V_2))$.

Теорема 5.2. Фокальное множество $F^{\perp}(M)$ для поверхности V_2 , принадлежащей классам $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, является: I) либо гиперболой, 2) либо мнимым эллипсом, 3) либо парой вещественных параллельных прямых, 4) либо парой мнимых параллельных прямых, 5) либо $F(M) = \emptyset$.

§6. Индикатриса нормальной кривизны многообразия $\mathcal{S}_T(V_2)$ при классах $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$

Найдем индикатрису нормальной кривизны подмногообразия

$\varrho\tau(V_2)$, если V_2 принадлежит классам $\mathcal{A}_1$ или $\mathcal{A}_2$. Для этого продифференцируем формулу $d\vec{M}=\theta^i\vec{u}_i$, получая

$$d^2\vec{M}=d(\theta^i\vec{u}_i)=(d\theta^k+\theta^i\theta_i^k)\vec{u}_k+\varepsilon[(\theta^1)^2-(\theta^4)^2](\vec{M}-\vec{E}_i)+\vec{n},$$

где вектор $\vec{n}=\theta^i\theta_i^\alpha$ на плоскости $T_M(\varrho\tau(V_2))$. Обозначим координаты вектора $\vec{n}$ через n^α. Тогда

$$n^\alpha=\theta^i\theta_i^\alpha=B_{ij}^\alpha\theta^i\theta^j=B_{11}^\alpha(\theta^1)^2+2B_{14}^\alpha\theta^1\theta^4+B_{44}^\alpha(\theta^4)^2. \quad (6.I)$$

Напомним еще раз, что при $V_2\in\mathcal{A}_1$ метрика касательной плоскости $T_M(\varrho\tau(V_2))$ определяется матрицей

$$\begin{Vmatrix}-I & 0\\ 0 & I\end{Vmatrix}.$$

Возьмем всевозможные кривые, проходящие через M, кроме тех, у которых длина касательного вектора - нуль. Пусть параметр s у каждой кривой - натуральный. Тогда $|d\vec{M}/ds|^2=\pm 1$ и $ds^2=\pm 1$. Рассмотрим сперва кривые, проходящие через M с $|d\vec{M}/ds|^2=1$. Выражая $d\vec{M}/ds$ через $\{\vec{u}_i\}$, получим $d\vec{M}/ds=\xi^1\vec{u}_1+\xi^4\vec{u}_4$. Отсюда $-(\xi^1)^2+(\xi^4)^2=1$. При каждой паре ξ^1 и ξ^4 существует такое число $\varphi\in\mathbb{R}$, что $\xi^1=sh\varphi$ и $\xi^4=ch\varphi$. Следовательно,

$$d\vec{M}=(sh\varphi\, ds)\vec{u}_1+(ch\varphi\, ds)\vec{u}_4,$$

т.е. $\theta^1=sh\varphi\, ds$ и $\theta^4=ch\varphi\, ds$. Формулы (6.I) записываются

$$n^\alpha(\varphi)=c^\alpha+a^\alpha ch 2\varphi+b^\alpha sh 2\varphi, \quad (6.2)$$

где

$$a^\alpha=\frac{1}{2}(B_{11}^\alpha+B_{44}^\alpha),\quad b^\alpha=B_{14}^\alpha,\quad c^\alpha=\frac{1}{2}(-B_{11}^\alpha+B_{44}^\alpha). \quad (6.3)$$

Рассмотрим теперь кривые, проходящие через точку M с $|d\vec{M}/ds|^2=-1$. Из $d\vec{M}/ds=\xi^1\vec{u}_1+\xi^2\vec{u}_4$ следует $(\xi^1)^2-(\xi^4)^2=1$. Следовательно, существует такое $\varphi\in\mathbb{R}$, что $\xi^1=ch\varphi$ и $\xi^4=sh\varphi$, в силу чего

$$d\vec{M}=(ch\varphi\, ds)\vec{u}_1+(sh\varphi\, ds)\vec{u}_4.$$

Таким образом $\theta^1=ch\varphi\, ds$ и $\theta^4=sh\varphi\, ds$. Формулы (6.I) записываются в виде

$$n^\alpha(\varphi)=c^\alpha-a^\alpha sh 2\varphi-b^\alpha ch 2\varphi, \quad (6.4)$$

где a^α, b^α и c^α задаются формулами (6.2).

Определение. Множество $J=\{X\,|\,\vec{MX}=n^\alpha(\varphi)\vec{u}_\alpha,\ \varphi\in\mathbb{R}\}$, где $n^\alpha(\varphi)$ удовлетворяют (6.2) и (6.4), называется индикатрисой нормальной кривизны в точке M многообразия $\varrho\tau(V_2)$ при поверхности $V_2\in\mathcal{A}_1$.

Предположим, что ранг матрицы

$$\mathcal{A}=\varepsilon\begin{Vmatrix}a^2 & b^2\\ a^3 & b^3\end{Vmatrix}$$

равен двум. Здесь $\varepsilon=1$ соответствует уравнениям (6.2) и $\varepsilon=-1$ - уравнениям (6.4). Исключим из (6.2), а также из (6.4) параметр φ. Для упрощения обозначим $'n^\alpha(\varphi) = n^\alpha(\varphi) - c^\alpha$. Тогда из (6.2) и (6.4) получаем

$$[(b^3)^2 - (a^3)^2]('n^2)^2 + 2(b^2 b^3 - a^2 a^3)'n^2 'n^3 + \\ + [(b^2)^2 - (a^2)^2]('n^3)^2 = \varepsilon(a^2 b^3 - b^2 a^3)^2. \qquad (6.5)$$

С помощью инвариантов кривой второго порядка, получим, что уравнение (6.5) является уравнением гиперболы с центром $C\left(\frac{1}{2}(-B_{11}^\alpha + B_{44}^\alpha)\right)$. Заметим, что из (6.2) мы получаем одну ветвь, а из (6.4) - вторую ветвь этой гиперболы.

Если ранг матрицы A равен единице, то из (6.2) и (6.4) получим две сливающиеся прямые без некоторого отрезка. Наглядно из гиперболы нормальной кривизны $(\operatorname{rank} A = 2)$ получим индикатрису нормальной кривизны для случая $\operatorname{rank} A = 1$ сжатием гиперболы на ее вещественную ось.

Предположим, наконец, что $\operatorname{rank} A = 0$. Тогда $a^\alpha = 0$ и $b^\alpha = 0$. Из (6.2) и (6.4) получим $n^\alpha(\varphi) = c^\alpha$. Итак, индикатрисой нормальной кривизны является двукратная точка.

Теорема 6.I. Если симплектическая поверхность V_2 принадлежит классу A_1, то индикатрисой нормальной кривизны подмногообразия $\varrho\tau(V_2)$ является либо гипербола, либо двукратная прямая без некоторого отрезка, либо двукратная точка.

Если симплектическая поверхность $V_2 \in A_2$, то метрика касательной плоскости $T_M(\varrho\tau(V_2))$ евклидова. Тогда координаты $n^\alpha(\varphi)$ индикатрисы нормальной кривизны удовлетворяют уравнениям

$$n^\alpha(\varphi) = c^\alpha + a^\alpha \cos 2\varphi + b^\alpha \sin 2\varphi, \qquad (6.6)$$

где

$$a^\alpha = \frac{1}{2}(B_{11}^\alpha - B_{44}^\alpha), \qquad b^\alpha = 2B_{14}^\alpha, \qquad c^\alpha = \frac{1}{2}(B_{11}^\alpha + B_{44}^\alpha).$$

(см. [7], стр. 345 - 354). Так как известны типы такой индикатрисы нормальной кривизны, то в данном случае имеет место

Теорема 6.2. Если симплектическая поверхность V_2 принадлежит классу A_2, то индикатрисой нормальной кривизны подмногообразия $\varrho\tau(V_2)$ является либо эллипс, либо двукратный отрезок, либо двукратная точка.

Литература

I. Остиану Н. М., О геометрии поверхности аффинно-симплектического пространства. Уч. зап. Московск. пед. ин-та, 1963, 208, 156-176.

2. О с т и а н у Н. М., К геометрии четномерной поверхности аффинно-симплектического пространства удвоенной размерности. Депон. ВИНИТИ, 1964, 23 стр.
3. П а р р и н г А., Классификации конгруэнций симплектических плоскостей пространства Sp_4 по типам фокальной кривой и группам голономий. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 86-110.
4. П а р р и н г А., Сферическое отображение конгруэнции симплектических плоскостей пространства Sp_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 111-118.
5. П а р р и н г А., Многообразие симплектических $2m$-плоскостей и сферическое отображение. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 464, 116-136.
6. П а р р и н г А., Двумерная поверхность V_2 в симплектическом пространстве Sp_4. Тезисы конф. "Теоретические и прикладные вопросы математики", 1980, 87-89.
7. Риманова геометрия в ортогональном репере (по лекциям Э. Картана). Москва, 1960.

Поступило
22 XI 1985

THE TWO-DIMENSIONAL SYMPLECTIC SURFACES OF THE SYMPLETIC SPACE Sp_4

A. Parring, A. Saarne

S u m m a r y

In the present paper the 2-dimensional symplectic surfaces V_2 in the 4-dimensional symplectic space Sp_4 are studied. Some constructions which have the geometrical meaning (see [3-6]) are used for this study.

