TARTU ÜLIKOOL
Matemaatika-informaatikateaduskond
Rakendusmatemaatika instituut
Teoreetilise mehaanika õppetool

Julia Polikarpus

IDEAALSELT KAHEKIHILISE ÜMARPLAADI OPTIMISEERIMINE

Magistritöö

Juhendaja Jaan Lellep, prof, dr (füüs-mat)

Tartu 2005

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva töö eesmärgiks on uurida elastset-plastset ümarplaati, kui sellele mõjub telgsümmeetriline ristkoormus. Ümarplaat on ringsilinder, mille kõrgus on teiste mõõdetega võrreldes väga väike.

Ümar- ja rõngasplaadid on konstruktsioonielemendid, mis omavad tähtsust nii teoreetilises uurimistöös kui ka praktilistes rakendustes paljudes valdkondades. Ümarplaadid on silindriliste mahutite otsad, mitmesuguste avauste kaaned jne. Eriti aktuaalne on telgsümmeetriliste plaatide uurimine seoses allveelaevade veekindlate vaheseinte tugevuse arvutamisega.

Elastsete ümarplaatide optimiseerimisele ja pingeseisundi analüüsile on kirjanduses palju tähelepanu pööratud. Üsna palju töid on ilmunud ka puhtplastsete (ideaalselt jäik-plastsete) plaatide ja koorikute optimiseerimise kohta, ent elastsete-plastsete plaatide optimiseerimisele on oluliselt vähem tähelepanu pööratud. Antud töö kolmandas peatükis uuritakse optimiseerimisülesannet elastse-plastse materjali korral.

Töö esimesed kaks peatükki on referatiivsed, milles kasutatakse raamatutes [4, 12] ja [13] antud tulemusi.

Esimeses peatükis tuletatakse elastse ümarplaadi jaoks tasakaaluvõrrandid geomeetriliselt lineaarse ja mittelineaarse mudeli korral ning leitakse deformatsiooni kiiruse komponendid. Samuti tuletatakse elastse ümarplaadi läbipainde diferentsiaalvõrrandid ning antakse nende üldlahend.

Teises peatükis leitakse ideaalselt kahekihilise elastse-plastse plaadi plastse osa rajapunkti sõltuvus plaadile mõjuvast koormusest.

Kolmandas peatükis uuritakse astmega ideaalselt kahekihilist elastset-plastset plaati. Kasutades optimaalse juhtimise teooria meetodeid [1, 2, 5, 14] tuletatakse optimaalsuse tarvilikud tingimused. Need kujutavad endast diferentsiaalvõrrandite ja algebraliste võrrandite süsteemi. Selles peatükis esitatakse ka diferentsiaalvõrrandite üldlahendid. Määratakse konstandid plaadi painde diferentsiaalvõrrandite üldlahendis ning lahendatakse ülesanne plaadi astme optimaalse asendi jaoks.

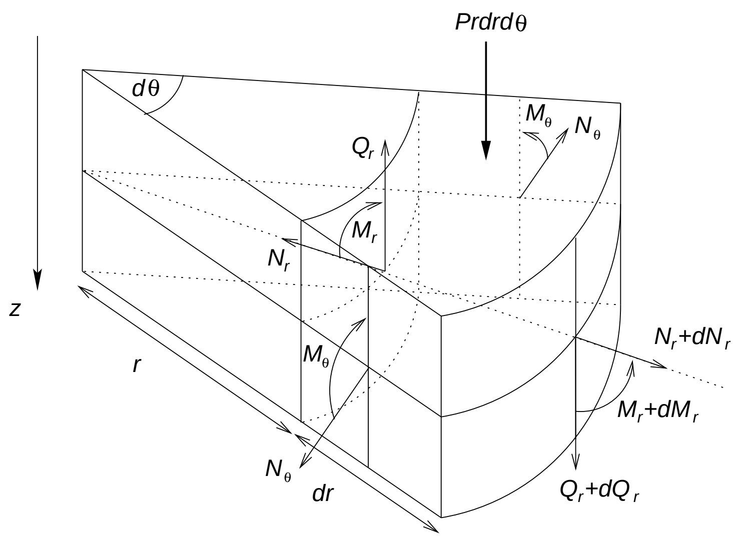
I Elastne plaat

1.1 Tasakaaluvõrrandid

Vaatleme õhukest ühtlase paksusega plaati, mille kontuur koosneb ühest või kahest kontsentrilisest ringjoonest. Plaadile mõjugu telgsümmeetriline ristkoormus P, samuti olgu plaadi kinnitus mööda kontuuri telgsümmeetriline. Sel juhul on ka kõverpind, mille moodustab plaadi keskpind pärast koormamist, telgsümmeetriline.

1.1.1 Geomeetriliselt lineaarne mudel

Vaatleme elementi, mille asend plaadis on määratud kahe parameetriga r ja θ, kusjuures r on plaadi mingi punkti kaugus tsentraalteljest ning θ on polaarnurk.



Joonis 1.1: Ümarplaadi element.

Vaatleme joonist 1.1, kus M_r, M_θ on paindemomendid, N_r, N_θ on membraanjõud ning Q_r lõikejõud. Esimese tasakaaluvõrrandi saamiseks projekteerime kõik elemendile mõjuvad jõud radiaalsuunale. Jõuame järgmise tulemuseni:

$$-N_r r d\theta + (N_r + dN_r)(r + dr)d\theta - 2N_\theta \frac{d\theta}{2} dr = 0. \tag{1.1}$$

Pannes tähele, et $dN_r = N_r' dr$, ning jagades võrrandit suurusega $d\theta$, saame:

$$-N_r r + (N_r + N_r' dr)(r + dr) - N_\theta dr = 0.$$

Minnes suurusega $dr \to 0$ piirile ja taandades suurusega dr võtab võrrand (1.1) järgmise kuju:

$$N_r + rN_r' - N_\theta = 0. \tag{1.2}$$

Teise tasakaalutingimuse tuletamiseks projekteerime kõik elemendile mõjuvad jõud z-teljele:

$$-Q_r r d\theta + (Q_r + dQ_r)(r + dr)d\theta + Prd\theta dr = 0. \tag{1.3}$$

Paneme tähele, et $dQ_r = Q_r' dr$, ning jagame võrrandit (1.3) suurusega $d\theta dr$, saame

$$Q_r + Q_r' r + Q_r' dr + Pr = 0.$$

Minnes suurusega $dr \to 0$ piirile, olemegi saanud teise tasakaaluvõrrandi:

$$Q_r + Q_r' r + Pr = 0. \tag{1.4}$$

Arvutades jõumomendid elemendi keskpunkti suhtes, saame kolmanda tasakaalutingimuse:

$$\begin{aligned} &-M_r r d\theta + (M_r + M_r' dr)(r + dr)d\theta - Q_r r d\theta \frac{dr}{2} - \\ &-(Q_r + Q_r' dr)(r + dr)d\theta \frac{dr}{2} - 2M_\theta \frac{d\theta}{2} dr = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Koondades ühesugused liikmed ning taandades võrrandit (1.5) suurusega $d\theta dr$, jõuame tulemuseni:

$$M_r + M_r' r + M_r' dr - Q_r r - Q_r \frac{dr}{2} - Q_r'(r + dr)\frac{dr}{2} - M_\theta = 0.$$

Viimati saadud võrrandis suurusega $dr \to 0$ piirile minnes saame kolmanda tasakaaluvõrrandi:

$$M_r + rM_r' - Q_r r - M_\theta = 0. \tag{1.6}$$

Kuna $Q_r + Q_r' r = (rQ_r)'$, siis asendades antud avaldise võrrandisse (1.4), saame

$$(rQ_r)' = -Pr.$$

Seega võime võrrandid (1.4) ja (1.6) kirjutada kujul:

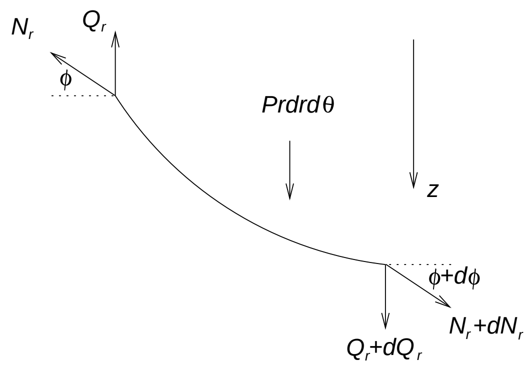
$$[(rM_r)' - M_\theta]' = -Pr.$$

Kokkuvõttes oleme saanud kaks tasakaaluvõrrandit:

$$\begin{cases} (rN_r)' - N_\theta = 0 \\ (rM_r)'' - M_\theta' + Pr = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

1.1.2 Geomeetriliselt mittelineaarne mudel

Antud juhul eeldame, et läbipainded on võrreldavad plaadi paksusega, siis on ka deformatsioonid suuremad kui geomeetriliselt lineaarse mudeli korral. Osutub, et sellisel juhul võrrandid (1.2) ja (1.6) säilitavad oma kuju. Modifitseerime võrrandit (1.4), selleks projekteerime kõik mõjuvad jõud teljele z.



Joonis 1.2: Geomeetriliselt mittelineaarne mudel.

Joonisest 1.2 lähtuvalt saame

$$\begin{aligned} &-N_r\phi r d\theta + (N_r + dN_r)(\phi + d\phi)(r + dr)d\theta - \\ &-Q_r r d\theta + (Q_r + dQ_r)(r + dr)d\theta + Prdrd\theta = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Arvestades, et ϕ on kaldenurk, mis avaldub läbipainde tuletisena ehk $\phi = w'$ ja $\phi + d\phi = w' + w''dr$, ning jagades võrrandit (1.8) suurusega $d\theta$, jõuame järgmise tulemuseni:

$$-N_r r w' + N_r(w' + w''dr)(r + dr) + dN_r(w' + w''dr)(r + dr) -$$

$$-Q_r r + Q_r(r + dr) + Q_r'(r + dr)dr + Prdr = 0.$$

Antud võrrandit teisendades ja sarnaseid liikmeid koondades saame

$$N_r w' + N_r w''(r + dr) + N_r'(w' + w''dr)r + N_r'(w' + w''dr) + Q_r + rQ_r' + Pr = 0.$$

Suurusega $dr \rightarrow 0$ piirile minnes võtab avaldis järgmise kuju:

$$N_r w' + N_r w'' r + N_r' w' r + Q_r + rQ_r' + Pr = 0.$$

Paneme tähele, et

$$(rN_r w')' = N_r w' + rN_r' w' + rN_r w''$$

ja

$$(rQ_r)' = Q_r + rQ_r',$$

siis saame teiseks tasakaalutingimuseks:

$$(rN_r w')' + (rQ_r)' + Pr = 0. \tag{1.9}$$

Võrrandeid (1.9) ja (1.6) kokku võttes saame geomeetriliselt mittelineaarse mudeli korral järgmised tasakaaluvõrrandid:

$$\begin{cases} (rN_r)' - N_\theta = 0 \\ \left[(rM_r)' - M_\theta + rN_r w'\right]' + Pr = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Võrrandid (1.10) langevad kokku kirjandusest teada olevatega [3, 7].

1.2 Deformatsiooni kiiruse komponendid

1.2.1 Geomeetriliselt lineaarne mudel

Eeldame, et kehtivad virtuaalkiiruste printsiip, st $\dot{D} = \dot{A}_e$, ning eespool tuletatud tasakaaluvõrrandid (1.7). Kuna tegemist on puhtpaindega, siis $N_r = N_\theta = 0$.

Siseenergia hajumise (dissipatsiooni) kiirus pindalaühiku kohta $\dot{d}$ avaldub järgmiselt:

$$\dot{d} = M_r \dot{\kappa}_r + M_\theta \dot{\kappa}_\theta.$$

Teame, et siseenergia dissipatsiooni kiirust saab arvutada lähtuvalt suurusest $\dot{d}$:

$$\dot{D} = \int_a^R \dot{d} 2\pi r dr,$$

kus a ja R on rajad, mis iseloomustavad rõngasplaati. Kui $a = 0$, siis on tegemist täisplaadiga.

