EESTI NSV TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЁНЫЕ ЗАПИСКИ ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

MATEMAATILISED TEADUSED **3** МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Г. КАНГРО

B_α-СУММИРОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К СТЕПЕННЫМ РЯДАМ

AVEC UN RÉSUMÉ:
LA SOMMATION B_α D'ORDRE QUELCONQUE
ET SON APPLICATION AUX SÉRIES ENTIÈRES

ГОСИЗДАТ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“
ТАРТУ, 1946

MATEMAATILISE ANALÜÜSI KATEEDER
JUHATAJA: prof. H. JAAKSON

B_α-СУММИРОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К СТЕПЕННЫМ РЯДАМ.

§ 1. Понятие B_α^λ-суммируемости и её простейшие свойства.

1. Порядок суммирования. — Рассмотрим бесконечный ряд

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots = \Sigma u_n \tag{1}$$

с любыми, действительными или комплексными членами u_n.

Пусть α некоторое положительное и λ произвольное действительное число. Образуем с помощью членов u_n ряда (1) степенной ряд[1]

$$\sum \frac{u_n}{\underline{|(n-\lambda)\alpha}} t^{n-\lambda}, \tag{2}$$

который будем называть обобщённым ассоциированным рядом ряда (1) порядка λ. При этом символ $\underline{|a}$ обозначает, как это принято у английских математиков, значение Эйлеровой Гамма-функции в точке $a+1$, определяемой при $a > -1$ интегралом

$$\underline{|a} = \Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^a \, dx.$$

Допустим, что ассоциированный ряд (2) сходится, определяя некоторую аналитическую функцию $U_\lambda(t)$, которую будем предполагать голоморфной при всех положительных вещественных значениях переменного t. По определению, назовём ряд (1) суммируемым порядка λ способом B_α или просто B_α^λ-суммируемым, если сходится несобственный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-x} U_\lambda(x^\alpha) \, dx, \tag{3}$$

[1] Во всех бесконечных суммах в настоящей статье индекс суммирования n проходит все неотрицательные целочисленные значения от нуля до бесконечности, так что при $\lambda > 0$ в ассоциированном ряде (2) встречаются, вообще говоря, $E(\lambda)+1$ членов с неположительными степенями переменного t.

где нижним пределом интегрирования может служить всякое положительное число δ, которое в случае $\lambda<\beta$ $\left(\beta=\frac{1}{\alpha}\right)$ можно заменить нулём[1].

В случае абсолютной сходимости интеграла (3) будем говорить об абсолютной суммируемости порядка λ или просто о $B_{\alpha}^{|\lambda|}$-суммируемости.

При $\lambda=0$ интеграл (3) обращается в известный интеграл Ле Руа[2]

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, U(x^{\alpha})\, dx,$$

где

$$U(t)=U_0(t)=\sum \frac{u_n}{\lfloor n\alpha} t^n.$$

Если порядок суммирования λ является целым числом, то нетрудно истолковать его роль в процессе суммирования, приводя B_{α}^{λ}-суммируемость ряда (1) на B_{α}^{0}-суммируемость другого ряда, получающегося из первоначального ряда путем известного конечного изменения. Мы приходим к следующему результату:

Если λ положительное целое число, то B_{α}^{λ}-суммируемость ряда

$$u_0+u_1+\ldots$$

эквивалентна суммируемости нулевого порядка ряда

$$u_{\lambda}+u_{\lambda+1}+\cdots,$$

получившегося из предыдущего ряда путём отбрасывания λ его первых членов.

Если же λ отрицательное целое число, то B_{α}^{λ}-суммируемость ряда

$$u_0+u_1+\ldots$$

---

[1] Число $\delta>0$ введено вместо нуля с целью избежать возможной расходимости интеграла (3) при $\lambda \geqslant \beta$, из-за наличия отрицательных степеней в разложении функции $U_{\lambda}(t)$.

[2] É. Le Roy, Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 2 (2) (1900), 405—430.

эквивалентна суммируемости нулевого порядка ряда

$$\underbrace{0+0+\ldots+0}_{\lambda \text{ нулей}}+u_0+u_1+\ldots,$$

получившегося из предыдущего ряда путём вставления перед рядом λ членов, равных нулям.

Понятие целочисленного порядка суммирования введено впервые итальянским математиком Санниа[1], который, однако, ограничился изучением интеграла Бореля, являющегося частным случаем интеграла Ле Руа, соответствующим значению $a=1$.

2. Обобщённая сумма. — В моей статье об абсолютной суммируемости расходящихся степенных рядов доказана следующая лемма[2]:

Из сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}F(x)\,dx$$

вытекает сходимость того же характера и к той же сумме интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}I^aF(x)\,dx,$$

где I^a означает оператор интегрирования порядка $a>0$, введённый Риманом[3] с помощью определения

$$I^aF(x)=\frac{x^a}{\underline{|a-1}}\int_0^1(1-y)^{a-1}F(xy)\,dy. \tag{4}$$

Опираясь на проверяемую без затруднения формулу

$$I^a x^m=\frac{\underline{|m}}{\underline{|m+a}}\,x^{m+a} \qquad (m>-1),$$

---

[1] G. Sannia, Nuovo metodo di sommazione delle serie. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 42 (1917), 303—322.

[2] G. Kangro, Verallgemeinerte Theorie der absoluten Summabilität der divergenten Potenzreihen. Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis, A XXXVII (1942), 16—19.

[3] B. Riemann, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. Gesammelte mathematische Werke. Leipzig, 1892.

убедимся, что каждый B_α^λ-суммируемый ряд суммируем также способом $B_\alpha^{\lambda'}$, если $\lambda' \leqq \lambda$. Другими словами, чем меньше порядок суммирования λ, тем мощнее, вообще говоря, действует соответствующий способ B_α^λ.

Если ряд (1) суммируем всеми способами B_α^λ, каким бы большим мы ни взяли λ, то мы будем говорить о суммируемости (простой или абсолютной) ∞-го порядка. Основные идеи теории рядов, абсолютно суммируемых ∞-го порядка способом B_α, изложены в моей вышеупомянутой статье.

Приведённой леммой вместе с только что выведенным следствием относительно мощности способа B_α^λ оправдывается допустимость следующего определения:

Условимся понимать под обобщённой суммой u ряда (1), соответствующей способу B_α^λ, значение интеграла

$$u = \int_0^\infty e^{-x}\, U_{\lambda'}(x^\alpha)\, dx\,,$$

где λ' любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\lambda' \leqq \lambda, \quad \lambda' < \beta \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right).$$

3. Основные свойства способа B_α^λ. — Ради краткости обозначения будем рассматривать в дальнейшем символ B_α^λ, как оператор суммирования, который в результате его применения к ряду u_n даёт обобщённую сумму u последнего, так что сможем написать

$$u = B_\alpha^\lambda u_n\,.$$

Уже в 1920 г. доказано Перроном[1], что оператор B_α^λ обладает свойством регулярности, т. е. если ряд (1) сходится к сумме S, то способ B_α^λ применим независимо от λ, причём имеем

$$B_\alpha^\lambda u_n = S\,.$$

---

[1] O. Perron, Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Mathematische Zeitschrift, 6 (1920), 291.

Таким образом сохраняется то существенное свойство, которым должен обладать каждый способ суммирования для того, чтобы избежать опасности попасть в противоречие с классическим понятием суммы сходящегося ряда.

Очевидно, что оператор B_{α}^{λ} также обладает свойством линейности, т. е. из равенств

$$B_{\alpha}^{\lambda} u_n = u, \quad B_{\alpha}^{\lambda} v_n = v$$

вытекает

$$B_{\alpha}^{\lambda} (au_n + bv_n) = au + bv.$$

Наконец, заметим, что в B_{α}^{λ}-суммируемом ряде позволительно переместить расположенность конечного числа его членов, подставить вместо одного члена сумму p новых членов и, наоборот, вместо p членов их сумму, не меняя суммы самого ряда, в то время как порядок суммирования увеличивается на $p-1$ при вставлении новых и уменьшается на $p-1$ при соединении старых членов.

4. Критерии суммируемости. — а) Решение вопроса о B_{α}^{λ}-суммируемости ряда (1) требует от нас подробнее исследовать свойства ассоциированной функции $U_{\lambda}(t)$, определяемой степенным рядом (2). Функция эта связана с функцией $U(t) = U_0(t)$ простым соотношением, которое становится очевидным, если воспользоваться понятием производной любого действительного порядка, введённым Риманом[1]. Напомним кратко это нужное для нас понятие.

Каждое действительное число ν может быть представлено в виде разности некоторого неотрицательного целого числа n и положительного числа a, т. е.

$$\nu = n - a.$$

Производная порядка ν от функции $F(x)$ определяется теперь с помощью интеграла порядка a формулой

$$D^{\nu} F(x) = \frac{d^n}{dx^n} I^a F(x), \tag{5}$$

где $I^a F(x)$ даётся интегралом (4). Если ν отрицательное число, то диференцирование приводится к интегрированию порядка $a = -\nu$. При $\nu = 0$ найдём, взяв $a = n$, что

$$D^0 F(x) = F(x).$$

---

[1] B. Riemann, loc. cit., 363.

Так как из (5) вытекает

$$D^{\nu} x^{m} = \frac{\lfloor m}{\lfloor m-\nu} x^{m-\nu} \quad (m > -1),$$

то, положив $\nu = \lambda a$, найдём искомое соотношение

$$U_{\lambda}(x^{a}) = D^{\nu} U(x^{a}). \tag{6}$$

Таким образом, функция $U_{\lambda}(t)$ голоморфна в каждой точке голоморфности функции $U(t)$, точка $t=0$ может быть исключена, и нам поэтому достаточно наложить требование о голоморфности при всех положительных вещественных значениях аргумента на функцию $U(t)$.

В силу (6) имеет место следующий, равносильный первоначальному определению критерий для B_{a}^{λ}-суммируемости.

