СПОСОБЪ ОППОЛЬЦЕРА
ДЛЯ
ОПРЕДѢЛЕНІЯ ОКОНЧАТЕЛЬНЫХЪ ОРБИТЪ
И
КОМЕТА 1900 III.

С. Б. ШАРБЕ.

Типо-Цинкогр. Г. Берсъ, Екатеринославъ.
1914 г.

Способъ Оппольцера для опредѣленія окончательныхъ орбитъ и комета 1900 III.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

Введеніе.

При вычисленіи окончательной орбиты кометы 1900 III [1]), поправки къ первоначально принятымъ элементамъ вышли настолько значительными, что вычисленіе по полученнымъ элементамъ не сошлось съ данными дифференціальныхъ формулъ Шенфельда. Поэтому намъ пришлось выбрать другія дифференціальныя формулы; именно мы остановились на способѣ Оппольцера [2]). Въ этомъ способѣ поправки ищутся къ начальнымъ координатамъ x_0 y_0 z_0 и къ проэкціямъ начальной скорости x'_0 y'_0 z'_0, причемъ вводится еще особая система кординатъ. Формулы, данныя Оппольцеромъ, выведены посредствомъ разложеній въ ряды, причемъ приняты члены до четвертаго порядка включительно, что, вообще говоря, достаточно для небольшого промежутка времени. Въ дополненіе къ этому способу Кюнертъ [3]) даль строгія формулы, выраженныя чрезъ эксцентрическую аномалію. Эти формулы и были нами примѣнены въ вышеуказанной работѣ. Но, какъ оказалось, пользоваться ими очень неудобно, такъ какъ малыя величины высшаго порядка получаются вычитаніемъ малыхъ нисшаго порядка; именно M величина четвертаго порядка получается изъ величинъ второго порядка, а N величина пятаго порядка получается изъ величинъ третьяго порядка [4]). Приходится брать большое число знаковъ, чтобы въ результатѣ получить достаточную точность.

Цѣль этой работы во первыхъ провѣрить и упростить сложныя формулы данныя Кюнертомъ и во вторыхъ представить ихъ въ такомъ видѣ, чтобы возможенъ былъ переходъ къ случаю параболы. Для этого въ пер-

---

1) W. Abold und S. Scharbe. Definitive Bahnbestimmung des Cometen 1900 III (Giacobini) Jurjeff. (Dorpat) 1906.

2) Th. v. Oppolzer. Lehrbuch zur Bahnbestimmung. Bd. 2 (pag. 428).

3) A. N. Bd. 95. № 2266. F. Kühnert. Fölgerungen etc.

4) Величину 2f—Sin 2f можно брать изъ таблицъ. Bauschinger. Tafeln. XXXX.

вой главѣ формулы выведены чрезъ истинную аномалію. Затѣмъ показано, что разложеніемъ въ рядъ выраженія:

$$\frac{2g}{Sin\,2g}-1$$

по степенямъ $Sin\,g$, можно упростить формулы для M и N, а вмѣстѣ съ тѣмъ исключить изъ нихъ величину a большую полуось и такимъ образомъ сдѣлать возможнымъ примѣненіе формулъ къ параболической орбитѣ. Численныя значенія введенныхъ при этомъ двухъ рядовъ S_1 и S_2 даны въ приложенныхъ таблицахъ.

Во второй главѣ указанъ способъ нахожденія новой координатной системы, пригодный во всѣхъ случаяхъ, между тѣмъ, какъ пріемъ Оппольцера (Bd. II p. 434) пригоденъ для очень небольшой дуги.

Во второй части выведенныя формулы примѣнены къ вычисленію окончательной орбиты кометы 1900 III и для сравненія приведено вычисленіе съ тѣми же данными по формуламъ Шенфельда. Эти вычисленія показываютъ, что способъ Оппольцера даетъ возможность получать удовлетворительные результаты даже въ случаѣ *большихъ поправокъ* *). Кромѣ того мы можемъ представить элементы функціями одного или двухъ независимыхъ перемѣнныхъ (какъ это сдѣлано нами въ вышеуказанной работѣ по опредѣленію окончательной орбиты кометы 1900 III) и давать этимъ перемѣннымъ значенія въ очень большихъ предѣлахъ.

*) См. Шарбе „Къ вопросу объ опредѣленіи окончательныхъ орбитъ" Екатеринославъ 1914.

Выводъ дифференціальныхъ формулъ.

Дифференціальныя уравненія движенія свѣтила вокругъ солнца пишутся такъ:

(1) $$x'' = -\frac{x}{r^3}\ ;\ y'' = -\frac{y}{r^3}\ ;\ z'' = -\frac{z}{r^3}$$

(1 *) $$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Коэффиціентъ пропорціональности k^2 (постоянная Гаусса) принятъ равнымъ единицѣ; этимъ опредѣляется единица времени. Для солнечной системы эта единица времени равна:

$$\frac{1}{k} = 58\overset{\text{дн.}}{.}1324\ \ldots\ \left[\ Log\,\frac{1}{k} = 1.764419\right].$$ [1])

Интегрированіе этихъ уравненій даетъ слѣдующія общеизвѣстныя уравненія для движенія по эллипсу и гиперболѣ [2]):

2) $$r^2\,v' = \sqrt{p}$$

3) $$V^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a} = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

4) $$\frac{t-T}{a^{3/2}} = E - e\ Sin\ E$$

5) $$r = a\ (1 - e\ Cos\ E) = \frac{p}{1 + e\ Cos\ v}$$

6) $$\rho = r\,r' = \sqrt{a}\,e\ Sin\ E = \frac{r\,e\ Sin\ v}{\sqrt{p}} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

7) $$r\ Cos\ v = a\,(Cos\ E - e)\ ;\qquad r\ Sin\ v = \sqrt{a\,p}\ Sin\ E$$

8) $$\sqrt{r}\ Sin\,\frac{v}{2} = \sqrt{a\,(1+e)}\,Sin\,\frac{E}{2}\ ;\ \sqrt{r}\ \ Cos\,\frac{v}{2} = \sqrt{a\,(1-e)}\ Cos\,\frac{E}{2}$$ [3])

[1]) Массой свѣтила, движущагося вокругъ солнца, мы пренебрегаемъ.
[2]) При движеніи по гиперболѣ a—отрицательно, E мнимо.
[3]) Значенія буквъ общепринятыя (Gauss. Theoria motus.).

Отмѣтимъ для произвольно выбраннаго момента $t_\circ$ соотвѣтствующія величины значкомъ $_\circ$ и введемъ обозначенія:

$$t - t_\circ = \tau\ ; \qquad E - E_\circ = 2\,g\ ; \qquad v - v_\circ = 2\,f$$

тогда легко получаемъ:

9) $$Sin^2\,g = \frac{r\,r_\circ\,Sin^2\,f}{a\,p}\ ;\ Sin\,2\,g = \frac{r\,r_\circ}{p\sqrt{ap}}\Big[Sin\,2\,f + e\,(Sin\,v - Sin\,v_\circ)\Big]$$

10) $$Sin^2 f = \frac{a\,p\,Sin^2\,g}{r\,r_\circ}\ ;\ Sin\,2\,f = \frac{a\sqrt{a\,p}}{r\,r_\circ}\Big[Sin\,2\,g - e\,(Sin\,E - Sin\,E_\circ)\Big] =$$

$$= \frac{a\sqrt{a\,p}}{r\,r_\circ}\left[\frac{\tau}{a^{3/2}} - (2\,g - Sin\,2g)\right]$$

11) $$\frac{r\,r_\circ\,Sin\,2\,f}{\sqrt{p}} = \tau - a^{3/2}\,(2\,g - Sin\,2\,g)$$

12) $$\frac{1}{a} = \frac{2}{r_\circ} - V^2_\circ$$ 12*) $$V^2_\circ = \frac{1 + 2\,e\,Cos\,v_\circ + e^2}{p}$$

13) $$p = a\,(1 - e^2) = r^2_\circ\,V^2_\circ - \rho^2_\circ =$$

$$= (y_\circ\,z'_\circ - z_\circ\,y'_\circ)^2 + (z_\circ\,x'_\circ - x_\circ\,z'_\circ)^2 + (x_\circ\,y'_\circ - y_\circ\,x'_\circ)^2 =$$

$$= (x_\circ^2 + y_\circ^2 + z_\circ^2)\,(x'^2_\circ + y'^2_\circ + z'^2_\circ) - (x_\circ\,x'_\circ + y_\circ\,y'_\circ + z_\circ\,z'_\circ)^2$$

За постоянныя произвольныя мы примемъ $x_\circ, y_\circ, z_\circ, x'_\circ, y'_\circ$ и $z'_\circ$.

Разложимъ x въ рядъ Тайлора по степенямъ τ:

14) $$x = x_\circ + \tau\,x'_\circ + \frac{\tau^2}{1\,.\,2}\,x''_\circ + \frac{\tau^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,x'''_\circ + \ .\ .\ .\ .$$

Производныя $x''_\circ$, $x'''_\circ$ и т. д. мы можемъ, на основаніи уравненій (1) выразить чрезъ $x_\circ$, $x'_\circ$ а также чрезъ $r_\circ$, $r'_\circ$, $r''_\circ$ и т. д.. Но r, какъ извѣстно, удовлетворяетъ дифференціальному уравненію:

15) $$r'' = \frac{1}{r^2} + \frac{p}{r^3}$$

Слѣдовательно $r''_\circ, r'''_\circ$ и т. д. могутъ быть выражены чрезъ $r_\circ$, $r'_\circ$ и p. Такъ какъ x въ уравненіи (1) входитъ линейнымъ образомъ, то x и x' будутъ входить въ x'', x''' и т. д. линейнымъ образомъ. Кромѣ того, p (13) и $r'_\circ$ (6) выражаются чрезъ $r_\circ$, $\rho_\circ$ и $V_\circ^2$. Поэтому, собирая всѣ члены съ $x_\circ$ а также всѣ члены съ $x'_\circ$, мы получимъ:

16*) $$x = A\,x_\circ + B\,x'_\circ$$

гдѣ A и B будутъ функціями $\tau, r_\circ$, $\rho_\circ$ и $V_\circ^2$. Ясно, что такія же уравненія мы получимъ для y и z:

16**) $$y = A\,y_\circ + B\,y'_\circ$$

16***) $$z = A\,z_\circ + B\,z'_\circ.$$

Найдемъ теперь выраженія A и B. Для этого замѣнимъ уравненія (16*), (16**) и (16***) однимъ векторіальнымъ:

17) $$\bar{r} = A\,.\,\bar{r}_\circ + B\,.\,\bar{r}'_\circ$$

Умноживъ обѣ части равенства векторіально на $\bar{r}_\circ$, мы получаемъ:

$$[\bar{r}\ \bar{r}_\circ] = A\,[\bar{r}_\circ\ \bar{r}_\circ] + B\,[\bar{r}'_\circ\,\bar{r}_\circ]$$

Такъ какъ $[\bar{r}_\circ\,\bar{r}_\circ] = 0$, то мы можемъ написать:

$$r\,r_\circ\ Sin\ (r\,r_\circ) = B\,.\,V_\circ\,r_\circ\,Sin\,(V_\circ\,r_\circ)$$

$$B = \frac{r\,r_\circ\ Sin\,(r\,r_\circ)}{V_\circ\,r_\circ Sin\,(V_\circ\,r_\circ)}$$

$Sin\,(r\,r_\circ) = Sin\,(v - v_\circ) = Sin\,2\,f$; проэкція скорости $V_\circ$ на направленіе перпендикулярное къ $r_\circ$ равна:

$$V_\circ\,Sin\,(V_\circ\,r_\circ) = r_\circ\,\theta'_\circ\ ; \quad V_\circ\,r_\circ\,Sin\,(V_\circ\,r_\circ) = r_\circ^2\,\theta'_\circ = \sqrt{p}\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Слѣдовательно:

$$B = \frac{r\,r_\circ\,Sin\,2\,f}{\sqrt{p}}$$

Умножая уравненіе (17) скалярно на $\bar{r}_\circ$, имѣемъ:

$$(\bar{r}\,\bar{r}_\circ) = A\,(\bar{r}_\circ\,\bar{r}_\circ) + B\,(\bar{r}'_\circ\,\bar{r}_\circ)$$

Скобки равны:

$$(\bar{r}\,\bar{r}_\circ) = r\,r_\circ\,Cos\,(v - v_\circ)\ ; \quad (\bar{r}_\circ\,\bar{r}_\circ) = r_\circ^2\ ; \quad (\bar{r}'_\circ\,\bar{r}_\circ) = V_\circ\,r_\circ\ Cos\ (V_\circ\,r_\circ)$$

Проэкція скорости $V_\circ$ на направленіе $r_\circ$ равна:

$$V_\circ\ Cos\ (V_\circ\,r_\circ) = r'_\circ\,;\ (\bar{r}'_\circ\,\bar{r}_\circ) = r_\circ\,r'_\circ = \frac{r_\circ\,e\,Sin\,v_\circ}{\sqrt{p}}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

Откуда получаемъ:

$$r\,r_\circ\,Cos\,(v-v_\circ)=A\,r_\circ^2+B\,\frac{r_\circ\,e\,Sin\,v_\circ}{\sqrt{p}}$$

$$A=\frac{r\,Cos\,(v-v_\circ)}{r_\circ}-\frac{r\,e\,Sin\,v_\circ\,Sin\,(v-v_\circ)}{p}$$

Замѣчая что:

$$\frac{1}{r_\circ}=\frac{1+e\,Cos\,v_\circ}{p}\qquad \text{и}\qquad \frac{1+e\,Cos\,v}{p}=\frac{1}{r}$$

Мы послѣ небольшихъ преобразованій получаемъ:

$$A=1-\frac{2\,r\,Sin^2 f}{p}$$

Выражая f черезъ g, мы имѣемъ:

18) $$A=1-\frac{2\,r\,Sin^2 f}{p}=1-\frac{2\,a\,Sin^2 g}{r_\circ}$$

19) $$B=\frac{r\,r_\circ\,Sin\,2\,f}{\sqrt{p}}=\tau-a^{3/2}\,(2\,g-Sin\,2\,g)$$

т. е. формулы Кюнерта.

Такимъ образомъ A и B выражены какъ функціи p, $r_\circ$, r и $2\,f$. Поэтому, чтобы найти δA и δB [1]), надо найти δp, δr и $\delta\,(2f)$. Какъ сказано A и B выражаются черезъ $r_\circ$, $\rho_\circ$ и $V_\circ^2$, поэтому въ выраженіяхъ δA и δB войдутъ $\delta r_\circ$, $\delta\rho_\circ$ и $\delta V_\circ^2$; а $\delta r_\circ$, $\delta\rho_\circ$ и $\delta V_\circ^2$ на основаніи формулъ (1*), (3) и (6) выразятся чрезъ избранныя нами постоянныя произвольныя такъ:

(1**) $$\delta r_\circ=\frac{x_\circ}{r_\circ}\delta x_\circ+\frac{y_\circ}{r_\circ}\delta y_\circ+\frac{z_\circ}{r_\circ}\delta z_\circ$$

(6*) $$\delta\rho_\circ=x'_\circ\,\delta x_\circ+y'_\circ\,\delta y_\circ+z'_\circ\,\delta z_\circ+x_\circ\,\delta x'_\circ+y_\circ\,\delta y'_\circ+z_\circ\,\delta z'_\circ$$

(3*) $$\delta V_\circ^2=2\,x'_\circ\,\delta x'_\circ+2\,y'_\circ\,\delta y'_\circ+2\,z'_\circ\,\delta z'_\circ$$

Найдемъ теперь δr чрезъ $\delta r_\circ$, $\delta\rho_\circ$ и $\delta V_\circ^2$. Для этого замѣтимъ, что τ и r связаны уравненіемъ [2]):

20) $$\tau=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{R}$$

---

[1]) Дифференціалы относительно постоянныхъ произвольныхъ мы обозначаемъ знакомъ δ.

[2]) Tisserand. F. Traité de mécanique céleste. T. I p 125 (d) et p. 127 (g) a также ур. (6) и (5).

21) $$R=\sqrt{-\frac{p}{r^2}+\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}=\frac{e\,Sin\,v}{\sqrt{p}}=\frac{\sqrt{a}\,e\,Sin\,E}{r}$$

Дифференцируя уравненіе (20) по постояннымъ произвольнымъ, входящимъ въ r, p и a, мы получаемъ:

22) $$0=\frac{\delta r}{R}-\frac{\delta r_\circ}{R_\circ}+\delta p\cdot\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{2\,r^2 R^3}+\delta\,\frac{1}{a}\cdot\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{2\,R^3}$$

Первый интегралъ легко находится, если вмѣсто r ввести перемѣнную v. Дѣйствительно, такъ какъ $d\theta=dv$, то изъ уравненій (6) и (2) находимъ;

$$\frac{dr}{r^2}=\frac{e\,Sin\,v\,dv}{p}$$

Слѣдовательно:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{2\,r^2 R^3}=\int_{v_0}^{v}\frac{\sqrt{p}\,dv}{2\,e^2\,Sin^2 v}=-\frac{\sqrt{p}}{2\,e^2}\left(Ctg\,v-Ctg\,v_\circ\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{p}\,Sin\,(v-v_\circ)}{2\,e^2\,Sin\,v\,\;Sin\,v_\circ}$$

Второй интегралъ равенъ:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{2R^3}=\frac{a}{2}\left(\frac{2r}{R}+\frac{p}{e^2R}-\frac{p^2}{e^2rR}\right)\Bigg|_{r_0}^{r}-\frac{3\,a\,\tau}{2}$$

Этотъ результатъ можно получить, вводя перемѣнную E, а также — провѣрить дифференцированіемъ.

