TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
Matemaatika ja statistika instituut

Anna Laaneväli

Lineaarsplainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi II liiki integraalvõrrandi lahendamiseks

Bakalaureusetöö (6 EAP)
Matemaatika eriala

Juhendaja: *prof.* Arvet Pedas

TARTU 2016

Lineaarsplainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi II liiki integraalvõrrandi lahendamiseks

Bakalaureusetöö

Anna Laaneväli

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse interpoleerimist lineaarsplainidega ning lineaarse teist liiki Fredholmi integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist splain-kollokatsioonimeetodiga. Töö eesmärgiks on uurida esitatud meetodi koonduvust ning koonduvuskiirust.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: splainid, integraalvõrrandid, kollokatsioonimeetod.

Linear spline collocation method for solving Fredholm integral equation of the second kind

Bachelor's thesis

Anna Laaneväli

Abstract. In the present bachelor's thesis the interpolation by linear splines and finding an approximate solution for Fredholm integral equation of the second kind with collocation method is described. The purpose of this thesis is to study convergence and convergence rate of the proposed algorithms.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key words: spline, integral equation, collocation method.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on referatiivse iseloomuga ning tugineb tööle [4]. Töös vaadeldakse lineaarse integraalvõrrandi

$$u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

ligikaudset lahendamist kollokatsioonimeetodiga, mis tugineb võrrandi lahendi u lähendamisele ühtlasel võrgul antud pidevate lineaarsplainidega u_n, kus $n+1$ on võrgu punktide arv. Tuuma K ja vabaliikme f kohta eeldatakse, et nad on pidevad funktsioonid vastavalt ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja lõigul $[a,b]$. Käesolevas töös näidatakse, et viga $u_n - u$ väheneb, kui võrgupunktide arv kasvab ning tuletatakse kaks hinnangut vea $u_n - u$ iseloomustamiseks (vt teoreemi (5.3)). Nende tulemuste saamisel on tuginetud töös [4] esitatud metoodikale. See erineb töös [1] rakendatud metoodikast ning võimaldab käesolevas töös vaadelda palju laiemat võrrandite klassi.

Bakalaureusetöö koosneb kuuest osast. Esimeses osas on käsitletud splaini mõistet ja interpoleeriva lineaarsplani esitamist baasspalainide kaudu. Teises osas on toodud tulemus interpoleeriva lineaarsplaini vea hindamiseks. Esimeses ja teises osas on eeskujuks olnud bakalaureusetöö [1]. Kolmandas osas on käsitletud Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesust ja siledust. Neljandas ja viiendas osas vaadeldakse Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist lineaarsplanidega kollokatsioonimeetodi abil. Viimases osas on töös vaadeldud meetodit rakendatud sellise integraalvõrrandi ligikaudsel lahendamisel, mille lahend on teada. Praktiliste tulemuste saamiseks on töö lisas toodud programm, mis on kirjuatud programmeerimiskeeles R.

1 Splainid

1.1 Splaini mõiste

Me tähistame käesolevas töös tähega $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ kõigi naturaalarvude hulka ning tähega $\mathbb{R} := \{\infty, -\infty\}$ kõigi reaalarvude hulka. Vaatleme lõiku $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Olgu $C\,[a, b]$ kõigi lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk ning $C^n\,[a, b]$ kõigi lõigus $[a, b]$ n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk.

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Jaotame lõigu $[a, b]$ punktidega

$$\Delta_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n : \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \tag{1}$$

n võrdseks osalõiguks $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, kus $x_{i+1} = x_i + h$ ning $h = \dfrac{b-a}{n}$. Jaotust (1) nimetatakse lõigul $[a, b]$ antud ühtlaseks võrguks.

Definitsioon 1.1. Võrgule Δ_n vastavaks m-järku $(m \in \mathbb{N})$ splainiks nimetatakse funktsiooni S_m, mis
1) igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ on ülimalt m-astme polünoom, s.t

$$S_m(x) = c_{0i} + c_{1i}x + \ldots + c_{mi}x^m, \quad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

2) on $m-1$ korda pidevalt diferentseeruv kogu lõigul $[a, b]$, s.t

$$S_m \in C^{m-1}\,[a, b].$$

Võrgu (1) punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nimetatakse splaini S_m sõlmedeks.

Tingimusest 1) näeme, et m-järku splaini määravad $(m+1) \times n$ parameetrit c_{ji} $(j = 0, 1, \ldots, m, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1)$, mis on splaini kordajad. Tingimus 2) seab splainile S_m igas sisesõlmes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ m tingimust nõudega

$$S_m, S_m', \ldots, S_m^{(m-1)} \in C[a, b].$$

Sisesõlmede arv on $n-1$, seega kokku on $m\,(n-1)$ tingimust, mis kitsendavad parameetrite c_{ji} valikut. Nii sisaldab m-järku splain üldiselt

$$(m+1)\,n - m\,(n-1) = mn + n - mn + m = m + n$$

vaba parameetrit. Nende parameetrite määramiseks kasutatakse splaini S_m määramisel sageli interpolatsioonitingimusi kujul

$$S_m(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{2}$$

kus $f_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ on mingi funktsiooni f väärtused võrgul Δ_n ning $x_0, x_1, \ldots, x_n$ on splaini S_m sõlmed. Kui $m = 1$, siis tingimused (2) määravad splaini S_1 üheselt. Kui $m > 1$, siis on splaini üheseks määramiseks vaja lisaks interpolatsioonitingimustele ette anda veel $m - 1$ tingimust.

