habe, da dieser durchaus einen von B. Beham und J. Binck wesentlich unterschiedenen Ausdruck zeigt. Im Allgemeinen aber bleibt Marc Anton Raimondi's Charakter des Grabstichels sehr sichtbar, und oft dringt sich einem die Vermuthung auf, daß manche Blätter, die nicht sein Monogramm tragen und ihm gleichwol seit undenklicher Zeit beigelegt werden, von jenen genannten drei Meistern gestochen sein dürften, oder wenigstens ihre Hand an jenen mitgewirkt habe. An den Arbeiten von Pencz wird man verschiedene Perioden seiner geistigen Entwickelung unterscheiden können, seine Blätter zeigen ein verschiedenartiges Gepräge der Vollendung, alle jedoch weisen auf das Princip eines kräftigen Farbentones hin.

Die Mehrzahl seiner Kupferstiche, die mit dem Monogramm oder bezeichnet sind, sind sehr kleiner Form, als in **16.** oder **12.** oder **8.**, doch gibt es auch einige größere in **4.**, wie die Triumphe u. a. Von den größten seiner Blätter ist die Einnahme von Carthago nach Julio Romano (**20** Z. **6** L. breit, **15** Z. hoch), ein Blatt, welches er **1539** in Rom stach und folglich in der kräftigsten Lebensfülle vollendete. Die guten, sehr seltenen Abdrücke sind von der Adresse des römischen Kunsthändlers Antonio Salamanca und die dritte oder sehr aufgestochene und retouchirte geringere Ausgabe des Blattes ist mit Nic. v. Aelst' Adresse.

Als das schönste zweite größere Blatt gilt das Bildniß des unglücklichen Kurfürsten Johann Friedrich des Großmüthigen von Sachsen, **1543** gestochen. Das Bildniß in halber Figur ist mit **14** sächsischen Provinzialwappen umgeben, das ganze Blatt **15** Z. hoch, **11** Z. **5** L. breit *). Ebenso vorzüglich und wirklich großartig sind die sechs Triumphe des Petrarca in mittlerer Größe.

Bartsch, der im 8. Band seines Peintre-Graveur einen ausführlichen beschreibenden Katalog der von Pencz gestochenen Blätter gibt, führt **126** Stück auf. (*Frenzel.*)

PENDAGLIO, ein Berg im Valsassina der lombardischen Provinz Como, ein Zweig des Gebirges Moncodine, merkwürdig, weil sein Inneres reich an silberhaltigem Blei ist. Sein Gipfel besteht aus Kalk, und sein Fuß aus sogenannter **rocca micacea.** Im J. **1763** lösete sich ein Theil des Berges los und stürzte in die Tiefe, bedeckte den größten Theil der unterhalb gelegenen Ortschaften Barcone und Gera, wobei mehr als hundert Menschen das Leben einbüßten und überdeckte einen großen Theil der bebauten fruchtbaren Felder mit Sand. Man schrieb dieses unglückliche Ereigniß den Quellen, den Schwefelkiesen und anderen Stein- und Erdarten zu, die er enthält und die an mehren Orten zu Tage ausstehen. Die Volkssage hält sein Inneres für besonders reich an Silber †). (*G. F. Schreiner.*)

PENDANT. 1) Pendants nennen verschiedene Galanteriehändler diejenigen Ohrgeschmeide, welche in Gestalt von Trauben oder Birnen lang herabhängen. Da man sich zu ihrer Verfertigung gewöhnlich der größten Diamanten und Perlen bedient, so haben sie meist einen solchen Werth, daß nur sehr vornehme Personen Pendants tragen können. Die kostbarsten werden aus Ostindien zu uns gebracht, wo man häufig auch Männer in diesem Schmucke erblickt. 2) In der Kunstsprache versteht man unter Pendant ein Gemälde oder einen Kupferstich, welcher zu einem andern correspondirend gehört, daher man das Wort gewöhnlich durch Seiten- oder Gegenstück wiedergibt. 3) Pendants nennen die Engländer die Wimpel oder Flaggen der Schiffe, deren verschiedene Farben zur Unterscheidung der Geschwader dienen, in welche ihre Flotte zerfällt. (*Fischer.*)

PENDÉ, Flecken im französischen Sommedepartement (Picardie), Canton St. Valery, Bezirk Abbeville, liegt $5\frac{1}{4}$ Lieues von dieser Stadt entfernt und hat eine Succursalkirche und **1109** Einwohner. (Nach Barbichon.) (*Fischer.*)

PENDEL bezeichnet in der Mechanik im Allgemeinen einen Körper, welcher an dem einen Ende eines Fadens oder Stabes befestigt ist, dessen anderes Ende sich um einen festen Punkt frei bewegen kann. Bei der Einwirkung der Schwere hängt also der Faden an seinem oberen Ende, während unter demselben der schwere Körper hängt. Betrachten wir nur die Einwirkung dieser letztern Kraft auf den Körper, so muß er im Zustande der Ruhe so hängen, daß eine Linie von dem Aufhängepunkte nach dem Schwerpunkte gezogen vertical ist; nehmen wir also z. B. eine Kugel oder irgend einen durch Umdrehung entstandenen Körper und hängen diesen dergestalt an einem feinen biegsamen Faden auf, daß der letztere mit der Richtung der Drehungsaxe des Körpers zusammenfällt, so gibt diese Vorrichtung die Verticale an und wird zur Aufsuchung derselben unter dem Namen des Bleilothes oder schlechthin des Lothes gebraucht. Wenn wir aber eine solche Vorrichtung aus der Verticale entfernen, so kehrt sie durch Einwirkung der Schwere gegen letztere Richtung zurück, erreicht dieselbe und entfernt sich in Folge der Trägheit über sie hinaus; dabei nimmt die Geschwindigkeit ab, wird endlich gleich Null und der Körper kehrt nun wieder gegen die Verticale und durch diese in seine frühere Lage zurück, worauf sich derselbe Vorgang wiederholt. Auf diese Weise erfolgt eine Reihe hin- und hergehender Bewegungen, welche mit dem Namen Schwingungen, Vibrationen, Oscillationen bezeichnet werden. Indem wir aber hier die Bewegung eines Pendels um einen festen Punkt ganz allgemein betrachten, sehen wir uns genöthigt zwei Arten von Bewegungen zu unterscheiden. Es kann nämlich geschehen, daß ein solches Pendel dergestalt aufgehängt ist, daß seine Schwingungen nur in derselben Verticalebene erfolgen (Pendel im engern Sinne), oder das Pendel kann die Oberfläche eines senkrechten Kegels beschreiben, dessen Axe die verticale durch den Aufhängepunkt gezogene Linie ist (konisches Pendel); im letztern Falle haben wir keine hin- und hergehende Bewegung, sondern alle Punkte beschreiben in derselben Richtung fortgehend horizontale Kreise,

*) Eine vorzüglich schöne Federzeichnung auf Pergament von diesem Bildniß ist in der königl. Kupferstich- und Handzeichnungssammlung in Dresden.

†) s. Corografia dell' Italia di *G. P. Rampoldi* (Milano 1835). T. III. p. 149 in *Pendaglio.*

deren Mittelpunkte mit der vorher erwähnten Verticale zusammenfallen.

Wenn die Gesetze des Pendels untersucht werden, so zeigt sich, daß die Zeit einer Schwingung desto kürzer ist, je kleiner der Abstand des schwingenden Punktes vom Aufhängepunkte ist; ein jeder physischer Körper aber besteht aus einer Anzahl schwerer Punkte, von denen jeder als ein Pendel angesehen werden kann, dessen Aufhängepunkt mit dem der übrigen zusammenfällt. Da bei einem solchen Körper die der Schwingungsaxe näher liegenden Punkte sich schneller bewegen als die entfernteren, so ist klar, daß bei der gemeinsamen Bewegung des Systemes nur ein einziger Punkt sich so bewegt, als er es thun würde, wenn die übrigen Punkte nicht vorhanden wären; betrachten wir die Bewegung der Punkte, welche in kleinerer oder größerer Entfernung von der Axe liegen als dieser Punkt, so wird die Geschwindigkeit der erstern durch die der letztern verkleinert, die der letztern durch die der erstern vergrößert. Um diese gegenseitige Einwirkung kennen zu lernen, sieht man sich genöthigt, das einfache oder mathematische Pendel von dem zusammengesetzten oder physischen zu unterscheiden, indem man unter ersterem einen schweren Punkt an einem nicht schweren Faden von constanter Länge versteht, unter letzterem aber solche Körper, wie die Natur uns dieselben darbietet.

Obgleich gewöhnlich die Gesetze des Pendels nur unter der Voraussetzung der Schwere betrachtet werden, so lassen sich dieselben doch mit großer Leichtigkeit auf alle diejenigen Fälle anwenden, wo Körper unter der Einwirkung paralleler Kräfte Schwingungen ausführen. Dieses ist z. B. der Fall bei Magnetnadeln, welche unter bloßer Einwirkung des Erdmagnetismus durch eine Reihe von Oscillationen in den magnetischen Meridian zurückkehren, bei schwingenden Saiten u. s. f.

1) Einfaches Pendel. Es sei A (Fig. I.) die Aufhängungsaxe des Pendels, C der schwere Punkt und AC gebe die verticale Richtung an; wird das Pendel aus der letzteren nach AD entfernt, so findet kein Gleichgewicht statt, da die spannende Kraft des Fadens nach AD und die Schwere nach DE wirken, beide Richtungen aber nicht entgegengesetzt sind. Der Punkt D wird mithin nach Unten fallen, da er aber durch den Faden verhindert wird, sich von dem Punkte A zu entfernen, so beschreibt er den Kreisbogen DC und es kommt nun darauf an, die Bewegung auf dem letzteren zu betrachten. Leicht läßt sich übersehen, daß die Kraft, welche das Pendel gegen die verticale Richtung zurückführt, desto kleiner wird, je kleiner der Winkel DAC, d. h. der Elongationswinkel, ist, daß also die Bewegung keine gleichförmig beschleunigte sein kann. Bezeichnen wir mit DE die Intensität der Schwere, und zerfällen dieselbe in zwei auf einander senkrecht stehende, von denen DF mit der Tangente des Bogens in D, die zweite DG mit der Verlängerung des Fadens zusammenfällt. Die letztere wird durch den Widerstand des Fadens ganz aufgehoben und der Körper wird also von der Kraft DF nach der Tangente, mithin auf dem Kreisbogen DC fortgetrieben. Aber die Schwere wirkt in jedem Punkte seiner Bahn auf den Körper mit derselben Intensität ein und es kommt nun darauf an, den Theil von ihr zu bestimmen, welcher mit dem Bogen zusammenfällt. Es sei nun $HK = DE$ die Einwirkung der Schwere auf den in H angekommenen Punkt und es werde diese Kraft wieder wie vorher in zwei andere zerlegt, von denen die eine mit der Richtung des Fadens, die zweite mit der Tangente zusammenfällt, so treibt nur HI den Punkt nach der letztern fort. Setzen wir nun $DE = HK = g$, so ist $DF = g \sin DEF = g \sin DAC$ und $HI = g \sin HKI = g \sin CAH$, es verhält sich mithin

$$DF : HI = \sin DAC : \sin CAH$$

d. h. die beschleunigenden Kräfte verhalten sich wie die Sinus der Elongationswinkel. So hat also der Körper eine ungleichförmig beschleunigte Geschwindigkeit, mit welcher er die verticale AC erreicht; hier wird die Einwirkung der Schwere gänzlich durch den Widerstand des Fadens aufgehoben. Vermöge der Trägheit geht der Körper über diese Lage hinaus, jedoch wirkt die Schwere jetzt seiner Bewegung entgegen, indem sie ihn gegen AC zurücktreibt — ebenfalls mit einer Kraft, welche sich verhält wie der Sinus des Elongationswinkels —, seine Geschwindigkeit wird kleiner und verschwindet endlich im Punkte M, wo er einen Moment ruht, dann gegen AC auf dieselbe Weise als vorher zurückfällt, und über diese Lage hinausgeht, bis er zur Ruhe kommt, worauf sich die Bewegung auf dieselbe Art wiederholt. Bewegte sich der Körper im luftleeren Raume, fände ferner an dem Punkte A kein Widerstand statt, so würde der Winkel $DAC = CAM$ sein, das Pendel also auf der einen Seite der Verticale ebenso hoch steigen, als es auf der andern gefallen war, und es würde nie zur Ruhe kommen. Da aber die vorher erwähnten Bedingungen nicht stattfinden, so wird der Elongationswinkel nach und nach kleiner und das Pendel kommt endlich zur Ruhe.

Um die Gesetze für die Bewegung des Pendels kennen zu lernen, können wir uns auch vorstellen, daß der Faden nicht vorhanden sei, sondern daß der schwere Punkt auf einer Curve oder in einem hohlen Kanal falle, dessen Gestalt mit derjenigen Linie zusammenfällt, welche er am Faden befestigt beschreibt. Diese Vorstellung ist erlaubt, da der Faden selbst auf die Bewegung nur den Einfluß hat, daß er den schweren Punkt verhindert, der Wirkung der Schwere folgend, nach Unten zu fallen. Wenn wir diese Vorstellung verfolgen, so läßt sich leicht zeigen, daß der Körper, welcher von D nach C (Fig. 1) auf dem Bogen DC fällt, in C angekommen dieselbe Geschwindigkeit hat, als wenn er durch eine Länge gefallen wäre, welche gleich der verticalen Höhe von D über C ist.

Nehmen wir zuerst statt der Curve, auf welcher sich der Körper bewegt, ein in der Verticalebene liegendes Polygon $m m_1 m_2 \ldots$ (Fig. 2), wo Größe und Neigung der Seiten bekannt sind und kommt ein Körper auf der Linie $m m_1$ in m_1 mit einer gewissen Geschwindigkeit v an, so muß er die bis dahin verfolgte Richtung $m m_1$ verlassen und den Weg $m_1 m_2$ verfolgen. Bei diesem Übergange verliert der Körper einen Theil seiner Geschwindigkeit und dieser Verlust läßt sich leicht bestimmen. Es bezeichne $m_1 q$ die Größe seiner Geschwindigkeit, so zerlegen wir dieselbe in m_1n mit der Linie m_1m_2 zusammenfallend und m_1l darauf senkrecht stehend. Bezeichnen wir nun den spitzen Winkel, welchen mm_1 und m_1m_2 einschließen, also m_2m_1q mit ω, so ist

$$m_1l = v \sin\omega \text{ und } m_1n = v\cos\omega.$$

Von diesen beiden Seitengeschwindigkeiten geht m_1l durch den Widerstand des Polygons verloren und der Körper bewegt sich nur mit der Geschwindigkeit m_1n weiter; demnach ist der Verlust an Geschwindigkeit gleich

$$v - v\cos\omega = v(1-\cos\omega) = 2v\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Geht unser Polygon in eine Curve über, so wird ω der Winkel, welchen die Tangente mit der Curve am Berührungspunkte einschließt, und ω wird unendlich klein, also noch mehr wird $\sin^2\frac{\omega}{2}$ verschwinden und die Geschwindigkeit bleibt also ungeändert. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper in C (Fig. 1) ankommt, ist also ebenso groß, als wenn er auf der schiefen Ebene DC gefallen wäre und die Beschaffenheit der Curve ist mithin völlig gleichgültig; diese Geschwindigkeit aber ist nach den Gesetzen des Falles dieselbe, als diejenige, welche er bei freiem Falle von der Höhe D bis C erlangt hätte.

Wenden wir diesen Satz an, so wird es uns sehr leicht, die Geschwindigkeit des Pendels in jedem Punkte seiner Bahn, sowie die Dauer einer Schwingung zu bestimmen. Es sei CM (Fig. 3) unser Pendel, die Bewegung fange in M an, es bezeichne CA die Verticale, so steigt das Pendel bis m, wobei mCA = MCA. Ziehen wir durch M und irgend einen Punkt o die Horizontalen ME und op, so hat der in o befindliche Körper dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er von E bis p gefallen wäre. Bekanntlich ist nun die Geschwindigkeit gleich dem Quotienten des Raumes dividirt durch die Zeit; für diese beiden letzteren Größen nehmen wir hier, wo die Geschwindigkeit ungleichförmig und die Bahn eine Curve ist, die Differentiale. Bezeichnen wir also die Geschwindigkeit mit v, den Raum mit s und die Zeit mit t, so wird

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ oder } dt = \frac{ds}{v}.$$

Es sei nun die Pendellänge Cm = l, der Sinus versus AE = b, der Sinus versus Ap = x, ferner der Sinus po = y, der veränderliche Bogen Mo = s und 2g die beschleunigende Kraft der Schwere, so hat das Pendel, welches sich von M bis o bewegt hat, in o dieselbe Geschwindigkeit, als ein Körper, welcher von E bis p gefallen wäre, es ist also die erlangte Geschwindigkeit in o gleich

$$v = 2\sqrt{g.Ep} = 2\sqrt{[g(b-x)]} = \frac{ds}{dt}$$

oder

$$dt = \frac{ds}{2\sqrt{[g(b-x)]}}.$$

Wenn wir bei einer Curve rechtwinkelige Coordinaten x und y annehmen, so wird bekanntlich das Differential des Bogens durch die Gleichung $ds^2 = dy^2 + dx^2$ bekannt, wo wir für dy nur den Werth setzen dürfen, welchen wir erhalten, wenn wir y als Function von x ansehen. Ist nun r der Halbmesser eines Kreises, so gilt für rechtwinkelige Coordinaten bekanntlich die Gleichung

$$y^2 = 2rx - x^2 \text{ oder } y = \sqrt{(2rx - x^2)}$$

mithin wird

$$dy = \frac{(r-x)dx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

darnach wird

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{(r-x)^2dx^2}{2rx-x^2} = \frac{r^2}{2rx-x^2}.dx^2$$

und

$$ds = \pm\frac{rdx}{\sqrt{(2rx-x^2)}}$$

die Zweideutigkeit des Zeichens von ds verschwindet hier durch Betrachtung der Verhältnisse bei der Bewegung; da nämlich der Bogen MCA desto kleiner wird, je größer die Zeit ist, welche der schwere Punkt gebraucht hat, um sich von M aus zu bewegen, so folgt, daß wir das Zeichen — nehmen müssen. Setzen wir daher in dem Ausdrucke von ds für den Halbmesser r die Pendellänge l und substituiren diesen Werth in die vorher für dt gefundene Gleichung, so wird

$$dt = \frac{-ldx}{2\sqrt{[(2lx-x^2)g(b-x)]}} = \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}.\frac{l}{2\sqrt{(2lg-gx)}}$$
$$= \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{2g}}.\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}}.\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}.$$

Nun ist bekanntlich nach dem binomischen Lehrsatze

$$\left(1-\frac{x}{2l}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}.\frac{x}{2l} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4l^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^3}{8l^3} + \ldots$$

und wenn diese Reihe substituirt wird, so ist

$$dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{2g}}.\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}.\left(1+\tfrac{1}{2}.\frac{x}{2l}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4l^2}+\ldots\right)$$

Um nun die Zeit zu bestimmen, welche das Pendel gebraucht, um von M bis A zu kommen, müssen wir erwägen, daß der Sinus versus x für den Anfang der Bewegung AE = b wird, bei der Ankunft in A aber verschwindet, und wir müssen daher das Integral des Ausdruckes für dt zwischen den Grenzen x = o und x = b nehmen. Wenn wir nun die Größe $\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ mit den Gliedern der in Parenthese eingeschlossenen Reihe multipliciren, so werden die einzelnen Differentiale nach Fortlassung der constanten Coëfficienten

$$-\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}, \frac{-xdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}, -\frac{x^2dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} \cdots \frac{-x^mdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$$

die Integrale derselben werden durch Reduction gefunden, indem wir $\int\frac{x^mdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ auf $\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ zurückführen. Nun ist bekanntlich $\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \text{arc.}\cos\frac{2x-b}{b} + C$, wo ich mit arc. cos $\frac{2x-b}{b}$ den Bogen bezeichne, dessen Cosinus den Werth $\frac{2x-b}{b}$ hat. Nehmen wir dieses Integral für x = o, so wird es arc. cos $-1 + C = \pi + C$, wo π die Ludolphische Zahl für die Kreisperipherie bezeichnet; für x = b wird es arc. cos $+1 + C = o + C$, mithin wird

$$\int_0^b\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \pi.$$

Betrachten wir nun das allgemeine Integral, so wird

$$\int\frac{-x^mdx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{(bx-x^2)}}{m} + \frac{b(2m-1)}{2m}\int\frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$$

aber bei den Grenzen x = 0 und x = b wird der Factor $\sqrt{(bx-x^2)}$ gleich Null, mithin wird

$$\int_0^b\frac{-x^mdx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{b(2m-1)}{2m}\int\frac{-x^{m-1}dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}.$$

Es wird also

$$\int_0^b\frac{-xdx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi.b$$

$$\int_0^b\frac{-x^2dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{b.3}{4}\int\frac{-xdx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3}{2.4}\pi b^2$$

$$\int_0^b\frac{-x^3dx}{\sqrt{(bx-x^4)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}.\pi b^3$$

. . . .

und allgemein

$$\int_0^b\frac{-x^mdx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{2.4.6\ldots.\ 2m}.\pi b^m.$$

Wenn wir diese Integrale substituiren, so wird

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}.\frac{b}{2l}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{b^2}{4l^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{b^3}{8l^3}+\ldots\right)$$

wo das Gesetz für die Reihe sehr einfach ist. Dieser Ausdruck gibt die Zeit an, welche das Pendel gebraucht, um auf dem Bogen AM herabzusinken; ebenso viel Zeit ist nöthig, um den Bogen Am aufwärts zu steigen und die Zeit einer ganzen Schwingung ist daher

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(1+\frac{1^2}{2^2}.\frac{b}{2l}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\frac{b^2}{4l^2}+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\frac{b^3}{8l^3}+\ldots\right) \quad (1)$$

Diese Reihe convergirt offenbar, da nicht blos die Zahlencoëfficienten der einzelnen Glieder immer kleiner werden, sondern auch weil $\frac{b}{2l} < 1$ ist, da b im Maximum, wo das Pendel um 90° aus der Verticale entfernt ist, gleich l wird, also $\frac{b}{2l}$ im Maximum $\frac{1}{2}$ ist; da aber der Bogen nach und nach kleiner wird, so nimmt der Werth von $\frac{b}{2l}$ ab.

Nehmen wir in dieser Gleichung den Bogen, welchen das Pendel beschreibt, sehr klein an, so können wir in der obigen Reihe $\frac{b}{2l} = 0$ setzen, dann fallen alle Glieder derselben mit Ausnahme des ersten fort, und es ist

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Wenn demnach die Bogen so klein sind, daß wir die Sinus versus derselben als verschwindend klein ansehen können, so gebraucht das Pendel zu einer Schwingung stets dieselbe Zeit, d. h. die Schwingungen sind isochronisch. Ebendieses ist offenbar dann der Fall, wenn das Pendel stets dieselbe Weite behält, der Werth von $\frac{b}{2l}$ also unverändert bleibt.

Das eben betrachtete Gesetz ist nicht blos für die Theorie des Pendels, sondern auch wegen der Anwendungen bei der Construction der Uhren von der größten Wichtigkeit. Galilei, welcher zuerst die Gesetze dieser Bewegung untersuchte, glaubte, daß die Weite der Schwingungen gar keinen Einfluß auf die Dauer derselben hätte, und er stellte deshalb den Satz auf, daß dasselbe Pendel zu einer Schwingung stets dieselbe Zeit gebrauche, ein Lehrsatz, welcher in viele Lehrbücher der Physik übergegangen ist. Als indessen Huygens in der Folge die Gesetze des Pendels sorgfältiger untersuchte, fand er, daß die Schwingungen zwar nahe isochronisch wären, daß aber die Dauer derselben desto kleiner würde, je kleiner der Bogen wäre, was auch von selbst aus der obigen Reihe folgt.