Some classifications of the symplectic surfaces in Sp_4 are given. The first classification of the 2-dimensional symplectic surfaces is given by the curvature forms of the linear connections in tangent and normal frame bundles. The second and the third classifications are given by the focal set of the tangent planes field and of the normal planes field respectively. Moreover, the spherical map of the symplectic 2-directions (see [4]), by which the symplectical surface V_2 is mapped in a 4-sphere S_4 is used. The image can be 0-, 1- or 2-dimensional submanifolds in S_4. In particular, when the dimension is 2, the surfaces V_2 are classified by the focal sets and by the normal curvature indicatrixes of the image.

ПОДМНОГООБРАЗИЯ V_3 С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ТРЕТЬЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_5

К.Рийвес

Эстонская сельскохозяйственная академия

I. Введение. Одним из главных объектов, описывающих геометрию поверхностей некоторого пространства, является их вторая фундаментальная форма α_2. В общем случае ее ковариантная производная $\bar\nabla\alpha_2 = \alpha_3$ представляет собой третью фундаментальную форму поверхности. Если $\bar\nabla\alpha_3 = 0$, то говорят о поверхности с параллельной третьей фундаментальной формой. Многие общие результаты о таких поверхностях получены в работах [4, 5, I] В.Мирзояна и Ю.Лумисте. В работах [2, 3, 7, 8] дана классификация и полное геометрическое описание поверхностей V_m с параллельной формой α_3 при малых размерностях $m=1,2$ и коразмерности $n-m=1$ в евклидовых пространствах E_n (в частности при $n=4$ и $n=5$). В настоящей работе исследуются поверхности V_3 с параллельной α_3 в евклидовом пространстве E_5. В пункте 2 приводятся исходные результаты работ [I - 3] и формулируется основной результат, а в пунктах 3 и 4 проводится его доказательство.

2. Методика исследования. Основной результат. Для изучения поверхности V_3 в евклидовом пространстве E_5 применяется метод подвижного репера, т.е. в пространстве E_5 рассматривается главное расслоение $\mathcal{O}(V_3, E_5)$ адаптированных к V_3 ортонормальных реперов $\{x, e_i, e_\alpha\}$, состоящих из точки $x\in V_3$, касательных векторов $e_i \in T_x(V_3)$ и нормальных векторов $e_\alpha \in T_x^\perp(V_3)$, где $i,j,\ldots = 1,2,3$; $\alpha,\beta,\ldots = 4,5$. Его деривационными формулами будут

$$dx = \omega^K e_K, \quad J,K,\ldots = 1,\ldots,5, \qquad (1)$$
$$de_J = \omega_J^K e_K, \quad \omega_J^K + \omega_K^J = 0,$$

где инвариантные формы ω^K, ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \qquad (2)$$
$$d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K,$$

и, кроме того,

$$\omega^\alpha = 0. \tag{3}$$

Внешнее дифференцирование последних уравнений с учетом леммы Картана и структурных уравнений (2) приводит к соотношениям

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j \quad (b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha), \tag{4А}$$

$$\Omega_i^j = -\sum_{\alpha=4}^{5} b_{i[k}^\alpha b_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l, \tag{4Б}$$

$$\Omega_\alpha^\beta = -\sum_{i=1}^{3} \delta_{\alpha\gamma} b_{i[k}^\gamma b_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l, \tag{4В}$$

где функции b_{ij}^α на $\mathcal{O}(V_3, E_5)$ являются коэффициентами второй фундаментальной формы α_2 поверхности V_3 в E_5, а через

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad \Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{5}$$

обозначены 2-формы кривизны, соответственно, касательной и нормальной связности рассматриваемой поверхности V_3. Говорят, что нормальная связность поверхности V_3 является плоской, если $\Omega_\alpha^\beta = 0$. Дифференциальное продолжение уравнений (4А) дает систему

$$\bar\nabla b_{ij}^\alpha \equiv db_{ij}^\alpha - b_{kj}^\alpha \omega_i^k - b_{ik}^\alpha \omega_j^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha = b_{ijk}^\alpha \omega^k \quad (b_{ijk}^\alpha = b_{ikj}^\alpha), \tag{6}$$

где функции b_{ijk}^α на $\mathcal{O}(V_3, E_5)$ являются коэффициентами третьей фундаментальной формы $\alpha_3 = \bar\nabla\alpha_2$ поверхности V_3. В дальнейшем рассматриваются лишь поверхности V_3 с параллельной формой α_3, т.е. всегда предполагается, что $\bar\nabla\alpha_3 = 0$, а это равносильно

$$\bar\nabla b_{ijk}^\alpha \equiv db_{ijk}^\alpha - b_{ljk}^\alpha \omega_i^l - b_{ilk}^\alpha \omega_j^l - b_{ijl}^\alpha \omega_k^l + b_{ijk}^\beta \omega_\beta^\alpha = 0. \tag{7}$$

Так как из (6) при дифференциальном продолжении получается, что

$$\bar\nabla b_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = b_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha - b_{kj}^\alpha \Omega_i^k - b_{ik}^\alpha \Omega_j^k,$$

то для поверхностей V_3 с параллельной α_3 справедливо

$$b_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha - b_{kj}^\alpha \Omega_i^k - b_{ik}^\alpha \Omega_j^k = 0. \tag{8}$$

Нижеследующее существенно опирается на следующие результаты.

Предложение I (ср. [3], с. 46 – 47). Если V_m не является минимальным подмногообразием с параллельной третьей фундаментальной формой α_3 в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$, то при $n=m+2$ нормальная связность подмногообразия V_m является плоской, т.е. $\Omega_\alpha^\beta = 0$.

Если подмногообразие V_m в евклидовом пространстве E_n имеет плоскую нормальную связность, то соотношения (4В) дают

$$\sum_{i=1}^{m} (b_{ik}^\alpha b_{il}^\beta - b_{il}^\alpha b_{ik}^\beta) = 0.$$

Последнее означает, что матрицы $B^4 = \| b_{ik}^4 \|$, $B^5 = \| b_{il}^5 \|$ коммутируют и тем самым могут быть приведены ортогональным преобразованием одновременно к диагональному виду.

Как показано в [6] (с. 84), в частном случае $m=3, n=5$ можно подходящим поворотом векторов e_4, e_5 на нормальной плоскости добиться того, что $\operatorname{rang} B^5 \le 2$. Таким образом, в дальнейшем без ограничения общности можно предполагать, что

$$B^4 = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}, \quad B^5 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

В силу этого существенно упрощается система (8), налагающая, вместе с (4Б) и (4В), некоторые конечные соотношения на параметры a, b, c, β, γ. То же самое происходит с дифференциальными уравнениями (6) и (7), которые в совокупности с системами (3) и (4А) вполне определяют инфинитезимальное перемещение адаптированного к V_3 ортонормированного репера в E_5 по формулам (I).

Подмногообразие M_m с плоской нормальной связностью в E_n называется <u>приводимым</u> (см. [I]), если существует $0 < m_1 < m$ главных направлений так, что натянутое на них поле будет параллельным в касательной связности. Тогда в этой связности параллельно и ортогональное к нему поле $(m-m_1)$-направлений. В противном случае M_m называется <u>неприводимым</u>. Среди рассматриваемых поверхностей $V_3 \subset E_5$ наибольший интерес представляли бы неприводимые поверхности, так как приводимые оказываются [I] произведениями поверхностей V_2 и линий V_1 с параллельной формой α_3, которые все описаны в [2].

Однако имеет место

<u>Теорема</u>. Кроме гиперсферы $S_3 \subset E_4 \subset E_5$ все трехмерные поверхности V_3 с параллельной третьей фундаментальной формой α_3 в евклидовом пространстве E_5 являются приводимыми.

3. <u>Предварительные результаты</u>. Пусть матрицы B^4 и B^5 приведены к виду (9). Тогда по формулам (4Б), (4В) формами кривизны будут

$$\Omega_1^2 = -ab\,\omega^1\wedge\omega^2, \quad \Omega_1^3 = -ac\,\omega^1\wedge\omega^3,$$
$$\Omega_2^3 = -(bc+\beta\gamma)\,\omega^2\wedge\omega^3, \quad \Omega_4^5 = 0.$$

Если учесть эти равенства в (8), то получается следующая система конечных соотношений на параметры a, b, c, β, γ:

$$\begin{gathered} ab(a-b)=0, \quad ac(a-c)=0, \quad (bc+\beta\gamma)(b-c)=0, \\ ab\beta=0, \quad ac\gamma=0, \quad (bc+\beta\gamma)(\beta-\gamma)=0. \end{gathered} \tag{I0}$$

В качестве подготовки к доказательству теоремы опишем сперва частные случаи матриц B^4, B^5 вида (9), удовлетворяющих системе (I0).

<u>Предложение 2</u>. Если $V_3 \subset E_5$ является подмногообразием с параллельной формой α_3, то матрицы B^4, B^5 коэффициентов ее второй фундаментальной формы α_2 могут иметь лишь виды, указанные в таблице I, где $abc\beta\gamma \neq 0$ и в случае № I либо $bc + \beta\gamma = 0$, либо $b = c$ и $\beta = \gamma$.

Таблица I

Матрицы коэффициентов формы α_2 поверхности $V_3 \subset E_5$ с параллельной формой α_3

№	I	2	3	4
r^4	2	2	I	I
B^4	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}$
r^5	2	I	I	I
B^5	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{matrix}$

№	5	6	7	8
r^4	3	2	I	0
B^4	$\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
r^5	0	0	0	0
B^5	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

<u>Доказательство</u>. Если матрицы B^4 и B^5 представлены в виде (9), то без ограничения общности можно считать, что их ранги r^4 и r^5 удовлетворяют условиям $r^4 \geq r^5$ и $r^5 \leq 2$. Решаем систему (I0) отдельно для всех значений r^5.