Замѣтивъ что:

$$\frac{2r}{R}+\frac{p}{e^2R}-\frac{p^2}{e^2rR}=\frac{2\sqrt{p}\,r}{e\,Sin\,v}-\frac{p\sqrt{p}\,Ctg\,v}{e^2}$$

и принявъ во вниманіе уравненіе (21), мы получаемъ изъ уравненія (22):

23) $$\delta r=\frac{Sin\,v}{Sin\,v_\circ}\,\delta r_\circ-\frac{Sin\,(v-v_\circ)}{2\,e\,Sin\,v_\circ}\,\delta p\,-$$

$$-\frac{a\,Sin\,v}{2}\left[\left(\frac{2\,r}{Sin\,v}-\frac{p\,Ctg\,v}{e}\right)\Bigg|_{r_0}^{r}-\frac{3\,e\,\tau}{\sqrt{p}}\right]\delta\,\frac{1}{a}$$

Выразимъ δp и $\delta \frac{1}{a}$ черезъ $\delta r_\circ$, $\delta \rho_\circ$ и $\delta V_\circ^2$ помощью уравненій (12) и (13):

$$24)\quad \delta p = \left(2 - \frac{2 r_\circ}{a}\right)\delta r_\circ + 2\,\delta r_\circ + r_\circ^2\,\delta V_\circ^2 - 2\rho_\circ\,\delta \rho_\circ$$

$$25)\quad \delta \frac{1}{a} = -\frac{2}{r_\circ^2}\,\delta r_\circ - \delta V_\circ^2$$

Эти величины надо подставить въ выраженіе δr. Но прежде, чѣмъ это дѣлать, замѣтимъ слѣдующее. Весь коэффиціентъ при $\delta V_\circ^2$, умноженный на $\frac{2}{r_\circ^2}$, имѣется при $\delta r_\circ$, да кромѣ того при $\delta r_\circ$ входятъ еще дополнительные члены; поэтому, найдя въ какой либо формулѣ коэффиціентъ при $\delta V_\circ^2$, мы при $\delta r_\circ$ получимъ то же, умноженное на $\frac{2}{r_\circ^2}$, да еще дополнительные члены, которые надо составить особо [1]).

Кромѣ того замѣтимъ слѣдующія тождества, которыми приходится пользоваться въ дальнѣйшихъ выводахъ:

$$(26)\quad Sin\,\gamma - Sin\,\gamma_\circ = Cos\,\gamma_\circ\,Sin\,(\gamma-\gamma_\circ) - 2\,Sin\,\gamma_\circ\,Sin^2\frac{\gamma-\gamma_\circ}{2} =$$

$$= Cos\,\gamma\,Sin\,(\gamma-\gamma_\circ) + 2\,Sin\,\gamma\,Sin^2\frac{\gamma-\gamma_\circ}{2}$$

$$(27)\quad Cos\,\gamma - Cos\,\gamma_\circ = -Sin\,\gamma_\circ\,Sin\,(\gamma-\gamma_\circ) - 2\,Cos\,\gamma_\circ\,Sin^2\frac{\gamma-\gamma_\circ}{2} =$$

$$= -Sin\,\gamma\,Sin\,(\gamma-\gamma_\circ) + 2\,Cos\,\gamma\,Sin^2\frac{\gamma-\gamma_\circ}{2}$$

$$28)\quad \frac{r}{Sin\,v} - \frac{r_\circ}{Sin\,v_\circ} =$$

$$= -\frac{r\,r_\circ}{p\,Sin\,v\,Sin\,v_\circ}\Big(Sin\,v - Sin\,v_\circ + e\,Sin\,(v-v_\circ)\,Cos\,(v+v_\circ)\Big)$$

Принявъ все это во вниманіе, мы изъ формулы (23) получимъ:

---

[1]) Изъ формулы (12) имѣемъ:

$$\delta\left(-\frac{1}{a}\right) = \delta\,V_\circ^2 + \frac{2}{r^2}\,\delta r_\circ$$

Слѣдовательно можно было-бы предварительно ввести $\delta r_\circ$, $\delta\left(-\frac{1}{a}\right)$ и $\delta \rho_\circ$.

$$29)\quad \left\{\begin{aligned} \delta r = \Bigg[1 &- \frac{r_\circ\,e\,Sin\,v_\circ\,Sin\,2f}{p} - 2\,Sin^2 f + \frac{2a}{r_\circ^2}\left(\frac{r_\circ^2\,e\,Sin\,v_\circ\,Sin\,2f}{2p} + \right.\\ &\left. + \frac{r\,r_\circ\,e\,Sin\,v\,Sin\,2f}{p} + \frac{2\,r\,r_\circ\,Sin^2 f}{p} - \frac{3\,e\,\tau\,Sin\,v}{2\sqrt{p}}\right)\Bigg]\delta r_\circ + \\ &+ a\left(\frac{r_\circ^2\,e\,Sin\,v_\circ\,Sin\,2f}{2p} + \frac{r\,r_\circ\,e\,Sin\,v\,Sin\,2f}{p} + \frac{2\,r\,r_\circ\,Sin^2 f}{p} - \right.\\ &\left. - \frac{3\,e\,\tau\,Sin\,v}{2\sqrt{p}}\right)\delta V_\circ^2 + \frac{r_\circ\,Sin\,2f}{\sqrt{p}}\,\delta\rho_\circ \end{aligned}\right.$$

Выведемъ теперь формулу для $\delta\,(v-v_\circ) = \delta\,(2f)$. Для этого находимъ сперва δv и $\delta v_\circ$ изъ формулъ:

$$e\,Cos\,v = \frac{p}{r} - 1 \quad ; \qquad e\,Cos\,v_\circ = \frac{p}{r_\circ} - 1$$

$$\delta v = \frac{p}{r^2\,e\,Sin\,v}\,\delta r - \frac{1}{r\,e\,Sin\,v}\,\delta p + \frac{Cotg\,v}{e}\,\delta e$$

$$\delta v_\circ = \frac{p}{r_\circ^2\,e\,Sin\,v_\circ}\,\delta r_\circ - \frac{1}{r_\circ\,e\,Sin\,v_\circ}\,\delta p + \frac{Cotg\,v_\circ}{e}\,\delta e$$

Замѣчая, что формулу (29) можно сокращенно написать:

$$\delta r = \delta r_\circ + D \quad ,$$

имѣемъ:

$$30)\quad \delta\,(v-v_\circ) = \frac{p}{r^2\,e\,Sin\,v}\,D + \frac{p}{e}\left(\frac{1}{r^2\,Sin\,v} - \frac{1}{r_\circ^2\,Sin\,v_\circ}\right)\delta r_\circ -$$

$$- \frac{1}{e}\left(\frac{1}{r\,Sin\,v} - \frac{1}{r_\circ\,Sin\,v_\circ}\right)\delta p - \frac{Sin\,(v-v_\circ)}{e\,Sin\,v\,Sin\,v_\circ}\,\delta e$$

Формула (13) даетъ:

$$e^2 = 1 - \frac{p}{a} \quad ;$$

слѣдовательно;

$$2\,e\,\delta e = -\frac{\delta p}{a} - p\,\delta\frac{1}{a} \quad ; \qquad \delta e = -\frac{\delta p}{2\,a\,e} - \frac{p}{2\,e}\,\delta\frac{1}{a}$$

Подставляя значеніе δp и $\delta \frac{1}{a}$ (24), (25) мы получаемъ:

$$\delta e = -\frac{1}{ae}\left(1-\frac{r_\circ}{a}\right)\delta r_\circ + \left(\frac{p}{r_\circ^2 e}-\frac{1}{ae}\right)\delta r_\circ + \frac{r_\circ^2}{2}\left(\frac{p}{r_\circ^2 e}-\frac{1}{ae}\right)\delta V_\circ^2 + \frac{\rho_\circ}{ae}\,\delta\rho_\circ$$

Или иначе:

31) $$\delta e = -\frac{r_\circ}{ap}\left(Cos\,v_\circ + e\right)\delta r_\circ + \frac{1}{p}\left(2\,Cos\,v_\circ + e + e\,Cos^2 v_\circ\right)\delta r_\circ + \frac{r_\circ^2}{2p}\left(2\,Cos\,v_\circ + e + e\,Cos^2 v_\circ\right)\delta V_\circ^2 + \frac{r_\circ Sin\,v_\circ}{a\sqrt{p}}\,\delta\rho_\circ$$

Кромѣ того имѣемъ:

$$\frac{1}{r^2 Sin\,v} - \frac{1}{r_\circ^2 Sin\,v_\circ} = -\frac{1}{p^2 Sin\,v\,Sin\,v_\circ}\left[\left(Sin\,v - Sin\,v_\circ\right)\left(1 + e^2 + e^2 Sin\,v\,Sin\,v_\circ\right) + 2e\,Sin\,(v-v_\circ)\right]$$

$$\frac{1}{r\,Sin\,v} - \frac{1}{r_\circ Sin\,v_\circ} = -\frac{1}{p\,Sin\,v\,Sin\,v_\circ}\left[Sin\,v - Sin\,v_\circ + e\,Sin\,(v-v_\circ)\right]$$

Подставляя все это въ формулу (30), получаемъ:

32) $$\left\{\begin{aligned}
\delta(v-v_\circ) = \delta(2f) = &\left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}-\frac{2r_\circ}{pr}+\frac{r_\circ e^2 Sin\,v\,Sin\,v_\circ}{p^2}\right)Sin\,2f - \frac{4r_\circ e\,Sin\,v\,Sin^2 f}{p^2}\right]\delta r_\circ + 2a\left[\left(\frac{1}{r r_\circ}+\frac{1}{pr}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{e^2 Sin\,v\,Sin\,v_\circ}{2p^2}\right)Sin\,2f + \frac{2e\,Sin\,v\,Sin^2 f}{p^2} - \frac{3\sqrt{p}\,\tau}{2r^2 r_\circ^2}\right]\delta r_\circ +\\
&+ a r_\circ^2\left[\left(\frac{1}{r r_\circ}+\frac{1}{pr}-\frac{e^2 Sin\,v\,Sin\,v_\circ}{2p^2}\right)Sin\,2f + \frac{2e\,Sin\,v\,Sin^2 f}{p^2} - \right.\\
&\left.-\frac{3\sqrt{p}\,\tau}{2r^2 r_\circ^2}\right]\delta V_\circ^2 + \left(-\frac{r_\circ e\,Sin\,v\,Sin\,2f}{p\sqrt{p}} - \frac{4r_\circ Sin^2 f}{p\sqrt{p}}\right)\delta\rho_\circ
\end{aligned}\right.$$

Дифференцируемъ теперь формулу (18):

$$\delta A = -\frac{2\,Sin^2 f}{p}\,\delta r - \frac{r\,Sin\,2f}{p}\,\delta(2f) + \frac{2r\,Sin^2 f}{p^2}\,\delta p$$

Подставляя въ эту формулу значенія δr (29), $\delta(2f)$ (32) и δp (24), мы получаемъ послѣ возможныхъ упрощеній слѣдующее выраженіе:

33) $$\left\{\begin{aligned}
\delta A = &\left\{\frac{r r_\circ}{p^3}\left[Sin\,2f + e\,(Sin\,v - Sin\,v_\circ)\right]^2 + \frac{2r\,Sin^2 f}{p r_\circ}\right\}\delta r_\circ +\\
&+\frac{2}{r_\circ^2}\left\{\frac{3a}{2p\sqrt{p}}\left(\tau - \frac{r r_\circ Sin\,2f}{\sqrt{p}}\right)\left[Sin\,2f + e\,(Sin\,v - Sin\,v_\circ)\right] +\right.\\
&\left.+\frac{2r r_\circ^2 Sin^4 f}{p^2} - \frac{4a\,r r_\circ Sin^4 f}{p^2}\right\}\delta r_\circ +\\
&+\left\{\frac{3a}{2p\sqrt{p}}\left(\tau - \frac{r r_\circ Sin\,2f}{\sqrt{p}}\right)\left[Sin\,2f + e\,(Sin\,v - Sin\,v_\circ)\right] +\right.\\
&\left.+\frac{2r r_\circ^2 Sin^4 f}{p^2} - \frac{4a\,r r_\circ Sin^4 f}{p^2}\right\}\delta V_\circ^2 +\\
&+\frac{2r r_\circ Sin^2 f}{p^2\sqrt{p}}\left[Sin\,2f + e\,(Sin\,v - Sin\,v_\circ)\right]\delta\rho_\circ
\end{aligned}\right.$$

Дифференцируемъ B (19):

$$\delta B = \frac{r_\circ Sin\,2f}{\sqrt{p}}\,\delta r + \frac{r\,Sin\,2f}{\sqrt{p}}\,\delta r_\circ + \frac{r r_\circ Cos\,2f}{\sqrt{p}}\,\delta(2f) - \frac{r r_\circ Sin\,2f}{2p\sqrt{p}}\,\delta p$$

Подставляя величины δr, $\delta(2f)$ и δp въ это выраженіе, мы получаемъ:

34) $$\left\{\begin{aligned}
\delta B = &\frac{2r r_\circ^2 Sin^2 f}{p^2\sqrt{p}}\left[Sin\,2f + e\,(Sin\,v - Sin\,v_\circ)\right]\delta r_\circ +\\
&+\frac{2}{r_\circ^2}\left\{-\frac{3a}{2}\left(1 - \frac{2r_\circ Sin^2 f}{p}\right)\left(\tau - \frac{r r_\circ Sin\,2f}{\sqrt{p}}\right) +\right.\\
&+\frac{a r^2 r_\circ^2 Sin^2 f}{p^2\sqrt{p}}\left(1 - \frac{2r_\circ Sin^2 f}{p}\right)\left[Sin\,2f + e\,(Sin\,v - Sin\,v_\circ)\right] +\\
&\left.+\frac{2r^2 r_\circ^3 Sin\,2f\,Sin^4 f}{p^2\sqrt{p}}\right\}\delta r_\circ +
\end{aligned}\right.$$

$$
34)\quad \left\{\begin{aligned}
&+\left\{-\frac{3a}{2}\left(1-\frac{2r_\circ Sin^2 f}{p}\right)\left(\tau-\frac{r r_\circ Sin\,2f}{\sqrt{p}}\right)+\right.\\
&+\frac{a r^2 r_\circ^2 Sin^2 f}{p^2\sqrt{p}}\left(1-\frac{2r_\circ Sin^2 f}{p}\right)\Big[Sin\,2f+e\,(Sin\,v-Sin\,v_\circ)\Big]+\\
&\left.+\frac{2r^2 r_\circ^3 Sin\,2f\,Sin^4 f}{p^2\sqrt{p}}\right\}\delta\,V_\circ^2+\frac{4 r r_\circ^2 Sin^4 f}{p^2}\,\delta\rho_\circ
\end{aligned}\right.
$$

При выводѣ этой формулы приходится пользоваться нижеслѣдующими равенствами. Положимъ въ формулѣ (26) $\gamma=v$, $\gamma_\circ=v_\circ$, умножимъ все равенство на e и придадимъ къ каждой части равенства по $Sin\ (v-v_\circ)$, при этомъ замѣчаемъ, что въ правой части равенства при $Sin\ (v-v_\circ)=Sin\,2\,f$ стоитъ коэффиціентъ $\frac{p}{r_\circ}$ или $\frac{p}{r}$ такъ что:

$$Sin\,2f+e\,(Sin\,v-Sin\,v_\circ)=\frac{p}{r_\circ}\,Sin\,2f-2e\,Sin\,v_\circ\,Sin^2 f$$

$$=\frac{p}{r}\,Sin\,2f+2e\,Sin\,v\,Sin^2 f$$

А отсюда получаемъ искомыя равенства:

$$35)\quad Sin\,2f=\frac{r_\circ}{p}\Big|Sin\,2f+e\,(Sin\,v-Sin\,v_\circ)\Big|+\frac{2r_\circ e\,Sin\,v_\circ\,Sin^2 f}{p}$$

$$35^*)\quad =\frac{r}{p}\Big|Sin\,2f+e\,(Sin\,v-Sin\,v_\circ)\Big|-\frac{2r\,e\,Sin\,v\,Sin^2 f}{p}$$

Помощью этихъ формулъ можно послѣдній членъ стоящій при $\delta r_\circ$ или $\delta V_\circ^2$ преобразовать такъ:

$$36)\ \text{и}\ 36^*)\ \frac{2r^2 r_\circ^3 Sin\,2f\,Sin^4 f}{p^2\sqrt{p}}=$$

$$=\frac{2r^2 r_\circ^4 Sin^4 f}{p^3\sqrt{p}}\Big|\,Sin\ 2f+e\ (Sin\,v-Sin\,v_\circ)\Big]+\frac{4r^2 r_\circ^4 e\,Sin\,v_\circ Sin^6 f}{p^3\sqrt{p}}$$

$$=\frac{2r^3 r_\circ^3 Sin^4 f}{p^3\sqrt{p}}\Big[Sin\,2f+e\,(Sin\,v-Sin\,v_\circ)\Big]-\frac{4r^3 r_\circ^3 e\,Sin\,v\,Sin^6 f}{p^3\sqrt{p}}$$

Если въ формулахъ (33) и (34) вмѣсто v, $v_\circ$ ввести E и $E_\circ$, то послѣ нѣкоторыхъ преобразованій мы получимъ формулы данныя Кюнертомъ (см. ниже 42*).

