Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Ksenia Rozhinskaya

$M(a, B, c)$-ideaalid Banachi ruumides

Bakalaureusetöö

Juhendaja: Indrek Zolk

Tartu 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Aastal 1972 ilmunud artiklis [AE] tõid E. Alfsen ja E. Effros sisse M-ideaali mõiste. Osutus, et kui Banachi ruumi kinnine alamruum on M-ideaal, on tal mitmeid tähtsaid omadusi (nt jätku ühesusomadus), mida suvalisel kinnisel alamruumil ei tarvitse olla. See seab M-ideaalid tähtsale kohale Banachi ruumide uurimisel.

Aastal 1993 ilmus artikkel [GKS], kus G. Godefroy, N. Kalton ja P. Saphar defineerisid ideaali mõistet. See võimaldas neil teatavas mõttes ühendada M-ideaali mõiste ning 1989. aasta artiklist [CK] pärineva u-ideaali mõiste. Lisaks esitasid nad u-ideaali kompleksete ruumide jaoks sobiva versiooni, h-ideaali. Järgmiseks sammuks varem tuntud ideaalide üldistamise suunas võib lugeda 1998. aasta artiklit [CN], kus J. Cabello ja E. Nieto tutvustasid M-ideaali mõiste üldistava $M(r,s)$-ideaali mõistet.

$M(a,B,c)$-ideaali mõiste lähtepunktiks on E. Oja 2000. aasta artikkel [O_1]. 2009. aasta artiklist [OZ] leiab järgmise definitsiooni.

> Olgu $a, c \geqslant 0$ ja olgu $B \subset \mathbb{K}$ kompaktne hulk. Ütleme, et Banachi ruum X rahuldab $M(a,B,c)$-*võrratust*, kui kehtib
>
> $$\|ax^{***} + b\pi_X x^{***}\| + c\|\pi_X x^{***}\| \leqslant \|x^{***}\| \quad \forall b \in B, \quad \forall x^{***} \in X^{***},$$
>
> kus $\pi_X \colon X^{***} \to X^{***}$ on kanooniline projektor.

Selle definitsiooni põhjal defineerime me $M(a,B,c)$-ideaali suvalise kinnise alamruumi jaoks ning püstitame endale eesmärgi uurida $M(a,B,c)$-ideaalide omadusi. Motivatsioon $M(a,B,c)$-ideaalide uurimiseks tuleneb asjaolust, et $M(a,B,c)$-ideaali mõiste hõlmab kõiki varem uuritud ideaalide erijuhtusid ja annab võimaluse käsitleda neid üldisemas kontekstis.

Käesolev bakalaureusetöö koosneb neljast peatükist.

Töö esimeses peatükis anname ülevaate edasise töö jaoks vajalikest eelteadmistest.

Teises peatükis toome sisse $M(a, B, c)$-ideaali mõiste ning tutvume $M(a, B, c)$-ideaalide põhiomadustega. Vaatleme lähemalt mõningaid $M(a, B, c)$-ideaalide erijuhtusid, nimelt h-ideaale, u-ideaale ja M-ideaale.

Kolmanda peatüki eesmärk on uurida $M(a, B, c)$-ideaale konkreetsetes Banachi ruumides. Esimeses alapeatükis vaatleme Banachi ruumi ℓ_∞^2 ühemõõtmelisi alamruume ja esitame tarvilikke ja piisavaid tingimusi selleks, et need alamruumid rahuldaksid $M(a, B, c)$-võrratust ruumis ℓ_∞^2. Teises alapeatükis esitame ühe teoreetilise tulemuse, mis võimaldab konstrueerida näiteid $M(a, B, c)$-ideaalidest ruumis $\mathcal{L}(X)$.

Neljandas peatükis uurime $M(a, B, c)$-võrratuse transitiivsuse omadust. Selleks toome sisse Hahn-Banachi jätkuoperaatori mõiste ning näitame, et Hahn-Banachi jätkuoperaatorid on tihedalt seotud ideaaliprojektoritega. Seda seost kasutades tõestame käesoleva bakalaureusetöö esimese põhitulemusena, et kui alamruum X on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis Y ja alamruum Y on $M(d, E, f)$-ideaal ruumis Z, siis alamruum X on teatud võrratust rahuldav ideaal ruumis Z (vt teoreemi 4.8). Sellele teadmisele tuginedes tõestame käesoleva töö teise põhitulemusena, et kui ruum X on $M(a, B, c)$-ideaal oma teises kaasruumis X^{**}, siis iga naturaalarvulise n korral ruum X on teatud võrratust rahuldav ideaal ruumis $X^{(2n)}$ (vt teoreemi 4.23).

Käesolevas töös kasutame järgmisi tähistusi.

Sümboliga $\mathbb{K}$ tähistame reaalarvude korpust $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpust $\mathbb{C}$.

Kompaktse hulga $B \subset \mathbb{K}$ absoluutväärtuse või mooduli poolest suurimat ja vähimat elementi tähistame vastavalt $\max|B|$ ja $\min|B|$, st $\max|B| = \max_{b\in B}|b|$ ja $\min|B| = \min_{b\in B}|b|$. Kui arv $a \in \mathbb{K}$, siis tähistame $a + B := \{a + b\colon b \in B\}$, $aB := \{ab\colon b \in B\}$.

Sümboliga B_X tähistame normeeritud ruumi X kinnist ühikkera ning sümboliga S_X ruumi X ühiksfääri.

Normeeritud ruumist X normeeritud ruumi Y tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame $\mathcal{L}(X, Y)$ ning kompaktsete operaatorite ruumi tähistame $\mathcal{K}(X, Y)$. Ruume $\mathcal{L}(X, X)$ ja $\mathcal{K}(X, X)$ tähistame vastavalt $\mathcal{L}(X)$ ja $\mathcal{K}(X)$.

Lineaarkujutuse $P\colon X \to Y$ kujutist ja tuuma tähistame vastavalt $\operatorname{ran} P$ ja $\ker P$. Kui $Z \subset X$, siis seosega $P|_Z(z) = Pz$, $z \in Z$, defineeritud operaatorit $P|_Z\colon Z \to Y$ nimetame operaatori P ahendiks hulgale Z.

Samasusteisendust ruumil X tähistame I_X või lihtsalt I (kui ruumi X roll on kontekstist selge). Kui ruum Y on ruumi X alamruum, tähistame sümboliga i_{YX} ruumi Y sisestust ruumi X.

Funktsionaali $x^* \in X^*$ reaalosa tähistame $\operatorname{Re} x^*$, st $\operatorname{Re} x^*(x) = \operatorname{Re}(x^*(x))$, kus element $x \in X$.

Sümboliga $\operatorname{span} Y$ tähistame alamhulga $Y \subset X$ lineaarset katet.

PEATÜKK 1
Vajalikud eelteadmised

1.1 Projektorid

Käesoleva töö üheks põhimõisteks on projektori mõiste. Selle alapeatüki eesmärk on tutvustada seda mõistet ning anda ülevaade projektorite tähtsamatest omadustest.

Siintoodute väidete kehtivuse kontroll ei peaks valmistama raskusi, vajadusel võib pöörduda õpiku [OO, lk 259] või õpiku [R, lk 126] poole.

Olgu X vektorruum.

Definitsioon. Öeldakse, et lineaarne operaator $P\colon X \to X$ on *projektor*, kui $P^2 = P$, st
$$P(Px) = Px$$
iga elemendi $x \in X$ korral.

Edasise töö jaoks vajame järgmisi projektorite omadusi.

Lause 1.1. *Lineaarne operaator $P\colon X \to X$ on projektor parajasti siis, kui* $\operatorname{ran} P = \{x \in X : x = Px\}$.

Lause 1.2. *Kui lineaarne operaator $P\colon X \to X$ on projektor, siis operaator $I - P\colon X \to X$ on samuti projektor, kusjuures kehtivad seosed* $\operatorname{ran}(I - P) = \ker P$ *ja* $\ker(I - P) = \operatorname{ran} P$.

Lause 1.3. *Kui lineaarne operaator $P\colon X \to X$ on projektor, siis* $X = \operatorname{ran} P \oplus \ker P$.

Lause 1.4. *Olgu X normeeritud ruum. Kui pidev lineaarne operaator $P\colon X \to X$ on projektor, siis $\|P\| \geqslant 1$.*

1.2 Tulemusi funktsionaalanalüüsist

Selles alapeatükis anname ülevaade edasise töö kontekstis vajalikest mõistetest ja tulemustest funktsionaalanalüüsist.

Funktsionaalanalüüsi põhitulemustega tutvumiseks sobib näiteks õpik [OO] või õpik [R]. Siintoodute väidete põhjendusi võib leida näiteks õpiku [OO] V peatüki paragrahvidest 4 ja 6.

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle korpuse $\mathbb{K}$.

Definitsioon. Lineaarset sürjektsiooni $T\colon X \to Y$ nimetatakse *isomeetriliseks isomorfismiks*, kui

$$\|Tx\| = \|x\|$$

iga elemendi $x \in X$ korral.

Märkus 1.5. Isomeetriline isomorfism on bijektsioon. Tõepoolest, kui elementide $x, y \in X$ puhul kehtib võrdus $Tx = Ty$, siis

$$\|x - y\| = \|T(x - y)\| = \|Tx - Ty\| = 0$$

ja seega $x = y$, st operaator T on injektiivne.

Kui eksisteerib isomeetriline isomorfism ruumide X ja Y vahel, siis öeldakse, et ruumid X ja Y on *isomeetriliselt isomorfsed* ja kirjutatakse $X \cong Y$.

Lause 1.6. *Kui lineaarne operaator $T\colon X \to Y$ on isomeetriline isomorfism, siis operaatori T pöördoperaator $T^{-1}\colon Y \to X$ on samuti isomeetriline isomorfism.*

Definitsioon. Pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ nimetatakse ruumi X *kaasruumiks* ja tähistatakse X^*.

Ruumi X^* kaasruumi $(X^*)^* = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$ nimetatakse ruumi X *teiseks kaasruumiks* ja tähistatakse X^{**}.

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Ruumi X *n. järku kaasruumi* tähistatakse sümboliga $X^{(n)}$ ja defineeritakse seosega $X^{(n)} = (X^{(n-1)})^*$, kus $X^{(0)} = X$.

Lause 1.7. *Ruum X^* on täielik.*

Lause 1.8. *Iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral kehtib võrdus $\|x^*\| = \|\operatorname{Re} x^*\|$.*

Lause 1.9. *Olgu elemendid $x, y \in X$. Kui võrdus $x^*(x) = x^*(y)$ kehtib iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral, siis $x = y$.*

Ruum X on loomulikul viisil sisestatav ruumi X^{**}. Nimelt, defineerime iga elemendi $x \in X$ korral kujutuse $j_X : X \to X^{**}$ võrdusega

$$j_X(x)(x^*) = x^*(x), \quad x^* \in X^*.$$

Seda kujutust nimetatakse ruumi X *kanooniliseks sisestuseks* teise kaasruumi X^{**}.

Lause 1.10. *Kujutus j_X on isomeetriline isomorfism normeeritud ruumide X ja $j_X(X)$ vahel.*

Lause 1.11. *Alamruum $j_X(X)$ on kinnine parajasti siis, kui ruum X on Banachi ruum.*

Definitsioon. Operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ *kaasoperaatoriks* nimetatakse operaatorit $A^* : Y^* \to X^*$, mis on defineeritud seosega

$$(A^* y^*)(x) = y^*(Ax), \quad x \in X, \quad y^* \in Y^*.$$

Lause 1.12. *Operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaator $A^* : Y^* \to X^*$ on pidev ja lineaarne, st $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, seejuures $\|A^*\| = \|A\|$.*

Kuna operaator $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, võime vaadelda operaatori A^* kaasoperaatorit $(A^*)^* \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$. Edaspidi tähistame seda operaatorit A^{**}.

Lause 1.13. *Olgu operaatorid $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Kehtib seos $(BA)^* = A^* B^*$.*

Lause 1.14. *Kui operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ on pööratav, siis tema kaasoperaator $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ on samuti pööratav, kusjuures kehtib võrdus $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Lause 1.15. *Kui operaator $T : X \to Y$ on isomeetriline isomorfism, siis operaatori T kaasoperaator $T^* : Y^* \to X^*$ on samuti isomeetriline isomorfism.*

Lause 1.16. *Olgu operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Kehtib seos*

$$A^{**} j_X = j_Y A.$$

Definitsioon. Olgu ruum Y normeeritud ruumi X alamruum. Hulka

$$Y^\perp := \{x^* \in X^* : x^*(y) = 0 \ \forall y \in Y\}$$

nimetatakse alamruumi Y *annullaatoriks.*

Lause 1.17. *Olgu ruum Y normeeritud ruumi X alamruum. Ruumi Y annullaator on ruumi X^* kinnine alamruum.*

Lause 1.18. *Olgu operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Kehtib võrdus* $\ker A^* = (\operatorname{ran} A)^\perp$.

Lause 1.19. *Olgu operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Kui ruum X ja alamruum* $\operatorname{ran} A$ *on täielikud, siis kehtib võrdus* $\operatorname{ran} A^* = (\ker A)^\perp$.

Alamruumi $Y^\perp \subset X^*$ annullaatorit $(Y^\perp)^\perp \subset X^{**}$ tähistame edaspidi tähisega $Y^{\perp\perp}$.

PEATÜKK 2
$M(a, B, c)$-ideaalid

2.1 $M(a, B, c)$-ideaali mõiste ja põhiomadused

Käesolevas alapeatükis toome lugejani $M(a, B, c)$-ideaali mõiste ja tutvume $M(a, B, c)$-ideaalide põhiomadustega.

Olgu X Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$.

Definitsioon. Öeldakse, et ruumi X kinnine alamruum Y on *ideaal* ruumis X, kui eksisteerib selline projektor $P \in \mathcal{L}(X^*)$, et $\|P\| = 1$ ja $\ker P = Y^{\perp}$. Projektorit P nimetatakse sellisel juhul *ideaaliprojektoriks*.

Märkus 2.1. Tänu lausele 1.4 kehtib iga pideva lineaarse projektori puhul võrratus $\|P\| \geqslant 1$, seega ideaaliprojektoriks saavad olla vaid need projektorid, mille norm saavutab minimaalse võimaliku väärtuse.

Märkus 2.2. Edaspidi kõikjal eeldame, et alamruum $Y \neq \{0\}$, sest nullruum ei ole kunagi ideaal. Tõepoolest, oletades, et alamruum $Y = \{0\}$ on ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P, saaksime muuhulgas võrduse

$$\ker P = Y^{\perp} = \{x^* \in X^* \colon x^*(0) = 0\} = X^*,$$

mille põhjal peaks projektor P tegelikult olema nullkujutus. Sel juhul aga $\|P\| \neq 1$, mis on vastuolu.

Märkus 2.3. Kui alamruum Y on ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P, siis märkuse 2.2 tõttu kehtib $\operatorname{ran} P \neq \{0\}$.

PÕHJENDUS. Oletame vastuväiteliselt, et ruum Y on ideaal ruumis X ja $\operatorname{ran} P = \{0\}$. Sel juhul järeldub lausest 1.3, et $\ker P = X^*$ ja seega $Y^{\perp} = \ker P = X^*$, st $x^*(y) = 0$ suvalise elemendi $y \in Y$ ja suvalise funktsionaali $x^* \in X^*$ korral. Lause 1.9 kohaselt peab kehtima võrdus $Y = \{0\}$. Märkuse 2.2 tõttu aga ei ole ruum $Y = \{0\}$ ideaal ruumis X. See on vastuolu, seega $\operatorname{ran} P \neq \{0\}$ $\square$

Defineerime nüüd käesoleva töö põhimõiste, milleks on $M(a, B, c)$-ideaal.

Definitsioon. Olgu arvud $a, c \geqslant 0$ ja olgu $B \subset \mathbb{K}$ kompaktne hulk. Öeldakse, et ruumi X kinnine alamruum Y on $M(a, B, c)$*-võrratust rahuldav ideaal* ehk $M(a, B, c)$*-ideaal* ruumis X, kui alamruum Y on ideaal ruumis X ja vastav ideaaliprojektor P rahuldab tingimust

$$\|ax^* + bPx^*\| + c\|Px^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall b \in B, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Mõnda $M(a, B, c)$-ideaali erijuhtu on juba põhjalikult uuritud ning nendele on omistatud erinimetused.

Definitsioon. Olgu $r,\ s \in (0, 1]$. $M(r, s)$*-ideaaliks* nimetatakse $M(s, \{-s\}, r)$-võrratust rahuldavat ideaali.

M*-ideaaliks* nimetatakse $M(1, \{-1\}, 1)$-võrratust rahuldavat ideaali.

u*-ideaaliks* nimetatakse $M(1, \{-2\}, 0)$-võrratust rahuldavat ideaali.

Juhul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nimetatakse h*-ideaaliks* $M(1, \{-(1 + \lambda) \colon \lambda \in S_{\mathbb{C}}\}, 0)$-võrratust rahuldavat ideaali.

Nendest on kõige uuritumad M-ideaalid. M-ideaali mõiste toodi sisse juba 1972. aasta artiklis [AE] ning aastal 1993 ilmus nende kohta mahukas monograafia [HWW].

u-ideaali mõiste pärineb 1989. aasta artiklist [CK]. Artiklis [GKS] toodi sisse h-ideaali mõiste ning uuriti u-ideaalide ja h-ideaalide omadusi.

1998. aasta artiklis [CN] tutvustati esmakordselt M-ideaali üldistavat $M(r, s)$-ideaali mõistet. $M(r, s)$-ideaale käsitletakse näiteks artiklites [CNO] ja [H].

Märkame, et eelmainitud artiklites vastavate ideaalide definitsioonid erinevad meie omadest. Alapeatükis 2.2 näeme, et need definitsioonid on tegelikult samaväärsed.

$M(a, B, c)$-ideaalide mõiste lähtepunktiks on aastal 2000 ilmunud artikkel [O_1], kus vastav tingimus oli mainitud ruumi X^{**} alamruumi $j_X(X)$ jaoks. Artiklis [OZ] esitati selle tingimuse formaalne definitsioon (alamruumi $j_X(X) \subset X^{**}$ korral, vt sissejuhatust), mida me üldistame suvalisele ruumile. Meie definitsiooni eelis seisneb selles, et ta haarab kõiki varem uuritud ideaalide erijuhtusid ja seega võimaldab uurida neid üldisemalt seisukohalt.

Osutub, et $M(a, B, c)$-ideaalide puhul arvude a ja c ning hulga B valik ei saa olla täiesti suvaline. Seda põhjendab järgmine lause.