I. Пусть $r^5=2$. Тогда $\beta\gamma\neq 0$ и из системы (10) следует, что $ab=ac=0$. В силу $r^4\geqslant r^5=2$ последние равенства возможны лишь при $a=0$ и система (10) удовлетворяется полностью, если либо $bc+\beta\gamma=0$, либо при $bc+\beta\gamma\neq 0$ обязательно $b=c$, $\beta=\gamma$. Таким образом получен случай I из табл. I.

II. Пусть $r^5=1$ и при этом $\beta=0$, $\gamma\neq 0$. Тогда система (10) приводится к виду

$$ab(a-b)=0, \quad ac=0, \quad bc=0.$$

Если здесь $c=0$, то существует две возможности: либо $a-b=0$ $(ab\neq 0)$, либо $a-b\neq 0$, $ab=0$ (пусть для конкретности $a=0, b\neq 0$). В первом случае $a=b\neq 0, c=0$ очевидно $r^4=2$ (случай № 2), во втором $a=0, b\neq 0, c=0$ соответственно $r^4=1$ (случай № 3). Если же $c\neq 0$, то $a=b=0$ и следовательно опять $r^4=1$ (случай № 4).

III. Пусть $r^5=0$. Тогда $\beta=\gamma=0$ и система (10) превращается в $ab(a-b)=ac(a-c)=bc(b-c)=0$, откуда при $a=b=c\neq 0$ ясно, что $r^4=3$; при $a\neq b$, $b=c\neq 0$ всегда $a=0$, т.е. $r^4=2$, а при $ab=ac=bc=0$, либо $a=b=0$, $c\neq 0$ $(r^4=1)$, либо $a=b=c=0$ $(r^4=0)$. Они записаны в табл. I под № 5, 6, 7, 8. Других возможностей не существует. Предложение 2 доказано.

4. <u>Доказательство теоремы</u>. Рассмотрим по отдельности все случаи таблицы I.

<u>Случай № I</u>. По предложению 2 здесь существует две возможности.

Если $bc+\beta\gamma=0$, то система (6) дает

$$\omega_1^2=-\frac{1}{b}b^4_{122}\omega^2-\frac{1}{b}b^4_{123}\omega^3, \quad \omega_1^3=-\frac{1}{c}b^4_{123}\omega^2-\frac{1}{c}b^4_{133}\omega^3,$$

откуда следует, что

$$b^5_{122}=\frac{\beta}{b}b^4_{122}, \quad b^5_{123}=\frac{\beta}{b}b^4_{123}, \quad b^5_{123}=\frac{\gamma}{c}b^4_{123}, \quad b^5_{133}=\frac{\gamma}{c}b^4_{133}.$$

Два средних равенства приводят либо к $\frac{\beta}{b}=\frac{\gamma}{c}$, либо к $b^4_{123}=b^5_{123}=0$.

В первом случае $bc+\beta\gamma=0$ и $b\gamma-\beta c=0$ дают либо $b=\beta=0$, либо $c^2+\gamma^2=0$, а обе эти возможности противоречат предположению $bc\beta\gamma\neq 0$.

Во втором случае, с учетом следствий $b^4_{111}=b^4_{112}=b^4_{113}=0$ системы (6) из (7), получаются равенства $b^4_{122}\omega_1^2=0$, $b^4_{133}\omega_1^3=0$, которые возможны только при $b^4_{122}=b^4_{133}=0$. Таким образом $\omega_1^2=\omega_1^3=0$, а так как сейчас, по предположениям, также $\omega_1^4=\omega_1^5=0$, то из деривационных формул (I) видно, что

$dx = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$, $de_1 = 0$, т.е. $V_3 = E_1 \times V_2$ — поверхность приводима.

Если $bc + \beta\gamma' \neq 0$, то $b = c$, $\beta = \gamma'$ и систему (6) нужно решать при

$$B^4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{Vmatrix}, \qquad B^5 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{Vmatrix}.$$

Эта система равносильна дифференциальным уравнениям

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{b} b^4_{122}\omega^2, \quad \omega_1^3 = -\frac{1}{b} b^4_{122}\omega^3,$$

$$db = \beta\omega_4^5 + b^4_{122}\omega^1, \quad d\beta = -b\omega_4^5 + \frac{\beta}{b} b^4_{122}\omega^1$$

и конечным соотношениям $b^5_{122} = \frac{\beta}{b} b^4_{122}$, $b^\alpha_{ijk} = 0\ (\{i,j,k\} \neq \{1,2,2\}, \alpha = 4,5)$. Но тогда из (7) следует равенство $b^4_{122}\omega_1^2 = 0$, возможное только при $b^4_{122} = 0$. Как и в предыдущем случае получены уравнения $\omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_1^5 = 0$, указывающие на приводимость рассматриваемой поверхности V_3.

Случай № 2. Система (6) приводится к дифференциальным уравнениям

$$\omega_1^3 = \frac{1}{a} b^4_{113}\omega^1, \quad \omega_2^3 = \frac{1}{a} b^4_{113}\omega^2, \quad \omega_4^5 = -\frac{\gamma'}{a^2} b^4_{113}\omega^3,$$

$$da = b^4_{113}\omega^3, \quad d\gamma' = b^5_{333}\omega^3$$

и конечным соотношениям

$$b^4_{223} = b^4_{113}, \quad b^4_{333} = \frac{\gamma'^2}{a^2} b^4_{113}, \quad b^5_{113} = -\frac{\gamma'}{a} b^4_{113}, \quad b^5_{223} = -\frac{\gamma'}{a} b^4_{113}$$

(кроме b^5_{333} все остальные b^α_{ijk} равны нулю). Учет этих выражений в системе (7) приводит к равенствам

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega_4^5 = 0, \quad a = const, \quad b^5_{333} = const.$$

С помощью формул (I) легко убедиться, что поверхность приводима, т.е. $V_3 = V_2 \times V_1$, где $V_2 \subset E_3 = \{e_1, e_2, e_4\}$, $V_1 \subset E_2 = \{e_3, e_5\}$.

Случай № 3. Из системы (6) следуют дифференциальные уравнения

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{b} b^4_{122}\omega^2, \quad \omega_1^3 = -\frac{1}{\gamma'} b^5_{133}\omega^3, \quad \omega_2^3 = \frac{1}{b} b^4_{223}\omega^2 + \frac{1}{b} b^4_{233}\omega^3,$$

$$\omega_4^5 = -\frac{1}{\gamma'} b^4_{233}\omega^2 - \frac{1}{\gamma'} b^4_{333}\omega^3,$$

$$db = b^4_{122}\omega^1 + b^4_{222}\omega^2 + b^4_{223}\omega^3,$$

$$d\gamma' = b^5_{133}\omega^1 + b^5_{233}\omega^2 + b^5_{333}\omega^3$$

и конечные соотношения

$$b^5_{222} = -\frac{b}{\gamma'} b^4_{233}, \quad b^5_{223} = -\frac{b}{\gamma'} b^4_{333},$$

$$b^5_{223} = -\frac{\gamma'}{b} b^4_{223}, \quad b^5_{233} = -\frac{\gamma'}{b} b^4_{233},$$

$$b^4_{111} = b^4_{112} = b^4_{113} = b^4_{123} = b^4_{133} = b^5_{111} = b^5_{112} = b^5_{113} = b^5_{122} = b^5_{123} = 0.$$

Но система (7), налагающая на рассматриваемые $V_3 \subset E_5$ условие параллельности формы α_3, удовлетворяется лишь в случае, когда $\omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$ (т.е. $b^4_{122} = b^5_{133} = 0$). Учитывая еще предположение $\omega_1^4 = \omega_1^5 = 0$ из формул (I), как и раньше, ясно, что $V_3 = E_1 \times V_2$ - она приводима.

Случай № 4. Из системы (6) получаются дифференциальные уравнения

$$\omega_1^3 = -\frac{1}{c} b^4_{133}\,\omega^3, \quad \omega_2^3 = -\frac{1}{c} b^4_{233}\,\omega^3,$$

$$dc - \gamma\,\omega_4^5 = b^4_{133}\,\omega^1 + b^4_{233}\,\omega^2 + b^4_{333}\,\omega^3,$$

$$d\gamma + c\,\omega_4^5 = \frac{\gamma}{c} b^4_{133}\,\omega^1 + \frac{\gamma}{c} b^4_{233}\,\omega^2 + b^5_{333}\,\omega^3$$

и конечные соотношения

$$b^\alpha_{111} = b^\alpha_{112} = b^\alpha_{113} = b^\alpha_{122} = b^\alpha_{123} = b^\alpha_{222} = b^\alpha_{223} = 0, \quad \alpha = 4, 5,$$

$$b^5_{133} = \frac{\gamma}{c} b^4_{133}, \quad b^5_{233} = \frac{\gamma}{c} b^4_{233}.$$

Подставляя их в систему (7), получим

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0, \quad d b^4_{333} = b^5_{333}\,\omega_4^5, \quad d b^5_{333} = -b^4_{333}\,\omega_4^5.$$

Так как наряду с этими равенствами также $\omega_1^4 = \omega_1^5 = \omega_2^4 = \omega_2^5 = 0$, то по деривационным формулам (I) легко видеть, что $V_3 = E_2 \times V_1 \subset E_5$, т.е. она приводима.