Теорема 1. Для B_{a}^{λ}-суммируемости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{-x} D^{\nu} U(x^{a})\, dx \qquad (\nu = \lambda a) \tag{7}$$

сходился.

Заметим, что $B_{a}^{|\lambda|}$-суммируемость ряда (1) соблюдается только в том случае, если интеграл (7) абсолютно сходится.

б) Пользуясь очевидной формулой

$$D^{\nu} F(x) = \frac{d}{dx} D^{\nu-1} F(x),$$

получим, интегрируя по частям,

$$\int_{\delta}^{\infty} e^{-x} D^{\nu} U(x^{a}) dx = \Big| e^{-x} D^{\nu-1} U(x^{a}) \Big|_{\delta}^{\infty} + \int_{\delta}^{\infty} e^{-x} D^{\nu-1} U(x^{a}) dx. \tag{8}$$

Из предположения, что ряд (1) B_{a}^{λ}-суммируем, вытекает существование интеграла слева, и подавно интеграла справа, как интеграла, относящегося к $B_{a}^{\lambda-\beta}$-суммируемости, где $\beta = \frac{1}{a}$. Следовательно должно существовать предельное значение

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} D^{\nu-1} U(x^{a})$$

и равняться нулю, так как в противном случае интеграл справа не имел бы смысла. Итак, условие

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} D^{\nu-1} U(x^{\alpha}) = 0 \qquad (\nu = \lambda a) \tag{9}$$

является необходимым для B_{α}^{λ}-суммируемости.

Наоборот, если выполняется условие (9), то в силу (8) $B_{\alpha}^{\lambda-\beta}$-суммируемость влечёт за собой B_{α}^{λ}-суммируемость.

На основе последних рассуждений можно установить следующую теорему, которая даёт необходимый и достаточный критерий возможности перехода от $B_{\alpha}^{\lambda-\beta}$-суммируемости на B_{α}^{λ}-суммируемость.

Теорема 2. Для того, чтобы $B_{\alpha}^{\lambda-\beta}$-суммируемый ряд суммировался порядка λ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (9).

§ 2. Теоремы умножения.

1. Перемножение двух абсолютно суммируемых рядов. — Как известно, перемножение двух просто сходящихся рядов, вообще говоря, недопустимо в том смысле, что ряд-произведение может оказаться расходящимся. Чтобы избежать возможности такого расходящегося произведения, принято ограничивать совокупность умножаемых рядов, рассматривая, например, только абсолютно сходящиеся ряды. Покажем, что, при требовании от умножаемых рядов абсолютной суммируемости, умножение становится допустимым и в области суммируемых рядов.

Обозначая через Σw_n произведение Коши рядов Σu_n и Σv_n, где

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k},$$

установим следующую теорему умножения:

Теорема 3. Если $B_{\alpha}^{|\lambda|} u_n = u$ и $B_{\alpha}^{|\mu|} v_n = v$, то имеем

$$\begin{aligned} &1^{0} \quad B_{\alpha}^{|\lambda+\mu-\beta|} w_n = uv \text{ при } \lambda,\ \mu < \beta, \\ &2^{0} \quad\quad B_{\alpha}^{|\lambda|} w_n = uv \text{ при } \mu \geqslant \beta,\ \lambda. \end{aligned} \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right)$$

Таким образом, из абсолютной суммируемости известных порядков рядов Σu_n и Σv_n, соответственно к суммам u и v, вытекает абсолютная суммируемость определённого порядка ряда Σw_n к сумме uv.

Приведём доказательство нашей теоремы.

1° Пусть через $U_\lambda(t)$ и $V_\mu(t)$ обозначены ассоциированные функции соответственно порядков λ и μ, относящиеся к рядам Σu_n и Σv_n, т. е.

$$U_\lambda(t) = \sum \frac{u_n}{|\underline{(n-\lambda)\alpha}} t^{n-\lambda}, \quad V_\mu(t) = \sum \frac{v_n}{|\underline{(n-\mu)\alpha}} t^{n-\mu},$$

тогда вследствие λ, $\mu < \beta$ суммы u и v умножаемых рядов выражаются интегралами

$$u = \int_0^\infty e^{-x} U_\lambda(x^\alpha)\, dx = \lim_{l \to \infty} \int_0^l e^{-x} U_\lambda(x^\alpha)\, dx,$$

$$v = \int_0^\infty e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy = \lim_{l \to \infty} \int_0^l e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy.$$

Отсюда получим путём перемножения

$$uv = \lim_{l \to \infty} \iint_Q e^{-x-y} U_\lambda(x^\alpha)\, V_\mu(y^\alpha)\, dx dy, \tag{10}$$

где интегрирование в двойном интеграле распространено по квадрату $Q = (0 \leq x,\ y \leq l)$ со сторонами длины l.

Заменяя квадрат Q его диагональным треугольником

$$x,\ y \geqslant 0, \quad x + y \leq l,$$

что допустимо в силу абсолютной сходимости интеграла (10), и сделав подстановку

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \xi \\ y &= \xi\eta \end{aligned}\right\},$$

найдём

$$uv = \lim_{l \to \infty} \int_0^l e^{-\xi} \xi d\xi \int_0^1 U_\lambda[\xi^\alpha (1-\eta)^\alpha]\, V_\mu(\xi^\alpha \eta^\alpha)\, d\eta = \int_0^\infty e^{-\xi} \xi A(\xi) d\xi,$$

где

$$A(\xi)=\int_0^1 U_\lambda[\xi^\alpha(1-\eta)^\alpha]\,V_\mu(\xi^\alpha\eta^\alpha)\,d\eta=$$

$$=\int_0^1\Big[\sum\frac{u_n}{\underline{|(n-\lambda)\alpha}}\,\xi^{(n-\lambda)\alpha}(1-\eta)^{(n-\lambda)\alpha}\Big]\Big[\sum\frac{v_n}{\underline{|(n-\mu)\alpha}}\,\xi^{(n-\mu)\alpha}\eta^{(n-\mu)\alpha}\Big]d\eta=$$

$$=\sum\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k\,v_{n-k}}{\underline{|(k-\lambda)\alpha}\;\underline{|(n-\mu-k)\alpha}}\,\xi^{(n-\lambda-\mu)\alpha}\int_0^1\eta^{(n-\mu-k)\alpha}\,(1-\eta)^{(k-\lambda)\alpha}\,d\eta=$$

$$=\sum\xi^{(n-\lambda-\mu)\alpha}\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k v_{n-k}}{\underline{|(k-\lambda)\alpha}\;\underline{|(n-\mu-k)\alpha}}\,B[(n-\mu-k)\alpha+1,\ (k-\lambda)\alpha+1].$$

По известной формуле приведения Эйлеровой Бэта-функции имеем

$$B(a,\ b)=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}=\frac{\underline{|a-1}\;\underline{|b-1}}{\underline{|a+b-1}},$$

вследствие чего

$$A(\xi)=\sum\frac{\xi^{(n-\lambda-\mu)\alpha}}{\underline{|(n-\lambda-\mu)\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}=\sum\frac{w_n}{\underline{|(n-\lambda-\mu)\alpha+1}}\,\xi^{(n-\lambda-\mu)\alpha},$$

откуда

$$\xi A(\xi)=\sum\frac{w_n}{\underline{|(n-\lambda-\mu)\alpha+1}}\,\xi^{(n-\lambda-\mu)\alpha+1}=W_{\lambda+\mu-\beta}(\xi^\alpha),$$

где $W_{\lambda+\mu-\beta}(t)$ означает ассоциированную функцию порядка $\lambda+\mu-\beta$, относящуюся к ряду Σw_n.

Итак, имеем окончательно

$$uv=\int_0^\infty e^{-\xi}W_{\lambda+\mu-\beta}(\xi^\alpha)\,d\xi,$$

причём интеграл справа является абсолютно сходящимся.

Тем самым доказана справедливость равенства

$$B_\alpha^{|\lambda+\mu-\beta|}\,w_n=uv$$

в предположении $\lambda,\ \mu<\beta$.

2⁰ Переходим к изучению случая $\mu\geqslant\beta,\ \lambda$.

Определим положительные целые числа l и m так, чтобы выполнялись неравенства

$$\lambda - l = \lambda' < \beta,$$
$$\mu - m = \mu' < \beta.$$

Перемножив по правилу Коши ряды

$$u_l + u_{l+1} + \ldots + u_{l+n} + \ldots,$$
$$v_m + v_{m+1} + \ldots + v_{m+n} + \ldots,$$

абсолютно суммируемые соответственно порядков λ' и μ', получим в результате, на основе предыдущего, $B^{|\lambda'+\mu'-\beta|}$-суммируемый ряд с общим членом

$$w'_n = \sum_{k=0}^{n} u_{l+k} v_{m+n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{l+m+n} u_k v_{l+m+n-k} - \sum_{k=0}^{l-1} u_k v_{l+m+n-k} - \sum_{k=0}^{m-1} v_k u_{l+m+n-k} =$$

$$= w_{l+m+n} - \sum_{k=0}^{l-1} u_k v_{l+m+n-k} - \sum_{k=0}^{m-1} v_k u_{l+m+n-k}.$$

Ряд Σu_{l+m+n}, и тем более ряды $\Sigma u_{l+m+n-k}$, абсолютно суммируемы порядка $\lambda - l - m$, в то время, как ряд Σv_{l+m+n}, и тем более ряды $\Sigma v_{l+m+n-k}$, абсолютно суммируемы порядка $\mu - l - m$. Вследствие условия $\mu \geqslant \lambda$, оба рассматриваемые ряда абсолютно суммируемы порядка $\lambda - l - m$. С другой стороны, ряд $\Sigma w'_n$, абсолютно суммируемый порядка $\lambda' + \mu' - \beta$, подавно абсолютно суммируем порядка $\lambda - l - m$, так как, в силу неравенства $\mu \geqslant \beta$, имеем

$$\lambda' + \mu' - \beta = \lambda - l + \mu - m - \beta \geqslant \lambda - l - m.$$

Следовательно, ряд Σw_{l+m+n} $B_\alpha^{|\lambda - l - m|}$-суммируем, или, иначе говоря, ряд Σw_n $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируем.