Lause 2.4. *Kui kinnine alamruum Y on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X, siis $|a+b| + c \leqslant 1$ iga arvu $b \in B$ korral.*

TÕESTUS. Olgu kinnine alamruum Y $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X ja olgu P vastav ideaaliprojektor, siis suvaliste elementide $x^* \in X^*$, $b \in B$ korral kehtib võrratus

$$\|ax^* + bPx^*\| + c\|Px^*\| \leqslant \|x^*\|.$$

Tänu märkusele 2.3 võime fikseerida mingi nullist erineva elemendi $y_0^* \in \operatorname{ran} P$. Tähistame $y_1^* := \dfrac{y_0^*}{\|y_0^*\|}$, otsene kontroll näitab, et ka element $y_1^* \in \operatorname{ran} P$. Olgu $b \in B$ suvaline. Paneme tähele, et lause 1.1 tõttu

$$\begin{aligned}|a+b|+c &= \|ay_1^* + by_1^*\| + c\|y_1^*\| \\ &= \|ay_1^* + bPy_1^*\| + c\|Py_1^*\| \\ &\leqslant \|y_1^*\| \\ &= 1,\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Lausest 2.4 järeldub vahetult järgmine väide.

Järeldus 2.5. *Kui kinnine alamruum Y on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X, siis $c \leqslant 1$ ja iga arvu $b \in B$ korral $|a + b| \leqslant 1$.*

Märkus 2.6. $M(a, B, c)$-ideaalide uurimisel ei ole eeldus $a \geqslant 0$ tegelikult kitsendus. Nimelt, kui $a < 0$, võime defineerida hulga $-B := \{-b \colon b \in B\}$ ning edasi vaadelda $M(-a, -B, c)$-ideaale.

Järeldus 2.5 muuhulgas põhjendab, miks $M(r, s)$-ideaalide puhul eeldatakse, et arv $r \in (0, 1]$. Samas aga võib esmapilgul jääda ebaselgeks, miks ka arvule s pannakse selline piirang. Järgmisest lausest selgub, et kuigi nõue $s \in (0, 1]$ ei ole tarvilik, on kõik juhtumid, kus $s > 1$, triviaalsed.

Meenutame kõigepealt lause tõestuseks vajalikku järeldust Hahn-Banachi teoreemist (vt [OO, lk 171]).

Lemma 2.7. *Kui Y on normeeritud ruumi X kinnine alamruum, siis iga elemendi $x \in X \setminus Y$ korral leidub selline funktsionaal $x^* \in X^*$, et $x^*(x) = 1$ ja $x^*(y) = 0$ iga elemendi $y \in Y$ korral.*

Lause 2.8. *Olgu $(r, s) \in (0, 1] \times (1, \infty)$. Kinnine alamruum Y on $M(s, \{-s\}, r)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis X parajasti siis, kui $Y = X$.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Kehtigu $(r, s) \in (0, 1] \times (1, \infty)$ ning olgu kinnine alamruum Y $M(s, \{-s\}, r)$-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P, siis

$$s\|x^* - Px^*\| + r\|Px^*\| \leqslant \|x^*\|$$

iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral. Näitame, et sellest võrratusest järeldub võrdus $P = I_{X^*}$.

Oletame vastuväiteliselt, et leidub selline element $x_0^* \in X^*$, et $Px_0^* \neq x_0^*$. Siis peab kehtima võrratus

$$s\|(x_0^* - Px_0^*) - P(x_0^* - Px_0^*)\| + r\|P(x_0^* - Px_0^*)\| \leqslant \|x_0^* - Px_0^*\|$$

ehk

$$s\|x_0^* - Px_0^*\| \leqslant \|x_0^* - Px_0^*\|,$$

mis on aga vastuolus eeldusega $s > 1$. Järelikult iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral kehtib võrdus $x^* = Px^*$ ja seega projektor P on tegelikult samasusteisendus I_{X^*}.

Kuna alamruum Y on ideaal ruumis X, peab kehtima

$$Y^\perp = \ker P = \ker I_{X^*} = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \ \forall x \in X\} = \{0\}.$$

Oletame nüüd, et $Y \neq X$, siis saame valida elemendi $x_0 \in X \setminus Y$. Lemma 2.7 kohaselt eksisteerib selline funktsionaal $x^* \in X^*$, et kehtivad võrdused $x^*(x_0) = 1$ ja $x^*(y) = 0$ iga elemendi $y \in Y$ korral. Viimane tingimus tähendab, et funktsionaal $x^* \in Y^\perp$ ja seega $x^* = 0$. Nüüd

$$1 = x^*(x_0) = 0(x_0) = 0,$$

mis on võimatu. Järelikult, $Y = X$.

Piisavus. Tõestuseks paneme tähele, et operaator $I_{X^*}\colon X^* \to X^*$ on ideaaliprojektor. Tõepoolest, operaator I_{X^*} on pidev lineaarne projektor, seejuures

$$\ker I_{X^*} = \{0\} = \{x^* \in X^* \colon x^*(x) = 0 \ \forall x \in X\} = X^\perp$$

ning $\|I_{X^*}\| = 1$.

Paneme tähele, et suvalise arvu s korral tingimus

$$s\|x^* - I_{X^*}x^*\| + r\|I_{X^*}x^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*$$

on samaväärne tingimusega

$$r\|x^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*.$$

Viimane võrratus on eelduse kohaselt alati tõene, seega ruum X on tõepoolest $M(s, \{-s\}, r)$-ideaal iseendas. $\square$

Alapeatüki lõpetuseks toome veel mõned lihtsad $M(a, B, c)$-ideaalide omadused.

Lause 2.9. *Kui kinnine alamruum Y on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X, siis Y on $M(ka, kB, c)$-ideaal ruumis X iga arvu $k \in [0, 1]$ korral.*

TÕESTUS. Olgu kinnine alamruum Y $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P. Olgu $k \in [0, 1]$. Siis

$$\begin{aligned} \|kax^* + kbPx^*\| + c\|Px^*\| &= k(\|ax^* + bPx^*\|) + c\|Px^*\| \\ &\leqslant \|ax^* + bPx^*\| + c\|Px^*\| \\ &\leqslant \|x^*\| \end{aligned}$$

kõikide elementide $x^* \in X^*$ ja $b \in B$ korral. $\square$

Järgmised väited tõestatakse analoogiliselt.

Lause 2.10. *Kui kinnine alamruum Y on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X, siis alamruum Y on $M(a,B,d)$-ideaal ruumis X iga arvu $d \in [0,c]$ korral.*

Järeldus 2.11. *Kui kinnine alamruum Y on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X, siis alamruum Y on $M(ka,kB,kc)$-ideaal ruumis X iga arvu $k \in [0,1]$ korral.*

Järgmise lause olulise järeldusena saame, et u-ideaalid on M-ideaalide üldistus. Eelnimetatud väide on mainitud juba artiklis [CK].

Lause 2.12. *Kui kinnine alamruum Y on $M(r,s)$-ideaal ruumis X, siis alamruum Y on $M(s,\{-(s-r),-(s+r)\},0)$-ideaal ruumis X.*

TÕESTUS. Olgu kinnine alamruum Y $M(r,s)$-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P. Paneme tähele, et suvalise elemendi $x^* \in X^*$ korral

$$\|sx^* - (s-r)Px^*\| \leqslant s\|x^* - Px^*\| + r\|Px^*\| \leqslant \|x^*\|$$

ja analoogiliselt

$$\|sx^* - (s+r)Px^*\| \leqslant s\|x^* - Px^*\| + r\|Px^*\| \leqslant \|x^*\|,$$

seega alamruum Y on $M(s,\{-(s-r),-(s+r)\},0)$-ideaal ruumis X. □

Järeldus 2.13. *Kui kinnine alamruum Y on M-ideaal ruumis X, siis alamruum Y on u-ideaal ruumis X.*

2.2 h-ideaalid, u-ideaalid ja M-ideaalid

$M(a,B,c)$-ideaalide erijuhtudest kõige rohkem tähelepanu on väärinud M-ideaalid, u-ideaalid ning h-ideaalid. Selles alapeatükis vaatleme erinevaid võimalusi nende ideaalide defineerimiseks ning selle abil esitame alternatiivse tõestuse faktile, et u-ideaalid on M-ideaalide üldistus. Alapeatüki lõpus tutvustame lugejale kolme kera omadusi, mis on mugavad abivahendid kontrollimiseks, kas mingi alamruum on u-ideaal või M-ideaal vaadeldavas ruumis.

Olgu X Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{C}$. Vaatleme kõigepealt h-ideaale ja uurime erinevaid võimalusi h-ideaali mõiste defineerimiseks.

Kuna esmakordselt defineeriti h-ideaali Hermite'i projektori kaudu (vt [GKS]), siis uurime Hermite'i projektori mõistet lähemalt.

Definitsioon. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ on *isomeetria*, kui võrdus $\|Tx\| = \|x\|$ kehtib iga elemendi $x \in X$ korral.

Definitsioon. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X)$ on *Hermite'i operaator*, kui operaator $\exp(\mathrm{i}\theta T)$, mis on defineeritud seosega

$$\exp(\mathrm{i}\theta T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta T)^n}{n!},$$

on isomeetria iga arvu $\theta \in \mathbb{R}$ korral.

Märkus 2.14. Kui Hermite'i operaator T on projektor, ütleme, et T on *Hermite'i projektor.*

Sageli defineeritakse kompleksses Hilberti ruumis X Hermite'i operaator T kui operaator, mis on enesekaasne, st rahuldab nõuet $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ suvaliste elementide x, $y \in X$ korral, kus $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on skalaarkorrutis. Saab näidata (vt [L]), et igas normeeritud ruumis X on võimalik defineerida poolskalaarkorrutis $[\cdot, \cdot]$, mis on kooskõlas normiga, st $[x, x] = \|x\|^2$ iga elemendi $x \in X$ korral.

Raamatus [FJ, lk 109] on näidatud, et nõue $[Tx, y] = [x, Ty]$ on omakorda samaväärne asjaoluga, et $\exp(\mathrm{i}\theta T)$ on isomeetria iga arvu $\theta \in \mathbb{R}$ korral.

Parema ettekujutuse Hermite'i projektori mõistest annab artiklis [Jam] esitatud bitsirkulaarse projektori mõiste.

Definitsioon. Öeldakse, et projektor P on *bitsirkulaarne*, kui operaator $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} P + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(I - P)$ on isomeetria suvaliste arvude α, $\beta \in \mathbb{R}$ korral.

Lause 2.15 ([Jam, lemma 2.1])**.** *Olgu $P \in \mathcal{L}(X)$ projektor. Projektor P on Hermite'i projektor parajasti siis, kui P on bitsirkulaarne projektor.*

Järgmises lauses näeme, et bitsirkulaarsuse tingimust saab veelgi lihtsustada.

Lause 2.16. *Olgu $P \in \mathcal{L}(X)$ projektor. Projektor P on bitsirkulaarne parajasti siis, kui $\|I - (1 + \lambda)P\| = 1$ iga arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ korral.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu projektor P bitsirkulaarne ja olgu $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in S_{\mathbb{C}}$, siis

$$\|I - (1 + \lambda)P\| = \|I - P - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} P\| = \|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} P - \mathrm{e}^{\mathrm{i}0}(I - P)\| = 1.$$

Piisavus. Olgu P selline projektor, et $\|I - (1 + \lambda)P\| = 1$ iga arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ korral ja olgu arvud α ja $\beta \in \mathbb{R}$ suvalised, siis

$$\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} P + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(I - P)\| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}| \|I - P + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} P\| = \|I - (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)})P\| = 1$$

ja seega $\|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} P + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(I - P))(x^*)\| \leqslant \|x^*\|$ suvalise funktsionaali $x^* \in X^*$ korral.

Teiselt poolt,

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}P + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(I-P))(x^*)\| &= \|(I-(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)})P))(x^*)\| \\
&\geqslant \|(I-(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)})P)(I-(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)})P))(x^*)\| \\
&= \|Ix^*\| \\
&= \|x^*\|
\end{aligned}$$

ja järelikult on operaator $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}P + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(I-P)$ isomeetria. □

Märkus 2.17. Kui projektor P rahuldab tingimust $\|I-(1+\lambda)P\| = 1$ iga arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ korral, siis $\|P\| = 1$.

Põhjendus. Võrdusest $\|I-(1+\lambda)P\| = 1$ järeldub muuhulgas, et $\|I-2P\| = 1$. Seda arvestades näeme, et

$$\|P\| = \frac{1}{2}\|I + (I-2P)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|I\| + \|I-2P\|) = 1.$$

Võrratus $\|P\| \geqslant 1$ järeldub lausest 1.4. □

Siinkohal meenutame, et me defineerisime h-ideaali kui $M(1, \{-(1+\lambda)\colon \lambda \in S_{\mathbb{C}}\}, 0)$-võrratust rahuldavat ideaali. Artiklist [GKS], kust pärineb h-ideaali mõiste, leiab aga järgmise definitsiooni.

> **Definitsioon.** Öeldakse, et ruumi X kinnine alamruum Y on h-ideaal, kui eksisteerib selline Hermite'i projektor $P \in \mathcal{L}(X^*)$, et $\ker P = Y^{\perp}$.

Järgmisest lausest selgub, et need definitsioonid on samaväärsed.

Lause 2.18. *Ruumi X kinnine alamruum Y on h-ideaal parajasti siis, kui eksisteerib selline Hermite'i projektor $P \in \mathcal{L}(X^*)$, et* $\ker P = Y^{\perp}$.

Lause 2.18 järeldub vahetult lausetest 2.15, 2.16 ja järgnevast lausest 2.19 (arvestades märkust 2.17). Märgime, et lauses 2.19 esinevat tingimust h-ideaalide defineerimiseks kasutati näiteks artiklites [OP] ja [O_1].

Lause 2.19. *Olgu kinnine alamruum Y ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P. Alamruum Y on h-ideaal ruumis X parajasti siis, kui iga arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ korral kehtib võrdus $\|I-(1+\lambda)P\| = 1$.*

Tõestus. *Tarvilikkus.* Olgu alamruum Y h-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P, siis h-ideaali definitsiooni kohaselt kehtib võrratus

$$\|(I-(1+\lambda)P)(x^*)\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*,\ \forall \lambda \in S_{\mathbb{C}},$$

ja seega $\|I-(1+\lambda)P\| \leqslant 1$. Valime $0 \neq y_0^* \in \operatorname{ran} P$, siis $y_1^* := \dfrac{y_0^*}{\|y_0^*\|} \in S_{X^*}$ ning

$$\|(I-(1+\lambda)P)(y_1^*)\| = \|-\lambda y_1^*\| = |\lambda|\|y_1^*\| = 1 \qquad \forall \lambda \in S_{\mathbb{C}}$$

ja järelikult $\|I-(1+\lambda)P\| = 1$, nagu oli vaja.

Piisavus. Olgu kinnine alamruum Y ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P ja kehtigu iga arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ korral võrdus $\|I-(1+\lambda)P\| = 1$. Siis iga elemendi $x^* \in X^*$ ja iga arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ korral

$$\|x^* - (1+\lambda)Px^*\| \leqslant \|I-(1+\lambda)P\|\|x^*\| = \|x^*\|,$$

mis tähendab, et alamruum Y on h-ideaal ruumis X. □

Juba artiklis [GKS] esitati h-ideaali defineerimiseks ka järgnev tingimus, mis ei sisalda Hermite'i projektori mõistet. Näitame üksikasjalikult, et see definitsioon on samuti kooskõlas varem toodud tingimustega h-ideaalide jaoks.

Lause 2.20. *Ruumi X kinnine alamruum Y on h-ideaal parajasti siis, kui eksisteerib selline kinnine alamruum $Z \subset X^*$, et $X^* = Y^\perp \oplus Z$, ja võrdus*

$$\|y^* + z^*\| = \|\lambda y^* + z^*\| \tag{2.1}$$

kehtib kõikide elementide $y^* \in Y^\perp$, $z^* \in Z$ ja iga arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ korral.

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu Y h-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P. Defineerime $Z := \operatorname{ran} P$, siis $X^* = \ker P \oplus \operatorname{ran} P = Y^\perp \oplus Z$.

Olgu elemendid $y^* \in Y^\perp$, $z^* \in Z$ ja arv $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ suvalised. Paneme tähele, et

$$\|(I-(1+\lambda)P)(y^* + z^*)\| = \|y^* - \lambda z^*\|,$$

seega h-ideaali definitsiooni kohaselt kehtib võrratus

$$\|y^* - \lambda z^*\| \leqslant \|y^* + z^*\|$$

ning kuna arvu $\lambda \in S_{\mathbb{C}}$ valik oli suvaline, kehtib ka võrratus

$$\left\|y^* - \frac{1}{\lambda} z^*\right\| \leqslant \|y^* + z^*\|.$$

Teiselt poolt, paneme tähele, et

$$\left\|y^* - \frac{1}{\lambda} z^*\right\| \geqslant \left\|(I-(1+\lambda)P)\left(y^* - \frac{1}{\lambda} z^*\right)\right\| = \|y^* + z^*\|$$

ja seega

$$\|y^* + z^*\| = \left\| y^* - \frac{1}{\lambda} z^* \right\| = \| - \lambda y^* + z^*\|.$$

Teeme muutujavahetuse $\lambda' = -\lambda$, siis saame soovitud tulemuse

$$\|y^* + z^*\| = \|\lambda' y^* + z^*\|,$$

mis kehtib kõikide elementide $y^* \in Y^\perp$, $z^* \in Z$ ja iga arvu $\lambda' \in S_\mathbb{C}$ korral.

Piisavus. Eksisteerigu selline kinnine alamruum $Z \subset X^*$, et $X^* = Y^\perp \oplus Z$ ja kehtib võrdus (2.1). Defineerime operaatori $P\colon X^* \to X^*$ seosega $Px^* = z^*$, kus $x^* = y^* + z^*$, ning veendume, et operaator P on ideaaliprojektor.

Märgime kõigepealt, et operaatori P definitsioon on korrektne, kuna suvalise elemendi $x^* \in X^*$ esitus $x^* = y^* + z^*$ on ühene.

Näitame, et operaator P on lineaarne. Olgu elemendid x_1^*, $x_2^* \in X^*$ ning olgu arv $\mu \in \mathbb{C}$. Eelduse tõttu leiduvad üheselt määratud elemendid y_1^*, $y_2^* \in Y^\perp$ ja z_1^*, $z_2^* \in Z$ nii, et $x_1^* = y_1^* + z_1^*$ ja $x_2^* = y_2^* + z_2^*$. Seega

$$\begin{aligned} P(x_1^* + \mu x_2^*) &= P(y_1^* + z_1^* + \mu(y_2^* + z_2^*)) \\ &= P((y_1^* + \mu y_2^*) + (z_1^* + \mu z_2^*)) \\ &= z_1^* + \mu z_2^* \\ &= P(x_1^*) + \mu P(x_2^*). \end{aligned}$$

Fikseerime elemendi $x^* \in X^*$ ja arvu $\lambda \in S_\mathbb{C}$ ning olgu $x^* = y^* + z^*$, kus $y^* \in Y^\perp$ ja $z^* \in Z$.

Operaator P on projektor, sest

$$PP(x^*) = P(P(y^* + z^*)) = P(z^*) = P(0 + z^*) = z^* = Px^*.$$

Kuna

$$\begin{aligned} \|Px^*\| &= \|P(y^* + z^*)\| = \|z^*\| \\ &= \frac{1}{2}\|z^* + \lambda y^* + z^* - \lambda y^*\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|z^* + \lambda y^*\| + \|z^* - \lambda y^*\|) \\ &= \|z^* + y^*\| \\ &= \|x^*\|, \end{aligned}$$

on lineaarne operaator P pidev, seejuures $\|P\| \leqslant 1$, millest koos lausega 1.4 järeldub, et $\|P\| = 1$.