Märgime ka, et paarisarvulise m korral valitakse splaini S_m interpolatsioonisõlmedeks sageli splaini sõlmede $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vahel paiknevad punktid.

Interpolatsioonitingimusi rahuldavaid splaine nimetatakse interpoleerivateks splanideks. Arvutuspraktikas kasutatakse kõige enam splaine S_1, S_2 ja S_3, mida nimetatakse vastavalt lineaar-, ruut- ja kuupsplainideks.

Käesolevas töös on vaatluse all interpoleerivad lineaarsplainid.

1.2 Lineaarplaini mõiste

Definitsioon 1.2. Võrgule Δ_n vastavaks esimest järku splainiks ehk lineaarsplainiks nimetatakse funktsiooni S_1, mis
1) igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ on ülimalt esimese astme polünoom, s.t

$$S_1 = c_{0i} + c_{1i}x \quad (x \in [x_i, x_{i+1}])\ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

2) on pidev kogu lõigul, s.t

$$S_1 \in C[a, b].$$

Kõigi võrgule Δ_n vastavate lineaarsplainide hulga tähistame suurusega $S(\Delta_n)$. Osutub, et $S(\Delta_n)$ on vektorruum, mille dimensioon on $n + 1$.

Tõepoolest, kui $S_1, S_1^* \in S(\Delta_n)$, siis ilmselt $S_1 + S_1^* \in S(\Delta_n)$ ning $\lambda S_1 \in S(\Delta_n)$, kus λ on mingi konstant.

Splain S_1 on igas osalõigus $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ määratud kahe parameetriga c_{0i} ja c_{1i}. Osalõike on kokku n, mistõttu on splaini S_1 konstrueerimiseks vaja $2n$ parameetrit. Nõudest, et S_1 on pidev võrgu Δ_n sisesõlmedes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, saame lineaarsplaini S_1 jaoks $n-1$ lisatingimust, mis kitsendavad parameetrite valikut. Seega vabade parameetrite arv, millest splain sõltuma jääb on $2n - (n-1) = n + 1$. Järelikult $\dim(S(\Delta_n)) = n + 1$.

Lineaarsplainide vabade parameetrite määramiseks kasutatakse interpolatsioonitingimusi (2). Tingimused (2) määravad splaini S_1 üheselt ning tegemist on interpoleeriva splainiga.

1.3 Lineaarsed baassplainid

Defineerime võrgule Δ_n vastavad lineaarsed baassplainid $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ järgmiselt:

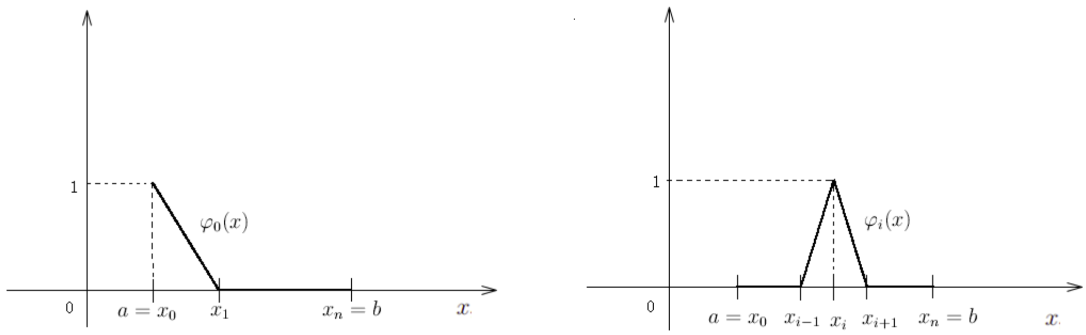
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & \text{kui } x_0 \le x < x_1, \\ 0, & \text{kui } x_1 \le x \le x_n. \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{kui } x_{i-1} \le x < x_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{kui } x_i \le x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{kui } x_0 \le x < x_{i-1} \text{ või } x_{i+1} \le x \le x_n. \end{cases}$$

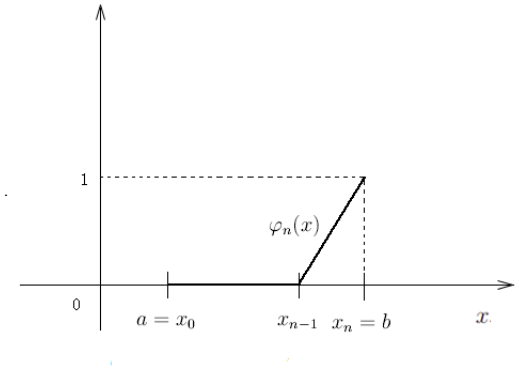
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{h}, & \text{kui } x_{n-1} < x \le x_n, \\ 0, & \text{kui } x_0 < x \le x_{n-1}. \end{cases}$$

Võrgule Δ_n vastavad splainid $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, on lineaarsed igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Konstruktsiooni tõttu on $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ pidevad iga $x \in [a, b]$ korral. Seega $\varphi_i \in S(\Delta_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Splainide $\varphi_0(x)$, $\varphi_i(x)$ ja $\varphi_n(x)$ esitused on toodud joonisel 1 ja joonisel 2:



Joonis 1: Lineaarsete baassplainide $\varphi_0(x)$ ja $\varphi_i(x)$ esitused.