Korrutame tasakaaluvõrrandit (1.7) suurusega $\dot{w}2\pi$, kus $\dot{w}$ on z-telje sihiline kiirus ning integreerime, saame

$$\int_a^R \Big[(rM_r)'' - M_\theta' + Pr \Big] \dot{w} 2\pi dr = 0. \tag{1.11}$$

Integreerime ositi:

$$\int_a^R (rM_r)'' \dot{w} 2\pi dr = (rM_r)' \dot{w} 2\pi |_a^R - \int_a^R (rM_r)' \dot{w}' 2\pi dr =$$

$$= (rM_r)' \dot{w} 2\pi |_a^R - rM_r \dot{w}' 2\pi |_a^R + \int_a^R rM_r \dot{w}'' 2\pi dr,$$

$$- \int_a^R M_\theta' \dot{w} 2\pi dr = -M_\theta \dot{w} 2\pi |_a^R + \int_a^R M_\theta \dot{w}' 2\pi dr.$$

Asendades arvutatud integraalid võrrandisse (1.11), saame

$$\int_a^R (rM_r \dot{w}'' + M_\theta \dot{w}') 2\pi dr + \int_a^R \dot{w} Pr 2\pi dr +$$

$$+ \Big[(rM_r)' - M_\theta \Big] \dot{w} 2\pi |_a^R - rM_r \dot{w}' 2\pi |_a^R = 0.$$

Mitteintegraalsed liikmed on jäiga kinnituse ja vaba toetuse korral võrdsed nulliga. Kui tegemist ei ole vaba toetuse või jäiga kinnitusega, siis arvestame mitteintegraalsed liikmed

$$\dot{D}_0 = \Big[(rM_r)' - M_\theta \Big] \dot{w} 2\pi |_a^R - rM_r \dot{w}' 2\pi |_a^R$$

siseenergia $\dot{\bar{D}}$ hulka, st $\dot{\bar{D}} = \dot{D} + \dot{D}_0$ ning virtuaalkiiruste printsiip on sellisel juhul järgmisel kujul: $\dot{\bar{D}} = \dot{A}_e$. Lihtsuse mõttes oletame, et rajatingimused on niisugused, et mitteintegraalsed liikmed võrduvad nulliga. Teame, et välisjõudude võimsus on esitatav kujul

$$\dot{A}_e = \int_a^R \dot{w} Pr 2\pi dr,$$

seda arvestades saame

$$\dot{A}_e = -\int_a^R (rM_r\dot{w}'' + M_\theta\dot{w}')2\pi dr$$

ehk

$$\dot{A}_e = \int_a^R \left[M_r(-\dot{w}'') + M_\theta\left(-\frac{\dot{w}'}{r}\right)\right] 2\pi r dr.$$

Näeme, et

$$\dot{d} = M_r(-\dot{w}'') + M_\theta\left(-\frac{\dot{w}'}{r}\right).$$

Võrdsustades viimati saadud $\dot{d}$ eespool toodud siseenergia hajumise kiirusega pindalaühiku kohta, saame üldistatud deformatsiooni kiiruse komponendid $\dot{\kappa}_r$ ja $\dot{\kappa}_\theta$:

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_r = -\dot{w}'' \\ \dot{\kappa}_\theta = -\dfrac{\dot{w}'}{r}. \end{cases} \tag{1.12}$$

1.2.2 Geomeetriliselt mittelineaarne mudel

Kuna tegemist on mittelineaarse mudeliga, siis membraanjõud N_r ja N_θ ei võrdu nulliga. Samas on N_r ja N_θ üldistatud pinged, millele vastavad mingid üldistatud deformatsiooni kiiruse komponendid $\dot{\varepsilon}_r$, $\dot{\varepsilon}_\theta$. Antud juhul avaldub siseenergia dissipatsiooni kiirus pindalaühiku kohta järgmiselt:

$$\dot{d} = N_r\dot{\varepsilon}_r + N_\theta\dot{\varepsilon}_\theta + M_r\dot{\kappa}_r + M_\theta\dot{\kappa}_\theta.$$

Siseenergia kiirus $\dot{D}$ ja välisjõudude võimsus $\dot{A}_e$ avalduvad samamoodi nagu punktis 2.1.

Lähtume tasakaaluvõrranditest (1.10), neist esimest korrutame suurusega $2\pi\dot{u}$ ja teist suurusega $2\pi\dot{w}$, kus $\dot{u}$ on radiaalsuunaline kiirus ja $\dot{w}$ z-telje suunaline kiirus. Pärast võrrandite kokkuliitmist ja integreerimist rajades a-st R-ni saame

$$\int_a^R \Big\{\Big[(rN_r)' - N_\theta\Big]\dot{u} + \Big[(rM_r)'' - M_\theta' + (rN_r w')' + Pr\Big]\dot{w}\Big\} 2\pi dr = 0. \tag{1.13}$$

Integreerides ositi üksikuid liikmeid valemis (1.13), leiame

$$\int_a^R (rN_r)'\dot{u}2\pi dr = rN_r\dot{u}2\pi|_a^R - \int_a^R rN_r\dot{u}'2\pi dr,$$

$$\int_a^R (rM_r)''\dot{w}2\pi dr = (rM_r)'\dot{w}2\pi|_a^R - \int_a^R (rM_r)'\dot{w}'2\pi dr =$$

$$= (rM_r)'\dot{w}2\pi|_a^R - rM_r\dot{w}'2\pi|_a^R + \int_a^R rM_r\dot{w}''2\pi dr,$$

$$-\int_a^R M_\theta'\dot{w}2\pi dr = -M_\theta\dot{w}2\pi|_a^R + \int_a^R M_\theta\dot{w}'2\pi dr,$$

$$\int_a^R (rN_rw')'\dot{w}2\pi dr = rN_rw'\dot{w}2\pi|_a^R - \int_a^R rN_rw'\dot{w}'2\pi dr.$$

Asendame ositi integreeritud liikmed võrrandisse (1.13), saame

$$\int_a^R (-rN_r\dot{u} - N_\theta\dot{u} + rM_r\dot{w}'' + M_\theta\dot{w}' - rN_rw'\dot{w}' + Pr\dot{w})2\pi dr + rN_r\dot{u}2\pi|_a^R +$$

$$+(rM_r)'\dot{w}2\pi|_a^R - rM_r\dot{w}'2\pi|_a^R - M_\theta\dot{w}2\pi|_a^R + rN_rw'\dot{w}2\pi|_a^R = 0.$$

Lihtsuse mõttes oletame nagu eelmiseski punktis, et rajatingimused on sellised, et mitteintegraalsed liikmed langevad võrrandist (1.13) välja, siis antud avaldis võtab kuju:

$$\int_a^R \left(-N_r\dot{u}' - N_\theta\frac{\dot{u}}{r} + M_r\dot{w}'' + M_\theta\dot{w}'\frac{1}{r} - N_rw'\dot{w}'\right) r2\pi dr + \int_a^R P\dot{w}2\pi r dr = 0.$$

Arvestades, et $\dot{A}_e = \int_a^R \dot{w}Pr2\pi dr$ ja tähistades

$$\dot{d} = N_r\dot{u}' + N_\theta\frac{\dot{u}}{r} - M_r\dot{w}'' - M_\theta\dot{w}'\frac{1}{r} + N_rw'\dot{w}',$$

saame viimati tuletatud võrrandi kujul:

$$\int_a^R \dot{d}\,2\pi r dr = \dot{A}_e$$

ehk

$$\dot{D} = \dot{A}_e.$$

Võrdsustame viimati toodud $\dot{d}$ ning deformatsiooni kiiruse komponentide abil esitatud suuruse $\dot{d}$, siis saame mittelineaarse mudeli korral deformatsiooni kiiruse komponentideks alljärgnevad avaldised:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_r = \dot{u}' + w'\dot{w}' \\ \dot{\varepsilon}_\theta = \dfrac{\dot{u}}{r} \\ \dot{\kappa}_r = -\dot{w}'' \\ \dot{\kappa}_\theta = -\dfrac{\dot{w}'}{r}. \end{cases}$$

Siit avaldame deformatsiooni komponendid:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u' + \dfrac{1}{2}(w')^2 \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u}{r} \\ \kappa_r = -w'' \\ \kappa_\theta = -\dfrac{w'}{r}. \end{cases} \tag{1.14}$$

Võrrandeid (1.14) nimetatakse Kármáni võrranditeks.

1.3 Plaadi painde diferentsiaalvõrrand

Vaatleme elastsest materjalist plaati. Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi tuletamiseks lähtume geomeetriliselt lineaarsest mudelist. Sellisel juhul on membraanjõud N_r, N_θ võrdsed nulliga ning tasakaalutingimuseks võrrand (1.7):

$$\Big[(rM_r)' - M_\theta\Big]' + Pr = 0.$$

Lineaarse mudeli jaoks tuletasime eespool deformatsiooni kiiruse komponendid kujul (1.12):

$$\begin{cases} \dot\kappa_r = -\dot w'' \\ \dot\kappa_\theta = -\dfrac{\dot w'}{r}. \end{cases}$$

Üldistatud Hooke'i seadus, mis on tuletatud raamatus [4], avaldub järgmiselt:

$$\begin{cases} M_r = D(\kappa_r + \nu\kappa_\theta) \\ M_\theta = D(\kappa_\theta + \nu\kappa_r), \end{cases} \tag{1.15}$$

kus

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

on jäikustegur ning E on Young'i moodul ja ν Poisson'i moodul. Suurus h on plaadi paksus. Paigutame võrrandisse (1.15) deformatsiooni komponendid

(1.12), saame

$$\begin{cases} M_r = -D\left(w'' + \nu\dfrac{w'}{r}\right) \\ M_\theta = -D\left(\dfrac{w'}{r} + \nu w''\right). \end{cases}$$

Asendame saadud momendid avaldisse (1.7), siis tasakaalutingimus avaldub järgmiselt:

$$-D\left[\left(rw'' + \nu\frac{w'}{r}r\right)' - \frac{w'}{r} - \nu w''\right]' + Pr = 0. \tag{1.16}$$

Eeldame, et plaat on homogeensest materjalist, siis $\nu = const$. Jagame võrrandit (1.16) konstandiga $-D$ ning võtame sulgudes olevast avaldisest tuletise, siis saame

$$w''' + w''' + rw^{IV} + \nu w''' + \frac{w'}{r^2} - \frac{w''}{r} - \nu w''' - \frac{Pr}{D} = 0.$$

Koondades ühesugused liikmed ning viies suuruse $\dfrac{Pr}{D}$ teisele poole võrdusmärki, jõuame tulemuseni:

$$\frac{d}{dr}\left(rw''' + w'' - \frac{w'}{r}\right) = \frac{Pr}{D}.$$

Paneme tähele, et

$$rw''' + w'' - \frac{w'}{r} = r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rw')\right].$$

Tõepoolest, arvutame

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rw')\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}(w' + rw'')\right] = \frac{d}{dr}\left(\frac{w'}{r} + w''\right) = -\frac{1}{r^2}w' + \frac{w''}{r} + w'''.$$

Korrutades viimast tulemust suurusega r, saame

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rw')\right] = r\left(-\frac{1}{r^2}w' + \frac{w''}{r} + w'''\right) = -\frac{1}{r}w' + w'' + rw'''.$$

Olemegi tuletanud plaadi painde diferentsiaalvõrrandi, mis on esitatud ka õpikus [13]:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{P}{D}, \tag{1.17}$$

kus suurused P ja D on konstantsed. Kujul (1.17) olevat võrrandit on lihtne integreerida, tegeleme sellega järgmises alapunktis.

1.4 Plaadi painde diferentsiaalvõrrandi lahend

Korrutame võrrandit (1.17) suurusega r ja integreerime, siis saame

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{Pr^2}{2D} + C_1.$$

Integreerime veelkord, olles enne viimati saadud võrrandit suurusega r läbi jaganud. Avaldis võtab kuju:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = \frac{Pr^2}{4D} + C_1 \ln r + C_2.$$

Korrutades toodud võrrandit suurusega r, saame

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = \frac{Pr^3}{4D} + C_1 r \ln r + C_2 r. \tag{1.18}$$

Paneme tähele, et

$$C_1 \int r \ln r dr = C_1 \left(\frac{r^2}{2}\ln r - \int \frac{r^2}{2}\frac{1}{r}dr\right) = C_1\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right),$$

ja integreerime avaldist (1.18):

$$r\frac{dw}{dr} = \frac{Pr^4}{16D} + C_1\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right) + C_2\frac{r^2}{2} + C_3.$$

Jagades viimast avaldist suurusega r, jõuame võrrandini

$$\frac{dw}{dr} = \frac{Pr^3}{16D} + C_1\frac{r}{2}\left(\ln r - \frac{1}{2}\right) + C_2\frac{r}{2} + C_3\frac{1}{r}.$$

Kui integreerime veel kord, siis läbipainde w avaldiseks on järgmine tulemus:

$$w = \frac{Pr^4}{64D} + \frac{C_1}{2}\left(\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right) - C_1\frac{r^2}{8} + C_2\frac{r^2}{4} + C_3 \ln r + C_4. \tag{1.19}$$

Võrrandit (1.19) võime kirjutada kujul:

$$w = \frac{Pr^4}{64D} + \frac{C_1}{4}r^2 \ln r + r^2\left(-\frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{4}\right) + C_3 \ln r + C_4.$$

Nimetame integreerimiskonstandid ümber järgmisel viisil:

$$\frac{C_1}{4} = B_1, \ -\frac{C_1}{4} + \frac{C_2}{4} = B_2, \ C_3 = B_3, \ C_4 = B_4,$$

siis plaadi läbipaine w avaldub kujul:

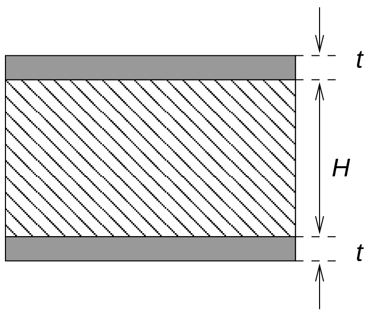
$$w = \frac{Pr^4}{64D} + B_1 r^2 \ln r + B_2 r^2 + B_3 \ln r + B_4. \tag{1.20}$$

Tuletatud võrrand (1.17) ning tema üldlahend (1.20) langevad kokku kirjanduses esitatutega [6, 8, 12, 13].