Paneme ka tähele, et

$$\begin{aligned}\ker P &= \{x^* \in X^* : Px^* = 0\} \\ &= \{x^* \in X^* : x^* = y^* + z^*,\ z^* = 0\} \\ &= Y^\perp,\end{aligned}$$

järelikult on P ideaaliprojektor.

Lõpuks, kehtib võrdus

$$\begin{aligned}\|(I-(1+\lambda)P)(x^*)\| &= \|(I-(1+\lambda)P)(y^*+z^*)\| \\ &= \|y^* + z^* - z^* - \lambda z^*\| \\ &= \|y^* - \lambda z^*\| \\ &= \|-\lambda y^* - \lambda z^*\| \\ &= |\lambda|\|y^* + z^*\| \\ &= \|x^*\|,\end{aligned}$$

ja seega alamruum Y on h-ideaal ruumis X. □

Olgu edasi X Banachi ruum üle $\mathbb{K}$. Vaatleme nüüd u-ideaale.

Nagu on märgatud artiklis [CK], on olemas mitu võimalust u-ideaalide defineerimiseks. Esitame need kahes järgmises lauses. Nende lausete tõestused on analoogilised lausete 2.20 ja 2.19 tõestusega juhul $\lambda = 1$.

Lause 2.21. *Olgu kinnine alamruum Y ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P. Alamruum Y on u-ideaal ruumis X parajasti siis, kui kehtib võrdus $\|I - 2P\| = 1$.*

Lause 2.22. *Ruumi X kinnine alamruum Y on u-ideaal parajasti siis, kui eksisteerib selline kinnine alamruum $Z \subset X^*$, et $X^* = Y^\perp \oplus Z$, ja kehtib*

$$\|y^* + z^*\| = \|y^* - z^*\| \quad \forall y^* \in Y^\perp,\ \forall z^* \in Z.$$

Eelmistest lausetest on muuhulgas näha, et h-ideaalid on u-ideaalide üldistus kompleksssetele ruumidele.

Edasi vaatleme M-ideaale. Kirjanduses (vrd [AE], [HWW], [O_1]) defineeritakse M-ideaale erineval viisil. Esitame need definitsioonid ja põhjendame, miks nad on samaväärsed.

Lause 2.23. *Olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *alamruum Y on M-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P;*

(ii) *alamruum* Y *on ideaal ruumis* X *ideaaliprojektoriga* P *ja iga elemendi* $x^* \in X^*$ *korral kehtib*

$$\|x^* - Px^*\| + \|Px^*\| = \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*; \tag{2.2}$$

(iii) *leidub selline projektor* $Q\colon X^* \to X^*$, *et* $\operatorname{ran} Q = Y^\perp$, $\|Q\| = 1$ *ja*

$$\|Qx^*\| + \|x^* - Qx^*\| = \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*;$$

(iv) *leidub selline projektor* $Q\colon X^* \to X^*$, *et* $\operatorname{ran} Q = Y^\perp$, $\|Q\| = 1$ *ja*

$$\|Qx^*\| + \|x^* - Qx^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*.$$

TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu Y M-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P, siis M-ideaali definitsiooni kohaselt leiab aset võrratus

$$\|x^* - Px^*\| + \|Px^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*.$$

Teiselt poolt saame kolmnurga võrratusest, et

$$\|x^*\| = \|x^* - Px^* + Px^*\| \leqslant \|x^* - Px^*\| + \|Px^*\| \quad \forall x^* \in X^*$$

ja kokkuvõttes $\|x^* - Px^*\| + \|Px^*\| = \|x^*\|$ suvalise elemendi $x^* \in X^*$ korral.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Olgu alamruum Y ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P ja kehtigu iga elemendi $x^* \in X^*$ korral seos (2.2).

Defineerime $Q\colon X^* \to X^*$ seosega $Q = I - P$. Lause 1.2 kohaselt Q on projektor, kusjuures $\operatorname{ran} Q = \ker P = Y^\perp$, ning lause 1.4 põhjal $\|Q\| \geqslant 1$.

Kuna

$$\|Qx^*\| = \|x^* - Px^*\| = \|x^*\| - \|Px^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*,$$

siis $\|Q\| \leqslant 1$ ja kokkuvõttes $\|Q\| = 1$.

Lõpuks,

$$\|Qx^*\| + \|x^* - Qx^*\| = \|x^* - Px^*\| + \|Px^*\| = \|x^*\|$$

suvalise elemendi $x^* \in X^*$ korral.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Ilmne.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu eeldus (iv). Defineerime $P\colon X^* \to X^*$ seosega $P = I - Q$, siis sarnaselt eelneva aruteluga on lihtne veenduda, et P on ideaaliprojektor, mis rahuldab tingimust

$$\|x^* - Px^*\| + \|Px^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall x^* \in X^*,$$

ja see tähendab parajasti seda, et Y on M-ideaal ruumis X. $\square$

Anname nüüd alternatiivse põhjenduse järeldusele 2.13, mis väidab, et *kui kinnine alamruum Y on M-ideaal ruumis X, siis alamruum Y on u-ideaal ruumis X.*

Järelduse 2.13 alternatiivne tõestus. Olgu Y M-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P. Sellisel juhul $X^* = Y^\perp \oplus \operatorname{ran} P$ ja tänu lausele 2.23 mis tahes elementide $y^* \in \ker P = Y^\perp$, $z^* \in \operatorname{ran} P$ korral kehtib

$$\|y^* + z^*\| = \|y^* + z^* - P(y^* + z^*)\| + \|P(y^* + z^*)\| = \|y^*\| + \|z^*\|.$$

Kui võtta elemendi z^* rolli $-z^*$, saab viimane võrdus kuju

$$\|y^* - z^*\| = \|y^*\| + \|z^*\|.$$

Järelikult, suvaliste elementide $y^* \in Y^\perp$, $z^* \in \operatorname{ran} P$ korral kehtib võrdus $\|y^* + z^*\| = \|y^* - z^*\|$ ja lause 2.22 kohaselt Y on u-ideaal ruumis X. $\square$

Tihti on üsna raske otse definitsioonist lähtudes kontrollida, kas mingi kinnine alamruum Y on u-ideaal (M-ideaal) Banachi ruumis X või mitte. Tõhus tööriist u-ideaaliks (M-ideaaliks) olemise kontrollimiseks on kolme kera omadus u-ideaalide (M-ideaalide) jaoks.

Kolme kera omaduste eelis seisneb kõigepealt selles, et nad vabastavad meid tööst kaasruumis ning ideaaliprojektori otsingust. Lisaks sellele need omadused lihtsustavad mõistmist juhtudel, kui me saame ette kujutada vaadeldavat ruumi n-ö "piltlikult" (näiteks tasandina).

Kolme kera omadus M-ideaalide jaoks pärineb 1972. aasta artiklist [AE]. Meie siin aga sõnastame selle omaduse monograafia [HWW] eeskujul.

Teoreem 2.24 (Kolme kera omadus M-ideaalide jaoks)**.** *Olgu Y Banachi ruumi X kinnine alamruum. Olgu elemendid $x_1, x_2, x_3 \in X$ ning arvud $r_1, r_2, r_3 > 0$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Y on M-ideaal ruumis X;*

(ii) *Kui kerad $(B(x_i, r_i))_{i=1}^3$ rahuldavad iga $i \in \{1, 2, 3\}$ korral tingimusi*

$$B(x_i, r_i) \cap Y \neq \emptyset$$

ja

$$\bigcap_{i=1}^{3} B(x_i, r_i) \neq \emptyset,$$

siis

$$\bigcap_{i=1}^{3} B(x_i, r_i + \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$$

suvalise $\varepsilon > 0$ korral.

Kolme kera omadus u-ideaalide jaoks pärineb 2007. aasta artiklist [LL].

Teoreem 2.25 (Kolme kera omadus u-ideaalide jaoks)**.** *Olgu Y Banachi ruumi X kinnine alamruum ja olgu element $x \in X \setminus Y$ ning $Z = \operatorname{span}(Y, \{x\})$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Y on u-ideaal ruumis Z;*

(ii) $Y \cap \bigcap_{i=1}^{3} B_Z(x + y_i, \|x - y_i\| + \varepsilon) \neq \emptyset$, *kus $y_1, y_2, y_3 \in Y$ ja $\varepsilon > 0$ on suvalised.*

Mõnda kolme kera omaduste rakendust näeme järgmises peatükis.

PEATÜKK 3
Näiteid $M(a, B, c)$-ideaalidest

3.1 $M(a, B, c)$-ideaalid ruumis ℓ_∞^2

Käesolevas alapeatükis analüüsime reaalse Banachi ruumi ℓ_∞^2 ühemõõtmelisi alamruume, milleks on nullpunkti läbivad sirged, ja anname tarvilikke ja piisavaid tingimusi selleks, et need alamruumid oleksid $M(a, B, c)$-ideaalid ruumis ℓ_∞^2.

Meenutame, et ruum ℓ_∞^2 koosneb järjestatud paaridest (ξ_1, ξ_2), kus ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}$, ning norm ruumis ℓ_∞^2 on defineeritud võrdusega $\|(\xi_1, \xi_2)\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$ $((\xi_1, \xi_2) \in \ell_\infty^2)$.

Selles alapeatükis vajame järgmist teoreemi, mis kirjeldab ruumi ℓ_q^n kaasruumi (vt [OO, lk 163, teoreem 3]).

Teoreem 3.1. *Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $p, q \in [1, \infty]$ kaaseksponendid (st $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)*[1]*. Kujutus $T\colon \ell_q^n \to (\ell_p^n)^*$, mis on defineeritud seosega*

$$(T\alpha)(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i, \quad x = (\xi_i)_{i=1}^n \in \ell_p^n,\ \alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n \in \ell_q^n,$$

on isomeetriline isomorfism. Järelikult $(\ell_p^n)^* \cong \ell_q^n$.

Pidades silmas seda teoreemi, toetume edasises arutelus faktile, et ruumi ℓ_∞^2 kaasruum $(\ell_\infty^2)^*$ on samastatav ruumiga ℓ_1^2.

Lisaks kasutame järgmist tulemust algebrast (vt [K, lk 63, teoreem 4]).

Teoreem 3.2. *Olgu X ja Y vektorruumid üle ühe ja sama korpuse ning olgu $S\colon X \to Y$ lineaarne kujutus. Kui ruum X on lõplikumõõtmeline, siis* $\operatorname{ran} P$ *ja* $\ker P$ *on lõplikumõõtmelised alamruumid ning*

$$\dim X = \dim(\ker S) + \dim(\operatorname{ran} S).$$

[1] $p = 1$ kaaseksponendiks loetakse $q = \infty$, $p = \infty$ kaaseksponendiks loetakse $q = 1$.

Märkus 3.3. Selles peatükis me vaatleme selliseid projektoreid ruumis ℓ_1^2, mille tuum on ruumi ℓ_1^2 ühemõõtmeline alamruum. Teoreemi 3.2 põhjal sellise projektori kujutis on samuti ühemõõtmeline alamruum.

Nullpunkti läbiva sirge taandatud võrrand on $y = kx$, kus arv $k \in \mathbb{R}$. Vaatleme edasi ruumi ℓ_∞^2 alamruumi $Y_k := \{(\xi, k\xi) \colon \xi \in \mathbb{R})\}$ ja selgitame, mis tingimustel alamruum Y_k on $M(a, B, c)$-võrratust rahuldav ideaal ruumis ℓ_∞^2. Lisaks vaatleme eraldi sirget $x = 0$ ehk alamruumi $Y_\infty := \{(0, \xi) \colon \xi \in \mathbb{R})\}$.

Tõestame kõigepealt kaks tehnilist abitulemust.

Lemma 3.4. *Olgu $k \in \mathbb{R}$.*

1. *Võrdus* $\sup\limits_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |\alpha_1 + k\alpha_2| = |k|$ *kehtib parajasti siis, kui* $|k| \geqslant 1$*.*

2. *Võrdus* $\sup\limits_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |\alpha_1 + k\alpha_2| = 1$ *kehtib parajasti siis, kui* $|k| \leqslant 1$*.*

TÕESTUS. Tõestame esimese väite, teise väite tõestus on analoogiline.

Tarvilikkus. Olgu $\sup\limits_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |\alpha_1 + k\alpha_2| = |k|$, siis $|\alpha_1 + k\alpha_2| \leqslant |k|$ iga tingimust $|\alpha_1|+|\alpha_2| \leqslant 1$ rahuldava reaalarvude paari (α_1, α_2) korral. Võttes $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$, saamegi, et $|k| \geqslant 1$. □

Piisavus. Olgu $|k| \geqslant 1$, siis suvaliste arvude $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} |\alpha_1 + k\alpha_2| &\leqslant |\alpha_1| + |k||\alpha_2| \\ &\leqslant |k||\alpha_1| + |k||\alpha_2| \\ &= |k|(|\alpha_1| + |\alpha_2|), \end{aligned}$$

seega $\sup\limits_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |\alpha_1 + k\alpha_2| \leqslant |k|$. Valime $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1)$, siis $|\alpha_1 + k\alpha_2| = |k|$ ning $|\alpha_1| + |\alpha_2| \leqslant 1$. Järelikult $\sup\limits_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |\alpha_1 + k\alpha_2| = |k|$.

Lemma 3.5.

1. *Olgu $|k| \geqslant 1$. Kui võrdus $|k|(1 + |d|) = |1 + kd|$ kehtib mingi arvu $d \in \mathbb{R}$ korral, siis $|k| = 1$.*

2. *Olgu $|k| \leqslant 1$. Kui võrdus $1 + |d| = |1 + kd|$ kehtib mingi arvu $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral, siis $|k| = 1$.*

TÕESTUS. Piirdume ka siin esimese väite tõestusega, teise väite tõestus on analoogiline.

Kehtigu mingi arvu $d \in \mathbb{R}$ korral võrdus $|k|(1 + |d|) = |1 + kd|$.

Kui $k \geqslant 1$, on järgmised võimalused.

- Kui $d > 0$, saame võrduse $k(1+d) = 1 + kd$, millest järeldub, et $k = 1$.
- Kui $-1/k \leqslant d \leqslant 0$, saame võrduse $k(1-d) = 1 + kd$, millest $d = \dfrac{k-1}{2k} \geqslant 0$ ja seega $d = 0$ ning $k = 1$.
- Kui $d < -1/k$, saame võrduse $k(1-d) = -1 - kd$, millest $k = -1$.

Juhul $k \leqslant -1$ on järgmised võimalused.

- Kui $d > -1/k$, siis $-k(1+d) = -1 - kd$, millest $k = 1$.
- Kui $0 \leqslant d \leqslant -1/k$, saame võrduse $-k(1+d) = 1 + kd$, millest saame $d = \dfrac{-k-1}{2k} \leqslant 0$ ja seega $d = 0$ ning $k = -1$.
- Kui $d < 0$, siis $-k(1-d) = 1 + kd$ ehk $k = -1$.

Kokkuvõttes saime, et $|k| = 1$, nagu oli vaja. □

Järgmisest lausest selgub, mis kujul saavad olla ideaaliprojektorid, kui alamruum Y_k on ideaal ruumis ℓ_2^∞.

Lause 3.6. *Olgu $k \in \mathbb{R}$. Kui alamruum Y_k on ideaal ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga P, siis $P \in \{P_x, P_y\} \cup \{P_{d^+} \colon d \geqslant 0\} \cup \{P_{d^-} \colon d \leqslant 0\}$, kus*

$$\begin{aligned}
P_x &: \ell_2^1 \ni (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\alpha_1 + k\alpha_2, 0) \in \ell_2^1, \\
P_y &: \ell_2^1 \ni (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \left(0, \frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{k}\right) \in \ell_2^1, \\
P_{d^+} &: \ell_2^1 \ni (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{d+1}, \frac{d(\alpha_1 + \alpha_2)}{d+1}\right) \in \ell_2^1, \quad d \geqslant 0, \\
P_{d^-} &: \ell_2^1 \ni (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{1-d}, \frac{d(\alpha_1 - \alpha_2)}{1-d}\right) \in \ell_2^1, \quad d \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Tõestus. Olgu alamruum Y_k ideaal ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga P. Sel juhul peab kehtima võrdus

$$\begin{aligned}
\ker P = Y_k^\perp &= \{x^* \in (\ell_\infty^2)^* \colon x^*(y) = 0 \ \forall y \in Y_k\} \\
&= \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_1^2 \colon \alpha_1 \xi + k\alpha_2 \xi = 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(-k\alpha, \alpha) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Almaruum $\operatorname{ran} P$ on ühemõõtmeline (vt märkust 3.3), seega leidub element $(u, v) \in \ell_2^1$ nii, et $\operatorname{ran} P = \{\lambda(u, v) \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$. Tänu lausele 1.3 kehtib $u + kv \neq 0$ ja iga element $(\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_1^2$ on üheselt esitatav kujul

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_2 u - \alpha_1 v}{u + kv}(-k, 1) + \frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{u + kv}(u, v)$$

ja järelikult projektoril P on kuju

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{u + kv}(u, v), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_2^1.$$

Vaatleme kolme juhtu.

1. Kui $v = 0$, siis projektoril on kuju

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 + k\alpha_2, 0), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_2^1.$$

Et P oleks ideaaliprojektor, peab projektori P norm olema 1, st peab kehtima võrdus

$$\sup_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |\alpha_1 + k\alpha_2| = 1,$$

mis lemma 3.4 põhjal tähendab, et $|k| \leqslant 1$, seega $P = P_x$ on ideaaliprojektor parajasti siis, kui $|k| \leqslant 1$.

2. Juhul $u = 0$ saame analoogiliselt, et projektor P_y on ideaaliprojektor parajasti siis, kui $|k| \geqslant 1$.

3. Olgu $u \neq 0$, $v \neq 0$. Tähistame $d := \dfrac{v}{u}$, siis vaadeldav projektor saab kuju

$$P(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{\alpha_1 + k\alpha_2}{1 + kd}, \frac{d(\alpha_1 + k\alpha_2)}{1 + kd}\right), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_2^1.$$

Tahame, et kehtiks võrdus $\|P\| = 1$ ehk

$$\sup_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |k\alpha_1 + \alpha_2| = \frac{|1 + kd|}{1 + |d|}.$$

Juhul $|k| \geqslant 1$ ($|k| \leqslant 1$) see võrdus on lemma 3.4 põhjal samaväärne tingimusega

$$|k|(1 + |d|) = |1 + kd|$$

(vastavalt, $1 + |d| = |1 + kd|$) ning lemmast 3.5 järeldub, et sel juhul $|k| = 1$.

Kui $k = 1$, siis

$$\begin{aligned}
1 = \|P\| &= \sup_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} \left\| \left(\frac{d(\alpha_1 + \alpha_2)}{d + 1}, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{d + 1} \right) \right\| \\
&= \frac{|d| + 1}{|d + 1|} \sup_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\leqslant 1} |\alpha_1 + \alpha_2| \\
&= \frac{|d| + 1}{|d + 1|}
\end{aligned}$$

ehk

$$1 + |d| = |1 + d|,$$

ning see võrdus kehtib parajasti siis, kui $d \geqslant 0$. Järelikult juhul $k = 1$ on projektor P ideaaliprojektor parajasti siis, kui $d \geqslant 0$. Sel juhul $P = P_{d^+}$.