Bei der Construction der Pendeluhren ist der Elongationswinkel, um welchen das Pendel aus der Verticale entfernt wird, ziemlich gleichgültig, wofern der Künstler bei der Construction nur dafür sorgt, daß der Winkel einer und derselbe bleibt. Ganz anders aber ist es, wenn die Länge eines Pendels aufgesucht werden soll, welches zu einer Schwingung eine gewisse Zeit, etwa eine Secunde, gebraucht; in diesem Falle müßte das Pendel in unendlich kleinen Bogen schwingen, oder da dieses nicht möglich ist, so muß man doch die Bogen so klein als möglich machen und nun vermittels der Reihe (1) die nöthigen Rechnungen vornehmen, um die Zeit einer Schwingung auf die zu reduciren, welche bei unendlich kleinen Bogen stattfände. Übrigens hat der Ausdruck, daß das Pendel in einem unendlich kleinen Bogen schwingen soll, auf den ersten Anblick etwas Überraschendes; der Körper nämlich beschreibt einen unendlich kleinen Raum in einer endlichen Zeit. Aber, wie Poisson[1] bemerkt, kommt dieses davon her, daß die beschleunigende Kraft, von welcher das Pendel angetrieben wird, alsdann unendlich klein ist. Denn diese beschleunigende Kraft ist derjenige Theil der Schwere, dessen Richtung mit der Tangente der Bahn zusammen-

1) Traité de Mécanique. §. 279.

fällt. Nun macht an dem niedrigsten Punkte des unendlich kleinen Bogens, welchen das Pendel beschreibt, die Tangente mit der Verticale einen Winkel, welcher von einem rechten um eine unendlich kleine Größe abweicht; der Cosinus dieses Winkels, mit welchem man die beschleunigende Kraft der Schwere beim freien Falle multipliciren muß, um diese Seitenkraft zu erhalten, ist also unendlich klein und daher ist dieses auch die Seitenkraft selbst.

Bleiben wir bei dem Ausdrucke

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

welchen wir für die Dauer einer unendlich kleinen Schwingung gefunden haben, stehen, so ergeben sich daraus mehre Folgerungen:

1) Ist l_1 die Länge eines zweiten Pendels und t_1 die zu einer Schwingung erforderliche Zeit, so ist

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{2g}}$$

mithin verhält sich

$$t : t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}} : \pi\sqrt{\frac{l_1}{2g}} = \sqrt{l} : \sqrt{l_1}$$

d. h. die Schwingungszeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendel.

2) Macht ein Pendel von der Länge l während der Zeit T n Schwingungen, so ist die Dauer einer jeden $\frac{T}{n}$ und mithin

$$\frac{T}{n} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}} \text{ oder } l = \frac{2g}{\pi^2}\cdot\frac{T^2}{n^2}.$$

Ein zweites Pendel von der Länge l_1 mache in derselben Zeit n_1 Schwingungen, so wird auf dieselbe Weise

$$\frac{T}{n_1} = \pi\sqrt{\frac{l_1}{2g}} \text{ oder } l_1 = \frac{2g}{\pi^2}\cdot\frac{T^2}{n_1^2}$$

mithin verhält sich

$$l : l_1 = \frac{1}{n^2} : \frac{1}{n_1^2} = n_1^2 : n^2,$$

d. h. die Längen zweier Pendel verhalten sich zu einander umgekehrt wie die Quadrate der in derselben Zeit gemachten Zahl von Schwingungen. Man bedient sich dieses letztern Satzes dazu, um die Länge eines Pendels zu bestimmen, welches in einer Secunde eine Schwingung macht, indem man die Zahl von Schwingungen beobachtet, welche ein Pendel von willkürlicher, aber bekannter Länge in einer gewissen Zeit macht und daraus die Länge ableitet, welche es haben müßte, um in einer Secunde eine Oscillation zu machen.

3) Da die Dauer einer Schwingung $t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ ist, so wird

$$2g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$$

wenn wir also den Werth von l mit Sorgfalt bestimmen und t gleich einer Secunde setzen, so ergibt sich daraus der Werth von 2g, also das Doppelte des Raumes, durch welchen ein Körper in der ersten Secunde im luftleeren Raume fällt (s. Fall).

4) Nehmen wir an, die beschleunigende Kraft der Schwere gehe in $2g_1$ über, so verwandelt sich die Schwingungsdauer desselben Pendels in $t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{2g_1}}$ und mithin verhält sich

$$t : t_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}} : \frac{1}{\sqrt{2g_1}} = \sqrt{2g_1} : \sqrt{2g}$$

oder $2g_1 : 2g = t^2 : t_1^2$

d. h. die beschleunigenden Kräfte der Schwere verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten, welche zu einer Schwingung erfoderlich sind. Wenn also die Schwere nicht an allen Orten der Erde dieselbe ist, so wird die Zeit, welche dasselbe Pendel zu einer Schwingung erfodert, sich mit der Schwere ändern und eine Pendeluhr also nicht allenthalben denselben Gang haben. Die Erfahrung hat dieses auch bestätigt, und seit der Zeit, wo Richer zuerst in Cayenne die Thatsache beobachtete, daß seine Uhr langsamer ginge, als in Paris, ist eine große Zahl von Messungen gemacht worden, welche alle zu demselben Resultate führen.

Bisher haben wir nur die Zeit betrachtet, welche das Pendel zu einer Schwingung gebraucht; es kommt nur noch darauf an, die Geschwindigkeit zu bestimmen, welche das Pendel in jedem Punkte seiner Bahn hat. Wie bereits erwähnt ist, wird diese Geschwindigkeit gleich Null, wenn das Pendel auf jeder Seite den höchsten Punkt des von ihm beschriebenen Bogens erreicht hat, wird aber am größten, wenn es sich in der Verticale des Aufhängungspunktes befindet. Aus den Gesetzen des Falles auf der schiefen Ebene und Curve läßt sich leicht die Geschwindigkeit u bestimmen, welche das Pendel in o hat. Es ist nämlich

$$u = 2\sqrt{g.Ep} = 2\sqrt{g(Cp - CE)}.$$

Setzen wir nun den Winkel MCA = e und oCA = f, so ist

$$Cp = l\cos f,\ EC = l\cos e, \text{ folglich}$$
$$u = 2\sqrt{gl\,(\cos f - \cos e)}.$$

2) Schwingungen in größeren Kreisbogen. Bezeichnen wir die vorher entwickelte Reihe (1) mit

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\,(1 + A),$$

wo A die Summe aller Glieder mit Ausnahme des ersten angibt, und vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem für unendlich kleine Schwingungen geltenden

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}},$$

so wird die Dauer einer Schwingung desto größer, je bedeutender A, also der Elongationswinkel des Pendels, ist. Bliebe nun diese Weite bei demselben Pendel unverändert, so würde auch A constant bleiben und mit Leichtigkeit ließe sich t bestimmen. In den Pendeluhren wird dieser Foderung genügt, aber wenn Pendel frei oscilliren, oder wenn Magnetnadeln um die Richtung des magnetischen Meridians schwingen, so wird theils durch den Widerstand der Luft, theils der Vorrichtungen zur Aufhängung des Pendels, der Elongationswinkel nach und nach

kleiner und der Apparat kommt endlich zur Ruhe. Der Werth von A wird daher nach und nach kleiner, und es wird um so nöthiger, alle Schwingungen auf unendlich kleine Kreisbogen zu reduciren. Ändert sich der Bogen während des Versuches nicht sehr bedeutend, so kann man als mittleren Bogen das Mittel aus deren bei der ersten und letzten Schwingung nehmen, jedoch ist diese Voraussetzung nur bei sehr kleinen Bogen erlaubt; große Elongationsweiten vermindern sich sehr schnell bedeutend, und es würde daher ein Fehler begangen, wollte man hier das Mittel der äußersten Sinus versus für den mittleren Sinus versus aller Schwingungen nehmen. Wie einflußreich aber dieser Umstand sei, zeigen alle Messungen dieser Art, indem die Anzahl von Schwingungen, welche dasselbe Pendel innerhalb eines Tages machen würde, desto größer ist, je kleiner der Bogen wird. Noch mehr als bei dem eigentlichen Pendel ist dieses bei Magnetstäben der Fall, bei denen gewöhnlich die Verminderung der Bogen sehr schnell erfolgt, weshalb man mit großen Weiten anfangen muß. So fand Hansteen, daß ein Stahlcylinder, welcher an einem Coconfaden hing, bei einer mittlern Weite von 20° zu 150 Schwingungen eine Zeit von 394″,23 gebrauchte; später als die mittlere Weite 6° 49′ betrug, genügten dazu 393″,14 [2]).

Um die Reduction auf unendlich kleine Bogen vorzunehmen, würde eine genaue Kenntniß des Gesetzes erfoderlich sein, nach welchem sich der Bogen von einer Schwingung bis zur folgenden vermindert. Gewöhnlich wird angenommen, daß die Umstände, welche an dieser Verminderung Schuld sind, von jeder Schwingung denselben aliquoten Theil zerstören, dergestalt, daß der Bogen in geometrischer Reihe kleiner wird, wenn die Zeit in arithmetischer wächst. Borda [3]) und Hansteen [4]), welche die nöthigen Correctionen gegeben haben, jener für das in kleinen Bogen schwingende Pendel, dieser für einen in größern Bogen schwingenden Magnetstab, gehen bei ihren Arbeiten von diesem Gesetze aus. Indessen selbst theoretische Betrachtungen machen die Richtigkeit des Gesetzes wenig wahrscheinlich und die Erfahrungen zeigen, daß es nicht vollkommen naturgemäß sei, daß man sich aber desselben ohne einflußreichen Fehler bedienen könne, um die Correction vorzunehmen.

Um dieses Gesetz zu prüfen, hing Borda ein langes Pendel auf und beobachtete von Stunde zu Stunde den Bogen, welchen es auf jeder Seite der Verticale beschrieb. Auf diese Weise fand er folgende Tafel:

Stunde	Weite		Stunde	Weite	
	Beobachtet	Berechnet		Beobachtet	Berechnet
0	120′,0	102′,3	7	4′,1	4′,2
1	61 ,2	64 ,8	8	2 ,7	2 ,6
2	35 ,4	41 ,0	9	1 ,8	1 ,7
3	21 ,9	26 ,0	10	1 ,2	1 ,1
4	14 ,4	16 ,5	11	0 ,8	0 ,8
5	9 ,4	10 ,4	12	0 ,5	0 ,5
6	6 ,3	6 ,6			

2) Poggendorff's Annalen. III, 267. 3) *Méchain* et *Delambre*, Base du Système métrique. III, 345. 4) Poggendorff's Annalen. III, 259.

Wenn wir die Differenz der Logarithmen je zweier auf einander folgender Werthe in dieser Tafel nehmen, so wird diese immer kleiner; sie beträgt zwischen den beiden Beobachtungen um 0^h und 1^h 0,29243, aber von 4^h an wird sie sehr nahe constant, indem ihr Werth etwa 0,17 bis 0,18 beträgt. Nehmen wir alle Beobachtungen zusammen und leiten dann aus dem Gesetze der Reihe die einzelnen Glieder ab, so ergeben sich die berechneten Größen, welche ich in der dritten Verticalspalte mitgetheilt habe. Nehmen wir die Messung um 0 Uhr aus, so sind die übrigen Abweichungen im Allgemeinen so beschaffen, daß man sie übersehen darf.

Diese Abweichung der einzelnen Messungen von den Gliedern einer geometrischen Reihe zeigen auch die Erfahrungen von Hansteen. Er nahm einen, an einem Coconfaden hangenden Magnetstab und unter Einwirkung des Erdmagnetismus fing er die Schwingungen mit einer Weite von 40° an; bei jeder zehnten Schwingung wurde der Bogen beobachtet und so ergab sich in Graden und Decimaltheilen derselben folgende Tafel:

Schwingung	Weite	Schwingung	Weite	Schwingung	Weite	Schwingung	Weite
0	40°,00	100	19°,00	200	9°,50	300	5°,25
10	36 ,90	110	17 ,90	210	8 ,67	310	5 ,00
20	33 ,90	120	16 ,10	220	8 ,00	320	4 ,80
30	31 ,10	130	15 ,10	230	7 ,75	330	4 ,50
40	29 ,00	140	14 ,50	240	7 ,50	340	4 ,20
50	27 ,00	150	13 ,90	250	7 ,00	350	4 ,00
60	25 ,10	160	12 ,50	260	6 ,50	360	3 ,80
70	23 ,75	170	11 ,90	270	6 ,00		
80	22 ,00	180	10 ,75	280	5 ,75		
90	20 ,10	190	10 ,00	290	5 ,40		

Bezeichnen wir nun die Weite bei der ersten Schwingung mit e_0, die bei der nten Schwingung mit e_n und ist m der Exponent der geometrischen Reihe, wenn wir die Weite von einer Schwingung bis zur folgenden rechnen, so ist $e_n = e_0.m^n$ oder $\frac{e_n}{e_0} = m^n$, und allgemein, wenn wir zwei Glieder e_a und e_{a+n} vergleichen, so wird stets $\frac{e_{a+n}}{e_a} = m^n$. Nehmen wir in der obigen Tafel die Weiten e_0, e_{100}, e_{200} und e_{300}, so wird

$$\frac{e_{100}}{e_0} = \frac{19}{40} = 0{,}4750 = m^{100}$$
$$\frac{e_{200}}{e_{100}} = \frac{9{,}5}{19} = 0{,}5000 = m^{100}$$
$$\frac{e_{300}}{e_{200}} = \frac{5{,}25}{9{,}5} = 0{,}5556 = m^{100};$$

es geht hieraus also deutlich hervor, daß m keine constante Zahl ist, sondern daß sie bei großen Elongationen etwas kleiner ist, sich aber immer mehr einer festen Grenze nähert. Da jedoch die Correction wegen der Weite des Bogens besonders bei größeren Weiten wichtig wird, so gibt Hansteen den Rath, den Werth von m aus den ersten 100 Schwingungen zu nehmen. Um zu übersehen, wie groß der Fehler ist, welcher auf diese Weise begangen wird, theile ich noch einen Versuch von Hansteen mit, bei welchem die Weite im Anfange 20° betrug:

Schwingung	e Beobachtet	e Berechnet	Unterschied	e Berechnet	Unterschied
0	20°,00	20°,00	0	20°,00	0
10	18 ,25	18 ,61	+ 0,36	18 ,76	+ 0,51
20	17 ,75	17 ,32	— 0,43	17 ,60	— 0,15
30	16 ,00	16 ,12	+ 0,12	16 ,51	+ 0,51
40	15 ,25	15 ,00	— 0,25	15 ,48	+ 0,23
50	14 ,30	13 ,96	— 0,34	14 ,53	+ 0,23
60	13 ,67	13 ,00	— 0,67	13 ,62	— 0,05
70	12 ,25	12 ,10	— 0,15	12 ,78	+ 0,53
80	11 ,67	11 ,26	— 0,41	11 ,99	+ 0,32
90	10 ,25	10 ,48	+ 0,23	11 ,25	+ 1,00
100	9 ,75	9 ,75	0	10 ,55	+ 0,80
150	7 ,20	6 ,81	— 0,39	7 ,66	+ 0,46
200	5 ,50	4 ,75	— 0,75	5 ,56	+ 0,06
250	4 ,20	3 ,32	— 0,88	4 ,04	— 0,16
300	3 ,20	2 ,32	— 0,88	2 ,94	— 0,26
350	2 ,00	1 ,62	— 0,38	2 ,13	+ 0,13

Nehmen wir hier die Änderung von m für die ersten 100 Schwingungen, so wird $m = 0{,}99284$; nehmen wir aber seinen Werth nach der ersten und letzten Beobachtung, so wird $m = 0{,}99362$. Bei den in der dritten Spalte berechneten Größen ist der erste, bei den in der fünften Spalte enthaltenen der letzte Werth von m genommen. Die in der dritten Spalte enthaltenen Größen zeigen eine weit bessere Übereinstimmung, besonders bei den großen Bogen.

Von diesem Gesetze ausgehend, läßt sich die Zeit einer Pendelschwingung sehr leicht auf die bei unendlich kleinen Bogen reduciren. Bezeichnen wir nämlich den Elongationswinkel mit e, so wird $\frac{b}{l} = \sin\text{vers}\, e$, und mithin geht die Reihe (1) in folgende über:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\frac{\sin\text{vers}\, e}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\frac{\sin\text{vers}^2 .e}{4} + \ldots\right)$$

$$= \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\frac{1 - \cos e}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\frac{(1 - \cos e)^2}{4} + \ldots\right)$$

Nun ist bekanntlich $1 - \cos 2e = 2\sin^2 .e$, mithin wird

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}.\sin^2\frac{e}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\sin^4\frac{e}{2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\sin^6\frac{e}{2} + \ldots\right).$$

Ist also t_1 die Zeit, welche dasselbe Pendel zu einer unendlich kleinen Oscillation erfodert, so ist

$$t_1 = t\left(1 + \frac{1}{2^2}.\sin^2\frac{e}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\sin^4\frac{e}{2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\sin^6\frac{e}{2} + \ldots\right).$$

Ist die Weite e nicht sehr groß, so können wir die höheren Potenzen von $\sin\frac{e}{2}$ übersehen und es wird dann

$$t_1 = t\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{e}{2}\right).$$

Wenn aber diese Weite klein ist, so können wir ohne Fehler $\sin\frac{1}{2}e = \frac{1}{2}\sin e$ setzen und dadurch wird

$$t_1 = t\left(1 + \frac{\sin^2 e}{16}\right).$$

Wenn demnach unser Pendel bei der Weite e eine Schwingung macht, so macht es in derselben Zeit t $1 + \frac{\sin^2 e}{16}$ unendlich kleine Schwingungen. Da unser Bogen nach und nach kleiner wird und successive in $e_1, e_2, e_3 \ldots e_n$ übergeht, so wir die Zahl der Schwingungen in der Zeit t respective

$$1 + \frac{\sin^2 e_1}{16},\ 1 + \frac{\sin^2 e_2}{16},\ 1 + \frac{\sin^2 e_3}{16} + \ldots\ 1 + \frac{\sin^2 e_n}{16}$$

Wenn sich demnach der Bogen von e bis e_n verkleinert hat und wenn ferner in einer gegebenen Zeit n Schwingungen machte, so würde es während derselben Zeit

$$n + \frac{\sin^2 e_1}{16} + \frac{\sin^2 e_2}{16} + \frac{\sin^2 e_3}{16} + \ldots\ \frac{\sin^2 e_n}{16} \qquad (2)$$

gemacht haben. Sind die Bogen nicht groß und nehmen dieselben in geometrischer Reihe ab, so können wir dieses Gesetz der Abnahme ohne Fehler auch auf die Sinus ausdehnen. Hatte also der Bogen anfänglich die Weite e und nach n Schwingungen die Weite e_n, so können wir ohne Fehler annehmen, es sei

$$\sin e_n = \frac{\sin e}{K^n},$$

wo K eine, jedem Pendel zugehörige, constante Größe ist. Wir können demnach jedes Glied der obigen Reihe (2) als eine Function des ersten ansehen, und bezeichnet man daher die Summe der unendlich kleinen Schwingungen mit S, so geht die Reihe (2) in die folgende über:

$$S = n + \frac{\sin^2 e_1}{16}\left[1 + \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} + \ldots + \frac{1}{K}n - 1\right].$$

Die Summe der in Parenthese eingeschlossenen geometrischen Reihe wird

$$\Sigma = \frac{(K^n - 1)K}{(K - 1)K^n}.$$

Da K in der Regel wenig von der Einheit verschieden ist, so können wir ohne Fehler setzen

$$\Sigma = \frac{(K^n - 1)}{(K - 1)K^n},$$

und mithin wird die Summe der Reihe (2)

$$S = n + \frac{\sin^2 e_1}{16} . \frac{\frac{\sin e_1}{\sin e_n} - 1}{\left[\left(\frac{\sin e_1}{\sin e_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right]\frac{\sin e_1}{\sin e_n}}$$

$$= n + \frac{\sin e_1}{16} . \frac{\sin e_1 - \sin e_n}{\left(\frac{\sin e_1}{\sin e_n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Wenn die Bogen klein sind und sich nur langsam ändern, so ist $\frac{\sin e_1}{\sin e_n}$ eine Größe, welche wenig von der Einheit abweicht; wenn wir daher gemeine Logarithmen nehmen und den Modulus derselben $M = 2{,}302585$ nehmen, so wird bekanntlich

$$\left(\frac{\sin e_1}{\sin e_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{M}{n}\log\frac{\sin e_1}{\sin e_n} + \frac{M^2}{1.2}\log^2\frac{\sin e_1}{\sin e_n} + \ldots.$$

Da $\frac{\sin e_1}{\sin e_n}$ wenig von 1 abweicht, so ist sein Logarithmus nahe gleich Null, und wenn wir die höheren Potenzen desselben übersehen, und nur bei der ersten stehen bleiben, so wird

$$S = n\frac{\sin e_1}{16}\frac{(\sin e_1 - \sin e_n)}{\left[1 + \frac{M}{n}\log\frac{\sin e_1}{\sin e_n} - 1\right]}$$

$$= n + \frac{n\sin e_1(\sin e_1 - \sin e_n)}{16M(\log\sin e_1 - \log\sin e_n)}.$$

Sind die Bogen sehr klein, so können wir mit Borda den mittleren Bogen $\frac{e_1 + e_n}{2}$ annehmen und

$$\sin e = \frac{\sin e_1 + e_n}{2} = \frac{1}{2}\sin(e_1 + e_n)$$

$$\sin e_1 - \sin e_n = \sin(e_1 - e_n)$$

setzen. Dadurch wird

$$S = n + \frac{n\sin(e_1 + e_n)\sin(e_1 - e_n)}{32M(\log\sin e_1 - \log\sin e_n)}.$$

Dieser Formel bediente sich Biot[5]) bei der Reduction seiner Messungen, dagegen nahm Borda[6]) im Nenner statt der Sinus die Bogen selbst, und gibt die Gleichung

$$S = n + \frac{n\sin(e_1 + e_n)\sin(e_1 - e_n)}{32M.\log\frac{e_1}{e_n}}.$$

Bliebe der Bogen unverändert, wäre also $e_1 = e_n$, so reducirte sich dieser Ausdruck auf $\frac{0}{0}$; die Unbestimmtheit verschwindet ganz, wenn wir die ursprüngliche Gleichung

$$t_1 = t\left(1 + \frac{\sin^2 e}{16}\right).$$

behalten. Andere Analytiker stützen sich bei dieser Reduction auf die später zu betrachtende Schwingung in der Cykloide; doch hat Sabine[7]) alle bisherigen Reductionsformeln in Zweifel gezogen. Spätere Versuche von Baily[8]) indessen machen diese Einwendung wenig wahrscheinlich; jedoch räth Letzterer, zur Vermeidung jedes Irrthums, die anfängliche Weite nicht größer, als höchstens 1° zu nehmen, ja er glaubt, daß selbst diese noch zu groß sei.