Что касается суммы w ряда Σw_n в случае $\mu \geqslant \beta, \lambda$, то, имея в виду, что результат первой части теоремы применим для порядков $\lambda', \mu' < \beta$, получим

$$w = B_\alpha^{|\lambda|} w_n = B_\alpha^{|\lambda' + \mu' - \beta|} w_n = uv.$$

Этим наша теорема полностью доказана.

2. Перемножение двух рядов, один из которых абсолютно суммируем. — Доказанная теорема умножения абсолютно суммируемых рядов является аналогом теоремы Коши об умножении абсолютно сходящихся рядов. Однако, как известно, абсолютная сходимость обоих перемножаемых рядов не обязательна для законности умножения рядов. Действительно, по известной теореме, принадлежащей Мертенсу, достаточно предположить абсолютную сходимость одного только перемножаемого ряда. Аналогичную теорему можно установить и в области суммируемых рядов.

Теорема 4. Если $B_\alpha^{|\lambda} u_n = u$ и $B_\alpha^{\mu} v_n = v$, то имеем

$$1^0 \quad B_\alpha^{\lambda+\mu-\beta} w_n = uv \quad \text{при } \lambda, \mu < \beta,$$
$$2^0 \quad B_\alpha^{\lambda} w_n = uv \quad \text{при } \mu \geqslant \beta, \lambda. \qquad \left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right)$$

Доказывая предыдущую теорему, мы пользовались абсолютной суммируемостью обоих перемножаемых рядов для того, чтобы, во-первых, иметь возможность заменить в интеграле (10) квадратную область интегрирования Q её диагональным треугольником и, во-вторых, иметь право говорить не только о простой суммируемости ряда Σw_n, но также и показать абсолютную суммируемость его. Однако, чтобы оправдать законность замены упомянутых областей интегрирования, достаточно предпослать абсолютную суммируемость одного только перемножаемого ряда.

Чтобы удостовериться в этом, достаточно показать справедливость формулы

$$\lim_{l \to \infty} \iint_T e^{-x-y} U_\lambda(x^\alpha) V_\mu(y^\alpha)\, dx\, dy = 0,$$

где областью интегрирования T служит второй диагональный треугольник квадрата Q, определяемый неравенствами

$$x, y \leqslant l, \quad x + y \geqslant l.$$

Мы имеем

$$\left| \iint_T e^{-x-y} U_\lambda(x^\alpha) V_\mu(y^\alpha)\, dx\, dy \right| = \left| \int_0^l e^{-x} U_\lambda(x^\alpha)\, dx \int_{l-x}^{l} e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-x} \left| U_\lambda(x^\alpha) \right| dx \left| \int_{l-x}^{l} e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy \right| +$$

$$+\int\limits_{\frac{l}{2}}^{l} e^{-x} \left| U_\lambda(x^\alpha) \right| dx \left| \int\limits_{l-x}^{l} e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy \right|.$$

В силу сходимости интегралов

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} \left| U_\lambda(x^\alpha) \right| dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy$$

можно указать две постоянные $A > 0$ и $B > 0$, такие, чтобы неравенства

$$\int\limits_0^{\frac{l}{2}} e^{-x} \left| U_\lambda(x^\alpha) \right| dx < A, \quad \left| \int\limits_{l-x}^{l} e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy \right| < B$$

удовлетворялись при любых $l > 0$ и $x < l$.

Выбрав, далее, положительное число L настолько большое, чтобы из неравенств $l > L$, $x < \frac{l}{2}$ следовало

$$\int\limits_{\frac{l}{2}}^{l} e^{-x} \left| U_\lambda(x^\alpha) \right| dx < \frac{\varepsilon}{2B}, \quad \left| \int\limits_{l-x}^{l} e^{-y} V_\mu(y^\alpha)\, dy \right| < \frac{\varepsilon}{2A},$$

где $\varepsilon < 0$ произвольное, наперёд заданное число, найдём

$$\left| \iint\limits_T e^{-x-y} U_\lambda(x^\alpha) V_\mu(y^\alpha)\, dx\, dy \right| < \varepsilon.$$

Дальнейший ход доказательства ничем не отличается от доказательства предыдущей теоремы при одном только условии, что мы откажемся от абсолютного характера суммируемости ряда Σw_n.

3. B_α-суммирование в общем смысле. — Из теоремы 3 следует, в частности, что произведение двух абсолютно суммируемых рядов одинакового порядка λ абсолютно суммируемо или порядка $2\lambda - \beta < \lambda$ (если $\lambda < \beta$), или порядка λ (если $\lambda \geqslant \beta$). Таким образом, произведение двух $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемых рядов может и не оказаться $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемым, в то время как сумма двух $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемых рядов всегда является $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемой. Другими словами, множество всех $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемых рядов, вообще говоря, не замкнуто относительно операции умножения.

Поэтому, следуя идеям Санниа[1], воспользуемся понятием B_α-суммируемости в общем смысле, являющимся особенно плодотворным в области степенных рядов.

По определению, назовём B_α-суммируемым в общем смысле каждый ряд, который вообще суммируем некоторого, безразлично какого, порядка.

Множество всех рядов (1), абсолютно B_α-суммируемых в общем смысле, замкнуто и относительно операции сложения, и относительно умножения, образуя, таким образом, некоторое кольцо в смысле алгебры, которое содержит подкольцо всех рядов, абсолютно B_α-суммируемых ∞-го порядка, изучаемых мною в моей статье об абсолютной суммируемости расходящихся степенных рядов[2].

На этом заканчиваю изложение основ арифметической теории B_α^λ-суммируемых рядов, чтобы посвятить следующие параграфы применению вышеизложенных принципов к исследованию свойства степенных рядов, суммируемых способом B_α^λ.

§ 3. Звёзды суммируемости.

Рассмотрим произвольный степенной ряд

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots = \Sigma u_n z^n, \tag{11}$$

не исключая случая, когда этот ряд является расходящимся на всей плоскости переменного z.

Соответствующий обобщённый ассоциированный ряд порядка λ имеет теперь вид

$$\sum \frac{u_n z^n}{\underline{|(n-\lambda)\alpha}} t^{n-\lambda} = z^\lambda U_\lambda(zt), \tag{12}$$

где $U_\lambda(t)$ определяется рядом (2). Следовательно, степенной ряд (11) суммируем способом B_α^λ в точке $z_0 \neq 0$[3] тогда и только тогда, когда интеграл

$$\int\limits_\delta^\infty e^{-x} U_\lambda(zx^\alpha)\, dx \tag{13}$$

сходится в этой точке, причём абсолютной сходимости интеграла (13) соответствует абсолютная суммируемость степенного ряда (11).

---

[1] G. Sannia, loc. cit., 314.

[2] G. Kangro, loc. cit., 28—38.

[3] В точке $z = 0$ ряд (11), повидимому, всегда суммируем.

1. Звезда простой суммируемости. — Установим вопрос об общих свойствах, характеризующих множество точек z, в которых ряд (11) B_α^λ-суммируем.

a) Первый важный результат в этом направлении принадлежит Миттаг-Леффлеру[1], доказавшему, что сходимость интеграла Ле Руа

$$\int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha)\,dx$$

при некотором значении $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$ влечёт за собой сходимость того же интеграла для всех значений $z = re^{i\varphi}$, $r \leqslant r_0$. Другими словами, интеграл Ле Руа не может сходиться в точке z_0, не сходясь на всём сегменте $[0, z_0]$.

Применяя теорему Миттаг-Леффлера к интегралу (13), нетрудно убедиться в существовании на каждой, идущей из начала координат полупрямой точки ζ_α^λ, которая разделяет эту полупрямую на две части так, что интеграл (13) сходится в интервале $(0, \zeta_\alpha^\lambda)$ и расходится в интервале $(\zeta_\alpha^\lambda, \infty)$. При этом не исключены случаи, когда ζ_α^λ совпадает с одной из точек 0 или ∞.

Условимся называть множество точек всех интервалов $(0, \zeta_\alpha^\lambda)$, соответствующих всем полупрямым, исходящим из начала координат, звездой B_α^λ-суммируемости и обозначать её через σ_α^λ. Звезда σ_α^λ характеризуется следующим свойством: ряд (11) B_α^λ-суммируем в каждой внутренней точке звезды σ_α^λ, но не суммируем ни в какой внешней точке её. Что касается граничных точек ζ_α^λ звезды σ_α^λ, то в одних из них ряд (11) может являться B_α^λ-суммируемым, а в других нет, в зависимости от частного вида ряда (11). В точке же $z=0$ ряд (11) всегда B_α^λ-суммируем.

Обозначим через $\zeta_\alpha^\lambda(\varphi)$ граничную точку звезды σ_α^λ, лежащую на полупрямой, которая, исходя из начала координат, образует с

[1] G. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Acta mathematica, 29 (1905), 107—108.

положительной действительной осью угол φ. Пусть $\zeta_\alpha^\lambda(\varphi) = r_\alpha^\lambda(\varphi) e^{i\varphi}$, где $r_\alpha^\lambda(\varphi)$ есть радиус звезды σ_α^λ в направлении φ. Звезда σ_α^λ определена, если известен её радиус $r_\alpha^\lambda(\varphi)$, как функция от φ. Изучение функции $r_\alpha^\lambda(\varphi)$ и является ближайшей нашей задачей.

б) Условие (9), необходимое для B_α^λ-суммируемости числового ряда (1), гласит в случае ряда (11)

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} D_x^{\nu-1} U(zx^\alpha) = 0. \quad (\nu = \lambda\alpha) \tag{14}$$

Покажем, что условие (14), выполняемое для всех $z = re^{i\varphi}$, $r < r_\alpha^\lambda$, не выполняется при $r > r_\alpha^\lambda$.