Joonis 2: Lineaarse baassplaini $\varphi_n(x)$ esitus.

Kehtib omadus, et

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

Osutub, et funktsioonid $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S(\Delta_n)$ on lineaarselt sõltumatud lõigul $[a, b]$, s.t nad moodustavad baasi ruumis $S(\Delta_n)$.

Selles veendumiseks näitame, et kui

$$\alpha_0\varphi_0(x) + \alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b], \tag{4}$$

siis konstandid $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ saavad olla vaid nullid:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Võtame võrduses (4) muutuja x väärtuseks $x = x_0$. Omaduse (3) põhjal saame, et

$$\alpha_0\varphi_0(x_0) + \alpha_1\varphi_1(x_0) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x_0) = \alpha_0 \cdot 1 + 0 + \ldots + 0 = 0,$$

s.t $\alpha_0 = 0$. Analoogiliselt võttes võrduses (4) muutuja x väärtuseks $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ saame vastavalt, et $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Seega seos (4) saab kehtida vaid siis, kui

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Järelikult funktsioonid $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ on lineaarselt sõltumatud lõigul $[a, b]$ ning moodustavad baasi ruumis $S(\Delta_n)$. Järelikult saame iga splaini $S_1 \in S(\Delta_n)$ esitada kujul

$$S_1(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\varphi_j(x), \quad x \in [a, b],$$

kus $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ on mingid konstandid.

2 Interpoleeriva lineaarsplaini hinnangud

Olgu antud ühtlane võrk Δ_n ning olgu $f_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ funktsiooni $f \in C[a, b]$ väärtused ühtlasel võrgul Δ_n. Kui $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ siis tingimusi $S_1(xi) = fi$ ja $S_1(xi + 1) = fi + 1$ rahuldava lineaarsplaini võime esitada kujul

$$S_1(x) = f(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h} + f(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h}. \tag{5}$$

On selge, et valemiga (5) antud funktsioon $S_1(x)$ on esimese astme polünoom muutuja x suhtes. On lihtne näha, et $S_1 \in C[a, b]$. Tõestuseks piisab näidata, et S_1 on pidev sisesõlmedes $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$:

$$\lim_{x \to x_i+} S_1(x) = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

ning

$$\lim_{x \to x_i-} S_1(x) = f_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Järgneva lemma tõestuses on meil vaja rakendada Lagrange'i keskväärtusteoreemi (vt näiteks [5], lk 127), mille siinkohal esitame.

Teoreem 2.1 **(Lagrange'i keskväärtusteoreem).** *Kui funktsioon f on pidev lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b), siis leidub punkt $c \in (a, b)$ nii, et*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Lemma 2.2. *Olgu $S_1 \in S_m(\Delta_n)$ funktsiooni $f \in C^1[a, b]$ võrgul Δ_n interpoleeriv lineaarsplain. Siis*

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_1(x)| \leq 2M_1 \frac{b - a}{n},$$

kus

$$M_1 = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Kui $f \in C^2[a, b]$, siis

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_1(x)| \leq \frac{M_2}{8} \frac{(b - a)^2}{n^2},$$

kus

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

Tõestus. Tähistame $G(x) \coloneqq f(x) - S_1(x)$, kus $x_i \le x \le x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. Olgu $h = \dfrac{b-a}{n}$ ning $f \in C^1[a,b]$. Siis

$$G(x) = f(x) - S_1(x) = f(x) - \left(f(x_i)\frac{x_{i+1}-x}{h} + f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{h} \right).$$

Liidame ja lahutame suuruse $f(x_{i+1})\dfrac{x_{i+1}-x}{h}$. Siis

$$\begin{aligned} G(x) = f(x) - f(x_i)\frac{x_{i+1}-x}{h} - f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{h} + \\ + f(x_{i+1})\frac{x_{i+1}-x}{h} - f(x_{i+1})\frac{x_{i+1}-x}{h} \\ = f(x_{i+1})\frac{x_{i+1}-x}{h} - f(x_i)\frac{x_{i+1}-x}{h} + \\ + f(x) - f(x_{i+1})\frac{x_{i+1}-x}{h} - f(x_{i+1})\frac{x-x_i}{h}. \end{aligned}$$

Nüüd

$$\begin{aligned} G(x) &= [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\frac{x_{i+1}-x}{h} + f(x) - f(x_{i+1})(\frac{x_{i+1}-x}{h} + \frac{x-x_i}{h}) \\ &= [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\frac{x_{i+1}-x}{h} + f(x) - f(x_{i+1})(\frac{x_{i+1}-x_i}{h}) \\ &= [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\frac{x_{i+1}-x}{h} + f(x) - f(x_{i+1}) \\ &= [f(x_{i+1}) - f(x_i)]\frac{x_{i+1}-x}{h} - (f(x_{i+1}) - f(x)). \end{aligned}$$