Bei dem eigentlichen Pendel, wo man in der Regel mit einer kleinen Weite anfängt und wo diese sich nur langsam ändert, genügen die eben entwickelten Annäherungen vollkommen. Ein anderes ist es aber bei manchen andern Oscillationsbewegungen, z. B. denen einer Magnetnadel, welche um die mittlere Richtung der wirksamen Kräfte oscillirt. In diesem Falle hat das Pendel nur eine geringe Länge; einem kleinen Winkel entspricht also auch nur ein kleiner Bogen, und um die dadurch entstehenden Beobachtungsfehler zu vermeiden, muß man mit einer größeren Weite anfangen, zumal da bei den kleineren Apparaten dieser Art die Bogen sich schnell vermindern. Für diesen Fall hat Hansteen die Reductionsformeln ausführlich entwickelt und ich will hier die wichtigsten Resultate seiner Arbeit mittheilen. Ist e die Weite und t und t_1 die Zeit einer Schwingung eines Pendels im unendlich kleinen Bogen und dem von der Weite e, so ist

$$t^1 = t\left[1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{e}{2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}.\sin^4\frac{e}{2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\sin^6\frac{e}{2} + ..\right]$$

Wir setzen hier die Summe der Reihe mit Ausnahme des ersten Gliedes gleich R, so wird

$$t^1 = t(1 + R).$$

Der Schwingungsbogen verwandle sich nach der Reihe in $e_0, e_1, e_2 \ldots e_n$, und es werden die entsprechenden Summen der Reihe $R_0, R_1, R_2 \ldots R_n$, die Zeiten einer Schwingung in diesen Weiten $t^1_0, t^1_1, t^1_2, t^1_3 \ldots$, während die einer unendlich kleinen Schwingung t ist, so erhalten wir für die Werthe der Schwingungsdauer folgende Gleichungen:

$$t^1_0 = t(1 + R_0)$$
$$t^1_1 = t(1 + R_1)$$
$$t^1_2 = t(1 + R_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t^1_n = t(1 + R_n),$$

setzen wir $t^1_0 + t^1_1 + t^1_2 \ldots + t^1_n = \Sigma(t^1) = T$

$R_0 + R_1 + R_2 \ldots + R_n = \Sigma(R)$,

so wird $T = t[n + \Sigma(R)]$

und hieraus ergibt sich für die gesuchte Dauer einer unendlich kleinen Schwingung

$$t = \frac{T}{n + \Sigma(R)}.$$

Um hier den Werth von $\Sigma(R)$ zu bestimmen, stützen wir uns auf das vorher entwickelte Gesetz, daß die Bogen in geometrischer Reihe abnehmen, wenn die Zahl derselben in arithmetischer wächst; sind daher e_0 und e_n beobachtet, so ist $e_n = m^n e_0$ und

$$m = \frac{\log.e_n - \log.e_0}{n}.$$

Da uns hierdurch m für das benutzte Pendel gegeben ist, so setzen wir für die Bogen der Reihe nach ihre Werthe e, me, m^2e, m^3e .... und somit wird

$$\Sigma(R) = \frac{1^2}{2^2}\left[\sin^2\frac{e}{2} + \sin^2\frac{me}{2} + \sin^2\frac{m^2e}{2} \ldots + \sin^2\frac{m^{n-1}e}{2}\right]$$

$$+ \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\left[\sin^4\frac{e}{2} + \sin^4\frac{me}{2} + \sin^4\frac{m^2e}{2} + \ldots + \sin^2\frac{m^{n-1}e}{2}\right]$$

$$+ \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}\left[\sin^6\frac{e}{2} + \sin^6\frac{me}{2} + \sin^6\frac{m^2e}{2} + \ldots \sin^6\frac{m^{n-1}e}{2}\right]$$

$$+ \ldots\ldots$$

5) *Biot* et *Arago*, Récueil d'Observations géodesiques etc. p. 455. 6) Base du système métrique. p. 354. 7) Phil. Trans. 1831. p. 461. 8) Das. 1832. p. 468.

Ist nun der anfängliche Bogen $e = 40^0$, so ist

$$\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}.\sin^6\frac{e}{2} = 0{,}000156,$$

und da man selten mit so großen Bogen anfängt, so können wir in diesen Reihen die sechsten Potenzen ganz fortlassen, da ihr Einfluß auf das Endresultat verschwindet. Wenden wir nun die bekannte Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2..6.7} + \ldots.$$

so wird

$$\sin\frac{e}{2} = \frac{e}{2} - \frac{e^3}{48} + \frac{e^5}{3840} - \ldots.$$

$$\sin^2\frac{e}{2} = \frac{e^2}{4} - \frac{e^4}{48} + \ldots.$$

$$\sin^4\frac{e}{2} = \frac{e^4}{16} - \ldots.$$

Wenn wir also nicht über die vierte Potenz von e hinausgehen, so wird

$$\Sigma R = \frac{e^2}{16}(1 + m^2 + m^4 + \ldots. + m^{2n-2})$$
$$- \frac{1}{4}.\frac{e^4}{48}(1 + m^4 + m^8 + \ldots. + m^{4n-4})$$
$$+ \frac{9}{64}.\frac{e^4}{16}(1 + m^4 + m^8 + \ldots. + m^{4n-4}).$$

Es ist aber bekanntlich

$$1 + m^2 + m^4 + \ldots + m^{2n-2} = \frac{1 - m^{2n}}{1 - m^2}$$

$$1 + m^4 + m^8 + \ldots + m^{4n-4} = \frac{1 - m^{4n}}{1 - m^4}.$$

Mithin wird

$$\Sigma(R) = \frac{e^2}{16}.\frac{1 - m^{2n}}{1 - m^2} + \frac{11 e^4}{3072}\,\frac{1 - m^{4n}}{1 - m^4}$$
$$= \left(\frac{e}{4}\right)^2 \frac{1 - m^{2n}}{1 - m^2} + \frac{11}{12}\left(\frac{e}{4}\right)^4 \frac{1 - m^{4n}}{1 - m^4}.$$

und darnach

$$T = t\left[n + \left(\frac{e}{4}\right)^2 \frac{1 - m^{2n}}{1 - m^2} + \frac{11}{12}\left(\frac{e}{4}\right)^4 \frac{1 - m^{4n}}{1 - m^4}\right].$$

In diesem Ausdrucke hängt offenbar der Factor m von dem Widerstande ab, welchen die Luft und die übrigen Theile des Apparates der Bewegung entgegensetzen und er ist also für jedes Instrument ein anderer. Wenn man daher Versuche anstellen will, so muß man bei demselben Apparate zuerst durch eine Reihe genauer Messungen den Werth von m aufsuchen, und nachdem dieses geschehen ist, kann man sich Hilfstafeln entwerfen, durch welche die Berechnung leicht vorgenommen werden kann. Ist nämlich die Elongation e im Anfange des Versuches gleich μ Graden, so ist

$$\left(\frac{e}{4}\right)^2 = \mu^2\left(\frac{1^0}{4}\right)^2 = \mu^2 . 0{,}000019039 = \mu^2\alpha.$$

Wird nun gesetzt

$$\left(\frac{e}{4}\right)^2.\frac{1 - m^{2n}}{1 - m^2} = \mu^2\alpha.\frac{1 - m^{2n}}{1 - m^2} = A\mu^2,$$

so ist

$$\frac{11}{12}.\left(\frac{e}{4}\right)^4.\frac{1 - m^{4n}}{1 - m^4} = \frac{11}{12}.\frac{1 + m^{2n}}{1 + m^2}.\alpha.A\mu^4 = AB\mu^4,$$

wenn

$$A = \frac{1 - m^{2n}}{1 - m^2}.\alpha,\quad B = \frac{11}{12}\,\frac{1 + m^{2n}}{1 + m^2}.\alpha,$$

folglich

$$T = t(n + A\mu^2 + AB\mu^4).$$

Beobachtet man mit Hansteen jede pte Schwingung, und nimmt ein Mittel von r verschiedenen Werthen von n Schwingungen, so wird

$$T = t\left(n + A\mu^2\,\frac{1 - m^{2rp}}{r(1 - m^{2p})} + AB\mu^4.\frac{1 - m^{4rp}}{r(1(-m^{4p})}\right).$$

Hat man nun den Werth von m bestimmt, so kann man sich dafür eine Tafel entwerfen, welche für verschiedene Größen von n die Werthe von A und B enthält. Hansteen, welcher mit verschiedenen Magneten Versuche anstellte, fand den Werth m zwischen 0,9922 und 0,9930, und er gibt in seiner Abhandlung zwei solche Täfelchen für log A und log B zwischen m = 0,9910 und m = 0,9940 und zwischen n = 10 und m = 40. Mir scheint es jedoch zweckmäßiger, daß ein jeder Beobachter sich für seinen Apparat eine solche Tafel berechne.

3) Schwingungen in der Cykloide. Galilei, welcher zuerst die Gesetze des Pendels untersuchte, glaubte, daß die Zeit einer Schwingung nur von seiner Länge abhänge und daß die Weite des Bogens gar keinen Einfluß darauf habe. Als aber später Huygens diese Bewegung genauer betrachtete, zeigte die Theorie, daß dieser Isochronismus nur nahe stattfände und daß größere Bogen eine etwas längere Zeit zu einer Oscillation erfoderten, als kleinere. Er machte aber die interessante Entdeckung, daß ein Pendel, bei welchem der schwere Punkt keinen Kreis, sondern eine Cykloide beschreibe, stets dieselbe Zeit zu einer Schwingung gebrauchte, möchte der Bogen groß oder klein sein, und diese Curve, mit welcher sich die Mathematiker des 17. Jahrhunderts soviel beschäftigt hatten, erhielt dadurch ein neues Interesse für die letzteren.

Obgleich die wichtigsten Eigenschaften der Cykloide bereits unter dem entsprechenden Artikel betrachtet sind, scheint es doch zweckmäßig, hier kurz an dasjenige zu erinnern, was zu vorliegender Untersuchung nöthig ist. Es sei AM (Fig. 4) eine gerade Linie, welche in A von einem gegebenen Kreise berührt wird. Dieser Kreis werde nun an der geraden Linie fortgerollt, so beschreibt der Punkt A die Cykloide AA_1A_2M. Ist nun der Punkt A etwa nach A_1 gekommen, so ist offenbar der Kreisbogen A_1B gleich der geraden AB; liegen der Punkt A_2 und der Berührungspunkt des Kreises D in einem Durchmesser A_2D, so ist A_2 derjenige Punkt der Cykloide, welcher von der Linie AM den größten Abstand hat, bei weiterer Fortbewegung des Kreises nähert sich der Punkt A wieder der Linie AM und kommt mit dieser in M zusammen. Der vorher erwähnte Durchmesser des Kreises A_2D theilt die Cykloide in zwei gleiche Hälften. Offenbar ist AM gleich der ganzen und AD gleich der halben

Peripherie des erzeugenden Kreises. Ziehen wir nun aus dem Punkte A_1 die Linie $A_1H \parallel AM$, verbinden ebenso die Mittelpunkte C_1 und C_2 durch die gerade Linie C_1C_2, so ist $C_1C_2 \parallel AM$, ziehen ferner die Sehnen A_1B und ID, sowie den Halbmesser IC_2, so läßt sich die Gleichung dieser Curve sehr leicht bestimmen.

Es ist $FC_1 \mathrel{\overline{\underline{\parallel}}} HC_2$, $FA \mathrel{\underline{\parallel}} C_1C_2 \mathrel{\underline{\parallel}} BD$, $FH = BD$, $A_1F = IH$, folglich $A_1B \mathrel{\underline{\parallel}} ID$, mithin

Bogen A_1B = Bogen ID = gerade Linie AB
Bogen A_2ID — Bogen ID = AD — AB, d. h.
Bogen $A_2I = BD = A_1I$.

Es sei nun C_2 der Anfangspunkt der Coordinaten, $C_2H = x$, $A_1H = y$, so kommt es darauf an, die Relation zwischen x und y anzugeben. Es ist $HA_1 = HI + A_1I$. Ist nun l der Halbmesser des Kreises, so ist $HI = \sqrt{(l^2 - x^2)}$, $A_1I = BD$ = Bogen A_2I, folglich

$$y = \sqrt{(l^2 - x^2)} + \text{Bogen } A_2I.$$

Aber A_2I ist der Bogen, dessen Cosinus C_2H ist, bezeichnen wir diesen Bogen mit arc. $\cos\frac{x}{l}$, so ist

$$y = \sqrt{(l^2 - x^2)} + \text{arc.}\cos\frac{x}{l}.$$

Ein Pendel sei nun so eingerichtet, daß es sich auf der Cykloide bewegt und zwischen den Punkten A und M hin und her oscillirt. Ist es dabei von A nach A_1 gekommen, so ist hier seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = 2\sqrt{g.DH}.$$

Hier ist ds das Element des Bogens, wofür wir seinen Werth $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ setzen wollen. Nun ist in der Cykloide

$$dy = \frac{-xdx}{\sqrt{(l^2 - x^2}} - l\frac{dx}{\sqrt{(l^2 - x^2}} = \frac{-(x + l)dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)}}$$

$$dy^2 = \frac{(x + l)^2dx^2}{l^2 - x^2},$$

mithin

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{(x + l)^2dx^2}{l^2 - x^2} = \frac{2l}{l - x}dx^2$$

$$ds = \sqrt{\frac{2l}{l - x}}.dx.$$

Ferner ist $DH = DC_2 + C_2H = l + x$, mithin wird

$$dt = \frac{ds}{2\sqrt{g.DH}} = \frac{\sqrt{2l}.dx}{2\sqrt{g(l - x)(l + x)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2l}{g}}.\frac{dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)}}$$

mithin $$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{2l}{g}}\int\frac{dx}{\sqrt{(l^2 - x^2)}}.$$

Dieses Integral gilt von $x = -l$ bis $x = +l$, sein Werth ist also von arc. cos + 1 bis arc. cos — 1 genommen, mithin gleich π und es wird also

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

dieser Werth von t ist derselbe, welchen wir für unendlich kleine Schwingungen eines kreisförmigen Pendels von der Länge l gefunden haben, und völlig unabhängig von der Höhe DH, sodaß es völlig gleichgültig ist, wie groß der Bogen ist, durch welchen das Pendel oscillirt.

Obgleich es für die Construction der Uhren völlig gleichgültig ist, ob das Pendel durch einen großen oder kleinen Bogen schwingt, wofern es nur stets dieselbe Weite behält, so suchte doch Huygens ein solches Pendel einzurichten, welches sich in einer Cykloide bewegte; man hat jedoch in der Folge die ganze sehr sinnreiche Idee als unpraktisch aufgegeben. Befestigen wir nämlich in A einen Faden, dessen Länge gleich dem Bogen AA_1A_2 ist und legen ihn straff gespannt an die Cykloide, bringen ferner an dem bei A_2 liegenden Punkte des Fadens einen Stift an, und bewegen nun diesen Stift abwärts von A_2 nach der linken Seite, während der Faden stets gespannt bleibt, so beschreibt der Stift bis zu dem Punkte, wo der Faden senkrecht auf AM steht, eine halbe Cykloide, welche genau gleich AA_1A_2 ist (s. d. Art. **Evolute**). Um daher ein Pendel dahin zu bringen, cykloidale Bogen zu beschreiben, schneidet Huygens aus Blech zwei halbe Cykloiden, bei denen der Halbmesser des erzeugenden Kreises gleich l ist und legt diese bei dem Aufhängepunkte des Pendels A zusammen; besteht letzteres nun aus einem biegsamen Faden, welcher sich stets genau an die Cykloiden anlegt, so beschreibt es eine Cykloide.

Über mehre andere mechanische Eigenschaften der Cykloide s. d. Art **Fall** und **Tautochrone**.

4) Konisches Pendel. Nachdem Huygens sehr ausführlich die Gesetze des in einer Verticalebene schwingenden Pendels betrachtet hatte, deutete er noch ganz kurz die Gesetze des Pendels an, welches so aufgehängt war, daß es bei seiner Bewegung die Oberfläche eines Kegels beschrieb[9]. Es sei CA (Fig. 5) ein Pendel in C dergestalt aufgehängt, daß es bei der Bewegung nicht gegen die Verticale CS zurückfällt, sondern einen Kegel beschreibt, dessen Axe CS ist. Bewegungen dieser Art zeigt ein jedes aus einem Faden bestehende Pendel, an dessen unterem Theile etwa eine Kugel hängt und welchem man einen nicht gegen die Verticale durch den Aufhängepunkt gegebenen Stoß gibt, nachdem man es aus dieser Verticale entfernt hat. Betrachtet man ein solches Pendel, so wird der Winkel ACS wegen des Widerstandes der Luft nach und nach kleiner, und sowie das Pendel gegen die Verticale zurückkehrt, wird auch die Zeit, während welcher der ganze Kegel beschrieben wird, eine andere. Wir wollen indessen hier diese Verminderung des Winkels an der Spitze des Kegels übersehen und annehmen, der Winkel ACS, also die Höhe des Kegels CS, bleibe unverändert.

Betrachten wir dieses Pendel genauer, so kommen dabei drei Kräfte vor, welche auf die Fortdauer der Bewegung einwirken, nämlich die Schwere, welche das Pendel gegen die Verticale CS zurückzuführen strebt, die Centrifugalkraft, welche das Pendel von der Verticale zu entfernen sucht und endlich die Spannung des Fadens.

9) Horolog. oscill. Pars V.

Die Resultirende der beiden ersten Kräfte muß nothwendig mit der Richtung des Fadens zusammenfallen, zerfällen wir daher die Resultirende AE nach der horizontalen und verticalen Richtung, so gibt AB die Größe der Schwungkraft, dagegen AD die Größe der Gravitation an. Bezeichnen wir die Centrifugalkraft mit f, die Gravitation mit 2g, die Länge des Pendels CA mit l, die Höhe des Kegels CS mit a, den Halbmesser des vom Pendel beschriebenen Kreises AS mit r und endlich die Zeit eines Umlaufes mit t, so lassen sich die einzelnen Umstände bei dieser Bewegung auf folgende Art bestimmen. In dem Parallelogramme ABDE verhält sich

$$f : 2g = AB : AD = AS : CS = r : a.$$

Die Centrifugalkraft verhält sich direct wie das Quadrat der Geschwindigkeit und umgekehrt wie der Halbmesser des durchlaufenen Kreises, es ist also

$$f = \frac{r^2}{v}.$$

Aber es ist $v = \frac{2\pi r}{t}$, wo π die Ludolphische Zahl bezeichnet, folglich wird

$$f = \frac{4\pi^2 r^2}{t^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{t^2},$$

folglich verwandelt sich die obige Proportion in

$$\frac{4\pi^2 r}{t^2} : 2g = r : a$$

und hieraus folgt

$$t^2 = \frac{4\pi^2 ra}{2gr} = \frac{2\pi^2 a}{g}$$

$$t = \pi \sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Bei einem zweiten Pendel, bei welchem a_1 die Höhe des Kegels und t_1 die Zeit eines Umlaufes ist, wird

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{2a_1}{g}},$$

mithin verhält sich

$$t : t_1 = \sqrt{a} : \sqrt{a_1},$$

die Umlaufszeiten verhalten sich also wie die Quadratwurzeln aus den Höhen der Kegel und die Länge des Pendels ist völlig gleichgültig.

Nehmen wir ein gewöhnliches Pendel von der Länge **a**, so ist die Zeit eines unendlich kleinen Schwunges $t = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$, also die Dauer von zwei Oscillationen $2t = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, ein konisches Pendel gebraucht also zu einem Umlaufe die doppelte Zeit, welche ein gewöhnliches Pendel zu einer unendlich kleinen Oscillation gebraucht, wenn seine Länge gleich der Höhe des Kegels ist.

Statt der Höhe des Kegels läßt sich in den Ausdruck für die Dauer einer Schwingung auch die Länge des Pendels l setzen. Bezeichnen wir den Winkel ACS mit α, so ist $a = l\cos\alpha$, mithin

$$t = \pi\sqrt{\frac{2l\cos\alpha}{g}}.$$

Die Gesetze dieses Pendels sind also sehr einfach und ergeben sich mit Leichtigkeit aus den Gesetzen der Centrifugalkraft, aus denen sie eine einfache Folgerung sind, weshalb dieses Pendel auch häufig Centrifugalpendel genannt wird. Bei der Construction der Uhren ist es selten angewendet worden und die Schriftsteller über Mechanik übergehen es daher nicht selten. So deutet Poisson die Principien an, auf denen die Theorie desselben beruht und setzt dann hinzu, wie die Gesetze seiner Bewegung gefunden werden können. Nous nous dispenserons d'effectuer ces calculs, vû que le pendule à oscillations coniques n'est d'aucun usage dans la pratique, où l'on fait toujours en sorte que les oscillations soient renfermés dans un même plan [10]). Indessen hatte bereits Huygens eine Uhr construirt, bei welcher ein solches Pendel zur Regulirung der Bewegung diente, obgleich er selbst bemerkt, daß Uhren mit gewöhnlichen Pendeln weit häufiger verfertigt seien. Plura tamen hujus quoque generis (mit konischen Pendeln) nec sine successu constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque aequabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio omnibusque aliis, subsultim quasi feratur; diese Bemerkung von Huygens zeigt nicht nur den wesentlichen Unterschied beider Pendel bei der Construction von Uhren, sondern zugleich die Fälle, in denen ein konisches vorgezogen werden müsse. Bei einer Secundenuhr z. B. ist die kleinste Zeiteinheit, welche durch unmittelbare Beobachtung gegeben wird, eine Secunde, kleinere Zeittheile müssen durch Schätzung bestimmt werden. Bei der Uhr mit konischem Pendel aber läßt sich die Secunde leicht in Tertien theilen, wenn man das Pendel so einrichtet, daß es in einer Secunde einen Umlauf vollendet, und dann die Peripherie des Kreises in 60 Theile theilt. Huygens selbst zeigte, wie das Pendel aufgestellt werden müßte, wenn es mit einer Uhr verbunden werden sollte. Er nahm dabei sogar auf den Umstand Rücksicht, wie man der Uhr einen gleichförmigen Gang verschaffen könnte, wenn das Pendel mit der Axe des Kegels bald einen größeren, bald einen geringeren Winkel machte. Wenn man indessen das Pendel so aufhängt, daß es mit der Axe des Kegels stets denselben Winkel bildet, so ist eine solche Vorrichtung nicht nöthig. Später hat der Uhrmacher Pfaffius in Wesel Uhren mit solchen Pendeln construirt [11]) und namentlich Tertienuhren verfertigt, welche einen sehr guten Gang haben; ja es hat derselbe sogar mehre Vorzüge dieser Uhren vor den gewöhnlichen gefunden, namentlich den, daß die Uhr ein weit geringeres Gewicht als Triebwerk erforderte, als eine mit gewöhnlichem Pendel.

5) Zusammengesetztes Pendel. Bei den bisherigen Untersuchungen über den Einfluß der Schwere auf die Schwingungsdauer eines gegebenen Pendels haben wir den idealen Fall betrachtet, wo ein schwerer

10) Traité de Mécanique. §. 298. 11) Gilbert's Annalen. XVI, 494.

Punkt an einem nicht schweren Faden befestigt war; die Construction eines solchen Pendels aber ist unmöglich, denn nehmen wir einen solchen Faden noch so dünn, so hat er doch stets ein meßbares Gewicht. Alle Pendel, mit denen wir Versuche anstellen können, bestehen aus einem Systeme schwerer Punkte, deren Abstand von dem Aufhängepunkte ungleich ist. Betrachten wir die Bewegung eines jeden dieser Punkte einzeln, so können wir ihn ansehen als den schweren Punkt des Pendels, während die übrigen nur zur Verbindung von ihm mit der Drehungsaxe dienen. So besteht ein physisches oder zusammengesetztes Pendel aus einer großen Anzahl einfacher Pendel, die aber so mit einander verbunden sind, daß das eine von ihnen nicht oscilliren kann, ohne daß alle übrigen sich um denselben Winkel aus der Verticale entfernen. Mit Ausnahme eines einzigen hat keins dieser Pendel die Geschwindigkeit, welche es haben würde, wofern es allein vorhanden wäre. Denn da sich diese Geschwindigkeit mit seinem Abstande von der Drehungsaxe ändert, so erhalten die Punkte, welche in der Nähe der letztern liegen, durch Einwirkung der entfernteren eine Geschwindigkeit, welche kleiner ist, als wenn sie allein vorhanden wären und umgekehrt. Soviel ist aber sogleich einleuchtend, daß die Dauer einer Schwingung eine bestimmte sein muß, wofern alle Punkte des Systemes dieselbe gegenseitige Lage behalten und daß ein einfaches Pendel aufgefunden werden kann, welches dieselbe Winkelgeschwindigkeit hat, als das zusammengesetzte. Diese Aufgabe wurde bereits von Huygens gelöst; wir wollen aber statt des von ihm befolgten geometrischen Verfahrens das analytische anwenden, weil dieses weit schneller zum Ziele führt.