Juhul $k = -1$ analoogiliselt saame võrduse

$$1 + |d| = |1 - d|,$$

mis kehtib parajasti siis, kui $d \leqslant 0$. Järelikult juhul $k = -1$ on P ideaaliprojektor parajasti siis, kui $d \leqslant 0$. Sel juhul $P = P_{d^-}$.

Kokkuvõttes saime, et kui alamruum Y_k on ideaal ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoriga P, siis projektor $P \in \{P_x, P_y\} \cup \{P_{d^+} : d \geqslant 0\} \cup \{P_{d^-} : d \leqslant 0\}$. $\square$

Anname nüüd tarvilikke ja piisavaid tingimuse selleks, et alamruum Y_k oleks $M(a, B, c)$-ideaal ruumis ℓ^2_∞. Mugavuse mõttes käsitleme projektoreid P_x, P_y, P_{d^+} ja P_{d^-} eraldi.

Olgu edaspidi arvud $a, c \geqslant 0$ ja olgu $B \subset \mathbb{R}$ kompaktne hulk.

Lause 3.7. *Alamruum Y_k on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoriga P_x parajasti siis, kui $|k| \leqslant 1$ ja on täidetud tingimused*

$$\begin{cases} a + |b||k| + c|k| \leqslant 1 & \forall b \in B, \\ |a + b| + c \leqslant 1 & \forall b \in B. \end{cases} \tag{3.1}$$

TÕESTUS. Lause 3.6 tõestuses nägime, et projektor P_x on ideaaliprojektor parajasti siis, kui $|k| \leqslant 1$, mistõttu me piirdume selle juhuga.

Olgu $|k| \leqslant 1$. Paneme kõigepealt tähele, et iga elemendi $(\alpha_1, \alpha_2) \in \ell^2_1$ ja iga arvu $b \in B$ korral kehtib

$$\begin{aligned} &\|a(\alpha_1, \alpha_2) + bP_x(\alpha_1, \alpha_2)\| + c\|P_x(\alpha_1, \alpha_2)\| \\ &= \|(a\alpha_1, a\alpha_2) + (b\alpha_1 + bk\alpha_2, 0)\| + c\,\|(\alpha_1 + k\alpha_2, 0)\| \\ &= |a\alpha_1 + b\alpha_1 + bk\alpha_2| + a|\alpha_2| + c|\alpha_1 + k\alpha_2|. \end{aligned}$$

Tarvilikkus. Olgu alamruum Y_k $M(a, B, c)$-ideaal ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoriga P_x.

Iga elemendi $(\alpha_1, \alpha_2) \in \ell^2_1$ ja iga elemendi $b \in B$ korral kehtib võrratus

$$|a\alpha_1 + b\alpha_1 + bk\alpha_2| + a|\alpha_2| + c|\alpha_1 + k\alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$

Valides $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 0)$, siis saame viimasest võrratusest, et $|a + b| + c \leqslant 1$, ning valides $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 1)$, saame, et $a + b|k| + c|k| \leqslant 1$, seega tingimused (3.1) on tõepoolest täidetud.

Piisavus. Olgu täidetud tingimused (3.1), siis

$$\begin{aligned}\|a(\alpha_1,\alpha_2)+bP_x(\alpha_1,\alpha_2)\|+c\|P_x(\alpha_1,\alpha_2)\| &= |a\alpha_1+b\alpha_1+bk\alpha_2|+a|\alpha_2| \\ &\quad + c|\alpha_1+k\alpha_2| \\ &\leqslant (|a+b|+c)|\alpha_1|+(a+b|k|+c|k|)|\alpha_2| \\ &\leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2| \\ &= \|(\alpha_1,\alpha_2)\|\end{aligned}$$

ja seega alamruum Y_k rahuldab $M(a,B,c)$-võrratust ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoritega P_x. □

Analoogilise arutelu abil saab tõestada järgmise lause.

Lause 3.8. *Alamruum Y_k on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoriga P_y parajasti siis, kui $|k|\geqslant 1$ ja on täidetud tingimused*

$$\begin{cases}|a+b|+c\leqslant 1 & \forall b\in B,\\ \dfrac{a|k|+|b|+c}{|k|}\leqslant 1 & \forall b\in B.\end{cases} \tag{3.2}$$

Lause 3.9. *Alamruum Y_k on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoriga P_{d^+} parajasti siis, kui $k=1$ ning on täidetud tingimused*

$$\begin{cases}d\geqslant 0,\\ \dfrac{|ad+a+bd|+|b|+cd+c}{d+1}\leqslant 1 & \forall b\in B,\\ \dfrac{|ad+a+b|+|b|d+cd+c}{d+1}\leqslant 1 & \forall b\in B.\end{cases} \tag{3.3}$$

Tõestus. Lause 3.6 tõestuses nägime, et projektor P_{d^+} on ideaaliprojektor parajasti siis, kui $k=1$, mistõttu me piirdume selle juhuga.

Paneme kõigepealt tähele, et iga elemendi $(\alpha_1,\alpha_2)\in\ell^2_1$ ja iga elemendi $b\in B$ korral kehtib

$$\begin{aligned}&\|a(\alpha_1,\alpha_2)+bP_{d^+}(\alpha_1,\alpha_2)\|+c\|P_{d^+}(\alpha_1,\alpha_2)\| \\ &= \left\|(a\alpha_1,a\alpha_2)+b\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{d+1},\frac{d(\alpha_1+\alpha_2)}{d+1}\right)\right\|+c\left\|\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{d+1},\frac{d(\alpha_1+\alpha_2)}{d+1}\right)\right\| \\ &= \frac{1}{d+1}(|ad\alpha_1+a\alpha_1+b\alpha_1+b\alpha_2|+|ad\alpha_2+a\alpha_2+bd\alpha_1+bd\alpha_2| \\ &\quad + c|\alpha_1+\alpha_2|+cd|\alpha_1+\alpha_2|).\end{aligned}$$

Tarvilikkus. Olgu alamruum Y_k $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga P_{d^+}, siis iga elemendi $(\alpha_1,\alpha_2)\in\ell_1^2$ ja iga elemendi $b\in B$ korral leaib aset võrratus

$$\frac{1}{d+1}(|ad\alpha_1+a\alpha_1+b\alpha_1+b\alpha_2|+|ad\alpha_2+a\alpha_2+bd\alpha_1+bd\alpha_2| \\ +c|\alpha_1+\alpha_2|+cd|\alpha_1+\alpha_2|)\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|.$$

Fikseerides $(\alpha_1,\alpha_2)=(0,1)$ ja $(\alpha_1,\alpha_2)=(1,0)$ saame siit, et tingimused (3.3) on tõepoolest täidetud.

Piisavus. Kehtigu tingimused (3.3), siis

$$\begin{aligned}
&\|a(\alpha_1,\alpha_2)+bP_{d^+}(\alpha_1,\alpha_2)\|+c\|P_{d^+}(\alpha_1,\alpha_2)\|\\
&=\frac{1}{d+1}(|ad\alpha_1+a\alpha_1+bd\alpha_1+bd\alpha_2|+|ad\alpha_2+a\alpha_2+b\alpha_1+b\alpha_2|\\
&\quad+cd|\alpha_1+\alpha_2|+c|\alpha_1+\alpha_2|)\\
&\leqslant\frac{1}{d+1}((|ad+a+bd|+|b|+cd+c|)|\alpha_1|+(|ad+a+b|+|b|d+cd+c)|\alpha_2|)\\
&\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|\\
&=\|(\alpha_1,\alpha_2)\|
\end{aligned}$$

ja seega alamruum Y_k rahuldab $M(a,B,c)$-võrratust ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga P_{d^+}. $\square$

Analoogiliselt saab tõestada järgmise väite.

Lause 3.10. *Alamruum Y_k on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga P_{d^-} parajasti siis, kui $k=-1$ korral on täidetud tingimused*

$$\begin{cases} d\leqslant 0, \\ \dfrac{|a-ad-bd|+|b|-cd+c}{1-d}\leqslant 1 \qquad \forall b\in B, \\ \dfrac{|a-ad+b|-|b|d-cd+c}{1-d}\leqslant 1 \qquad \forall b\in B. \end{cases} \tag{3.4}$$

Vaatame nüüd alamruumi Y_∞.

Lause 3.11. *Kui alamruum Y_∞ on ideaal ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga P, siis $P=P_\infty$, kus*

$$P_\infty:\ell_2^1\ni(\alpha_1,\alpha_2)\mapsto(0,\alpha_2)\in\ell_2^1.$$

TÕESTUS. Olgu alamruum Y_∞ ideaal ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga P. Siis peab kehtima võrdus

$$\ker P=Y_\infty^\perp=\{x^*\in(\ell_\infty^2)^*\colon x^*(y)=0\ \forall y\in Y_\infty\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{(\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2 \colon \alpha_1\xi + \alpha_2 \cdot 0 = 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha, 0) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}
$$

Kuna alamruum $\operatorname{ran} P$ on ühemõõtmeline, leidub element $(u,v) \in \ell_2^1$ nii, et $\operatorname{ran} P = \{\lambda(u,v) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, seejuures $v \neq 0$. Iga element $(\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2$ on üheselt esitatav kujul

$$(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\alpha_1 v - \alpha_2 u}{v}(1,0) + \frac{\alpha_2}{v}(u,v).$$

Järelikult projektoril P on kuju

$$P(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\alpha_2}{v}(u,v) = (\alpha_2 \frac{u}{v}, \alpha_2), \quad (\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2.$$

Suurus $\frac{u}{v}$ on konstantne, tähistame $d \coloneqq \frac{u}{v}$. Oletame, et $d \neq 0$. Siis

$$
\begin{aligned}
1 = \|P\| &= \sup_{(\alpha_1,\alpha_2) \in B_{\ell_2^1}} \|(\alpha_1 d, \alpha_1)\| \\
&= \sup_{|\alpha_1| + |\alpha_2| \leqslant 1} |\alpha_1|(|d| + 1) \\
&> \sup_{|\alpha_1| + |\alpha_2| \leqslant 1} |\alpha_1| \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

mis on võimatu. Seega $d = 0$ ja projektor P on kujul

$$P(\alpha_1,\alpha_2) = (0,\alpha_2), \quad (\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2,$$

st $P = P_\infty$. □

Selgitame, mis tingimustel alamruum Y_∞ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ_∞^2.

Lause 3.12. *Olgu arvud $a, c \geqslant 0$ ning olgu B kompaktne reaalarvude hulk. Alamruum Y_∞ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ_∞^2 parajasti siis, kui on täidetud tingimused*

$$
\begin{cases}
a \leqslant 1, \\
|a + b| + c \leqslant 1 \quad \forall b \in B.
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

TÕESTUS. Lause 3.11 kohaselt on mõtet vaadelda ainult projektorit P_∞, kuna teiste projektorite suhtes alamruum Y_∞ ei saa olla ideaal ruumis ℓ_∞^2.

Paneme kõigepealt tähele, et iga paari $(\alpha_1,\alpha_2) \in \ell_1^2$ ja iga arvu $b \in B$ korral

$$
\begin{aligned}
\|a(\alpha_1,\alpha_2) + bP_\infty(\alpha_1,\alpha_2)\| + c\|P_\infty(\alpha_1,\alpha_2)\| &= \|a(\alpha_1,\alpha_2) + b(0,\alpha_2)\| + c\|(0,\alpha_2)\| \\
&= \|(a\alpha_1, a\alpha_2 + b\alpha_2)\| + c\|(0,\alpha_2)\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a|\alpha_1| + |a+b||\alpha_2| + c|\alpha_2| \\
&= a|\alpha_1| + (|a+b| + c)|\alpha_2|.
\end{aligned}
$$

Tarvilikkus. Olgu alamruum Y_∞ $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ^2_∞, siis ideaaliprojektoriks on P_∞ ja iga elemendi $(\alpha_1,\alpha_2) \in \ell^2_1$ ja iga elemendi $b \in B$ korral kehtib

$$a|\alpha_1| + (|a+b| + c)|\alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$

Valides $(\alpha_1,\alpha_2) = (1,0)$, saame siit, et $a \leqslant 1$, valides aga $(\alpha_1,\alpha_2) = (0,1)$, saame, et $|a+b|+c \leqslant 1$ iga elemendi $b \in B$ korral. Järelikult tingimused (3.5) on täidetud.

Piisavus. Olgu täidetud tingimused (3.5), siis

$$
\begin{aligned}
\|a(\alpha_1,\alpha_2) + bP_\infty(\alpha_1,\alpha_2)\| + c\|(P_\infty(\alpha_1,\alpha_2)\| &= a|\alpha_1| + (|a+b| + c)|\alpha_2| \\
&\leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| \\
&= \|(\alpha_1,\alpha_2)\|.
\end{aligned}
$$

ja see võrratus tähendab täpselt seda, et alamruum Y_∞ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis ℓ^2_∞. □

Lausete 3.7–3.10 ning lause 3.12 abil saame uurida, millised ruumi ℓ^2_∞ ühemõõtmelised alamruumid on M-ideaalid või u-ideaalid.

Näide 3.13. Alamruumid Y_∞ ja Y_0 on ainsad M-ideaalid ruumis ℓ^2_∞.

Põhjendus. Meenutame, et M-ideaalide puhul $a = 1$, $B = \{-1\}$ ja $c = 1$. Vaatleme tingimusi (3.1)–(3.5).

Tingimus (3.1) saab kuju

$$
\begin{cases}
1 + |k| + |k| \leqslant 1, \\
1 \leqslant 1,
\end{cases}
$$

mis kehtib parajasti siis, kui $k = 0$. Seega lause 3.7 põhjal alamruum Y_0 on M-ideaal ruumis ℓ^2_∞.

Tingimus (3.2) saab kuju

$$
\begin{cases}
1 \leqslant 1, \\
\dfrac{|k| + 2}{|k|} \leqslant 1.
\end{cases}
$$

Viimane võrratus aga ei saa kehtida ühtegi reaalarvu puhul.

Tingimustel (3.3) on kujul

$$
\begin{cases}
d \geqslant 0, \\
\dfrac{|d+1-d| + 1 + d + 1}{d+1} \leqslant 1, \\
\dfrac{|d+1-1| + d + d + 1}{d+1} \leqslant 1.
\end{cases}
$$

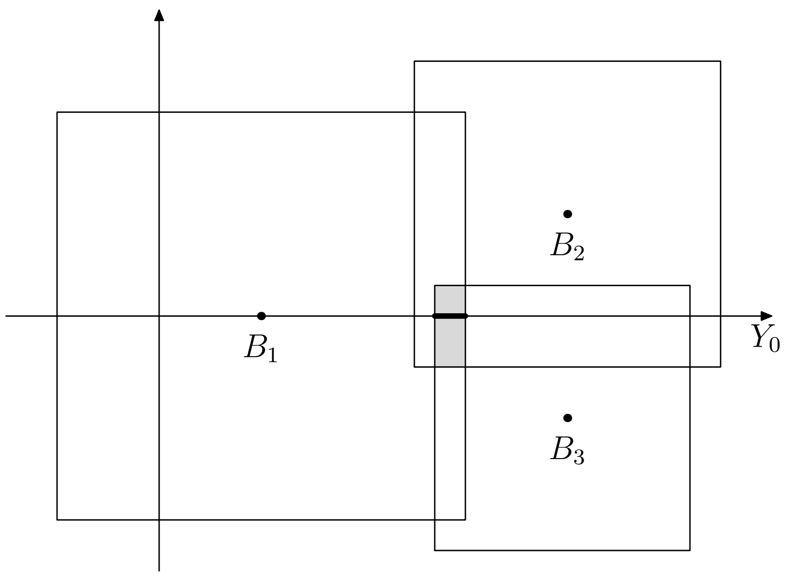
Teisest võrratusest järeldub, et $3 \leqslant 1$, mis ei ole võimalik. Seega alamruum Y_1 ei ole M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. Analoogiliselt saab veenduda, et alamruum Y_{-1} ei ole M-ideaal ruumis ℓ_∞^2.

Lõpuks, otsene kontroll näitab, et tingimused (3.5) on M-ideaalide puhul täidetud, seega alamruum Y_∞ on M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. □

Märkus 3.14. Paneme tähele, et kujutus $T\colon Y_1 \ni (\xi, \xi) \mapsto (\xi, 0) \in Y_0$ on isomeetriline isomorfism ruumide Y_1 ja Y_0 vahel, samas aga nendest alamruumidest ainult Y_0 on M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. Järelikult üldjuhul ei säilita isomeetriline isomorfism M-ideaaliks olemise omadust. Seda asjaolu on mainitud juba monograafias [O_2].

Näitlikkuse mõttes veendume, et näites 3.13 saadud tulemused on kooskõlas kolme kera omadusega M-ideaalide jaoks, st teoreemiga 2.24.

Näide 3.15. Alamruum Y_0 on M-ideaal ruumis ℓ_∞^2.



Joonis 3.1

PÕHJENDUS. Olgu meil kaks sellist kera B_1, B_2, et

$$B_1 \cap Y_0 \neq \emptyset, \; B_2 \cap Y_0 \neq \emptyset, \; B_1 \cap B_2 \neq \emptyset,$$

siis ei leidu kolmandat kera B_3, mille puhul

$$B_3 \cap Y_0 \neq \emptyset, \; B_1 \cap B_2 \cap B_3 \neq \emptyset,$$

ja

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap Y_0 = \emptyset$$

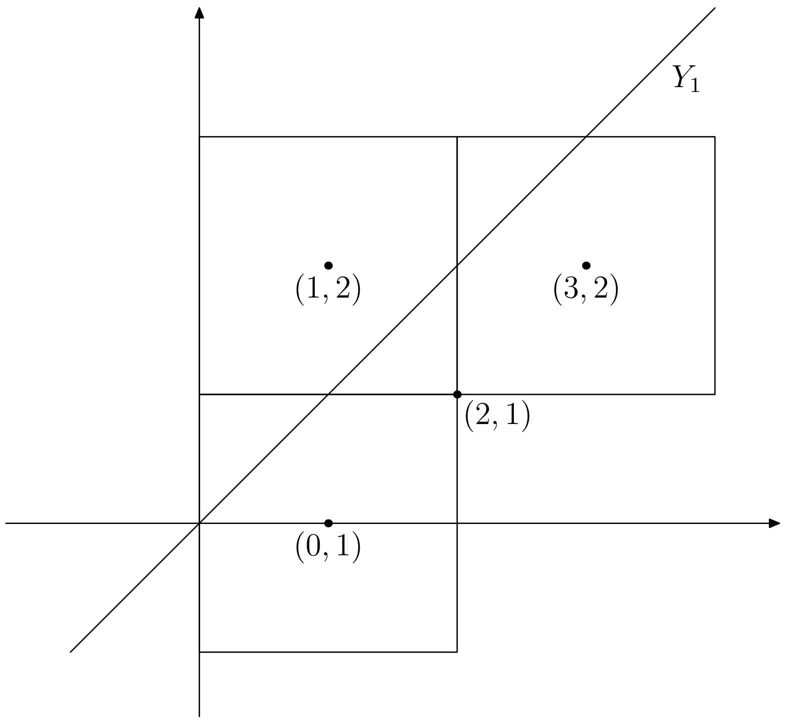
(vt joonist 3.1), ning teoreemi 2.24 põhjal Y_0 on M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. $\square$

Näide 3.16. Alamruum Y_1 ei ole M-ideaal ruumis ℓ_∞^2.