II Elastne-plastne plaat

2.1 Ideaalselt kahekihilise plaadi mudel

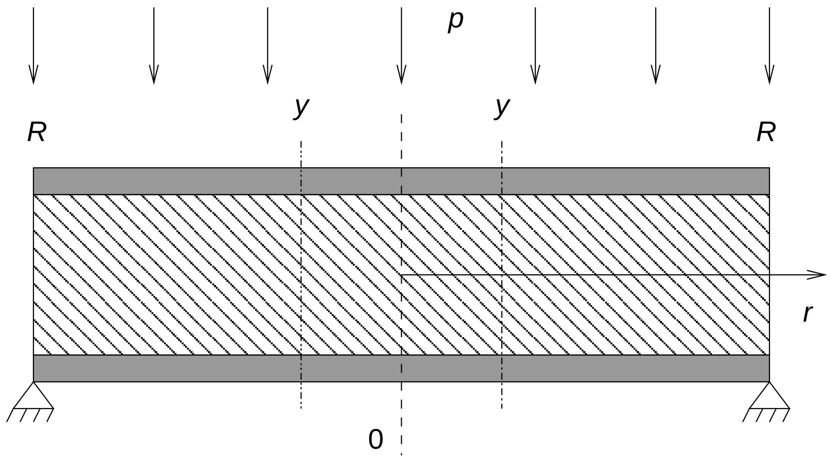
Vaatleme elastset-plastset sandwich-tüüpi ümarplaati, mis on servast vabalt toetatud. Sandwich-tüüpi ristlõikeks nimetatakse ideaalset kahekihilist ristlõiget, mille kandva kihi paksus t on kihtidevahelise kaugusega H võrreldes väike (joonis 2.1). Sandwich-tüüpi plaadi mudel lihtsustab oluliselt arvutusi, sest selle mudeli korral võime pinged lugeda konstantseteks piki paksust.



Joonis 2.1: Sandwich-tüüpi ristlõige.

Sandwich-tüüpi mudeli kasutamisel võime eeldada eelöeldu põhjal, et kandva kihi teatud piirkond saab olla kas ainult elastses või täielikult plastses seisundis. Sandwich-tüüpi ristlõike korral ei ole sellist võimalust, et üks osa ristlõikest on elastses, teine plastses seisundis. Seda mudelit kasutatakse edukalt jäik-plastsete plaatide ja koorikute kandevõime teoorias [6, 7].

Kui rakendame plaadile väikeseid koormusi, siis on kogu plaat elastne. Koormuse suurendamisel tekib plaadi telje ümber plastne piirkond (joonis 2.2). Eeldame, et plaadi sisemine piirkond raadiusega $y = \eta R$ on plastses seisundis ja välimine rõngas, kus $y < r \leq R$, jääb elastseks.



Joonis 2.2: Elastne-plastne plaat.

2.2 Plastne piirkond

Plastses piirkonnas peab pingeseisundit iseloomustav punkt asuma voolavuspinna (voolavuskõvera) peal. Plastsusteooria põhiseoste kohaselt [6, 7] rahuldab pingeseisund peale voolavuspinna võrrandite ka nn assotseeritud voolavusseadust. Assotseeritud voolavusseaduse kohaselt on deformatsioonikiiruse vektor voolavuspinna igas punktis sellega risti ning suunatud pinnast väljapoole. Voolavuskõvera nurkpunktides (näiteks A, B, C, D, E, F joonisel 2.3) asub deformatsioonikiiruse vektor nurgas, mille moodustavad naaberkülgedele joonistatud normaalid (joonis 2.3).

Järgnevas on otstarbekas kasutada dimensioonita suuruseid

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad m_1 = \frac{M_1}{M_y}, \quad m_2 = \frac{M_2}{M_y}, \quad p = \frac{PR^2}{6M_y}, \quad \gamma = \frac{t}{t_*},$$

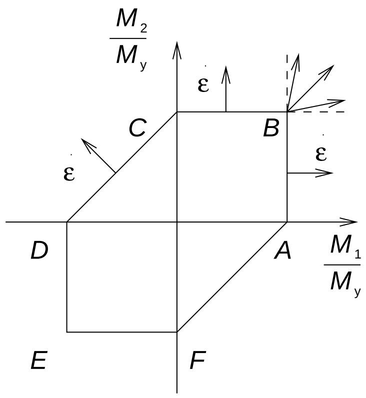
kus M_y on ristlõike piirmoment [6], mis avaldub kujul

$$M_y = \sigma_0 t H.$$

Siin σ_0 on materjali voolavuspinge ja t_* on võrdlusplaadi kandva kihi paksus.

Olgu voolavustingimuseks Tresca tingimus. Detailsem analüüs näitab, et plaadis kehtib režiim BC. Režiimis BC $m_2 = \gamma$. Tasakaaluvõrrand avaldub kujul:

$$(\rho m_1)' - m_2 = -3p\rho^2. \tag{2.1}$$



Joonis 2.3: Tresca kuusnurk.

Asendame tasakaaluvõrrandisse (2.1) momendi m_2 ning avaldame tasakaaluvõrrandist momendi m_1:

$$m_1 = \gamma - p\rho^2 + \frac{B_1}{\rho}.$$

Kuna $m_1(0)$ on lõplik, siis $B_1 = 0$. Seega moment m_1 avaldub kujul:

$$m_1 = \gamma - p\rho^2. \tag{2.2}$$

Assotseeritud voolavusseaduse põhjal teame, et režiimi BC korral on $\dot{\kappa}_1 = 0$ ning $\dot{\kappa}_2 \geq 0$. Järelikult $w'' = 0$. Kaks korda integreerides saame, et

$$w = A\rho + w_0, \tag{2.3}$$

kus A on integreemiskonstant ning w_0 etteantud läbipaine.

Kuna seosed (2.2) ja (2.3) kehtivad plastses piirkonnas, st $\rho \in [0, \eta]$ korral, siis piirkonna rajapunktis

$$\begin{aligned} m_1(\eta) &= \gamma - p\eta^2 \\ w(\eta) &= A\eta + w_0 \\ z(\eta) &= A. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.3 Elastne piirkond

Eeldame, et $r \in [y, R]$. Elastses piirkonnas avaldub läbipaine kujul (1.20):

$$w = \frac{Pr^4}{64D} + B_1 r^2 \ln r + B_2 r^2 + B_3 \ln r + B_4.$$

Kui läheme üle dimensioonita suurusele ρ, siis elastses piirkonnas $\rho \in [\eta, 1]$ ning läbipainde võrrand saab kuju (2.5):

$$w = \frac{6p\rho^4}{64D_1} + B_2\rho^2 + B_3 \ln\rho + B_4, \tag{2.5}$$

kus

$$D_1 = \frac{D}{M_0 R^2}$$

ning sandwich-tüüpi plaadi korral jäikustegur

$$D = \frac{EH^2 t}{2(1-\nu^2)}.$$

Leiame avaldisest (2.5) läbipainde esimese ja teise tuletise:

$$\begin{aligned} w' &= \frac{3p\rho^3}{8D_1} + 2B_2\rho + \frac{B_3}{\rho}, \\ w'' &= \frac{9p\rho^2}{8D_1} + 2B_2 - \frac{B_3}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Asendame leitud valemid (2.6) üldistatud Hooke'i seadusesse (1.15), mille siinkohal sandwich-tüüpi plaadi jaoks uuesti välja kirjutame

$$\begin{cases} m_1 = -D_1\left(w'' + \nu\dfrac{w'}{\rho}\right) \\ m_2 = -D_1\left(\dfrac{w'}{\rho} + \nu w''\right). \end{cases} \tag{2.7}$$

Pärast läbipainde tuletiste (2.6) asendamist valemisse (2.7), jõuame võrrandisüsteemini (2.8):

$$\begin{cases} m_1 = -D_1\left[\dfrac{9p\rho^2}{8D_1} + 2B_2 - \dfrac{B_3}{\rho^2} + \nu\left(\dfrac{3p\rho^2}{8D_1} + 2B_2 + \dfrac{B_3}{\rho^2}\right)\right] \\ m_2 = -D_1\left[\dfrac{3p\rho^2}{8D_1} + 2B_2 + \dfrac{B_3}{\rho^2} + \nu\left(\dfrac{9p\rho^2}{8D_1} + 2B_2 - \dfrac{B_3}{\rho^2}\right)\right]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Lihtsustades võrrandisüsteemi (2.8), saame

$$\begin{cases} m_1 = -D_1\left[\dfrac{3p\rho^2}{8D_1}(3+\nu) + 2B_2(\nu+1) + \dfrac{B_3}{\rho^2}(\nu-1)\right] \\ m_2 = -D_1\left[\dfrac{3p\rho^2}{8D_1}(1+3\nu) + 2B_2(\nu+1) + \dfrac{B_3}{\rho^2}(1-\nu)\right]. \end{cases} \tag{2.9}$$

Nüüd määrame konstandid B_2, B_3 ning vaatame, kuidas sõltub η koormusest p. Selleks kirjutame välja rajatingimuse kohal η:

$$m_2(\eta) = 1. \tag{2.10}$$

Lihtsuse mõttes oleme siin eeldanud, et plastses piirkonnas $\rho \in [0, \eta]$ on $\gamma = 1$. Asendades võrrandisse (2.10) süsteemi (2.9) teise valemi, saame

$$D_1 \left[-\frac{3p\eta^2}{8D_1}(1 + 3\nu) - 2B_2(\nu + 1) + \frac{B_3}{\eta^2}(\nu - 1) \right] = 1. \tag{2.11}$$

Samuti teame, et radiaalsuunaline moment m_1 on kohal η pidev, st

$$m_1(\eta-) = m_1(\eta+). \tag{2.12}$$

Asendame võrrandisse (2.12) süsteemi (2.9) esimese valemi ning rajatingimuse (2.4):

$$D_1 \left[-\frac{3p\eta^2}{8D_1}(3 + \nu) - 2B_2(\nu + 1) - \frac{B_3}{\eta^2}(\nu - 1) \right] = 1 - p\eta^2. \tag{2.13}$$

Liidame võrrandid (2.11) ja (2.13) kokku:

$$D_1 \left[-\frac{6p\eta^2}{4D_1}(1 + \nu) - 4B_2(\nu + 1) \right] = 2 - p\eta^2.$$

Viimasest võrrandist avaldame konstandi B_2:

$$B_2 = -\frac{3p\eta^2}{8D_1} - \frac{2 - p\eta^2}{4D_1(1 + \nu)}. \tag{2.14}$$

Lahutame võrrandist (2.11) võrrandi (2.13):

$$D_1 \left[\frac{3p\eta^2}{8D_1}(2 - 2\nu) + \frac{2B_3}{\eta^2}(\nu - 1) \right] = p\eta^2.$$

Teisendame saadud avaldist:

$$D_1 \left[\frac{p\eta^2}{4}(3 - 3\nu - 4) + D_1\frac{2B_3}{\eta^2}(\nu - 1) \right] = 0.$$

Avaldame viimasest võrrandist konstandi B_3:

$$B_3 = \frac{p\eta^4(1+3\nu)}{8D_1(\nu-1)}. \tag{2.15}$$

Plaadi serval $\rho = 1$ kehtib rajatingimus:

$$m_1(1) = 0. \tag{2.16}$$

Asendades süsteemi (2.9) esimese valemi rajatingimusse (2.16), saame

$$-D_1\left[\frac{3p}{8D_1}(3+\nu) + 2B_2(\nu+1) + B_3(\nu-1)\right] = 0. \tag{2.17}$$

Jagame võrrandit (2.17) suurusega $-D_1$. Asendame leitud konstandid B_2 ja B_3 valemitest (2.14) ja (2.15) võrrandisse (2.17)

$$\frac{3p}{8D_1}(3+\nu)+2(\nu+1)\left[-\frac{3p\eta^2}{8D_1} - \frac{2-p\eta^2}{4D_1(1+\nu)}\right]+(\nu-1)\frac{p\eta^4(1+3\nu)}{8D_1(\nu-1)} = 0. \tag{2.18}$$

Teisendame võrrandit (2.18):

$$3p(3+\nu) - 6(\nu+1)p\eta^2 - 4(2-p\eta^2) + p\eta^4(1+3\nu) = 0.$$

Koondame viimases avaldises sarnased liikmed ning jagame seda suurusega $1+3\nu$:

$$p\eta^4 - 2p\eta^2 + \frac{3p(3+\nu)}{1+3\nu} - \frac{8}{1+3\nu} = 0. \tag{2.19}$$

Jagame võrrandit (2.19) suurusega p, siis saame taandatud neljanda astme võrrandi η suhtes:

$$\eta^4 - 2\eta^2 + \frac{3(3+\nu)}{1+3\nu} - \frac{8}{p(1+3\nu)} = 0. \tag{2.20}$$

Kasutades taandatud ruutvõrrandi lahendivalemit, avaldame suuruse η^2:

$$\eta^2 = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{3(3+\nu)}{1+3\nu} + \frac{8}{p(1+3\nu)}}.$$

Lihtsustame viimast avaldist:

$$\eta^2 = 1 - \sqrt{\frac{8(1-p)}{p(1+3\nu)}}. \tag{2.21}$$

Võrrandist (2.21) lähtuvalt vaatleme kahte erijuhtu. Esiteks, kui $\eta = 0$, siis

$$p = \frac{8}{3(3+\nu)}. \tag{2.22}$$

Seega kogu plaat jääb elastseks koormuse korral, mis avaldub kujul (2.22). Teiseks, kui $\eta = 1$, siis $p = 1$. Kogu plaat on plastne, kui koormus $p = 1$.