Um die Gesetze der Bewegung in diesem Falle zu finden, betrachten wir allgemein ein System von Punkten, auf welche die verschiedenen beschleunigenden Kräfte dergestalt wirken, daß sich das ganze System mit veränderlicher Geschwindigkeit um eine Axe Az (Fig. 6) dreht; jeder dieser Punkte m beschreibt um diese Axe einen Kreis mno, dessen Ebene senkrecht auf der Axe steht und durch dessen Mittelpunkt die letztere geht. Es bezeichne Pm die beschleunigende Kraft, welche auf den Punkt einwirkt, deren Größe wir mit φ bezeichnen wollen; es sei ferner δ der Winkel, welchen die Richtung dieser Kraft auf die Ebene des Kreises projicirt im Angriffspunkte mit der Tangente Tm bildet. Wir zerfällen die Kraft φ in drei andere, eine, welche mit der Drehungsaxe parallel ist, eine zweite, welche darauf senkrecht steht, und eine dritte, welche in der Richtung des Elementes der beschriebenen Curve liegt. Offenbar sind die beiden ersten in Betreff auf die hervorgebrachte Bewegung ganz unwirksam, da sie durch den Widerstand der Axe aufgehoben werden und es bleibt nur die dritte Kraft übrig, deren Werth gleich $\varphi\cos\delta$ ist.

Es bezeichne nun ω die Winkelgeschwindigkeit, welche am Ende der Zeit t in der Entfernung 1 stattfindet und r die Entfernung Cm des Theilchens m von der Drehungsaxe, dann ist die Geschwindigkeit des Theilchens m am Ende der Zeit t gleich $r\omega$ und in der Zeit dt nimmt diese Geschwindigkeit um diejenige zu, welche die beschleunigende Kraft $\varphi\cos\delta$ in dem Theilchen in dieser Zeit erzeugen würde, d. h. die Geschwindigkeit wächst um die Größe $\varphi\cos\delta \,.\, dt$, wie sich von selbst aus der Gleichung für jede beschleunigende Kraft

$$\varphi\cos\delta = \frac{dv}{dt}$$

ergibt. Das Theilchen dm würde sich daher am Ende der Zeit $t + dt$ nach der Richtung der Tangente mit der Geschwindigkeit

$$r\omega + \varphi\cos\delta \,.\, dt$$

bewegen. Da es aber mit dem Systeme verbunden ist und sich unserer Foderung zufolge um die Axe Az drehen muß, so ist seine wahre Geschwindigkeit am Ende der Zeit $t + dt$ gleich

$$r\omega + rd\omega$$

da nun die Größe der Bewegung gleich dem Producte der Masse mit der Geschwindigkeit ist, so ist dieselbe für das Element dm am Ende der Zeit $t + dt$ gleich

$$(r\omega + rd\omega)dm.$$

Um hieraus die weiteren Umstände bei dieser Bewegung herzuleiten, stützen wir uns auf einen von d'Alembert erwiesenen allgemeinen Grundsatz der Mechanik. Ist nämlich ein System von Körpern, welche von beliebigen Kräften getrieben werden, mit einander verbunden, so wird der Zusammenhang dieser Körper einen jeden von ihnen nöthigen, eine Bewegung anzunehmen, welche verschieden von derjenigen ist, welche er im freien Zustande angenommen haben würde. Führt man nun neue Kräfte ein, welche auf den Körper im entgegengesetzten Sinne seiner wirklichen Bewegung wirken und diese zu vernichten im Stande sind, so wird ein Gleichgewicht erfolgen. In jedem Systeme müssen also die mitgetheilten und die wirklich stattfindenden, aber entgegengesetzten Sinnes genommenen Größen der Bewegung sich gegenseitig das Gleichgewicht halten, wenn man auf die Natur des Systemes Rücksicht nimmt. Dieser Satz, durch welchen eine jede Aufgabe der Bewegung auf eine für das Gleichgewicht zurückgeführt wird, verstattet im vorliegenden Falle eine leichte Lösung des Problems.

Es muß nämlich die Größe der Bewegung $(r\omega + rd\omega)dm$ mit der Größe $(r\omega + \varphi\cos\delta \,.\, dt)dm$ im Gleichgewichte stehen, wenn wir uns beide in entgegengesetzter Richtung angebracht denken. Nehmen wir daher ihre statischen Momente in Beziehung auf den Schwerpunkt, so müssen diese gleich sein. Da beide Kräfte senkrecht auf der Richtung des Halbmessers r stehen, so werden diese statischen Momente

$$(r^2\omega + r^2 d\omega)dm \text{ und } (r^2\omega + r\varphi\cos\delta dt)dm.$$

Lassen wir in beiden Ausdrücken die Größe $r^2\omega dm$ fort, so wird nach dem Satze von d'Alembert

$$r^2 d\omega dm = r^2\varphi\cos\delta dt dm$$

und da eben dieses von allen übrigen materiellen Theilchen gilt, welche irgend einen Abstand r von der Drehungsaxe haben, so wird

$$\int(r\varphi\cos\delta \,.\, dt \,.\, dm) = \int(r^2 d\omega dm).$$

Hier sind dt und die Winkelgeschwindigkeit $d\omega$ allen Theilen des Systemes gemein, und wir können sie daher beide als constante Factoren absondern; dadurch verwandelt sich diese Gleichung in

$$dt\int r\varphi\cos\delta\,.\,dm = d\omega\int r^2 dm$$

und hieraus

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\int r\varphi\cos\delta\,.\,dm}{\int r^2 dm} \qquad (A).$$

Hier gibt der Quotient $\frac{d\omega}{dt}$ die Relation zwischen der Winkelgeschwindigkeit und der Zeit an, und da nun in der Mechanik jede beschleunigende Kraft φ durch das Differentialverhältniß zwischen Geschwindigkeit v und der Zeit also $\frac{dv}{dt}$ bezeichnet wird, so können wir dieses Verhältniß $\frac{d\omega}{dt}$ der beschleunigenden Angularkraft gleich setzen. Die Größe $\int r\varphi\cos\delta dm$ gibt das statische Moment des Körpers in Beziehung auf den Schwerpunkt an (s. Schwerpunkt), dagegen $\int r^2 dm$, d. h. die Summe der Producte der Massen mit den Quadraten ihrer Abstände von der Drehungsaxe hat in der Mechanik den Namen des Momentes der Trägheit erhalten, weil jedes Theilchen dm sich vermöge der Trägheit mit der Kraft $r^2 dm$ weiter zu bewegen sucht (s. Rotation und Trägheit). Wir finden daher nach dem Ausdrucke (A) die beschleunigende Angularkraft, wenn wir das statische Moment der Resultirenden durch das Moment der Trägheit dividiren.

Dieser allgemeine Ausdruck läßt sich nun mit Leichtigkeit auf unser Problem anwenden. Auf eine ähnliche Art als die Aufgaben der Statik fester Körper dadurch gelöst werden, daß wir das Gewicht des Körpers in seinen Schwerpunkt verlegen, ebenso können wir uns im vorliegenden Falle vorstellen, daß die sämmtlichen schwingenden Punkte in einem einzigen Punkte vereinigt seien, welcher einen solchen Abstand von der Drehungsaxe hat, daß die Vorrichtung als einfaches Pendel gedacht, dieselbe Zeit zu einer Schwingung erfodert, als unser zusammengesetztes Pendel. Dieser Punkt, in welchem wir die ganze schwingende Masse angebracht denken, heißt Schwingungsmittelpunkt oder Mittelpunkt des Schwunges, und wenn wir ihn aufsuchen, reduciren wir das zusammengesetzte Pendel auf ein einfaches.

Um aus dem zusammengesetzten Pendel das einfache herzuleiten, bedienen wir uns des Ausdruckes

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\int r\varphi\cos\delta\,.\,dm}{\int r^2 dm}.$$

In unserm vorliegenden Falle sind die beschleunigenden Kräfte φ, φ_1, φ_2 ... einander gleich; setzen wir daher für dieselben ihren Werth 2g und sondern ihn als gemeinschaftlichen Factor ab, so wird

$$\frac{d\omega}{dt} = 2g\,\frac{\int r\cos\delta\,.\,dm}{\int r^2 dm}.$$

Betrachten wir nun ein Theilchen dm, dessen Abstand von der Axe gleich l ist, und bewegt sich dasselbe in der Zeit dt durch den Winkel $d\omega$, so ist sein Moment der Trägheit $l^2 m$, sein statisches Moment $2gl\cos\delta dm$ und mithin wird seine Angulargeschwindigkeit

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{2gl\cos\delta\,.\,dm}{l^2 m}.$$

Nehmen wir an, dieses Theilchen befände sich im Schwingungsmittelpunkt, der letztere habe also den Abstand l von der Drehungsaxe v, so erfodert es dieselbe Zeit zu einer Schwingung als das zusammengesetzte Pendel, die beiden Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeit werden also gleich, d. h. es ist

$$\frac{2g\int r\cos\delta dm}{\int r^2 dm} = \frac{2gl\cos\delta\,.\,dm}{l^2 m}$$

und hieraus folgt nach Fortlassung der gemeinschaftlichen Factoren

$$l = \frac{\int r^2 dm}{\int r dm}.$$

Hier ist $\int r^2 dm$ das Moment der Trägheit, $\int r dm$ das statische Moment des Schwerpunktes, beide in Beziehung auf die Axe gedacht. Um daher die Länge eines einfachen Pendels zu finden, welches zu einer Oscillation ebenso viel Zeit gebraucht, als ein zusammengesetztes, dividiren wir sein Moment der Trägheit durch sein statisches Moment. Bezeichnen wir demnach den Abstand des Schwerpunktes von der Axe mit a, seine Masse mit M, so wird

$$l = \frac{\int r^2 dm}{aM}.$$

Ehe wir diesen Ausdruck auf bestimmte Fälle anwenden, scheint es zweckmäßig zu zeigen, wie das Moment der Trägheit eines Körpers gefunden wird. Gewöhnlich wird dieses in Beziehung auf eine Axe genommen, welche durch den Schwerpunkt des Körpers geht; ist jedoch dieses bekannt, so läßt es sich leicht für eine jede mit der ersten parallele Axe finden.

Es seien deshalb GF und CK (Fig. 7) die beiden parallelen Axen, von denen die erstere durch den Schwerpunkt G des Körpers geht. Wir verlegen in den letztern den Anfang der drei Coordinaten und sehen GF als die Axe der z an. Durch irgend einen Punkt m des Körpers ziehen wir die Ebene mKF parallel mit der Ebene xy, so schneidet dieselbe die Axen GF und CK in den beiden Punkten F und K, und die Entfernungen des Punktes m von diesen Linien werden gemessen durch die Linien $mK = r$ und $mF = r_1$. Von dem Punkte m fälle man das Perpendikel mE auf die Ebene der xy. Da die beiden Dreiecke ECG und mKF parallel liegen und durch ihre Ecken parallele Linien gezogen sind, so sind beide gleich und wir können daher die Seiten des einen für die des andern nehmen. Nun setzen wir

$GD = \alpha$, $CD = \beta$ als Coordinaten von C

$GP = x$, $PE = y$ als Coordinaten von E

und außerdem sei a die Distanz beider Axen. Nun ist

$$a^2 = \alpha^2 + \beta^2,\quad r_1{}^2 = x^2 + y^2.$$

Betrachten wir ferner die gerade Linie CE, welche durch die beiden Punkte geht, deren Coordinaten respective x, y und α, β sind, so wird der Werth $r = CE$ gegeben durch die Gleichung

$$r^2 = C^2G^2 + EG^2 = (x-\alpha)^2 + (\beta - y)^2$$
$$= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2,$$

oder wenn wir für $x^2 + y^2$ und $\alpha^2 + \beta^2$ ihre Werthe setzen

$$r^2 = r_1{}^2 - 2\alpha x - 2\beta y + a^2.$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit dm, so wird

$$r^2 dm = r_1{}^2 dm - 2\alpha x dm - 2\beta y dm + a^2 dm$$
$$\int r^2 dm = \int r_1{}^2 dm - 2\alpha\int x dm - 2\beta\int y dm + a^2\int dm.$$

Nun sind x und y die Coordinaten des Elementes dm, dann sind die statischen Momente dieses Elementes in Beziehung auf die Axen x und y respective ydm und xdm, daher lassen sich die Coordinaten x_1 und y_1 des Schwerpunktes M bestimmen durch die Gleichungen

$$Mx_1 = \int x dm,\quad My_1 = \int y dm;$$

da aber unserer Annahme zufolge die Coordinaten vom Schwerpunkte aus gerechnet werden, so sind x_1 und y_1 gleich Null, $\int dm$ wird gleich der Masse des Körpers und $\int x dm = 0$, $\int y dm = 0$, folglich reducirt sich die obige Gleichung auf

$$\int r^2 dm = \int r_1{}^2 dm + Ma^2,$$

da hier $\int r^2 dm$ das Moment der Trägheit in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gehende Axe ist, so folgt, daß, wenn wir im Stande sind, dieses Moment zu bestimmen, wir auch stets dasjenige angeben können, welches für irgend eine andere mit der ersten parallelen Axe stattfindet. Bringen wir nun die eben erwähnte Gleichung unter die Form

$$\int r^2 dm = M\left[\frac{\int r_1{}^2 dm}{M} + a^2\right]$$

und bezeichnen $\frac{\int r_1{}^2 dm}{M}$ durch K^2 (wo also K^2 das auf den Schwerpunkt bezogene Moment der Trägheit dividirt durch die Masse ist), so wird unser Ausdruck für irgend eine Axe

$$\int r^2 dm = M(K^2 + a^2).$$

Wenden wir uns nun zu der oben entwickelten Gleichung

$$l = \frac{\int r^2 dm}{aM}$$

wo M die Masse des Körpers und a den Abstand des Schwerpunktes von der Schwingungsaxe bezeichnet, so ergeben sich daraus mehre Folgerungen, von denen wir einige der wichtigsten betrachten wollen. Wird der Körper um seinen Schwerpunkt in einer Richtung gedreht, welche senkrecht auf der Axe steht, so bleibt die Lage des Schwingungspunktes unverändert; denn da die Werthe $\int r^2 dm$ und die Lage des Schwerpunktes unverändert bleiben, so bleibt auch der Werth von l derselbe.

Wenn wir für ein gegebenes Pendel die Lage des Schwingungsmittelpunktes aufsuchen, darauf durch denselben eine Axe stecken und das Pendel um diese oscilliren lassen, so ist die Zeit einer Schwingung genau dieselbe und wir können daher in einem zusammengesetzten Pendel Axe und Schwingungspunkt willkürlich vertauschen, ohne daß die Länge des einfachen Pendels dadurch geändert wird. Dieser Satz, welcher bereits von Huygens aufgefunden wurde und dessen sich Kater in neueren Zeiten mit großem Erfolge bei Herleitung der Länge des einfachen Pendels bediente, ergibt sich mit großer Leichtigkeit aus dem Ausdrucke

$$l = \frac{\int r^2 dm}{aM}.$$

Beziehen wir hier nämlich das Moment der Trägheit nicht mehr auf den Schwerpunkt, sondern auf die Axe, so wird, da a den Abstand des Schwerpunktes von der Axe bezeichnet, das Moment der Trägheit

$$\int r^2 dm = M(a^2 + K^2)$$

folglich

$$l = \frac{M(a^2 + K^2)}{aM} = \frac{a^2 + K^2}{a} = a + \frac{K}{a}.$$

Lassen wir nun das Pendel um eine andere mit der ersten parallele Axe schwingen, deren Abstand vom Schwerpunkte gleich a_1 ist, so wird die Länge des einfachen Pendels in diesem Falle

$$l_1 = a_1 + \frac{K_2}{a_1}.$$

Wir haben daher für beide Fälle

$$K^2 = al - a^2 \text{ und } K^2 = a_1 l_1 - a_1{}^2$$

folglich

$$al - a^2 = a_1 l_1 - a_1{}^2$$

oder $$al = a_1 l_1 - a_1{}^2 + a^2.$$

Setzen wir nun $a + a_1 = l_1$, so wird

$$al = a(a + a_1)$$

oder $$l = a + a_1 = l_1.$$

Indessen sind dieses nicht die einzigen Punkte, welche, als Drehungsaxen genommen, ein solches einfaches Pendel geben, daß die Schwingungen in derselben Zeit erfolgen, also synchronisch sind, sondern wenn wir den Körper in irgend beliebigen Punkten aufhängen, welche stets denselben Abstand vom Schwerpunkte haben, so bleibt der Werth von l unverändert. Denn da in dem allgemeinen Ausdrucke

$$l = a + \frac{K^2}{a}$$

der Werth von K^2 unverändert bleibt, so muß l stets denselben Werth haben, wenn a dieselbe Länge hat, also Abstand zwischen Schwerpunkt und Axe dieselbe Größe behält, nach welcher Seite hin auch a gerichtet sein möge. Wenn man also auf einer durch den Schwerpunkt gehenden und auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebene aus dem Schwerpunkte mit den Halbmessern a und l—a zwei Kreise beschreibt, so wird der erste von ihnen die Basis eines senkrechten Cylinders, dessen Erzeugungslinien sämmtlich synchronische Aufhängungsaxen bilden, während der zweite alle correspondirenden Schwingungspunkte enthält. Beide Cylinder aber können beliebig mit einander verwechselt werden, da wir Schwingungsmittelpunkt und Axe verwechseln dürfen.

Besteht ein zusammengesetztes Pendel aus mehren mit einander verbundenen Körpern, welche sich um eine gemeinsame Axe drehen, so läßt sich der Mittelpunkt des Schwunges auf eine ähnliche Weise finden, als der Schwerpunkt bei zusammengesetzten Körpern. Der Mittelpunkt des Schwunges für das ganze System wird nämlich erhalten, wenn wir die Producte jeder Masse in die Entfernungen von den respectiven Schwer- und Schwingungspunkten von der Are addiren und diese Summe durch das Product des ganzen Systemes mit dem Abstande des gemeinsamen Schwerpunktes von der Are dividiren. Nehmen wir verschiedene Körper, deren Massen wir mit B, B_1, $B_2 \ldots$ bezeichnen wollen; ist ferner C der gemeinsame Aufhängepunkt des Systemes, sind G und O, G_1 und O_1, G_2 und $O_2 \ldots$ die Schwer- und Schwingungspunkte der Körper, so ist

$$CO = \frac{\int r^2 dm}{B.CG}$$

$$CO_1 = \frac{\int r_1{}^2 dm}{B_1.CG_1}$$

$$CO_2 = \frac{\int r_2{}^2 dm}{B_2.CG_2}$$

. . . .

oder

$$\int r^2 dm = B.CO.CG$$

$$\int r_1{}^2 dm = B_1.CO_1.CG_1$$

$$\int r_2{}^2 dm = B_2.CO_2.CG_2$$

. . . .

Addiren wir alle diese Gleichungen zusammen und bezeichnen die Summe der Glieder auf beiden Seiten mit Σ, so wird

$$\Sigma \int r^2 dm = \Sigma B.CO.CG$$

Hier ist $\Sigma \int r^2 dm$ gleich der Summe der Producte, welche entstehen, wenn wir jeden Körper B mit dem Abstand des Schwerpunktes CG und des Schwingungspunktes CO multipliciren. Aber $\Sigma \int r^2 dm$ ist gleich dem Producte der ganzen Masse in die Entfernungen des Schwer- und Schwingungspunktes. Wird daher $\Sigma B.CO.CG$ dividirt durch das Product der ganzen Masse in die Entfernung des gemeinsamen Schwerpunktes von der Are, so gibt der Quotient den Abstand des gemeinsamen Schwingungspunktes von der Are, also die Länge des einfachen Pendels.

Wir wollen diese Sätze auf einige einfache Beispiele anwenden, welche in der Folge bei der Bestimmung der Pendellänge angewendet werden. Es sei eine gerade Linie oder ein prismatischer Stab von einerlei Dichtigkeit gegeben; es soll das Moment der Trägheit auf irgend eine Are bestimmt werden. Es sei AB (Fig. 8) die Linie, so liegt ihr Schwerpunkt in der Mitte bei G und wir denken uns zunächst durch denselben eine Are gelegt, in Beziehung auf welche wir das Moment der Trägheit bestimmen wollen. Es sei nun $PG = y$ der Abstand eines Theilchens P von dem Schwerpunkte, so wird das Moment der Trägheit in Beziehung auf den Schwerpunkt G gleich

$$\int y^2 dy = \tfrac{1}{3} y^3$$

Ist nun a die Länge dieser Linie, so müssen wir das Integral von $y = -\frac{1}{2}a$ bis $y = +\frac{1}{2}a$ nehmen, also wird

$$\int y^2 dy = \tfrac{1}{12} a^3.$$

Nehmen wir eine zweite Are, welche von der ersten den Abstand α hat, so wird

$$\int r_1{}^2 dm = a\left(\frac{a^2}{12} + \alpha\right).$$

Legen wir diese Are etwa in den einen Endpunkt der Linie, so wird das Moment der Trägheit

$$\int r_1{}^2 dm = a\left(\frac{a^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right) = \tfrac{1}{3} a^3.$$

Hieraus läßt sich nun leicht der Schwingungspunkt eines solchen Stabes finden, dessen Are in dem einen Endpunkte angebracht ist. Multipliciren wir die Masse a des Stabes mit dem Abstande des Schwerpunktes von der Are $\frac{1}{2}a$, so wird das statische Moment des Körpers in Beziehung auf diese Are $\frac{1}{2}a^2$; wenn demnach O den Schwingungspunkt bezeichnet und $AO = l$ gesetzt wird, so wird

$$l = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a^2} = \tfrac{2}{3} a.$$

Bei einem prismatischen Stabe also, welcher um seinen Endpunkt schwingt, ist der Schwingungspunkt um $\frac{2}{3}$ seiner Länge von der Are entfernt.

Legen wir die Are nach irgend einem andern Punkte S, so läßt sich sehr leicht der Schwingungspunkt bestimmen. Wir setzen $AS = b$, $SB = c$, also die ganze Länge des Stabes $AB = b + c$. Nun ist das Moment der Trägheit aller Theilchen, welche in AS liegen, gleich $\frac{1}{3}b^3$, aller Theilchen in SB gleich $\frac{1}{3}c^3$, ihre Summe wird also $\frac{1}{3}(b^3 + c^3)$.

Der Abstand des gemeinsamen Schwerpunktes von S ist $\frac{1}{2}(b - c)$, multipliciren wir dieses mit der Masse $b + c$, so gibt ihr Product $\frac{1}{2}(b^2 - c^2)$ das statische Moment an und wir haben daher für den Abstand des Schwingungspunktes von der Are SO

$$SO = \frac{\frac{1}{3}(b^3 + c^3)}{\frac{1}{2}(b^2 - c^2)} = \tfrac{2}{3}\,\frac{b^2 - bc + c^2}{b - c}.$$

Wenn wir demnach den Aufhängepunkt eines solchen Pendels ändern, so wird die Länge des entsprechenden einfachen und mithin die Dauer einer Schwingung eine andere. Es gibt indessen eine Lage der Are, bei welcher die Zeit einer Oscillation am kleinsten wird, welche sich sehr leicht bestimmen läßt. Setzen wir für $b + c$ seinen Werth a, nehmen ferner

$$b^3 + c^3 = (b + c)^3 - 3(b + c)\,bc$$

$$b^2 - c^2 = (b + c)^2 - 2bc - 2c^2,$$

so wird

$$SO = \tfrac{2}{3}\,\frac{(b + c)^3 - 3(b + c)\,bc}{(b + c)^2 - 2bc - 2c^2}.$$

Nehmen wir nun $b + c = a$ und $b = a - c$, so wird

$$SO = \tfrac{2}{3}\,\frac{a^3 - 3ac\,(a - c)}{a^2 - 2c\,(a - c) - 2c^2}.$$

Soll dieser Werth ein Minimum werden, so muß

$$c = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}a\left(1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$$

sein.