Для этого нам нужны две леммы, непосредственно вытекающие из условия (14), которое предположим удовлетворяющимся при некотором значении $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$, $r_0 \neq 0$.

Положив в (14) $r_0 x^\alpha = y^\alpha$ и имея в виду формулу

$$D_x^{\nu-1} U(r_0 e^{i\varphi} x^\alpha) = r_0^{\beta-\lambda} D_y^{\nu-1} U(y^\alpha e^{i\varphi}),$$

найдём

$$\lim_{y \to \infty} e^{-r_0^{-\beta} y} D_y^{\nu-1} U(y^\alpha e^{i\varphi}) = 0. \tag{15}$$

Так как в случае $r \leqslant r_0$ имеем

$$e^{-r^{-\beta} y} \leqslant e^{-r_0^{-\beta} y},$$

то в силу (15)

$$\lim_{y \to \infty} e^{-r^{-\beta} y} D_y^{\nu-1} U(y^\alpha e^{i\varphi}) = 0,$$

или после подстановки $y^\alpha = rx^\alpha$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} D_x^{\nu-1} U(zx^\alpha) = 0.$$

Таким образом, мы пришли к первой лемме:

Лемма 1. Если условие (14) выполнено для значения $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$, то оно подавно выполнено для всех значений $z = re^{i\varphi}$, $r \leqslant r_0$.

На основе (15) имеем, в частности, для достаточно больших y

$$\left| D_y^{\nu-1} U(y^\alpha e^{i\varphi}) \right| < e^{r_0^{-\beta} y},$$

откуда следует абсолютная сходимость интеграла

$$\int_\delta^\infty e^{-x} D_x^{\nu-1} U(zx^\alpha)\, dx = r^{-\lambda} \int_{\delta'}^\infty e^{-r^{-\beta} y} D_y^{\nu-1} U(y^\alpha e^{i\varphi})\, dy \qquad (\delta' = r^\beta \delta)$$

при $r < r_0$, в чём и заключается сущность второй леммы.

Лемма 2. Если условие (14) выполнено для значения $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$, то ряд (11) $B_\alpha^{|\lambda-\beta|}$-суммируем для всех значений $z = re^{i\varphi}$, $r < r_0$.[1]

Перейдём к доказательству невозможности выполнения условия (14) при $r > r_\alpha^\lambda$. Для этого предположим, что условие (14) удовлетворяется для некоторого $r_0 > r_\alpha^\lambda$, и определим число r' неравенством

$$r_\alpha^\lambda < r' < r_0.$$

В силу доказанных лемм в точке $z' = r' e^{i\varphi}$ соблюдается $B_\alpha^{\lambda-\beta}$-суммируемость (и даже $B_\alpha^{|\lambda-\beta|}$-суммируемость) вместе с выполнением условия (14), откуда вытекает, на основе теоремы 2, B_α^λ-суммируемость в точке z', внешней для σ_α^λ.

Итак, мы пришли к противоречию с понятием звезды B_α^λ-суммируемости, чем наше утверждение и доказано.

Звезду σ_α^λ можно, таким образом, полностью охарактеризовать следующим свойством: во внутренних точках звезды σ_α^λ выполняется условие (14), которое, напротив, не выполняется ни в одной внешней точке её.

---

[1] Заметим кстати, что из этих двух лемм получается с помощью теоремы 2 простое доказательство вышеупомянутой теоремы Миттаг-Леффлера.

в) Определим, далее, в соответствии с каждым λ следующую функцию от φ

$$S_\lambda(\varphi)=\overline{\lim_{y\to\infty}}\, y^{-1}\ln\left|D_y^{\nu-1}U(y^\alpha e^{i\varphi})\right|, \qquad (\nu=\lambda\alpha) \tag{16}$$

относительно которой допускаем, что она может принимать также и бесконечные значения ∞ и $-\infty$.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ произвольное, достаточно малое число. Тогда в точке $z=re^{i\varphi}$, $r=r_\alpha^\lambda-\varepsilon$ соблюдается условие (14), откуда после подстановки $rx^\alpha=y^\alpha$ получаем

$$\left|D_y^{\nu-1}U(y^\alpha e^{i\varphi})\right|<e^{r^{-\beta}y}$$

для достаточно больших y. Отсюда следует неравенство

$$S_\lambda(\varphi)\leqslant r^{-\beta},$$

или, так как ε произвольно мало,

$$S_\lambda(\varphi)\leqslant (r_\alpha^\lambda)^{-\beta}.$$

С другой стороны, в точке $z=re^{i\varphi}$, $r=r_\alpha^\lambda+\varepsilon$ условие (14) не годится, вследствие чего существует такое положительное число η, что неравенство

$$\left|D_y^{\nu-1}U(y^\alpha e^{i\varphi})\right|>\eta e^{r^{-\beta}y}$$

имеет место для бесконечного множества произвольно больших y. Следовательно

$$S_\lambda(\varphi)\geqslant r^{-\beta},$$

или, в силу произвольности числа ε,

$$S_\lambda(\varphi)\geqslant (r_\alpha^\lambda)^{-\beta}.$$

Итак, имеем

$$S_\lambda(\varphi)=(r_\alpha^\lambda)^{-\beta},$$

откуда вытекает окончательная формула

$$r_\alpha^\lambda(\varphi)=\left[S_\lambda(\varphi)\right]^{-\alpha}. \quad (\nu=\lambda\alpha) \tag{17}$$

г) формула (17) выведена в предположении, что радиус суммируемости r_α^λ есть конечная, отличная от нуля и, таким образом, положительная величина. В этом случае $S_\lambda(\varphi)$ также является конечной и положительной величиной. Чтобы вполне решить поставленную задачу об определении функции r_α^λ, нам нужно изучить и крайние случаи $r_\alpha^\lambda = 0$ и $r_\alpha^\lambda = \infty$.

1° Если $r_\alpha^\lambda = 0$, то для каждого произвольно малого $r > 0$ имеется неравенство

$$S_\lambda(\varphi) \geqslant r^{-\beta},$$

откуда

$$S_\lambda(\varphi) = \infty.$$

2° Если $r_\alpha^\lambda = \infty$, то при любом, произвольно большом $r > 0$ соблюдается неравенство

$$S_\lambda(\varphi) \leqslant r^{-\beta},$$

вследствие чего $S_\lambda(\varphi)$ не может быть положительной, т. е.

$$S_\lambda(\varphi) \leqslant 0.$$

Наоборот, если $S_\lambda(\varphi) = \infty$, то обязательно должно быть $r_\alpha^\lambda = 0$, так как из $r_\alpha^\lambda > 0$ следовало бы, в силу предыдущего, неравенство $S_\lambda(\varphi) < \infty$.

Таким же путём сможем в случае $S_\lambda(\varphi) \leqslant 0$ убедиться в справедливости равенства $r_\alpha^\lambda = \infty$.

Итак, радиус суммируемости $r_\alpha^\lambda(\varphi)$ полностью определён функцией $S_\lambda(\varphi)$. Полученные нами результаты соединим в следующую теорему:

Теорема 5. *Если функция $S_\lambda(\varphi)$, определённая равенством (16), является положительной для рассматриваемого значения φ, то радиус B_α^λ-суммируемости $r_\alpha^\lambda(\varphi)$ даётся формулой*

$$r_\alpha^\lambda(\quad = \left[S_\lambda(\varphi)\right]^{-\alpha}.$$

В противном случае соответствующий радиус $r_\alpha^\lambda(\varphi)$ распространяется до бесконечности.

2. Звезда абсолютной суммируемости. — a) Исходя из понятия B_α^λ-суммируемости степенного ряда (11), мы естественным образом пришли к понятию звезды σ_α^λ — звезды простой суммируемости порядка λ — на основе одной теоремы Миттаг-Леффлера. Если в этой теореме предпослать в точке z_0 абсолютную суммируемость порядка λ, то тем самым обеспечена такая же суммируемость во всех точках сегмента $[0, z_0]$.[1]

Таким образом, существует другое звездообразное множество точек z, которое будем называть звездой $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемости и обозначать через $\sigma_\alpha^{|\lambda|}$. Звезда $\sigma_\alpha^{|\lambda|}$ отличается следующим свойством: ряд (11) $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируем в каждой внутренней точке звезды $\sigma_\alpha^{|\lambda|}$, но не $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируем ни в какой внешней точке её. $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемость в граничных точках звезды $\sigma_\alpha^{|\lambda|}$ зависит, как и B_α^λ-суммируемость в граничных точках звезды σ_α^λ, от специального вида ряда (11) и не подчиняется, таким образом, общим законам.

Очевидно, что звезда $\sigma_\alpha^{|\lambda|}$ содержится (в широком смысле) в звезде σ_α^λ, т. е. $\sigma_\alpha^{|\lambda|} \subset \sigma_\alpha^\lambda$, так что r_α^λ служит верхней гранью для $r_\alpha^{|\lambda|}$. Можно указать и нижнюю грань для радиуса $r_\alpha^{|\lambda|}$. С этой целью докажем теорему, являющуюся, в некотором смысле, аналогом известной теореме Абеля из теории сходимости степенных рядов.

Теорема 6. Из B_α^λ-суммируемости ряда (11) в точке $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$ следует его $B_\alpha^{|\lambda-\beta|}$-суммируемость в точках $z = re^{i\varphi}$, $r < r_0$.

В самом деле, для B_α^λ-суммируемости в точке $z_0 = r_0 e^{i\varphi}$ необходимо выполнение условия (14) в этой точке, откуда вытекает, в силу леммы 2, $B_\alpha^{|\lambda-\beta|}$-суммируемость в точках $z = re^{i\varphi}$, $r < r_0$.

---

[1] G. Kangro, loc. cit., 43—44.