Kasutades teoreemi (2.1) saame, et

$$\begin{aligned} f(x) - S_1(x) &= f'(c_i^1)(x_{i+1}-x_i)\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} - f'(c_i^2)(x_{i+1}-x) \\ &= f'(c_i^1)(x_{i+1}-x) - f'(c_i^2)(x_{i+1}-x), \end{aligned}$$

kus $x_i \le x \le x_{i+1}$, $c_i^1 \in (x_i, x_{i+1})$, $c_i^2 \in (x, x_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Seega

$$\begin{aligned} |f(x) - S_1(x)| &= \left| f'(c_i^1)(x_{i+1}-x) - f'(c_i^2)(x_{i+1}-x) \right| \\ &\le \left| f'(c_i^1)(x_{i+1}-x) \right| + \left| f'(c_i^2)(x_{i+1}-x) \right| \\ &= \left| f'(c_i^1) \right| |(x_{i+1}-x)| + \left| f'(c_i^2) \right| |(x_{i+1}-x)| \\ &\le 2 \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f'(x)| (x_{i+1}-x) \le 2M_1 h, \end{aligned}$$

kui $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Sellest järeldub, et

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_1(x)| \leq 2M_1 h.$$

Olgu nüüd $f \in C^2[a,b]$. Soovime leida hinnangut suurusele $|f(x) - S_1(x)|$, kui $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Kui $f \in C^2[a,b]$, siis saame igal osalõigul $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 2, \ldots, n$, lineaarse interpolatsiooni vea $f(t) - S_1(x)$ esitada kujul (vt [3], lk 17)

$$f(x) - S_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}),$$

kus $c \in (x_i, x_{i+1})$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$. Seega

$$\begin{aligned}
|f(x) - S_1(x)| &= \left| \frac{f''(c)}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1}) \right| \\
&= \frac{|f''(c)|}{2} \, |(x - x_i)(x - x_{i+1})| \\
&\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f''(x)| \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} (x - x_i)(x_{i+1} - x).
\end{aligned}$$

Tähistame $g(x) \coloneqq (x - x_i)(x_{i+1} - x)$. Siis funktsiooni g esimene esimene tuletis on kujul

$$g'(x) = (x \cdot x_{i+1} - x^2 - x_i \cdot x_{i+1} + x_i \cdot x)' = x_{i+1} - 2x + x_i.$$

Näeme, et $g'(x) = 0$, kui $x_{i+1} - 2x + x_i = 0$, s.t kui $x = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$. Võttes $g(x)$ kohal $x = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ saame, et

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) &= \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2} - x_i\right)\left(x_{i+1} - \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \\
&= \left(\frac{x_{i+1} + x_i - 2x_i}{2}\right)\left(\frac{2x_{i+1} - x_{i+1} - x_i}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)^2.
\end{aligned}$$

Kuna $g''(x) = (x_{i+1} - 2x + x_i)' = -2 < 0$, siis funktsioon $g(x)$ saavutab oma maksimumi punktis $x = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$. Järelikult

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} g(x) = \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)^2, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Seega

$$|f(x) - S_1(x)| \leq \frac{M_2}{8}(x_{i+1} - x_i)^2 = \frac{M_2}{8}h^2,$$

kus $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Siit järeldub, et

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - S_1(x)| \leq \frac{M_2}{8}h^2.$$

■

3 Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesus ning siledus

Vaatleme lineaarset integraalvõrrandit kujul

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy, \quad x \in [a,b], \tag{6}$$

kus f ja K on antud funktsioonid ning u on otsitav. Sellist võrrandit nimetatakse Fredholmi teist liiki integraalvõrrandiks. Seejuures funktsiooni K nimetatakse integraalvõrrandi tuumaks ning funktsiooni f nimetatakse vabaliikmeks. Võrrandi (6) lahendi olemasolu ja ühesus on kirjeldatav (vt [6], lk 48) järgmise teoreemiga.

Teoreem 3.1. *Olgu tuum K pidev ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja vabaliige f pidev lõigul $[a,b]$. Olgu võrrandile (6) vastaval homogeennsel võrrandil*

$$u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy \quad (x \in [a,b]) \tag{7}$$

olemas ainult triviaalne lahend $u = 0$.

Siis võrrand (6) on üheselt lahenduv ja tema lahend u on lõigul $[a,b]$ pidev: $u \in C[a,b]$.

Olgu $m \in \mathbb{N}$ ning olgu $C^m[a,b]$ kõigi ruudul $[a,b] \times [a,b]$ määratud m korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk.

Teoreem 3.2. *Eeldame, et $K \in C^m([a,b] \times [a,b])$ ja $f \in C^m[a,b]$, kus $m \in \mathbb{N}$. Olgu võrrandil (7) olemas ainult null-lahend.*

Siis võrrandi (6) lahend u on m korda pidevalt difenrentseeruv lõigul $[a,b]$: $u \in C^m[a,b]$.