Ebenso wie sich die Schwingungsdauer eines einfachen Stabes bestimmen läßt, können wir dieselbe finden, wenn mehre Stäbe von gleicher Dicke und Dichtigkeit mit einander verbunden sind. Wir wollen annehmen, ein Pendel bestehe aus zwei mit einander verbundenen völlig gleichen Stäben CA und CB (Fig. 9); es sei in der Spitze des Winkels, welchen beide Stäbe bilden, bei C die Are befestigt, es soll die zu einer Oscillation erforderliche Zeit gefunden werden.

Man halbire die beiden Stäbe in g und γ, so geben beide die Schwerpunkte an. Ziehen wir die Linie $g\gamma$ und halbiren dieselbe in G, so ist G der gemeinsame Schwerpunkt des Systemes, und wenn dieses in Ruhe ist, so halbirt die Linie CG den Winkel ACB. Wir setzen $AC = BC = a$ und den Winkel $ACG = BCG = \alpha$; es bezeichnen ferner o und o_1 die Schwingungspunkte der einzelnen Stäbe, so ist

$$Co = Co_1 = \tfrac{2}{3} a$$

und es verhält sich

$$CG : cg = 1 : \sec.\alpha,$$

also

$$CG = \frac{a}{2\sec.\alpha}.$$

Die Summe der Momente der Trägheit ist in unserem Falle

$$\tfrac{1}{3}a^3 + \tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{2}{3}a^3,$$

das statische Moment des Körpers ist $\frac{a^2}{\sec.\alpha}$; wenn daher O den Schwingungspunkt des ganzen Systemes angibt, so wird

$$CO = \tfrac{2}{3} a \sec.\alpha.$$

Je größer also der Winkel wird, welchen beide Stäbe mit einander bilden, desto länger wird CO, desto größer also die Zeit einer Oscillation. Würden beide Stäbe zu einem einzigen geradlinigen verbunden, so würde $\alpha = 90°$ also $\sec.\alpha$ unendlich groß, das Pendel würde also eine unendlich lange Zeit zu einer Oscillation gebrauchen, d. h. in jeder Lage in Ruhe bleiben. Dieser Satz ist für die Theorie der gemeinen Wage von Wichtigkeit, indem er uns gestattet, auch ohne directe Wägungen zu bestimmen, ob ein Apparat dieser Art empfindlich sei, indem er unter dieser Voraussetzung weit langsamer oscillirt, als wenn er weniger empfindlich ist. Denn wenn der Schwerpunkt des gemeinsamen Systemes wenig unter der Are liegt und ebendieses auch von den Aufhängepunkten der Schalen gilt, so ist α nahe gleich $90°$, also CO sehr groß (s. Wage).

Wir wollen jetzt die Zeit einer Schwingung für eine gegebene Kugel aufsuchen und zuerst das Moment der Trägheit derselben bestimmen.

Es sei $RADB$ (Fig. 10) ein Durchschnitt der Kugel und der Durchmesser RD bezeichne die Drehungsare; man ziehe CA senkrecht auf RD und spr parallel mit RD. Dreht sich nun die Kugel um die erwähnte Are, so beschreibt die Linie spr die Oberfläche eines Cylinders, bei welchem Cp der Halbmesser der Basis ist. Wir setzen den Halbmesser der Kugel $Cr = a$, $Cp = z$, so ist

$$pr = \sqrt{(a^2 - z^2)}$$

und die Oberfläche des Cylinders, welcher durch Drehung von rs um RD erzeugt wird, ist

$$4\pi.pC.rp = 4\pi\sqrt{(a^2 - z^2)},$$

folglich

$$dm = 4\pi z dz\,(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

Multipliciren wir diese Größe mit dem Quadrate der Entfernung z^2, so wird

$$\int r^2 dm = 4\pi \int z^3 dz\,(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Um das Integral zu finden, setzen wir $a^2 - z^2 = y^2$, so ist

$$z^3 dz = -a^2 y\,dy + y^3 dy$$

$$4\pi z^3 dz\sqrt{(a^2 - z^2)} = 4\pi\left(-a^2 y^2 dy + y^4 dy\right).$$

Mithin wird

$$\int z^3 dz\,(a^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{3}a^2 y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + C.$$

Um die Constante C zu bestimmen, müssen wir erwägen, daß das Integral für $z = o$, also $y = a$ verschwinden muß, mithin wird

$$C = \tfrac{1}{3}a^5 - \tfrac{1}{5}a^5 = \tfrac{2}{15}a^5$$

und daher ist das vollständige Integral

$$\int r^2 dm = 4\pi\left(\tfrac{2}{15}a^5 - \tfrac{1}{3}a^2 y^3 + \tfrac{1}{5}y^5\right).$$

Nehmen wir dieses für die ganze Kugel, so ist $y = o$, also $z = a$, und das Moment der Trägheit wird

$$4\pi.\tfrac{2}{15}a^5.$$

Nun ist der Inhalt einer Kugel vom Halbmesser a gleich $\frac{4}{3}\pi a^3$, setzen wir also das Gewicht eines kleinen Theiles der Kugel gleich m, so ist das der ganzen Kugel $M = \frac{4}{3}\pi a^3 m$, setzen wir $m = 1$, so wird

$$\int r^2 dm = \tfrac{2}{5} M a^2.$$

Wir wollen jetzt annehmen, ein Pendel sei aus einem cylindrischen Faden und einer daran befestigten Kugel zusammengesetzt, wir sollen die Länge des zugehörigen einfachen Pendels bestimmen. Es sei nun

Masse der Kugel	$= M$
Halbmesser der Kugel	$= a$
Masse des Fadens	$= M_1$
Länge des Fadens	$= b$
Halbe Dicke des Fadens	$= a_1$,

so ist das Moment der Trägheit der Kugel, da ihr Schwerpunkt um die Größe $a + b$ von der Are entfernt ist

$$\int r^2 dm = (a + b)^2 M + \tfrac{2}{5} M a^2,$$

das Moment der Trägheit des an einem Ende befestigten Fadens

$$\int r^2 dm = M_1\left(\frac{b^2}{3} + \frac{a_1{}^2}{4}\right),$$

folglich das Trägheitsmoment des ganzen Pendels

$$= (a + b)^2 M + \tfrac{2}{5} M a^2 + M_1\left(\frac{b^2}{3} + \frac{a_1{}^2}{4}\right)$$

$$= M\left(a^2 + 2ab + \tfrac{7}{5}b^2\right) + M_1\left(\frac{b^2}{3} + \frac{a_1{}^2}{4}\right),$$

der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsare multiplicirt mit der Masse des ganzen Pendels wird

$$M(a + b) + M_1\frac{b}{2}$$

und mithin die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem so zusammengesetzten in gleichen Zeiten schwingt

$$l = \frac{M\left(a^2 + 2ab + \frac{7}{5}b^2\right) + M_1\left(\frac{b^2}{3} + \frac{a_1{}^2}{4}\right)}{M(a + b) + M_1\frac{b}{2}}.$$

Da nun die Massen der Körper den Gewichten derselben proportionirt sind, so können wir statt der Massen auch ihre Gewichte P und P_1 nehmen, dann wird nach einigen Reductionen

$$l = b + a + \frac{\frac{2}{5}Pa^2 - P_1\left(\frac{b^2}{6} + \frac{ab}{2} - \frac{a_1^2}{4}\right)}{P(a+b) + P_1 \cdot \frac{b}{2}}.$$

Auf eine ähnliche Art als für eine Kugel läßt sich der Schwingungsmittelpunkt für jeden Körper finden, welcher durch Umdrehung entstanden ist, jedoch will ich hier nicht dabei verweilen.

6) **Widerstand der Luft.** Der Widerstand, welchen die Luft der Bewegung von Körpern entgegensetzt, gehört zu den schwierigsten Untersuchungen in der Mechanik, es fehlt noch zu sehr an Erfahrungen, um das Gesetz desselben für verschiedene Geschwindigkeit, Gestalt und Dichtigkeit des bewegten Körpers zu bestimmen. Der Einfluß, welchen die Luft im vorliegenden Falle hat, läßt sich in zwei Theile zerfällen; da zuerst durch ihn der Schwingungsbogen kleiner wird, so kann man fragen, ob diese Verminderung des Bogens auch Einfluß auf die Dauer einer Schwingung habe. Verschiedene Analytiker haben sich bemüht, zu zeigen, daß diese ebenso groß sei, als im leeren Raume. Da indessen die Voraussetzung, daß die Luft ruhig bleibe und durch Strömungen nicht auf das Pendel wirke, wenig naturgemäß ist, so übergehe ich diese Deductionen.

Wenn wir aber zweitens erwägen, daß ein Körper im lufterfüllten Raume eine Verminderung seines Gewichtes erleidet, welche gleich dem Gewichte der verdrängten Luftmasse ist, so wird die Einwirkung der Schwere vermindert und so werden durch diesen Gewichtsverlust die Schwingungen langsamer, als im luftleeren Raume. Um die deshalb nöthige Correction zu finden, nehmen wir die Reihe, welche wir oben für die Dauer einer Oscillation fanden,

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{b}{2l} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{b^2}{4l^2} + \dots\right) = A\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Im lufterfüllten Raume, wo die Luft einen Theil des Gewichtes aufhebt, sei $2g_1$ die Einwirkung der Schwere, l_1 die Länge eines Pendels, welches mit diesem in derselben Zeit eine Schwingung macht, b_1 der Sinus versus des Elongationswinkels, so wird

$$t = \pi\sqrt{\frac{l_1}{2g_1}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{b_1}{2l_1} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cdot\frac{b_1^2}{4l_1^2} + \dots\right).$$

Wenn aber die Elongation in beiden Fällen dieselbe ist, so wird $\frac{b_1}{2l_1} = \frac{b}{2l}$, mithin wird die Summe der in Parenthese eingeschlossenen Reihe ebenfalls $= A$ und

$$t = A\pi\sqrt{\frac{l_1}{2g_1}}.$$

Da nun beide Werthe von t gleich sind, so wird

$$\frac{l}{g} = \frac{l_1}{g_1},$$

oder

$$l_1 = l\frac{g_1}{g}.$$

Nun seien P und P_1 die Gewichte des Pendels im leeren Raume und in der Luft, so verhält sich

$$g : g_1 = P : P_1,$$

mithin

$$l_1 = l\frac{P_1}{P}.$$

Die Größe P_1 läßt sich mit Leichtigkeit bestimmen, wenn die Dichtigkeit des Pendels bekannt ist.

Neuerdings haben Poisson[12]) und Bessel[13]) den Gegenstand aufs Neue untersucht, und wenn auch durch diese Arbeiten derselbe noch nicht völlig aufgehellt zu sein scheint, so will ich doch die Resultate Bessel's hier kürzlich mittheilen. Ist s die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe, m die Masse des Pendels und $m\mu$ das Moment der Trägheit für den Schwerpunkt, also $m(\mu + s^2)$ dieselbe Größe für die Axe, der Elongationswinkel u_1, die Länge des einfachen Secundenpendels λ, so findet man nach dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kräfte bei der Bewegung im leeren Raume die Gleichung

$$c = m(\mu + s^2)\frac{du^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda . ms . \cos u.$$

Bewegt sich der Körper in einer Flüssigkeit, so erzeugt zuerst der Stoß desselben gegen immer neue Theile der Flüssigkeit in jedem Punkte des Raumes einen Verlust von Kraft, also eine Verminderung von c, welche von der Geschwindigkeit der Bewegung und der Form des Körpers abhängt und also durch $\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ bezeichnet werden kann. Indem sich aber der Körper während des Zeittheilchens dt durch das Raumtheilchen du bewegt, darf man die Verminderung von c in diesem Zeittheilchen durch $du\varphi\left(\frac{du}{dt}\right)$ bezeichnen und nach einem endlichen Zeitintervalle verwandelt sich c in

$$c - \int du\varphi\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Zum zweiten Gliede der Gleichung kommt noch die Summe aller Theilchen der Flüssigkeit, multiplicirt mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, also $\int v^2 dm_1$, hinzu. Endlich wird dem dritten Gliede die Summe der Producte des auf jedem Punkt der Oberfläche wirkenden, nach der Richtung der Schwere zerlegten Druckes in die Entfernung von der durch die Drehungsaxe gelegten horizontalen Ebene, mit $2\pi^2\lambda$ multiplicirt, hinzugefügt, welche also $2\pi^2\lambda m_1 s_1 \cos u$ ist, wenn m_1 die verdrängte Flüssigkeit, und s_1 die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Axe bezeichnet. Liegen dann die Drehungsaxe, sowie die Schwerpunkte des Pendels und der Flüssigkeit, in einer Ebene, so ist

$$c - \int du\varphi\left(\frac{du}{dt}\right) = m(\mu + s^2)\frac{du^2}{dt^2} + \int v^2 dm_1 - 2\pi^2\lambda(ms - m_1 s_1)\cos u.$$

In dieser Gleichung bezeichnet das erste Glied den Widerstand, welchen die Flüssigkeit gegen das bewegte Pendel ausübt und welcher nur bewirkt, daß die Elongationswinkel allmälig abnehmen; für das letzte Glied hat man bisher $s = s_1$ angenommen, was indessen nur dann erlaubt ist, wenn das Pendel allenthalben dieselbe Dichtigkeit hat. Um aber $\int v^2 dm_1$ zu finden, also die Größe, welche bei dieser Bewegung am wichtigsten ist, würde eine genaue Kenntniß von dem Verhalten der Flüssigkeit bei diesen Bewegungen nöthig sein. Ließe sich annehmen, daß jedes Theilchen derselben nur so lange in Bewegung bliebe, als sich das Pendel bewegt, so wären die Geschwindigkeiten beider einander proportional und man erhielte

12) Connaissance des Tems 1834. 13) Abh. der berl. Akademie. 1826. S. 32.

$$\int v^2 dm_1 = m_1 K\frac{du^2}{dt^2},$$

wo K eine constante Größe bezeichnet. Dadurch würde die Schwingungszeit durch die Gleichung

$$c = m\left(\mu + s^2 + \frac{m_1}{m}K\right)\frac{du^2}{dt^2} - 2\pi^2\lambda(ms - m_1 s_1)\cos u$$

bestimmt, oder das Pendel würde mit einem einfachen von der Länge

$$\frac{\mu + s^2 + \frac{m_1}{m}K}{s - \frac{m_1}{m}s_1} = \frac{\mu + s^2 + \frac{m_1}{m}K}{s\left(1 - \frac{m_1 s_1}{ms}\right)}$$

gleichzeitig schwingen. Wie aber Bessel selbst bemerkt, so ist es die Frage, ob die obige Hypothese über die Bewegung der Flüssigkeit vollkommen naturgemäß sei, aber es ist dieses wenigstens diejenige, bei welcher die Integration am leichtesten bewerkstelligt werden kann. Ebenso glaubt derselbe, daß der Werth von K sich nicht merklich mit dem Elongationswinkel ändere und wenngleich derselbe mit der Abnahme der Bogen ein wenig wächst, so kann man doch ohne Fehler den mittleren Werth für die mittlere Weite nehmen; wenn ferner eine Kugel an einem feinen Faden hängt, so ist für verschiedene Längen dieses Fadens der Werth von K constant.

Um also die Schwingungen eines Pendels in der Luft auf die im leeren Raume zu reduciren, sei l_1 die Länge des einfachen mit dem in der Luft isochronisch schwingenden Pendels, so ist

$$l_1 = \frac{\mu + s^2 + \frac{m_1}{m}K}{s\left(1 - \frac{m_1 s_1}{ms}\right)}.$$

Ist dann l die Länge des einfachen, im leeren Raume schwingenden Pendels, so ist

$$l = \frac{\mu + s^2}{s}.$$

Ist dann $\frac{l}{l_1} = M$ und $s_1 = s$, so ist

$$M = \frac{\mu + s^2}{s} \cdot \frac{s\left(1 - \frac{m_1}{m}\right)}{\mu + \frac{m_1}{m}K + s^2}$$

und da die Schwingungszeit im leeren Raume

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

ist, so wird

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left\{\frac{2l}{2g}\left(\frac{\mu + s^2}{s} \cdot \frac{s\left(1 - \frac{m_1}{m}\right)}{\mu + \frac{m_1}{m}K + s^2}\right)\right\}}.$$

Um über die größere oder geringere Genauigkeit dieser Reductionsformel zu urtheilen, würde es am zweckmäßigsten sein, ein Pendel in Luft von verschiedener Dichtigkeit und im leeren Raume schwingen zu lassen; aber, wie Bessel (S. 37) bemerkt, so ist eine genaue Ausführung dieses Versuches mit den größten Schwierigkeiten verbunden. Bessel zog es deshalb vor, zwei gleich große Kugeln, eine von Messing, die andere von Elfenbein, schwingen zu lassen und aus der Combination beider den Werth von K herzuleiten. Es ergab sich daraus, daß die gewöhnliche Correction, wobei blos auf die verminderte Dichtigkeit des Pendels in der Luft Rücksicht genommen wurde, bei seinem Pendel mit 1,946 multiplicirt werden mußte. Jedoch hat Sabine[14]) einige Versuche dieser Art gemacht. Er ließ in mehrmals wiederholten Versuchen die nämlichen Pendel in atmosphärischer Luft bei mittlerem Barometerstande, dann in ungleich verdünnter Luft, sowie Wasserstoffgas, schwingen, und fand als mittleres Resultat, daß zur Reduction auf den leeren Raum täglich 10,36 Schwingungen addirt werden müßten, statt daß die Formel nur 6,26 gab, wonach die Correction 1,650 größer war, als nach den angenommenen Gesetzen. Die Verzögerung des Pendels in atmosphärischer Luft verhält sich zu der in Wasserstoffgas bei gleichem Barometerstande und gleicher Temperatur, wie 5,25 : 1, während das Verhältniß der Dichtigkeiten nahe 13 : 1 erfodert hätte. Diese Abweichung leitet Sabine von einer gewissen Zähigkeit oder Klebrigkeit der Gase ab, während Muncke[15]) glaubt, daß sie der bei beiden Gasarten gleichen Elasticität und dem hierdurch bedingten Widerstande derselben beizumessen sei. Andere Versuche zeigten ähnliche Abweichungen von der Theorie. Meiner Ansicht nach haben alle diese Abweichungen ihren Grund darin, daß der eigentliche Widerstand der Luft bei den Bewegungen wol nicht so ohne Einfluß auf die Dauer einer Oscillation ist, als aus der herrschenden Theorie gefolgert wird. Denn wenn das Pendel sich fortbewegt, so ist die Dichtigkeit auf beiden Seiten in der Schwingungsebene ungleich; während das Pendel vor sich die Luft verdichtet, hat diese hinter demselben eine geringere Dichtigkeit, und wenngleich dieser Unterschied bei der langsamen Bewegung des in kleinen Bogen schwingenden Pendels nur unbedeutend ist, so wird doch dadurch eine geringe Verzögerung in der Bewegung hervorgebracht, grade sowie es die Erfahrungen von Sabine auch ergeben haben.

Später stellte Baily[16]) über diesen schwierigen Ge-

14) Phil. Trans. 1829. p. 207. 15) Gehler's Wörterbuch. VII, 352. 16) Phil. Trans. 1832. p. 399.

genstand mit einer großen Zahl von Pendeln von sehr verschiedenartiger Construction und Dichtigkeit eine Reihe von Versuchen an, wobei er den Apparat abwechselnd in der Atmosphäre und in einem Gefäße oscilliren ließ, in welchem die Luft möglichst verdünnt war, und hieraus ergab sich mit Bestimmtheit, daß die ältere Correction noch mit einem constanten Factor multiplicirt werden müßte, wie dieses auch aus der Untersuchung von Bessel hervorging. Dieser constante Factor aber hing von der Gestalt des Pendels ab. Er glaubt, daß eine Menge Luft an dem Pendel anhänge, welche er deshalb anhängende Luft nennt (adhesive air), und indem diese also mit dem Pendel einen zusammenhängenden Körper bildet, muß ihr Schwingungsmittelpunkt aufgesucht und die dadurch bewirkte Verzögerung des Pendels bestimmt werden. Der Einfluß derselben läßt sich nach Airy [17]) auf folgende Weise bestimmen. Es sei N die Zahl von Schwingungen, welche ein Pendel in einem mittleren Sonnentage in der Luft macht; es sei ν die Zahl derselben, welche wir hinzufügen müssen, wenn es sich in dem luftleeren Raume bewegt. Es sei ω das Gewicht des Pendels in Granen des Troygewichtes, S das schwingende specifische Gewicht, so läßt sich das letztere auf folgende Weise herleiten. Ist das Pendel aus Körpern von verschiedenem specifischem Gewichte verfertigt und ist $d_1, d_2, d_3 \ldots$ die Entfernung des Schwerpunktes eines jeden Körpers von der Drehungsaxe, $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$ das Gewicht eines jeden Körpers in der Luft, $s_1, s_2, s_3 \ldots$ die Dichtigkeit eines jeden Körpers auf die gewöhnliche Weise bestimmt, so wird das schwingende specifische Gewicht des Körpers

$$S = \frac{\omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 + \omega_3 d_3 + \ldots}{\frac{\omega_1 d_1}{s_1} + \frac{\omega_2 d_2}{s_2} + \frac{\omega_3 d_3}{s_3} + \ldots}.$$

Ist ferner σ die Dichtigkeit der Luft, so vermindert sich die Kraft der Schwere in dem Verhältnisse von $(N+\nu)^2$ zu N^2, oder nahe in dem Verhältnisse von $\left(1+\frac{2\nu}{N}\right)$ zu 1. Wenn daher das Pendel in der Luft schwingt, so ist es, als ob es die Trägheit seines Gewichtes ω behaltend, jetzt nur das Gewicht $\omega . \frac{N^2}{(N+\nu)^2} = \omega\left(1-\frac{2\nu}{N}\right)$ hätte, oder als ob es den Gewichtsverlust $\omega . \frac{2\nu}{N}$ erlitte. Aber das Gewicht, welches es wirklich durch die Verrückung der Luftmasse erleidet, ist $\omega \frac{\sigma}{S}$, folglich ist der Theil, auf welchen man bei der bloßen Verrückung der Luft nicht Rücksicht nimmt, gleich

$$\omega\left(\frac{2\nu}{N} - \frac{\sigma}{S}\right)$$

und dieses können wir als die anhängende Luftmasse betrachten, welche an dem Schwingungspunkte angebracht ist und die Trägheit des ganzen Pendels muß daher in dem Verhältnisse

$$1 : \left(1 + \frac{2\nu}{N} - \frac{\sigma}{S}\right)$$

vergrößert werden.

Baily bestimmte durch seine sorgfältigen Versuche das Gewicht dieser anhängenden Luft bei Pendeln von verschiedener Form. Hingen Kugeln an einem feinen Drahte, so schien diese Größe nur vorzugsweise von den Dimensionen der Kugel abzuhängen. In Betreff der letzteren gaben die Versuche, daß die Mengen anhängender Luft sich nahe verhielten, wie die Kuben der Durchmesser. In Zahlen gibt er für diesen Fall das Gewicht der anhängenden Luft durch den Ausdruck

$$R + 0{,}123 . d^3 \text{ Gran},$$

wo d den Durchmesser der Kugel in Zollen und R die Luftmenge bezeichnet, welche der Draht mitnimmt. Nehmen wir einen feinen Drath, so ist bei der Länge des Secundenpendels der Werth von R gleich 0,10 Gran, und bezeichnet daher allgemein l die Länge des Drahtes in Zollen, so wird der Ausdruck

$$0{,}002564 . l + 0{,}123\, d^3 \text{ Gran}.$$

Schwangen kreisförmige Messingscheiben und waren ihre flachen Seiten der Richtung der Bewegung entgegengesetzt, so verhielt sich die mitgenommene Luftmenge nahe der Kubus des Durchmessers und er fand den Ausdruck

$$R + 0{,}149\, d^3 \text{ Gran}$$

für die Größe derselben.