PÕHJENDUS. Vaatleme kerasid

$$\begin{aligned} B_1 &= B((0,1),1), \\ B_2 &= B((1,2),1), \\ B_3 &= B((3,2),1). \end{aligned}$$

Iga kera puhul $B_i \cap Y_1 \neq \emptyset$ $(i = 1,2,3)$ ning $\bigcap_{i=1}^{3} B_i = \{(2,1)\} \neq \emptyset$ (vt joonist 3.2).



Joonis 3.2

Samas jooniselt on näha, et piisavalt väikese arvu ε korral

$$B((0,1),1+\varepsilon) \cap B((1,2),1+\varepsilon) \cap B((3,2),1+\varepsilon) \cap Y_1 = \emptyset,$$

seega teoreemi 2.24 põhjal ruum Y_1 ei ole M-ideaal ruumis ℓ_∞^2. $\square$

Näide 3.17. Alamruumid Y_0, Y_∞, Y_1, Y_{-1} on ainsad u-ideaalid ruumis ℓ^2_∞.

Märkus 3.18. Järeldusest 2.13 juba teame, et kuna alamruumid Y_0 ja Y_∞ on M-ideaalid ruumis ℓ^2_∞, siis nad on ka u-ideaalid vaadeldavas ruumis.

Näite 3.17 põhjendus. Meenutame, et u-ideaaliks nimetatakse $M(1,\{-2\},0)$-võrratust rahuldavat ideaali. Tegutseme nagu näite 3.13 põhjenduses, st uurime tingimusi (3.1)–(3.5).

Tingimusest (3.1) saame

$$\begin{cases} 1+2|k| \leqslant 1, \\ 1 \leqslant 1, \end{cases}$$

See võrratus kehtib parajasti siis, kui $k=0$, seega ruum Y_0 on u-ideaal ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoriga

$$P: \ell^1_2 \ni (\alpha_1,\alpha_2) \mapsto (0,\alpha_2) \in \ell^1_2.$$

Tingimusest (3.2) saame

$$\begin{cases} 1 \leqslant 1, \\ \dfrac{|k|+2}{|k|} \leqslant 1, \end{cases}$$

mis ei ole kunagi tõene.

Vaatleme nüüd vahelduse mõttes tingimusi (3.4), tingimuste (3.3) puhul on arutelu analoogiline. Me saame mingi mittepositiivse arvu d jaoks tingimused

$$\begin{cases} d \leqslant 0, \\ \dfrac{|1-d+2d|+2}{1-d} \leqslant 1, \\ \dfrac{|1-d-2|-2d}{1-d} \leqslant 1, \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} d \leqslant 0, \\ |1+d| \leqslant -1-d, \\ |1+d| \leqslant 1+d, \end{cases}$$

mis kehtivad parajasti siis, kui $d=-1$. Seega lause 3.10 põhjal alamruum Y_{-1} on u-ideaal ruumis ℓ^2_∞ ideaaliprojektoriga

$$P: \ell^1_2 \ni (\alpha_1,\alpha_2) \mapsto \left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}, \frac{-\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) \in \ell^1_2.$$

Märgime, et alamruumi Y_1 puhul ideaaliprojektoriks on

$$P: \ell_2^1 \ni (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right) \in \ell_2^1.$$

Saame otseselt kontrollida, et tingimused (3.5) on u-ideaalide puhul täidetud, seega alamruum Y_∞ on u-ideaal ruumis ℓ_∞^2 ideaaliprojektoriga

$$P\colon \ell_2^1 \ni (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (\alpha_1, 0) \in \ell_2^1. \qquad \square$$

Näitlikkuse mõttes põhjendame, miks ruumis ℓ_∞^2 ei ole rohkem u-ideaale peale alamruumide Y_0, Y_∞, Y_1, Y_{-1}, kasutades kolme kera omadust u-ideaalide jaoks.

Näide 3.19. Fikseerime $k_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1, -1\}$ ja vaatleme alamruumi $Y_{k_0} = \{(\xi, k_0\xi)\colon \xi \in \mathbb{R}\}$. Alamruum Y_{k_0} ei ole u-ideaal ruumis ℓ_∞^2.

PÕHJENDUS. Veendumaks, et Y_{k_0} ei ole u-ideaal ruumis ℓ_∞^2, rakendame teoreemi 2.25, võttes kinnise alamruumi Y rolli ruumi Y_{k_0} ning ruumi X rolli ruumi ℓ_∞^2.

Fikseerime elemendi $x \coloneqq (1, 1) \in \ell_\infty^2 \setminus Y_{k_0}$, siis $\operatorname{span}(Y_{k_0}, \{x\}) = \ell_\infty^2$. Teoreemi 2.25 kohaselt Y_{k_0} on u-ideaal ruumis ℓ_∞^2 parajasti siis, kui suvalise arvu $\varepsilon > 0$ ja kolme suvalise punkti (y_1, k_0y_1), (y_2, k_0y_2), $(y_3, k_0y_3) \in Y_{k_0}$ korral

$$Y_{k_0} \cap \bigcap_{i=1}^{3} B_{\ell_\infty^2}((y_i + 1, k_0y_i + 1), \|((y_i - 1, k_0y_i - 1)\| + \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Näitame, et see nõue ei ole täidetud juba siis, kui võtame vaatluse alla kaks kera.

Tõestuses piirdume erijuhuga $0 < k_0 < 1$, kuna ülejäänud juhtumid saab tänu sümmeetriale taandada sellele erijuhule.

Olgu ε esialgu suvaline. Fikseerime kaks punkti $(0{,}5; 0{,}5k_0)$, $(1{,}5; 1{,}5k_0) \in Y_{k_0}$. Vastavalt nendele punktidele tekib kaks kera.

Punktile $(0{,}5; 0{,}5k_0)$ vastava kera keskpunkt on $(1{,}5; 0{,}5k_0 + 1)$ ja raadius on

$$r_1 \coloneqq \|(-0{,}5; 0{,}5k_0 - 1)\| + \varepsilon = \max\{0{,}5; |0{,}5k_0 - 1|\} + \varepsilon.$$

Paneme tähele, et eeldusest $k_0 < 1$ järeldub, et $1 - 0{,}5k_0 > 0{,}5$. Järelikult,

$$r_1 = \max\{0{,}5; 1 - 0{,}5k_0\} + \varepsilon = 1 - 0{,}5k_0 + \varepsilon.$$

Saime, et punktile $(0{,}5; 0{,}5k_0)$ vastab kera $B_1 \coloneqq B((1{,}5; 0{,}5k_0 + 1), r_1)$, kus $r_1 = 1 - 0{,}5k_0 + \varepsilon$.

Punktile $(1{,}5; 1{,}5k_0)$ vastava kera keskpunkt on $(2{,}5; 1{,}5k_0 + 1)$ ja raadius on

$$r_2 \coloneqq \|(0{,}5; 1{,}5k_0 - 1)\| + \varepsilon = \max\{0{,}5; |1{,}5k_0 - 1|\} + \varepsilon.$$

Võrratus $1{,}5k_0 - 1 > 0$ kehtib parajasti siis, kui $k_0 > \frac{2}{3}$, seega

$$r_2 = \begin{cases} \max\{0{,}5; 1 - 1{,}5k_0\} + \varepsilon, & \text{kui } 0 < k_0 \leqslant \frac{2}{3}, \\ \max\{0{,}5; 1{,}5k_0 - 1\} + \varepsilon, & \text{kui } \frac{2}{3} < k_0 < 1. \end{cases}$$

Juhul $0 < k_0 \leqslant \frac{2}{3}$ märgime, et $0{,}5 \leqslant 1 - 1{,}5k_0$ kehtib parajasti siis, kui $k_0 \leqslant \frac{1}{3}$. Juhul $\frac{2}{3} < k_0 < 1$ aga kehtib alati, et $0{,}5 > 1{,}5k_0 - 1$.

Saime kokkuvõttes, et punktile $(1{,}5; 1{,}5k_0)$ vastab kera $B_2 := B((2{,}5; 1{,}5k_0 + 1), r_2)$, kus

$$r_2 = \begin{cases} 1 - 1{,}5k_0 + \varepsilon, & \text{kui } 0 < k_0 \leqslant \frac{1}{3}, \\ 0{,}5 + \varepsilon, & \text{kui } \frac{1}{3} < k_0 < 1. \end{cases}$$

Uurime eraldi juhtumeid $0 < k_0 \leqslant \frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{3} < k_0 < 1$.

Olgu $0 < k_0 \leqslant \frac{1}{3}$. Kui punkt $(u, v) \in B_1 \cap B_2$, siis muuhulgas

$$u \leqslant 1{,}5 + r_1 = 1{,}5 + 1 - 0.5k_0 + \varepsilon = 2{,}5 - 0{,}5k_0 + \varepsilon$$

ja

$$v \geqslant 1{,}5k_0 + 1 - r_2 = 1{,}5k_0 + 1 - (1 - 1{,}5k_0 + \varepsilon) = 3k_0 - \varepsilon.$$

Kui aga punkt $(u, v) \in Y_{k_0}$ ja $u \leqslant 2{,}5 - 0{,}5k_0 + \varepsilon$, siis

$$v = k_0 u \leqslant k_0(2{,}5 - 0{,}5k_0 + \varepsilon).$$

Paneme tähele, et tingimus

$$k_0(2{,}5 - 0{,}5k_0 + \varepsilon) < 3k_0 - \varepsilon$$

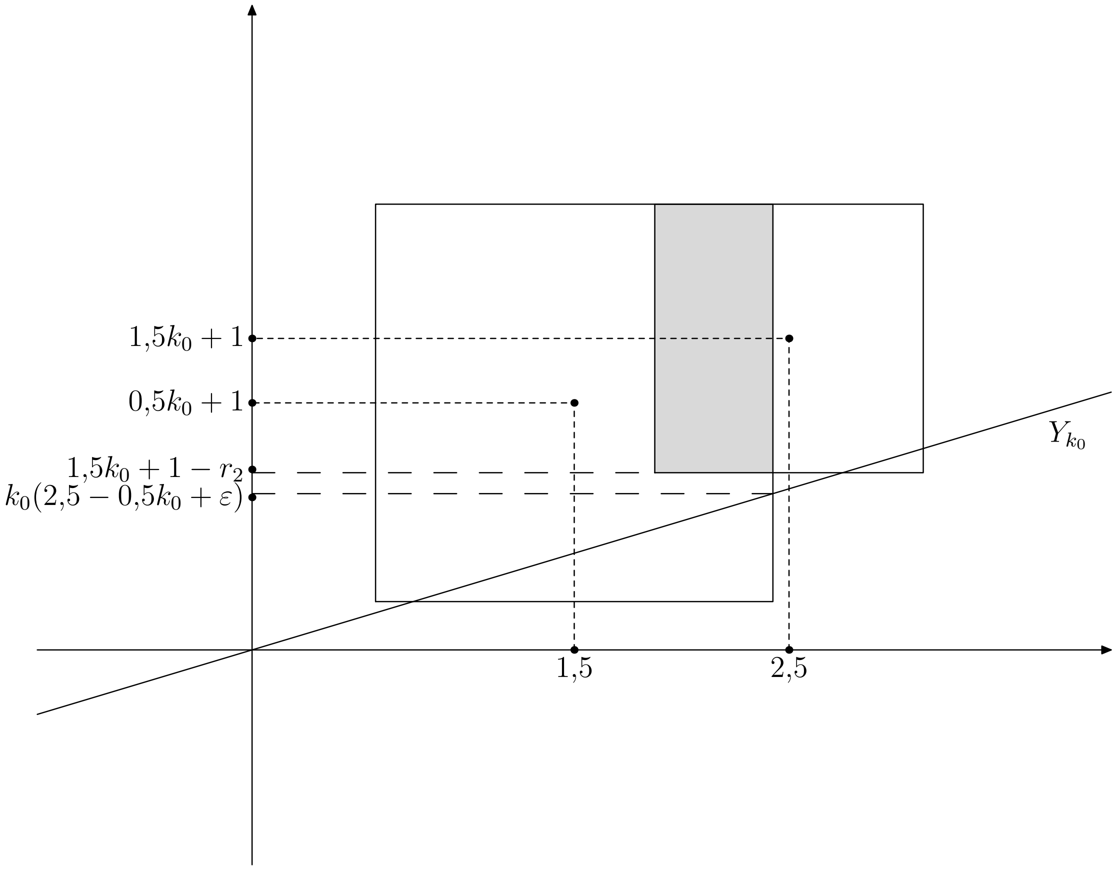
on samaväärne tingimusega

$$\varepsilon < \frac{k_0^2 + k_0}{2(k_0 + 1)}.$$

Kui arv ε rahuldab seda tingimust, siis ei saa ühisosa $B_1 \cap B_2$ sisaldada ruumi Y_{k_0} elemente (vt joonist 3.3)..

Juhul $\frac{1}{3} < k_0 < 1$ tegutseme analoogiliselt. Kui punkt $(u, v) \in B_1 \cap B_2$, siis peavad kehtima seosed

$$u \leqslant 1{,}5 + r_1 = 1{,}5 + 1 - 0{,}5k_0 + \varepsilon = 2{,}5 - 0{,}5k_0 + \varepsilon$$



Joonis 3.3: Teoreemi 2.25 rakendamine juhul $k_0 = 0{,}3$, ε=0,075.

ja

$$v \geqslant 1{,}5k_0 + 1 - r_2 = 1{,}5k_0 + 1 - (0{,}5 + \varepsilon) = 1{,}5k_0 + 0{,}5 - \varepsilon.$$

Samas, iga punkti $(u, v) \in Y_{k_0}$, mille korral $u \leqslant 2{,}5 - 0{,}5k_0 + \varepsilon$, kehtib

$$v = k_0 u \leqslant k_0(2{,}5 - 0.,k_0 + \varepsilon).$$

Tingimus

$$k_0(2{,}5 - 0{,}5k_0 + \varepsilon) < 1{,}5k_0 + 0{,}5 - \varepsilon$$

on samaväärne tingimusega

$$\varepsilon < \frac{(k_0 - 1)^2}{2(k_0 + 1)},$$

seega ka juhul $\dfrac{1}{3} < k_0 < 1$ on võimalik valida arv ε nii, et ühisosa $Y_{k_0} \cap B_1 \cap B_2$ oleks tühi.

Eelneva arutelu põhjal näeme, et kui $0 < k_0 < 1$ korral valida

$$\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\min\left\{\frac{k_0^2+k_0}{2(k_0+1)}, \frac{(k_0-1)^2}{2(k_0+1)}\right\},$$

siis kehtib

$$Y_{k_0} \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

ja seega teoreemi 2.25 põhjal Y_{k_0} ei ole u-ideaal ruumis ℓ_2^∞. □

3.2 Ruum $\mathcal{K}(X)$ kui $M(a,B,c)$-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$

Olgu X Banachi ruum. Selles alapeatükis esitame ühe teoreetilise tulemuse, mis võimaldab konstrueerida näiteid $M(a,B,c)$-ideaalidest ruumis $\mathcal{L}(X)$. Selleks vajame pere mõistet ja mõningaid omadusi, millega saab lähemalt tutvuda näiteks õpikust [S, lk 157].

Tõestame kõigepealt ühe abitulemuse.

Lemma 3.20. *Iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral kehtib võrdus $\|x^*\| = \sup_{x\in B_X} \operatorname{Re} x^*(x)$.*

TÕESTUS. Olgu funktsionaal $x^* \in X^*$. Paneme tähele, et suvalise elemendi $x \in B_X$ korral

$$\operatorname{Re} x^*(x) \leqslant \sup_{x\in B_X} \operatorname{Re} x^*(x) \leqslant \sup_{x\in B_X} |x^*(x)| = \|x^*\|.$$

Fikseerime arvu $\varepsilon > 0$. Arvestades lauset 1.8, saame valida elemendi $x_0 \in B_X$ nii, et

$$\|x^*\| - \varepsilon < |\operatorname{Re} x^*(x_0)|.$$

Paneme tähele, et

$$|\operatorname{Re} x^*(x_0)| = \begin{cases} \operatorname{Re} x^*(x_0), & \text{kui } \operatorname{Re} x^*(x_0) \geqslant 0 \\ \operatorname{Re} x^*(-x_0), & \text{kui } \operatorname{Re} x^*(x_0) < 0, \end{cases}$$

ja kuna element $-x_0 \in B_X$, on lemma tõestatud. □

Järgmise lause tõestus toetub artikli [CNO] lause 4.1 tõestusele, kus analoogiline tulemus saavutati $M(r,s)$-ideaalide jaoks.

Lause 3.21. *Kui leidub operaatorite jada $(K_n) \subset B_{\mathcal{K}(X)}$, mis koondub punktiviisi ühikoperaatoriks $I_{\mathcal{L}(X)}$ ja kehtib*

$$\limsup_n \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \|ax + bK_nx + cK_ny\| \leqslant 1 \quad \forall b \in B, \tag{3.6}$$

siis ruum $\mathcal{K}(X)$ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis $\mathcal{L}(X)$.

Tõestus. Olgu $(K_n) \subset B_{\mathcal{K}(X)}$ operaatorite jada, mis koondub punktiviisi ühikooperaatoriks $I_{\mathcal{L}(X)}$ ja rahuldab tingimust (3.6).

Artiklis [J, lemma 1] on näidatud järgmist. Jadal (K_n) leidub selline osapere $(K_{n(\alpha)})$, et piirväärtus $\lim_\alpha g(K_{n(\alpha)}S)$ eksisteerib kõikide elementide $g \in \mathcal{L}(X)^*$ ja $S \in \mathcal{L}(X)$ korral ning et operaator $P\colon \mathcal{L}(X)^* \to \mathcal{L}(X)^*$, mis on defineeritud seosega

$$(Pg)(S) = \lim_\alpha g(K_{n(\alpha)}S), \quad g \in \mathcal{L}(X)^*, S \in \mathcal{L}(X),$$

rahuldab tingimusi $\|P\| = 1$ ja $\ker P = \mathcal{K}(X)^\perp$ (selle fakti üksikasjalik tõestus on läbi tehtud näiteks doktoritöös [Joh, lk 28]).