Kokkuvõttes saame plastse piirkonna rajapunkti η arvutada valemist (2.23):

$$\eta = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{8(1-p)}{p(1+3\nu)}}}. \tag{2.23}$$

Ülesande lõplikuks lahendamiseks määrame ka konstandid A, B_4 ja etteantud läbipainde w_0. Alustame konstandi A määramisest. Nägime, et plastse piirkonna rajapunktis kehtivad seosed 2.4, meid huvitab neist teine:

$$w(\eta) = A\eta + w_0.$$

Teame, et kohal η peab ka plaadi läbipainde tuletis olema pidev, st kehtib

$$w'(\eta-) = w'(\eta+). \tag{2.24}$$

Asendame tingimusse (2.24) seoste 2.4 teise valemi tuletise A ning läbipainde w tuletise (2.6)

$$A = \frac{3p\eta^3}{8D_1} + 2B_2\eta + \frac{B_3}{\eta}. \tag{2.25}$$

Asendades konstandid B_2 ja B_3 valemite (2.14), (2.15) abil seosesse (2.25), saame

$$A = \frac{3p\eta^3}{8D_1} + 2\eta\left(-\frac{3p\eta^2}{8D_1} - \frac{2-p\eta^2}{4D_1(1+\nu)}\right) + \frac{1}{\eta}\frac{p\eta^4(1+3\nu)}{8D_1(\nu-1)}. \tag{2.26}$$

Seega konstant A avaldub kujul

$$A = \frac{p\eta^3\nu}{D_1(\nu^2-1)} - \frac{\eta}{D_1(1+\nu)}. \tag{2.27}$$

Konstandi B_4 arvutamiseks kasutame rajatingimust (2.28):

$$w(1) = 0. \tag{2.28}$$

Rajatingimus (2.28) koos seosega (2.5) annab

$$\frac{6p}{64D_1} + B_2 + B_4 = 0. \tag{2.29}$$

Asendame võrrandisse (2.29) konstandi B_2 valemist (2.14) ning avaldame konstandi B_4:

$$B_4 = -\frac{3p}{32D_1} + \frac{3p\eta^2}{8D_1} + \frac{2 - p\eta^2}{4D_1(1+\nu)}. \tag{2.30}$$

Paneme tähele, et kui asendada konstant B_4 läbipainde avaldisse (2.5), siis võtab w kuju (2.31)

$$w = \frac{3p(\rho^4 - 1)}{32D_1} + B_3 \ln \rho + B_2(\rho^2 - 1). \tag{2.31}$$

Kuna läbipaine w on kohal η pidev, siis kehtib

$$w(\eta-) = w(\eta+). \tag{2.32}$$

Asendame tingimusse (2.32) rajatingimuste (2.4) teise seose ning läbipainde (2.31) kohal η, saame

$$A\eta + w_0 = \frac{3p(\eta^4 - 1)}{32D_1} + B_3 \ln \eta + B_2(\eta^2 - 1). \tag{2.33}$$

Asendame võrrandisse (2.33) konstandid B_2, B_3 ja A valemitest (2.14), (2.15), (2.27) ning avaldame läbipainde w_0

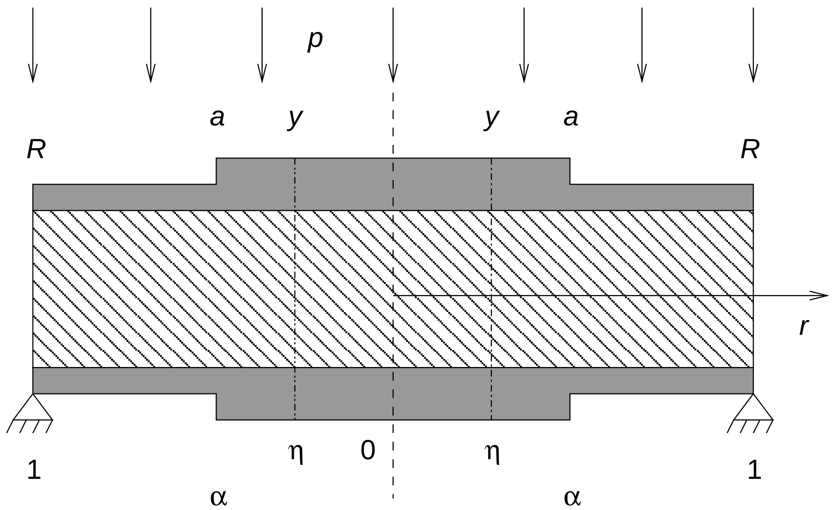
$$w_0 = \frac{3p(\eta^4 - 1)}{32D_1} + \ln \eta \frac{p\eta^4(1+3\nu)}{8D_1(\nu - 1)} + \left(-\frac{3p\eta^2}{8D_1} - (\eta^2 - 1)\frac{2 - p\eta^2}{4D_1(1+\nu)}\right) -$$
$$-\eta\left(\frac{p\eta^3\nu}{D_1(\nu^2 - 1)} - \frac{\eta}{D_1(1+\nu)}\right).$$

Viimati leitud avaldist teisendades saame läbipainde w_0 kujul

$$\begin{aligned} w_0 = {} & \frac{3p(\eta^4 - 1)}{32D_1} + \ln \eta \frac{p\eta^4(1+3\nu)}{8D_1(\nu - 1)} - \frac{3p}{8D_1}(\eta^4 - \eta^2) - \\ & -\frac{2(\eta^2 - 1)}{4D_1(1+\nu)} + \frac{p(\eta^4 - \eta^2)}{4D_1(1+\nu)} - \frac{p\eta^4\nu}{D_1(\nu^2 - 1)} + \frac{\eta^2}{D_1(1+\nu)}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

III Astmelise elastse-plastse plaadi optimiseerimine

Vaatleme õhukest sandwich-tüüpi ühe astmega ümarplaati. Eeldame, et kandva kihi paksus on tükiti konstantne, aga täitekihi paksus H on konstantne. Plaadile mõjugu telgsümmeetriline ristkoormus p ning olgu plaat mööda serva vabalt toetatud. Sel juhul on ka kõverpind, mille moodustab plaadi keskpind pärast koormamist, telgsümmeetriline. Joonisel 3.1 tähistab suurus



Joonis 3.1: Astmega ümarplaat.

R plaadi raadiust. Suurus y on koht, kus plastne piirkond läheb üle elastseks piirkonnaks ning tähistame vastava dimensioonita suuruse $\eta = \frac{y}{R}$. Suurus a tähistab astme kohta ning vastav dimensioonita suurus on α.

Elastsete konstruktsioonielementide optimiseerimist on uuritud mitmete autorite poolt, sealhulgas [1, 3, 14]. Antud töös eeldatakse, et materjal deformeerub elastselt-plastselt.

3.1 Ülesande seade

Vaatleme tükiti konstantse paksusega plaati, kusjuures

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_0, & \rho \in [0, \eta] \\ \gamma_1, & \rho \in [\eta, 1]. \end{cases}$$

Seame ülesandeks leida niisugune astme asend, mille korral funktsionaal

$$V = \gamma_0(\eta^2 - 0) + \gamma_0(\alpha^2 - \eta^2) + \gamma_1(1 - \alpha^2)$$

omandaks minimaalse väärtuse. Antud funktsionaali lihtsustades, saame järgmise avaldise:

$$V = \gamma_0\alpha^2 + \gamma_1(1 - \alpha^2). \tag{3.1}$$

Minimiseerides antud funktsionaali peame arvestama ka plaatide teooria põhivõrrandeid. On teada [13, 14], et ümarplaadi korral võime põhivõrrandid esitada kolmest esimest järku diferentsiaalvõrrandist koosneva süsteemina:

$$\begin{cases} w' = z \\ z' = -\dfrac{\mu m_1}{\gamma_i} - \dfrac{\nu}{\rho} z \\ m_1' = \dfrac{(\nu^2 - 1)\gamma_i}{\mu} \dfrac{z}{\rho^2} - \dfrac{m_1}{\rho}(1 - \nu) - p\rho, \end{cases} \tag{3.2}$$

kus $i = 0$, kui $\rho \in [\eta, \alpha]$ ja $i = 1$, kui $\rho \in [\alpha, 1]$.

3.2 Optimaalsuse tingimused

Püstitatud ülesannet vaatleme optimaalse juhtimise teooria ülesandena. Optimaalsuse tarvilike tingimuste saamiseks on kirjanduses esitatud mitmed erinevad lähenemisviisid [2, 5, 9, 10, 11, 14]. Käesolevas töös kasutame metoodikat, mis seisneb kitsenduste arvestamisel kaasmuutujate ja Lagrange'i kordajate abil ning laiendatud funktsionaali varieerimises.

Optimaalse juhtimise teooriast on teada, et diferentsiaalsete kitsenduste arvesse võtmiseks peame minimiseerima laiendatud funktsionaali V_*, mis avaldub kujul:

$$
\begin{aligned}
V_* = V + \int_\eta^\alpha \Bigg\{ & \psi_1(w' - z) + \psi_2 \left(z' + \frac{\mu m_1}{\gamma_0} + \frac{\nu}{\rho} z \right) + \\
+ \psi_3 & \left[m_1' - \gamma_0(\nu^2 - 1)\frac{z}{\mu\rho^2} + \frac{m_1}{\rho}(1-\nu) + p\rho \right] \Bigg\} d\rho + \\
+ \int_\alpha^1 \Bigg\{ & \psi_1(w' - z) + \psi_2 \left(z' + \frac{\mu m_1}{\gamma_1} + \frac{\nu}{\rho} z \right) + \\
+ \psi_3 & \left[m_1' - \gamma_1(\nu^2 - 1)\frac{z}{\mu\rho^2} + \frac{m_1}{\rho}(1-\nu) + p\rho \right] \Bigg\} d\rho + \\
+ \lambda_1 & [w(\eta) - A\eta - w_0)] + \lambda_2[z(\eta) - A] + \lambda_3[m_1(\eta) - \gamma_0 + p\eta^2].
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Siin ψ_1, ψ_2, ψ_3 on nn kaasmuutujad ja λ_1, λ_2, λ_3 määramata Lagrange'i kordajad. Määramata kordajad λ_1, λ_2, λ_3 on sisse toodud selleks, et arvesse võtta rajatingimusi (2.4), aga kaasmuutujad ψ_1, ψ_2, ψ_3 vastavad diferentsiaalsetele kitsendustele (3.2).

Kasutame raamatutes [9, 14] esitatud teooriat, mille kohaselt funktsionaali miinimumi (maksimumi) leidmiseks tuleb arvutada tema täisvariatsioon ning võrdsustada see nulliga. Arvutame funktsionaali V_* täisvariatsiooni:

$$
\begin{aligned}
\Delta V_* = {} & \Delta\gamma_0\alpha^2 + 2\gamma_0\alpha\Delta\alpha + \Delta\gamma_1(1-\alpha^2) + \gamma_1(-2\alpha)\Delta\alpha + \\
& + \int_\eta^\alpha \{\psi_1\delta w' - \psi_1\delta z + \psi_2\delta z' + \\
& + \psi_2 \left(\frac{\mu}{\gamma_0}\delta m_1 - \frac{\mu m_1}{\gamma_0^2}\Delta\gamma_0 + \frac{\nu}{\rho}\delta z \right) + \psi_3\delta m_1' + \\
& + \psi_3 \left[\frac{(1-\nu^2)\gamma_0}{\mu\rho^2}\delta z + \frac{(1-\nu^2)z}{\mu\rho^2}\Delta\gamma_0 + \frac{1-\nu}{\rho}\delta m_1 + \rho\delta p \right] \Bigg\} d\rho + \\
& + \int_\alpha^1 \{\psi_1\delta w' - \psi_1\delta z + \psi_2\delta z' + \\
& + \psi_2 \left(\frac{\mu}{\gamma_1}\delta m_1 - \frac{\mu m_1}{\gamma_1^2}\Delta\gamma_1 + \frac{\nu}{\rho}\delta z \right) + \psi_3\delta m_1' + \\
& + \psi_3 \left[\frac{(1-\nu^2)\gamma_1}{\mu\rho^2}\delta z + \frac{(1-\nu^2)z}{\mu\rho^2}\Delta\gamma_1 + \frac{1-\nu}{\rho}\delta m_1 + \rho\delta p \right] \Bigg\} d\rho + \\
& + \lambda_1[\Delta w(\eta) - A\Delta\eta - \eta\Delta A] + \lambda_2[\Delta z(\eta) - \Delta A] + \\
& + \lambda_3[\Delta m_1(\eta) - \Delta\gamma_0 + 2p\eta\Delta\eta] = 0.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Paneme tähele, et $\delta p = 0$, sest konstandi variatsioon on 0.