Schließlich macht Baily noch darauf aufmerksam, daß es bei den vielen Pendelversuchen in neueren Zeiten zu bedauern sei, daß kein einziger der vielen Beobachter auf die Bemerkungen von Buat geachtet habe, welcher bereits im Jahre 1786 die richtige Ansicht über diesen Gegenstand ausgesprochen und diese durch eine Reihe von Versuchen mit verschiedenen Pendeln bestätigt habe, und daß Bessel zuerst wieder die wahren Gesetze bei diesem Vorgange entdecken mußte.

7) Zählung der Schwingungen. Um die Länge des einfachen Pendels zu bestimmen, welches im luftleeren Raume eine Secunde zu einer Oscillation erfodern würde, sucht man die Länge eines Pendels auf, welches irgend eine Zeit zu einer Schwingung gebraucht. Hat man alle geometrischen Elemente mit Sorgfalt bestimmt, so kommt es noch darauf an, die Dauer einer einzigen Schwingung zu finden. Zu diesem Behufe ist eine gute Pendeluhr erfoderlich, deren Gang entweder nach mittlerer Sonnenzeit oder Sternzeit durch genaue astronomische Beobachtungen bestimmt wird. Wir wollen annehmen, daß die Uhr genau während des Tages 24 Stunden des Zeigers angebe, denn wenn sie schneller oder langsamer gehen sollte, so läßt sich die deshalb nöthige Correction leicht anbringen.

Wenn nun irgend ein Pendel oscillirt, so ist erfoderlich, daß die Zeit genau beobachtet werde, welche zu einer gegebenen Zahl von Schwingungen erfoderlich ist, und da die Länge dieses einfachen Pendels nach der Voraussetzung bekannt ist, so ergibt sich daraus die Zeit, welche es zu

17) Phil. Trans. 1832. p. 431.

einer Oscillation erfodert, und mithin nach den früher entwickelten Gesetzen die Länge des Secundenpendels. Wenn jedoch bei dieser Bestimmung der Zeitdauer ein wenn auch nur kleiner Fehler begangen wird, so hat dieser doch auf das Endresultat einen großen Einfluß, denn da die Dauer der Versuche in der Regel nicht sehr groß ist und man also nur eine geringe Zahl von Schwingungen zählt, so wird der etwa begangene Fehler bei der Übertragung auf einen ganzen Tag vergrößert. Zu solchen Fehlern aber bietet sich beim bloßen Zählen vielfache Gelegenheit dar, denn abgesehen davon, daß man sich leicht verzählen kann, wird es besonders bei kleinen Weiten sehr schwer, Anfang und Ende einer Schwingung genau zu sehen, und ebenso kann bei Bestimmung der Zeit im Anfange der ersten und im Ende der letzten Oscillation ein Versehen begangen werden. Diese letzteren Fehler dadurch zu verkleinern, daß man sehr lange und also eine große Zahl von Schwingungen hinter einander macht, ist ebenso unsicher, denn hier können dadurch Fehler entstehen, daß die Temperatur des Apparates sich während des Versuches ändert, das gebrauchte Pendel also eine andere Länge erhält. Ebenso würde der vorher erwähnte Einfluß einer unrichtigen Zeitbestimmung bleiben, wenn man nicht den Anfang oder das Ende der Oscillation, sondern die Mitte derselben beobachtete.

Weit sicherer ist das Verfahren, Coincidenzen verschiedener Pendel zu beobachten, welches zuerst von Mairan vorgeschlagen, darauf besonders von Boscovich [18]) empfohlen wurde und dessen sich in der Folge Borda [19]) und alle Beobachter bedient haben. Bei diesem Verfahren, welchem eine ähnliche Idee zu Grunde liegt, als dem Nonus beim Messen von Lineardimensionen, wird ein Pendel genommen, das zu einer Schwingung eine Zeit erfodert, welche wenig von der Dauer eines Schwunges oder mehrer des Pendels an der benutzten Uhr abweicht, dann die Zeit beobachtet, wo beide Pendel genau in der Verticale hängen. Geschieht dieses bei irgend einer Schwingung, so entfernen sich beide Pendel bei jeder folgenden weiter von einander, bis die Distanz der Zeit, wo beide ihre Schwingung anfangen, ein Maximum wird, worauf sie sich wieder nähern und endlich zugleich in der Verticale befindlich sind. Wenn nun die Schwingungen, welche das eine Pendel während der Zeit zweier Coincidenzen gemacht hat, bekannt sind, so ergibt sich die Zahl derselben auch bei dem zweiten Pendel. Da nun die verflossene Secundenzahl, welche die Uhr angibt, zugleich die Zahl der Schwingungen des an der Uhr befestigten Pendels bestimmt, so erspart man sich dadurch die Mühe des Zählens. Wir wollen das an der Uhr befindliche Pendel mit A, das andere mit B bezeichnen und annehmen, es sei durch einen vorläufigen Versuch gefunden, daß A während der Zeit, in welcher B eine Oscillation vollendet, n Schwingungen nebst einem Theile einer Schwingung mache. Fangen nun beide Pendel zugleich an zu schwingen, so wird, wenn B eine Schwingung vollendet hat, A demselben vorausgeeilt sein und die $(n+1)$ste Schwingung angefangen haben, welches bei jeder folgenden Schwingung von B geschieht. Dieses setzt sich so lange fort, bis beide Pendel sich zugleich in ihren größten Ausweichungen von der Verticale auf beiden Seiten derselben befinden, sodaß dann A eine Schwingung mehr gemacht hat, als das n fache der Schwingungen von B beträgt. Hierauf nimmt der Winkel zwischen beiden Pendeln wieder ab, indem, wenn B die größte Ausweichung auf der einen Seite erlangt, A dieselbe auf der andern Seite schon verlassen hat, sodaß endlich beide zu gleicher Zeit die größte Ausweichung auf derselben Seite erreichen; dann hat A noch eine Schwingung über die n fache Zahl der Schwingungen von B gewonnen, und wenn also die Zahl der Schwingungen von A mit N, die von B mit N_1 bezeichnet wird, so ist

$$N = nN_1 + 2.$$

Sollte A in der Zeit, in welcher B eine Schwingung vollendet, n Schwingungen weniger einem Theile einer Schwingung gemacht haben, so würde ebenso

$$N = nN_1 - 2.$$

Bedeutet also N die Zahl von Secunden, welche zwischen zwei Coincidenzen beobachtet sind, so wird die Zahl der Schwingungen des beobachteten Pendels durch die Gleichung

$$N_1 = \frac{N \mp 2}{n}$$

gefunden [20]). Was hier übrigens vom Anfange der Oscillation gesagt ist, gilt auch von ihrer Mitte, wo beide Pendel vertical hängen, und diese Stellung eignet sich natürlich weit besser zur Bestimmung der Coincidenzen, da die Weite zwar bei dem Uhrpendel A dieselbe bleibt, sich aber bei B mehr oder minder schnell ändert.

Um diese gleichzeitige verticale Stellung beider Pendel zu finden, wendete Borda [21]) bei seinen Versuchen folgendes Verfahren an. Eine Kugel, welche an einem feinen Drahte hing, diente als Pendel; dieses hatte eine solche Länge, daß es etwas weniger als eine Oscillation machte, während das Uhrpendel deren zwei vollendete. Das Pendel selbst wurde nun vor der Uhr in einiger Entfernung dergestalt aufgestellt, daß die Linie, welche die beiden vertical hängenden Pendel verband, auf der Ebene senkrecht stand, in welcher das Uhrpendel oscillirte; die Entfernung beider betrug etwa zehn Zoll. Auf das Pendel der Uhrlinse wurde nun ein schwarzes Papier geklebt und auf dieses zwei weiße Linien gezogen, welche sich gegenseitig durchkreuzten und mit dem Horizonte einen Winkel von etwa 45° bildeten. Waren beide Pendel in verticaler Stellung in Ruhe, so wurde in einiger Entfernung ein Fernrohr in einer solchen Lage aufgestellt, daß man durch dasselbe den Draht sah, welcher genau den Durchschnitts-

18) *Boscovich*, Opera pertinentia ad astron. et opt. 4. (Venetiis 1785. Tom. V. p. 202). 19) *Borda*, Base du système métrique III, 341. Da wir ihm eine der ersten genauen Bestimmungen des Pendels verdanken, so geben ihn viele Schriftsteller als Erfinder dieser Methode an.

20) *Borda* in der Base du Système métrique decimal. III, 342. *Biot* et *Arago*, Recueil d'Observations géodésiques etc. p. 454. Schmidt, mathem. phys. Geogr. I, 396. 21) Base du Système métrique. III, 342.

punkt der beiden vorher erwähnten Linien deckte. Werden nun beide Pendel in Bewegung gesetzt und findet im Anfange diese Deckung nicht statt, so wartet man so lange, bis man diese durch das Fernrohr sieht und zeichnet den Moment auf, wo dieses geschieht; hierauf entfernen sich beide Pendel von einander und man wartet so lange, bis eine zweite Deckung erfolgt, wodurch man das Intervall zwischen beiden kennen lernt. Es bedarf wol kaum einer Erwähnung, daß es nicht nöthig ist, beständig am Fernrohre zu stehen, denn da man durch den ersten Versuch das Intervall zwischen zwei Coincidenzen kennen lernt, so genügt es, nur dann durchs Fernrohr zu sehen, wenn diese Zeit ungefähr verflossen ist.

Um zu zeigen, wie die Rechnung geführt werden müsse, will ich ein Beispiel von Borda nehmen. Er fand die erste Coincidenz um $7^h\,45'\,56''$; die folgende trat ein um $8^h\,59'\,10''$; die dritte um $10^h\,12'\,40''$; die vierte um $11^h\,26'\,29''$ und die fünfte um $12^h\,39'\,3''$. Das Intervall zwischen den beiden ersten Beobachtungen beträgt $73'\,14''$ oder $4394''$; da das Versuchspendel nahe zwei Secunden zu einer Schwingung gebrauchte, so hat das an der Uhr angebrachte Pendel in dieser Zeit die doppelte Zahl des zu den Versuchen gebrauchten nebst zwei Schwingungen gemacht, folglich betrug diese Zahl bei dem Versuchspendel **2196**. Nun ging die benutzte Uhr am Tage um $13'',4$ schneller als Sternzeit, sie machte also während eines Sterntages **86413,4** oder während eines mittleren Sonnentages **86650** Schwingungen. Die Zahl der letzteren, welche das zu messende Pendel in dieser Zeit machte, ergibt sich also durch die Proportion

$$4394 : 2196 = 86650 : x,$$

wo $x = 43305{,}28$ ist. Auf dieselbe Weise erhalten wir durch die folgenden Coincidenzen die Größen **43305,35**; **43305,44** und **43305,14**.

Alles, worauf es bei Versuchen dieser Art ankommt, besteht darin, daß man auf der Mitte der Linse ein Zeichen anbringt, welches genau von dem Versuchspendel gedeckt wird, wenn beide vertical stehen, hat also das Pendel eine gewisse Breite, so muß diese auch die Marke haben; auch lassen sich in Betreff der Art, wie die Coincidenzen beobachtet werden, manche Abänderungen vornehmen. Ein wesentlicher Umstand bei diesen Messungen aber ist es, zu verhindern, daß beide Pendel selbst auf einander einwirken, weil sich sonst eine Störung in dem gewöhnlichen Gange eines jeden von ihnen zeigen würde. Wie leicht dieses geschieht, wird besonders durch eine Erfahrung von Breguet bewiesen. Er verfertigte Uhren, welche er Doppeluhren nannte, bei denen in demselben Gehäuse zwei von einander völlig getrennte Uhren vorhanden waren, die er aber auf derselben Metallplatte befestigte. Obgleich nun der Gang beider Uhren einzeln genommen etwas von einander abwich, so näherten sie sich doch dann, wenn sie zugleich aufgezogen waren, in ihrem Gange immer mehr, bis dieser zuletzt ganz übereinstimmte. Einer dieser Apparate, welcher während einer Zeit von drei Monaten auf der pariser Sternwarte aufgestellt war, zeigte in beiden Uhren eine solche Übereinstimmung, daß die beiden Secundenzeiger in der ganzen Zeit nie von einander abwichen. Daß dieses Phänomen seinen Grund in der Einwirkung des einen Balanciers auf den andern hatte, ging daraus hervor, daß man einen wahrnehmbaren Unterschied im Gange beider Uhren hervorbringen konnte, wenn man sie etwas von einander entfernte [22]). Um den hieraus zu befürchtenden Fehler zu entfernen, haben Carlini [23]) und Bessel [24]) das Pendel in einiger Entfernung vor der Uhr aufgestellt. Letzterer stellte die Uhr vor das Pendel und brachte in ihrer Linse ein Loch an, durch welches ein kleiner, auf das Pendel geschobener Cylinder erschien. Um aber die Deckung der Linse durch das Pendel genau zu finden, haben die zuletzt genannten Beobachter einen Kometensucher ohne Ocular in eine solche Entfernung zwischen beide gebracht, daß die Objectivlinse desselben das Bild des Pendels am Apparate genau auf das an der Uhr warf, und beobachteten dann beide durch ein entferntes Fernrohr [25]).

8) Correction wegen der Temperatur des Pendels. Alle Messungen des Pendels bedürfen einer Correction wegen der Temperatur, denn wenn diese steigt, so dehnt das Material desselben sich aus, der Schwingungspunkt rückt nach Unten und die Dauer einer Oscillation wird größer. Deshalb muß man alle einzelnen Bestimmungen auf eine constante Temperatur reduciren. Es bieten sich hier zwei Wege dar; es wird nämlich durch genaue Versuche die Dimensionsänderung des gebrauchten Pendels und Maßstabes für bekannte Änderungen der Temperatur aufgesucht, oder man behält stets dasselbe Pendel, beobachtet aber die Dauer einer Schwingung bei verschiedenen Ständen des Thermometers.

Das erste Verfahren wurde von Borda und allen denen benutzt, welche, nach seinem Vorgange, eine Metallkugel an einem Drahte oscilliren ließen. Wir wollen hier sogleich den Fall betrachten, wo die Temperatur des Pendels während der Beobachtungen eine andere war, als zu der Zeit, wo die Messung vorgenommen wurde. Borda fixirte die Länge des Pendels dadurch, daß er behutsam eine Stahlplatte hob, bis diese das vertical hängende Pendel eben berührte, dann auf die Unterlagen der Schwingungsaxe einen T förmig gearbeiteten Maßstab legte, an welchem ein verschiebbarer Theil die Stahlplatte berührte. Es seien nun die Coincidenzen des Pendels und der Uhr bei der Temperatur t beobachtet, dagegen die Länge des Pendels durch die Berührung mit der Stahlplatte bei der Temperatur t_1 fixirt, sodaß zwischen beiden der Unterschied $t_1 - t$ stattfindet. Ist nun C die lineare Ausdehnung des Drahtes, an welchem die Kugel hing, l die Länge des Pendels zur Zeit der Deckungen, so wird diese Größe bis zum Moment der Fixirung um $lC(t_1 - t)$ wachsen. Es sei ferner B die Länge des benutzten Maßstabes bei der Temperatur des thauenden Eises, war also t_2 die Temperatur desselben zur Zeit der

22) *Biot*, Précis de physique. I, 444. 23) Effemeride di Milano (1824. App. p. 28). 24) Abhandl. der berl. Akad. 1826. S. 11. 25) Mehres über die Beobachtung der Coincidenzen, wenn die Pendel größere Verschiedenheiten der Schwingungsdauer zeigen, bei Bessel S. 14 und S. 29.

Messung und ist F die Größe, um welche sich eine Längeneinheit desselben ausdehnt, so erhalten wir die Correction Ft_2. Wir müßten diesen Werth mit der am Maßstabe erhaltenen Länge multipliciren, da aber die Änderung wegen der Ausdehnung nicht sehr bedeutend ist, so können wir dafür die Länge des Pendels selbst nehmen, und so wird die wahre Länge:

$$l\,[1 - C(t_1 - t) + Ft_2] = l - lC(t_1 - t) - lFt_2 \text{ [26]}).$$

Wäre die Länge des Maßstabes nicht bei der Temperatur des thauenden Eises, sondern bei irgend einer andern Normaltemperatur t_3 bestimmt, so würde die Länge des Pendels

$$l - lC(t_1 - t) - lF(t_3 - t_2).$$

Man darf in diesem Ausdrucke nur die Werthe von C und F setzen, um die Länge des Pendels zu erhalten.

Ein ähnliches Verfahren wendeten Sabine und Kater bei ihrem Reversionspendel an, bei welchem ein unveränderlicher Metallstab an einer unverrückbaren Schneide oscilirte, indem er die lineare Ausdehnung dieses Stabes selbst bestimmte [27]). Später bediente sich Sabine [28]) des zweiten Verfahrens, indem er die Temperatur des Beobachtungszimmers änderte und die Zahl der Schwingungen unter diesen verschiedenen Umständen zählte; damit stimmte auch die Vergleichung der Messungen überein, welche er mit demselben Pendel im Winter und Sommer machte. Er fand auf diese Weise, daß das von ihm benutzte messingene Pendel täglich **0,44** Schwingungen weniger machte, wenn die Temperatur um **1° F.** zunahm. Nahe dieselbe Größe (**0,423**) erhielt Sabine durch Messung der Dimensionsänderung und Lütke durch Beobachtung von Schwingungen [**0,458**] [29]).

9) Reduction auf das Niveau des Meeres. Da die Schwingungsdauer desselben Pendels nur von der Intensität der Gravitation abhängt, so ist begreiflich, daß sich jene Größe mit dieser ändern muß. Da nun in derselben Breite die anziehende Kraft der Erde kleiner wird, wenn wir uns vom Mittelpunkte der Erde entfernen, so wird ein Pendel, vorausgesetzt, daß die Erde allenthalben dieselbe Dichtigkeit habe, auf der Höhe von Bergen langsamer oscilliren, als im Niveau des Meeres und alle Messungen müssen daher auf letzteres reducirt werden. Nehmen wir diese gleichförmige Dichtigkeit an, so ist die Reduction sehr einfach. Denn da die Gravitation sich umgekehrt verhält wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, so ist, wenn r den Erdhalbmesser, h die Höhe des Beobachtungsortes über dem Meere, g die Gravitation am Meere und g_1 die in der Höhe bezeichnet,

$$g = g_1\left(\frac{r+h}{r}\right)^2 = g_1\left(\frac{r^2+2rh+h^2}{r^2}\right) = g_1\left(1+\frac{2h}{r}\right),$$

wenn wir das Glied $\frac{h^2}{r^2}$ wegen seiner Kleinheit vernachlässigen. Läge der Beobachtungsort unter dem Niveau des Meeres, so würde

$$g = g_1\left(1-\frac{2h}{r}\right).$$

Da jedoch diese gleichförmige Dichtigkeit kaum vorausgesetzt werden darf, sondern da eine Vergleichung der in verschiedenen Gegenden der Erde gemachten Messungen Differenzen zeigt, welche kaum auf Rechnung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler geschoben werden dürfen, so kann das Pendel auch dazu dienen, um die durch eine anomale Dichtigkeit der Erde hervorgebrachten Störungen im allgemeinen Gange der Gravitation zu bestimmen. Mehre Mathematiker, wie Laplace [30]), Th. Young [31]), Schmidt [32]), haben sich bemüht, zu zeigen, wie dieses Resultat auf eine einfache Art aus den Messungen hergeleitet werden könnte.

Schmidt geht bei seiner Untersuchung davon aus, daß der Berg ein Segment einer Kugel, oder vielmehr eines Paraboloids sei, dessen Scheitel auf der Spitze des Berges liegt und dessen Axe mit der verticalen Richtung zusammenfällt. Um in diesem Falle die Größe der durch den Berg bewirkten Anziehung zu bestimmen, sei **ABC** (**Fig. 11**) der Berg, **AC** seine Basis und **BD** die Höhe des Scheitels. Durch **B** legen wir die Horizontale **EF** und fällen von einem Punkte **M** des Berges das Perpendikel **PM** auf **EF**, so ist nach der Theorie der Parabel

$$PB^2 = PM \,.\, \text{Const.}$$

wo diese Constante den Parameter der Parabel bezeichnet. Ist die Höhe und Basis des Berges bekannt, so läßt sich dieser Parameter leicht bestimmen; denn dann ist

$$AD^2 = BD \,.\, \text{Const.}$$

und darnach wird

$$\text{Const} = \frac{AD^2}{BD}$$

und hiernach wird die Gleichung für die Oberfläche des Berges

$$PB^2 = \frac{AD^2}{BD} \,.\, PM.$$

Setzen wir $PB = r$, $MP = z$, $BD = h$, $AD = nh$, wo der Coëfficient n angibt, wie oft die Höhe des Berges in dem Halbmesser seiner Basis enthalten ist und in der Regel eine ziemlich große Zahl ist, so wird

$$r^2 = hn^2z.$$

Legt man durch den Berg eine große Zahl von Horizontalebenen und theilt ihn dadurch in eine große Zahl dünner Schichten, so erhalten wir eine große Anzahl dünner Cylinder, welche außer der ganzen Erde auf das Pendel wirken. Nehmen wir an, daß die mittlere Dichtigkeit des Berges ϱ sei, die Dicke eines Cylinders dz und ziehen aus dem Mittelpunkte eines solchen Cylinders unendlich viele concentrische Kreise, deren gegenseitiger Abstand dr ist und endlich aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkt unendlich viel Radien, von denen jeder mit dem

26) *Biot*, Recueil d'Observations. p. 462. 27) Phil. Trans. 1818. p. 60. 1819. p. 343. 28) Ibid. 1830. p. 251. 29) Mém. de Petersb. 1830.