Случай № 5. Решением системы (6) будет

$$\omega_4^5 = 0, \quad db = 0,$$

которое с учетом $\omega_1^5 = \omega_2^5 = \omega_3^5 = 0$ означает, что для рассматриваемой поверхности справедливо $V_3 \subset E_4 \subset E_5$. А гиперповерхности с параллельной формой α_3 описаны в [2]. Легко убедиться, что сейчас $V_3 = S_3$. Она неприводима.

Случай № 6. Теперь $\omega_1^5 = \omega_2^5 = \omega_3^5 = 0$ и система (6) добавляет к ним дифференциальные уравнения

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{b} b^4_{.122}\,\omega^2, \quad \omega_1^3 = -\frac{1}{b} b^4_{122}\,\omega^3,$$

$$\omega_4^5 = 0, \quad db = b^4_{122}\,\omega^1.$$

Также как в предыдущем случае $V_3 \subset E_4 \subset E_5$, но сейчас можно с учетом системы (7) убедиться, что $\omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_1^5 = 0$ и тем самым $V_3 = E_1 \times V_2$ - поверхность приводима.

Случай № 7. Здесь $\omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_1^5 = \omega_2^5 = \omega_3^5 = 0$, а из системы (6) получаются дифференциальные уравнения

$$\omega_1^3 = -\frac{1}{c} b^4_{133}\,\omega^3, \quad \omega_2^3 = -\frac{1}{c} b^4_{233}\,\omega^3, \quad \omega_4^5 = \frac{1}{c} b^5_{333}\,\omega^3,$$

$$dc = b^4_{133}\,\omega^1 + b^4_{233}\,\omega^2 + b^4_{333}\,\omega^3.$$

Поверхность V_3 будет с параллельной формой α_3 только тогда, когда удовлетворяется система (7). Ее следствиями являются уравнения $\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0$ $(b_{133}^4 = b_{233}^4 = 0)$ и $d b_{333}^4 = -\frac{1}{c}(b_{333}^5)^2\omega^3$, $d b_{333}^5 = -\frac{1}{c} b_{333}^4 \cdot b_{333}^5$, которые с помощью деривационных формул (I) показывают, что $V_3 = E_2 \times V_1$, т.е. поверхности являются приводимыми.

Случай № 8. Здесь $b_{ij}^\alpha = 0$, $b_{ijk}^\alpha = 0$, $\alpha = 4, 5$, и системы (6) и (7) удовлетворяются тождественно. Поверхностью V_3 будет плоскость E_3 - она считается тоже приводимой так как $E_3 = E_1 \times E_2$. Теорема доказана.

Литература

I. Л у м и с т е Ю. Г., Подмногообразия с плоской связностью ван-дер-Вардена - Бортолотти и параллельность третьей фундаментальной формы. Изв. вузов. Математика, 1986, № 4.

2. Л у м и с т е Ю., Неприводимые подмногообразия малых размерностей с параллельной третьей фундаментальной формой. Настоящий сборник, с. 50-62.

3. Л у м и с т е Ю. Г., М и р з о я н В. Подмногообразия с параллельной третьей фундаментальной формой. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 665, 42-54.

4. М и р з о я н В. А., Подмногообразия с параллельной фундаментальной формой высшего порядка. Тарту, 1978, 47 с. (Рукопись, деп. в ВИНИТИ АН СССР; РЖ Мат, 1978, 10А542 Деп).

5. М и р з о я н В. А., Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем. - Пробл. геометрии. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). М., 1983, т. 14, с. 73-100.

6. Р и й в е с К., Подгруппы Ли движений евклидова пространства R_5 и их орбиты. II. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 83-109.

7. Р и й в е с К. В., Поверхности $V_2 \subset E_5$ с параллельной третьей фундаментальной формой, имеющие плоскую нормальную связность. - Тезисы докладов УI Прибалтийской конф. по соврем. проблемам дифф. геом. и их прилож., Таллин, 1984, с. 103-104.

8. Р и й в е с К. В., О поверхностях $V_2 \subset E_5$ с параллельной третьей фундаментальной формой, имеющих неплоскую нор-

мальную связность. - Восьмая всесоюзн. научн. конф. по соврем. проблемам дифф. геом. Тезисы докладов. Одесса, 1984, с. 131.

Поступило
25 XII 1985

SUBMANIFOLDS V_3 WITH PARALLEL THIRD FUNDAMENTAL FORM IN EUCLIDEAN SPACE E_5

K.Riives

S u m m a r y

In the paper there is proved the

Theorem. Except hyperspheres $S_3 \subset E_4 \subset E_5$ the all three-dimensional submanifolds V_3 with parallel third fundamental form α_3 in euclidean space E_5 are reducible [1].

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БЭКЛУНДА ДЛЯ ПОЛУФОКАЛЬНОГО СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ПОВЕРХНОСТЯМИ В E_4

Л. Туулметс

Кафедра алгебры и геометрии

I. Введение. Классическая теорема Бэклунда утверждает, что если фокальное соответствие $x \to x^*$ между двумя поверхностями V_2 и V_2^* в E_3 устанавливается псевдосферической конгруэнцией прямых (т.е. так, что $|\overline{xx^*}| = r = const.$ и касательные плоскости к V_2 и V_2^* в точках x и x^*, проходящие через прямую xx^*, составляют постоянный угол $\varphi = const.$, то V_2 и V_2^* обладают равной постоянной гауссовой кривизной

$$K = -\frac{\sin^2\varphi}{r^2}.$$

В [5] был получен аналог этой теоремы в аффинной геометрии, а в [3] она обобщена для V_2 и V_2^* в E_n, находящихся в фокальном соответствии.

В настоящей статье доказывается теорема, имеющая некоторую аналогию с теоремой Бэклунда. Рассматриваются поверхности V_2 и V_2^* в E_4 и фокальное соответствие между ними заменяется полуфокальным соответствием $x \to x^*$, устанавливаемым псевдосферической полуфокальной псевдоконгруэнцией.

Определение полуфокального соответствия между V_2 и V_2^* в E_4 опирается ча результаты статьи [2], где было показано, что на случай линейчатой гиперповерхности V_3 в E_4 (псевдоконгруэнции прямых, по другой терминологии [1]) переносятся все основные свойства дифференциальной окрестности прямой конгруэнции в E_3, если фокусы заменить псевдофокусами. Здесь псевдофокус определяется как точка прямолинейной образующей линейчатой гиперповерхности V_3, которая при некотором смещении образующей в V_3 смещается в двумерной плоскости, проходящей через образующей ортогонально к предельному положению $T_x(V_3)$ при бесконечном удалении x по этой образующей. В зависимости от того, является ли фокусом каждый из псевдофокусов, лишь один из них или ни один из них, говорят о фокальной, полуфокальной или афокальной псевдоконгруэнции. В обобщении, сделанном в [3], предполагается, что прямые xx^* составляют фокальную псевдоконгруэнцию с фокальными поверхностями V_2 и V_2^*.

Теперь рассматривается случай, когда соответствие $x \to x^*$ между V_2 и V_2^* в E_4 устанавливается так, что V_2 является фокальной поверхностью, а V_2^* псевдофокальной поверхностью полуфокальной псевдоконгруэнции прямых xx^*. В этом случае будем говорить о полуфокальном соответствии $x \to x^*$ между V_2 и V_2^* в E_4, а $r = |\overrightarrow{xx^*}|$ будем называть полуфокальным расстоянием.

Известно, что касательные гиперплоскости к линейчатой гиперповерхности V_3, образованной в рассматриваемом случае прямыми xx^*, взятые в точках одной прямой xx^*, имеют общую двумерную плоскость $\bigcap_{y \in xx^*} T_y(V_3)$, проходящую через x. Гиперплоскость, натянутая на $T_x(V_2) \subset E_4$ и на эту двумерную плоскость, является предельным положением для $T_y(V_3) \subset E_4$ при $y \to x$; обозначим ее условно $T_x(V_3)$. Угол φ между $T_x(V_3)$ и $T_{x^*}(V_3)$ назовем полуфокальным углом.

Полуфокальную псевдоконгруэнцию, прямых xx^* с постоянными полуфокальными, расстоянием $r = |\overrightarrow{xx^*}|$ и углом φ будем называть, по аналогии с классическим случаем, псевдосферической. Псевдоконгруэнция прямых в E_4 называется нормальной, если ее прямые являются нормалями некоторой поверхности

2. Формулировки результатов. Основным результатом настоящей заметки является следующая теорема.

Теорема I. Пусть между V_2 и V_2^* в E_4 имеет место полуфокальное соответствие $x \to x^*$. Если оно устанавливается нормальной псевдосферической полуфокальной псевдоконгруэнцией прямых xx^* то, V_2 имеет постоянную гауссову кривизну $K = -\frac{\sin^4\varphi}{r^2}$, где φ и r - постоянные полуфокальные угол и расстояние этой псевдоконгруэнции.

Замечание I. Что касается гауссовой кривизны K^* псевдофокальной поверхности V_2^*, то здесь удалось пока установить лишь то, что она, вообще говоря, непостоянна в ситуации теоремы I.