Funktsionaali V_* täisvariatsiooni (3.4) teisendamiseks peame integreerima ositi järgmisi avaldisi:

$$\begin{aligned}
&\int_\eta^\alpha \psi_1 \delta w' d\rho = \psi_1 \delta w|_\eta^\alpha - \int_\eta^\alpha \psi_1' \delta w d\rho,\\
&\int_\eta^\alpha \psi_2 \delta z' d\rho = \psi_2 \delta z\ |_\eta^\alpha - \int_\eta^\alpha \psi_2' \delta z d\rho,\\
&\int_\eta^\alpha \psi_3 \delta m_1' d\rho = \psi_3 \delta m_1\ |_\eta^\alpha - \int_\eta^\alpha \psi_3' \delta m_1 d\rho,\\
&\int_\alpha^1 \psi_1 \delta w' d\rho = \psi_1 \delta w\ |_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \psi_1' \delta w d\rho,\\
&\int_\alpha^1 \psi_2 \delta z' d\rho = \psi_2 \delta z\ |_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \psi_2' \delta z d\rho,\\
&\int_\alpha^1 \psi_3 \delta m_1' dr = \psi_3 \delta m_1\ |_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \psi_3' \delta m_1 d\rho.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Kui oleme ositi integreeritud liikmed valemite (3.5) abil asendanud funktsionaali J_* täisvariatsiooni avaldisse, siis võrrand (3.4) saab kuju:

$$\begin{aligned}
&\Delta V_* = \Delta\gamma_0 \alpha^2 + 2\gamma_0 \alpha \Delta\alpha + \Delta\gamma_1 (1-\alpha^2) + \gamma_1(-2\alpha)\Delta\alpha + \\
&+ \int_\eta^\alpha \Bigg\{ -\psi_1' \delta w - \psi_1 \delta z + \psi_2' \delta z + \\
&+\psi_2 \left(\frac{\mu}{\gamma_0} \delta m_1 - \frac{\mu m_1}{\gamma_0^2} \Delta\gamma_0 + \frac{\nu}{\rho} \delta z \right) - \psi_3' \delta m_1 + \\
&+\psi_3 \left[\frac{(1-\nu^2)\gamma_0}{\mu\rho^2} \delta z + \frac{(1-\nu^2) z}{\mu\rho^2} \Delta\gamma_0 + \frac{1-\nu}{\rho} \delta m_1 + \rho \delta p \right] \Bigg\} d\rho + \\
&+ \int_\alpha^1 \Bigg\{ -\psi_1 \delta w - \psi_1 \delta z + \psi_2' \delta z + \\
&+\psi_2 \left(\frac{\mu}{\gamma_1} \delta m_1 - \frac{\mu m_1}{\gamma_1^2} \Delta\gamma_1 + \frac{\nu}{\rho} \delta z \right) - \psi_3' \delta m_1 + \\
&+\psi_3 \left[\frac{(1-\nu^2)\gamma_1}{\mu\rho^2} \delta z + \frac{(1-\nu^2) z}{\mu\rho^2} \Delta\gamma_1 + \frac{1-\nu}{\rho} \delta m_1 + \rho \delta p \right] \Bigg\} d\rho + \\
&+(\psi_1 \delta w + \psi_2 \delta z + \psi_3 \delta m_1)\ |_\eta^{\alpha-} + (\psi_1 \delta w + \psi_2 \delta z + \psi_3 \delta m_1)\ |_{\alpha+}^1 + \\
&+\lambda_1 [\Delta w(\eta) - A\Delta\eta - \eta\Delta A] + \lambda_2 [\Delta z(\eta) - \Delta A] + \\
&+\lambda_3 [\Delta m_1(\eta) - \Delta\gamma_0 + 2p\eta\Delta\eta] = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Arvestades, et integraalide all olevad variatsioonid δw, δz ja δm_1 on valemis (3.6) sõltumatud, saame kaasmuutujate ψ_1, ψ_2, ψ_3 määramiseks järgmised diferentsiaalvõrrandite süsteemid:

$$\begin{cases} \psi_1' = 0 \\ \psi_2' = -\psi_1 + \dfrac{\nu}{\rho}\psi_2 + \dfrac{(1-\nu^2)\gamma_0}{\mu\rho^2}\psi_3 \\ \psi_3' = \dfrac{\mu}{\gamma_0}\psi_2 + \dfrac{1-\nu}{\rho}\psi_3, \end{cases} \tag{3.7}$$

kui $\rho \in [\eta, \alpha]$ ja

$$\begin{cases} \psi_1' = 0 \\ \psi_2' = -\psi_1 + \dfrac{\nu}{\rho}\psi_2 + \dfrac{(1-\nu^2)\gamma_1}{\mu\rho^2}\psi_3 \\ \psi_3' = \dfrac{\mu}{\gamma_1}\psi_2 + \dfrac{1-\nu}{\rho}\psi_3, \end{cases} \tag{3.8}$$

kui $\rho \in [\alpha, 1]$. On teada [14], et nõrk variatsioon on seotud täisvariatsiooniga valemiga

$$\delta w(y\pm) = \Delta w(y\pm) - w'(y\pm)\Delta\alpha, \tag{3.9}$$

kus y võib olla üks faasikoordinaatidest w, m_1 või z. Seose (3.9) kohaselt

$$\begin{aligned} &\delta w(\alpha\pm) = \Delta w(\alpha\pm) - w'(\alpha\pm)\Delta\alpha, \\ &\delta z(\alpha\pm) = \Delta z(\alpha\pm) - z'(\alpha\pm)\Delta\alpha, \\ &\delta m_1(\alpha\pm) = \Delta m_1(\alpha\pm) - m_1'(\alpha\pm)\Delta\alpha, \\ &\delta w(\eta) = \Delta w(\eta) - w'(\eta)\Delta\eta, \\ &\delta z(\eta) = \Delta z(\eta) - z'(\eta)\Delta\eta, \\ &\delta m_1(\eta) = \Delta m_1(\eta) - m_1'(\eta)\Delta\eta. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Kuna süsteemide (3.7) ja (3.8) põhjal avaldises (3.6) integraalsete liikmete summa võrdub nulliga, siis võrrand (3.6) saab kuju

$$\begin{aligned} &\Delta\gamma_0\alpha^2 + \gamma_0 2\alpha\Delta\alpha + \Delta\gamma_1(1-\alpha^2) + \gamma_1(-2\alpha)\Delta\alpha + \\ &\psi_1(\alpha-)\delta w(\alpha-) + \psi_2(\alpha-)\delta z(\alpha-) + \psi_3(\alpha-)\delta m_1(\alpha-) - \\ &-\psi_1(\eta)\delta w(\eta) - \psi_2(\eta)\delta z(\eta) - \psi_3(\eta)\delta m_1(\eta) + \\ &+\psi_1(1)\delta w(1) + \psi_2(1)\delta z(1) + \psi_3(1)\delta m_1(1) - \\ &-\psi_1(\alpha+)\delta w(\alpha+) - \psi_2(\alpha+)\delta z(\alpha+) - \psi_3(\alpha+)\delta m_1(\alpha+) + \\ &+\lambda_1[\Delta w(\eta) - A\Delta\eta - \eta\Delta A] + \lambda_2[\Delta z(\eta) - \Delta A] + \\ &+\lambda_3[\Delta m_1(\eta) - \Delta\gamma_0 + 2p\eta\Delta\eta] = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Võrrandist (3.11) saame kaasmuutuja ψ_2 jaoks tingimuse:

$$\psi_2(1) = 0, \tag{3.12}$$

sest

$$\delta w(1) = 0,\ \delta m_1(1) = 0.$$

Kui asendame nõrgad variatsioonid avaldisse (3.11), siis jõuame järgmise tulemuseni:

$$\begin{aligned}
&\Delta\gamma_0\alpha^2 + \gamma_0 2\alpha\Delta\alpha + \Delta\gamma_1(1-\alpha^2) + \gamma_1(-2\alpha)\Delta\alpha + \\
&+\psi_1(\alpha-)[\Delta w(\alpha-) - w'(\alpha-)\Delta\alpha] + \\
&+\psi_2(\alpha-)[\Delta z(\alpha-) - z'(\alpha-)\Delta\alpha] + \\
&+\psi_3(\alpha-)[\Delta m_1(\alpha-) - m_1'(\alpha-)\Delta\alpha] - \psi_1(\eta)[\Delta w(\eta) - w'(\eta)\Delta\eta] - \\
&-\psi_2(\eta)[\Delta z(\eta) - z'(\eta)\Delta\eta] - \psi_3(\eta)[\Delta m_1(\eta) - m_1'(\eta)\Delta\eta] + \\
&+\psi_1(1)\Delta w(1) + \psi_2(1)\Delta z(1) + \psi_3(1)\Delta m_1(1) - \\
&-\psi_1(\alpha+)[\Delta w(\alpha+) - w'(\alpha+)\Delta\alpha] - \\
&-\psi_2(\alpha+)[\Delta z(\alpha+) - z'(\alpha+)\Delta\alpha] - \\
&-\psi_3(\alpha+)[\Delta m_1(\alpha+) - m_1'(\alpha+)\Delta\alpha] + \\
&+\lambda_1[\Delta w(\eta) - A\Delta\eta - \eta\Delta A] + \lambda_2[\Delta z(\eta) - \Delta A] + \\
&+\lambda_3[\Delta m_1(\eta) - \Delta\gamma_0 + 2p\eta\Delta\eta] = 0.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Oma füüsikalise tähenduse tõttu on w, m_1 ja z pidevad kohal $\rho = \alpha$. Seetõttu on pidevad ka vastavad täisvariatsioonid ehk

$$\begin{gathered}
\Delta w(\alpha-) = \Delta w(\alpha+) = \Delta w(\alpha), \\
\Delta m_1(\alpha-) = \Delta m_1(\alpha+) = \Delta m_1(\alpha), \\
\Delta z(\alpha-) = \Delta z(\alpha+) = \Delta z(\alpha).
\end{gathered}$$

Kuna variatsioonid $\Delta w(\alpha)$, $\Delta z(\alpha)$, $\Delta m_1(\alpha)$ on sõltumatud, siis saame viimasest võrrandist nende kordajate jaoks niisugused tingimused:

$$\begin{aligned}
\psi_1(\alpha-) - \psi_1(\alpha+) = 0, \\
\psi_2(\alpha-) - \psi_2(\alpha+) = 0, \\
\psi_3(\alpha-) - \psi_3(\alpha+) = 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Analoogiliselt järeldub võrrandist (3.13) (suurused $\Delta w(\eta)$, $\Delta z(\eta)$, $\Delta m_1(\eta)$ on suvalised), et

$$\begin{aligned} -\psi_1(\eta) + \lambda_1 &= 0, \\ -\psi_2(\eta) + \lambda_2 &= 0, \\ -\psi_3(\eta) + \lambda_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Suuruste ΔA ja $\Delta\eta$ sõltumatuse tõttu kehtivad seosed:

$$\begin{aligned} &-\lambda_1\eta - \lambda_2 = 0, \\ &-\lambda_1 A + 2\lambda_3 p\eta + \psi_1(\eta)w'(\eta) + \psi_2(\eta)z'(\eta) + \psi_3(\eta)m_1'(\eta) = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Kuna $\Delta\alpha$, $\Delta\gamma_0$ ja $\Delta\gamma_1$ on suvalised, siis

$$\begin{aligned} &2\gamma_0\alpha - 2\alpha\gamma_1 - \psi_1(\alpha-)w'(\alpha-) - \psi_2(\alpha-)z'(\alpha-)- \\ &-\psi_3(\alpha-)m_1(\alpha-) + \psi_1(\alpha+)w'(\alpha+)+ \\ &+\psi_2(\alpha+)z'(\alpha+) + \psi_3(\alpha+)m_1'(\alpha+) = 0. \\ &\alpha^2 + \int_\eta^\alpha \left[-\frac{\mu m_1}{\gamma_0^2}\psi_2 + \frac{(1-\nu^2)z}{\mu\rho^2}\psi_3\right] d\rho - \lambda_3 = 0, \\ &1 - \alpha^2 + \int_\alpha^1 \left[-\frac{\mu m_1}{\gamma_1^2}\psi_2 + \frac{(1-\nu^2)z}{\mu\rho^2}\psi_3\right] d\rho = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.3 Kaassüsteemi lahendamine