Рассмотрим теперь звезду $\sigma_\alpha^{\lambda+\beta}$. Её радиус $r_\alpha^{\lambda+\beta}$ определяется формулой

$$r_\alpha^{\lambda+\beta}=\left[S_{\lambda+\beta}(\varphi)\right]^{-\alpha},$$

если $S_{\lambda+\beta}(\varphi)>0$, и простирается до бесконечности, если $S_{\lambda+\beta}(\varphi)\leqslant 0$.

На основе теоремы 6, во всех точках звезды $\sigma_\alpha^{\lambda+\beta}$ соблюдается $B_\alpha^{|\lambda|}$-суммируемость, вследствие чего

$$\sigma_\alpha^{|\lambda|}\supset\sigma_\alpha^{\lambda+\beta},$$

откуда

$$r_\alpha^{|\lambda|}\geqslant r_\alpha^{\lambda+\beta},$$

так что $r_\alpha^{\lambda+\beta}$ и служит нижней гранью для радиуса $r_\alpha^{|\lambda|}$.

б) Остаётся показать, что полученный нами результат не может быть улучшен в том смысле, что существует такой степенной ряд, при котором нижняя грань $r_\alpha^{\lambda+\beta}$ радиуса $r_\alpha^{|\lambda|}$ действительно достигается хотя бы для одного значения φ, так что, вообще говоря, становится невозможной замена грани $r_\alpha^{\lambda+\beta}$ другой, большей её.

Пусть p некоторое натуральное число. Определим коэфициенты u_n степенного ряда так, чтобы его ассоциированная функция нулевого порядка, относящаяся к $\alpha=\frac{1}{p}$, принимала вид

$$U(t)=\sin\left(e^{t^p}\right).$$

Найдём радиусы простой и абсолютной суммируемости порядка $\lambda=np$ (n — произвольное натуральное число), соответствующие значению $\varphi=0$.

Для этого нам нужно по теореме 1 изучить сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}D_x^\nu\, U(zx^\alpha)\,dx=\int\limits_0^\infty e^{-x}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\sin\left(e^{z^p x}\right)dx\ [1]$$

при положительных действительных значениях z.

---

[1] Так как в разложении по степеням переменного x функции $\frac{\partial^n}{\partial x^n}\sin\left(e^{z^p x}\right)$ нет членов с отрицательными показателями, то допустимо взять в качестве нижнего предела интеграции нуль вместо $\delta>0$.

Несложное вычисление даёт

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \sin\left(e^{z^p x}\right) = z^{np} \sum_{k=1}^{n} c_k^n e^{kz^p x} \sin\left(e^{z^p x} + k\frac{\pi}{2}\right),$$

где c_k^n — известные определённые константы. Таким образом, рассматриваемый интеграл сходится или расходится вместе с интегралом

$$\int_0^\infty e^{-x(1-nz^p)} \sin\left(e^{z^p x} + n\frac{\pi}{2}\right) dx,$$

причём абсолютной сходимости одного интеграла соответствует абсолютная сходимость другого.

Подстановкой $e^{z^p x} = y$ последний интеграл преобразуется в

$$z^{-p} \int_1^\infty \frac{\sin\left(y + n\frac{\pi}{2}\right)}{y^{z^{-p}} - n + 1} dy,$$

который сходится только в том случае, если

$$z^{-p} - n + 1 > 0,$$

откуда найдём, что

$$z < (n-1)^{-\alpha}.$$

Для того, чтобы сходимость эта являлась абсолютной, необходимо и достаточно выполнение более сильного неравенства

$$z^{-p} - n + 1 > 1,$$

которое даёт

$$z < n^{-\alpha}.$$

Итак, имеем

$$r_\alpha^\lambda(0) = (n-1)^{-\alpha},$$

$$r_\alpha^{|\lambda|}(0) = n^{-\alpha},$$

где $\lambda = n\beta$, так что действительно соблюдается равенство

$$r_\alpha^{|\lambda|}(0) = r_\alpha^{\lambda+\beta}(0).$$

3. Звёзды Бореля и Санниа. — Так как из $\lambda' \leqslant \lambda$ следует

$$\sigma_\alpha^\lambda \subset \sigma_\alpha^{\lambda'},$$

то существуют предельные звёзды при $\lambda \to \infty$ и $\lambda \to -\infty$. Первую из них, которая представляет собой звезду B_α-суммируемости ∞-го порядка, будем называть звездой Бореля и обозначать через σ_α^∞.

Вторую предельную звезду — звезду B_α-суммируемости в общем смысле — условимся называть звездой Санниа и обозначать через σ_α. Звезда Бореля содержится в любой звезде σ_α^λ, в то время, как звезда Санниа содержит любую звезду σ_α^λ, т. е.

$$\sigma_\alpha^\infty \subset \sigma_\alpha^\lambda \subset \sigma_\alpha.$$

Относительно звёзд σ_α^∞ и σ_α докажем следующую теорему:

Теорема 7. Звёзды простой и абсолютной суммируемостей Бореля, так же как звёзды простой и абсолютной суммируемостей Санниа, совпадают между собою.

Другими словами, в каждой внутренней точке звезды σ_α^∞ соблюдается, кроме простой суммируемости любого порядка, также абсолютная суммируемость любого порядка, в то время как в любой точке звезды σ_α соблюдается не только простая, но и абсолютная суммируемость некоторого определённого порядка.

В самом деле, ограничиваясь случаем звезды Бореля, имеем в силу теоремы 6

$$r_\alpha^{|\infty|} = \lim_{\lambda \to \infty} r_\alpha^{|\lambda|} \geqslant \lim_{\lambda \to \infty} r_\alpha^{\lambda+\beta} = r_\alpha^\infty,$$

т. е.

$$r_\alpha^{|\infty|} \geqslant r_\alpha^\infty.$$

Но, с другой стороны,

$$r_\alpha^{|\infty|} \leqslant r_\alpha^\infty,$$

так что должно быть

$$r_\alpha^{|\infty|} = r_\alpha^\infty.$$

Таким образом, установлена известная аналогия между понятиями круга сходимости сходящегося степенного ряда и звёзд σ_α^∞ и σ_α суммируемого степенного ряда. Эта аналогия еще дополняется результатами следующего параграфа.

Из теоремы 5 вытекает, что $S_\lambda(\varphi)$, рассматриваемая, как функция переменного λ, монотонно возрастает, начиная с любого λ, для которого $S_\lambda(\varphi) > 0$.

Следовательно, если при данном φ найдётся такое λ, что функция $S_\lambda(\varphi)$ является положительной, то радиус звезды σ_α^∞, относящийся к рассматриваемому φ, определяется формулой

$$r_\alpha^\infty(\varphi) = \lim_{\lambda \to \infty} [S_\lambda(\varphi)]^{-\alpha}.$$

Если же $S_\lambda(\varphi)$ неположительна при всех λ, то имеем

$$r_\alpha^\infty(\varphi) = \infty.$$

Если при данном φ функция $S_\lambda(\varphi)$ остаётся положительной для любого λ, то радиус звезды σ_α, относящийся к данному φ, определяется формулой

$$r_\alpha(\varphi) = \lim_{\lambda \to -\infty} [S_\lambda(\varphi)]^{-\alpha}.$$

Если, наконец, $S_\lambda(\varphi)$ неположительна при некотором λ, то имеем

$$r_\alpha(\varphi) = \infty.$$

4. Суммируемость сходящегося степенного ряда. — а) В случае сходящегося степенного ряда, т. е. в случае ряда, имеющего конечный, отличный от нуля радиус сходимости, звезда σ_α^∞ определяется следующим образом:[1]

Рассмотрим произвольную точку $z = re^{i\varphi}$ и фигуру D_z, ей соответствующую, границей которой служит кривая C_z, определённая уравнением

$$\varrho^\beta = r^\beta \cos\beta(\theta - \varphi), \quad \begin{array}{ll} |\theta - \varphi| \leqslant \alpha\frac{\pi}{2} & \text{при } \alpha \leqslant 2, \\ |\theta - \varphi| \leqslant \pi & \text{при } \alpha \geqslant 2, \end{array}$$

[1] G. Kangro, loc. cit., 68—70 (в этой статье звезда σ_α^∞ обозначена через τ_α).

где ϱ, Θ — текущие полярные координаты точки линии C_z. Звезда σ_{α}^{∞} состоит из множества всех точек z, для которых соответствующая фигура D_z целиком содержится в звезде голоморфности функции $u(z)$, представляющей сумму рассматриваемого сходящегося степенного ряда.

Звезда σ_{α}^{∞} характеризуется абсолютной суммируемостью любого порядка. Покажем, что в случае сходящегося степенного ряда вне звезды σ_{α}^{∞} нет суммируемости никакого порядка, вследствие чего звезда σ_{α}^{∞} совпадает с звездой σ_{α}.

Действительно, если бы в какой-нибудь внешней точке z_0 звезды σ_{α}^{∞} существовала суммируемость некоторого порядка, которую можем считать в силу теоремы 6 абсолютной, то из одной теоремы, доказанной мною в моей статье об абсолютной суммируемости расходящихся степенных рядов, [1] следовала бы голоморфность функции $u(z)$ во внутренности D_{z_0}, что противоречит только что данному определению звезды σ_{α}^{∞}.

Тем самым доказано для сходящегося степенного ряда совпадение и всех промежуточных звёзд конечных порядков, и простой и абсолютной суммируемостей.

б) Формулу (17) можно для сходящегося степенного ряда привести к другому виду, позволяющему обнаружить роль функции $S_{\lambda}(\varphi)$. С этой целью воспользуемся понятием индикатрисы возрастания целой функции, введённым Прагмэном и Линделёфом [2].