Tõestus. Teoreemist 3.1 järeldub, et võrrand (6) on üheselt lahenduv ning tema lahend on pidev lõigul $[a,b]$: $u \in C[a,b]$. Olgu $m = 1$. Järgnevas huvitab meid, kas $u \in C^1[a,b]$. Samasuse

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

diferentseerimisel saame

$$u'(x) = f'(x) + \frac{d}{dx}\int_a^b K(x,y)u(y)dy.$$

Kuna funktsioonil $K(x,y)$ on olemas osatuletis $\dfrac{\partial K(x,y)}{\partial x}$, mis on pidev ruudul $[a,b] \times [a,b]$, siis

$$\frac{d}{dx}\int_a^b K(x,y)u(y)dy = \int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}u(y)dy \quad (a \le x \le b)$$

ning integraal

$$\int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}u(y)dy \quad (a \le x \le b),$$

kui muutuja x funktsioon on pidev lõigul $[a,b]$. Järelikult

$$u'(x) = f'(x) + \int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}u(y)dy \quad a \le x \le b, \tag{8}$$

kusjuures viimase võrduse parem pool on pidev iga $x \in [a,b]$ korral. Seega funktsioonil u leidub tuletis $u' \in C[a,b]$ ning teoreemi 3.2 väide kehtib $m = 1$ puhul. Olgu nüüd $m = 2$. Siis huvitab meid, kas $u \in C^2[a,b]$. Selleks lähtume samasustest (8). Samasuse (8) diferentseerimisel saame analoogiliselt juhuga m=1, et

$$u''(x) = f''(x) + \int_a^b (\frac{d}{dx})^2 K(x,y)u(y)dy, \quad a \le x \le b,$$

kusjuures viimase võrduse parem pool on pidev funktsioon lõigul $[a,b]$. Seega funktsioonil u' leidub tuletis $u'' \in C[a,b]$ ning teoreemi väide kehtib $m = 2$ kohal. Analoogiliselt jätkates näeme, et teoreemi väide kehtib tahes $m \in N$ korral. ■

4 Kollokatsioonimeetod

Vaatleme integraalvõrrandit (6), s.t võrrandit

$$u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy + f(x), \quad a \le x \le b,$$

kus tuum K on pidev ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja vabaliige f pidev lõigul $[a,b]$.

Lihtsad, kuid küllalti efektiivsed meetodid võrrandi (6) ligikaudseks lahendamiseks saadakse lineaarsplainide kasutamise teel.

Olgu antud lõigul $[a,b]$ ühtlane võrk Δ_n ja olgu funktsioonid φ_j $(j = 0, 1, \dots, n)$ võrgule Δ_n vastavad lineaarsed baassplainid. Integraalvõrrandi (6) lähislahendit otsime kujul

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, \dots, n, \tag{9}$$

kus $c_0, c_1, \dots, c_n$ on otsitavad kordajad. Konstantide $c_0, c_1, \dots, c_n$ määramiseks asetame suuruse (9) integraalvõrrandisse (6) ning nõuame, et integraalvõrrand (6) oleks rahuldatud interpolatsioonisõlmedes $x_i = ih$, $(i = 0, 1, \dots, n)$; $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$u_n(x_i) = \int_a^b K(x_i,y)u_n(y)dy + f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{10}$$

Arvestades seost (3) saame, et

$$u_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x) = c_i \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

Järelikult saame võrdused (10) kirjutada kujul

$$c_i = \sum_{j=0}^{n} k_{ij} c_j + f(x_i), \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \tag{11}$$

kus

$$k_{ij} = \int_a^b K(x_i,y)\varphi_j(y)dy, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

Võrdused (11) kujutavad endast lineaarset võrrandisüsteemi otsitavate kordajate $c_0, c_1, \ldots, c_n$ suhtes. Suuruste k_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ väljaarvutamist lihtsustab asjaolu, et

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = 0, \quad kui\ x \geq x_1, \\
&\varphi_j(x) = 0, \quad kui\ x_{j-1} \leq x \leq x_{j+1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \\
&\varphi_n(x) = 0, \quad kui\ x \leq x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Arvestades viimaseid tingimusi saame suuruste k_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ leidmiseks järgmised valemid:

$$
\begin{aligned}
k_{i0} &= \int_0^{x_1} K(x_i, y) \frac{x_1 - y}{h} dy, \\
k_{ij} &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} K(x_i, y) \frac{y - x_{j-1}}{h} dy + \int_{x_j}^{x_{j+1}} K(x_i, y) \frac{x_{j+1} - y}{h} dy, \\
k_{in} &= \int_{x_n - 1}^{x_n} K(x_i, y) \frac{y - x_n}{h} dy,
\end{aligned}
$$

kus $i = 0, 1, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n-1$ ja $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Kollokatsioonimeetodi (10) abil on integraalvõrrandi (6) lähislahend leitav, kui võrrandisüsteem (11) osutub üheselt lahenduvaks. Meie edaspidise käsitluse eesmärk on uurida süsteemi (11) lahenduvust ning uurida u_n koonduvust, kui $n \to \infty$.

5 Kollokatsioonimeetod kui Galjorkini meetod

Olgu P_n $(n \in \mathbb{N})$ operaator, mis seab suvalisele funktsioonile $u \in C[a, b]$ vastavusse tükiti lineaarse funktsiooni

$$
(P_n u)(x) = \sum_{j=0}^{n} u(x_j) \varphi_j(x), \tag{12}
$$

kus $x \in [a, b]$ ja φ_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ on võrguga Δ_n seotud lineaarsed baassplainid.