Paneme tähele, et kui operaator $S \in B_{\mathcal{L}(X)}$ ja element $x \in B_X$, siis $Sx \in B_X$. Olgu $S, T \in B_{\mathcal{L}(X)}$, siis iga indeksi $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
\|aS + bK_nS + cK_nT\| &= \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|aSx + bK_nSx + cK_nTx\| \\
&\leqslant \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \|aSx + bK_nSx + cK_nTy\| \\
&\leqslant \sup_{\|x\|,\|y\|\leqslant 1} \|ax + bK_nx + cK_ny\|.
\end{aligned}$$

Arvestades lemmat 3.20, eelmist võrratust ja eeldust (3.6), saame suvalise $g \in \mathcal{L}(X)^*$ korral, et

$$\begin{aligned}
\|ag + bPg\| + c\|Pg\| &= \sup_{S\in B_{\mathcal{L}(X)}} \mathrm{Re}(agS + bPgS) + \sup_{T\in B_{\mathcal{L}(X)}} \mathrm{Re}(cPgT) \\
&= \sup_{S,T\in B_{\mathcal{L}(X)}} \mathrm{Re}(agS + bPgS + cPgT) \\
&= \lim_\alpha \sup_{S,T\in B_{\mathcal{L}(X)}} \mathrm{Re}(agS + bgK_{n(\alpha)}S + cgK_{n(\alpha)}T) \\
&\leqslant \limsup_\alpha \sup_{S,T\in B_{\mathcal{L}(X)}} \mathrm{Re}(agS + bgK_{n(\alpha)}S + cgK_{n(\alpha)}T) \\
&\leqslant \limsup_\alpha \sup_{S,T\in B_{\mathcal{L}(X)}} \|agS + bgK_{n(\alpha)}S + cgK_{n(\alpha)}T\| \\
&\leqslant \|g\| \limsup_\alpha \sup_{S,T\in B_{\mathcal{L}(X)}} \|aS + bK_{n(\alpha)}S + cK_{n(\alpha)}T\| \\
&\leqslant \|g\| \limsup_\alpha \sup_{\|x,\|y\|\leqslant 1} \|ax + bK_nx + cK_ny\| \\
&\leqslant \|g\|,
\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

Toome ka ühe näite lause 3.21 rakendusest (vrd [CNO, näide 4.5]).

Näide 3.22. Olgu $0 < |a+b|+c \leqslant a < 1$ ja olgu arv $\nu \in \left(0, \dfrac{1}{a} - 1\right]$. Defineerime ruumis $\tilde{c}_0 = \mathbb{K} \times c_0$ normi võrdusega

$$\|(a,z)\| = \max\{|a| + \nu\|z\|, \|z\|\}, \quad a \in \mathbb{K},\ z \in c_0,$$

kus $\|z\|$ on tavaline norm ruumis c_0. Ruum $\mathcal{K}(\tilde{c}_0)$ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\tilde{c}_0)$.

Põhjendus. Fikseerime suvalised jadad $\xi = (\xi_n), \eta = (\eta_n) \in c_0$ ja arvud $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ nii, et elemendid $x := (\alpha, \xi_1, \xi_2, \dots)$ ja $y := (\beta, \eta_1, \eta_2, \dots)$ kuuluksid ruumi $\tilde{c}_0$ ühikkerra. On lihte veenduda, et sel juhul kehtivad võrratused $|\alpha|, |\beta|, \|(\xi_n)\|, \|(\eta_n)\| \leqslant 1$.

Vaatleme kompaktseid operaatoreid $K_n : (\zeta_k)_{k=1}^{\infty} \ni \tilde{c}_0 \mapsto (\zeta_1, \dots, \zeta_n, 0, 0, \dots)$, kus $n \in \mathbb{N}$. Otsene kontroll näitab, et $(K_n) \subset B_{\mathcal{K}(X)}$ ja et iga elemendi $x \in \tilde{c}_0$ korral $K_n x \to x$.

Paneme nüüd tähele, et iga arvu $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
&\|ax + bK_n x + cK_n y\| \\
&= \|((a+b)\alpha + c\beta, (a+b)\xi_1 + c\eta_1, \dots, (a+b)\xi_{n-1} + c\eta_{n-1}, a\xi_n, \dots)\| \\
&\leqslant \max\{|a+b||\alpha| + c|\beta| + \nu \max\{|a+b|\|(\xi_n)\| + c\|(\eta_n)\|, a\|(\xi_n)\|\}, \\
&\qquad \max\{|a+b|\|(\xi_n)\| + c\|(\eta_n)\|, a\|(\xi_n)\|\}\} \\
&\leqslant \max\{|a+b| + c + \nu \max\{|a+b| + c, a\}, \max\{|a+b| + c, a\}\} \\
&\leqslant \max\{(1+\nu)a, a\} \\
&= (1+\nu)a \\
&\leqslant 1.
\end{aligned}$$

ja seega lause 3.21 kohaselt ruum $\mathcal{K}(\tilde{c}_0)$ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis $\mathcal{L}(\tilde{c}_0)$. $\square$

PEATÜKK 4
$M(a,B,c)$-võrratuse transitiivsus

Selle peatüki esimeses alapeatükis tutvume Hahn-Banachi jätkuoperaatori mõistega ning teeme käesoleva bakalaureusetöö põhitulemuste tõestuseks vajalikku eeltööd.

Teises alapeatükis näitame, et $M(a,B,c)$-ideaalidel on teatud mõttes transitiivsuse omadus.

Kolmandas alapeatükis vaatleme olukorda, kui ruum X on $M(a,B,c)$-ideaal oma teises kaasruumis X^{**} ning näitame, et teatud kujul see omadus kandub üle kõrgemat paarisjärku kaasruumidesse.

4.1 Hahn-Banachi jätkuoperaatorid

Selles alapeatükis toome sisse Hahn-Banachi jätkuoperaatori mõiste ning näitame, et Hahn-Banachi jätkuoperaatorid on tihedalt seotud ideaaliprojektoritega. Selles peatükis toodud laused pärinevad artiklist [H], kus neid mainitakse tõestuseta.

Meenutame kõigepealt Hahn-Banachi teoreemi (vt [OO, lk 165]).

Teoreem 4.1 (Hahn-Banachi teoreem)**.** *Olgu Y normeeritud ruumi X alamruum. Kui $y^* \in Y^*$ on pidev lineaarne funktsionaal, siis leidub talle pidev lineaarne jätk $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = \|y^*\|$.*

Siinkohal märgime, et üldjuhul funktsionaali $y^* \in Y^*$ jätk ei ole üheselt määratud. See selgub järgmisest näitest.

Näide 4.2. Vaatleme ruumi ℓ_∞^2 alamruumi $Y_1 = \{(\xi,\xi) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Defineerime funktsionaali $y^* \in Y_1^*$ seosega

$$y^*(\xi,\xi) = \xi, \quad (\xi,\xi) \in Y_1.$$

Funktsionaalil y^* leidub lõpmata palju jätkusid ruumile ℓ_∞^2.

PÕHJENDUS. Teoreemi 3.1 kohaselt on ruumi ℓ_∞^2 kaasruum samastatav ruumiga ℓ_1^2, seega meie otsitav jätk $(\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_1^2$ peab rahuldama tingimusi

$$\begin{cases} \alpha_1\xi + \alpha_2\xi = \xi, \\ \|(\alpha_1, \alpha_2)\| = \|y^*\|, \end{cases} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_1^2, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Kuna

$$\|y^*\| = \sup_{(\xi,\xi)\in B_{Y_1}} |y^*(\xi, \xi)| = \sup_{|\xi|\leqslant 1} |\xi| = 1,$$

on viimane süsteem samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ |\alpha_1| + |\alpha_2| = 1, \end{cases} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \ell_1^2.$$

Näeme, et iga arvu $\alpha \in [0, 1]$ korral on funktsionaal x^*, mis on defineeritud seosega

$$x^*(\xi_1, \xi_2) = \alpha\xi_1 + (1 - \alpha)\xi_2,$$

funktsionaali y^* jätk. $\square$

Eelnevast näitest muuhulgas selgub, et kui me mingil moel muudame funktsionaali $y^* \in Y^*$, ei tarvitse tema jätk muutuda sama eeskirja järgi.

Näide 4.3. Nagu näites 4.2, vaatleme ruumi ℓ_∞^2 alamruumis Y_1 defineeritud funktsionaali $y^*\colon Y_1 \ni (\xi, \xi) \mapsto \xi \in \mathbb{K}$. Selle funktsionaali üheks jätkuks on funktsionaal $x_1^* \in (\ell_\infty^2)^*$, mis on defineeritud seosega

$$x_1^*(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \ell_\infty^2.$$

Samas, funktsionaali $2y^*$ üheks jätkuks on funktsionaal

$$x_2^*(\xi_1, \xi_2) = \frac{2}{3}\xi_1 + \frac{4}{3}\xi_2, \quad (\xi_1, \xi_2) \in \ell_\infty^2.$$

ja ilmselt $x_2^* \neq 2x_1^*$. $\square$

Definitsioon. Olgu Y normeeritud ruumi X alamruum. Lineaarset operaatorit $\varphi\colon Y^* \to X^*$ nimetatakse *Hahn-Banachi jätkuoperaatoriks*, kui iga elemendi $y^* \in Y^*$ korral operaator φy^* on operaatori y^* normi säilitav jätk, st

$$(\varphi y^*)(y) = y^*(y) \quad \forall y \in Y,\ \forall y^* \in Y^*$$

ja

$$\|\varphi y^*\| = \|y^*\| \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Lause 4.4. *Olgu $Z \subset Y \subset X$. Kui operaatorid $\varphi\colon Z^* \to Y^*$ ja $\psi\colon Y^* \to X^*$ on Hahn-Banachi jätkuoperaatorid, siis nende kompositsioon $\psi\varphi\colon Z^* \to X^*$ on samuti Hahn-Banachi jätkuoperaator.*

TÕESTUS. Olgu operaatorid $\varphi\colon Z^* \to Y^*$ ja $\psi\colon Y^* \to X^*$ Hahn-Banachi jätkuoperaatorid ning olgu elemendid $z \in Z$, $z^* \in Z^*$ suvalised. Eelduse kohaselt funktsionaal $\varphi z^* \in Y^*$ ning $Z \subset Y$, seega

$$\psi\varphi z^*(z) = \varphi z^*(z) = z^*(z).$$

Kuna operaatorid ψ ja φ säilitavad normi, saame, et

$$\|\psi\varphi z^*\| = \|\varphi z^*\| = \|z^*\|,$$

ja järelikult on operaator $\psi\varphi$ tõepoolest Hahn-Banachi jätkuoperaator. $\square$

Järgmisest lausest selgub, et Hahn-Banachi operaatorite ja ideaalprojektorite vahel on tihe seos. Enne lause juurde asumist esitame ühe lemma.

Lemma 4.5. *Iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral kehtib seos $i_{YX}^* x^* = x^*|_Y$.*

TÕESTUS. Olgu funktsionaal $x^* \in X^*$ suvaline, siis iga elemendi $y \in Y$ korral

$$i_{YX}^* x^*(y) = x^*(i_{YX} y) = x^*(y),$$

mis tähendab täpselt seda, et $i_{YX}^* x^* = x^*|_Y$. $\square$

Lause 4.6. *Olgu Y Banachi ruumi X kinnine alamruum. Alamruum Y on ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P parajasti siis, kui leidub Hahn-Banachi jätkuoperaator $\varphi\colon Y^* \to X^*$ nii, et $P = \varphi i_{YX}^*$, kus operaator i_{YX} on loomulik sisestus.*

TÕESTUS. *Tarvilikkus.* Olgu alamruum Y ideaal ruumis X ja olgu $P\colon X^* \to X^*$ vastav ideaaliprojektor.

Defineerime operaatori $\varphi : Y^* \to X^*$ seosega $\varphi y^* = Px^*$, kus funktsionaal $x^* \in X^*$ on funktsionaali $y^* \in Y^*$ mingi normi säilitav jätk. Hahn-Banachi teoreemi kohaselt selline jätk alati leidub.

Paneme kõigepealt tähele, et operaatori φ definitsioon on korrektne, st definitsioon ei sõltu jätku $x^* \in X^*$ valikust. Tõepoolest, kui funktsionaalid x_1^* ja $x_2^* \in X^*$ on funktsionaali $y^* \in Y^*$ kaks suvalist jätku, siis iga elemendi $y \in Y$ korral

$$(x_1^* - x_2^*)(y) = x_1^*(y) - x_2^*(y) = y^*(y) - y^*(y) = 0$$

seega funktsionaal $x_1^* - x_2^* \in Y^\perp = \ker P$ ja järelikult

$$Px_1^* = Px_1^* - P(x_1^* - x_2^*) = P(x_1^* - x_1^* + x_2^*) = Px_2^*.$$

Veendume et operaator φ on aditiivne, homogeensuse kontroll on analoogiline. Olgu funktsionaalid y_1^*, $y_2^* \in Y^*$. Olgu funktsionaalid x_1^*, $x_2^* \in X^*$ vastavalt funktsionaalide y_1^*, y_2^* mingid normi säilitavad jätkud ning olgu funktsionaal $x_0^* \in X^*$ funktsionaali $y_1^* + y_2^*$ mingi normi säilitav jätk.

Sellisel juhul iga elemendi $y \in Y$ korral

$$\begin{aligned}(x_1^* + x_2^* - x_0^*)(y) &= x_1^*(y) + x_2^*(y) - x_0^*(y) \\ &= y_1^*(y) + y_2^*(y) - (y_1^* + y_2^*)(y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

seega funktsionaal $x_1^* + x_2^* - x_0^* \in Y^\perp = \ker P$ ja sellest järeldub, et

$$\begin{aligned}\varphi(y_1^*) + \varphi(y_2^*) - \varphi(y_1^* + y_2^*) &= P(x_1^*) + P(x_2^*) - P(x_0^*) \\ &= P(x_1^* + x_2^* - x_0^*) \\ &= 0,\end{aligned}$$

mistõttu $\varphi(y_1^*) + \varphi(y_2^*) = \varphi(y_1^* + y_2^*)$.

Veendume, et operaator φ on Hahn-Banachi jätkuoperaator.

Olgu elemendid $y \in Y$, $y^* \in Y^*$ suvalised ning olgu funktsionaal x^* funktsionaali y^* mingi jätk. Näitame, et funktsionaal φy^* on funktsionaali y^* jätk. Tõepoolest,

$$(\varphi y^*)(y) - y^*(y) = Px^*(y) - y^*(y) = Px^*(y) - x^*(y) = 0,$$

sest $Px^* - x^* \in \ker P = Y^\perp$.

On jäänud veenduda, et operaator φ säilitab normi. Paneme kõigepealt tähele, et kuna funktsionaal φy^* on funktsionaali y^* jätk, kehtib seos $\|\varphi y^*\| \geqslant \|y^*\|$. Teiselt poolt,

$$\|\varphi y^*\| = \|Px^*\| \leqslant \|P\|\|x^*\| = \|x^*\| = \|y^*\|$$

ja seega $\|\varphi y^*\| = \|y^*\|$

Lõpuks, pidades silmas lemmat 4.5 saame, et

$$\varphi i_{YX}^* x^* = \varphi(x^*|_Y) = Px^*$$

nagu oli vaja.

Piisavus. Olgu $\varphi\colon Y^* \to X^*$ Hahn-Banachi jätkuoperaator. Vaatleme operaatorit $P = \varphi i_{YX}^*\colon X^* \to X^*$.

Näitame, et operaator P on lineaarne. Selleks fikseerime kaks suvalist funktsionaali x_1^*, $x_2^* \in X^*$ ja suvalise arvu $\lambda \in \mathbb{K}$ ning paneme tähele, et

$$\begin{aligned}P(x_1^* + \lambda x_2^*) &= \varphi i_{YX}^*(x_1^* + \lambda x_2^*) = \varphi(i_{YX}^*(x_1^* + \lambda x_2^*)) \\ &= \varphi(i_{YX}^*(x_1^*) + \lambda i_{YX}^*(x_2^*)) = \varphi(i_{YX}^*(x_1^*)) + \lambda\varphi(i_{YX}^*(x_2^*))\end{aligned}$$

$$= \varphi i_{YX}^*(x_1^*) + \lambda \varphi i_{YX}^*(x_2^*) = P(x_1^*) + \lambda P(x_2^*).$$

Olgu $x^* \in X^*$ suvaline. Paneme tähele, et $\varphi(x^*|_Y)|_Y = x^*|_Y$. Seega näeme arvestades lemmat 4.5, et lineaarne operaator P on projektor, sest

$$PPx^* = \varphi i_{YX}^* \varphi i_{YX}^* x^* = \varphi(\varphi(x^*|_Y)|_Y) = \varphi(x^*|_Y) = \varphi i_{YX}^* x^* = Px^*.$$

Kuna operaator φ säilitab normi ja $\|i_{YX}\| = 1$, kehtib iga funktsionaali $x^* \in X^*$ korral

$$\|Px^*\| = \|\varphi i_{YX}^* x^*\| = \|i_{YX}^* x^*\| \leqslant \|i_{YX}^*\| \|x^*\| = \|x^*\|,$$

ja seega operaator P on pidev ning $\|P\| \leqslant 1$, millest lause 1.4 abil järeldame, et $\|P\| = 1$.

Lõpuks,

$$\begin{aligned}
\ker P &= \{x^* \in X^* \colon Px^* = 0\} \\
&= \{x^* \in X^* \colon \varphi i_{YX}^* x^* = 0\} \\
&= \{x^* \in X^* \colon \varphi(x^*|_Y) = 0\} \\
&= \{x^* \in X^* \colon x^*|_Y = 0\} \\
&= Y^\perp,
\end{aligned}$$

seega P on ideaaliprojektor ja alamruum Y on ideaal ruumis X. □

4.2 $M(a, B, c)$-võrratuse ülekandumine ruumide vahel

Käesolevas alapeatükis vaatleme olukorda, kui alamruum X on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis Y ja alamruum Y on $M(d, E, f)$-ideaal ruumis Z. Tekib loomulik küsimus: kas alamruum X on mingit võrratust rahuldav ideaal ruumis Z? Selgub, et vastus on jaatav.

Mõnedel erijuhtudel on seda küsimust juba varem uuritud. Raamatus [B] on tõestatud näiteks M-ideaalide kohta koguni üldisem tulemus, mis näeb välja järgmiselt.

Lause 4.7 ([B, lk 40, lause 2.9]). *Olgu X ja Y Banachi ruumi Z sellised kinnised alamruumid, et $X \subset Y \subset Z$, ning olgu alamruum Y M-ideaal ruumis Z. Alamruum X on M-ideaal ruumis Z parajasti siis, kui alamruum X on M-ideaal ruumis Y.*

Artiklis [H] on näidatud, et kui ruum X on $M(r,s)$-ideaal ruumis Y ja ruum Y on $M(u,v)$-ideaal ruumis Z, siis ruum X on $M\left(\dfrac{rv}{s(1-u)+v}, \dfrac{sv}{s(1-u)+v}\right)$-ideaal ruumis Z. Toetudes selles artiklis esitatud tõestusele, vastame meie püstitatud küsimusele üldisel $M(a,B,c)$ juhul.

Selles alapeatükis olgu Z Banachi ruum ning olgu X ja Y sellised ruumi Z kinnised alamruumid, et $X \subset Y \subset Z$. Olgu B ja E kompaktsed korpuse $\mathbb{K}$ alamhulgad ning olgu arvud $a, c, d, f \geqslant 0$.

Kasutame selles peatükis järgmisi tähistusi:

$$\begin{aligned}\gamma &:= a + d - af + a \min|d+E|,\\ \delta &:= a + (\max|E| + f)(a+1).\end{aligned}$$

Järgnev, küllalt tehnilise sõnastusega teoreem on üks käesoleva bakalaureusetöö kahest põhitulemusest.