По определению, индикатрисой возрастания целой функции

$$G(t) = \Sigma a_n t^n$$

называется функция

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{y \to \infty}}\, y^{-\varrho} \ln \left| G(ye^{i\varphi}) \right|,$$

где ϱ означает порядок рассматриваемой целой функции, который выражается через коэфициенты a_n посредством формулы

$$-\frac{1}{\varrho} = \overline{\lim}\, \frac{\ln|a_n|}{n \ln n}.$$

---

[1] G. Kangro, loc. cit., 68 (нетрудно убедиться в справедливости этой теоремы для B_{α}-суммируемости любого порядка λ).

[2] Phragmén et Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse. Acta mathematica, 31 (1908), 392.

В случае сходящегося степенного ряда ассоциированная функция нулевого порядка

$$U(t) = \sum \frac{u_n}{\underline{|n\alpha}} t^n$$

является целой функцией, порядок которой будет

$$-\frac{1}{\varrho} = \lim\left(\frac{\ln|u_n|}{n\ln n} - \frac{\ln\underline{|n\alpha}}{n\ln n}\right) =$$

$$= \overline{\lim}\,\frac{\ln|u_n|}{n\ln n} - \lim\frac{\ln\left[(n\alpha)^{n\alpha}e^{-n\alpha}\sqrt{2\pi n\alpha}\right]}{n\ln n} = -\alpha,$$

откуда $\varrho = \beta$.

В силу совпадения всех звёзд σ_α^λ мы вправе считать в формуле (17) в частности $\lambda = \beta$ и получаем таким образом

$$r_\alpha(\varphi) = [S_\beta(\varphi)]^{-\alpha},$$

где

$$S_\beta(\varphi) = \overline{\lim_{y\to\infty}}\; y^{-1}\ln\left|U(y^\alpha e^{i\varphi})\right| = \overline{\lim_{y\to\infty}}\; y^{-\varrho}\ln\left|U(ye^{i\varphi})\right| = h(\varphi).$$

Итак, в тех направлениях, где индикатриса положительна, имеем

$$r_\alpha(\varphi) = [h(\varphi)]^{-\alpha},$$

в то время, как в остальных направлениях

$$r_\alpha(\varphi) = \infty.$$

§ 4. Об интегрировании и диференцировании B_α^λ-суммируемых рядов.

После установления известной аналогии между понятиями круга сходимости и звёзд суммируемостей σ_α^∞ и σ_α, естественно возникает вопрос о законности почленного интегрирования и диференцирования B_α^λ-суммируемых степенных рядов. Что почленное интегрирование и диференцирование допустимы в звезде σ_α^∞, показано мною в моей многократно цитированной статье об абсолютной суммируемости расходящихся степенных рядов. Расширение этого результата для более широкой звезды σ_α, содержащей σ_α^∞, и является целью исследований настоящего параграфа.

1. Равномерность B_α^λ-суммируемости. — Докажем предварительно одну нужную в дальнейшем теорему относительно равномерной сходимости интеграла

$$\int_\delta^\infty e^{-x} z^\lambda U_\lambda(zx^\alpha)\,dx, \tag{18}$$

где $z^\lambda U_\lambda(zt)$ — ассоциированная функция ряда (11) порядка λ, определённая формулой (12).

Миттаг-Леффлером[1] доказано, что из сходимости интеграла Ле Руа

$$\int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha)\,dx$$

в точке z_0 следует его равномерная сходимость на сегменте $[\theta z_0, z_0]$, где θ некоторое определённое число в интервале (0,1).

Только Ландау[2], который продолжал исследования Миттаг-Леффлера, удалось обнаружить равномерную сходимость интеграла Ле Руа на всём сегменте $[0, z_0]$.

Однако, теорема Ландау непосредственно не применима к интегралу (18), так как функция $U_\lambda(zx^\alpha)$ при $\lambda > 0$ и функция z^λ при $\lambda < 0$ становятся бесконечными в точке $z = 0$. Поэтому оказывается необходимым подробнее изучить вопрос о равномерной сходимости интеграла (18) на сегменте $[0, z_0]$.

В силу (12) можем написать

$$z^\lambda U_\lambda(zx^\alpha) = x^{-\nu} F(zx^\alpha),$$

где $\nu = \lambda\alpha$ и

$$F(t) = \sum \frac{u_n}{\underline{|(n-\lambda)\alpha}} t^n.$$

Сформулируем теперь следующую теорему, являющуюся непосредственным обобщением теоремы Ландау.

---

[1] G. Mittag-Leffler, loc. cit., 107—108.

[2] E. Landau, Auszug aus einem Briefe des Herrn Landau an den Herausgeber. Acta mathematica, 42 (1920), 95—98.

Теорема 8. Из сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-\nu} F(zx^\alpha)\,dx$$

в точке z_0 следует его равномерная сходимость на сегменте $[0, z_0]$.

Другими словами, ряд (11), B_α^λ-суммируемый в точке z_0, равномерно B_α^λ-суммируем на сегменте $[0, z_0]$.

Пусть z произвольная точка сегмента $[0, z_0]$. Положив $z = \Theta^\alpha z_0$, $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, найдём после отделения вещественной части от мнимой

$$F(zx^\alpha) = F[z_0(\Theta x)^\alpha] = \varphi(\Theta x) + i\psi(\Theta x).$$

Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно установить равномерную сходимость интеграла

$$\int_\delta^\infty e^{-x} x^{-\nu} \varphi(\Theta x)\,dx \tag{19}$$

при $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, исходя из сходимости интеграла

$$\int_\delta^\infty e^{-x} x^{-\nu} \varphi(x)\,dx. \tag{20}$$

Рассмотрим с этой целью интеграл

$$\int_l^{l'} e^{-x} x^{-\nu} \varphi(\Theta x)\,dx = \int_l^m e^{-x} x^{-\nu} \varphi(\Theta x)\,dx + \int_m^{l'} e^{-x} x^{-\nu} \varphi(\Theta x)\,dx,$$

где m означает наибольшее из двух чисел Θ^{-1} и l[1].

В случае $l \geqslant \Theta^{-1}$ имеем $m = l$ и следовательно

$$I_1 = \int_l^m e^{-x} x^{-\nu} \varphi(\Theta x)\,dx = 0.$$

[1] В силу сходимости интеграла (19) при $\Theta = 0$ можем в дальнейшем считать $\Theta \neq 0$.

Пусть, далее, $\varepsilon > 0$ произвольное наперёд заданное число и M верхняя граница абсолютного значения функции $\varphi(x)$ на сегменте $[0, 1]$, тогда находим в случае $l < \Theta^{-1}$

$$|I_1| \leqslant M \int_l^{\theta^{-1}} e^{-x} x^{-\nu}\, dx < M \int_l^{\infty} e^{-x} x^{-\nu}\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно большом l.

С другой стороны, применение второй теоремы о среднем значении даёт

$$I_2 = \int_m^{l'} e^{-x} x^{-\nu} \varphi(\theta x)\, dx = \int_m^{l'} e^{-(1-\theta)x} e^{-\theta x} x^{-\nu} \varphi(\theta x)\, dx =$$

$$= e^{-(1-\theta)m} \int_m^{\xi} e^{-\theta x} x^{-\nu} \varphi(\theta x)\, dx = e^{-(1-\theta)m} \theta^{\nu-1} \int_{\theta m}^{\Theta\xi} e^{-x} x^{-\nu} \varphi(x)\, dx,$$

где ξ некоторое промежуточное значение между m и l'.

Если $\frac{1}{2} \leqslant \theta \leqslant 1$, то в силу сходимости интеграла (20) нетрудно установить справедливость неравенства

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для достаточно большого l.

Если же $\theta < \frac{1}{2}$, то, определяя положительное число A так, чтобы неравенство

$$\left| \int_a^b e^{-x} x^{-\nu} \varphi(x)\, dx \right| < A$$

выполнялось при любых $a > \delta$, $b > a$, получим

$$|I_2| < A e^{-(1-\theta)m} \theta^{\nu-1},$$

или, имея в виду неравенства $\theta < \frac{1}{2}$, $\theta^{-1} \leqslant m$

$$|I_2| < A e^{-\frac{m}{2}} m^{|\nu-1|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

при достаточно большом l.

Таким образом, имеем окончательно

$$\left|\int_{l}^{l'} e^{-x} x^{-\nu} \varphi(\theta x) dx\right| \leqslant |I_1| + |I_2| < \varepsilon$$

для $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ и достаточно большого l, чем теорема и доказана.

2. Интегрирование. — **Теорема 9.** Если ряд (11) B_α^λ-суммируем в точке z_0, то ряд

$$\frac{u_0}{1\cdot 2\ldots k} z^k + \frac{u_1}{2\cdot 3\ldots (1+k)} z^{k+1} + \ldots + \frac{u_n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} z^{k+n} + \ldots,$$

получившийся из ряда (11) путём k-кратного почленного интегрирования, суммируем порядка $\lambda + (1+\beta) k$ $\left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right)$ в точке z_0, причём соответствующие обобщённые суммы $u(z)$ и $v(z)$ рассматриваемых рядов связаны соотношением

$$v(z) = I^k u(z), \quad z \in [0, z_0].$$

При доказательстве теоремы достаточно ограничиться случаем $k = 1$, рассматривая ряд

$$\frac{u_0}{1} z + \frac{u_1}{2} z^2 + \ldots + \frac{u_n}{n+1} z^{n+1} + \ldots = \sum \frac{u_n}{n+1} z^{n+1}. \tag{21}$$

Его ассоциированный ряд порядка $\lambda + 1$ имеет вид

$$\sum \frac{u_n z^{n+1}}{(n+1)\,\underline{|(n-\lambda)\alpha}} t^{n-\lambda} = z^{\lambda+1} V_{\lambda+1}(zt),$$

где

$$V_{\lambda+1}(t) = \sum \frac{u_n}{(n+1)\,\underline{|(n-\lambda)\alpha}} t^{n-\lambda}.$$

Путём диференцирования находим в силу (12)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{\lambda+1} V_{\lambda+1}(zt)\right] = \sum \frac{u_n z^n}{\underline{|(n-\lambda)\alpha}} t^{n-\lambda} = z^\lambda U_\lambda(zt),$$

так что интеграл

$$\int_\delta^\infty e^{-x} \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{\lambda+1} V_{\lambda+1}(zx^\alpha)\right] dx,$$

благодаря B_α^λ-суммируемости ряда (11), сходится в точке z_0, причём сходимость эта, на основании теоремы 8, является равномерной на сегменте $[0, z_0]$. Итак, интеграл

$$\int_\delta^\infty e^{-x} z^{\lambda+1} V_{\lambda+1}(zx^\alpha)dx$$

также оказывается сходящимся в точке z_0.