Замечание 2. Полуфокальная псевдоконгруэнция прямых в E_4 определяется однозначно заданием поверхности V_2 и семейства линий на ней, не являющегося одним из двух семейств ее сопряженных линий, и состоит из всех касательных к линиям семейства [2]. (Если семейство совпадает с одним из семейств сопряженных линии поверхности V_2, то вместо полуфокальной псевдоконгруэнции получается фокальная псевдоконгруэнция, а V_2^* является ее второй фокальной поверхностью). Нормальной псевдоконгруэнцией она является тогда и только тогда, когда линии этого семейства являются геодезическими [4].

Другим результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть между V_2 и V_2^* в E_4 имеет место полуфокальное соответствие $x \to x^*$. Тогда $T_x(V_2) \cap T_{x^*}(V_2^*) = \{x^*\}$, причем $T_x(V_2)$ и $T_{x^*}(V_2^*)$ не могут быть вполне ортогональными.

3. Аппарат исследования. Векторы ортонормированного подвижного репера $\{x, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4\}$ выбираем так, что $\vec{e}_1 \parallel \overrightarrow{xx^*}$, $\vec{e}_2 \in T_x(V_2)$ и $\vec{e}_3 \in T_x(V_3)$. Первые два условия приводят к тому, что в формулах

$$d\vec{x} = \vec{e}_J \omega^J, \; d\vec{e}_J = \vec{e}_K \omega_J^K, \; \omega_J^K + \omega_K^J = 0; J, K = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

имеют место

$$\omega^\alpha = 0, \; \omega_1^2 = \Gamma_i \omega^i; \; i, j, \dots = 1, 2; \alpha, \beta, \dots = 3, 4. \quad (2)$$

Из первых уравнений (2) дифференциальным продолжением, с помощью структурных уравнений

$$d\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \; d\omega_J^K = \omega_J^I \wedge \omega_I^K$$

получаются

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \; b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha. \quad (3)$$

Из второго уравнения (2) таким же путем получается формула Бонне:

$$K = \Gamma_{12} - \Gamma_{21} - (\Gamma_1)^2 - (\Gamma_2)^2,$$

где $d\Gamma_i = \Gamma_{ij}\omega^j$ и K является гауссовой кривизной поверхности V_2 Гиперповерхность V_3 описывается точкой y с радиусом-вектором $\vec{y} = \vec{x} + t\vec{e}_1$ и так как

$$d(\vec{x} + t\vec{e}_1) = (dt + \omega^1)\vec{e}_1 + t(\Gamma_1 \vec{e}_2 + b_{11}^3 \vec{e}_3 + b_{11}^4 \vec{e}_4)\omega^1 +$$
$$+ [\vec{e}_2 + t(\Gamma_2 \vec{e}_2 + b_{12}^3 \vec{e}_3 + b_{12}^4 \vec{e}_4)]\omega^2, \quad (4)$$

то $\bigcap_{y \in xx^*} T_y(V_2)$ является двумерной плоскостью, натянутой на xx^* и вектор $\Gamma_1 \vec{e}_2 + b_{11}^3 \vec{e}_3 + b_{11}^4 \vec{e}_4$, причем $T_y(V_3)$ натянута на нее и на вектор $\vec{e}_2 + t(\Gamma_2 \vec{e}_2 + b_{12}^3 \vec{e}_3 + b_{12}^4 \vec{e}_4)$. При $t \to 0$ отсюда получается, что $T_x(V_3)$, действительно, натянута на $T_x(V_2)$ и на $\bigcap_{y \in xx^*} T_y(V_3)$. Выбор вектора $\vec{e}_3$ означает теперь, что

$$b_{11}^4 = 0; \quad (5)$$

при таком выборе $T_x(V_3)$ натянуто на $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$.

Из (4) видно, что при $t \to \infty$ касательная гиперплоскость

$T_y(V_3)$ стремится к гиперплоскости, проходящей через xx^* и натянутой на векторы

$$\vec{a}_1 = \Gamma_1\vec{e}_2 + b_{11}^3\vec{e}_3\,,\quad \vec{a}_2 = \Gamma_2\vec{e}_2 + b_{12}^3\vec{e}_3 + b_{12}^4\vec{e}_4\,. \tag{6}$$

Поэтому псевдофокус x^* определяется таким значением t, что вектор $t\vec{a}_1\omega^1 + (\vec{e}_2 + t\vec{a}_2)\omega^2$ ортогонален к $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ при некотором смещении $d\vec{x}$. Для нахождения этого значения и смещения получается система

$$t\vec{a}_1^{\,2}\omega^1 + (\vec{e}_2\vec{a}_1 + t\vec{a}_1\vec{a}_2)\omega^2 = 0\,,$$

$$t\vec{a}_1\vec{a}_2\omega^1 + (\vec{e}_2\vec{a}_2 + t\vec{a}_2^{\,2})\omega^2 = 0\,,$$

которая должна иметь нетривиальное решение (ω^1, ω^2), в силу чего

$$t[t(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2 - (\vec{a}_1^{\,2}\Gamma_2 - \vec{a}_1\vec{a}_2\Gamma_1)] = 0\,.$$

Отсюда следует, что x^* определяется значением

$$t_0 = \frac{b_{11}^3\,\phi}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2}\,, \tag{7}$$

где

$$\phi = b_{12}^3\Gamma_1 - b_{11}^3\Gamma_2 = \vec{a}_1\vec{a}_2\vec{e}_4\,. \tag{8}$$

От заданной поверхности V_2 и семейства линий на ней предполагается, конечно, что знаменатель отличен от нуля.

По найденной величине (7) определяется полуфокальное расстояние: $r = |t_0|$. Чтобы найти полуфокальный угол φ, следует в (4) подставить вместо t значение t_0. Тогда видно, что $T_{x^*}(V_3)$ натянута на векторы $\vec{e}_1, \vec{a}_1$ и $\vec{e}_2 + r\vec{a}_2$ и ее нормальным вектором является

$$\vec{a}_1\times(\vec{e}_2 + t_0\vec{a}_2) = -b_{11}^3\vec{e}_4 + \frac{b_{11}^3\phi}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2}(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\,,$$

а поэтому и

$$\vec{n}_{x^*} = -(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2\vec{e}_4 + \phi(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\,.$$

Угол φ является углом между $\vec{n}_{x^*}$ и $\vec{n}_x = \vec{e}_4$; поэтому

$$\cos^2\varphi = \frac{[-(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2 + \phi^2]^2}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2 - 2(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2\phi^2 + (\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2\phi} = \frac{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2 - \phi^2}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2}$$

и

$$\sin^2\varphi = \frac{\phi^2}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)^2}\,. \tag{9}$$

Отсюда

$$\frac{\sin^2\varphi}{t_0} = \frac{\phi}{b_{11}^3}\,. \tag{10}$$

4. <u>Доказательство теоремы I</u>. Из (4) следует, что V_3 является нормальной псевдоконгруэнцией прямых xx^* тогда и только тогда, когда t может быть на каждой прямой выбрано так, что $dt + \omega^1 = 0$, т.е. когда ω^1 является полным дифференциалом. В силу (2) для этого необходимо и достаточно,

чтобы $\Gamma_1 = 0$, т.е. чтобы линии **семейства определяемого уравнением $\omega^2 = 0$, были геодезическими.**

В этом случае $\phi = -b_{11}^3 \Gamma_2$ и, **в силу** (10),

$$\frac{\sin^4\varphi}{\eta^2} = \Gamma_2^2. \qquad (11)$$

В случае, когда прямые xx^* составляют нормальную псевдосферическую полуфокальную псевдоконгруэнцию, левая часть в (11). постоянна, следовательно

$$\Gamma_2 = const.$$

По формуле Бонне, в силу того, что теперь $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_{12} = 0$, а также $\Gamma_{21} = 0$, получим:

$$K = -\Gamma_2^2 = -\frac{\sin^4\varphi}{\eta^2}.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Из доказательства видно, что в формулировке теоремы 1 можно условие псевдосферичности нормальной полуфокальной псевдоконгруэнции, составленной из прямых xx^* , заменить более слабым условием, чтобы $\frac{\sin^2\varphi}{\eta} = const$. Утверждение теоремы при этом остается в силе.

5. <u>Доказательство теоремы 2.</u> В силу (1), (4) и (8)

$$d\vec{x} = \vec{e}_i\omega^i, \quad d\vec{x}^* = \vec{f}_i \psi^i, \quad i = 1,2.$$

Здесь $\vec{e}_i$ и $\vec{f}_i$, где

$$\vec{f}_1 = p^1\vec{e}_1 + p^2\vec{e}_2 + p^3\vec{e}_3, \quad \vec{f}_2 = q^1\vec{e}_1 + q^2\vec{e}_2 + q^3\vec{e}_3 + q^4\vec{e}_4 \qquad (12)$$

являются, соответственно, касательными векторами фокальной поверхности V_2 и псевдофокальной поверхности V_2^* . В формулах (12), в частности,

$$p^2 = b_{11}^3\Gamma_1\phi, \quad q^2 = [b_{12}^3\phi + \Gamma_1(b_{12}^4)^2]\Gamma_1 + (b_{11}^3 b_{12}^4)^2, \qquad (13)$$
$$p^3 = (b_{11}^3)^2\phi, \quad q^4 = b_{11}^3 b_{12}^4\phi;$$

при этом

$$p^3q^4 \neq 0, \qquad (14)$$

так как при $b_{12}^4 = 0$ полуфокальное соответствие вырождалось бы в фокальное соответствие, а при $b_{11}^3\phi = 0$ в силу (7 - 8) поверхности V_2 и V_2^* совпадали бы.