Teoreem 4.8.

1. *Kui ruum X on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis Y ja ruum Y on $M(d,E,f)$-ideaal ruumis Z, kus $d > 0$, siis ruum X on $M\left(\dfrac{ad}{\gamma}, \dfrac{dB}{\gamma}, \dfrac{cd}{\gamma}\right)$-ideaal ruumis Z.*

2. *Kui ruum X on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis Y ja ruum Y on $M(0,E,f)$-ideaal ruumis Z, siis ruum X on $M\left(\dfrac{a(\max|E|+f)}{\delta}, \dfrac{(\max|E|+f)B}{\delta}, \dfrac{c(\max|E|+f)}{\delta}\right)$-ideaal ruumis Z.*

Märkus 4.9. Eeldame, et suurused γ ja δ on positiivsed. Tõepoolest, juhul $a > 0$ on võrratus

$$\gamma = a + d - af + a \min|d+E| \leqslant 0$$

samaväärne võrratusega

$$f \geqslant 1 + \frac{d}{a} + \min|d+E|,$$

millest järeldub, et $f > 1$, mis on aga järelduse 2.5 tõttu võimatu.

Juhul $a = 0$ kehtib võrdus $\gamma = d$ ning kuna tõestuses me piirdume juhuga $d > 0$, on ka siin $\gamma > 0$.

Suurus δ on alati mittenegatiivne, seejuures võrdus $\delta = 0$ leiab aset ainult siis, kui kehtivad võrdused $a = f = 0$ ja $E = \{0\}$. Sel juhul aga on vaatluse all $M(0,\{0\},0)$-ideaal ning kuna see juhtum on triviaalne, eeldame edasises, et $f \neq 0$ või $E \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Teoreemi 4.8 tõestus. Olgu Z Banachi ruum ning X ja Y ruumi Z kinnised alamruumid, seejuures kehtigu $X \subset Y \subset Z$. Olgu X $M(a, B, c)$-ideaal ruumis Y ning Y $M(d, E, f)$-ideaal ruumis Z ja olgu P ja Q vastavad ideaaliprojektorid, st

$$\|ay^* + bPy^*\| + c\|Py^*\| \leqslant \|y^*\| \quad \forall y^* \in Y^*,\ \forall b \in B, \tag{4.1}$$

ning

$$\|dz^* + eQz^*\| + f\|Qz^*\| \leqslant \|z^*\| \quad \forall z^* \in Z^*,\ \forall e \in E, \tag{4.2}$$

Lause 4.6 kohaselt saame projektorid P ja Q panna kirja kujul $P = \varphi i_{XY}^*$ ja $Q = \psi i_{YZ}^*$, kus $\varphi\colon X^* \to Y^*$ ja $\psi\colon Y^* \to Z^*$ on mingid Hahn-Banachi jätkuoperaatorid. Siis tänu lausele 4.4 operaator $\psi\varphi\colon X^* \to Z^*$ on samuti Hahn-Banachi jätkuoperaator ja seega lause 4.6 põhjal operaator $R := \psi\varphi i_{XZ}^*\colon Z^* \to Z^*$ on ideaaliprojektor, kusjuures $\operatorname{ran} R = X^\perp$.

Paneme tähele, et kehtib võrdus

$$i_{XZ}^* = (i_{YZ} i_{XY})^* = i_{XY}^* i_{YZ}^*,$$

mida arvestades näeme, et

$$R = \psi\varphi i_{XZ}^* = \psi\varphi i_{XY}^* i_{YZ}^* = \psi P i_{YZ}^*.$$

Pidades silmas seda seost, fikseerime suvalise funktsionaali $z^* \in Z^*$ ja paneme tähele, et seose (4.1) tõttu iga arvu $b \in B$ korral kehtib

$$\begin{aligned}
\|az^* + bRz^*\| + c\|Rz^*\| &= \|az^* + b\psi P i_{YZ}^* z^* + a\psi i_{YZ}^* z^* - a\psi i_{YZ}^* z^*\| + c\|\psi P i_{YZ}^* z^*\| \\
&\leqslant \|az^* - a\psi i_{YZ}^* z^*\| + \|\psi(bP i_{YZ}^* z^* + a i_{YZ}^* z^*)\| + c\|\psi P i_{YZ}^* z^*\| \\
&= \|az^* - a\psi i_{YZ}^* z^*\| + \|a i_{YZ}^* z^* + bP i_{YZ}^* z^*\| + c\|P i_{YZ}^* z^*\| \\
&\leqslant a\|z^* - Qz^*\| + \|i_{YZ}^* z^*\|.
\end{aligned}$$

Vaatleme kahte juhtu.

1. Kui $d > 0$, siis järeldub seosest (4.2), et

$$\left\| z^* + \frac{e}{d} Qz^* \right\| \leqslant \frac{\|z^*\|}{d} - \frac{f}{d}\|Qz^*\| \quad \forall z^* \in Z^*,\ \forall e \in E,$$

ning sel juhul suvaliste arvude $b \in B$ ja $e \in E$ korral

$$\begin{aligned}
\|az^* + bRz^*\| + c\|Rz^*\| &\leqslant a\|z^* - Qz^*\| + \|i_{YZ}^* z^*\| \\
&= a\left\| z^* + \frac{e}{d}Qz^* - \left(1 + \frac{e}{d}\right) Qz^* \right\| + \|i_{YZ}^* z^*\| \\
&\leqslant a\left\| z^* + \frac{e}{d}Qz^* \right\| + a\left\| \left(1 + \frac{e}{d}\right) Qz^* \right\| + \|i_{YZ}^* z^*\| \\
&\leqslant \frac{a}{d}\|z^*\| - \frac{af}{d}\|Qz^*\| + a\left\| \left(1 + \frac{e}{d}\right) Qz^* \right\| + \|i_{YZ}^* z^*\|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{a}{d}\|z^*\| - \frac{af}{d}\|Qz^*\| + a\left|1+\frac{e}{d}\right|\|Qz^*\| + \|i_{YZ}^* z^*\|$$
$$\leqslant \left(1+\frac{a}{d}-\frac{af}{d}+a\left|1+\frac{e}{d}\right|\right)\|z^*\|.$$

Oleme saanud, et

$$\|adz^*+bdRz^*\|+cd\|Rz^*\| \leqslant (a+d-af+a\,|d+e|)\,\|z^*\| \quad \forall z^* \in Z^*,\ \forall b \in B,\ \forall e \in E$$

ja seega hulga E kompaktsuse tõttu

$$\|adz^*+bdRz^*\|+cd\|Rz^*\| \leqslant (a+d-af+a\min|d+E|)\,\|z^*\| \quad \forall z^* \in Z^*,\ \forall b \in B,$$

millest saame suurusega γ jagades, et ruum X on $M\left(\frac{ad}{\gamma}, \frac{dB}{\gamma}, \frac{cd}{\gamma}\right)$-ideaal ruumis Z.

2. Kui $d = 0$, saame seosest (4.2) tingimuse

$$\|Qz^*\| \leqslant \frac{\|z^*\|}{|e|+f} \qquad \forall z^* \in Z^*,\ \forall e \in E,$$

ning võime hinnata

$$\begin{aligned}\|az^*+bRz^*\|+c\|Rz^*\| &\leqslant a\|z^*-Qz^*\| + \|i_{YZ}^* z^*\| \\ &\leqslant a\|z^*\| + a\|Qz^*\| + \|i_{YZ}^* z^*\| \\ &\leqslant a\|z^*\| + \frac{a\|z^*\|}{|e|+f} + \|i_{YZ}^* z^*\| \\ &\leqslant \left(1+a+\frac{a}{|e|+f}\right)\|z^*\|.\end{aligned}$$

Oleme saanud, et suvaliste arvude $b \in B$ ja $e \in E$ ning suvalise funktsionaali $z^* \in Z^*$ korral

$$\|a(|e|+f)z^* + b(|e|+f)Rz^*\| + c(|e|+f)\|Rz^*\| \leqslant (a+(|e|+f)(a+1))\|z^*\|$$

millest järeldub, et

$$\begin{aligned}&\|a(\max|E|+f)z^* + b(\max|E|+f)Rz^*\| + c(\max|E|+f)\|Rz^*\| \\ &\qquad \leqslant (a+(\max|E|+f)(a+1))\|z^*\|\end{aligned}$$

ja seega X on $M\left(\frac{a(\max|E|+f)}{\delta}, \frac{(\max|E|+f)B}{\delta}, \frac{c(\max|E|+f)}{\delta}\right)$-ideaal ruumis Z. □

Järeldus 4.10.

1. *Kui alamruum X on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis Y ja alamruum Y on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis Z, kus arv $a>0$, siis ruum X on* $M\left(\frac{a}{2+\max|a+B|-c}, \frac{B}{2+\max|a+B|-c}, \frac{c}{2+\max|a+B|-c}\right)$*-ideaal ruumis Z.*

2. *Kui alamruum X on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis Y ja alamruum Y on $M(0,B,c)$-ideaal ruumis Z, siis ruum X on* $M\left(\frac{a(\max|B|+c)}{a+(\max|B|+c)(a+1)}, B', \frac{c(\max|B|+c)}{a+(\max|B|+c)(a+1)}\right)$*-ideaal ruumis Z, kus* $B' = \frac{(\max|B|+c)B}{a+(\max|B|+c)(a+1)}$.

Teoreemist 4.8 saame teha järeldusi erinevate $M(a,B,c)$-ideaalide erijuhtude kohta. Kahest järgmistest järeldustest näeme, et teoreem 4.8 üldistab artikli [H] teoreemi 1.

Järeldus 4.11. *Kui ruum X on $M(r,s)$-ideaal ruumis Y ja ruum Y on $M(u,v)$-ideaal ruumis Z, siis X on* $M\left(\frac{rv}{s(1-u)+v}, \frac{sv}{s(1-u)+v}\right)$*-ideaal ruumis Z.*

TÕESTUS. Olgu X $M(r,s)$-ideaal (ehk $M(s,\{-s\},r)$-ideaal) ruumis Y ja Y $M(u,v)$-ideaal ruumis Z. Rakendame teoreemi 4.8, valides

$$\begin{gathered} a=s,\ B=\{-s\},\ c=r, \\ d=v,\ E=\{-v\},\ f=u, \end{gathered}$$

siis

$$\begin{aligned} \gamma &= a+d-af+a\max|d+E| \\ &= s+v-su+r\cdot 0 \\ &= s(1-u)+v \end{aligned}$$

ja kokkuvõttes X on $M\left(\frac{rv}{s(1-u)+v}, \frac{sv}{s(1-u)+v}\right)$-ideaal ruumis Z. □

Kombineerides eelmist järeldust lausetes 2.9 ja 2.10 tõestatud $M(a,B,c)$-ideaalide omadustega, saame järgmise tulemuse.

Järeldus 4.12. *Olgu $su \geqslant v$. Kui ruum X on $M(r,s)$-ideaal ruumis Y ja ruum Y on $M(u,v)$-ideaal ruumis Z, siis ruum X on* $M\left(\frac{rv}{s}, v\right)$*-ideaal ruumis Z.*

Sõnastame järeldusi ka teiste erijuhtude jaoks. Nende järelduste tõestus on analoogiline järelduse 4.11 tõestusega.

Järeldus 4.13. *Kui ruum X on h-ideaal ruumis Y ja ruum Y on h-ideaal ruumis Z, siis ruum X on* $M\left(\frac{1}{3}, \left\{-\frac{1+\lambda}{3} : \lambda \in S_{\mathbb{C}}\right\}, 0\right)$*-ideaal ruumis Z.*

Järeldus 4.14. *Kui ruum X on u-ideaal ruumis Y ja ruum Y on u-ideaal ruumis Z, siis ruum X on* $M\left(\frac{1}{3}, \left\{-\frac{2}{3}\right\}, 0\right)$*-ideaal ruumis Z.*

Järeldus 4.15. *Kui ruum X on M-ideaal ruumis Y ja ruum Y on u-ideaal ruumis Z, siis ruum X on* $M\left(\frac{1}{3}, \left\{-\frac{1}{3}\right\}, \frac{1}{3}\right)$*-ideaal ruumis Z.*

Järeldus 4.16. *Kui ruum X on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis Y ja ruum Y on M-ideaal ruumis Z, siis ruum X on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis Z.*

Järeldus 4.17. *Kui ruum X on M-ideaal ruumis Y ja ruum Y on M-ideaal ruumis Z, siis ruum X on M-ideaal ruumis Z.*

4.3 $M(a, B, c)$-võrratuse ülekandumine kõrgemat järku kaasruumidesse

Selle alapeatüki põhitulemusena saame, et kui ruum X on $M(a, B, c)$-ideaal oma teises kaasruumis X^{**}, siis iga naturaalarvulise n korral ruum X on teatud võrratust rahuldav ideaal ruumis $X^{(2n)}$. Ka selle tulemuseni jõuame toetudes artiklis [H] kasutatud tõestusmeetoditele.

Olgu X Banachi ruum. Tõestame kõigepealt vajalikud abitulemused.

Lause 4.18. *Olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Olgu $B \subset \mathbb{K}$ kompaktne hulk ning olgu $a, c \geqslant 0$. Kui eksisteerib selline projektor $Q\colon X \to X$, et $\|Q\| = 1$ ja $\operatorname{ran} Q = Y$ ning*

$$\|ax + bQx + cQz\| \leqslant \max\{\|x\|, \|z\|\} \quad \forall b \in B, \quad \forall x, z \in X, \tag{4.3}$$

siis ruum Y on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X.

Tõestus. Olgu Y Banachi ruumi X alaruum ja olgu $Q\colon X \to X$ selline projektor, et $\|Q\| = 1$ ja $\operatorname{ran} Q = Y$ ning kehtigu tingimus (4.3).

Vaatleme operaatorit $P\colon X^* \to X^*$, mis on on defineeritud seosega $P = Q^*$. Lause 1.12 kohaselt operaator P on pidev ja lineaarne, seejuures $\|P\| = \|Q^*\| = \|Q\| = 1$.

Suvaliste elementide $x \in X$, $x^* \in X^*$ korral kehtib

$$\begin{aligned} PPx^*(x) &= Q^*(Q^*x^*(x)) = Q^*(x^*(Qx)) \\ &= x^*(QQx) = x^*(Qx) = Q^*x^*(x) \\ &= Px^*(x), \end{aligned}$$

seega operaator P on projektor.

Paneme ka tähele, et

$$\begin{aligned} \ker P &= \{x^* \in X^* \colon Px^*(x) = 0 \ \forall x \in X\} \\ &= \{x^* \in X^* \colon Q^*x^*(x) = 0 \ \forall x \in X\} \\ &= \{x^* \in X^* \colon x^*(Qx) = 0 \ \forall x \in X\} \\ &= \{x^* \in X^* \colon x^*(y) = 0 \ \forall y \in Y\} \\ &= Y^\perp, \end{aligned}$$

millest kokkuvõttes järeldub, et Y on ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P.

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Lemmat 3.20 arvestades valime elemendid y, $z \in B_X$ nii, et

$$\mathrm{Re}((ax^* + bPx^*)(y)) \geqslant \|ax^* + bPx^*\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\mathrm{Re}(cPx^*(z)) \geqslant \|cPx^*\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Paneme tähele, et tänu eeldusele element $ay + bQy + cQz \in B_X$, seega suvalise elemendi $x^* \in X^*$ korral

$$\begin{aligned} \|x^*\| &\geqslant |x^*(ay + bQy + cQz)| \\ &= |ax^*(y) + bx^*(Qy) + cx^*(Qz)| \\ &= |ax^*(y) + bPx^*(y) + cPx^*(z)| \\ &\geqslant \mathrm{Re}(ax^*(y) + bPx^*(y) + cPx^*(z)) \\ &= \mathrm{Re}((ax^* + bPx^*)(y)) + \mathrm{Re}(cPx^*(z)) \\ &\geqslant \|ax^* + bPx^*\| + c\|Px^*\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Kuna arv $\varepsilon > 0$ on suvaline, saame siit soovitud tulemuse

$$\|ax^* + bPx^*\| + c\|Px^*\| \leqslant \|x^*\| \quad \forall b \in B, \quad \forall x^* \in X^*,$$

mis tähendab, et alamruum Y on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X. □

Lause 4.19. *Kui ruumi X kinnine alamruum Y on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X, siis alamruum $Y^{\perp\perp}$ on $M(a, B, c)$-ideaal ruumis X^{**}.*

TÕESTUS. Olgu ruumi X kinnine alamruum Y $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X ja olgu $P\colon X^* \to X^*$ vastav ideaaliprojektor.

Vaatleme operaatorit $P^*\colon X^{**} \to X^{**}$. Lause 1.12 kohaselt operaator P^* on pidev ja lineaarne, seejuures $\|P^*\| = \|P\| = 1$.

Operaator P^* on projektor, kuna iga elemendi $x^{**} \in X^{**}$ korral

$$P^*P^*(x^{**}) = x^{**}PP = x^{**}P = P^*x^{**}.$$

On lihtne veenduda, et pideva projektori kujutis on alati kinnine alamruum, seega lause 1.19 kohaselt kehtib võrdus $\operatorname{ran} P^* = (\ker P)^\perp$ ja järelikult

$$\operatorname{ran} P^* = (\ker P)^\perp = (Y^\perp)^\perp = Y^{\perp\perp}.$$

Paneme tähele, et suvaliste elementide y^{**}, $z^{**} \in X^{**}$ ja $x^* \in X^*$ korral kehtib

$$\begin{aligned}
\|(ay^{**} + bP^*y^{**} + cP^*z^{**})(x^*)\| &\leqslant \|(ay^{**} + bP^*y^{**})x^*\| + \|cP^*z^{**}(x^*)\| \\
&= \|(ay^{**} + by^{**}P)x^*\| + \|cz^{**}P(x^*)\| \\
&= \|(y^{**}(ax^* + bPx^*)\| + \|z^{**}(cPx^*)\| \\
&\leqslant \|y^{**}\|\|ax^* + bPx^*\| + \|z^{**}\|\|cP(x^*)\| \\
&\leqslant \max\{\|y^{**}\|, \|z^{**}\|\}(\|ax^* + bPx^*\| + c\|P(x^*)\|) \\
&\leqslant \max\{\|y^{**}\|, \|z^{**}\|\}\|x^*\|,
\end{aligned}$$

seega

$$\|ay^{**} + bP^*y^{**} + cP^*z^{**}\| \leqslant \max\{\|y^{**}\|, \|z^{**}\|\}. \tag{4.4}$$

Kokkuvõttes saime, et eksisteerib selline projektor $P^*\colon X^{**} \to X^{**}$, et $\|P^*\| = 1$, $\operatorname{ran} P^* = Y^{\perp\perp}$ ning kehtib seos (4.4). Lause 1.17 põhjal ruum $Y^{\perp\perp}$ on ruumi X^{**} kinnine alamruum ja lause 4.18 kohaselt alamruum $Y^{\perp\perp}$ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X^{**}. □

Järgmisest lausest selgub, et $M(a,B,c)$-ideaaliks olemise omadus kandub isomeetrilise isomorfismiga üle.