На основе теоремы 1 найдём

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{\lambda+1} V_{\lambda+1}(zx^\alpha)\right] = (\lambda+1)z^\lambda V_{\lambda+1}(zx^\alpha) + z^{\lambda+1}\frac{\beta x}{z}\frac{\partial}{\partial x} V_{\lambda+1}(zx^\alpha) =$$

$$= (\lambda+1)z^\lambda V_{\lambda+1}(zx^\alpha) + \frac{\beta x}{z} D_x^{\nu+\alpha+1} V(zx^\alpha),$$

где $V(t)$ означает ассоциированную функцию нулевого порядка, относящуюся к ряду (21). Следовательно, интеграл

$$\int_\delta^\infty e^{-x} x D_x^{\nu+\alpha+1} V(zx^\alpha)\,dx$$

и тем более интеграл

$$\int_\delta^\infty e^{-x} D_x^{\nu+\alpha+1} V(zx^\alpha)\,dx$$

сходятся в точке z_0, чем, в силу теоремы 1, установлена суммируемость порядка $\lambda+1+\beta$ в точке z_0.

Перейдя к доказательству второй части теоремы, имеем для суммы $v(z)$ ряда (21), по определению,

$$v(z) = \int_0^\infty e^{-x} z^{\lambda'} V_{\lambda'}(zx^\alpha),$$

где λ' любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\lambda' \leqslant \lambda+1+\beta, \quad \lambda' < \beta.$$

Определяем λ' так, чтобы вместо первого из этих неравенств выполнялось более сильное неравенство

$$\lambda' \leqslant \lambda+1,$$

тогда ряд (11) является суммируемым порядка $\lambda'' = \lambda' - 1 \leqslant \lambda$.

Мы находим

$$z^{\lambda'} V_{\lambda'}(zt) = \sum \frac{u_n z^{n+1}}{(n+1)\,|\underline{(n+1-\lambda)\alpha}}\, t^{n+1-\lambda'} =$$

$$= \int_0^z \sum \frac{u_n z^n}{\underline{|(n-\lambda'')\alpha}}\, t^{n-\lambda''}\, dz = \int_0^z z^{\lambda''} U_{\lambda''}(zt)\, dz\,,$$

вследствие чего

$$v(z) = \int_0^\infty e^{-x} dx \int_0^z z^{\lambda''} U_{\lambda''}(zx^\alpha)\, dz = \int_0^z u(z)\, dz\,,$$

так как изменение порядка интегрирований допустимо в силу равномерной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x} z^{\lambda''} U_{\lambda''}(zx^\alpha)\, dx$$

на сегменте $[0, z_0]$.

3. Диференцирование. — **Теорема 10.** Если ряд (11) B_α^λ-суммируем в точке z_0, то ряд

$$1\cdot 2 \ldots k u_k + 2\cdot 3 \ldots (k+1)\, u_{k+1} z + \ldots +$$
$$+ (1+n)(2+n) \ldots (k+n)\, u_{k+n} z^n + \ldots,$$

получившийся из ряда (11) путём k-кратного почленного диференцирования, суммируем порядка $\lambda-(1+\beta)k$ $\left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right)$ на полусегменте $[0, z_0)$, причём соответствующие обобщённые суммы $u(z)$ и $w(z)$ рассматриваемых рядов связаны соотношением

$$w(z) = \frac{d^k}{dz^k} u(z)\,,\ \ z \in [0, z_0)\,.$$

При доказательстве можно опять-таки ограничиться случаем $k=1$ и рассматривать ряд

$$1u_1 + 2u_2 z + \ldots + (n+1)\, u_{n+1} z^n + \ldots = \Sigma (n+1)\, u_{n+1} z^n. \qquad (22)$$

Его ассоциированный ряд порядка $\lambda - 1 - \beta$ гласит

$$\sum \frac{(n+1) u_{n+1} z^n}{\underline{|(n-\lambda+1)\alpha+1}}\, t^{n-\lambda+1+\beta} = z^{\lambda-1-\beta}\, W_{\lambda-1-\beta}(zt),$$

где

$$W_{\lambda-1-\beta}(t)=\sum\frac{(n+1)u_{n+1}}{\underline{|(n-\lambda+1)\alpha+1}}\,t^{n-\lambda+1+\beta}.$$

С другой стороны, диференцируя по z ассоциированный ряд порядка $\lambda-\beta$, относящийся к ряду (11)

$$\sum\frac{u_n z^n}{\underline{|(n-\lambda)\alpha+1}}\,t^{n-\lambda+\beta}=z^{\lambda-\beta}U_{\lambda-\beta}(zt),$$

найдём

$$z^{\lambda-1-\beta}W_{\lambda-1-\beta}(zt)=\frac{\partial}{\partial z}\left[z^{\lambda-\beta}U_{\lambda-\beta}(zt)\right],$$

откуда, в силу теоремы 1,

$$z^{\lambda-1-\beta}W_{\lambda-1-\beta}(zx^{\alpha})=(\lambda-\beta)z^{\lambda-1-\beta}U_{\lambda-\beta}(zx^{\alpha})+z^{\lambda-\beta}\frac{\beta x}{z}\frac{\partial}{\partial x}U_{\lambda-\beta}(zx^{\alpha})=$$

$$=(\lambda-\beta)z^{\lambda-1-\beta}U_{\lambda-\beta}(zx^{\alpha})+\beta z^{\lambda-1}xU_{\lambda}(zx^{\alpha}).$$

Таким образом имеем

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}e^{-x}W_{\lambda-1-\beta}(zx^{\alpha})\,dx=(\lambda-\beta)\int\limits_{\delta}^{\infty}e^{-x}U_{\lambda-\beta}(zx^{\alpha})\,dx+$$

$$+\beta z^{\beta}\int\limits_{\delta}^{\infty}e^{-x}xU_{\lambda}(zx^{\alpha})\,dx,$$

причём первый интеграл справа сходится в точке z_0, в то время как второй интеграл, вообще говоря, расходится.

Положив $z=\theta^{\alpha}z_0$, получим после отделения вещественной части от мнимой

$$U_{\lambda}(zx^{\alpha})=U_{\lambda}[z_0(\theta x)^{\alpha}]=\varphi(\theta x)+i\psi(\theta x).$$

Для доказательства теоремы достаточно установить сходимость интеграла

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}e^{-x}x\varphi(\theta x)\,dx \tag{23}$$

при $0\leqslant\theta<1$ в предположении, что интеграл

$$\int\limits_{\delta}^{\infty}e^{-x}\varphi(x)\,dx \tag{24}$$

сходится.

Рассмотрим с этой целью интеграл

$$\int_{l}^{l'} e^{-x} x\varphi(\theta x)\, dx = \int_{l}^{l'} e^{-(1-\theta)x} e^{-\theta x} x\varphi(\theta x)\, dx =$$

$$= l e^{-(1-\theta)l} \int_{l}^{\xi} e^{-\theta x} \varphi(\theta x)\, dx = \theta^{-1} l e^{-(1-\theta)l} \int_{\theta l}^{\theta\xi} e^{-x} \varphi(x) dx\,^{1},$$

где $l > (1-\theta)^{-1}$ и ξ — некоторое промежуточное значение между l и $l' > l$.

Пусть $\varepsilon > 0$ наперёд заданное произвольное число, тогда, имея в виду сходимость интеграла (24), должно найтись такое число $L > 0$, чтобы из неравенства $l > L$ вытекало

$$\left| \int_{l}^{l'} e^{-x} x\varphi(\theta x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Тем самым первая половина нашей теоремы доказана.

Сумма $w(z)$ ряда (22) определяется интегралом

$$w(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} z^{\lambda'} W_{\lambda'}(zx^{\alpha})\, dx,$$

где λ' любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\lambda' \leqslant \lambda - 1 - \beta, \quad \lambda' < \beta.$$

Подберём λ' так, чтобы вместо второго из этих неравенств выполнялось более сильное неравенство

$$\lambda' < \beta - 1,$$

тогда $\lambda'' = \lambda' + 1 < \beta$, и мы имеем

$$z^{\lambda'} W_{\lambda'}(zt) = \sum \frac{(n+1)\, u_{n+1} z^{n}}{\underline{|(n-\lambda')\alpha}} t^{n-\lambda'} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \sum \frac{u_n z^n}{\underline{|(n-\lambda'')\alpha}} t^{n-\lambda''} = \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{\lambda''} U_{\lambda''}(zt)\right],$$

вследствие чего

$$w(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-x} \frac{\partial}{\partial z}\left[z^{\lambda''} U_{\lambda''}(zx^{\alpha})\right] dx = \frac{d}{dz} \int_{0}^{\infty} e^{-x} z^{\lambda''} U_{\lambda''}(zx^{\alpha}) dx,$$

---

[1] В силу очевидной сходимости интеграла (23) при $\theta = 0$ можем считать $\theta \neq 0$.

так как изменение порядка диференцирования и интегрирования допустимо на основе равномерной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x} z^{\lambda'} W_{\lambda'}(zx^\alpha)\,dx$$

на сегменте $[0, \theta z_0]$, где ϑ некоторое определённое число в интервале $(0,1)$.

4. Окончательные замечания. — а) Говоря о возможности улучшения результатов теорем 9 и 10, мы встречаемся с вопросом о возможности установить суммируемость порядка $\lambda+1+\beta+a$ для ряда (21) или же порядка $\lambda-1-\beta+a$ для ряда (22), где $a>0$, при условиях вышеупомянутых теорем.