Ilmselt $(P_n u)(x)$ on pidev funktsioon, kui $x \in [a, b]$.

Osutub, et P_n on lineaarne tõkestatud operaator ruumis $C[a,b]$, kus $C[a,b]$ on lõigul $[a,b]$ pidevate funktsioonide u ruum normiga $\|u\|_{C[a,b]} = max_{x\in[a,b]} |u(x)|$.

Tõepoolest suvaliste funktsioonide $u, v \in C[a,b]$ ja parameetri $\lambda \in \mathbb{R}$ korral saame, et operaator P_n on aditiivne ja homogeenne:

$$\begin{aligned}
(P_n(u+v))(x) &= \sum_{j=0}^{n}(u(x_j)+v(x_j))\varphi_j(x) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(u(x_j))\varphi_j(x) + \sum_{j=0}^{n}(v(x_j))\varphi_j(x) \\
&= (P_n u)(x) + (P_n v)(x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(P_n(\lambda u))(x) &= \sum_{j=0}^{n} \lambda u(x_j)\varphi_j(x) \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) \\
&= \lambda (P_n u)(x).
\end{aligned}$$

Olgu $u \in C[a,b]$. Siis

$$\begin{aligned}
\|P_n u\|_{C[a,b]} &= \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x) \right| \\
&\leq \max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} |u(x_j)|\,|\varphi_j(x)| \\
&\leq \|u\|_{C[a,b]} \max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\varphi_j(x)|\,.
\end{aligned}$$

Kuna

$$\max_{x\in[a,b]} \sum_{j=0}^{n} |\varphi(x)| = 1,$$

siis saame, et

$$\|P_n u\|_{C[a,b]} \leq \|u\|_{C[a,b]}\,. \tag{13}$$

Seega $P_n : C[a,b] \to C[a,b]$ on tõkestatud ning

$$\|P_n\|_{L(C[a,b],C[a,b])} \leq 1 \quad (n = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Suvalise $u \in C[a,b]$ korral

$$(P_n u)(x_i) = \sum_{j=0}^{n} u(x_j)\varphi_j(x_i) = u(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

ning seepärast

$$(P_n(P_n u)) = (P_n u),$$

s.t $P_n^2 = P_n$. Seega operaator P_n on lineaarne projektor. Sellisel juhul $\|P_n\|_{L(C[a,b],C[a,b])} \geq 1$ (vt [2], lk 259) ning kokkuvõttes saame, et

$$\|P_n\|_{L(C[a,b],C[a,b])} = 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Operaatori P_n definitsioonist (13) järeldub, et $P_n u = 0$ parajasti siis, kui iga $i = 0, 1, \ldots, n$ korral $u(x_i) = 0$. Seetõttu kollokatsioonitingimused (10) on samaväärsed nõudega

$$P_n(u_n - Tu_n - f) = 0, \tag{16}$$

kus operaator T on defineeritud võrdusega

$$(Tu)(t) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy, \quad a \leq x \leq b. \tag{17}$$

Operaatori P_n lineaarsuse tõttu võime võrduse (16), esitada kujul

$$P_n u_n = P_n T u_n + P_n f.$$

Võttes arvesse, et $P_n u_n = u_n$ funktsioonide jaoks kujul (9) saame viimase võrrandi esitada kujul

$$u_n = P_n T u_n + P_n f. \tag{18}$$

Paneme tähele, et võrrandi (18) käsitlemisel võime unustada nõude, et lähislahend avalduks kujul (9): kui võrrand (18) on lahenduv, siis tema lahendid on automaatselt kujuga (9).

Üleminekut võrrandilt $u = Tu + f$ võrrandile (18) nimetatakse Galjorkini meetodiks (seejuures võib P_n osas olla suvaline projektor. Kollokatsioonimeetod (9)-(10) on Galjorkini meetodi selline erijuht, kus projektoriks P_n on valemiga (12) defineeritud interpolatsiooniprojektor).

Olgu E Banachi ruum. Olgu $f \in E$ ja $T : E \to E$ pidev lineaarne operaator. Vaatleme operaatorvõrrandeid kujul

$$u = Tu + f \tag{19}$$

ja

$$u_n = P_n T u_n + P_n f \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{20}$$

kus $P_n : E \to E$ on projektorid (s.t $P_n^2 = P_n$).

Teoreem 5.1. *Olgu T lineaarne täielikult pidev operaator Banachi ruumis E. Homogeennsel võrrandil $v = Tv$ olgu vaid null-lahend $v = 0$. Projektorid P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ koondugu $n \to \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks:*

$$P_n u \to u, \quad \textit{kui } n \to \infty \ (\forall u \in E).$$

Siis võrrand (19) on iga $f \in E$ korral üheselt lahenduv ning leidub selline n_0, et $n \geq n_0$ on ka võrrandid (20) üheselt lahenduvad. Võrrandite (20) lahendid u_n koonduvad $n \to \infty$ korral võrrandi (19) lahendiks u ning kehtib veahinnang

$$\|u_n - u\|_E \leq c \|u - P_n u\|_E, \quad n \geq n_0, \tag{21}$$

kus konstant c ei sõltu arvust n ega vabaliikmest f.

Teoreemi 5.1 tõestuse võib leida raamatust [4], lk 59.