30) Ann. de Chimie. XXX, 381. 31) Phil. Trans. 1819. p. 93. 32) Mathem. und phys. Geogr. I, 389.

nächst folgenden den Winkel $d\varphi$ bildet, so wird das Element der Masse dm durch die Gleichung

$$dm = \varrho \,.\, rdr \,.\, d\varphi \,.\, dz$$

gefunden. Bezeichnen wir nun den Abstand dieses Elementes von dem in B befindlichen angezogenen Punkte durch R und bedenken, daß die Anziehung sich verhält wie die Masse und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung, so wird die Anziehung des Elementes dm auf den in B befindlichen Punkt

$$\frac{fdm}{R^2} = f\varrho \frac{rdr \,.\, d\varphi \,.\, dz}{R^2}$$

wo f ein aller Materie gemeinsamer constanter Coëfficient ist. Um die Einwirkung dieser Anziehung auf die Beschleunigung des Pendels zu erhalten, müssen wir dieselbe nach drei auf einander senkrecht stehenden Richtungen zerlegen; es ist aber leicht begreiflich, daß hier nur die verticale Componente wirksam ist. Wir müssen also die obige Größe nach den bekannten Regeln mit dem Cosinus des Winkels multipliciren, welchen die Distanz R mit der verticalen Axe bildet. Dieser Cosinus ist $\frac{z}{R}$ und mithin wird die Anziehung des Elementes nach dieser Richtung

$$\frac{fdm}{R^2} \cdot \frac{z}{R} = f\varrho \frac{rdr \,.\, zdz \,.\, d\varphi}{R^3}.$$

Nun ist $R = \sqrt{(r^2 + z^2)}$ und dadurch verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$f\varrho \,.\, \frac{rdr \,.\, zdz \,.\, d\varphi}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nehmen wir hier die Integration zuerst nach φ vor und erwägen, daß das Integral zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ genommen werden muß, so wird dasselbe

$$2\pi f\varrho \,.\, \frac{rdr \,.\, zdz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wird dieses nach z integrirt, so wird

$$2\pi f\varrho \,.\, rdr\left[C - \frac{1}{\sqrt{(r^2 + z^2)}}\right]$$

wo die Grenzen $z = 0$ und $z = \frac{r^2}{hn^2}$ sind, also wird das zwischen diesen Grenzen gewonnene Integral

$$2\pi f\varrho \,.\, rdr\left\{\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{\left(r^2 + \frac{r^4}{h^2n^4}\right)}}\right\} = 2\pi f\varrho\left[dr - \frac{hn^2dr}{\sqrt{(h^2n^4+r^2)}}\right]$$

Um den letzten Theil dieses Integrales zu bestimmen, setze man $r = hn^2 \tang \vartheta$, so wird $dr = hn^2 \,.\, \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta}$, also

$$\int \frac{dr \,.\, hn^2}{\sqrt{(h^2n^4+r^2)}} = \int hn^2 \,.\, \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{hn^2}{2} \log \frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta} + C$$

und da die Gleichung $r = hn^2 \tang \vartheta$ den Werth

$$\sin\vartheta = \frac{r}{\sqrt{(h^2n^4+r^2}}$$

gibt, so wird

$$\int \frac{dr \,.\, hn^2}{\sqrt{(h^2n^4+r^2)}} = \frac{hn^2}{2} \log \frac{\sqrt{(h^2n^4+r^2)}+r}{\sqrt{(h^2n^4+r^2)}-r}$$

also wird die ganze Anziehung

$$2\pi f\varrho\left[r - \frac{hn^2}{2} \log \frac{\sqrt{(h^2n^4+r^2)}+r}{\sqrt{(h^2n^4+r^2)}-r} + C\right].$$

Da dieses Integral für $r = 0$ verschwinden muß, so wird $C = 0$; ferner zeigt die Gleichung $r^2 = hn^2z$, daß der größte Werth von $z = h$ ist und daß das Integral bis zu $r = hn$ ausgedehnt werden muß. Dadurch wird die Anziehung

$$A = 2\pi f\varrho hn\left[1 - \frac{n}{2} \log \frac{\sqrt{(n^2+1)}+1}{\sqrt{(n^2+1)}-1}\right],$$

da die Zahl n in Vergleich mit der Einheit sehr groß ist, so läßt sich der logarithmische Theil dieser Gleichung in eine Reihe verwandeln, welche nach den Potenzen von $\frac{1}{n}$ fortschreitet; dadurch wird

$$\frac{n}{2} \,.\, \log \frac{\sqrt{(n^2+1)}+1}{\sqrt{(n^2+1)}-1} = 1 - \tfrac{1}{6} \,.\, \frac{1}{n^2}$$

und mithin

$$A = \tfrac{1}{3}\pi f\varrho \frac{h}{n}.$$

Ist nun ϱ_1 die mittlere Dichtigkeit der Erde, a ihr Halbmesser, so ist ihre Anziehung, wenn wir sie als eine Kugel betrachten,

$$G = \tfrac{4}{3}\pi f\varrho_1 \,.\, a$$

wo G die Schwere bedeutet; durch Verbindung dieser Gleichung mit der vorigen wird

$$A = \tfrac{1}{4}G \,.\, \frac{\varrho}{\varrho_1} \,.\, \frac{h}{2n}.$$

Setzen wir die mittlere Dichtigkeit der Erde $\varrho_1 = 4{,}7$, so wird

$$A = G \,.\, \frac{\varrho}{18{,}8} \,.\, \frac{h}{an}.$$

Da die Größe $\frac{h}{a}$ bekannt ist, so wollen wir sie mit λ bezeichnen und daher wird die Schwere auf der Oberfläche des Berges

$$G - 2\lambda G + A = G - 2\lambda G\left(1 - \frac{\varrho}{37{,}6} \,.\, \frac{1}{n}\right).$$

Ist dann L die auf der Spitze des Berges beobachtete Länge des Pendels, so wird die auf die Meeresfläche reducirte

$$L + 2\lambda L\left(1 - \frac{\varrho}{37{,}6} \,.\, \frac{1}{n}\right).$$

Th. Young [33]), welcher ähnliche Betrachtungen anstellt, nimmt die mittlere Dichtigkeit der Erde $= 5{,}5$, und gibt als Correction

$$L_1 = L\left(1 + 0{,}7\frac{2h}{r}\right)$$

für mäßig steile Berge und

$$L_1 = L\left(1 + 0{,}66\frac{2h}{r}\right)$$

für Hochebenen, wo n die Höhe des Berges, r den Erdhalbmesser bezeichnet.

33) Phil. Trans. 1819. p. 93.

10) Aufhängungsart des Pendels. Unsere obigen Untersuchungen setzen voraus, daß das Pendel, dessen Oscillationen gezählt werden, während der Dauer der Schwingungen stets dieselbe Länge behalte und daß seine Elongationen so langsam als möglich abnehmen. Um letztere Bedingung zu erfüllen, muß das Pendel möglichst leicht beweglich aufgehängt werden, was man dadurch erreicht, daß man die Axen durch feine Schärfen von guthärtetem Stahle auf Unterlagen von geschliffenen harten Steinen legt. Aber möge eine solche Schneide auch noch so sorgfältig gearbeitet sein, stets zeigt sie an ihrem unteren Theile eine gekrümmte Fläche, und da diese auf den Unterlagen während einer Oscillation hin und her rollt, so ändert sich die Lage der Schwingungsaxe und damit die Länge des Pendels unaufhörlich. Laplace machte zuerst auf die deshalb nöthige Correction aufmerksam [34]) und obgleich verschiedene Beobachter dieselbe als unbedeutend übersehen haben, so zeigen genauere Untersuchungen doch nicht blos die Nothwendigkeit derselben, sondern zugleich, daß dieselbe von der Vertheilung der Masse im Pendel abhängt, sodaß sie also für ein zusammengesetztes Pendel anders ist, als sie für ein einfaches sein würde, wofern wir letzteres construiren könnten, wie dieses namentlich Th. Young [35]) gezeigt hat. Letzterer nimmt an, daß die Fläche der Schneide, welche auf den Unterlagen ruht, cylindrisch sei, und sucht nun die Gesetze der Bewegung daraus abzuleiten. Es ist indessen begreiflich, daß in einem Falle, wo es so schwer ist, die Gestalt der Curve zu bestimmen, die Gesetze bei jedem einzelnen Pendel nur mit Mühe so entwickelt werden können, daß die beobachteten Größen mit den theoretisch bestimmten übereinstimmen.

Besonders ausführlich ist dieser Gegenstand in neuern Zeiten von Bessel untersucht worden, welcher die theoretischen Betrachtungen durch die Erfahrung prüfte, und es geht daraus auf das Bestimmteste der große Einfluß hervor, welchen die Gestalt der Messerschneide auf die Bewegungen des Pendels hat. Wäre die krumme Fläche der Theil eines Cylinders von 0,1 Linie Halbmesser und der Elongationswinkel 1°,25, so würde dadurch das Pendel um 0,1 Linie verlängert, selbst wenn die Breite nur 0,0043 Linie betrüge.

Ebenso hat das Material und die Gestalt der Unterlagen bei demselben Pendel einen großen Einfluß auf die Dauer einer Schwingung. Um diesen zu erkennen, ließ Bessel [36]) ein Pendel zuerst auf Achat, mattgeschliffenen Glasplatten, Glasröhren und sehr harten Stahlebenen schwingen, ohne daß sich ein Unterschied in der Schwingungsdauer zeigte. Hierauf wurden die Schneiden auf gehämmerten Messing gelegt, dessen ebene Oberfläche abgeschliffen, aber nicht polirt war; zwischen den einzelnen Beobachtungsreihen zeigten sich nun bedeutende Unterschiede, ein Beweis, daß die Ebenen die Bewegung stören; auch gaben die Versuche eine beträchtlich kürzere Schwingungszeit als härtere Unterlagen. Die Ursache liegt darin, daß bei der Bewegung des Pendels die Schneiden selbst eine kleine Bewegung annehmen, deren Maximum mit dem Durchgange des Pendels durch die Verticale zusammenfällt, welche bei Messingebenen fast zehn Mal größer war, als bei harten Unterlagen. Darnach aber wird es zugleich sehr wahrscheinlich, daß die Schneiden einen Eindruck in die Unterlage machen und daß die Schneide, indem sie sich eindrückt, vielleicht auch Theile der Unterlage erhöhet, bei der Bewegung des Pendels sich nicht um ihre Schärfe dreht, sondern um einen höheren oder niedrigern Punkt, je nachdem niedrigere oder höhere Theile der Unterlage leichter ausweichen.

Dieser Einfluß der Aufhängungsart ist später auch von Baily untersucht worden [37]) und er macht darauf aufmerksam, daß die Schärfe der Schneiden selten vollkommen gerade ist, und wenn daher die Unterlagen vertauscht werden, so zeigen sich kleine Differenzen. Unter mehr als 40 Pendeln, welche er untersuchte, fand er nur ein einziges so beschaffen, daß es keinen Unterschied zeigte, wenn die Schneide auf den Unterlagen so gedreht wurde, daß die Hälfte des Pendels, welche dem Beobachter zugewendet war, von ihm abgewendet wurde; bei allen übrigen zeigten sich Unterschiede, welche bei dem einen der benutzten Apparate bis zu zwei Schwingungen im Tage stiegen. Baily führt daselbst eine Erfahrung von Freycinet an, welcher zwischen zwei Pendeln an verschiedenen Orten sehr ungleiche Differenzen in der Schwingungszahl während des Tages fand, und glaubt, daß das Resultat von Sabine, welcher zwei Pendel von verschiedenen Materien so übereinstimmend fand, daß er ihre Differenz übersehen konnte, nur in ungewöhnlich günstigen Umständen zu suchen sei. Als späterhin Baily die Achatplatten, auf denen die Schneiden lagen, ein wenig abrunden ließ, so verschwand der Einfluß, welchen eine Umkehrung der Schneiden zeigte, wenigstens bei einem Pendel, welches auf ebenen Flächen Differenzen von etwa einer Schwingung zeigte.

Schließlich erwähne ich hier noch, daß von verschiedenen Seiten eine andere Aufhängungsart vorgeschlagen ist, nämlich die Flächen am Pendel selbst zu befestigen und sie auf feststehende Schneiden zu legen. Lubbock [38]) hat die möglichen Fehler in diesem Falle näher geprüft, doch fürchte ich fast, daß ein anderer Fehler daraus entstehen kann, daß die Linie, welche von dem Berührungspunkt der Schneiden nach dem Schwerpunkte des Pendels gezogen wird, nicht immer dieselbe sei und daß also der Aufhängungspunkt, mithin die Länge des Pendels sich bei den einzelnen Versuchen ändere.

Über die von Bessel befolgte Aufhängungsart an einem Faden, der sich um einen Cylinder schlägt, s. u. **11, c.**

11) Versuche, die Pendellänge zu bestimmen. Als Galilei die Gesetze des Pendels entwickelte und damit die des freien Falles der Körper in Verbindung setzte, mochte er wol kaum ahnen, welchen Einfluß diese Thatsachen auf Physik und Astronomie haben würden; als er in der Folge den frommen Vätern der hochnothpeinlichen

34) Annales de Chimie. II, 92. 35) Phil. Trans. 1819. p. 95. 36) Abhandl. der berl. Akad. 1826. S. 84.

37) Phil. Trans. 1832. p. 463. 38) Ibid. 1830.

Inquisition versprechen mußte, daß seine Lehren falsch wären, als die Hierarchie sich aus allen Kräften bestrebte, diese Sätze zu vertilgen, schien es kaum glaublich, daß die Regierungen sehr bedeutende Summen daran wenden würden, um die Länge des Pendels in verschiedenen Gegenden der Erde messen zu lassen. Aber kaum hatte Huygens gezeigt, wie man hierdurch ein allgemeines Normalmaß erhalten könnte, und die Pendel zur Regulirung der Uhren angewendet, so wurde plötzlich ein großes Interesse rege, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen. Im J. **1671** gingen Richer nach Cayenne, Picard nach Uranienburg, um dort astronomische Beobachtungen zu machen. Richer nahm eine Uhr mit, deren Pendel in Paris sorgfältig regulirt war, als die Uhr in Cayenne in Gang gesetzt wurde, so fand er, daß sie langsamer ging, während nach seiner Bestimmung das Secundenpendel in Paris eine Länge von $3'\ 8\frac{3}{4}'''$ hatte, mußte es in Cayenne um $1\frac{1}{4}'''$ verkürzt werden, wenn es wieder eine Secunde zu einer Oscillation gebrauchen sollte. Er setzt hinzu, daß während einer Zeit von zehn Monaten selten eine Woche vergangen sei, wo er sein Pendel nicht mit der Uhr verglichen habe; die Elongationsweite des Pendels war dabei sehr klein und die Schwingungen dauerten etwa 52 Minuten. Richer selbst hält diese Beobachtung für eine der wichtigsten Erfahrungen, die er auf seiner Reise gemacht habe [39]).

Picard war mit derselben Untersuchung auf seiner nordischen Reise beschäftigt. Schon vor derselben hatte er vermuthet, und verschiedene nicht genannte Beobachter hatten behauptet, daß das Secundenpendel nicht allenthalben dieselbe Länge habe. Nachdem er nämlich diese Größe für Paris ($36''\ 8''',5$ der **Toise du Châtelet**) angegeben und zugleich die Bemerkung gemacht hat, daß das Pendel im Winter und Sommer eine ungleiche Länge habe, fährt er fort: „Wofern man annehmen wolle, daß das Pendel als Normalmaß dienen könne, sei nöthig, daß die Ortsveränderung keinen Unterschied in der Pendellänge mache; es ist wahr, daß man zu London, Lyon und Bononien in Italien einige Erfahrungen gemacht hat, aus welchen, wie es scheint, man schließen könnte, daß die Pendel, je mehr man sich dem Äquator nähert, kürzer werden sollten, der Muthmaßung gemäß, die schon in dieser Versammlung (der pariser Akademie) vorgetragen worden, daß (die Umdrehung der Erde um ihre Axe vorausgesetzt) die Gewichte mit geringerer Kraft unter dem Äquator als unter den Polen hinabsteigen würden; wir sind aber der Gewißheit dieser Erfahrung nicht genugsam versichert, um daraus etwas zu schließen, und daneben ist zu merken, daß im Haag, wo doch die Polhöhe größer als zu London, die Länge eines Pendels mit Hilfe der Uhren exact bestimmt, ebenso wie zu Paris befunden worden [40])." Mit diesen Ansichten ging Picard nach Norden und wurde bei seinen Untersuchungen von Bartholinus in Kopenhagen und Spole in Lund unterstützt, aber er fand in Uranienburg dieselbe Länge als in Paris; um ferner zu prüfen, wie es sich mit den Bestimmungen in London ($36''\ 11'''\frac{13}{20}$) verhielte, wurde Römer von ihm dahin geschickt, aber dieser fand ebenso wenig eine Abweichung von der in Paris erhaltenen Größe [41]).

So hatten zwei Mitglieder der pariser Akademie zwei völlig verschiedene Resultate erhalten, und diese Gesellschaft wußte nicht, zu welcher Ansicht sie sich bekennen sollte. Als daher kurz darauf Varin, des Hayes und de Glos nach den Inseln des grünen Vorgebirges, sowie nach einigen Inseln Amerika's geschickt wurden, um dort astronomische Beobachtungen zu machen, so wurde ihnen aufgetragen, sorgfältig diesen Punkt zu beachten, um so mehr, da es die Frage wäre, ob das von Richer gefundene Resultat nicht in einem Fehler bei der Beobachtung seinen Grund hätte [42]). Sowie schon früher Picard bedienten sie sich eines Aloefadens (Pittfadens), an welchem die Kugel hing. Vom März bis Juli **1682** fanden sie auf der Insel Gorea die Länge des Pendels gleich $36''\ 6''',\frac{5}{9}$, also etwa zwei Linien kürzer als in Paris; die Breite betrug $14°\ 39'\ 51''$; auf Guadeloupe in der Breite von $14°\ 0'$ betrug dieselbe $36''\ 6''',5$ [43]). Diese Thatsachen, sowie eine Messung in China in $14°\ 44'\ 21''$ im Jahr **1686**, wo die Länge $36''\ 6''',5$ gefunden wurde [44]), zeigten, daß die Schwere in der Nähe des Äquators in der That kleiner wäre, als in höheren Breiten. Mehre andere Bestimmungen, welche bald darauf gemacht wurden, wie die von Couplet und Feuillée, Mouton, Chazelles, de l'Isle de la Croyère, zeigten zwar im Allgemeinen das Gesetz, waren aber so beschaffen, daß man ihnen nicht trauen konnte, um die Länge des Pendels mit Schärfe zu erhalten.

Manche Schwierigkeiten boten sich bei der Messung der absoluten Pendellänge dar, zumal da die meisten Beobachter das Gewicht des Fadens möglichst verkleinern wollten und zu diesem Behufe organische Fasern nahmen, an denen kleine Kugeln hingen, aber wegen der hygrometrischen Eigenschaft solcher Körper, sowie wegen ihrer großen Dehnbarkeit mußten die Messungen manche Unsicherheit übriglassen. Da versuchte es Campbell zuerst,

39) *Richer*, Observ. astron. in den Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. depuis 1666 jusqu' à 1699. T. VII. part. I. p. 320. Über die Größen, welche Richer fand, finden sich verschiedene Angaben, deren Quellen ich nicht kenne. So sagt Gehler in der alten Ausgabe seines Wörterbuches (III, 429), daß Richer's Uhr zu Cayenne täglich zwei Minuten zu langsam gegangen sei. Brisson (Dictionnaire I, 609) sagt, daß die Uhr 2 Minuten 28 Secunden zurückgeblieben sei, und an einer andern Stelle (II, 290), daß das Pendel habe um zwei Linien verkürzt werden müssen.

40) Der Meridiangrad zwischen Paris und Amiens bestimmt durch die Messung des Herrn Picard. Aus dem Franz. (Zürich 1752. S. 60). Picard bestimmte die Länge seines Pendels durch eine kupferne Kugel von einem Zoll Durchmesser, welche an einem feinen Faden hing. Als Länge nahm er die Distanz zwischen dem Aufhängepunkte und dem Schwerpunkte der Kugel $= 440''',5$. Nehmen wir den Schwingungspunkt, so wird diese Länge $440''',53269$. Nehmen wir für den Widerstand der Luft eine mittlere Größe, so wird diese Länge $440''',5984$; eine Größe, welche sich nicht viel von der Wahrheit entfernt. 41) Mém. de l'Acad. VII, I, 208. Etwas später maß Halley diese Größe in St. Helena, jedoch scheint diese Messung nicht sehr sorgfältig gewesen zu sein. *Newton* Princ. ed. *Horsley*. T. III. p. 47. 42) Mém. de l'Acad. VII. p. 435. 43) Ibid. VII, 450. 44) Ibid. VII, 629.

nicht sowol die absolute Pendellänge selbst in verschiedenen Gegenden, als vielmehr die Änderungen aufzusuchen, welche dasselbe Pendel in seinem Gange bei ungleicher Polhöhe erleidet. Graham verfertigte ihm dazu mit seiner gewohnten Sorgfalt eine Pendeluhr, bei welcher zugleich auf die Temperatur des Apparates Rücksicht genommen wurde. Nachdem der Gang dieser Uhr in London sorgfältig bestimmt war, wurde sie nach Jamaica gebracht und hier ihr Gang aufs Neue beobachtet. Wird nun auf die Temperatur des Pendels an beiden Stationen Rücksicht genommen, so folgt daraus nach der Berechnung von Bradley, daß die Uhr in einer Breite von $18°$ während eines Sterntages $1'\ 58''$ langsamer gehe als in London, und Bradley empfiehlt diese Methode wegen ihrer großen Sicherheit vor allen übrigen [45]). Eine von demselben Künstler construirte Uhr nahm Maupertuis nach Lappland mit; als der Apparat in Pello und Paris derselben Temperatur ausgesetzt wurde, so zeigte sich während eines Sterntages eine Differenz von $59''$; zwischen Paris und London betrug dieselbe Größe $7'',7$ [46]).

Die späteren Beobachter wendeten die eine oder die andere dieser Methoden an, da jedoch die Technik der Apparate sehr vieles zu wünschen übrig ließ, so sind diese Bestimmungen wenig brauchbar. Ich erwähne unter diesen Arbeiten nur die von Bouguer und Condamine im tropischen Amerika, Don Juan und Don Ulloa, Liesganig, la Caille, Zach ꝛc. Erst als zur Zeit der französischen Revolution die Länge des Pendels bei Fixirung des Meters dienen sollte, nahm Borda eine sorgfältige Messung des Pendels vor, wobei er zum großen Theile die Ideen von Mairan [47]) ausführte. Später haben Biot und Arago mit demselben Apparate auf den balearischen Inseln, in Frankreich und den schetländischen Inseln dieselben Bestimmungen vorgenommen. Unter der neuesten Benutzung des Apparates ist vorzüglich die Arbeit von Bessel zu erwähnen, welche mit einer Genauigkeit und Sorgfalt ausgeführt wurde, wie sie beim jetzigen Zustande der Wissenschaft und technischen Ausführung möglich ist.

Weit einfacher ist die Benutzung desselben Pendels in verschiedenen Gegenden; die Schneiden werden an einem unveränderlichen Stabe unverrückbar befestigt und dann die Dauer einer Schwingung nach der Methode der Coincidenzen in verschiedenen Gegenden beobachtet. Dadurch ergibt sich mit Leichtigkeit die Änderung der Schwere, und wenn man an einem dieser Orte die absolute Länge des einfachen Pendels gemessen hat, so läßt sich daraus diese Größe an allen übrigen bestimmen. Sehr viele Reisende haben dieses Verfahren in neuern Zeiten mit großem Erfolge angewendet. Um aber die absolute Größe für irgend einen Punkt zu finden, schlug zuerst Bohnenberger ein Verfahren vor, welches in der Folge von Kater mit Erfolg benutzt wurde. Da es nämlich sehr schwer hält, Körper von homogener Dichtigkeit und genau bestimmbarer geometrischer Gestalt zu erhalten, so wird die Bestimmung des Schwingungsmittelpunktes stets mit einiger Unsicherheit verbunden sein. Wir haben aber bereits oben des Satzes gedacht, daß Drehungsaxe und Mittelpunkt des Schwunges reciprok sind und dieses bereits von Huygens erwiesenen Satzes bedient man sich bei der Construction der sogenannten Reversionspendel. An einem prismatischen Stabe werden auf der Mitte unter einander zwei Axen so befestigt, daß sehr nahe die eine derselben mit dem Mittelpunkte des Schwunges zusammenfällt, wenn die andere die Axe bildet. Da die Länge des Secundenpendels allenthalben nahe bekannt ist, so läßt sich die Entfernung der beiden Schneiden sehr nahe richtig treffen. Es wird nun das Pendel an der einen dieser Axen aufgehängt und die Dauer einer Oscillation durch die Methode der Coincidenzen bestimmt. Man kehrt nun das Pendel um und läßt es auf der zweiten Axe oscilliren. Ist jetzt die Dauer einer Schwingung ebenso groß als im ersten Falle, so ist dieses ein Beweis, daß die Lage des Schwingungsmittelpunktes genau bestimmt war; ist dieses aber nicht der Fall, so wird ein kleines Gewicht auf dem Stabe so lange verschoben, bis die Gleichheit der Schwingungsdauer in beiden Fällen hergestellt ist. Die Entfernung beider Schneiden gibt dann die Länge des einfachen Pendels, und da die Dauer seiner Schwingung bekannt ist, so ergibt sich daraus die Länge des Secundenpendels.