Въ предыдущихъ формулахъ (33) и (34) входитъ выраженіе:

$$\tau-\frac{r r_\circ Sin\,2f}{\sqrt{p}}=\tau\,.\left(1-\frac{r r_\circ Sin\,2f}{\tau\sqrt{p}}\right)$$

Въ правой части послѣдній членъ въ скобкахъ представляетъ собой отношеніе площади треугольника, ограниченнаго радіусами r и $r_\circ$, къ соотвѣтствующей площади сектора. Это отношеніе отличается отъ единицы на величины второго порядка относительно τ, слѣдовательно все выраженіе третьяго порядка относительно τ. Поэтому мы это выраженіе разложимъ въ рядъ. Для этого преобразуемъ его помощью формулы (11):

$$\tau-\frac{r r_\circ Sin\,2f}{\sqrt{p}}=a^{3/2}(2g-Sin\,2g)=a^{3/2}Sin\,2g\left(\frac{2g}{Sin\,2g}-1\right)$$

Послѣднее выраженіе въ скобкахъ мы разложимъ въ рядъ по степенямъ $x=Sin\,g$; при этомъ можно было-бы воспользоваться аналогичнымъ разложеніемъ, даннымъ Гауссомъ [1]), но проще поступить такимъ образомъ:

$$x=Sin\,g\quad;\quad g=arc\,Sin\,x$$

$$\frac{2g}{Sin\,2g}=\frac{g}{Sin\,g\,.\,Cos\,g}=\frac{arc\,Sin\,x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Разложимъ въ рядъ

$$y=\frac{arc\,Sin\,x}{\sqrt{1-x^2}}$$

по степенямъ x. Составимъ первую производную:

$$y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\,arc\,Sin\,x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\quad;\quad y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\,y}{1-x^2}\quad;$$

и мы получаемъ дифференціальное уравненіе:

$$(1-x^2)\,y'-x\,y-1=0$$

Беря n-тую производную, мы имѣемъ:

$$(1-x^2)\,y^{(n+1)}-(2n+1)\,x\,y^{(n)}-n^2 y^{(n-1)}=0$$

1) C. F. Gauss. Werke. Bd. VII p. 115 § 90.

Полагая въ этомъ уравненіи $x = 0$ и обозначая соотвѣтствующія значенія производныхъ значкомъ $_{\circ}$, мы получаемъ:

$$y_{\circ}^{(n+1)} = n^2\, y_{\circ}^{(n-1)}$$

Такъ какъ $y'_{\circ} = 1$ а $y_{\circ} = 0$, то полагая послѣдовательно $n = 1, 2, 3....$ имѣемъ:

$$y''_{\circ} = y^{\mathrm{IV}}_{\circ} = \;.\;.\;.\; = y^{(2n)}_{\circ} = 0$$

$$y'''_{\circ} = 2^2 \quad ; \quad y_{\circ}^{\mathrm{V}} = 2^2 \,.\, 4^2 \quad ; \quad y^{\mathrm{VII}}_{\circ} = 2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2 \quad ;$$

$$y_{\circ}^{(2n+1)} = 2^2 \,.\, 4^2 \;.\;.\;.\;.\; (2n)^2$$

Слѣдовательно:

$$y = \frac{arc\,Sin\,x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2^2}{1.2.3}\,x^3 + \frac{2^2 \,.\, 4^2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,x^5 + \dots +$$

$$+ \frac{2^2 \,.\, 4^2 \dots (2n)^2}{1\,.\,2\,.\,3 \dots (2n+1)}\,x^{2n+1} + \dots =$$

$$= x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}x^5 + \,.\,. + \frac{2\,.\,4 \dots 2n}{3\,.\,5 \dots (2n+1)}\,x^{2n+1}$$

$$\frac{arc\,Sin\,x}{x\sqrt{1-x^2}} - 1 = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}x^4 + \dots + \frac{2\,.\,4 \dots 2n}{3\,.\,5 \dots (2n+1)}\,x^{2n} + \dots$$

$$37) \quad \frac{2g}{Sin\,2g} - 1 = \frac{2}{3}x^2\left(1 + \frac{4}{5}x^2 + \dots + \frac{4\,.\,6 \dots 2n}{5\,.\,7\,.\,.\,(2n+1)}\,x^{2n-2} \dots\right)$$

$$= \frac{2}{3}x^2\left(1 + \frac{4}{5}x^2 \,.\, S_2\right)$$

$$x = Sin\;g\,.$$

Для сокращенія обозначено:

$$38) \quad S_2 = 1 + \frac{6}{7}x^2 + \frac{6\,.\,8}{7\,.\,9}x^4 + \dots + \frac{6\,.\,8 \dots 2n}{7\,.\,9 \dots (2n+1)}\,x^{2n-4} + \dots$$

Таблицею II дается величина $Log\;S_2$ по данному аргументу

$$Log\,x = Log\;Sin\;g = \frac{1}{2}\,Log\;\frac{r r_{\circ}\,Sin^2 f}{a\,p}\,.$$

Въ дальнѣйшемъ намъ понадобится еще такое выраженіе:

$$Sin\,2g\,(2g - Sin\,2g) = 4\,Sin^2 g\;Cos^2 g\left(\frac{2g}{Sin\,2g} - 1\right) =$$

$$= 4x^2(1 - x^2)\,.\,\frac{2}{3}\,x^2\left(1 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{4\,.\,6}{5\,.\,7}x^4 + \dots +\right.$$

$$\left. + \frac{4\,.\,6 \dots 2n}{5\,.\,7 \dots (2n+1)}\,x^{2n-2} + \dots\right)$$

Умноженіемъ получаемъ:

$$(1 - x^2)\left(1 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{4\,.\,6}{5\,.\,7}x^4 + \dots +\right.$$

$$\left. + \frac{4\,.\,6 \dots 2n}{5\,.\,7 \dots (2n+1)}\,x^{2n-2} + \dots\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}\,\frac{1}{7}\,x^4 - \dots -$$

$$- \frac{4\,.\,6 \dots (2n-2)}{5\,.\,7 \dots (2n-1)}\;\frac{1}{2n+1}\,x^{2n-2} + \dots\Big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{5}x^2\left(1 + \frac{4}{7}x^2 + \frac{4\,.\,6}{7\,.\,9}x^4 + \dots +\right.$$

$$\left. + \frac{4\,.\,6 \dots (2n-2)}{7\,.\,9 \dots (2n+1)}\,x^{2n-4} + \dots\right)$$

Окончательно имѣемъ:

$$39) \left\{ \begin{aligned} & Sin\,2g\,(2g - Sin\,2g) = Sin^2\,2g\left(\frac{2g}{Sin\,2g} - 1\right) = \\ & \qquad = \frac{8}{3}x^4 - \frac{8}{15}x^6 \,.\, S_1 \\ & S_1 = 1 + \frac{4}{7}x^2 + \frac{4\,.\,6}{7\,.\,9}x^4 + \dots + \frac{4\,.\,6 \dots (2n-2)}{7\,.\,9 \dots (2n+1)}\,x^{2n-4} + \dots \end{aligned} \right.$$

Таблицей I дается величина $Log\;S_1$ по данному аргументу:

$$Log\,x = Log\;Sin\;g = \frac{1}{2}\;Log\;\frac{r r_{\circ}\,Sin^2 f}{a\,p}\,.$$

При $x = 0$ оба ряда S_1 и S_2 обращаются въ единицу [1]).

Примѣнимъ наши разложенія въ ряды къ формуламъ (33) и (34); при этомъ обратимъ вниманіе на слѣдующее: наши формулы (33) и (34) мы могли-бы приложить къ движенію по параболѣ, положивъ $e = 1$, $a = \infty$, но a входитъ множителемъ и поэтому мы получаемъ неопредѣленность вида $\infty . 0$. Эту неопредѣленность мы и раскроемъ помощью нашихъ рядовъ и такимъ образомъ сдѣлаемъ наши формулы пригодными и для движенія по параболѣ. Поэтому выписываемъ только члены при $\delta V_\circ^2$ (слѣдовательно и соотвѣтствующія члены при $\delta r_\circ$), содержащіе множителемъ a. Изъ формулъ (33), (9) и (10) имѣемъ:

$$\frac{3a}{2p\sqrt{p}}\left(\tau - \frac{rr_\circ \mathrm{Sin}\,2f}{\sqrt{p}}\right)\left|\mathrm{Sin}\,2f + e(\mathrm{Sin}\,v - \mathrm{Sin}\,v_\circ)\right| - \frac{4arr_\circ \mathrm{Sin}^4 f}{p^2} =$$

$$= \frac{3a^3}{2rr_\circ}\mathrm{Sin}\,2g\,(2g - \mathrm{Sin}\,2g) - \frac{4a^3\mathrm{Sin}^4 g}{rr_\circ} =$$

$$= \frac{a^3}{rr_\circ}\left|\frac{3}{2}\left(\frac{8}{3}x^4 - \frac{8}{15}x^6 . S_1\right) - 4x^4\right| = -\frac{4a^3x^6}{5rr_\circ} . S_1$$

Вводимъ обратно f вмѣсто g:

$$-\frac{4a^3x^6}{5rr_\circ}S_1 = -\frac{4r^2r_\circ^2\mathrm{Sin}^6 f}{5p^3} . S_1$$

причемъ въ S_1 можно подставить вмѣсто x^2 по формулѣ (9):

$$x^2 = \frac{rr_\circ \mathrm{Sin}^2 f}{ap}$$

[1]) Замѣтимъ, что S_1 выражается чрезъ S_2 и обратно такимъ образомъ:

$$S_1 = 5 - 4(1 - x^2)\,S_2$$

$$S_2 = \frac{5 - S_1}{4(1 - x^2)}$$

Оба эти ряда представляютъ частные случаи гипергеометрическаго ряда а именно:

$$S_1 = \mathrm{F}(2; 1; 3^1/_2; x^2) \quad ; \quad S_2 = \mathrm{F}(3; 1; 3^1/_2; x^2)$$

При $x = 1$ первый рядъ остается сходящимся: $\gamma - \alpha - \beta = \ ^1/_2 > 0$

второй рядъ дѣлается расходящимся: $\gamma - \alpha - \beta = -\,^1/_2 < 0$

$$(S_1)_{x=1} = \frac{\Pi\left(2^1/_2\right)\Pi\left(-^1/_2\right)}{\Pi\left(^1/_2\right)\ \Pi\left(1^1/_2\right)} = 5$$

C. F. Gauss. Werke Bd. 3.

Изъ формулъ (34), (9) и (10) имѣемъ:

$$-\frac{3a}{2}\left(1 - \frac{2r_\circ \mathrm{Sin}^2 f}{p}\right)\left(\tau - \frac{rr_\circ \mathrm{Sin}\,2f}{\sqrt{p}}\right) +$$

$$+\frac{ar^2r_\circ^2\mathrm{Sin}^2 f}{p^2\sqrt{p}}\left(1 - \frac{2r_\circ\mathrm{Sin}^2 f}{p}\right)\left|\mathrm{Sin}\,2f + e(\mathrm{Sin}\,v - \mathrm{Sin}\,v_\circ)\right| =$$

$$= a^{5/2}\mathrm{Sin}\,2g\left(1 - \frac{2a\,\mathrm{Sin}^2 g}{p}\right)\left|-\frac{3}{2}\left(\frac{2g}{\mathrm{Sin}\,2g} - 1\right) + \mathrm{Sin}^2 g\right| =$$

$$= -\frac{4a^{5/2}\mathrm{Sin}\,2g\,\mathrm{Sin}^4 g}{5}\left(1 - \frac{2a\,\mathrm{Sin}^2 g}{p}\right)S_2$$

Вводимъ обратно f вмѣсто g:

$$-\frac{4a^{5/2}\mathrm{Sin}\,2g\,\mathrm{Sin}^4 g}{5}\left(1 - \frac{2a\,\mathrm{Sin}^2 g}{p}\right)S_2 =$$

$$= -\frac{4r^3r_\circ^3\mathrm{Sin}^4 f}{5p^3\sqrt{p}}\left|\mathrm{Sin}\,2f + e(\mathrm{Sin}\,v - \mathrm{Sin}\,v_\circ)\right|\left(1 - \frac{2r_\circ\mathrm{Sin}^2 f}{p}\right)S_2$$

Послѣ этихъ преобразованій формулы (33) и (34) пишутся такъ:

$$40)\ \left\{\begin{aligned} \delta A = &\left\{\frac{rr_\circ}{p^3}\left|\mathrm{Sin}\,2f + e(\mathrm{Sin}\,v - \mathrm{Sin}\,v_\circ)\right|^2 + \frac{2r\,\mathrm{Sin}^2 f}{pr_\circ}\right\}\delta r_\circ + \\ &+\frac{2}{r_\circ^2}\left(\frac{2rr_\circ^2\mathrm{Sin}^4 f}{p^2} - \frac{4r^2r_\circ^2\mathrm{Sin}^6 f}{5p^3} . S_1\right)\delta r_\circ + \\ &+\left(\frac{2rr_\circ^2\mathrm{Sin}^4 f}{p^2} - \frac{4r^2r_\circ^2\mathrm{Sin}^6 f}{5p^3}S_1\right)\delta V_\circ^2 + \\ &+\frac{2rr_\circ\mathrm{Sin}^2 f}{p^2\sqrt{p}}\left|\mathrm{Sin}\,2f + e(\mathrm{Sin}\,v - \mathrm{Sin}\,v_\circ)\right|\delta\rho_\circ \end{aligned}\right.$$

$$41)\ \left\{\begin{aligned} \delta B = &\frac{2rr_\circ^2\mathrm{Sin}^2 f}{p^2\sqrt{p}}\left|\mathrm{Sin}\,2f + e(\mathrm{Sin}\,v - \mathrm{Sin}\,v_\circ)\right|\delta r_\circ + \\ &+\frac{2}{r_\circ^2}\left\{\frac{2r^2r_\circ^3\mathrm{Sin}\,2f\,\mathrm{Sin}^4 f}{p^2\sqrt{p}} - \right. \\ &\left. -\frac{4r^3r_\circ^3\mathrm{Sin}^4 f}{5p^3\sqrt{p}}\left[\mathrm{Sin}\,2f + e(\mathrm{Sin}\,v - \mathrm{Sin}\,v_\circ)\right]\left(1 - \frac{2r_\circ\mathrm{Sin}^2 f}{p}\right)S_2\right\}\delta r_\circ \end{aligned}\right.$$

$$+\left\{\frac{2r^2 r_0^3 \, Sin\, 2f \, Sin^4 f}{p^2\sqrt{p}}-\right.$$

$$\left.-\frac{4r^3 r_0^3 \, Sin^4 f}{5p^3\sqrt{p}}\Big[Sin\, 2f+e\,(Sin\, v-Sin\, v_0)\Big]\left(1-\frac{2r_0 \, Sin^2 f}{p}\right)S_2\right\}\delta V_0^2+$$

$$+\frac{4rr_0^2 \, Sin^4 f}{p^2}\,\delta\rho_0$$

Или, придерживаясь обозначенiй Кюнерта, мы имѣемъ:

40*) $$\delta A = \mathrm{i}\, r_0\, \delta r_0 + \mathrm{M}\, \delta V_0^2 + \mathrm{K}\, \delta\rho_0$$

41*) $$\delta B = \mathrm{l}\, r_0\, \delta r_0 + \mathrm{N}\, \delta V_0^2 + \mathrm{m}\, \delta\rho_0$$