5.1 Kollokatsioonimeetodi koondumine

Esmalt toome sisse Banach-Steinhausi teoreemi(vt [2], lk 127), mida meil läheb allpool vaja.

Teoreem 5.2 (Banach-Steinhausi teoreem). *Olgu X Banachi ruum ning E põhihulk ruumis X. Jada $A_n \in L(X, X)$ koondub punktiviisi operaatoriks $A \in L(X, X)$ parajasti siis, kui on täidetud järgmised tingimused:*
1) $\exists\ M \in \mathbb{R}$, $\|A_n\|_{L(X,X)} \leq M\ \forall n \in \mathbb{N}$,
2) $A_n x \to Ax$, $\forall x \in E$.

Olgu P_n $(n \in \mathbb{N})$ operaatorid, mis on defineeritud seosega (12) ning olgu $u \in C^1[a, b]$. Siis lemma 2.2 põhjal

$$\max_{x \in [a,b]} |u(x) - (P_n u)(x)| \leq c \cdot \frac{b - a}{n}, \tag{22}$$

kus c on mingi konstant, mis ei sõltu suurusest n. Võrratusest (22) järeldub, et iga $u \in C^1[a,b]$ korral

$$\|u - P_n u\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |u(x) - (P_n u)(x)| \to 0, \quad kui\ n \to \infty. \tag{23}$$

Kuna $C^1[a,b]$ on kõikjal tihe ruumis $C[a,b]$ ning kehtib (14), siis Banach-Steinhausi teoreemi põhjal saame iga $u \in C[a,b]$ korral, et

$$\|u - P_n u\|_{C[a,b]} \to 0, \quad kui\ n \to \infty. \tag{24}$$

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)dy, \quad x \in [a,b]. \tag{6}$$

Teoreem 5.3. *Olgu võrrandi (6) tuum K pidev ruudul $[a,b] \times [a,b]$ ja vabaliige f pidev lõigul $[a,b]$. Olgu võrrandile (6) vastaval homogeennsel võrrandil (7) olemas ainult triviaalne lahend $u = 0$.Olgu kollokatsioonimeetodis (9)-(10) kasutusel ühtlane võrk Δ_n $(n \in \mathbb{N})$ sõlmedega*
$x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Siis kehtivad järgmised väited:
1) integraalvõrrandil (6) on olemas ühene lahend $u \in C[a,b]$;
2) leidub selline $n_0 \in \mathbb{N}$, et $n \geq n_0$ korral on kollokatsioonimeetodist tulenev võrrandisüsteem (11) üheselt lahenduv;
3) leiab aset koondumine

$$\max_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)| \to 0, \quad kui\ n \to \infty, \tag{25}$$

kus u_n avaldub kujul (9), milles kordajad $c_0, c_1 \ldots, c_n$ on saadud võrrandisüsteemist (11);
4) Kui $K \in C^1([a,b] \times [a,b])$ ja $f \in C^1[a,b]$ siis

$$\max_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq c_1 \frac{1}{n}, \tag{26}$$

kus c_1 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.
5) Kui $K \in C^2([a,b] \times [a,b])$ ja $f \in C^2[a,b]$, siis

$$\max_{x\in[a,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq c_2 \frac{1}{n^2}, \tag{27}$$

kus c_2 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Tõestus. Väide 1) järeldub teoreemist 3.1. Väidete 2)-5) tõestamisel tugineme teoreemile 5.1. Teoreemi 5.1 rakendamiseks võtame $E = C[a,b]$.

Teoreemis 5.1 toodud võrrandiks (19) võtame võrrandi (6), kus T on defineeritud seosega (17), st

$$(Tu)(t) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy, \quad a \leq x \leq b.$$

Integraaloperaatori T täielik pidevus ruumis $C[a,b]$ on tõestatud raamatus [2], lk 125 ning tema lineaarsus on suhteliselt lihtsasti kontrollitav.

Teoreemis 5.1 toodud võrrandiks (20) võtame võrrandi (18), st võrrandi

$$u_n = P_n T u_n + P_n f, \tag{28}$$

kus P_n on defineeritud seosega (12). Koondumine (24) ütleb, et projektorid P_n $(n = 1, 2 \ldots)$ koonduvad $n \to \infty$ korral punktiviisi ühikoperaatoriks.

Teoreemi 5.1 kohaselt leidub selline n_0, et $n \geq n_0$ korral on võrrand (28) üheselt lahenduv (sellest järeldub väide 2)) ja kehtib veahinnang

$$\|u_n - u\|_{C[a,b]} \leq c \, \|u - P_n u\|_{C[a,b]}, \quad n \geq n_0, \tag{29}$$

kus $u \in C[a,b]$ on integraalvõrrandi (6) lahend.