Из того, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ p^1 & p^2 & p^3 & 0 \\ q^1 & q^2 & q^3 & q^4 \end{vmatrix} = p^3q^4 \neq 0$$

следует, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ линейно независимы. Следовательно, плоскости $T_x(V_2)$ и $T_{x^*}(V_2^*)$ имеют только одну общую точку. Если плоскости $T_x(V_2)$ и $T_{x^*}(V_2^*)$ были бы вполне ортогональны, то имели бы место $\vec{e}_i\vec{f}_j = 0$, где $i, j = 1, 2$ и в силу (I2 - I4), $p^i = q^i = 0$. Из $p^2=0$ следует, что $\Gamma_1 = 0$ и из $q^2=0$ следует $b^3_{11} b^4_{12} = 0$. Получились бы противоречия. Следовательно, плоскости $T_x(V_2)$ и $T_{x^*}(V_2^*)$ не могут быть вполне ортогональными.

Литература

I. Г е й д е л м а н Р.М., Л у м и с т е Ю.Г., Геометрия семейств m -мерных плоскостей в n -мерных пространствах. Тр. IУ Всес. матем. съезда.т.III. Ленинград, I964, с. 204 - 206.

2. Л у м и с т е Ю.Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4 . Мат. сборник Т. 50 (92), 2, Москва I960.

3. Л у м и с т е Ю.Г., Т у у л м е т с Л.А., О гауссовых кривизнах фокальных поверхностей V_2 псевдоконгруэнции прямых в E_n. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I984, 665, 55 - 62.

4. Т у у л м е т с Л.А., Нормальные квазиконгруэнции V_3 в R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I964, I50, I09-I2I.

5. T e n e n b l a t, K., T e r n g C. L. Bäcklund's theorem for n -dimensional submanifolds of R^{2n-1}. Ann. Math., 1980, v. 111, p. 477-490.

Поступило
25 XII I985

AN ANALOGUE OF BÄCKLUND'S THEOREM FOR SEMIFOCAL CORRESPONDENCE BETWEEN SURFACES IN E_4

L.Tuulmets

S u m m a r y

In this paper two theorems concerving geometrical properties of semifocal correspondence (in sense 2,4) between the surfaces V_2 and V_2^* in Euclidean space E_4 are proved.

Theorem 1. If the surfaces V_2 and V_2^* in E_4 are in semifocal correspondence $x \to x^*$ and this correpondence is given with the lines xx^* of the pseudospheric normal semifocal pseudocongruence then V_2 is the surface with the Gaussian negative curvature $K = -\frac{\sin^4 \varphi}{r^2}$, where φ and r are respectively constant semifocal angle and distance of this pseudocongruence.

КАНОНИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ И ТРОЙНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИ

А. Фляйшер

Лаборатория прикладной математики

Э. Картаном установлено (см. напр. [4]) известное взаимно-однозначное соответствие между связными вполне геодезическими подмногообразиями в римановом симметрическом пространстве M, содержащими данную точку $x \in M$, и подсистемами тройной системы Ли, канонически определяемой на касательном пространстве $T_x(M)$. В данной работе мы ставим перед собой аналогичную задачу для случая произвольного редуктивного пространства. Именно: изучается соответствие между подмногообразиями однородного редуктивного пространства $M = G/H$ с произвольной G-инвариантной связностью (канонической связностью 2-го рода), содержащими точку $o = H$, и подсистемами в тройной системе Ли (общей тройной системе Ли), определяемой на касательном пространстве $T_o(M)$. В первой части вводится понятие алгебры произвольной G-инвариантной связности и доказывается, что если N - редуктивное подпространство в M с касательным пространством $T_o(N) = n$ в точке $o = H$, то n является тройной системой Ли относительно операции $[X,Y,Z] = R(X,Y)Z$, где $R(X,Y)$ - тензор кривизны соответствующей связности. При некотором дополнительном условии (теорема I.4) справедливо и обратное утверждение. Установлено взаимно однозначное соответствие между вполне геодезическими подмногообразиями естественно редуктивного однородного пространства M и подалгебрами алгебры связности, наделенными структурой тройной системы Ли относительно операции $[X,Y,Z] = R(X,Y)Z$.

Во второй части вводится понятие общей тройной системы Ли редуктивного пространства M и устанавливается взаимно однозначное соответствие между связными редуктивными подпространствами пространства $M = G/H$ и подсистемами в общей тройной системе Ли этого пространства. Кроме того доказано, что если M является пространством с канонической связностью 2-го рода и M' - автопараллельное подмногообразие в M, содержащее точку $o = H$, то его касательное пространство $T_o(M')$ является подсистемой в общей тройной системе Ли пространства M. Справедливо и обратное утверждение.

§I. Редуктивные пространства и тройные системы Ли

Определение I. Векторное пространство V над полем F называется тройной системой Ли (в дальнейшем сокращенно т. с. Ли), если задано отображение $V\times V\times V\to V$, $(x,y,z)\mapsto[x,y,z]$ удовлетворяющее следующим условиям

(I.I) $[x,y,z]$ трилинейно;

(I.2) $[x,y,z]=-[y,x,z]$;

(I.3) $[x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0$.

Примеры

I.I. Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ становится т.с.Ли, если положить $[x,y,z]=[[x,y],z]$ для любых $x,y,z\in\mathfrak{g}$.

I.2. Подпространство $\mathfrak{n}$ конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которого $[[\mathfrak{n},\mathfrak{n}],\mathfrak{n}]\subset\mathfrak{n}$, является т.с. Ли.

I.3. Если M - псевдориманово многообразие и $\mathfrak{X}(M)$ - множество аналитических векторных полей на M , то $\mathfrak{X}(M)$ является т.с. Ли относительно операции $[x,y,z]=R(x,y)z$, где R - тензор кривизны связности Леви - Чивита.

Определение 2. Пусть $M=G/H$ - однородное редуктивное пространство с разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ и пусть G' -подгруппа в G , для алгебры Ли которой справедливо $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{h}+\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{m}=\mathfrak{h}'+\mathfrak{m}'$. Тогда $M'=G'/H'$, где $H'=G'\cap H$, называется редуктивным подпространством пространства M .

В силу $[\mathfrak{h}',\mathfrak{m}']\subset\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{m}=\mathfrak{m}'$ пространство M' само является редуктивным.

Теорема I.I. Пусть $M=G/H$ - однородное пространство и пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G допускает $ad(G)$ - инвариантную невырожденную симметрическую билинейную форму B такую, что ее сужение $B_{\mathfrak{h}}$ на $\mathfrak{h}$ невырождено. Тогда

(I) M является естественно редуктивным (в смысле [2], с. 188) относительно разложения $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$, где
$$\mathfrak{m}=\{x\in\mathfrak{g}\mid B(x,y)=0\quad\forall y\in\mathfrak{h}\};$$

(2) M является симметрическим тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}$ является т.с. Ли;

(3) редуктивное подпространство $M'\subset M$ является симметрическим тогда и только тогда, когда его касательное пространство $T_o(M')$ в точке $o=H$ наделено структурой т.с. Ли.

Доказательство.

(I) следует непосредственно из [2] , стр. 189;

(2) если M - симметрическое, то $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{h}$ и $[[\mathfrak{m},\mathfrak{m}],\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$. Обратно, если $\mathfrak{m}$ - т.с. Ли, то

$0=B([[m,m],m],h)=B([m,m],[m,h])\subset B([m,m],m)$, откуда $[m,m]\subset h$.

(3) Пусть M' - симметрическое подпространство в M с разложением $g'=h'+m'$. Так как $[m',m']\subset h'$, то $[[m',m'],m']\subset m'$ и m' - т.с. Ли. Обратно, если m' - т.с. Ли, то $0=B([[m',m'],m'],h)=B([m',m'],[m',h])$

$\subset B([m',m'],m)$, откуда $[m',m']\subset h$. Но $[m',m']\subset g'$ и потому $[m',m']\subset g'\cap h=h'$. Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> Существует взаимно однозначное соответствие между связными симметрическими подпространствами естественно редуктивного однородного пространства M и векторными подпространствами касательного пространства $T_o(M)$, наделенными структурой т.с. Ли.

В силу известного результата К.Номидзу ([5]) на однородном редуктивном пространстве $M=G/H$ с разложением $g=h+m$ существует взаимно однозначное соответствие между множеством G- инвариантных связностей на M и множеством билинейных функций $\alpha: m\times m\to m$, которые $Ad(H)$ - инвариантны. Другими словами, каждой G-инвариантной связности на M сопоставляется некоторая неассоциативная алгебра (m,α), для которой $Ad(H)\subset Aut(m,\alpha)$. Для тензоров кривизны и кручения этой связности имеют место формулы

(I.4) $R(X,Y)Z=\alpha(X,\alpha(Y,Z))-\alpha(Y,\alpha(X,Z))-\alpha(X\circ Y,Z)-[h(X,Y),Z]$;

(I.5) $T(X,Y)=\alpha(X,Y)-\alpha(Y,X)-X\circ Y$,

где $X\circ Y=[X,Y]_m$ (соответственно $h(X,Y)=[X,Y]_h$) является проекцией скобки $[X,Y]$ на m (соответственно на h).