42) $$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \frac{2rr_0^2 \, Sin^4 f}{p^2}-\frac{4r^2 r_0^2 \, Sin^6 f}{5p^3}.\,S_1\\
\mathrm{N} &= \frac{2r^2 r_0^3 \, Sin\, 2f\, Sin^4 f}{p^2\sqrt{p}}-\\
&-\frac{4r^3 r_0^3 \, Sin^4 f}{5p^3\sqrt{p}}\Big[Sin\, 2f+e\,(Sin\, v-Sin\, v_0)\Big]\left(1-\frac{2r_0 \, Sin^2 f}{p}\right)S_2\\
\mathrm{i} &= \frac{r}{p^3}\Big[Sin\, 2f+e\,(Sin\, v-Sin\, v_0)\Big]^2+\frac{2r\, Sin^2 f}{p\, r_0^2}+\frac{2}{r_0^3}\mathrm{M}\\
\mathrm{K} &= \frac{2rr_0 \, Sin^2 f}{p^2\sqrt{p}}\Big[Sin\, 2f+e\,(Sin\, v-Sin\, v_0)\Big]\\
\mathrm{l} &= \mathrm{K}+\frac{2}{r_0^3}\mathrm{N}\\
\mathrm{m} &= \frac{4rr_0^2 \, Sin^4 f}{p^2}
\end{aligned}\right.$$

Эти формулы, выраженныя черезъ E и E_0, легко получаются помощью равенствъ (9), (10) и (11) и даны въ нѣсколько иномъ видѣ Кюнертомъ:

42*) $$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \frac{2a^2 \, Sin^4 g}{r}-\frac{4a^3 \, Sin^6 g}{5rr_0}.\,S_1=\\
&=\frac{2a^2 \, Sin^4 g}{r}-\frac{4a^3 \, Sin^4 g}{rr_0}+\frac{3a^3 \, Sin\, 2g}{2rr_0}\left(2g-Sin\, 2g\right)
\end{aligned}\right.$$

42*) $$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{N} &= \frac{2a^{7/2} \, Sin^4 g}{r}\Big[Sin\, 2g-e\,(Sin\, E-Sin\, E_0)\Big]-\\
&-\frac{4a^{5/2} \, Sin\, 2g\, Sin^4 g}{5}\left(1-\frac{2a\, Sin^2 g}{r}\right).\,S_2=\\
&=\frac{2a^{7/2} \, Sin^4 g}{r}\Big[Sin\, 2g-e\,(Sin\, E-Sin\, E_0)\Big]+\\
&+a^{5/2} \, Sin\, 2g\, Sin^2 g\left(1-\frac{2a\, Sin^2 g}{r}\right)-\\
&-\frac{3a^{5/2}}{2}\left(1-\frac{2a\, Sin^2 g}{r}\right)\left(2g-Sin\, 2g\right)\\
\mathrm{i} &= \frac{a\, Sin^2 2g}{rr_0^2}+\frac{2a\, Sin^2 g}{r_0^3}+\frac{2}{r_0^3}\mathrm{M}\\
\mathrm{K} &= \frac{2a^{3/2} \, Sin\, 2g\, Sin^2 g}{rr_0}\\
\mathrm{l} &= \mathrm{K}+\frac{2}{r_0^3}\mathrm{N}\\
\mathrm{m} &= \frac{4a^2 \, Sin^4 g}{r}
\end{aligned}\right.$$

Замѣтимъ еще, что на основанiи формулы (9) мы получаемъ:

$$\Big[Sin\, 2f+e\,(Sin\, v-Sin\, v_0)\Big]^2=\frac{a\,p^3}{r^2 r_0^2}Sin^2 2g=$$

$$=\frac{4a\,p^3}{r^2 r_0^2}Sin^2 g-\frac{4a\,p^3}{r^2 r_0^2}Sin^4 g=\frac{4p^2}{rr_0}Sin^2 f-\frac{4p}{a}Sin^4 f$$

Слѣдовательно:

43) $$Sin\, 2f+e\,(Sin\, v-Sin\, v_0)=\pm\sqrt{\frac{4p^2}{rr_0}Sin^2 f-\frac{4p}{a}Sin^4 f}$$ [1].

---

[1]) Точно такъ же :

43*) $$Sin\, 2g-e\,(Sin\, E-Sin\, E_0)\quad\pm\sqrt{\frac{4rr_0}{a^2}Sin^2 g-\frac{4p}{a}Sin^4 g}$$

Въ случаѣ параболы надо положить $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, такъ какъ:

$$x^2 = Sin^2\,g = \frac{r\,r_0\,Sin^2 f}{a\,p}$$

при $a = \infty$ обращается въ нуль. Въ формулѣ (43):

$$\frac{p}{a} = 0.$$

Такимъ образомъ для параболы мы получаемъ:

$$43^*)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{M} &= \frac{2\,r\,r_0^2\,Sin^4 f}{p^2} - \frac{4\,r^2\,r_0^2\,Sin^6 f}{5\,p^3} \\
\mathrm{N} &= \frac{2\,r^2\,r_0^3\,Sin\,2f\,Sin^4 f}{p^2\sqrt{p}} - \frac{8\,r^2\,r_0^2\sqrt{r\,r_0}\,Sin^5 f}{5\,p^2\sqrt{p}}\left(1 - \frac{2\,r_0\,Sin^2 f}{p}\right) \\
\mathrm{i} &= \frac{4\,Sin^2 f}{p\,r_0} + \frac{2r\,Sin^2 f}{p\,r_0^2} + \frac{2}{r_0^3}\,\mathrm{M} \\
\mathrm{K} &= \frac{4\sqrt{r\,r_0}\,Sin^3 f}{p\sqrt{p}} \\
\mathrm{l} &= \mathrm{K} + \frac{2}{r_0^3}\,\mathrm{N} \\
\mathrm{m} &= \frac{4\,r\,r_0^2\,Sin^4 f}{p^2}
\end{aligned}\right.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда x выходитъ за предѣлы данныхъ таблицъ, можно вычислить S_1 и S_2 рядами либо въ случаѣ эллипса по формуламъ, получаемымъ изъ (37) и (39):

$$44)\quad \left\{\begin{aligned}
S_1 &= \frac{5\,[8\,Sin^4 g - 3\,Sin\,2\,g\;(2\,g - Sin\,2\,g)]}{8\,Sin^6 g} \\
S_2 &= \frac{5\,[3\,(2\,g - Sin\,2\,g) - 2\,Sin^2 g\,Sin\,2\,g]}{8\,Sin\,2\,g\,Sin^4 g}
\end{aligned}\right.$$

или вычислять M и N по формуламъ (42*)

Принимая во вниманіе формулы (16), (40*), (41*) а также (1**), (3*) и (6*) стр. 8 мы получаемъ слѣдующія равенства:

$$45)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta x = {} & [A + (\mathrm{i}\,x_0 + \mathrm{K}\,x'_0)\,x_0 + (\mathrm{l}\,x_0 + \mathrm{m}\,x'_0)\,x'_0]\,\delta x_0 + \\
& + [(\mathrm{i}\,y_0 + \mathrm{K}\,y'_0)\,x_0 + (\mathrm{l}\,y_0 + \mathrm{m}\,y'_0)\,x'_0]\,\delta y_0 + \\
& + [(\mathrm{i}\,z_0 + \mathrm{K}\,z'_0)\,x_0 + (\mathrm{l}\,z_0 + \mathrm{m}\,z'_0)\,x'_0]\,\delta z_0 + \\
& + [B + (\mathrm{K}\,x_0 + 2\,\mathrm{M}\,x'_0)\,x_0 + (\mathrm{m}\,x_0 + 2\,\mathrm{N}\,x'_0)\,x'_0]\,\delta x'_0 + \\
& + [(\mathrm{K}\,y_0 + 2\,\mathrm{M}\,y'_0)\,x_0 + (\mathrm{m}\,y_0 + 2\,\mathrm{N}\,y'_0)\,x'_0]\,\delta y'_0 + \\
& + [(\mathrm{K}\,z_0 + 2\,\mathrm{M}\,z'_0)\,x_0 + (\mathrm{m}\,z_0 + 2\,\mathrm{N}\,z'_0)\,x'_0]\,\delta z'_0 + \\
\delta y = {} & + [(\mathrm{i}\,x_0 + \mathrm{K}\,x'_0)\,y_0 + (\mathrm{l}\,x_0 + \mathrm{m}\,x'_0)\,y'_0]\,\delta x_0 + \\
& + [A + (\mathrm{i}\,y_0 + \mathrm{K}\,y'_0)\,y_0 + (\mathrm{l}\,y_0 + \mathrm{m}\,y'_0)\,y'_0]\,\delta y_0 + \\
& + [(\mathrm{i}\,z_0 + \mathrm{K}\,z'_0)\,y_0 + (\mathrm{l}\,z_0 + \mathrm{m}\,z'_0)\,y'_0]\,\delta z_0 + \\
& + [(\mathrm{K}\,x_0 + 2\,\mathrm{M}\,x'_0)\,y_0 + (\mathrm{m}\,x_0 + 2\,\mathrm{N}\,x'_0)\,y'_0]\,\delta x'_0 + \\
& + [B + (\mathrm{K}\,y_0 + 2\,\mathrm{M}\,y'_0)\,y_0 + (\mathrm{m}\,y_0 + 2\,\mathrm{N}\,y'_0)\,y'_0]\,\delta y'_0 + \\
& + [(\mathrm{K}\,z_0 + 2\,\mathrm{M}\,z'_0)\,y_0 + (\mathrm{m}\,z_0 + 2\,\mathrm{N}\,z'_0)\,y'_0]\,\delta z'_0 + \\
\delta z = {} & + [(\mathrm{i}\,x_0 + \mathrm{K}\,x'_0)\,z_0 + (\mathrm{l}\,x_0 + \mathrm{m}\,x'_0)\,z'_0]\,\delta x_0 + \\
& + [(\mathrm{i}\,y_0 + \mathrm{K}\,y'_0)\,z_0 + (\mathrm{l}\,y_0 + \mathrm{m}\,y'_0)\,z'_0]\,\delta y_0 + \\
& + [A + (\mathrm{i}\,z_0 + \mathrm{K}\,z'_0)\,z_0 + (\mathrm{l}\,z_0 + \mathrm{m}\,z'_0)\,z'_0]\,\delta z_0 + \\
& + [(\mathrm{K}\,x_0 + 2\,\mathrm{M}\,x'_0)\,z_0 + (\mathrm{m}\,x_0 + 2\,\mathrm{N}\,x'_0)\,z'_0]\,\delta x'_0 + \\
& + [(\mathrm{K}\,y_0 + 2\,\mathrm{M}\,y'_0)\,z_0 + (\mathrm{m}\,y_0 + 2\,\mathrm{N}\,y'_0)\,z'_0]\,\delta y'_0 + \\
& + [B + [(\mathrm{K}\,z_0 + 2\,\mathrm{M}\,z'_0)\,z_0 + (\mathrm{m}\,z_0 + 2\,\mathrm{N}\,z'_0)\,z'_0]\,\delta z'_0 +
\end{aligned}\right.$$

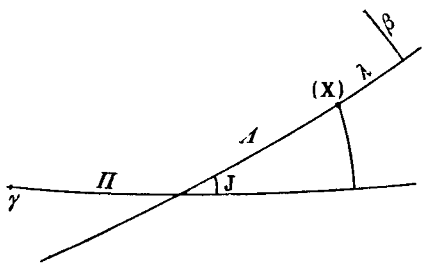
Эти уравненія соотвѣтствуютъ уравненіямъ Оппольцера (Lehrbuch Bd. II p. 431. (10)).

Введеніе особыхъ координатныхъ осей.

Выведенныя формулы можно приложить ко всякой системѣ координатъ. Но Оппольцеръ показалъ, что вмѣсто экваторіальной системы выгоднѣе ввести особую нижеслѣдующую систему координатъ.

Возьмемъ начало координатъ въ центрѣ земли (геоцентрическая система) и проведемъ плоскость (XOY) такъ, чтобы большой кругъ образуемый этой плоскостью на небесной сферѣ проходилъ возможно ближе къ видимымъ положеніямъ наблюдаемаго свѣтила. Ось (X) направимъ въ этой плоскости къ положенію свѣтила въ моментъ среднiй изъ наблюденныхъ моментовъ. Ось (0Y) направимъ перпендикулярно къ (0X), (0Z)—перпендикулярно къ плоскости (X0Y).

Положеніе основной плоскости (X0Y) определяется наклоненіемъ J этой плоскости къ экватору и долготой Π восходящаго узла (черт. 1). Далѣе положеніе оси (X) опредѣляется угломъ Λ между нею и восходящимъ узломъ Π.



Черт. 1.

Оппольцеръ далъ способъ для вычисленія J и Π, пригодный только для очень близкихъ другъ къ другу наблюденій.

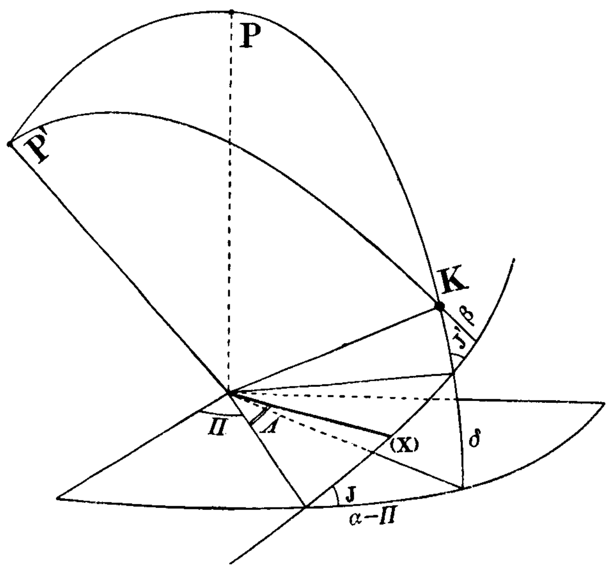
Для кометы 1900 III, у которой видимый путь по небу составлялъ дугу около 60°, способъ оказался непригоднымъ. Въ нашей работѣ о кометѣ 1900 III мы дали другой способъ.

Здѣсь дается третій способъ пригодный во всѣхъ случаяхъ.

Обозначимъ чрезъ λ и β видимыя сферическія координаты свѣтила по отношенію къ нашей основной плоскости координатъ (черт. 1 и 2) и будемъ называть ихъ долготой и широтой. Пусть плоскость (X0Y) опредѣляется тѣмъ условіемъ, что

$$\Sigma\, Sin^2\beta = \text{минимумъ} \qquad ^1),$$

причемъ суммированіе распространяется на всѣ положенія свѣтила (нормальныя мѣста). Назовемъ P полюсъ экватора, P′ полюсъ нашей основной плоскости (черт. 2), α и δ—прямое восхожденіе и склоненіе свѣтила K (нормальнаго мѣста), A и D—прямое восхожденіе и склоненіе полюса P′.



Черт. 2.

Тогда косинусъ угла P′K или синусъ β равенъ, какъ извѣстно:

$$Cos\,(P'K) = Sin\,\beta =$$
$$= xX + yY + zZ$$

¹) Поставленное условіе соотвѣтствуетъ задачѣ о разысканіи главныхъ осей моментовъ инерціи а слѣдовательно опредѣленію направленія осей трехоснаго эллипсоида. E. Anding. Kritische Untersuchungen uber die Bewegung der Sonne durch den Weltraum (pag 41).

гдѣ

$$x = Cos\,\delta\, Cos\,\alpha \qquad X = Cos\,D\, Cos\,A$$
$$y = Cos\,\delta\, Sin\,\alpha \qquad Y = Cos\,D\, Sin\,A$$
$$z = Sin\,\delta \qquad Z = Sin\,D$$

Намъ надо опредѣлить A и D такъ, чтобы:

46) $$\Sigma\,(xX + yY + zZ)^2 = \text{минимумъ}$$

при условіи: (47) $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$

Примѣняя правила для разысканія относительныхъ максимумовъ и минимумовъ, мы имѣемъ:

48) $$\Phi = \Sigma\,(xX + yY + zZ)^2 - s\,(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

49) $$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial X} &= \Sigma\,(x^2 X + xy\,Y + xz\,Z) - s\,X = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial Y} &= \Sigma\,(y\,x\,X + y^2\,Y + yz\,Z) - s\,Y = 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial Z} &= \Sigma\,(z\,x\,X + zy\,Y + z^2\,Z) - s\,Z = 0 \end{aligned}\right.$$

Вводя обозначенія способа наименьшихъ квадратовъ, получаемъ:

50) $$\left\{\begin{aligned} ([xx] - s)\,X + [xy]\;Y + [xz]\;Z &= 0 \\ [yx]\;X + ([yy] - s)\;Y + [yz]\;Z &= 0 \\ [zx]\;X + [zy]\;Y + ([zz] - s)\;Z &= 0 \end{aligned}\right.$$

Эти уравненія даютъ опредѣлитель:

51) $$\begin{vmatrix} [xx] - s & ; & [xy] & ; & [xz] \\ [yx] & ; & [yy] - s & ; & [yz] \\ [zx] & ; & [zy] & ; & [zz] - s \end{vmatrix} = 0$$

Развернувъ опредѣлитель, мы получаемъ уравненіе третьей степени относительно s. Въ нашемъ случаѣ можно избѣжать рѣшенія этого уравненія.