Lahendame kaasmuutujate jaoks leitud diferentsiaalvõrrandite süsteemid (3.7) ja (3.8), mille siinkohal uuesti välja kirjutame:

$$\begin{cases} \psi_1' = 0 \\ \psi_2' = -\psi_1 + \dfrac{\nu}{\rho}\psi_2 + \dfrac{(1-\nu^2)\gamma_0}{\mu\rho^2}\psi_3 \\ \psi_3' = \dfrac{\mu}{\gamma_0}\psi_2 + \dfrac{1-\nu}{\rho}\psi_3, \end{cases}$$

kui $\rho \in [\eta, \alpha]$ ja

$$\begin{cases} \psi_1' = 0 \\ \psi_2' = -\psi_1 + \dfrac{\nu}{\rho}\psi_2 + \dfrac{(1-\nu^2)\gamma_1}{\mu\rho^2}\psi_3 \\ \psi_3' = \dfrac{\mu}{\gamma_1}\psi_2 + \dfrac{1-\nu}{\rho}\psi_3, \end{cases}$$

kui $\rho \in [\alpha, 1]$. Paneme tähele, et süsteemid (3.7) ja (3.8) erinevad ainult suuruste γ_0 ja γ_1 poolest. Leiame alguses süsteemi (3.7) lahendi ning selle põhjal kirjutame hiljem välja süsteemi (3.8) lahendi. Kaasmuutuja ψ_1 saame süsteemi (3.7) esimesest võrrandist:

$$\psi_1 = C_0. \tag{3.18}$$

Kaasmuutuja ψ_3 leidmiseks avaldame süsteemi (3.7) kolmandast võrrandist muutuja ψ_2:

$$\psi_2 = \frac{\gamma_0}{\mu}\psi_3' - \frac{\gamma_0(1-\nu)}{\mu\rho}\psi_3. \tag{3.19}$$

Võtame kaasmuutujast ψ_2 tuletise:

$$\psi_2' = \frac{\gamma_0}{\mu}\psi_3'' + \frac{\gamma_0(1-\nu)}{\mu\rho^2}\psi_3 - \frac{\gamma_0(1-\nu)}{\mu\rho}\psi_3'.$$

Asendame kaasmuutujad ψ_1 ja ψ_2 ning tema tuletise võrrandisüsteemi (3.7) teise võrrandisse:

$$\frac{\gamma_0\psi_3''}{\mu} + \frac{\gamma_0(1-\nu)\psi_3}{\mu\rho^2} - \frac{\gamma_0(1-\nu)\psi_3'}{\mu\rho} = \frac{\nu\gamma_0\psi_3'}{\mu\rho} - \frac{\gamma_0(\nu-\nu^2)\psi_3}{\mu\rho^2} + \frac{\gamma_0(1-\nu^2)\psi_3}{\mu\rho^2} - C_0.$$

Korrutame saadud võrrandit suurusega $\dfrac{\mu}{\gamma_0}$ ning koondame sarnased liikmed. Nii jõuame võrrandini

$$\psi_3'' - \frac{\psi_3'}{\rho} = -\frac{C_0\mu}{\gamma_0}. \tag{3.20}$$

Saadud diferentsiaalvõrrandi (3.20) lahendamiseks teeme asenduse $u = \dfrac{d\psi_3}{d\rho}$. Pärast muutujavahetust võtab võrrand kuju:

$$u' - \frac{u}{\rho} = -\frac{C_0\mu}{\gamma_0}. \tag{3.21}$$

Paneme tähele, et diferentsiaalvõrrandi (3.21) vastava homogeense võrrandi lahend avaldub kujul

$$u_h = E\rho.$$

Konstantide varieerimise meetodil leiame

$$E = -\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\ln\rho + D_0,$$

kus D_0 on integreerimiskonstant. Seega

$$u = -\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\rho\ln\rho + D_0\rho.$$

Järelikult

$$\psi_3 = -\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\int\rho\ln\rho d\rho + \frac{D_0}{2}\rho^2$$

ehk

$$\psi_3 = -\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\left(\frac{\rho^2}{2}\ln\rho - \frac{\rho^2}{4}\right) + \frac{D_0}{2}\rho^2 + E_0. \tag{3.22}$$

Asendades kaasmuutuja ψ_3 ja tema tuletise valemi (3.22) põhjal avaldisse (3.19), saame

$$\psi_2 = \left(-C_0\rho\ln\rho + \frac{\gamma_0 D_0\rho}{\mu}\right) - \frac{\gamma_0(1-\nu)}{\mu\rho}\left[\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\left(\frac{\rho^2}{2}\ln\rho - \frac{\rho^2}{4}\right) + \frac{D_0}{2}\rho^2 + E_0\right].$$

Pärast teisendamist saame suuruse ψ_2 avaldada kujul:

$$\psi_2 = \frac{C_0\rho}{4}[-2\ln\rho(1+\nu) + \nu - 1] + \frac{\gamma_0}{\mu}\left[\frac{D_0\rho}{2}(1+\nu) + \frac{\nu-1}{\rho}E_0\right]. \tag{3.23}$$

Võttes kokku (3.18), (3.22) ja (3.23) võime diferentsiaalvõrrandite süsteemi (3.7) lahendi esitada kujul

$$\begin{cases} \psi_1 = C_0 \\ \psi_2 = \dfrac{C_0\rho}{4}[-2\ln\rho(1+\nu) + \nu - 1] + \dfrac{\gamma_0}{\mu}\left[\dfrac{D_0\rho}{2}(1+\nu) + \dfrac{\nu-1}{\rho}E_0\right] \\ \psi_3 = -\dfrac{C_0\mu}{\gamma_0}\left(\dfrac{\rho^2}{2}\ln\rho - \dfrac{\rho^2}{4}\right) + \dfrac{D_0}{2}\rho^2 + E_0, \end{cases} \tag{3.24}$$

kus C_0, D_0 ja E_0 on integreerimiskonstandid ning $\rho \in [\eta, \alpha]$. Analoogiliselt avaldub diferentsiaalvõrrandite süsteemi (3.8) lahend kujul

$$\begin{cases} \psi_1 = C_1 \\ \psi_2 = \dfrac{C_1\rho}{4}[-2\ln\rho(1+\nu) + \nu - 1] + \dfrac{\gamma_1}{\mu}\left[\dfrac{D_1\rho}{2}(1+\nu) + \dfrac{\nu-1}{\rho}E_1\right] \\ \psi_3 = -\dfrac{C_1\mu}{\gamma_1}\left(\dfrac{\rho^2}{2}\ln\rho - \dfrac{\rho^2}{4}\right) + \dfrac{D_1}{2}\rho^2 + E_1, \end{cases} \tag{3.25}$$

kus C_1, D_1 ja E_1 on integreerimiskonstandid ning $\rho \in [\alpha, 1]$.

3.4 Põhivõrrandite süsteemi lahendamine

Lahendame põhivõrrandite süsteemi (3.2), mille siinkohal uuesti välja kirjutame:

$$\begin{cases} w' = z \\ z' = -\dfrac{\mu m_1}{\gamma_i} - \dfrac{\nu}{\rho} z \\ m_1' = \dfrac{(\nu^2-1)\gamma_i}{\mu}\dfrac{z}{\rho^2} - \dfrac{m_1}{\rho}(1-\nu) - p\rho, \end{cases}$$

kus $i = 0$, kui $\rho \in [\eta, \alpha]$ ja $i = 1$, kui $\rho \in [\alpha, 1]$. Lahendame süsteemi (3.2) esimeses piirkonnas, st kui $\rho \in [\eta, \alpha]$. Selleks avaldame süsteemi (3.2) kolmandast võrrandist suuruse z:

$$z = \frac{\mu}{(\nu^2-1)\gamma_0}\left[\rho^2 m_1' + \rho m_1(1-\nu) + p\rho^3\right]. \tag{3.26}$$

Leiame avaldise (3.26) põhjal suuruse z tuletise:

$$z' = \frac{\mu}{(\nu^2-1)\gamma_0}\left[\rho^2 m_1'' + \rho m_1'(3-\nu) + m_1(1-\nu) + 3p\rho^2\right]. \tag{3.27}$$

Asendame leitud suuruse z ja tema tuletise valemitest (3.26), (3.27) süsteemi (3.2) teise võrrandisse:

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{(\nu^2-1)\gamma_0}\left[\rho^2 m_1'' + \rho m_1'(3-\nu) + m_1(1-\nu) + 3p\rho^2\right] = \\ &= -\frac{\mu m_1}{\gamma_0} - \frac{\nu}{\rho}\frac{\mu}{(\nu^2-1)\gamma_0}\left[\rho^2 m_1' + \rho m_1(1-\nu) + p\rho^3\right]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Seda võrrandit teisendades saame teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$m_1'' + \frac{3}{\rho} m_1' = -p(3+\nu). \tag{3.29}$$

Diferentsiaalvõrrandi (3.29) lahendamiseks teeme asenduse $u = \dfrac{dm_1}{d\rho}$. Pärast muutujavahetust võtab võrrand kuju:

$$u' + \frac{3}{\rho} u = -p(3+\nu). \tag{3.30}$$

Paneme tähele, et diferentsiaalvõrrandi (3.30) vastava homogeense võrrandi lahend avaldub kujul

$$u_h = E\rho^3.$$

Konstantide varieerimise meetodil leiame

$$E = -p(3+\nu)\frac{\rho^4}{4} + F_0,$$

kus F_0 on integreerimiskonstant. Seega

$$u = \frac{F_0}{\rho^3} - \frac{1}{4}p(3+\nu)\rho.$$

Järelikult

$$m_1 = \int \left(\frac{F_0}{\rho^3} - \frac{1}{4}p(3+\nu)\rho \right) d\rho$$

ehk

$$m_1 = -\frac{F_0}{2\rho^2} - \frac{1}{8}p(3+\nu)\rho^2 + G_0. \tag{3.31}$$

Valemid (3.26) ja (3.31) annavad

$$z = \frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2\rho(\nu-1)} - \frac{G_0\rho}{\nu+1} + \frac{1}{8}p\rho^3 \right]. \tag{3.32}$$

Valemite (3.32) ja (3.2) põhjal

$$w' = \frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2\rho(\nu-1)} - \frac{G_0\rho}{\nu+1} + \frac{1}{8}p\rho^3 \right].$$

Integreerime viimast avaldist, siis saame plaadi läbipainde w kujul (3.33)

$$w = \frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2(\nu-1)}\ln\rho - \frac{G_0\rho^2}{2(\nu+1)} + \frac{1}{32}p\rho^4 \right] + H_0. \tag{3.33}$$

Võttes kokku (3.33), (3.32) ja (3.31) võime diferentsiaalvõrrandite süsteemi (3.2) lahendi esitada kujul

$$\begin{cases} w = \dfrac{\mu}{\gamma_0}\left[\dfrac{F_0}{2(\nu-1)}\ln\rho - \dfrac{G_0\rho^2}{2(\nu+1)} + \dfrac{1}{32}p\rho^4 \right] + H_0 \\ z = \dfrac{\mu}{\gamma_0}\left[\dfrac{F_0}{2\rho(\nu-1)} - \dfrac{G_0\rho}{\nu+1} + \dfrac{1}{8}p\rho^3 \right] \\ m_1 = -\dfrac{F_0}{2\rho^2} - \dfrac{1}{8}p(3+\nu)\rho^2 + G_0, \end{cases} \tag{3.34}$$

kus F_0, G_0 ja H_0 on integreerimiskonstandid ning $\rho \in [\eta, \alpha]$. Analoogiliselt avaldub diferentsiaalvõrrandite süsteemi (3.2) lahend piirkonnas $\rho \in [\alpha, 1]$ kujul

$$\begin{cases} w = \dfrac{\mu}{\gamma_1}\left[\dfrac{F_1}{2(\nu-1)}\ln\rho - \dfrac{G_1\rho^2}{2(\nu+1)} + \dfrac{1}{32}p\rho^4\right] + H_1 \\ z = \dfrac{\mu}{\gamma_1}\left[\dfrac{F_1}{2\rho(\nu-1)} - \dfrac{G_1\rho}{\nu+1} + \dfrac{1}{8}p\rho^3\right] \\ m_1 = -\dfrac{F_1}{2\rho^2} - \dfrac{1}{8}p(3+\nu)\rho^2 + G_1, \end{cases} \tag{3.35}$$

kus F_1, G_1 ja H_1 on integreerimiskonstandid.