Если бы такое повышение порядка суммируемости оказалось возможным, то путём диференцирования ряда (21) или интегрирования ряда (22) мы, на основании теорем 10 или 9, пришли бы к заключению, что каждый степенной ряд, суммируемый порядка λ в точке z_0, обязательно должен быть суммируемым порядка $\lambda+a$ на полусегменте $[0, z_0)$. Отсюда, в свою очередь, следовала бы B_α^∞-суммируемость ряда (11) во всех точках звезды σ_α^λ, что, вообще говоря, не может иметь места. Следовательно, результаты теорем 9 и 10, в этом смысле, не поддаются улучшению.

б) Из теоремы 10 вытекает, что функция $u(z)$, определённая обобщённой суммой ряда (11), неограниченно диференцируема во внутренних точках звезды σ_α, включая точку $z=0$. Диференцирование, которое допустимо, вообще говоря, только вдоль радиусов звезды σ_α, осуществимо непосредственно над рядом (11).

Для производной n-го порядка в точке $z=0$ найдём

$$u^{(n)}(0)=\int_0^\infty e^{-x} x^{n\alpha} U^{(n)}(0)\,dx = \underline{|n}\, u_n,$$

откуда

$$u_n = \frac{u^{(n)}(0)}{\underline{|n}}.$$

Таким образом, в звезде σ_α функция $u(z)$ разлагается в обобщённый ряд Маклорена

$$u(z) = u(0) + \frac{u'(0)}{\underline{|1}} z + \ldots + \frac{u^{(n)}(0)}{\underline{|n}} z^n + \ldots.$$

Очевидно, что функция $u(z)$ может тождественно равняться нулю только при условии, что все коэфициенты u_n равны нулю. Поэтому, если данное алгебраическое диференциальное или интегральное уравнение с коэфициентами, разлагаемыми на степенные ряды, суммируемые в некоторой звезде D_α, формально удовлетворяется некоторым суммируемым в звезде σ_α степенным рядом, то обобщённая сумма $u(z)$ этого ряда представляет собой эффективное решение рассматриваемого уравнения в общей части звёзд D_α и σ_α. Иначе говоря, способ B_α-суммирования в общем смысле осуществляет аналитическую теорию расходящихся рядов в смысле Бореля[1].

Тарту, май 1945 г.

---

[1] É. Bore Leçons sur les séries divergentes. Paris, 1928.

La sommation B_α d'ordre quelconque et son application aux séries entières.

Résumé.

Considérons une série numérique à termes réels ou complexes quelconques

$$u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots=\Sigma u_n \tag{I}$$

et formons à l'aide de ses termes u_n la fonction

$$U_\lambda(t)=\sum \frac{u_n}{\underline{|(n-\lambda)\alpha}}\, t^{n-\lambda}, \quad (\alpha>0)$$

appelée la fonction associée à la série (I) d'ordre λ. Nous supposerons dans la suite que $U_\lambda(t)$ est holomorphe sur la partie positive de l'axe réel.

La série (I) est dite s o m m a b l e d ' o r d r e λ p a r l a m é t h o d e B_α ou, d'une façon plus simple, s o m m a b l e B_α^λ lorsque l'intégrale

$$\int_\delta^\infty e^{-x}U_\lambda(x^\alpha)\,dx \quad (\delta>0)$$

aura un sens. Si cette intégrale converge absolument, la sommabilité est dite a b s o l u e.

Soit, de plus, λ' un nombre réel satisfaisant aux inégalités

$$\lambda'\leqslant\lambda, \quad \lambda'<\beta. \quad \left(\beta=\frac{1}{\alpha}\right)$$

Nous entendrons par la s o m m e d ' u n e s é r i e (I) d ' a p r è s l a m é t h o d e B_α^λ l'intégrale

$$u=\int_0^\infty e^{-x}U_{\lambda'}(x^\alpha)\,dx$$

et nous l'écrivons, pour abréger,

$$u=B_\alpha^\lambda u_n$$

ou bien

$$u = B_\alpha^{|\lambda|} u_n$$

lorsque la sommabilité de (I) est absolue.

La méthode de sommation B_α^λ possède les propriétés caractéristiques suivantes:

1⁰ Une série sommable d'ordre λ est aussi sommable d'ordre quelconque $\lambda' \leqslant \lambda$.

2⁰ Inversement, pour qu' une série sommable d'ordre λ soit sommable d'ordre $\lambda + \beta$ $\left(\beta = \frac{1}{\alpha}\right)$, il faut et il suffit que nous ayons

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} U_\lambda(x^\alpha) = 0 .$$

3⁰ Les séries obtenues en remplaçant dans une série sommable d'ordre λ un terme quelconque par la somme de p termes nouveaux, ou p termes quelconques par leur somme, sont, respectivement, sommables d'ordre $\lambda + p - 1$ et d'ordre $\lambda - p + 1$.

4⁰ La méthode B_α^λ est régulière dans le sens de la convergence ordinaire.

5⁰ Des égalités $B_\alpha^\lambda u_n = u$ et $B_\alpha^\lambda v_n = v$ se déduit l'égalité

$$B_\alpha^\lambda (a u_n + b v_n) = au + bv .$$

6⁰ Lorsque, en outre, l'une au moins des séries Σu_n ou Σv_n est absolument sommable et si l'on pose

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

on aura

$$B_\alpha^{2\lambda - \beta} w_n = uv \text{ pour } \lambda < \beta$$

et

$$B_\alpha^\lambda w_n = uv \text{ pour } \lambda \geqslant \beta .$$

Après l'étude des propriétés arithmétiques de la méthode B_α^λ nous passerons au cas d'une série entière

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_n z^n + \ldots = \Sigma u_n z^n \tag{II}$$

à coefficients quelconques.

L'ensemble de points z, dans lesquels la série (II) est sommable B_α^λ, constituera une région σ_α^λ étoilée par rapport à l'origine, que nous appellerons l'étoile de sommabilité B_α^λ.

L'ensemble des étoiles σ_α^λ correspondantes à tous les ordres λ étant un ensemble ordonné, il existe les deux étoiles-limites $\sigma_\alpha^\infty = \lim\limits_{\lambda \to \infty} \sigma_\alpha^\lambda$ et $\sigma_\alpha = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \sigma_\alpha^\lambda$ vérifiant la condition

$$\sigma_\alpha^\infty \subset \sigma_\alpha^\lambda \subset \sigma_\alpha .$$

La série (II), qui est absolument sommable d'un certain ordre déterminé en chaque point intérieur de σ_α, ne l'est pour aucun point extérieur de σ_α. A l'intérieur de σ_α^∞ on aura, en outre, la sommabilité absolue d'ordre infini.

Le rayon $r_\alpha^\lambda(\varphi)$ de σ_α^λ, situé sur la demi-droite $\arg z = \varphi$ issue de l'origine, est étroitement lié à l'allure de la fonction $U_{\lambda-\beta}(t)$ sur cette demi-droite. En introduisant la fonction de φ

$$S_\lambda(\varphi) = \overline{\lim_{y \to \infty}}\; y^{-1} \ln \left| U_{\lambda-\beta}(y^\alpha e^{i\varphi}) \right|$$

on peut énoncer le théorème suivant:

Si $S_\lambda(\varphi) > 0$ pour la valeur donnée de φ, le rayon de sommabilité correspondant est déterminé par la formule

$$r_\alpha^\lambda(\varphi) = [S_\lambda(\varphi)]^{-\alpha}.$$

Si, au contraire, $S_\lambda(\varphi) \leqslant 0$, on aura toujours

$$r_\alpha^\lambda(\varphi) = \infty .$$

Par rapport aux rayons des étoiles-limites σ_α^∞ et σ_α on pourrait énoncer des propositions analogues.

En particulier, si la série (II) possède un rayon de convergence fini et différent de zéro, les étoiles σ_α^∞ et σ_α ainsi que toutes les étoiles intermédiaires σ_α^λ coïncideront et la fonction $S_\lambda(\varphi)$ se changera en indicatrice de croissance de la fonction entière associée d'ordre nul.

$$U_0(t) = \sum \frac{u_n}{\underline{|na}} t_n .$$

Quant à la possibilité d'intégrer ou différentier terme à terme une série entière sommable nous aurons la proposition suivante:

Les séries obtenues en intégrant ou en différentiant terme à terme une série entière sommable d'ordre λ en un point z_0 (et, par suite, sur tout le segment $[0,z_0]$) sont elles-mêmes sommables, respectivement, d'ordre $\lambda+\beta+1$ et d'ordre $\lambda-\beta-1$ sur le segment $[0, z_0]$ sauf, peut-être, le point z_0 lui-même dans le cas de différentiation.

En concluant nous donnons une généralisation du théorème connu de M. Borel sur l'application des séries sommables B_1^{∞} aux équations différentielles ou intégrales algébriques. Cette généralisation conduit à l'énoncé suivant:

Si une série entière sommable dans σ_α vérifie formellement une équation différentielle ou intégrale algébrique à coefficients développables en séries entières sommables dans une même étoile D_α, sa somme $u(z)$ représentera une solution effective de l'équation considérée dans la partie commune de σ_α et D_α.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

1. trükk.

Vastutav toimetaja H. Jaakson. Tehniline toimetaja H. Kohu. Korrektorid B. Pravdin ja L. Vaganay. Ladumisele antud 16. IV 46. Trükkimisele antud 4. VII 46. Paberi kaust 67×95. $^1/_{16}$. Trükipoognaid $2^3/_4$. Autoripoognaid 1,8. Arvestuspoognaid 1,84. MB. 01637. Laotihedus trpg. 32 000. Tiraaž 2 200. Trükikoja tellimus nr. 654. Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4. Hind rbl. 3.—

Töö esitatud toimetusele 22. novembril 1945.