Дѣйствительно, умножая уравненія (49) соотвѣтственно на X, Y и Z, складывая и принимая во вниманіе условіе (47), мы получаемъ:

$$\Sigma\,(x^2 X^2 + y^2 Y^2 + z^2 Z^2 + 2xy\,XY + 2xz\,XZ + 2yz\,YZ) - s = 0$$

или
$$s = \Sigma\,(xX + yY + zZ)^2$$

52)
$$s = \Sigma\, Sin^2\beta$$

Такъ какъ получаемыя широты свѣтила малы, то слѣдовательно s величина малая второго порядка относительно β и можетъ быть принята равной нулю. Тогда уравненія (50) напишутся такъ:

53)
$$\left\{\begin{aligned} &[x\,x]\;X + [x\,y]\;Y + [x\,z]\;Z = 0 \\ &[y\,x]\;X + [y\,y]\;Y + [y\,z]\;Z = 0 \end{aligned}\right.$$

Послѣднее уравненіе отброшено, такъ какъ оно является слѣдствіемъ первыхъ двухъ. Изъ этихъ уравненій, по раздѣленіи на $Z = Sin\,\mathrm{D}$, получаемъ:

54)
$$\left\{\begin{aligned} &[x\,x]\; Cotg\,\mathrm{D}\; Cos\,\mathrm{A} + [x\,y]\; Cotg\,\mathrm{D}\; Sin\,\mathrm{A} = -[x\,z] \\ &[y\,x]\; Cotg\,\mathrm{D}\; Cos\,\mathrm{A} + [y\,y]\; Cotg\,\mathrm{D}\; Sin\,\mathrm{A} = -[y\,z] \end{aligned}\right.$$

Отсюда находимъ $Cotg\,\mathrm{D}\; Cos\,\mathrm{A}$ и $Cotg\,\mathrm{D}\; Sin\,\mathrm{A}$ а затѣмъ A и D. Полюсъ P' основной плоскости (XOY) будемъ брать всегда въ сѣверномъ полушаріи, слѣдовательно $0 < \mathrm{D} < 90^\circ$.

Затѣмъ J и II найдутся по формуламъ:

55)
$$\mathrm{J} = 90^\circ - \mathrm{D} \qquad ; \qquad \mathrm{II} = \mathrm{A} + 90^\circ$$

Все вычисленіе достаточно вести, вообще говоря, съ четырьмя знаками [1]).

Примѣнимъ этотъ способъ къ кометѣ 1900 III.

Даны:

α		δ		α		δ		α		δ	
345°	11′	—22	47′	10	26	—22	39	24	43	20	37
348	21	—23	0	14	33	—22	12	42	46	16	11
3	17	—23	8	17	39	—21	48	47	33	14	44

По этимъ α и δ вычисляемъ:

$$[x\,x] = 6.5061 \;\; ; \;\; [y\,y] = 1.3419 \;\; ; \;\; [x\,y] = 1.5383 \;\; ;$$

$$[x\,z] = -2.7370 \;\; ; \;\; [y\,z] = -0.6149$$

[1]) Въ томъ рѣдкомъ случаѣ, когда опредѣлитель $[x\,x]\,[y\,y] - [x\,y]\,[y\,x]$ равенъ нулю, что имѣетъ мѣсто, когда всѣ положенія свѣтила находятся почти на одномъ кругѣ склоненій, надо D взять равнымъ нулю. Затѣмъ изъ уравненій (53) имѣемъ

$$\frac{Y}{X} = tg\;\mathrm{A} = \frac{[x\,z]\,[y\,x] - [y\,z]\,[x\,x]}{[x\,y]\,[y\,z] - [y\,y]\,[x\,z]}$$

Уравненія (54) будутъ такими:

$$6.5061\; Cotg\,\mathrm{D}\; Cos\,\mathrm{A} + 1.5383\; Cotg\,\mathrm{D}\; Sin\,\mathrm{A} = 2.7370$$

$$1.5383\; Cotg\,\mathrm{D}\; Cos\,\mathrm{A} + 1.3419\; Cotg\,\mathrm{D}\; Sin\,\mathrm{A} = 0.6149$$

Отсюда:
$$\mathrm{A} = 355^\circ\,35' \qquad \mathrm{D} = 66^\circ\,44'$$
$$\mathrm{J} = 23^\circ\,16' \qquad \mathrm{II} = 85^\circ\,35'.$$

Въ нашей вышеуказанной работѣ мы другимъ способомъ нашли то же:

$$\mathrm{J} = 23^\circ\,16' \qquad \mathrm{II} = 85^\circ\,35'$$

Вычисляя по этимъ даннымъ λ и β а затѣмъ $s = \Sigma\, Sin^2\beta$ получаемъ: $s = 0.000022$ слѣдовательно при четырехзначномъ вычисленіи коэффиціенты уравненій (54) и (50) другъ отъ друга не отличаются.

Зная J, II и α_m—прямое восхожденіе свѣтила для момента средняго изъ наблюденныхъ, мы найдемъ приближенно Λ по формулѣ:

56)
$$tg\,\Lambda = tg\,(\alpha_m - \mathrm{II})\; sec\,\mathrm{J}.$$

Λ лежитъ въ той же четверти, что и $\alpha_m - \mathrm{II}$.

При вычисленіи J, II и Λ особой точности не требуется. Но, получивъ эти величины, мы должны послѣдующія вычисленія производить съ выбранными J, II и Λ уже точно.

Долготы и широты λ и β свѣтила (нормальныхъ мѣстъ) получаются изъ формулъ:

57)
$$\left\{\begin{aligned} n\; Sin\; N &= Cos\,\delta\; Sin\,(\alpha - \mathrm{II}) \\ n\; Cos\; N &= Sin\,\delta \\ Cos\,\beta\; Cos\,(\lambda + \Lambda) &= Cos\,\delta\; Cos\,(\alpha - \mathrm{II}) \\ Cos\,\beta\; Sin\,(\lambda + \Lambda) &= n\; Sin\,(N + \mathrm{J}) \\ Sin\,\beta &= n\; Cos\,(N + \mathrm{J}) \end{aligned}\right.$$

Затѣмъ долгота узла (Ω), долгота перигелія (ω) и наклонность (i) относительно принятой основной плоскости опредѣляются изъ формулъ:

58)
$$\left\{\begin{aligned} Sin\,(i)\; Cos\,\sigma &= -Sin\,\mathrm{J}\; Cos\,i' + Cos\,\mathrm{J}\; Sin\,i'\; Cos\,(\Omega' - \mathrm{II}) \\ Sin\,(i)\; Sin\,\sigma &= Sin\,i'\; Sin\,(\Omega' - \mathrm{II}) \\ Cos\,(i) &= Cos\,\mathrm{J}\; Cos\,i' + Sin\,\mathrm{J}\; Sin\,i'\; Cos\,(\Omega' - \mathrm{II}) \\ Sin\,(i)\; Cos\,\sigma_1 &= Cos\,\mathrm{J}\; Sin\,i' - Sin\,\mathrm{J}\; Cos\,i'\; Cos\,(\Omega' - \mathrm{II}) \\ Sin\,(i)\; Sin\,\sigma_1 &= Sin\,\mathrm{J}\; Sin\,(\Omega' - \mathrm{II}) \\ (\Omega) = \sigma - \Lambda \quad &; \quad (\omega) = \omega' - \sigma_1 \end{aligned}\right.$$

Здѣсь значкомъ ′ отмѣчены величины, относящіяся къ экватору [1]). Затѣмъ вычисляются:

$$
59)\quad
\begin{cases}
Sin\,(a)\,Sin\,(A) = Cos\,(\Omega) & ;\; Sin\,(b)\,Sin\,(B) = Sin\,(\Omega)\\
Sin\,(a)\,Cos\,(A) = -Cos\,(i)\,Sin\,(\Omega) & ;\; Sin\,(b)\,Cos\,(B) = Cos\,(i)\,Cos(\Omega)\\
(A') = (A) + (\omega) & ;\quad Sin\,(c) = Sin\,(i)\\
(B') = (B) + (\omega) & ;\quad (C') = (\omega)
\end{cases}
$$

Проведемъ теперь оси координатъ параллельно взятымъ, но съ началомъ въ центрѣ солнца (геліоцентрическая система). Начальныя геліоцентрическія координаты (x_0), (y_0) и (z_0) свѣтила найдемъ изъ формулъ:

$$
60)\quad
\begin{cases}
(x_0) = r_0\,Sin\,(a)\,Sin\left((A') + v_0\right)\\
(y_0) = r_0\,Sin\,(b)\,Sin\left((B') + v_0\right)\\
(z_0) = r_0\,Sin\,(c)\,Sin\left((C') + v_0\right)
\end{cases}
$$

Проэкціи начальной скорости на оси координатъ находятся такъ:

$$
61)\quad
\begin{cases}
\gamma\,Sin\,\Gamma = Sin\,v_0\\
\gamma\,Cos\,\Gamma = Cos\,v_0 + e\\
(x'_0) = \dfrac{\gamma}{\sqrt{p_0}}\,Sin\,(a)\,Cos\left((A') + \Gamma\right)\\
(y'_0) = \dfrac{\gamma}{\sqrt{p_0}}\,Sin\,(b)\,Cos\left((B') + \Gamma\right)\\
(z'_0) = \dfrac{\gamma}{\sqrt{p_0}}\,Sin\,(c)\,Cos\left((C') + \Gamma\right)
\end{cases}
$$

Для параболы эти формулы упрощаются:

$$
62)\quad
\begin{cases}
(x'_0) = \dfrac{2\,Cos\,\dfrac{v_0}{2}}{\sqrt{p_0}}\,Sin\,(a)\,Cos\left((A') + \dfrac{v_0}{2}\right)\\
(y'_0) = \dfrac{2\,Cos\,\dfrac{v_0}{2}}{\sqrt{p_0}}\,Sin\,(b)\,Cos\left((B') + \dfrac{v_0}{2}\right)
\end{cases}
$$

[1]) Можно тѣ же величины вычислять по другимъ формуламъ Oppolzer Bd. II. p. 436. (29).

$$
62)\quad (z'_0) = \frac{2\,Cos\,\dfrac{v_0}{2}}{\sqrt{p_0}}\,Sin\,(c)\,Cos\left((C') + \frac{v_0}{2}\right)
$$

Для провѣрки можно пользоваться еще слѣдующими формулами:

$$
63)\quad
\begin{cases}
n\,Sin\,N = Sin\,\Lambda\;Cos\,J \quad ; \quad m\,Sin\,M = Sin\,\Lambda\\
n\,Cos\,N = Cos\,\Lambda \quad ; \quad m\,Cos\,M = Cos\,\Lambda\,Cos\,J\\
(x_0) = n\,Cos\,(N+\Pi).\,x_0 + n\,Sin\,(N+\Pi).\,y_0 + Sin\,\Lambda\,Sin\,J.\,z_0\\
(y_0) = -m\,Sin\,(M+\Pi).\,x_0 + m\,Cos\,(M+\Pi).\,y_0 + Cos\,\Lambda\,Sin\,J.\,z_0\\
(z_0) = Sin\,\Pi\,Sin\,J.\,x_0 - Cos\,\Pi\,Sin\,J.\,y_0 + Cos\,J.\,z_0
\end{cases}
$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 экваторіальныя геліоцентрическія координаты. По этимъ формуламъ можно вычислить и (x'_0), (y'_0) и (z'_0), подставивъ вмѣсто x_0, y_0 и z_0 соотвѣтственно x'_0, y'_0 и z'_0—проэкціи скорости на экваторіальныя оси координатъ.

Затѣмъ $\Delta\lambda.\,Cos\,\beta$ и $\Delta\beta$ для каждаго нормальнаго мѣста могутъ быть найдены изъ:

$$
64)\quad
\begin{cases}
\Delta\lambda.\,Cos\,\beta = \Delta\alpha.\,Cos\,\delta.\,Sin\,J' + \Delta\delta.\,Cos\,J'\\
\Delta\beta = -\Delta\alpha.\,Cos\,\delta.\,Cos\,J' + \Delta\delta.\,Sin\,J'
\end{cases}
$$

гдѣ уголъ J' (черт. 2) получается такъ:

$$
65)\quad Cos\,J' = Sin\,J\,Cos\,(\alpha - \Pi) \qquad 0 < J' < 180^\circ
$$

При большихъ $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ можно вычислять λ и β изъ α и δ по формуламъ (57) а потомъ составлять $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$.

Для каждаго нормальнаго мѣста мы имѣемъ дифференціальныя формулы вида:

$$
66)\quad
\begin{cases}
\Delta\lambda.\,Cos\,\beta = -\dfrac{Sin\,\lambda}{\Delta}\,\delta x + \dfrac{Cos\,\lambda}{\Delta}\,\delta y\\
\Delta\beta = -\dfrac{Cos\,\lambda\,Sin\,\beta}{\Delta}\,\delta x - \dfrac{Sin\,\lambda\,Sin\,\beta}{\Delta}\,\delta y + \dfrac{Cos\,\beta}{\Delta}\,\delta z
\end{cases}
$$

Δ обозначаетъ разстояніе свѣтила отъ земли. Вмѣсто δx, δy и δz надо поставить ихъ выраженіе изъ формулъ (45). Продѣлавъ это мы получимъ уравненія вида:

$$
a_1\,\delta x_0 + b_1\,\delta y_0 + c_1\,\delta z_0 + d_1\,\delta x'_0 + e_1\,\delta y'_0 + f_1\,\delta z'_0 = \Delta\lambda.\,Cos\,\beta
$$

$$
a'\,\delta x_0 + b'\,\delta y_0 + c'\,\delta z_0 + d'\,\delta x'_0 + e'\,\delta y'_0 + f'\,\delta z_0 = \Delta\beta
$$

Разсмотримъ въ этихъ формулахъ приближенно величины и измѣненіе со временемъ коэффиціентовъ, такъ какъ отъ нихъ зависятъ во первыхъ точность опредѣленія неизвѣстныхъ δx_0, δy_0 и т. д. а во вторыхъ вліяніе этихъ неизвѣстныхъ на $\triangle \lambda . Cos\, \beta$ и $\triangle \beta$.

Для малаго промежутка времени измѣненіемъ Δ по сравненію съ Δ можно пренебречь. Затѣмъ замѣтимъ, что λ малая перваго порядка, т. е. измѣняется приблизительно пропорціонально времени τ ; β — очень мало и мы примемъ приближенно $Sin\, \beta = 0$, $Cos\, \beta = 1$ и $Cos\, \lambda = 1$.

При δx_0 наибольшіе коэффиціенты будутъ въ уравненіяхъ для λ и они приближенно равны $-\frac{A\, Sin\, \lambda}{\Delta}$ т. е. измѣняются пропорціонально времени τ.

Коэффиціенты у δy_0 будутъ наибольшими въ уравненіяхъ для λ и приближенно равны $\frac{A\, Cos\, \lambda}{\Delta}$ т. е. $\frac{1}{\Delta}$; слѣдовательно мѣняются мало, какъ бы постоянны.

Коэффиціенты у δz_0 будутъ наибольшими въ уравненіяхъ для β и равны приближенно $\frac{A\, Cos\, \beta}{\Delta}$ т. е. $\frac{1}{\Delta}$, значитъ близки къ коэффиціентамъ при δy_0 въ уравненіяхъ для λ. Коэффиціенты при $\delta x'_0$ имѣютъ наибольшее значеніе въ уравненіяхъ для λ и приближенно равны $\frac{B\, Sin\, \lambda}{\Delta}$ а, такъ какъ B приближенно равно τ (форм. 19), то слѣдовательно они пропорціональны квадрату времени τ. Коэффиціенты при $\delta y'_0$ будутъ наибольшими въ уравненіяхъ для λ и имѣютъ видъ $\frac{B\, Cos\, \lambda}{\Delta}$, т. е. пропорціональны времени τ. Коэффиціенты у $\delta z'_0$ будутъ наибольшими въ уравненіяхъ для β и имѣютъ видъ $\frac{B\, Cos\, \beta}{\Delta}$, т. е. пропорціональны времени τ.