3.5 Integreerimiskonstantide määramine

Alustame konstantide F_0, F_1, G_0, G_1, H_0 ja H_1 määramisest. Konstandi H_1 saame määrata rajatingimusest plaadi serval

$$w(1) = 0. \tag{3.36}$$

Asendades süsteemi (3.35) esimese võrrandi rajatingimusse (3.36), saame

$$\frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{F_1}{2(\nu-1)}\ln 1 - \frac{G_1}{2(\nu+1)} + \frac{1}{32}p\right] + H_1 = 0. \tag{3.37}$$

Avaldame võrrandist (3.37) konstandi H_1

$$H_1 = \frac{\mu}{32\gamma_1(\nu+1)}\left[16G_1 - p(\nu+1)\right]. \tag{3.38}$$

Konstandi F_1 saame samuti määrata rajatingimusest plaadi serval

$$m_1(1) = 0. \tag{3.39}$$

Asendades süsteemi (3.35) kolmanda võrrandi rajatingimusse (3.39), saame

$$-\frac{F_1}{2} - \frac{1}{8}p(3+\nu) + G_1 = 0. \tag{3.40}$$

Avaldame võrrandist (3.40) konstandi F_1

$$F_1 = \frac{8G_1 - p(3+\nu)}{4}. \tag{3.41}$$

Konstantide G_0, F_0 ja H_0 määramiseks kasutame pidevuse tingimusi kohal $\rho = \alpha$:

$$\begin{aligned} &w(\alpha-) = w(\alpha+), \\ &z(\alpha-) = z(\alpha+), \\ &m_1(\alpha-) = m_1(\alpha+). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Asendades süsteemide (3.34) ja (3.35) kolmandad valemid pidevuse tingimuste (3.42) kolmandasse avaldisse, saame

$$-\frac{F_0}{2\alpha^2} - \frac{1}{8}p(3+\nu)\alpha^2 + G_0 = -\frac{F_1}{2\alpha^2} - \frac{1}{8}p(3+\nu)\alpha^2 + G_1.$$

Siit saame seose (3.41) abil peale mitmeid algebralisi teisendusi

$$G_0 = \frac{4F_0 - 8G_1(1-\alpha^2) + p(3+\nu)}{8\alpha^2}. \tag{3.43}$$

Asendame süsteemide (3.34) ja (3.35) teised valemid pidevuse tingimuste (3.42) teise avaldisse:

$$\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2\alpha(\nu-1)} - \frac{G_0\alpha}{\nu+1} + \frac{1}{8}p\alpha^3\right] = \frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{F_1}{2\alpha(\nu-1)} - \frac{G_1\alpha}{\nu+1} + \frac{1}{8}p\alpha^3\right].$$

Saadud võrrandist avaldame

$$\begin{aligned} F_0 = &\frac{F_1\gamma_0}{\gamma_1} + \frac{2\alpha^2(\nu-1)G_0}{\nu+1} - \frac{p\alpha^4(\nu-1)}{4} - \\ &-\frac{2\alpha^2 G_1\gamma_0(\nu-1)}{\gamma_1(\nu+1)} + \frac{p\alpha^4\gamma_0(\nu-1)}{4\gamma_1}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Asendades valemisse (3.44) konstandid F_1 ja G_0 valemite (3.41) ja (3.43) abil, saame konstandi F_0 kujul

$$\begin{aligned} F_0 = &\frac{\gamma_0(\nu+1)G_1 - \gamma_1(\nu-1)(1-\alpha^2)G_1 - \alpha^2\gamma_0(\nu-1)G_1}{\gamma_1} - \\ &-\frac{\gamma_0 p(3+\nu)(\nu+1) - p\alpha^4\gamma_0(\nu^2-1)}{8\gamma_1} + \\ &+\frac{(\nu-1)p[3+\nu-\alpha^4(\nu+1)}{8}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Asendame süsteemide (3.34) ja (3.35) esimesed valemid pidevuse tingimuste (3.42) esimesse avaldisse:

$$\begin{aligned}&\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2(\nu-1)}\ln\alpha-\frac{G_0\alpha^2}{2(\nu+1)}+\frac{1}{32}p\alpha^4\right]+H_0=\\&=\frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{F_1}{2(\nu-1)}\ln\alpha-\frac{G_1\alpha^2}{2(\nu+1)}+\frac{1}{32}p\alpha^4\right]+H_1.\end{aligned}$$

Avaldame viimasest võrrandist konstandi H_0:

$$\begin{aligned}&H_0=\frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{F_1}{2(\nu-1)}\ln\alpha-\frac{G_1\alpha^2}{2(\nu+1)}+\frac{1}{32}p\alpha^4\right]+H_1-\\&-\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2(\nu-1)}\ln\alpha-\frac{G_0\alpha^2}{2(\nu+1)}+\frac{1}{32}p\alpha^4\right].\end{aligned}\tag{3.46}$$

Asendades võrrandisse (3.46) konstandid F_1, H_1 ja G_0 seostest (3.41), (3.38), (3.43) saame

$$\begin{aligned}&H_0=\frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{8G_1-p(3+\nu)}{8(\nu-1)}\ln\alpha-\frac{G_1\alpha^2}{2(\nu+1)}+\frac{1}{32}p\alpha^4\right]+\\&+\frac{\mu}{32\gamma_1(\nu+1)}\left[16G_1-p(\nu+1)\right]-\\&-\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2(\nu-1)}\ln\alpha-\frac{4F_0-8G_1(1-\alpha^2)+p(3+\nu)}{16(\nu+1)}+\frac{1}{32}p\alpha^4\right].\end{aligned}\tag{3.47}$$

Teisendades avaldist (3.47), saame konstandi H_0 kujul:

$$\begin{aligned}&H_0=\frac{\mu}{32\gamma_1(\nu^2-1)}\left\{4\left[8G_1-p(3+\nu)\right](\nu+1)\ln\alpha-\right.\\&\left.-16G_1\alpha^2(\nu-1)+16G_1(\nu-1)+p(\nu^2-1)(\alpha^4-1)\right\}-\\&-\frac{\mu}{32\gamma_0(\nu^2-1)}\left\{8F_0[2(\nu+1)\ln\alpha-\nu+1]+\right.\\&\left.+16G_1(1-\alpha^2)(\nu-1)+2p(\nu^2+2\nu-3)+p\alpha^4\gamma_0(\nu^2-1)\right\}.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Konstandi G_1 määramiseks kasutame esimest rajatingimust (2.4) kohal η, st

$$m_1(\eta)=\gamma_0-p\eta^2.$$

Arvutades $m_1(\eta)$ süsteemi (3.34) põhjal ja asendades integreerimiskonstandi G_0 seose (3.43) abil, saame

$$G_1 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left\{\frac{F_0(\eta^2-\alpha^2)}{2\alpha^2\eta^2} - \frac{p\eta^2}{8\alpha^2}\left[\frac{3+\nu}{\eta^2} - (\nu-5)\alpha^2\right] + \gamma_0\right\}. \tag{3.49}$$

Kaasmuutujate ψ_1, ψ_2 ja ψ_3 avaldistes olevate konstandite määramiseks kasutame esiteks pidevuse tingimustest kohal $\rho = \alpha$ esimest avaldist (3.14):

$$\psi_1(\alpha-) = \psi_1(\alpha+).$$

Asendades kaasmuutuja ψ_1 avaldised süsteemidest (3.24) ja (3.25) viimasesse tingimusse, saame

$$C_0 = C_1. \tag{3.50}$$

Konstandi C_1 saame arvutada rajatingimusest (3.12):

$$\psi_2(1) = 0.$$

Selleks asendame antud võrrandisse kaasmuutuja ψ_2 süsteemist (3.25):

$$\frac{C_1}{4}[-2\ln 1(1+\nu)+\nu-1] + \frac{\gamma_1}{\mu}\left[\frac{D_1}{2}(1+\nu) + \frac{\nu-1}{1}E_1\right] = 0. \tag{3.51}$$

Avaldame valemist (3.51) konstandi C_1:

$$C_1 = \frac{-4\gamma_1}{\mu(\nu-1)}\left[\frac{1+\nu}{2}D_1 + (\nu-1)E_1\right]. \tag{3.52}$$

Konstandi E_0 määramiseks kasutame pidevuse tingimustest kohal $\rho = \alpha$ kolmandat avaldist (3.14):

$$\psi_3(\alpha-) = \psi_3(\alpha+).$$

Asendame viimasesse avaldisse kaasmuutuja ψ_3 valemid süsteemidest (3.24) ja (3.25):

$$\begin{aligned} &-\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{D_0}{2}\alpha^2 + E_0 = \\ &= -\frac{C_1\mu}{\gamma_1}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{D_1}{2}\alpha^2 + E_1. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Arvestades, et $C_0 = C_1$, avaldame võrrandist (3.53) konstandi E_0:

$$E_0 = \frac{C_1\mu}{\gamma_0}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \frac{D_0}{2}\alpha^2 - \frac{C_1\mu}{\gamma_1}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right) + \frac{D_1}{2}\alpha^2 + E_1 =$$
$$= C_1\mu\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_1}\right) - \frac{\alpha^2}{2}(D_0 - D_1) + E_1.$$

Asendades viimasesse avaldisse konstandi C_1 seosest (3.52), leiame

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{-4\gamma_1}{\mu(\nu-1)}\left[\frac{1+\nu}{2}D_1 + (\nu-1)E_1\right]\mu\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right)\left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_1}\right) - \\ &-\frac{\alpha^2}{2}(D_0 - D_1) + E_1 = -4\gamma_1\left[\frac{1+\nu}{2(\nu-1)}D_1 + E_1\right]\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha - \frac{\alpha^2}{4}\right)\frac{\gamma_1-\gamma_0}{\gamma_0\gamma_1} - \\ &-\frac{\alpha^2}{2}(D_0 - D_1) + E_1 = E_1\left[(\alpha^2 - 2\alpha^2\ln\alpha)\frac{\gamma_1-\gamma_0}{\gamma_0} + 1\right] + \\ &+D_1\left[\frac{1+\nu}{2(\nu-1)}(\alpha^2 - 2\alpha^2\ln\alpha)\frac{\gamma_1-\gamma_0}{\gamma_0} + \frac{\alpha^2}{2}\right] - \frac{\alpha^2}{2}D_0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Valemit (3.54) teisendades, saame konstandi E_0 avaldada kujul

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\alpha^2\gamma_1(1-2\ln\alpha)}{\gamma_0}E_1 + \frac{\alpha^2(1-2\ln\alpha)(\gamma_1-\gamma_0)(1+\nu)}{2\gamma_0(\nu-1)}D_1 - \\ &-\frac{\alpha^2}{2}(D_0 - D_1). \end{aligned} \tag{3.55}$$

Konstandi E_1 arvutamiseks kasutame pidevuse tingimustest kohal $\rho = \alpha$ teist avaldist (3.14):

$$\psi_2(\alpha-) = \psi_2(\alpha+).$$

Arvestades, et konstant $C_0 = C_1$, asendame viimasesse avaldisse kaasmuutuja ψ_2 valemid süsteemidest (3.24) ja (3.25):

$$\begin{aligned} &\frac{C_0\alpha}{4}[-2\ln\alpha(1+\nu) + \nu - 1] + \frac{\gamma_0}{\mu}\left[\frac{D_0\alpha}{2}(1+\nu) + \frac{\nu-1}{\alpha}E_0\right] = \\ &= \frac{C_1\alpha}{4}[-2\ln\alpha(1+\nu) + \nu - 1] + \frac{\gamma_1}{\mu}\left[\frac{D_1\alpha}{2}(1+\nu) + \frac{\nu-1}{\alpha}E_1\right]. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Koondades sarnased liikmed ja korrutades võrrandit (3.56) suurusega μ, saame

$$\gamma_0\left[\frac{D_0\alpha}{2}(1+\nu) + \frac{\nu-1}{\alpha}E_0\right] = \gamma_1\left[\frac{D_1\alpha}{2}(1+\nu) + \frac{\nu-1}{\alpha}E_1\right]. \tag{3.57}$$

Valemi (3.57) abil leiame

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{\gamma_0\alpha}{\gamma_1(\nu-1)}\left[\frac{D_0\alpha}{2}(1+\nu)+\frac{\nu-1}{\alpha}E_0\right]-\frac{D_1\alpha^2}{2(\nu-1)}(1+\nu)= \\ &= \frac{D_0\gamma_0\alpha^2(1+\nu)}{2\gamma_1(\nu-1)}+\frac{\gamma_0}{\gamma_1}E_0-\frac{D_1\alpha^2(1+\nu)}{2(\nu-1)}.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Peale konstandi E_0 asendamist (3.55) põhjal saame

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{D_0\gamma_0\alpha^2(1+\nu)}{2\gamma_1(\nu-1)}-\frac{\alpha^2\gamma_0}{2\gamma_1}(D_0-D_1)+E_1\alpha^2(1-2\ln\alpha)+ \\ &+\frac{\alpha^2(1-2\ln\alpha)(\gamma_1-\gamma_0)(1+\nu)}{2\gamma_1(\nu-1)}D_1-\frac{D_1\alpha^2(1+\nu)}{2(\nu-1)}.\end{aligned} \tag{3.59}$$

ehk

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{\alpha^2\gamma_0(D_1-D_0)}{2\gamma_1(1-\alpha^2+2\alpha^2\ln\alpha)}+ \\ &+\frac{D_0\gamma_0\alpha^2(1+\nu)}{2\gamma_1(\nu-1)(1-\alpha^2+2\alpha^2\ln\alpha)}- \\ &-\frac{D_1\left[\alpha^2\gamma_1(1+\nu)-\alpha^2(1-2\ln\alpha)(\gamma_1-\gamma_0)(1+\nu)\right]}{2\gamma_1(\nu-1)(1-\alpha^2+2\alpha^2\ln\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