Lause 4.20. *Kui ruumi X kinnine alamruum Y on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X ja operaator $T\colon X \to W$ on isomeetriline isomorfism, siis alamruum $T(Y)$ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis W.*

Märkus 4.21. Analoogiline tulemus M-ideaalide jaoks on tõestatud juba artiklis [Rao], kus eeldati lisaks, et $Ty = y$ iga elemendi $y \in Y$ korral. Artiklis [H] on seda tulemust üldistatud $M(r,s)$-ideaalide juhule ning rõhutati, et artikli [Rao] lisaeeldus oli üleliigne.

LAUSE 4.20 TÕESTUS. Olgu alamruum Y $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X ideaaliprojektoriga P ja olgu $T\colon X\to W$ isomeetriline isomorfism.

Lause 4.6 põhjal kehtib mingi Hahn-Banachi jätkuoperaatori $\varphi\colon Y^*\to X^*$ korral võrdus $P=\varphi i^*_{YX}$. Defineerime operaatori $R\colon W^*\to W^*$ seosega $R=(T^{-1})^*\varphi S^* i^*_{T(Y)W}$, kus $S\colon Y\ni y\mapsto Ty\in T(Y)$.

Paneme tähele, et operaator $(T^{-1})^*\varphi S^*\colon T(Y)^*\to W^*$ on Hahn-Banachi jätkuoperaator. Tõepoolest, olgu elemendid $w^*\in T(Y)^*$ ja $w\in T(Y)$ suvalised, siis $w=Ty$ mingi $y\in Y$ korral ja

$$((T^{-1})^*\varphi S^*)(w^*)(w)=\varphi(S^*w^*)(y)=(S^*w^*)(y)=v^*(Sy)=w^*(Ty)=w^*(w).$$

Lisaks saame lausetest 1.6 ja 1.15, et

$$\|(T^{-1})^*\varphi S^*w^*\|=\|\varphi S^*w^*\|=\|S^*w^*\|=\|w^*\|.$$

Nüüd saame lause 4.6 põhjal, et operaator R on ideaaliprojektor.

Kehtib ka seos $i^*_{T(Y)W}=(S^{-1})^*i^*_{YX}T^*$. Tõepoolest, suvaliste elementide $w^*\in W^*$ korral $w\in T(Y)$

$$(S^{-1})^*i^*_{YX}T^*w^*(w)=w^*(Ti_{YX}S^{-1}w)=w^*(w)=w^*(i_{T(Y)W}w)=i^*_{T(Y)W}w^*(w).$$

Seda seost arvestades võime kirjutada $R=(T^{-1})^*PT^*$.

Paneme nüüd tähele, et iga elemendi $w^*\in W^*$ korral

$$\begin{aligned}\|aw^*+bRw^*\|+c\|Rw^*\| &= \|aw^*+b(T^{-1})^*PT^*w^*\|+c\|(T^{-1})^*PT^*w^*\|\\ &\leqslant \|(T^{-1})^*\|\|aT^*w^*+bPT^*w^*\|+c\|(T^{-1})^*\|\|\varphi PT^*w^*\|\\ &= \|aT^*w^*+bPT^*w^*\|+c\|PT^*w^*\|\\ &\leqslant \|T^*w^*\|\\ &\leqslant \|T^*\|\|w^*\|\\ &= \|w^*\|,\end{aligned}$$

järelikult alamruum $T(Y)$ rahuldab $M(a,B,c)$-võrratust ruumis W ideaaliprojektoriga R. □

Eeltöö lõpetuseks esitame lemma, mis kirjeldab operaatori j_X teise kaasoperaatori käitumist ruumis $j_X(X)$.

Lemma 4.22. *Kehtib seos*

$$j^{**}_X j_X=j_{X^{**}}j_X.$$

TÕESTUS. Kuna operaator $j_X\colon X\to X^{**}$ on pidev ja lineaarne, siis väide järeldub vahetult lausest 1.16. □

Nüüd oleme valmis asuma käesoleva bakalaureusetöö teise põhitulemuse juurde. Tähistame iga naturaalarvu n korral

$$\gamma_n \coloneqq n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c.$$

Teoreem 4.23. *Kui ruum X on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X^{**} ja $a>0$, siis ruum X on $M\left(\frac{a}{\gamma_n}, \frac{B}{\gamma_n}, \frac{c}{\gamma_n}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$, kus $n \in \mathbb{N}$.*

Märkus 4.24. Suurus γ_n on positiivne. Tõepooselt, võrratusest

$$n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c \leqslant 0$$

järeldub, et

$$c \geqslant \frac{n}{n-1} + \frac{(n-1)\min|a+B|}{n-1} > 1,$$

mis on vastuolus järeldusega 2.5.

Märkus 4.25. Öeldes, et ruum X on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$ mingi naturaalarvu n korral, mõistame, et $(j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X)(X)$ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$.

Teoreemi 4.23 tõestus. Tõestame teoreemi induktsiooniga n järgi. Baasjuhul $n=1$ väide kehtib eelduse tõttu triviaalselt.

Oletame, et ruum X on $M\left(\frac{a}{\gamma_n}, \frac{B}{\gamma_n}, \frac{c}{\gamma_n}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$. Näitame, et ruum X on $M\left(\frac{a}{\gamma_{n+1}}, \frac{B}{\gamma_{n+1}}, \frac{c}{\gamma_{n+1}}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n+2)}$.

Olgu operaator $A\colon X \to X^{(2n)}$ defineeritud seosega $A \coloneqq j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X$. Vaatleme operaatorit $T\colon X^{**} \to \operatorname{ran} A^{**}$, mis on defineeritud seosega

$$T\colon X^{**} \ni x^{**} \mapsto A^{**}x^{**} \in \operatorname{ran} A^{**}.$$

Lausetest 1.10 ja 1.15 järeldub, et operaator T on isomeetriline isomorfism.

Ruum X ja seega ka alamruum $\operatorname{ran} A$ on täielikud. Lausest 1.19 järeldub, et sel juhul kehtib võrdus $\operatorname{ran} A^* = (\ker A)^{\perp}$. Viimasest võrdusest lause 1.17 abil järeldub, et $\operatorname{ran} A^*$ on kinnine ruumi $X^{(2n+1)}$ alamruum, seega ta on täielik. Rakendades veelkord lauset 1.19 saame võrduse $\operatorname{ran} A^{**} = (\ker A^*)^{\perp}$.

Arvestades saadud tulemust ning lauset 1.18 saame, et

$$\operatorname{ran} T = \operatorname{ran} A^{**} = (\ker A^*)^{\perp} = (\operatorname{ran} A)^{\perp\perp} = ((j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X(X))^{\perp\perp}.$$

Lauset 1.13 ja lemmat 4.22 rakendades näeme, et

$$T(j_X(X)) = A^{**}(j_X(X))$$

$$
\begin{aligned}
&= (j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X)^{**}(j_X(X)) \\
&= j^{**}_{X^{(2n-2)}} \dots j^{**}_X j_X(X) \\
&= j_{X^{(2n)}} \dots j_{X^{**}} j_X(X).
\end{aligned}
$$

Niisiis, eelduse kohaselt on ruum $j_X(X)$ $M(a,B,c)$-ideaal ruumis X^{**} ning me näitasime, et operaator $T\colon X^{**} \to ((j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X(X))^{\perp\perp}$ on isomeetriline isomorfism. Lausest 4.20 järeldub, et $T(j_X(X)) = j_{X^{(2n)}} \dots j_{X^{**}} j_X(X)$ on $M(a,B,c)$-ideaal ruumis $((j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X(X))^{\perp\perp}$.

Induktsiooni sammu alustamisel eeldasime, et alamruum $(j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X)(X)$ on $M\left(\frac{a}{\gamma_n}, \frac{B}{\gamma_n}, \frac{c}{\gamma_n}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$. Sellest järeldub lause 4.19 põhjal, et alamruum $((j_{X^{(2n-2)}} \dots j_X)(X))^{\perp\perp}$ on $M\left(\frac{a}{\gamma_n}, \frac{B}{\gamma_n}, \frac{c}{\gamma_n}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n+2)}$.

Rakendame nüüd teoreemi 4.8, mille põhjal alamruum $j_{X^{(2n)}} \dots j_{X^{**}} j_X(X)$ on $M\left(\frac{ad}{\gamma}, \frac{dB}{\gamma}, \frac{cd}{\gamma}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n+2)}$ (kasutame samu tähistusi nagu peatüki 4.2 alguses, vt lk 44). Arvutame vastavad kordajad.

Praegu

$$
\begin{aligned}
a &= a, \quad B = B, \quad c = c, \\
d &= \frac{a}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c}, \\
E &= \frac{B}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c}, \\
f &= \frac{c}{n - (n-1)c + (n-1)\min|a+B|}
\end{aligned}
$$

ja seega

$$
\begin{aligned}
\gamma &= a + d - af + a\min|d+E| \\
&= a + \frac{a}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c} - a \cdot \frac{c}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c} \\
&\qquad + a\min\left|\frac{a}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c} + \frac{B}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c}\right| \\
&= a + \frac{a}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c} - a \cdot \frac{c}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c} \\
&\qquad + a\min_{b\in B}\left|\frac{a}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c} + \frac{b}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c}\right| \\
&= \frac{an + a(n-1)\min|a+B|) - (n-1)ac + a - ac + a\min|a+B|}{n - (n-1)c + (n-1)\min|a+B|}
\end{aligned}
$$

$$= a \cdot \frac{(n+1) + n \min |a+B| - nc}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c}.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\frac{d}{\gamma} &= \frac{\dfrac{a}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c}}{a \cdot \dfrac{(n+1) + n\min|a+B| - nc}{n + (n-1)\min|a+B| - (n-1)c}} \\
&= \frac{1}{(n+1) + n\min|a+B| - nc} \\
&= \frac{1}{\gamma_{n+1}},
\end{aligned}$$

millest saame, et meid huvitavad avaldised on kujul

$$\frac{ad}{\gamma} = \frac{a}{\gamma_{n+1}}, \quad \frac{dB}{\gamma} = \frac{B}{\gamma_{n+1}}, \quad \frac{cd}{\gamma} = \frac{c}{\gamma_{n+1}}.$$

Saadud tulemus ütleb, et $j_{X^{(2n)}} \ldots j_{X^{**}} j_X(X)$ on $M\left(\dfrac{a}{\gamma_{n+1}}, \dfrac{B}{\gamma_{n+1}}, \dfrac{c}{\gamma_{n+1}}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n+2)}$. Arvestades märkust 4.25 näeme, et jõudsimegi teoreemi väiteni. □

Teoreemis 4.23 piirdusime juhuga $a > 0$. Analoogiliselt, toetudes teoreemi 4.8 osale 2, on võimalik tõestada järgmine tulemus.

Teoreem 4.26. *Olgu $n \in \mathbb{N}$. Kui ruum X on $M(0, B, c)$-ideaal ruumis X^{**}, siis ruum X on $M(0, B, c)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$.*

Teoreemist 4.23 saame teha järeldusi erinevate $M(a, B, c)$-ideaalide erijuhtude kohta.

Järgmisest järeldusest näeme, et teoreem 4.23 üldistab artikli [H] teoreemi 6.

Järeldus 4.27. *Olgu $n \in \mathbb{N}$. Kui ruum X on $M(r, s)$-ideaal ruumis X^{**}, siis ruum X on $M\left(\dfrac{r}{r + n(1-r)}, \dfrac{s}{r + n(1-r)}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$.*

Tõestus. Olgu X $M(r, s)$-ideaal ehk $M(s, \{-s\}, r)$-ideaal ruumis X^{**}. Rakendame teoreemi 4.23, võttes

$$a = s, \; B = \{-s\}, \; c = r,$$

siis

$$\gamma_n = n - (n-1)c + (n-1)\max|a+B|$$

$$= n - (n-1)r + 0$$
$$= r + n(1-r)$$

ja kokkuvõttes X on $M\left(\dfrac{r}{r+n(1-r)}, \dfrac{s}{r+n(1-r)}\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$. $\square$

Erijuhul, kui ruum X on M-ideaal ruumis X^{**}, saame sõnastada eriti lihtsal kujul järelduse. Sama tulemus esineb juba artiklis [Rao].

Järeldus 4.28. *Kui ruum X on M-ideaal ruumis X^{**}, siis ruum X on M-ideaal ruumis $X^{(2n)}$ iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}$ korral.*

Lõpuks vaatleme, mis juhtub erijuhtudel, kui ruum X on h-ideaal või u-ideaal oma teises kaasruumis.

Järeldus 4.29. *Olgu $n \in \mathbb{N}$. Kui ruum X on h-ideaal ruumis X^{**}, siis ruum X on $M\left(\dfrac{1}{2n-1}, \left\{-\dfrac{1+\lambda}{2n-1} : \lambda \in S_{\mathbb{C}}\right\}, 0\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$.*

Järeldus 4.30. *Olgu $n \in \mathbb{N}$. Kui ruum X on u-ideaal ruumis X^{**}, siis ruum X on $M\left(\dfrac{1}{2n-1}, \left\{-\dfrac{2}{2n-1}\right\}, 0\right)$-ideaal ruumis $X^{(2n)}$.*

$M(a, B, c)$-ideals in Banach spaces

Ksenia Rozhinskaya

Summary

In their 1973 paper "Structure in real Banach spaces" [AE], E. Alfsen and E. Effros introduced the notion of an M-ideal. It turned out that a closed subspace of a Banach space that is an M-ideal enjoys some properties (e.g. uniqueness of a norm-preserving extension) which do not necessarily occur in arbitrary subspaces.

In [GKS], G. Godefroy, N. Kalton and P. Saphar introduced the notion of an ideal. It allowed them to make a connection between M-ideals and u-ideals, which were first introduced in [CK]. They also presented a natural strengthening of the definition of a u-ideal, an h-ideal. Another important step towards the generalization of previously studied ideals was made by J. Cabello and E. Nieto in [CN], where they defined an $M(r, s)$-ideal.

The idea of studying $M(a, B, c)$-ideals dates back to a paper [O_1] by E. Oja from 2000. In [OZ], one finds the following definition.

> Let a, $c \geqslant 0$ and let $B \subset \mathbb{K}$ be a compact set of scalars. We shall say that a Banach space X satisfies the $M(a, B, c)$-inequality if
>
> $$\|ax^{***} + b\pi_X x^{***}\| + c\|\pi_X x^{***}\| \leqslant \|x^{***}\| \quad \forall b \in B, \quad \forall x^{***} \in X^{***},$$
>
> where $\pi_X \colon X^{***} \to X^{***}$ is the canonical projection.

Based on this definition, we define an $M(a, B, c)$-ideal for an arbitrary closed subspace and aim to study some properties of $M(a, B, c)$-ideals. The pursuit to study $M(a, B, c)$-ideals is motivated by the fact that the definition of an $M(a, B, c)$-ideal encompasses all previously studied special cases of ideals and makes it possible to handle them with a more unified approach.

This bachelor thesis consists of four chapters.

In the first chapter, we give a brief overview of some basic definitions and results required for further work.

In the second chapter, we introduce the notion of an $M(a, B, c)$-ideal and study some basic properties of $M(a, B, c)$-ideals. We also take a closer look at M-, u- and h-ideals.

The aim of the third chapter is to study $M(a, B, c)$-ideals in particular Banach spaces. First we give necessary and sufficient conditions for a one-dimensional subspace of a Banach space ℓ_∞^2 to be an $M(a, B, c)$-ideal in ℓ_∞^2. We also provide

a theoretical result which can be used to derive examples of $M(a, B, c)$-ideals in $\mathcal{L}(X)$.

In the fourth chapter, we study the transitivity of $M(a, B, c)$-inequality. First we show that ideal projections are closely connected to Hahn-Banach extension operators. Using this knowledge, we show as a first main result of this bachelor thesis that if X is an $M(a, B, c)$-ideal in Y and Y is an $M(d, E, f)$-ideal in Z, then X is an ideal satisfying a certain type of inequality in Z. Relying on this result, we show as a second main result of this thesis that if X is an $M(a, B, c)$-ideal in its second bidual X^{**}, then X is an ideal satisfying a certain type of inequality in $X^{(2n)}$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Kirjandus

[AE] E. M. Alfsen, E. G. Effros, *Structure in real Banach spaces. Parts I and II*, Ann. of Math. **96** (1972), 98–173.

[B] E. Behrends, *M-Structure and the Banach-Stone theorem*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[CN] J. C. Cabello, E. Nieto, *On properties of M-Ideals*, Rocky Mountain J. Math. **28** (1998), 61–93.

[CNO] J. C. Cabello, E. Nieto, E. Oja, *On ideals of compact operators satisfying the $M(r,s)$-inequality*, J. Math. Anal. Appl. **220** (1998), 334–348.

[CK] P. G. Casazza, N. J. Kalton, *Notes on approximation properties in separable Banach spaces*, Geometry of Banach spaces, Proc. Conf. Strobl (1989) (P. F. X. Müller and W. Schachermayer, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series. **158** Cambridge Univ. Press 1990, 49–63.

[FJ] R. J. Fleming, J. E. Jamison, *Isometries on Banach spaces: function spaces*, Chapman and Hall/CRC, 2003.

[GKS] G. Godefroy, N.J. Kalton, P. D. Saphar, *Unconditional ideals in Banach spaces*, Studia Math. **104** (1993), 13–59.

[H] R. Haller, *On transitivity of $M(r,s)$-inequalities and geometry of higher duals of Banach spaces*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **6** (2002), 9–13.

[HWW] P. Harmand, D. Werner, W. Werner, *M-Ideals in Banach spaces and Banach algebras*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

[Jam] J. E. Jamison, *Bicircular projections on some Banach spaces*, Linear Algebra Appl. **420** (2007), 29–33.

[Joh] M. Johanson, *$M(r,s)$-ideals of compact operators*, doktoritöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2012.

[J] J. Johnson, *Remarks on Banach spaces of compact operators*, J. Funct. Anal. **39** (1979), 304–311.

[LL] V. Lima, A. Lima, *A three ball intersection property for u-ideals*, J. Funct. Anal. **252** (2007), 220–232.

[L] G. Lumer, *Semi-inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29–43.

[O_1] E. Oja, *Geometry of Banach spaces having shrinking approximations of the identity*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 2801–2823.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[OP] E. Oja, M. Põldvere, *On subspaces of Banach spaces where every functional has a unique norm-preserving extension*, Studia Math. **117** (1996), 289–306.

[OZ] E. Oja, I. Zolk, *On commuting approximation properties of Banach spaces*, Proc. Royal Soc. Edinb. **139A** (2009), 551–565.

[Rao] T. S. S. R. K. Rao, *On the geometry of higher duals of a Banach space*, Illinois J. Math. **45** (2001), 1389–1392.

[R] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.

[S] E. Schechter, *Handbook of Analysis and its Foundations*, Academic Press, San Diego, 1997.

[K] А. Кострикин, *Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2000.

[O_2] Э. Оя, *Продолжение функционалов и структура пространства непрерывных линейных операторов*, Тартуский Университет, Тарту, 1991.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ksenia Rozhinskaya (sünnikuupäev 12.03.1992),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose “$M(a, B, c)$-ideaalid Banachi ruumides”, mille juhendaja on Indrek Zolk,
    1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
    1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **03.06.2013**