Отсюда видно, что уравненіями для β опредѣляются главнымъ образомъ δz_0 и $\delta z'_0$; что касается δx_0, δy_0, $\delta x'_0$ и $\delta y'_0$, то они повидимому должны опредѣляться уравненіями для λ. Но коэффиціенты при δx_0 и при $\delta y'_0$ приближенно пропорціональны времени, поэтому отдѣлить эти неизвѣстныя δx_0 и $\delta y'_0$ другъ отъ друга трудно и, принимая во вниманіе, что при $\delta x'_0$ уже имѣются коэффиціенты пропорціональные приближенно квадрату времени, мы видимъ, что отдѣленіе этихъ трехъ неизвѣстныхъ δx_0, $\delta y'_0$ и $\delta x'_0$ въ уравненіяхъ для $\triangle \lambda . Cos\, \beta$ должно основываться на величинахъ третьяго порядка. Обратимся поэтому къ уравненіямъ для $\triangle \beta$; мы видимъ что для этихъ трехъ неизвѣстныхъ коэффиціенты будутъ наибольшими при δx_0, получаемыя изъ δz, и приближенно равны $\frac{Cos\, \beta}{\Delta}\, i\, x_0 z_0$, т. е. второго порядка. Слѣдовательно δx_0 опредѣляется главнымъ образомъ изъ уравненій для β.

При рѣшеніи этихъ уравненій по способу наименьшихъ квадратовъ приходится всѣ неизвѣстныя выражать чрезъ шестой $\delta y'_0$ или δx_0 и при маломъ промежуткѣ времени это шестое неизвѣстное возможно мѣнять въ очень значительныхъ предѣлахъ [1]).

Для выбранной системы координатъ, вслѣдствіи малости большинства коэффиціентовъ, составленіе нормальныхъ уравненій значительно облегчается, да кромѣ того вліяніе каждаго неизвѣстнаго на $\triangle \lambda . Cos\, \beta$ и $\triangle \beta$ становиться нагляднѣе.

Эти обстоятельства и оправдываютъ выборъ принятой Оппольцеромъ системы координатъ.

Замѣтимъ еще слѣдующее: во всѣхъ знаменателяхъ уравненій входятъ разстоянія Δ и при значительныхъ поправкахъ для δx_0, δy_0 и т. д. Δ мѣняется также значительно, между тѣмъ какъ числители мѣняются при этомъ мало; поэтому, чтобы избѣжать второго приближенія, надо брать такую первоначальную орбиту, чтобы $\triangle \lambda . Cos\, \beta$ и $\triangle \beta$ были-бы въ особенности для крайнихъ наблюденій по возможности малы.

Рѣшивъ дифференціальныя уравненія и вычисливъ δx_0, δy_0, δz_0, $\delta x'_0$, $\delta y'_0$, и $\delta z'_0$, прибавимъ эти значенія къ первоначально принятымъ x_0, y_0 и т. д. Элементы орбиты получаемъ тогда по формуламъ:

$$67)\quad \left\{ \begin{aligned} & x_1 = x_0 + \delta x_0 \;;\; y_1 = y_0 + \delta y_0 \;;\; z_1 = z_0 + \delta z_0 \\ & x'_1 = x'_0 + \delta x'_0 \;;\; y'_1 = y'_0 + \delta y'_0 \;;\; z'_1 = z'_0 + \delta z'_0 \\ & \sqrt{p}\, Cos\,(i) = x_1 y'_1 - y_1 x'_1 \\ & \sqrt{p}\, Sin(i)\, Sin(\Omega) = y_1 z'_1 - z_1 y'_1 \\ & \sqrt{p}\, Sin(i)\, Cos(\Omega) = x_1 z'_1 - z_1 x'_1 \\ & r\, Cos\, u = x_1\, Cos\,(\Omega) + y_1\, Sin\,(\Omega) \\ & r\, Sin\, u = -x_1\, Sin\,(\Omega)\, Cos\,(i) + y_1\, Cos\,(\Omega)\, Cos\,(i) + z_1\, Sin(i) \\ & e\, Sin\, v = \frac{\sqrt{p}}{r}\,(x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + z_1 z'_1) \\ & e\, Cos\, v = \frac{p}{r} - 1 \\ & q = \frac{p}{1+e} \end{aligned} \right.$$

[1]) Оппольцеръ (Lehrbuch. Bd. II p. 453) выражаетъ четыре неизвѣстныхъ чрезъ два — δx_0 и $\delta x'_0$. Но при рѣшеніи нормальныхъ уравненій коэффиціентъ при $\delta x'_0$ вообще не столь малъ какъ при δx_0 или $\delta y'_0$ Введеніе же двухъ неизвѣстныхъ значительно усложняетъ разсмотрѣніе вопроса.

$$67)\quad \begin{cases} a = \dfrac{p}{1-e^2} \quad \text{для эллипса} \quad ; \quad a = \dfrac{p}{e^2-1} \quad \text{для гиперболы} \\ \mu = k'' \, a^{\,^3/_2} \quad \text{для эллипса} \end{cases}$$

$$(\omega) = u - v$$

По даннымъ e и v получаемъ обычнымъ путемъ M и T время прохожденія чрезъ перигелій.

Затѣмъ экваторіальные элементы получаются изъ:

$$68)\quad \begin{cases} \sigma = \Lambda + (\Omega) \\ Sin\, i' \; Cos\, \sigma_2 = Sin\, J\, Cos\, (i) + Cos\, J\, Sin\, (i)\; Cos\, \sigma \\ Sin\, i' \; Sin\, \sigma_2 = Sin\, (i)\, Sin\, \sigma \\ Cos\, i' = Cos\, J\, Cos\, (i) - Sin\, J\, Sin\, (i)\, Cos\, \sigma \\ Sin\, i' \; Cos\, \sigma_1 = Cos\, J\, Sin\, (i) + Sin\, J\, Cos\, (i)\; Cos\, \sigma \\ Sin\, i' \; Sin\, \sigma_1 = Sin\, J\, Sin\, \sigma \\ \omega' = (\omega) + \sigma_1 \qquad\qquad \Omega' = \Pi + \sigma_2 \quad ^{1)}. \end{cases}$$

По экваторіальнымъ элементамъ вычисляются обычнымъ способомъ эклиптическіе.

[1]) Можно тѣ же величины вычислять по другимъ формуламъ Oppolzer Bd II p. 438 (35).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Элементы кометы 1900 III.

Комета 1900 III представляетъ какъ разъ такой случай, въ которомъ, несмотря на довольно значительную пройденную видимую дугу (около 60°), можно значительно варіировать шестой элементъ, не входя въ противорѣчіе съ наблюденіями. Это обстоятельство сказывается уже при вычисленіи элементовъ предварительныхъ орбитъ. Именно изъ наблюденій, охватывающихъ весь періодъ видимости кометы, были опредѣлены элементы В. К. Абольдомъ и Джіакобини, которыя разнятся весьма значительно другъ отъ друга какъ видно изъ слѣдующей таблицы:

Эпоха 1901 Янв. 14.5 ср. берл. время.

	В. К. Абольдъ	Джіакобини	
$M =$	7° 20′ 45″.10	6° 53′ 48″.1	
$\omega =$	170 58 0 .00	171 19 27 .1	
$\Omega =$	196 47 33 .20	196 36 12 .3	1901.0
$i =$	29 49 56 .50	29 52 16 .5	1901.0
$\varphi =$	46 49 27 .00	47 38 21 .5	1901.0
$\mu =$	556″.4710	525″.007	

Въ работѣ по опредѣленію окончательной орбиты этой кометы мы исходили изъ элементовъ В. К. Абольда, причемъ примѣнили сперва дифференціальныя формулы Шенфельда третьяго вида и, когда вычисленіе по полученнымъ окончательнымъ элементамъ не сошлось съ данными дифференціальныхъ формулъ, мы приняли поправку къ шестому элементу μ:

$$\Delta\mu = 0$$

и сдѣлали второе приближеніе по способу Оппольцера *).

Здѣсь мы приведемъ полученныя нами результаты по способу Шенфельда а затѣмъ къ тѣмъ же даннымъ примѣнимъ способъ Оппольцера и покажемъ, что одного приближенія по способу Оппольцера достаточно, чтобы получить окончательный результатъ.

*) W. Abold und S. Scharbe. Definitive Bahnbestimmung des Cometen 1900 III (Giacobini) Jurjeff. (Dorpat) 1906.

Сопоставимъ здѣсь все необходимое для полученія дифференціальныхъ формулъ.

По элементамъ В. К. Абольда получаемъ:

Экваторіальныя координаты.

$$\left.\begin{aligned} x &= [9.995\ 4751]\ r\ Sin\ (v + \ \ 95^\circ\ 37'\ 27.''62) \\ y &= [9.998\ 1664[\ r\ Sin\ (v + \ \ \ 6\ \ 23\ \ 23.85) \\ z &= [9.231\ 4279]\ r\ Sin\ (v + 128\ \ 34\ \ \ 4.67) \end{aligned}\right\}\ 1900.0$$

$$\left.\begin{aligned} x &= [9.995\ 4678]\ r\ Sin\ (v + \ \ 95\ \ 38\ \ 12.10) \\ y &= [9.998\ 1679]\ r\ Sin\ (v + \ \ \ 6\ \ 24\ \ \ 9.63) \\ z &= [9{\cdot}231\ 6337]\ r\ Sin\ (v + 128\ \ 33\ \ \ 1.35) \end{aligned}\right\}\ 1901.1$$

Эфемерида.

	α (1900.0)	δ (1900.0)	v	Lg r	Lg Δ
Дек. 1900					
22.5	341° 31′ 55.″02	— 22° 26′ 45.″33	33° 40′ 3.″14	0.000 7934	9.948 7529
23.5	343 3 17. 31	— 22 35 48.15	34 54 24. 14	0.003 2011	9.949 9354
24.5	344 34 24. 32	— 22 43 55.04	36 7 55. 10	0.005 6704	9.951 2475
25.5	346 5 12. 97	— 22 51 6.08	37 20 35. 72	0.008 1981	9.952 6865
26.5	347 35 39. 96	— 22 57 21.30	38 32 25. 26	0.010 7814	9.954 2498
27.5	349 5 41. 89	— 23 2 40.98	39 43 23. 40	0.013 4167	9.955 9348
28.5	350 35 16. 09	— 23 7 5.32	40 53 29. 68	0.016 1018	9.957 7389
29.5	352 4 19. 12	— 23 10 34.85	42 2 43. 70	0.018 8330	9.959 6590
30.5	353 32 48. 91	— 23 13 10.19	43 11 5. 56	0.021 6081	9.961 6921
31.5	355 0 42. 01	— 23 14 52.10	44 18 34. 76	0.024 4238	9.963 8356
Янв. 1901	α (1901.0)	δ (1901.0)			
4.5	0 46 11. 26	— 23 12 43.05	48 39 47. 16	0.036 0428	9.973 4470
5.5	2 10 29. 12	— 23 10 12.06	49 42 54. 64	0.039 0238	9.976 0931
6.5	3 33 58. 18	— 23 6 54.05	50 45 10. 18	0.042 0300	9.978 8297
7.5	4 56 37. 51	— 23 2 50.22	51 46 34. 22	0.045 0600	9.981 6540
8.5	6 18 25. 43	— 22 58 2.08	52 47 6. 96	0.048 1109	9.984 5621
9.5	7 39 21. 15	— 22 52 30.95	53 46 48. 88	0.051 1812	9.987 5510
10.5	8 59 23. 70	— 22 46 18.51	54 45 40. 54	0.054 2685	9.990 6166
11.5	10 18 31. 97	— 22 39 26.06	55 43 42. 00	0.057 3707	9.993 7565
12.5	11 36 45. 71	— 22 31 55.21	56 40 53. 96	0.060 4864	9.996 9672
13.5	12 54 4. 34	— 22 23 47.63	57 37 17. 04	0.063 6134	0.000 2449
14.5	14 10 27. 49	— 22 15 4.81	58 32 51. 66	0.066 7502	0.003 5869
15.5	15 25 54. 74	— 22 5 48.33	59 27 38. 36	0.069 8950	0.006 9898
16.5	16 40 26. 41	— 21 55 59.75	60 21 37. 78	0.073 0466	0.010 4509
17.5	17 54 2. 17	— 21 45 40.60	61 14 50. 38	0.076 2032	0.013 9670
18.5	19 6 42. 42	— 21 34 52.67	62 7 17. 02	0.079 3636	0.017 5350
19.5	20 18 27. 20	— 21 23 37.37	62 58 58. 22	0.082 5262	0.021 1520
20.5	21 29 16. 49	— 21 11 56.22	63 49 54. 42	0.085 6896	0.024 8152
21.5	22 39 11. 32	— 20 59 50.83	64 40 6. 52	0.088 8532	0.028 5220
22.5	23 48 11. 53	— 20 47 22.67	65 29 35. 04	0.092 0152	0.032 2697
23.5	24 56 17. 73	— 20 34 33.14	66 18 20. 56	0.095 1748	0.036 0558
24.5	26 3 30. 73	— 20 21 23.75	67 6 23. 86	0.098 3312	0.039 8780
25.5	27 9 50. 83	— 20 7 56.06	67 53 45. 82	0.101 4828	0.043 7331

	α (1901.0)	δ (1901.0)	v	Lg r	Lg Δ
Февр. 1901					
7.5	40 17 40.28	— 16 54 2.51	77 11 23.90	0.141 7021	0.096 0212
8.5	41 13 2.59	— 16 38 16.72	77 50 11.92	0.144 7168	0.100 1519
9.5	42 7 44.67	— 16 22 28.02	78 28 27.90	0.147 7180	0.104 2912
10.5	43 1 47.58	— 16 6 37.25	79 6 12.50	0.150 7052	0.108 4373
11.5	43 55 12.04	— 15 50 45.06	79 43 26.12	0.153 6780	0.112 5895
12.5	44 47 59.36	— 15 34 52.13	80 20 9.50	0.156 6367	0.116 7468
13.5	45 40 10.12	— 15 18 59.15	80 56 23.10	0.159 5806	0.120 9076
14.5	46 31 45.36	— 15 3 6.88	81 32 7.66	0.162 5094	0.125 0704
15.5	47 22 45.96	— 14 47 15.70	82 7 23.38	0.165 4232	0.129 2354
16.5	48 13 12.71	— 14 31 26.39	82 42 11.02	0.168 3215	0.133 4005
17.5	49 3 6.64	— 14 15 39.48	83 16 31.08	0.171 2046	0.137 5650

Сравненіемъ вычисленныхъ положеній съ наблюденными, получены слѣдующія разности (наблюд.—выч.), положенныя въ основу правыхъ частей дифференціальныхъ равенствъ:

Время	Вѣсъ	Δα Cosδ	Время	Вѣсъ	Δδ
Дек. 25.0	7.0	—0.″54	Дек. 24.9	10.5	—1.″65
26.8	7.4	—0. 68	27.1	18.0	—2.10
Янв. 6.3	1.0	—1. 53	Янв. 6.3	3.0	—3.92
11.7	4.9	—3. 12	11.5	10.4	—3.48
14.9	5.5	—0. 89	14.8	10.5	—3.35
17.4	6.1	+1. 62	17.3	7.5	—3.66
23.3	2.0	+1. 90	23.3	1.2	—5.65
Февр.10.3	4.5	—0. 03	Февр.10.1	5.0	+1.19
15.7	0.5	+0. 22	15.7	2.0	+0.57

Приняты во вниманіе и возмущенія планетъ (оскул. эпоха 14,5 Января 1901 г.). Для наблюденія, квадратъ средней ошибки котораго равенъ $\varepsilon^2 = 6$, принятъ вѣсъ равный единицѣ.

Вычисленіе окончательныхъ элементовъ по способу Шенфельда.