Konstandi D_1 määramiseks kasutame esimest võrrandit seostest (3.17), mille siinkohal uuesti ära toome

$$\begin{aligned}&2\gamma_0\alpha-2\alpha\gamma_1-\psi_1(\alpha-)w'(\alpha-)-\psi_2(\alpha-)z'(\alpha-)- \\ &-\psi_3(\alpha-)m_1(\alpha-)+\psi_1(\alpha+)w'(\alpha+)+ \\ &+\psi_2(\alpha+)z'(\alpha+)+\psi_3(\alpha+)m_1'(\alpha+)=0.\end{aligned}$$

Kuna kaasmuutjad ψ_2 ja ψ_3 on valemi (3.14) põhjal kohal $\rho=\alpha$ pidevad, siis võime viimase avaldise ümber kirjutada kujul

$$2\alpha(\gamma_0-\gamma_1)-\psi_2(\alpha)[z'(\alpha-)-z'(\alpha+)]-\psi_3(\alpha)[m_1'(\alpha-)-m_1'(\alpha+)]=0. \tag{3.61}$$

Asendame võrrandisse (3.61) muutujate z ja m_1 tuletised. See annab

$$\begin{aligned}&2\alpha(\gamma_0-\gamma_1)-\psi_2(\alpha)\left\{\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{-F_0}{2\alpha^2(\nu-1)}-\frac{G_0}{\nu+1}+\frac{3}{8}p\alpha^2\right]-\right. \\ &\left.-\frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{-F_1}{2\alpha^2(\nu-1)}-\frac{G_1}{\nu+1}+\frac{3}{8}p\alpha^2\right]\right\}-\psi_3(\alpha)\left[\frac{F_0}{\alpha^3}-\frac{1}{4}p\alpha(3+\nu)-\right. \\ &\left.-\frac{F_1}{\alpha^3}-\frac{1}{4}p\alpha(3+\nu)\right]=0.\end{aligned}$$

Koondame saadud avaldises sarnased liikmed. Asendame süsteemist (3.24) kaasmuutuja ψ_2 ning süsteemist (3.25) kaasmuutuja ψ_3 antud võrrandisse

$$
\begin{aligned}
&2\alpha(\gamma_0-\gamma_1)-\left\{\frac{C_0\alpha}{4}[-2\ln\alpha(1+\nu)+\nu-1]+\right.\\
&\left.+\frac{\gamma_0}{\mu}\left[\frac{D_0\alpha}{2}(1+\nu)+\frac{\nu-1}{\alpha}E_0\right]\right\}\left\{\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{-F_0}{2\alpha^2(\nu-1)}-\frac{G_0}{\nu+1}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{3}{8}p\alpha^2\right]-\frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{-F_1}{2\alpha^2(\nu-1)}-\frac{G_1}{\nu+1}+\frac{3}{8}p\alpha^2\right]\right\}-\\
&-\left[\frac{C_1\mu}{\gamma_1}\left(\frac{\alpha^2}{2}\ln\alpha-\frac{\alpha^2}{4}\right)+\frac{D_1}{2}\alpha^2+E_1\right]\frac{F_0-F_1}{\alpha^3}=0.
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

Võrrandist (3.62) leiame

$$
\begin{aligned}
D_1=&-\frac{2\alpha}{F_0-F_1}\left\{\frac{C_0\alpha}{4}[-2\ln\alpha(1+\nu)+\nu-1]+\right.\\
&\left.+\frac{\gamma_0}{\mu}\left[\frac{D_0\alpha}{2}(1+\nu)+\frac{\nu-1}{\alpha}E_0\right]\right\}\times\\
&\times\left\{\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{-F_0}{2\alpha^2(\nu-1)}-\frac{G_0}{\nu+1}+\frac{3}{8}p\alpha^2\right]-\right.\\
&\left.-\frac{\mu}{\gamma_1}\left[\frac{-F_1}{2\alpha^2(\nu-1)}-\frac{G_1}{\nu+1}+\frac{3}{8}p\alpha^2\right]\right\}+\\
&+\frac{4\alpha^2(\gamma_0-\gamma_1)}{F_0-F_1}-\frac{C_0\mu(\ln\alpha-2)}{\gamma_1}+\frac{2E_1}{\alpha^2}.
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

Konstandi D_0 määramiseks arvutame konstandid λ_1 ja λ_2. Konstant $\lambda_1=C_1$ valemite (3.50) ja (3.15) põhjal. Konstandi λ_2 saame valemite (3.15) põhjal avaldada kujul

$$
\lambda_2=\frac{C_0\eta}{4}[-2\ln\eta(1+\nu)+\nu-1]+\frac{\gamma_0}{\mu}\left[\frac{D_0\eta}{2}(1+\nu)+\frac{\nu-1}{\eta}E_0\right]. \tag{3.64}
$$

Konstandi D_0 määramiseks kasutame esimest seost valemitest (3.16)

$$
-\lambda_1\eta-\lambda_2=0.
$$

Asendades sellesse valemisse konstandid λ_1 ja λ_2, saame

$$
\eta=-\frac{\eta}{4}[-2\ln\eta(1+\nu)+\nu-1]-\frac{\gamma_0}{\mu C_0}\left[\frac{D_0\eta}{2}(1+\nu)+\frac{\nu-1}{\eta}E_0\right]. \tag{3.65}
$$

Korrutades võrrandit (3.65) suurusega $4\mu C_0$, leiame

$$4\gamma_0\left[\frac{D_0\eta}{2}(1+\nu)+\frac{\nu-1}{\eta}E_0\right]=-\mu C_0\eta[-2\ln\eta(1+\nu)+\nu+3].$$

Siit saame avaldada konstandi D_0 kujul

$$D_0=-\frac{\mu C_0}{2\gamma_0(1+\nu)}[-2\ln\eta(1+\nu)+\nu+3]-\frac{2(\nu-1)E_0}{\eta^2(1+\nu)}. \tag{3.66}$$

Konstandi λ_3 saame avaldada valemite (3.15) põhjal:

$$\lambda_3=-\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\left(\frac{\eta^2}{2}\ln\eta-\frac{\eta^2}{4}\right)+\frac{D_0}{2}\eta^2+E_0. \tag{3.67}$$

Konstant A avaldub valemi (2.4) kolmanda seose põhjal kujul

$$A=\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2\eta(\nu-1)}-\frac{G_0\eta}{\nu+1}+\frac{1}{8}p\eta^3\right]. \tag{3.68}$$

Plastse osa rajapunkti η saame määrata valemi (2.4) teise seose põhjal võrrandist

$$\frac{3}{8}p\eta^4-\frac{G_0}{2(\nu+1)}\eta^2+\frac{F_0}{2\nu-1}(1-\ln\eta)+\frac{\gamma_0}{\mu}(w_0+H_0)=0. \tag{3.69}$$

Teisendades valemite (3.17) teist seost, st asendades kaasmuutujad ψ_2 ja ψ_3 süsteemist (3.24) ning integreerides, saame

$$\begin{aligned}
&\alpha^2+\frac{1}{32\alpha^2\gamma_0^2(\alpha-\eta)}\Big(16F_0\gamma_0+\alpha^4\{4E_0p\gamma_0(\nu-1)+\\
&+C_0\mu(-8G_0+p\alpha^2\nu)+2D_0\gamma_0[-8G_0+p\alpha^2(1+\nu)]\}-\\
&-2C_0\alpha^2\mu[4F_0-8G_0\alpha^2+p\alpha^4(1+\nu)]\ln\alpha\Big)-\\
&-\frac{1}{32\eta^2\gamma_0^2(\eta-\eta)}\Big(16F_0\gamma_0+\eta^4\{4E_0p\gamma_0(\nu-1)+-\\
&+C_0\mu(-8G_0+p\eta^2\nu)+2D_0\gamma_0[-8G_0+p\eta^2(1+\nu)]\}-\\
&-2C_0\eta^2\mu[4F_0-8G_0\eta^2+p\eta^4(1+\nu)]\ln\eta\Big)-\lambda_3=0
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Analoogiliselt teisendame valemite (3.17) kolmandat seost süsteemi (3.25) abil:

$$
\begin{aligned}
&1-\alpha^2+\frac{1}{32(\alpha-1)\gamma_1^2}\{-16F_1E_1\gamma_1+4E_1p\gamma_1+8G_1C_1\mu-\\
&-4E_1p\gamma_1\nu-C_1p\mu\nu+2D_1\gamma_1[8G_1-p(1+\nu)]\}+\\
&+\frac{1}{32(\alpha-1)\alpha^2\gamma_1^2}\Big(16F_1E_1\gamma_1+\alpha^4\{4E_1p\gamma_1(\nu-1)+\\
&+C_1\mu(-8G_1+p\alpha^2\nu)+2D_1\gamma_1[8G_1+p\alpha^2(1+\nu)]\}-\\
&-2C_1\alpha^2\mu[4F_1-8G_1\alpha^2+p\alpha^4(1+\nu)]\ln\alpha\Big)=0.
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

Viimane valem, mida konstantide määramisel kasutada võime, on teine seos avaldistest (3.16) kujul

$$
\begin{aligned}
&-\lambda_1A+2\lambda_3p\eta+C_0\frac{\mu}{\gamma_0}\left[\frac{F_0}{2\eta(\nu-1)}-\frac{G_0\eta}{\nu+1}+\frac{1}{8}p\eta^3\right]+\\
&+\left\{\frac{C_0\eta}{4}[-2\ln\eta(1+\nu)+\nu-1]+\frac{\gamma_0}{\mu}\left[\frac{D_0\eta}{2}(1+\nu)+\frac{\nu-1}{\eta}E_0\right]\right\}\times\\
&\times\frac{\mu}{\gamma_0}\left[-\frac{F_0}{2\eta^2(\nu-1)}-\frac{G_0}{\nu+1}+\frac{3}{8}p\eta^2\right]+\\
&+\left[-\frac{C_0\mu}{\gamma_0}\left(\frac{\eta^2}{2}\ln\eta-\frac{\eta^2}{4}\right)+\frac{D_0}{2}\eta^2+E_0\right]\left[\frac{F_0}{\eta^3}-\frac{1}{4}p(3+\nu)\eta\right]=0.
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Kokkuvõttes oleme tundmatute parameetrite γ_0, γ_1, η ja α määramiseks saanud süsteemi, mis koosneb võrranditest (3.70), (3.71), (3.69) ning (3.72).

Summary

Optimisation of a Sandwich Circular Plate

Julia Polikarpus

In the present work elastic and elastic-plastic circular plates subjected to axisymmetrical loadings are considered.

Equations of equilibrium are derived in the first section of the first chapter. Components of deformation are found in the second section of this chapter. Both geometrically linear and non-linear models of plates are considered. In both cases, the consistence of equilibrium equations and geometrical relations are stated, respectively. Differential equations for the bending of the elastic circular plate are derived in the third section. A general solution of differential equations for the bending of the elastic circular plate is given in the fourth section of the first chapter.

In the second and the third chapter of the study, circular plates made of an ideal elastic-plastic material are considered. It is assumed that the material of the plate obeys the Tresca yield condition-associated flow law. It appears that the plastic flow takes place according to the flow regime associated with the maximal value of the circumferential moment (the horizontal side of the Tresca yield hexagon).

In the second chapter, the stress-strain state of the plate is defined, provided the plate operates in the elastic-plastic range.

In the third chapter of the study, a minimum weight design procedure is developed for sandwich plates. It is assumed that the thickness of the carrying layers is piece-wise constant whereas the thickness of the core material is constant. Necessary optimality conditions are derived making use of variational methods of the theory of control.

Kasutatud kirjandus

[1] Баничук, Н. В. *Введение в оптимизацию конструкций.* Москва, Наука, 1986.
[2] Bryson, A. J., Ho, Y. C. *Applied Optimal Control.* New York, Hemisphere Publ. Co., 1975.
[3] Дзюба, А. П., Левитина, Л. Д. *Оптимизация формы круглых пластин и оболочек вращения.* Днепропетровск, ДГУ, 1985.
[4] Eek, R., Poverus, L. *Ehitusmehaanika II.* Tallinn, Valgus, 1967.
[5] Hocking, L. M. *Optimal Control: an Introduction to the Theory and Applications.* Oxford, Univ. Press, 1991.
[6] Hodge, P. *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells.* New York, Prentice Hall, 1963.
[7] Jones, N. *Structural Impact.* Cambridge, CUP, 1989.
[8] Krauthammer, T., Ventsel, E. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications.* Marcel Dekker, 2001.
[9] Леллеп, Я. *Основы математической теории оптимального управления.* Тарту, Изд. ТГУ, 1981.
[10] Lellep, J. *Optimization of Plastic Structures.* Tartu, Tartu University Press, 1991.
[11] Lewis, F. L., Syrmos, V. L. *Optimal Control.* New York, Wiley, 1995.
[12] Reddy, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and Analysis.* New York, CRC Press, 2003.
[13] Самуль, В. И. *Основы теории упругости и пластичности.* Москва, Высшая школа, 1982.
[14] Троицкий, В. А. *Оптимальные процессы колебаний механических систем.* Ленинград, Машиностроение, 1976.