Koondumisest (24) ja hinnangust (29) järeldub väide 3). Ka väited 4) ja 5) on vahetud järeldused hinnagust (29), lemmast 2.2 ja teoreemist 3.2. ■

6 Arvuline näide

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(x) = x^3 + \int_0^1 xy \cdot u(y)dy, \quad x \in [0,1]. \tag{30}$$

See võrrand on kujul (6), kus $[a,b] = [0,1]$, $K(x,y) = xy$ ning $f(x) = x^3$. Võrrandi (30) lahendiks on

$$u(x) = x^3 + \frac{3}{10}x, \quad x \in [0,1]. \tag{31}$$

Lahendi (31) lähendi $u_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) leidmiseks kasutame osas 4 kirjeldatud kollokatsioonimeetodit (10)-(11), võttes aluseks ühtlase võrgu (Δ_n) punktidega

$$x_i = hi,$$

kus $i = 0, 1 \ldots, n$; $h = \dfrac{1}{n}$. Kuna võrrnadi (30) korral $K \in C^2([0,1] \times [0,1])$ ja $f \in C^2[0,1]$, siis teoreemi 5.3 põhjal saame hinnangu

$$\max_{x \in [a,b]} |u_n(x) - u(x)| \leq c_2 h^2,$$

kus c_2 on konstant, mis ei sõltu suurusest $h = \dfrac{1}{n}$. Suuruse $\underset{x \in [a,b]}{max} |u_n(x) - u(x)|$ lähendi arvutame järgmiselt:

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{i=0,1,\ldots,n-1,\\ k=0,1,\ldots,10}} |u_n(x_{ik}) - u(x_{ik})|,$$

kus $x_{ik} = x_i + \dfrac{k}{10}(x_{i+1} - x_i)$, $i = 0, 1 \ldots, n-1$ ja $k = 0, 1, \ldots, 10$.

Vigade ε_n arvutamiseks on koostatud lisas toodud programm keeles R. Osa saadud tulemusest on esitatud tabelis 1.

n	ε_n
2	0.172
4	0.0406
8	$6.105 \cdot 10^{-3}$
16	$4.621 \cdot 10^{-3}$
32	$2.714 \cdot 10^{-3}$
64	$1.459 \cdot 10^{-3}$
128	$7.554 \cdot 10^{-4}$

Tabel 1: Arvuline tulemus

Viited

[1] **A.Tintson**, *„Lineaarsplainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi teist liiki integraalvõrrandite lahendamiseks"*, Tartu Ülikool, (2008).

[2] **E.Oja, P.Oja**, *„Funktsionaalanalüüs"*, Tartu Ülikool, (1991).

[3] **E.Tamme, L.Võhandu, L.Luht**, *„Arvutusmeetodid"*, Kirjastus Valgus, (1986).

[4] **G.Vainikko**, *„Kiirguslevi. Matemaatilise füüsika täiendavad peatükid"*, Tartu Ülikool, (1990).

[5] **L.Loone, V.Soomer**, *„Matemaatilise analüüsi algkursus"*, Tartu Ülikooli kirjastus, (2009).

[6] **R. Kress**, *„Linear Integral Equations 2nd edition"*, Springer-Verlag New York,(1999).

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Anna Laaneväli (sünnikuupäev: 26.04.1992)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   "Lineaarsplainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi II liiki integraalvõrrandi lahendamiseks",

   mille juhendaja on professor Arvet Pedas,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   2.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile,

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.2016**

Lisa

Programmid on kirjutatud programmeerimiskeeles R.

```
a = 0
b = 1
n = 2
h = (b-a)/n
x = seq(a,b,length.out = n+1)

K = function(x,y){
  return (x*y)
  }

F = function(x){
  return(x**3)
  }

U = function(x){
  return(x**3+0.3*x)
  }

phi = function(i,y){
  if (i == 1){
    if ((x[1] <= y) * (y <= x[2])){
      return ((x[2]-y)/h)
      }
    else{
      return (0)
      }
    }

  if (i == (n+1)){
    if ((x[n] <= y) * (y <= x[n+1])){
      return ((y-x[n])/h)
      }
    else{
      return (0)
      }
    }

  if ((x[i] < y) * (y <= x[i+1])){
```

```
      return ((x[i+1]-y)/h)
      }

    if ((x[i-1] <= y) * (y <= x[i])){
      return ((y-x[i-1])/h)
      }

    return (0)
    }

A = matrix(rep(0,(n+1)*(n+1)),nrow = n+1, ncol = n+1)

for (i in 1:(n+1)){
  I = adaptIntegrate(function(y) phi(1,y)*K(x[i],y),
  x[1], x[2])$integral

  A[i,1] <- I

  for (j in 2:(n)){
    I = adaptIntegrate(function(y) phi(j,y)*K(x[i],y),
    x[j], x[j+1])$integral

    J = adaptIntegrate(function(y) phi(j-1,y)*K(x[i],y),
    x[j-1], x[j])$integral

    A[i,j] <- I+J
    }

  I = adaptIntegrate(function(y) phi(n+1,y)*K(x[i],y),
  x[n], x[n+1])$integral

  A[i,n+1] <- I
  }

A = diag(n+1)-A

F_mat = F(x)
C = solve(A,F_mat)

UN = function(x){
  sum = 0
```

```
  for (i in 1:(n+1)){
    sum = sum+C[i]*phi(i,x)
    }

  return(sum)
  }

max_err = 0
max_place = 0

for (i in 1:n){
  for (k in 1:10){
    xik = x[i]+k*(h/10)
     dif  = abs(U(xik)-UN(xik))

     if (dif > max_err){
       max_err = dif
       max_place = xik
       }
    }
  }
```