На основаніи этихъ данныхъ получены слѣдующія дифференціальныя равенства:

$d\varkappa_2$	$d\lambda$	$d\nu$	dM_0	$d\varphi$	$d\mu$		$\Delta\alpha Cos\delta$
9.782662	8.677654	8.550653	0.692349	9.609805n	2.575628n	=	9.732394n
9.790557	8.725834	8.632602	0.694590	9.396620n	2.561999n		9.832509n
9.833536	8.865188	8.949801	0.682490	9.802577	2.456414n		0.184691n
9.851994	8.878291	9.047997	0.661319	0.013397	2.384382n		0.494155n
9.861516	8.873215	9.092974	0.644661	0.093607	2.335719n		9.949390n
9.868220	8.863498	9.122597	0.629711	0.142922	2.294398n		0.209515
9.881609	8.822509	9.176873	0.588341	0.228393	2.183996n		0.278754
9.905138	8.541282	9.251755	0.417333	0.348993	1.641346n		8.477121n
9.908448	8.391449	9.257029	0.353742	0.363490	1.278357n		9.342423

$d\varkappa_2$	$d\lambda$	$d\nu$	dM_0	$d\varphi$	$d\mu$		$\Delta\delta$
9.729768n	9.886580	9.757661	0.285959n	0.238335n	0.700228	=	0.217484n
9.733847n	9.872821	9.785088	0.259283n	0.250970n	0.685317n		0.322219n
9.732385n	9.796616	9.881229	0.085813n	0.272769n	1.643341n		0.593286n
9.720643n	9.749301	9.915880	9.964525n	0.264245n	1.761473n		0.541579n
9.710010n	9.715883	9.934075	9.874606n	0.253307n	1.806537n		0.525045n
9.700495n	9.688618	9.946136	9.798818n	0.242541n	1.830213n		0.563481n
9.673160n	9.615373	9.969737	9.582672n	0.209315n	1.860287n		0.752048n
9.563852n	9.299379	0.004810	8.415795	0.068751n	1.817688n		0.075547
9.523033n	9.142016	0.007596	8.889624	0.016569n	1.779641n		9.755875

Умножая эти равенства на квадратныя корни изъ соотвѣтствующихъ вѣсовъ и вводя новыя неизвѣстныя:

$$t = [0.361\ 483]\ d\varkappa_2 \qquad x = [1.129\ 206]\ dM_0$$
$$u = [0.500\ 457]\ d\lambda \qquad y = [0.878\ 606]\ d\varphi$$
$$w = [0.444\ 669]\ d\nu \qquad z = [2.998\ 177]\ d\mu$$

log един. ошибокъ = 1.050 095

Мы получаемъ такія однородныя уравненія:

t	u	w	x	y	z		$log\, n$
9.843728	8.599746	8.528533	9.985692	9.153748n	0.000000n	=	9.104848n
9.863690	8.659993	8.622549	0.000000	8.952630n	9.998438n		9.217030n
9.472053	8.364731	8.505132	9.553284	8.923971	9.458237n		9.134596n
9.835609	8.722932	8.948426	9.877211	9.479889	9.731303n		9.789158n
9.870215	8.742940	9.018487	9.885637	9.585183	9.707724n		9.269477n
9.899402	8.755706	9.070593	9.893170	9.656981	9.688886n		9.552085
9.670641	8.472567	8.882719	9.609650	9.500302	9.336334n		9.379174
9.870261	8.367431	9.133692	9.614733	9.796993	8.969775n		7.753632n
9.396450	7.740477	8.661845	9.074021	9.334369	8.129665n		8.141813
9.878879n	9.896717	9.823586	9.667347n	9.870323n	8.212645		9.677983n
0.000000n	0.000000	9.968055	9.757713n	0.000000n	8.314776n		9.899760n
9.609462n	9.534719	9.675120	9.195167n	9.632723n	8.883724n		9.781751n
9.867676n	9.757360	9.979727	9.343835n	9.894155n	9.271812n		0.000000n
9.859121n	9.726020	0.000000	9.255994n	9.885295n	9.318954n		9.985544n
9.776542n	9.625691	9.938997	9.107142n	9.801465n	9.269566n		9.950916n
9.351267n	9.154506	9.564658	8.493056n	9.370299n	8.901700n		9.741543n
9.551854n	9.148407	9.909626	7.636074	9.539630n	9.168996n		9.374937
9.312065n	8.792074	9.713442	7.910933	9.288478n	8.931979n		8.856295

А изъ нихъ получаются нормальныя:

t	u	w	x	y	z		n
+ 6.969911	— 2.666685	— 3.606336	+ 5.105250	+ 4.842408	— 2.292713	=	+ 2.980780
— 2.666685	+ 2.586295	+ 3.286960	— 1.030449	— 2.869956	— 0.553057		— 2.912690
— 3.606336	+ 3.286960	+ 5.321377	— 1.003841	— 3.926524	— 1.059520		— 4.041289
+ 5.105250	— 1.030449	— 1.003841	+ 4.850507	+ 2.474393	— 3.255031		+ 0.730958
+ 4.842408	— 2.869956	— 3.926524	+ 2.474393	+ 4.572106	+ 0.049216		+ 3.533338
— 2.292713	— 0.553057	— 1.059520	— 3.255031	+ 0.049216	+ 3.075363		+ 1.143786

Рѣшеніе этихъ нормальныхъ уравненій даетъ послѣдовательно слѣдующія равенства:

t	u	w	x	y	z		n
+ 6.969911	— 2.666685	— 3.606336	+ 5.105250	+ 4.842408	— 2.292713	=	+ 2.980780
	+ 1.566022	+ 1.907177	+ 0.922818	— 1.017252	— 1.430248		— 1.772245
		+ 1.132753	+ 0.513840	— 0.182131	— 0.503980		— 0.340664
			+ 0.334183	— 0.390466	— 0.504262		— 0.253502
				+ 0.061503	+ 0.042821		— 0.039767
					— 0.000001		— 0.000693

Коэффиціентъ при неизвѣстной въ послѣднемъ уравненіи очень малъ и даже отрицателенъ, поэтому первыя пять уравненій рѣшены относительно z и получено:

$$y = [9.842\ 760\,n]\ z + [9.810\ 626\,n]$$
$$x = [9.842\ 259\ ]\ z + [0.180\ 142\,n]$$
$$w = [8.243\ 137\ ]\ z + [9.450\ 410\ ]$$
$$u = [8.475\ 889\ ]\ z + [0.001\ 326\,n]$$
$$t = [9.510\ 246\ ]\ z + [0.242\ 561\ ]$$

Подставляя эти значенія неизвѣстныхъ въ однородныя уравненія, мы имѣемъ слѣдующія 18 уравненій:

z		n
— 0.000190	=	+ 0.056139
+ 0.000117		+ 0.048093
+ 0.000205		— 0.044908
+ 0.000196		— 0.448271
— 0.000007		— 0.044125
— 0.000181		+ 0.471236
— 0.000291		+ 0.249735
+ 0.000109		— 0.288614
+ 0.000264		— 0.109917

z		n
— 0.000201	=	+ 0.265507
— 0.000082		+ 0.181891
+ 0.000154		— 0.198525
+ 0.000247		— 0.247497
+ 0.000159		— 0.221281
+ 0.000055		— 0.272755
— 0.000062		— 0.318172
— 0.000300		+ 0.554606
— 0.000077		+ 0.233453

Рѣшая ихъ по способу наименьшихъ квадратовъ мы получаемъ уравненіе.

$$+0.000\ 000\ 5891\ z = -0.000\ 6952 \quad *)$$

На основаніи котораго и получаемъ:

$$lg\ d\mu = 1.1238_n$$

$$d\mu = -13.''2984$$
$$d\varphi = +1218.''40$$
$$dM_0 = -685.\ 22$$
$$d\nu = -82.\ 12 \qquad di = +61.''08$$
$$d\lambda = -128.\ 70 \qquad d\Omega = -281.\ 19$$
$$d\varkappa_2 \quad -1856.\ 73 \qquad d\omega = +546.\ 52$$

$$\left.\begin{aligned} x &= [9.9955116]\ r\ Sin\ (v + 95°42'16.''57) \\ y &= [9.9981478]\ r\ Sin\ (v + 6\ 28\ 15.\ 52) \\ z &= [9.2308305]\ r\ Sin\ (v + 128\ 53\ 4.\ 01) \end{aligned}\right\}\ 1900.0$$

$$\left.\begin{aligned} x &= [9.9955042]\ r\ Sin\ (v + 95\ 43\ 1.\ 03) \\ y &= [9.9981490]\ r\ Sin\ (v + 6\ 29\ 1.\ 32) \\ z &= [9.2310360]\ r\ Sin\ (v + 128\ 52\ 0.\ 25) \end{aligned}\right\}\ 1901.1$$

По этимъ полученнымъ элементамъ вычислена эфемерида, которая при сравненіи съ первоначальной даетъ слѣдующія разности (I ор.-II ор.).

Время	$\Delta\alpha\ Cos\ \delta$	$\Delta\delta$
Дек. 24.5	—9″.36	—9″.85
25.5	—7 .49	—9 .77
26.5	—5 .69	—9 .56
27.5	—4 .21	—9 .44
Янв. 5.5	+4 .63	—8 .13
6.5	+5 .11	—8 .10
7.5	+5 .58	—8 .03
10.5	+6 .48	—7 .80
11.5	+6 .56	—7 .80
12.5	+6 .73	—7 .67
13.5	+6 .71	—7 .68
14.5	+6 .83	—7 .64
15.5	+6 .77	—7 .65

Время	$\Delta\alpha\ Cos\ \delta$	$\Delta\delta$
Янв. 16.5	+6″.93	—7″.63
17.5	+6 .97	—7 .57
18.5	+7 .01	—7 .61
22.5	+6 .88	—7 .61
23.5	+6 .88	—7 .67
24.5	+6 .90	—7 .55
Февр. 9.5	+11.58	—6 .07
10.5	+12.17	—5 .87
11.5	+12.84	—5 .63
14.5	+15.06	—4 .75
15.5	+15.93	—4 .34
16.5	+16.74	—4 .00

*) Полученному коэффиціенту при z соотвѣтствуетъ средняя ошибка $\varepsilon_\mu = \pm 3''$.

Интерполируя эти разности и прибавляя ихъ къ первоначально принятымъ, мы получаемъ окончательно:

Время	$\Delta\alpha\ Cos\ \delta$	
	Уравн.	Элем.
Дек. 25.0	—0.″71	— 8.″96
26.8	+0. 77	— 5. 95
Янв. 6.3	+2. 23	+ 3. 48
11.7	—1. 11	+ 3. 47
14.9	—0. 25	+ 5. 92
17.4	+1. 15	+ 8. 59
23.3	—0. 76	+ 8. 78
Февр. 10.3	—0. 83	+12. 02
15.7	+3. 19	+16. 31

Время	$\Delta\delta$	
	Уравн.	Элем.
Дек. 24.9	+0.″10	—11.″47
27.1	+0. 22	—11. 59
Янв. 6.3	—0. 11	—12. 03
11.5	+0. 16	—11. 28
14.8	—0. 12	—10. 99
17.3	—0. 83	—11. 24
23.3	—4. 02	—13. 31
Февр. 10.1	+0. 99	— 4. 76
15.7	+1. 13	— 3. 70

Для сравненія даны остающіяся ошибки, полученныя изъ уравненій

Какъ мы видимъ, получается полное расхожденіе, Причина заключается въ томъ, что поправки настолько велики, что допущеніе линейной зависимости между ними и разностями $\Delta\alpha\ Cos\ \delta$ и $\Delta\delta$ не оправдывается.

Вычисленіе окончательныхъ элементовъ по способу Оппольцера.

Вмѣсто экваторіальной системы координатъ вводимъ новую, опредѣляемую слѣдующими данными (см. стр. 23—27).

$$J = 23°\ 16'\ \ 0.''00 \quad ; \quad \Pi = 85°\ 35'\ \ 0.''00 \quad ; \quad \Lambda = 287°\ 10'\ \ 0.''00$$

По формуламъ (58). (59), (60) и (61) имѣемъ:

$$(x_\circ) = +0.698\ 9700 \quad ; \quad (y_\circ) = +0.922\ 3717 \quad ; \quad (z_\circ) = +0.143\ 3577$$
$$(x'_\circ) = -0.402\ 9585 \quad ; \quad (y'_\circ) = +1.003\ 6639 \quad ; \quad (z'_\circ) = -0.504\ 5043$$

Для полученія $\Delta\lambda\ Cos\beta$ и $\Delta\beta$ по формуламъ (64) необходимо имѣть $\Delta\alpha\ Cos\delta$ и $\Delta\delta$ для однихъ и тѣхъ же моментовъ времени. Безъ большой погрѣшности мы примемъ данныя выше $\Delta\alpha\ Cos\delta$ и $\Delta\delta$ для нижеслѣдующихъ общихъ моментовъ.

По формулѣ (65) вычислены $Cos\ J'$; слѣдовательно извѣстны и $Sin\ J'$ Для вычисленія вѣсовъ замѣтимъ, что мы имѣемъ:

$$\Delta\lambda.\ Cos\beta.\ Sin\ J' - \Delta\beta.\ Cos\ J' = \Delta\alpha\ Cos\delta$$
$$\Delta\lambda.\ Cos\beta.\ Cos\ J' + \Delta\beta.\ Sin\ J' = \Delta\delta$$

Если мы допустимъ, что для одного нормальнаго мѣста можно считать $Cos\ J'$ и $Sin\ J'$ постоянными и затѣмъ рѣшимъ эти уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ приписывая $\Delta\alpha\, Cos\delta$ и $\Delta\delta$ соотвѣтствующія вѣса, то получимъ при рѣшеніи $\Delta\lambda\, Cos\beta$ и $\Delta\beta$ коэффиціенты обратныя ихъ вѣсамъ а именно:

$$\frac{1}{P_\lambda} = \frac{Sin^2 J'}{P_\alpha} + \frac{Cos^2 J'}{P_\delta}$$

$$\frac{1}{P_\beta} = \frac{Cos^2 J'}{P_\alpha} + \frac{Sin^2 J'}{P_\delta}$$

гдѣ P_α, P_δ, P_λ и P_β вѣса нормальныхъ мѣстъ. На основаніи этого и по формуламъ (57) получаемъ слѣдующую таблицу:

Время	$L\, Cos\, J'$	$\Delta\lambda\, Cos\beta$	P_λ	$\Delta\beta$	P_β	λ(1901)	β(1901)
Дек. 24.9	8.8525n	—0."42	7.0	—1.68	10.5	—26°44′20″	+0°8′54″
27.0	8.6961n	—0. 58	7.4	—2.13	17.9	—23 48 51	+ 6 17
Янв. 6.3	8.7240	—1. 74	1.0	—3.83	3.0	—10 5 2	— 2 54
11.6	9.0055	—3. 46	4.9	—3.15	10.3	— 3 28 44	— 4 35
14.8	9.1086	—1. 31	5.5	—3.21	10.3	+ 0 20 56	— 4 38
17.3	9.1716	+1. 06	6.1	—3.86	7.5	+ 3 15 18	— 4 11
23.3	9.2839	+0. 78	2.0	—5.91	1.2	+ 9 56 10	— 1 56
Февр. 10.2	9.4620	+0. 32	4.5	+1.15	5.0	+27 36 46	+ 5 54
15.7	9.4929	+0. 39	0.5	+0.47	1.5	+32 27 0	+ 5 56

По формуламъ (18), (19) и (42) имѣемъ:

Время	Дек. 24.9	27.0	Янв. 6.3	11.6	14.8	17.3	23.3	Фев. 10.2	15.7
A	+0.95436	+0.96368	+0.99335	+0.99920	+1.00000	+0.99928	+0.99322	+0.94518	+0.92328
B	—0.34855	—0.31412	—0.14074	—0.04987	+0.00516	+0.04815	+0.15104	+0.45165	+0.54123
i	+0.11179	+0.08799	+0.01528	+0.00179	+0.00002	+0.00156	+0.01436	+0.10812	+0.14844
K	—0.01461	—0.01025	—0.00075	—0.00003	0	+0.00002	+0.00069	+0.01382	+0.02200
l	—0.01500	—0.01047	—0.00075	—0.00003	0	+0.00002	+0.00069	+0.01430	+0.02306
m	+0.00279	+0.00174	+0.00005	0	0	0	+0.00005	+0.00290	+0.00546
2 M	+0.00276	+0.00173	+0.00005	0	0	0	+0.00005	+0.00286	+0.00538
2 N	—0.00062	—0.00035	0	0	0	0	0	+0.00075	+0.00168

Съ этими данными мы по формуламъ (45) и (46) получаемъ слѣдующія дифференціальныя равенства: *)

δx_0	δy_0	δz_0	$\delta x'_0$	$\delta y'_0$	$\delta z'_0$		$\Delta\lambda\, Cos\beta$
+0.57738	+1.05599	+0.02691	—0.18786	—0.35987	—0.00386	=	—0."42
+0.50675	+1.05960	+0.02021	—0.14934	—0.32728	—0.00257		—0. 58
+0.19423	+1.04200	+0.00265	—0.02647	—0.14632	—0.00014		—1. 74
+0.06267	+1.01262	+0.00027	—0.00309	—0.05049	0		—3. 46
—0.00601	+0.98946	0	—0.00003	+0.00511	0		—1. 31
—0.05409	+0.96895	+0.00017	—0.00264	+0.04665	0		+1. 06
—0.15047	+0.91277	+0.00131	—0.02367	+0.13772	+0.00005		+0. 78
—0.30786	+0.71167	+0.00379	—0.15881	+0.32158	+0.00024		+0. 32
—0.32785	+0.64609	+0.00348	—0.20882	+0.35150	+0.00007		+0. 39
							$\Delta\beta$
+0.01745	+0.02155	+1.07209	—0.00213	—0.00326	—0.39041		—1. 68
+0.01310	+0.01643	+1.07284	—0.00143	—0.00218	—0.34897		—2. 13
+0.00280	+0.00220	+1.04476	—0.00023	—0.00011	—0.14799		—3. 83
+0.00154	+0.00017	+1.01297	—0.00007	0	—0.05056		—3. 15
+0.00133	+0.00001	+0.98946	+0.00001	0	+0.00511		—3. 21
+0.00132	+0.00026	+0.96925	+0.00006	0	+0.04670		—3. 86
+0.00159	+0.00161	+0.91588	+0.00013	+0.00007	+0.13925		—5. 91
+0.00314	+0.00563	+0.73915	—0.00028	+0.00010	+0.35291		+1. 15
+0.00375	+0.00602	+0.68517	—0.00037	—0.00020	+0.40122		+0. 47

Умножая эти равенства на корни квадратные изъ соотвѣтствующихъ вѣсовъ и вводя новыя неизвѣстныя:

$$X = 1.52760\ \delta x_0 \qquad X' = 0.49703\ \delta x'_0$$
$$Y = 2.88242\ \delta y_0 \qquad Y' = 0.95213\ \delta y'_0$$
$$Z = 4.53901\ \delta z_0 \qquad Z' = 1.47644\ \delta z'_0$$

Един. ошиб. = 10.57103

мы получаемъ слѣдующія однородныя уравненія, въ которыхъ порядокъ неизвѣстныхъ переставленъ, такъ чтобы послѣднимъ неизвѣстнымъ было бы X (см стр. 31).