Среди всех G- инвариантных связностей на редуктивном $M=G/H$ наиболее важными являются выделенные Номидзу [6] канонические связности первого и второго рода. Обе они характеризуются тем, что однопараметрическая подгруппа $x(t)=\exp tX\subset G$ $(X\in m)$ проектируется при каноническом отображении $\pi: G\to G/H$ в геодезическую $x^*(t)$ в G/H. Эти связности определяются, соответственно, следующими функциями: для канонической связности первого рода $\alpha(X,Y)=1/2\, X\circ Y$ (соответствующая алгебра обозначается $(m,\circ)$) и для канонической связности второго рода $\alpha(X,Y)=0$. Первая из связностей имеет нулевой тензор кручения, а у второй тензоры кривизны и кручения в точке $o=H$ выражаются формулами

(I.6) $R(X,Y)Z=-[h(X,Y),Z]$; $T(X,Y)=-X\circ Y$.

Определение 3. Подмногообразие N многообразия M с аффинной связностью называется вполне геодезическим в точке $o \in N$, если для каждого $X \in T_o(N)$ геодезическая $x(t) \subset M$, проходящая через o и имеющая X касательным вектором, лежит в N для малых значений t. Если N является вполне геодезическим в каждой своей точке, то N называется вполне геодезическим подмногообразием многообразия M.

Теорема I.2. (см. [I]) Редуктивное подпространство однородного редуктивного пространства M с канонической связностью первого рода является вполне геодезическим подмногообразием в M.

Теорема I.3. (см. [6]) Пусть N - вполне геодезическое подмногообразие аналитического псевдориманова многообразия M. Если $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$, то $R(X,Y)Z$ также лежит в N.

Теорема I.4. Пусть $M = G/H$ - односвязное псевдориманово редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$, у которого G- инвариантная псевдориманова связность задает алгебру $(\mathfrak{m}, \alpha)$. Если N - редуктивное подпространство в M с касательным пространством $T_o(N) = \mathfrak{n}$ в точке $o = H$, то N является т.с. Ли относительно операции $[X, Y, Z] = R(X,Y)Z$. Обратно, если $\mathfrak{n}$ -двусторонняя подалгебра в $(\mathfrak{m}, \alpha)$, являющаяся т.с. Ли относительно операции $[X, Y, Z] = R(X,Y)Z$, то существует редуктивное подпространство N, для которого $T_o(N) = \mathfrak{n}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из вышеприведенных теорем I.2.и I.3. Так как псевдориманова связность, задающая алгебру $(\mathfrak{m}, \alpha)$, имеет тривиальный тензор кручения, то из формулы (I.5) следует, что каждая двусторонняя подалгебра алгебры $(\mathfrak{m}, \alpha)$ является подалгеброй и в $(\mathfrak{m}, \circ)$. Далее, так как $\mathfrak{n}$ является т.с. Ли, то для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{n}$ имеем $R(X,Y)Z \in \mathfrak{n}$. Из (I.4) следует, что $\mathfrak{n}$ должна быть $\mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ - инвариантной. Покажем, что в этом случае подпространство $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n}) + \mathfrak{n}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Действительно,

$$[\mathfrak{g}', \mathfrak{n}] = [\mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n}), \mathfrak{n}] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n} + \mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n}) + \mathfrak{n} \circ \mathfrak{n} \subset \mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n}) + \mathfrak{n},$$
$$[\mathfrak{g}', \mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n})] = [\mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n}), \mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n})] + [\mathfrak{n}, \mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n})] \subset [\mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n}), \mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n})] + \mathfrak{n}.$$

Покажем, что $\mathfrak{h}(\mathfrak{n},\mathfrak{n})$ - подалгебра в $\mathfrak{h}$. Тождество Якоби для $X, Y \in \mathfrak{m}$, $U \in \mathfrak{h}$ влечет

$$[[X, Y], U] = [X, [Y, U]] + [[X, U], Y].$$

Переходя к проекциям, получим

$$[h(X,Y),U] = h(X,[Y,U]) + h([X,U],Y),$$

откуда

$$[h(n,n),h(n,n)] \subset h(n,[n,h(n,n)]) + h([n,h(n,n)],n) \subset h(n,n)$$

в силу $h(n,n)$- инвариантности n . Итак g' - подалгебра в g . Пусть теперь G' - аналитическая подгруппа в G с подалгеброй g', а $N = G'\cdot o$ (G' -орбита точки o). Обозначим через H' подгруппу группы G', оставляющую точку o неподвижной. Поскольку тождественное отображение группы G' в группу G непрерывно, то H' - замкнутая подгруппа Ли в G'. Далее, так как N находится во взаимно однозначном соответствии с G'/H' ($g^*\cdot o \to g^*H'$, $g^* \in G'$), то структуру многообразия G'/H' всегда можно перенести на N , и потому N будет редуктивным подпространством в M с касательным пространством $T_o(N) = n$. Теорема доказана.

<u>Теорема I.5.</u> Пусть $M = G/H$ - односвязное псевдориманово естественно редуктивное однородное пространство с разложением $g = h + m$. Если N - вполне геодезическое подмногообразие в M , содержащее точку o и $T_o(N) = n$ есть касательное пространство к N в точке o , то n является т.с. Ли относительно операции $[X,Y,Z] = R(X,Y)Z$. Обратно, если n - подалгебра в $(m,\circ)$, являющаяся т.с. Ли относительно операции $[X,Y,Z] = R(X,Y)Z$, то существует вполне геодезическое подмногообразие N , содержащее o , такое, что $T_o(N) = n$.

<u>Доказательство.</u> Первое утверждение следует непосредственно из теоремы I.3. Так как функция связности естественно редуктивного пространства M задается формулой $\alpha(X,Y) = 1/2\, X\circ Y$, то тензор кривизны, согласно (I.4), принимает вид

$$R(X,Y)Z = 1/4\, X\circ(Y\circ Z) - 1/4\, Y\circ(X\circ Z) - 1/2\,(X\circ Y)\circ Z - [h(X,Y),Z].$$

Отсюда следует, что подалгебра $n \subset m$, являющаяся т.с. Ли, должна быть $h(n,n)$-инвариантной. Продолжая аналогично доказательству теоремы I.4, получим, что N есть подмногообразие в M , содержащее точку o и диффеоморфное G'/H'. Любая M -геодезическая, проходящая через точку o, имеет вид $\exp tX$, где X - произвольный вектор из m. Такая геодезическая касается подмногообразия N в точке o тогда и только тогда, когда $X \in n$. Отсюда следует, что подмногообразие N является вполне геодезическим в точке o. Транзитивность G' на N влечет требуемый результат. Теорема доказана.

<u>Следствие.</u> Существует взаимно однозначное соответст-

вие между вполне геодезическими подмногообразиями естественно редуктивного однородного пространства $M=G/H$ с разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ и подалгебрами алгебры $(\mathfrak{m},\circ)$, наделенными структурой т.с. Ли относительно операции $[X,Y,Z]=R(X,Y)Z$.

§2. Редуктивные пространства и общие тройные системы Ли

Понятие общей тройной системы Ли впервые появилось в работе [9], как обобщение понятия т.с.Ли.

Определение 2.I. Общей тройной системой Ли (в дальнейшем сокращенно: о.т.с.) над полем F называется конечномерное векторное пространство L над полем F, на котором заданы две алгебраические операции - билинейная и трилинейная:

$$L\times L\to L, \qquad (X,Y)\mapsto X*Y,$$
$$L\times L\times L\to L, \qquad (X,Y,Z)\mapsto [X,Y,Z],$$

удовлетворяющие следующим условиям:

(2.1) $X*X=0$;

(2.2) $[X,X,Y]=0$;

(2.3) $[X,Y,Z]+[Y,Z,X]+[Z,X,Y]-(X*Y)*Z-(Y*Z)*X-(Z*X)*Y=0$;

(2.4) $[X,Y,[Z,U,V]]=[[X,Y,Z],U,V]+[Z,[X,Y,U],V]+[Z,U,[X,Y,V]]$;

(2.5) $[X*Y,Z,U]+[Y*Z,X,U]+[Z*X,Y,U]=0$;

(2.6) $[X,Y,Z*U]+U*[X,Y,Z]+Z*[Y,X,U]=0$,

где $X,Y,Z,U,V\in L$.

Естественно называть подсистемой в о.т.с. L подпространство, замкнутое относительно операций $X*Y$ и $[X,Y,Z]$.

Примеры.

2.I. Конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ становится о.т.с., если для любых $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ положить

$$X*Y=[X,Y], \quad [X,Y,Z]=[[X,Y],Z].$$

2.2. В [7] дан следующий пример.

Пусть $M=G/H$ - редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. Если на векторном пространстве определить билинейную и трилинейную операции формулами

$$X*Y=[X,Y]_{\mathfrak{m}}=X\circ Y, \qquad [X,Y,Z]=[\mathfrak{h}(X,Y),Z]$$

для $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{m}$ становится о.т.с.

Подпространство $\mathfrak{m}$ с этими операциями будем называть о.т.с. рассматриваемого редуктивного однородного пространства G/H.

Теорема 2.I. Пусть $M=G/H$ - редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$. Если $M'=G'/H'$ - редуктивное подпространство в M, то его касательное в точке o пространство $T_o(M') = \mathfrak{m}'$ является подсистемой в о.т.с. $\mathfrak{m}$. Обратно, если $\mathfrak{m}'$ - подсистема в о.т.с. $\mathfrak{m}$, то существует редуктивное подпространство $M' \subset M$, содержащее точку o, такое, что $T_o(M') = \mathfrak{m}'$.