Y	Z	X'	Z'	Y'	X		n
+0.96929	+0.01569	—1.00000	—0.00692	—1.00000	+1.00000	=	—0.10512
+1.00000	+0.01211	—0.81736	—0.00473	—0.93506	+0.90240		—0.14925
+0.36150	+0.00058	—0.05326	—0.00009	—0.15368	+0.12715		—0.16460
+0.77766	+0.00013	—0.01376	0	—0.11738	+0.09082		—0.72453
+0.80505	+0.00000	—0.00014	0	+0.01258	—0.00922		—0.29063
+0.83025	+0.00009	—0.01312	0	+0.12101	—0.08745		+0.24766
+0.44784	+0.00041	—0.06734	+0.00005	+0.20456	—0.13930		+0.10435
+0.52375	+0.00177	—0.67781	+0.00035	+0.71647	—0.42751		+0.06422
+0.15850	+0.00054	—0.29708	+0.00003	+0.26105	—0.15176		+0.02609

*) Если не требовать особой точности, то достаточно брать пять знаковъ. Составленіе и рѣшеніе уравненій сдѣланы арифмометромъ.

Y	Z	X'	Z'	Y'	X		n
+0.02423	+0.76536	−0.01388	−0.85684	−0.01109	+0.03701	=	−0.51497
+0.02412	+1.00000	−0.01217	−1.00000	−0.00968	+0.03628		−0.85249
+0.00132	+0.39867	−0.00080	−0.17361	−0.00020	+0.00317		−0.62754
+0.00019	+0.71623	−0.00044	−0.10991	0	+0.00323		−0.95634
+0.00001	+0.69961	+0.00006	+0.01111	0	+0.00280		−0.97455
+0.00025	+0.58480	+0.00032	+0.08662	0	+0.00236		−1.00000
+0.00061	+0.22104	+0.00028	+0.10332	+0.00008	+0.00114		−0.61243
+0.00437	+0.36413	−0.00127	+0.53448	+0.00023	+0.00460		+0.24326
+0.00256	+0.18488	−0.00091	+0.33282	−0.00025	+0.00300		+0.05445

Изъ этихъ уравненій получаемъ нормальныя уравненія:

Y	Z	X'	Z'	Y'	X		n
+4.51358	+0.07459	−2.26049	−0.05313	−1.43285	+1.59972	=	−0.85140
+0.07459	+3.30518	−0.05078	−1.46647	−0.04382	+0.09978		−3.48856
−2.26049	−0.05078	+2.22384	+0.03387	+1.19580	−1.40119		+0.20186
−0.05313	−1.46647	+0.03387	+2.19120	+0.03088	−0.07645		+1.49669
−1.43285	−0.04382	+1.19580	+0.03088	+2.55007	−2.25988		+0.46960
+1.59972	+0.09978	−1.40119	−0.07645	−2.25988	+2.07444		−0.45104

Послѣдовательное исключеніе неизвѣстныхъ даетъ:

Y	Z	X'	Z'	Y'	X		n
+4.51358	+0.07459	−2.26049	−0.05313	−1.43285	+1.59972	=	−0.85140
	+3.30395	−0.01342	−1.46559	−0.02014	+0.07334		−3.47449
		+1.09169	+0.00131	+0.47812	−0.59972		−0.23865
			+1.54045	+0.00451	−0.02437		−0.05428
				+1.88568	−1.48886		+0.28282
					+0.00043		+0.01919

Замѣчая, что коэффиціентъ въ послѣднемъ уравненіи очень малъ, мы изъ первыхъ пяти уравненій выражаемъ всѣ неизвѣстныя чрезъ X и получаемъ:

$$
\begin{aligned}
Y' &= +0.14998 + 0.78956\,X \\
Z' &= -0.03568 + 0.01351\,X \\
X' &= -0.28425 + 0.20354\,X \\
Z &= -1.06768 - 0.01057\,X \\
Y &= -0.26615 - 0.00151\,X
\end{aligned}
$$

Подставляя эти величины въ однородныя уравненія мы имѣемъ:

X		n	X		n
+0.00518	=	+0.03509	+0.00571	=	+0.27578
−0.00396		+0.03757	+0.00204		+0.18392
−0.00559		−0.05986	−0.00371		−0.20793
−0.00583		−0.50373	−0.00591		−0.19564
−0.00054		−0.07830	−0.00443		−0.22717
+0.00417		+0.44685	−0.00258		−0.37237
+0.00782		+0.17416	+0.00032		−0.37251
−0.00058		−0.09461	+0.00788		+0.65187
−0.00637		−0.05474	+0.00516		+0.26418

Рѣшая эти уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ мы получаемъ:

$$+0.000\ 4281\ X = +0.01920$$

Отсюда находимъ X, а затѣмъ Y, Z а по нимъ δx_0 и т. д. съ ихъ средними ошибками:

$$
\begin{aligned}
X &= +44.850 & \delta x_0 &= +0.0015047 \pm 0.0^3 3800 \\
Y &= +\ \ 0.334 & \delta y_0 &= -0.0000059 \pm 0.0^3 0029 \\
Z &= -\ \ 1.542 & \delta z_0 &= -0.0000174 \pm 0.0^3 0022 \\
X' &= +\ \ 8.844_5 & \delta x'_0 &= +0.0009120 \pm 0.0^3 2400 \\
Y' &= +35.562 & \delta y'_0 &= +0.0019142 \pm 0.0^3 4800 \\
Z' &= +\ \ 0.570 & \delta z'_0 &= +0.0000198 \pm 0.0^3 0085
\end{aligned}
$$

По этимъ даннымъ получаемъ:

$$
\begin{aligned}
(x_1) &= +0.7004747 & (y_1) &= +0.9223658 & (z_1) &= +0.1433403 \\
(x'_1) &= -0.4020465 & (y'_1) &= +1.0055781 & (z'_1) &= -0.5044845
\end{aligned}
$$

а отсюда по формуламъ (67), (68) вычисляемъ экваторіальные и обычнымъ способомъ эклиптическія элементы [1]):

[1]) Сравненіе этихъ элементовъ съ полученными нами въ вышеуказанной работѣ по опредѣленію окончательной орбиты этой же кометы, показываетъ, что они получаются при $x = 0.002$.

$$
\left.\begin{array}{llll}
M = 7^\circ\ 9'56.''84 & & \omega = 171^\circ\ 6'18.''22 \\
\varphi = 47\ \ 8\ 51.\ 03 & & \Omega = 196\ 43\ \ 5.\ 84 \\
\mu = 543.''8671 & & i = \ \ 29\ 50\ 54.\ 50
\end{array}\right\}\ 1901.0
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
x = [9.9955099]\ r\ Sin\ (v + \ \ 95^\circ 41'40.''92) \\
y = [9.9981487]\ r\ Sin\ (v + \ \ \ \ 6\ 27\ 39.\ 73) \\
z = [9.2308595]\ r\ Sin\ (v + 128\ 51\ 46.\ 35)
\end{array}\right\}\ 1900.0
$$

$$
\left.\begin{array}{l}
x = [9.9955025]\ r\ Sin\ (v + \ \ 95\ 42\ 25.38) \\
y = [9.9981500]\ r\ Sin\ (v + \ \ \ \ 6\ 28\ 25.54) \\
z = [9.2310650]\ r\ Sin\ (v + 128\ 50\ 42.60)
\end{array}\right\}\ 1901.0
$$

По этимъ элементамъ вычислена эфемерида. Сравненіе ея съ первоначальной даетъ слѣдующія разности:

	$\Delta\alpha\ Cos\ \delta$	$\Delta\delta$		$\Delta\alpha\ Cos\ \delta$	$\Delta\delta$
Дек. 24.5	— 0.66	+ 1.61	Янв. 16.5	+ 0.15	+ 2.91
25.5	+ 0.32	+ 1.81	17.5	— 0.38	+ 2.85
26.5	+ 1.33	+ 2.13	18.5	— 0.72	+ 2.60
27.5	+ 1.97	+ 2.34	22.5	— 2.03	+ 1.86
Янв. 5.5	+ 3.85	+ 3.72	23.5	— 2.44	+ 1.67
6.5	+ 3.49	+ 3.74	24.5	— 2.55	+ 1.53
7.5	+ 3.43	+ 3.78	Февр. 9.5	— 0.86	0.00
10.5	+ 2.59	+ 3.59	10.5	— 0.30	+ 0.06
11.5	+ 2.12	+ 3.52	11.5	+ 0.09	+ 0.12
12.5	+ 1.75	+ 3.51	14.5	+ 2.20	+ 0.50
13.5	+ 1.41	+ 3.32	15.5	+ 2.95	+ 0.72
14.5	+ 0.86	+ 3.21	16.5	+ 3.70	+ 0.90
15.5	+ 0.35	+ 3.06			

Интерполируя эти величины для принятыхъ общихъ временъ (стр. 40), а также для первоначальныхъ (стр. 35) и прибавляя полученные величины къ первоначально даннымъ, мы получаемъ слѣдующія остающіяся ошибки; для сравненія приведены ошибки, получаемыя изъ уравненій а также суммы произведеній квадратовъ остающихся ошибокъ на соотвѣтствующіе вѣса:

	Уравненія				Элементы	
Время	$\Delta\lambda\ Cos\beta$	$\Delta\beta$	$\Delta\alpha\ Cos\delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha\ Cos\delta$	$\Delta\delta$
Дек. 24.9	— 0.79	+ 0.″06	— 0.″78	+ 0.″12	— 0.″81	+ 0.″04
27.0	+ 0.84	+ 0. 23	+ 0. 85	+ 0. 19	+ 0. 97	+ 0. 14
Янв. 6.3	+ 2.02	— 0. 25	+ 2. 03	— 0. 14	+ 2. 03	— 0. 18
11.6	— 1.16	+ 0. 23	— 1. 18	+ 0. 11	— 1. 03	+ 0. 04
14.8	— 0.24	— 0. 09	— 0. 23	— 0. 12	— 0. 18	— 0. 19
17.3	+ 1.11	— 0. 99	+ 1. 24	— 0. 81	+ 1. 35	— 0. 80
23.3	— 1.32	— 3. 73	— 0. 58	— 3. 91	— 0. 46	— 3. 94
Февр. 10.2	— 0.34	+ 1. 41	— 0. 73	+ 1. 25	— 0. 50	+ 1. 23
15.7	+ 3.45	+ 0. 28	+ 3. 19	+ 1. 34	+ 3. 32	+ 1. 33
ΣPv^2 =	74		74		75	

Время	$\Delta\alpha\ Cos\delta$	Время	$\Delta\delta$
Элементы			
Дек. 25.0	— 0.71	Дек. 24.9	+ 0.″04
26.8	+ 0.84	27.1	+ 0. 16
Янв. 6.3	+ 2.03	6.3	— 0. 18
11.7	— 1.07	11.5	+ 0. 04
14.9	— 0.23	14.8	— 0. 19
17.4	+ 1.29	17.3	— 0. 80
23.3	— 0.46	23.3	— 3. 94
Февр. 10.3	— 0.44	10.1	+ 1. 23
15.7	+ 3.32	15.7	+ 1. 33
ΣPv^2 =	71		

Если не опредѣлять поправки къ шестому элементу, а положить ее равной нулю, то получаемъ $\Sigma Pv^2 = 170$ т. е. слишкомъ вдвое больше, чѣмъ даетъ таблица. Слѣдовательно введеніе поправки къ шестому элементу несомнѣнно улучшаетъ элементы орбиты.

ТАБЛИЦЫ

См. стр. 16 и 17.

$Log\ \lvert x \rvert$	I. $Log\ S_1$ Эллипсъ	I. $Log\ S_1$ Гипербола	II. $Log\ S_2$ Эллипсъ	II. $Log\ S_2$ Гипербола
8.7	0.001	9.999	0.001	9.999
8.8	0.001	9.999	0.001	9.999
8.9	0.002	9.998	0.002	9.998
9.0	0.002	9.998	0.004	9.996
9.1	0.004	9.996	0.006	9.994
9.20	0.006	9.994	0.009	9.991
9.21	0.007	9.994	0.010	9.990
9.22	0.007	9.993	0.010	9.990
8.23	0.007	9.993	0.011	9.989
9.24	0.008	9.993	0.011	9.989
9.25	0.008	9.992	0.012	9.988
9.26	0.008	9.992	0.013	9.988
9.27	0.009	9.992	0.013	9.987
9.28	0.009	9.991	0.014	9.987
9.29	0.010	9.991	0.014	9.886
9.30	0.010	9.990	0.015	9.985
9.31	0.011	9.990	0.016	9.985
9.32	0.011	9.989	0.017	9.984
9.33	0.012	9.988	0.017	9.983
9.34	0.012	9.988	0.018	9.983
9.35	0.013	9.988	0.019	9.982
9.36	0.013	9.987	0.020	9.981
9.37	0.014	9.987	0.021	9.980
9.38	0.015	9.986	0.022	9.979
9·39	0.015	9.985	0.023	9.978
9.40	0.0160	9.9847	0.0242	9.9772
9.41	0.0168	9.9840	0.0254	9.9761
9.42	0.0176	9.9833	0.0266	9.9750
9.43	0.0185	9.9825	0.0279	9.9739
9.44	0.0194	9.9817	0.0293	9.9727
9.45	0.0203	9.9809	0.0307	9.9715
9.46	0.0213	9.9800	0.0322	9.9702
9.47	0.0224	9.9791	0.0338	9.9688
9.48	0.0235	9.9781	0.0355	9.9674
9.49	0.0246	9.9771	0.0372	9.9659
9.50	0.0258	9.9761	0.0391	9.9644

$Log\ \lvert x \rvert$	I. $Log\ S_1$ Эллипсъ	I. $Log\ S_1$ Гипербола	II. $Log\ S_2$ Эллипсъ	II. $Log\ S_2$ Гипербола
9.50	0.0258	9.9761	0.0391	9.9644
9.51	0.0271	9.9750	0.0410	9.9628
9.52	0.0284	9.9739	0.0430	9.9611
9.53	0.0298	9.9727	0.0452	9.9594
9.54	0.0313	9.9714	0.0474	9.9575
9.55	0.0329	9.9702	0.0498	9.9557
9.56	0.0345	9.9688	0.0523	9.9537
9.57	0.0362	9.9674	0.0550	9.9516
9.58	0.0380	9.9660	0.0578	9.9495
9.59	0.0399	9.9644	0.0607	9.9472
9.60	0.04194	9.96285	0.06379	9.94492
9.605	0.04299	9.96203	0.06540	9.94372
9.610	0.04406	9.96120	0.06706	9.94250
9.615	0.04516	9.96035	0.06877	9.94125
9.620	0.04630	9.95948	0.07052	9.93998
9.625	0.04746	9.95859	0.07232	9.93868
9.630	0.04865	9.95769	0.07417	9.93736
9.635	0.04988	9.95676	0.07607	9.93601
9.640	0.05114	9.95582	0.07802	9.93463
9.645	0.05243	9.95486	0.08003	9.93323
9.650	0.05376	9.95388	0.08210	9.93179
9.655	0.05513	9.95287	0.08423	9.93033
9.660	0.05654	9.95185	0.08642	9.92886
9.665	0.05798	9.95081	0.08867	9.92733
9.670	0.05947	9.94975	0.09099	9.92578
9.675	0.06099	9.94866	0.09338	9.92420
9.680	0.06256	9.94756	0.09584	9.92260
9.685	0.06418	9.94643	0.09837	9.92096
9.690	0.06584	9.94528	0.10097	9.91929
9.695	0.06755	9.94410	0.10366	9.91758
9.700	0.06931	9.94291	0.10642	9.91585

$$x^2 = Sin^2\, g = \frac{r\, r_0\, Sin^2\, f}{a\, p}$$

Замѣченныя ошибки и опечатки.

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
6	снизу 6	$\frac{1}{r^2}$	$-\frac{1}{r^2}$
16	сверху 11	x^{2n+1}	$x^{2n+1}+\ldots$
23	снизу 11	$[B+[$	$[B+$
29	снизу 7	$-\frac{Cos\lambda}{\Delta}$	$+\frac{Cos\lambda}{\Delta}$