Доказательство. Пусть $M' = G'/H'$ - редуктивное подпространство в M с разложением $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' + \mathfrak{m}' = \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m}$. Тогда $\mathfrak{m}' \circ \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$. Кроме того, из $\mathfrak{h}(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}') \subset \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$ вытекает $[\mathfrak{h}(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'), \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{m}'$ и потому $\mathfrak{m}'$ является подсистемой в о.т.с. $\mathfrak{m}$. Обратно, если $\mathfrak{m}'$ - подсистема в $\mathfrak{m}$, то, положив $\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}') + \mathfrak{m}'$ и учитывая $\mathfrak{h}(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}')$- инвариантность подпространства $\mathfrak{m}'$, получим, что $\mathfrak{g}'$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Пусть далее G' - связная подгруппа в G, имеющая $\mathfrak{g}'$ своей алгеброй Ли, а $M' = G' \cdot o$ (G'- орбита точки o). Продолжая аналогично доказательству теоремы I.4, получим, что M' диффеоморфно G'/H', где H' - подгруппа стационарности точки o, причем $T_o(M') = \mathfrak{m}'$, учитывая строение алгебры $\mathfrak{g}'$. Теорема доказана.

Следствие. Существует взаимно однозначное соответствие между связными редуктивными подпространствами редуктивного однородного пространства $M = G/H$ с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и подсистемами в о.т.с. $\mathfrak{m}$ этого пространства.

Возвращаясь к формулам (I.6) для тензоров кручения и кривизны канонической связности 2-го рода и сопоставляя их с результатом, указанном в примере 2.2, получаем следующее

Предложение 2.2. Пусть $M = G/H$ - редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и с канонической связностью второго рода. Подпространство $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ является подсистемой в о.т.с. $\mathfrak{m}$ тогда и только тогда, когда для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{n}$ справедливо

$$R(X,Y)Z \in \mathfrak{n}, \quad T(X,Y) \in \mathfrak{n}.$$

Определение 2.2. Пусть M - многообразие с аффинной связностью. Подмногообразие $N \subset M$ называется автопараллельным, если для каждого вектора $X \in T_x(N)$ и каждой кривой $\tau \subset N$, исходящей из x, параллельный перенос X вдоль τ (относительно аффинной связности объемлющего многообразия M) переводит его в вектор, касательный к N.

Теорема 2.3. (см. [2], стр. 59) Каждое автопараллельное подмногообразие N многообразия с аффинной связностью M является вполне геодезическим в M. Обратное верно, если аффинная связность в M без кручения.

В частности, в случае псевдориманова пространства класс вполне геодезических подмногообразий совпадает с классом автопараллельных подмногообразий.

Теорема 2.4. (см. [8]). Редуктивное подпространство M' однородного редуктивного пространства M является автопараллельным подмногообразием в M.

Теорема 2.5. Пусть $M = G/H$ - редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$ и канонической связностью 2-го рода. Пусть $\mathfrak{m}'$ - линейное подпространство в $\mathfrak{m}$ такое, что для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}'$ справедливы

$$R(X,Y)Z \in \mathfrak{m}', \quad T(X,Y) \in \mathfrak{m}',$$

где R и T - тензоры, соответственно, кривизны и кручения канонической связности. Тогда существует единственное связное автопараллельное подмногообразие $M' \subset M$, такое, что

$$T_o(M') = \mathfrak{m}'.$$

Доказательство. Из условий теоремы и формул (1.6) кручения и кривизны канонической связности 2-го рода получим

$$\mathfrak{m}' \circ \mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}', \quad [\mathfrak{h}(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'), \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{m}'.$$

Введем подпространство

$$\mathfrak{h}' = \{X \in \mathfrak{h} \mid [X, \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{m}'\}.$$

Оно является подалгеброй в $\mathfrak{h}$, так как если $X, Y \in \mathfrak{h}'$, то для $Z \in \mathfrak{m}'$ из тождества Якоби

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

где последние две скобки принадлежат $\mathfrak{m}'$, следует $[[X,Y],Z] \in \mathfrak{m}'$ или $[X,Y] \in \mathfrak{h}'$. Подпространство $\mathfrak{g}'=\mathfrak{h}'+\mathfrak{m}'$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$ ввиду

$$[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \subset [\mathfrak{h}', \mathfrak{m}'] + [\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] + [\mathfrak{m}', \mathfrak{h}'] + [\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'] \subset \mathfrak{h}' + \mathfrak{m}' + \mathfrak{h}(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}')$$

и $[\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'] = \mathfrak{m}' \circ \mathfrak{m}' + \mathfrak{h}(\mathfrak{m}', \mathfrak{m}') \subset \mathfrak{h}' + \mathfrak{m}'$. Пусть теперь G' - подгруппа в G, имеющая $\mathfrak{g}'$ своей алгеброй Ли и пусть $H' = G' \cap H$. Тогда $M' = G'/H'$ является редуктивным подпространством и по теореме 2.4 - автопараллельным подмногообразием с $T_o(M') = \mathfrak{m}'$. Докажем, что M' единственно. Пусть M'' - другое автопараллельное подмногообразие в M, для которого $T_o(M'') = \mathfrak{m}'$ и $x \in M''$. Тогда существует геодезическая в M'', соединяющая o с x, являющаяся (в силу автопараллельности M'') геодезической и в M. Так как M' автопараллельно и $T_o(M') = T_o(M'')$, то эта геодезическая лежит в M'. Отсюда получаем $M'' \subset M'$ и аналогично $M' \subset M''$. Теорема доказана.

Теорема 2.6. Связное автопараллельное подмногообразие M' однородного редуктивного пространства $M = G/H$, содержащее точку $o = H$, является редуктивным подпространством в M.

Доказательство. Из автопараллельности M' следует, что касательное пространство $T_o(M')$ удовлетворяет условиям, накладываемым на $\mathfrak{m}'$ в теореме 2.5. Теперь результат следует непосредственно из доказательства теоремы 2.5.

Следствие I. Пусть $M = G/H$ - редуктивное однородное пространство с канонической связностью 2-го рода. Тогда любое связное автопараллельное подмногообразие $M' \subset M$, содержащее точку $o = H$, имеет вид, описанный в теореме 2.5. Другими словами $M' = G'/H'$, где G' - аналитическая подгруппа в группе G с алгеброй $\mathfrak{g}'$ и $H' = G' \cap H$.

Из предложения 2.2 и вышеприведенных теорем 2.5 - 2.6 следует также результат, полученный другим путем в работе [3].

Следствие 2. Пусть $M = G/H$ - редуктивное однородное пространство с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ и канонической связностью 2-го рода. Если M' - автопараллельное подмногообразие в M, содержащее точку $o = H$, то $T_o(M') = \mathfrak{m}'$ является подсистемой в о.т.с. $\mathfrak{m}$. Обратно, если $\mathfrak{m}'$ - подсистема в о.т.с. $\mathfrak{m}$, то существует автопараллельное подмногообразие $M' \subset M$, содержащее точку o, такое, что $T_o(M') = \mathfrak{m}'$.

Заметим, что обратное утверждение Следствия 2, как следует из теорем 2.I и 2.4, справедливо и для канонической связности I-го рода.

Литература

I. В а с и л ь е в А. М., О вполне геодезических подмногообразиях однородных пространств. Докл. АН СССР, I959, I28, № 2, 223-226.

2. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К., Основы дифференциальной геометрии. Том 2. Москва, I98I.

3. М а р м а з е е в В. И., Об одном классе подмногообразий в однородных редуктивных пространствах. Мат. заметки, I98I, 29, № 6, 785-79I.

4. Х е л г а с о н С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва, I964.

5. N o m i z u, K., Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, 76, 33-65.

6. S a g l e, A. A., A note on triple systems and totally geodesic submanifolds in homogeneous spaces, Nagoya Math. J., 1968, 32, 5-20.

8. W e t t s t e i n, B., On autoparallel submanifolds of reductive homogeneous spaces (preprint), 1982.
9. Y a m a g u t i, K., On the Lie triple systems and its generalizations. J. Sci. Hiroshima Univ., 1958, A21, N 2, 155-160.

Поступило
28 XI 1985

CANONICAL CONNECTIONS AND LIE TRIPLE SYSTEMS

A.Fleischer

S u m m a r y

The correspondence between submanifolds of homogeneous reductive space $M=G/H$ with any G-invariant connection (with the canonical connection of the 2-nd kind) through the origin $o=H$ and subsystems in Lie triple system (general Lie triple system) defined on the tangent space $T_o(M)$ is studied.

In the first part we introduce the notion of reductive subspace of M and show that the determination of such subspace N is equivalent to the transformation of its tangent space $T_0(N)$ in Lie triple system with respect to the operation $[X,Y;Z]=R(X,Y)Z$ where R is the curvature tensor of corresponding connection (Theorem 1.4). The one-to-one correspondence between totally geodesic submanifolds of the naturally reductive space and special subalgebras of the introduced connection algebra is established.

In the second part, where we use the notion of general Lie triple system (g.L.t.s.) of the reductive space M, there is shown that the finding of reductive subspaces of M is equivalent to the finding of subsystems in g.L.t.s. of M. If M is a space with the canonical connection of the 2-nd kind and M' - its autoparallel submanifold with $o=H$ then the tangent space $T_o(M')$ is a subsystem in g.L.t.s. of M. The inverse is also correct.

СОДЕРЖАНИЕ - CONTENTS

1 руб. 10 коп.