Obgleich fast ein jeder Experimentator kleine Änderungen an seinem Apparate angebracht hat, so will ich doch nur die Vorrichtungen von Borda, Kater und Bessel näher betrachten.

a) Borda's Apparat (Tafel II). Borda [48]) stellte seine Versuche in der pariser Sternwarte an im Parterre, wo eine isolirte Mauer von großer Festigkeit von zwölf Fuß Höhe, acht Fuß Breite und zwei Fuß Dicke stand, welche zur Befestigung des Pendels benutzt wurde. An ihr war die Secundenuhr angebracht, die zur Beobachtung der Schwingungen diente und deren Linse sich bei PE (Fig. 2) zeigt; das Pendel OP hing etwas vor derselben und war oben an einem vorspringenden Steinblocke von etwa drei Kubikfuß Größe angebracht. Das Gewicht P des Pendels oscillirte etwa mit der Mitte der Linse in einerlei Höhe und wurde mit dem Fernrohre O aus einer Entfernung von etwa sechs Fuß beobachtet. Die Uhr und der ganze Apparat hingen zur Vermeidung der Luftströmungen in einem gemeinschaftlichen Kasten, der nur an seinem unteren Theile Behufs der Beobachtung Glasscheiben hatte.

Das ganze Pendel ruhte auf Messerschneiden, welche in Fig. 3 abgebildet sind. AB ist die Schneide, CD ein unter demselben befestigter Fortsatz, welcher zur Aufnahme des Drahtes dient; EF ein ähnlicher nach Oben gerichteter Fortsatz, der oben mit einem Schraubengewinde versehen ist, auf welchem der kleine Knopf GH hin und her geschoben werden kann. Dieser Knopf diente zum Theil als Gegengewicht des untern Fortsatzes und wurde so

45) Phil. Trans. XXXVIII, 302—314. 46) Oeuvres de *Maupertuis*. (Lyon 1768. IV, 336). 47) Mém. de Paris. 1735.

48) Base du Système métrique. III, 337.

lange verschoben, daß die bloße Schneide ebenso viel Zeit zu einer Oscillation gebrauchte, als das ganze Pendel, und dadurch wurde es dahin gebracht, daß diese Masse ganz übersehen werden konnte, wovon er sich auch durch anderweitige Versuche überzeugte. Dieses Messer lag auf einer Stahlplatte (Fig. 4). Diese Platte MN war auf einer Kupferplatte IKL von zehn Linien Dicke befestigt, welche durch drei starke Schrauben mit dem oben erwähnten steinernen Vorsprunge der Mauer verbunden war; durch diese Schrauben wurde es möglich, die Platte genau horizontal zu stellen. Während der Beobachtung der Oscillationen wurde die Messerschneide OP stets mitten auf die Öffnung FS gestellt. In dem Fortsatze D (Fig. 3) wurde ein feiner Eisendraht befestigt und dieser hatte an einem untern Ende ein kleines Kugelsegment von Kupfer (Fig. 5), dessen Halbmesser ebenso groß war, als der der oscillirenden Kugel, an welcher es durch ein wenig Talg (Suif) befestigt wurde. Der Draht selbst ging zuerst durch ein kleines Loch in einem Cylinder, welcher in einen fortgenommenen Theil des Kugelsegments ging und wurde so durch den Druck festgehalten. Die Kugel war von Platina und hatte etwa 16⅙ Linien Durchmesser, ein Gewicht von 9911 Gran, bei der Temperatur von 20° C. eine Dichtigkeit von 20,71. Die Kugel war indessen nicht vollkommen homogen, denn wenn sie an verschiedenen Stellen aufgehängt wurde, zeigten sich kleine Differenzen in der Dauer einer Schwingung, und deshalb wurde ihre Stellung öfter verändert. Der Draht erhielt eine solche Länge, daß die Dauer einer Schwingung etwa zwei Secunden betrug und diese wurde durch die Methode der Coincidenzen so beobachtet, wie bereits oben erwähnt ist.

War die Dauer einer Schwingung gefunden, so kam es noch darauf an, die Länge des Pendels zu fixiren und zu messen. Zu ersterem Zwecke dient ein Apparat III (Fig. 3), welcher auf einem aus der Mauer vorspringenden Steine ruhte und etwas unterhalb der schwingenden Kugel angebracht war. Die kleine Kupferplatte, welche genau abgedreht und horizontal gestellt war, ließ sich vermittels einer Schraube mit feinem Gewinde heben und senken. Nach Beendigung der Oscillationen wurde das Pendel ganz zur Ruhe gebracht und diese Kupferplatte behutsam so lange gehoben, daß sie eben die Kugel berührte; hierauf wurde die Schneide des Pendels aus ihrer Stellung OP (Fig. 4) nach QR gerückt und nun der Maßstab an die Stelle der Schneide gelegt.

Dieser Maßstab (Fig. 6) hatte eine Länge von etwas mehr als zwölf Fuß, bestand aus Platina, war aber noch mit einer kupfernen Platte bedeckt. Oben befand sich ein Tförmig gearbeiteter Theil von hartem Stahle, welcher in die Öffnung SF (Fig. 4) geschoben werden konnte und dazu diente, ihn auf die Stahlplatte MN aufzulegen. Der Theil des T, welcher an den obern Theil des Maßstabes gelegt wurde, sowie die untern Flächen der beiden Arme AB und CD waren sorgfältig auf einer Marmorplatte abgeschliffen, dergestalt, daß der obere Theil des Maßstabes genau in derselben Ebene mit ihnen lag. An dem untern Ende des Maßstabes befand sich eine Zunge EF von Platina, welche sich mit schwacher Reibung in einem Schlitz am unteren Theile des Maßstabes verschieben ließ und als Nonius des Maßstabes diente; sie war so eingerichtet, daß er dadurch $\frac{1}{200000}$ der Länge von zwölf Fuß messen konnte. Die bereits oben erwähnte Kupferplatte bildete mit dem Platinastabe ein Metallthermometer, welches zugleich die absolute Ausdehnung des Platina's bei jeder Temperatur zeigte. Die Kupferplatte hatte 11½ Fuß Länge und wurde oben, etwas unter dem T, durch drei Schrauben an dem Platinastabe befestigt; am untern freien Ende befand sich in ihm ein rechtwinkliges Loch PR, in welches ein auf dem Platina angebrachtes Stück ST trat, welches ebenso wie die Kupferplatte Theilungen hatte und dadurch einen Nonius bildete, welcher zur Messung der gegenseitigen Ausdehnung beider Metalle und dadurch des Platina's diente. Wurde nun der Maßstab mit seinem T auf die Stahlplatte MN (Fig. 4) gelegt, so fiel seine Zunge soweit heraus, bis sie eben die Platte III (Fig. 3) berührte und durch Mikroskope ließ sich nun auf dem Maßstabe die ganze Länge genau ablesen. Da es jedoch bei dieser Messung möglich wäre, daß der Maßstab sich durch sein eignes Gewicht etwas ausdehnte, so stellte Borda hierüber directe Versuche an, indem er ihn horizontal legte und Gewichte anhing.

Die Spannung, welche der Faden während der Oscillation durch die Centrifugalkraft der Kugel erleidet, muß denselben etwas verlängern, aber diese Größe war so unbedeutend, daß Borda sie übersehen konnte.

Wäre nun bei diesen Versuchen das Pendel blos aus dem Drahte und der Kugel zusammengesetzt, so ließe sich die Länge des einfachen Pendels durch einen sehr einfachen Ausdruck finden. Aber das sphärische Segment, an welchem die Kugel befestigt wird, sowie die Fortsätze der Schneide, welche zur Aufnahme der Drähte dienen, machen den Apparat etwas verwickelter. Es sei A die Distanz zwischen dem Aufhängepunkte der Kugel, B die Länge des untern Fortsatzes der Messerschneide CD (Fig. 3), R der Halbmesser der Kugel, D die Distanz zwischen dem Schwerpunkte der Kugel und dem des sphärischen Segmentes; Π das Gewicht des Drahtes, Φ das des Segmentes, P das der Kugel, so wird die Länge des einfachen Pendels

$$A - \frac{\frac{\Pi}{6P}\left(A+B+R+\frac{2BR-2BB-2RR}{a}\right)+\frac{\Phi}{P}\left(D-\frac{DD}{A}\right)}{1+\frac{\Pi}{2P}\left(1+\frac{B-R}{A}\right)+\frac{\Phi}{P}\left(1-\frac{D}{A}\right)}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck die durch Messungen bekannten Größen, so ergibt sich die Länge des einfachen Pendels.

Borda machte mit diesem Apparate nur in Paris Messungen, in der Folge erhielten Biot und Arago den Auftrag, an verschiedenen Punkten, welche bei der großen französischen Gradmessung bestimmt waren, ähnliche Bestimmungen vorzunehmen[49]. Sie bedienten sich im

49) *Biot et Arago*, Recueil d'Observations. p. 441.

Allgemeinen derselben Vorrichtung, an welcher sie einige unbedeutende Änderungen anbrachten, die hauptsächlich darin bestanden, daß sie statt des Stahldrahtes einen Kupferdraht nahmen und dem Pendel eine solche Länge gaben, daß die Dauer einer Schwingung nur etwa eine Decimalsecunde betrug.

b) Kater's Reversionspendel. Da die genaue Bestimmung des Mittelpunktes der Schwingung dadurch so erschwert wird, daß es sehr schwer wird, die Gestalt und Dichtigkeit der schwingenden Theile mit der Schärfe zu erhalten, als die Theorie erfodert, so wurde schon früher der Vorschlag gemacht, an einem Pendel Gewichte zu verschieben, bei jeder einzelnen Lage der letztern die Dauer einer Schwingung zu beobachten und aus der bekannten Stellung dieser Gewichte die Länge des einfachen Secundenpendels abzuleiten. Eine ähnliche Idee scheint schon früher Whitehurst gehabt zu haben, jedoch ist mir das Nähere seiner Arbeit nicht bekannt. Daß indessen auf diesem Wege ein scharfes Resultat erzielt werden könne, geht daraus hervor, daß Whitehurst in London eine Größe erhielt, welche nur sehr wenig von den Bestimmungen späterer Beobachter abweicht; ebenso hat die Benutzung eines ähnlichen Apparates von Bessel die Brauchbarkeit davon gezeigt.

Als es darauf ankam, das englische Normalmaß auf die Länge des Secundenpendels zu basiren, sahen die meisten Physiker und Astronomen jenes Landes die Schwierigkeit ein, auf dem von Borda versuchten Wege zum Ziele zu gelangen, und es wurden daher andere Methoden vorgeschlagen. So empfahl Th. Young[50]) die Benutzung einer Pendelstange, auf welcher ein Gewicht fortgeschoben und an genau bekannten Stellen befestigt werden sollte. Statt dessen nahm Kater das Reversionspendel, bei welchem ein Gewicht so lange verschoben wurde, bis die Reciprocität der Axe und des Schwingungspunktes genau erreicht war.

Die Einwirkung eines solchen Gewichtes und die Möglichkeit, die Lage desselben so zu bestimmen, daß bei der Vertauschung der Axen eine völlige Gleichheit der Schwingungsdauer erreicht werde, läßt sich sehr leicht nachweisen[51]). Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, das Pendel bestehe aus einem so dünnen Parallelepipedon, daß man dasselbe als ein Parallelogramm betrachten kann, dessen Breite AB durch b (Taf. I. Fig. 12), dessen Länge AC durch l bezeichnet werden soll. Rücksichtlich des Gesetzes der Dichtigkeit wollen wir die Voraussetzung machen, die Dichtigkeit sei in jedem unendlich schmalen Streifen EFGH der mit AB parallel geht, constant, und wenig von der mittleren Dichtigkeit verschieden, sodaß, wenn wir die Dichtigkeit in dem zunächst an AB liegenden Streifen mit ϱ bezeichnen, allgemein die Dichtigkeit in dem Streifen EFGH durch $\varrho + \delta\varrho$ ausgedrückt wird, wo $\delta\varrho$ gegen ϱ sehr klein und eine Function des Abstandes AE ist. Halbiren wir AB und CD in L und M und ziehen LM, so liegt auf dieser Linie der Schwerpunkt. Nun sei $KN = x$, $LN = y$, so ist das Element der Masse

$$dM = (\varrho + \delta\varrho)\ dxdy$$

wo $\delta\varrho$ eine Function von y ist. Integrirt man diesen Ausdruck von $x = -\frac{1}{2}b$ bis $x = +\frac{1}{2}b$ und $y = 0$ bis $y = l$, so wird

$$M = \varrho bl + b\int d\varrho dy.$$

Ist Q der Schwerpunkt des Stabes und setzt man $LQ = y_1$, so erhält man zur Bestimmung von y_1 die Gleichung

$$My_1 = \int ydM = \int ydy(\varrho + \delta\varrho)dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\varrho bl^2 + b\int\delta\varrho \,.\, ydy.$$

Das Moment der Trägheit des Elementes K gegen eine Drehungsaxe, die durch den Punkt L geht und senkrecht auf der Fläche ABCD steht, wird durch $KL^2 . dM$ ausgedrückt, und da $KL^2 = KN^2 + LN^2 = x^2 + y^2$, so hat man das Moment der Trägheit für das ganze Parallelogramm, wenn man für dM seinen Werth $(\varrho + \delta\varrho)dxdy$ setzt

$$= \int(\varrho + \delta\varrho)\,(x^2 + y^2)dxdy.$$

Wird dieses Integral von $x = -\frac{1}{2}b$ bis $x = +\frac{1}{2}b$ und $y = 0$ bis $y = l$ genommen, so wird das Moment der Trägheit gegen die Axe L

$$T = \tfrac{1}{3}\varrho lb(l^2 + \tfrac{1}{4}b^2) + b\int\delta\varrho(y^2 + \tfrac{1}{12}b^2)dy.$$

Bezeichnet man das Moment der Trägheit gegen eine Drehungsaxe, welche durch den Schwerpunkt Q geht und mit der ebenerwähnten parallel ist, mit T_0, so ist, wie früher gezeigt wurde,

$$T = T_0 + My_1{}^2.$$

Geht dagegen die Axe durch den Punkt R und setzt $LR = r_1$ das Trägheitsmoment gegen die Axe R gleich T_1, so wird

$$T_1 = T_0 + (y_1 - r)^2M$$
$$= T - 2ry_1M + r^2M.$$

Es werde nun in V die kleine verschiebbare Masse angebracht, deren Gewicht mit m und Abstand von der Drehungsaxe VR mit p bezeichnet werde, so ist das Moment der Trägheit des ganzen Pendels

$$R = T_1 + mp^2$$

wo wir uns der Kürze halber vorstellen wollen, daß die ganze Masse in einem Punkte vereinigt sei. Dadurch wird die Länge des einfachen Pendels

$$L = \frac{R}{M(y_1 - r) + mp} = \frac{T_1 + mp^2}{M(y_1 - r) + mp}.$$

Gesetzt, das Gewicht würde nach einer andern Stelle gebracht, sodaß sein Abstand von der Axe in p_1 überginge, wo p_1 durch genaue Messungen ebenso bekannt ist, als dieses vorher mit p der Fall war, so würde dadurch auch die Zeit einer Oscillation geändert werden. Wird letztere durch genaue Beobachtungen bestimmt, so ergibt sich durch Vergleichung der Schwingungsdauer im ersten Falle mit der jetzigen die Länge des Pendels in Vergleich mit L, es sei dieselbe im zweiten Falle n_1L, wo n_1 je nach der verschiedenen Stellung des Gewichtes ein echter oder ein unechter Bruch sein kann. Nun ist offenbar

$$n_1L = \frac{T_1 + mp_1{}^2}{M(y_1 - r) + mp_1}.$$

50) Phil. Trans. 1818. p. 100. 51) Schmidt, Math. und phys. Geogr. I. 434.

In einer dritten Stellung würde

$$n_2 L = \frac{T_1 + mp_2^2}{M(y_1 - r) + mp_2}.$$

Hier sind T_1, y_1 und r Größen, welche sich nur mit Schwierigkeit genau bestimmen lassen, während sich p, p_1, p_2 schärfer messen lassen, die Bestimmung von L, $n_1 L$ und $n_2 L$ ist keinen weitern Schwierigkeiten unterworfen, und wenn wir daher diese drei Gleichungen combiniren, so läßt sich durch die Elimination der Werth von L durch die Werthe von p, p_1 und p_2 finden. Wollte man aber die Masse des kleinen Gewichtes m nicht in ihrem Schwerpunkt vereinigt denken, sondern annehmen, daß die Masse darin nicht so regelmäßig vertheilt sei, als hier angenommen wird, so könnte man noch eine vierte Beobachtung machen und aus den genau gemessenen Werthen von $p - p_1$, $p - p_2$, $p - p_3$ den Werth von L ableiten, wie dieses von Th. Young vorgeschlagen wurde.

Wollen wir statt dessen ein Reversionspendel nehmen, so wird eine zweite Axe parallel mit der ersten in S befestigt, wo wir annehmen, daß $SM = LR$ wird. Dann ist das Trägheitsmoment rücksichtlich dieser Axe

$$T_2 = T_0 + M \, . \, QS^2.$$

Aber $QS = LM - LR - LQ = l - r - y_1$, also wird $T_2 = T_0 + M(l - r - y_1)^2 = T + M(l - r)^2 - 2My_1(l - r)$, das Moment des kleinen in V angebrachten Gewichtes wird gegen die Axe S gleich

$$S = T_2 + m(l - 2r - p)^2$$

und mithin die Länge des entsprechenden einfachen Pendels

$$L_1 = \frac{S}{M(l - y_1 - r) + m(l - 2r - p)}.$$

Nun setze man der Kürze wegen die obigen Integrale von $y = 0$ bis $y = l$ genommen

$$\int \delta\varrho \, . \, dy = \alpha\varrho l$$
$$\int \delta\varrho \, . \, ydy = \beta\varrho l^2$$
$$\int \delta\varrho \, . \, y^2 dy = \gamma\varrho l^3,$$

so verwandeln sich die obigen Ausdrücke von M, My_1 und T in

$$M = \varrho lb(1 + \alpha)$$
$$My_1 = \tfrac{1}{2}\varrho l^2 b(1 + 2\beta)$$
$$T = \tfrac{1}{3}\varrho l^3 b(1 + 3\gamma),$$

wobei wir der Einfachheit wegen annehmen, die Breite b des Parallelogrammes sei so beschaffen, daß die Quadrate von $\frac{b}{l}$ übersehen werden können. Setzt man ferner

$$\frac{1 + 2\beta}{1 + \alpha} = 1 + \lambda, \quad \frac{1 + 3\gamma}{1 + \alpha} = 1 + \lambda_1$$

so wird

$$My_1 = \tfrac{1}{2}Mt(1 + \lambda)$$
$$T = \tfrac{1}{3}Ml^2(1 + \lambda_1),$$

wo λ und λ_1 sehr kleine Größen sind, da α, β, γ nur sehr kleine Werthe haben. Nehmen wir der kürzern Rechnung wegen an, daß die Drehungsaxen durch die Punkte L und M gehen sollen, so wird $r = 0$

$$T_1 = T = \tfrac{1}{3}Ml^2(1 + \lambda_1)$$
$$T_2' = \tfrac{1}{3}Ml^2(1 + \lambda) - Ml^2\lambda$$

und daraus, wenn $\frac{m}{M} = \mu$ gesetzt wird,

$$L = \frac{\frac{1}{3}l^2(1 + \lambda) - \mu^2 p}{\frac{1}{2}l(1 + \lambda) + \mu p}$$
$$L_1 = \frac{\frac{1}{3}l^2(1 + \lambda_1) - l^2\lambda + \mu(l - p)^2}{\frac{1}{2}l(1 - \lambda) + \mu(l - p)}.$$

Soll die Masse m so angebracht werden, daß die Schwingungen um beide Axen isochronisch sind, so muß $L = L_1$ sein. Setzt man beide Werthe gleich und übersieht die Producte der Größen λ, λ_1, μ, so wird

$$\mu(l - 2p) = l\lambda,$$

woraus man also sieht, daß es möglich ist, der Größe p einen solchen Werth zu geben, daß der Isochronismus erreicht wird.

Von diesen Ideen ausgehend construirte Kater sein Reversionspendel auf folgende Weise [52]). Er nahm (Taf. II. Fig. 8) einen Messingstab von 1½ Zoll Breite und ⅛ Zoll Dicke. Durch denselben wurden in einer Distanz von 39″,4 zwei dreieckige Löcher n und n_1 gebohrt, welche zur Aufnahme der Messerschneiden bestimmt waren. Vier starke Kniee von gehämmertem Messing, AA, von derselben Breite als der Stab, von sechs Zoll Länge und ¾ Zoll Dicke wurden paarweise dergestalt an jedem Ende des Stabes festgeschraubt, daß, wenn die Schneiden durch die dreieckigen Hülsen gesteckt sind, ihre Rücken fest an den ebenen Flächen der Kniee liegen, welche so genau als möglich senkrecht auf der Fläche des Stabes stehen. Der Rücken der Schneiden und die damit in Berührung stehenden Flächen der Kniee waren sorgfältig an einander abgeschliffen und dann durch Schrauben mit einander verbunden. Der Stab selbst hatte eine solche Länge, daß seine Enden von den äußersten Theilen der Kniestücke etwa zwei Zoll entfernt waren. Zwei Streifen von Tannenholz, BB, von 17 Zoll Länge und derselben Dicke als der Stab, befinden sich in dem Raume zwischen den Kniestücken und sind hier durch Schrauben befestigt. Sie haben nur die halbe Breite des Stabes, sind schwarz angestrichen und am Ende eines jeden von ihnen befindet sich ein feiner Fischbeinstreifen, dazu bestimmt, die Größe des Elongationswinkels auf einer dahinter angebrachten Scale anzugeben.

Ein cylindrisches Messinggewicht C von 3½ Zoll Durchmesser, 1¼ Zoll Dicke und nahe 2 Pfund 7 Unzen Gewicht hat in der Richtung seines Durchmessers ein rechtwinkliges Loch zur Aufnahme der Kniestücke an einem Ende des Pendels und wird hier durch Schrauben möglichst gut befestigt. Ein zweites Gewicht D von etwa 7½ Unzen läßt sich auf dem Stabe in der Nähe des andern Kniestückes verschieben, aber durch Schrauben stets gut befestigen. Ein drittes Gewicht E von 4 Unzen läßt sich auf dem Stabe durch eine Schraube hin- und herschieben; es bewegt sich nur in der Mitte des Stabes und hat eine Öffnung, durch welche Theilstriche auf dem Stabe gesehen werden können, von denen je zwei um 1/20 Zoll

52) Phil. Trans. 1818. p. 37.

von einander entfernt sind. Dieses Gewicht wurde so lange verschoben, bis die Schwingungen auf der einen Schneide ebenso viel Zeit erfoderten als auf der andern.

Die Schneiden waren von indischem Wootzstahle, prismatisch und 1¾ Zoll Länge. Stodard hatte sie möglichst gut gehärtet. Der Winkel beider Flächen, auf deren Kante sie ruhten, betrug nahe 120 Grad.

Der Träger des Pendels (Fig. 9) besteht aus einem Stücke Glockenmetall, von 6 Zoll Länge, 3 Zoll Breite und ⅜ Zoll Dicke. Durch die halbe Länge des Stückes ist eine longitudinale Öffnung gemacht, um das Pendel aufzunehmen; zwei Achatplatten wurden auf einen Rand dieses Metallstückes gekittet, dergestalt, daß die Platten mit dem Metalle in einer Ebene lagen, was man durch sorgfältiges Abschleifen erreichte. Ein Messingrahmen (Fig. 10) wurde durch zwei gegenüberstehende Schrauben befestigt, welche als Mittelpunkte für die Seiten der Ränder des Trägers dienen. Wurde nun die eine Hälfte des Rahmens vermittels der Schraube A gehoben oder gesenkt, so konnten die Schneiden, welche in Y förmigen Lagern ruhten, behutsam auf die Achatplatten gelegt oder von diesen in die Y zurückgeführt werden, dergestalt, daß das Pendel bei den Oscillationen stets auf derselben Stelle der Achatplatten hing.

Durch behutsame Verschiebung des oben erwähnten kleinen Gewichtes E brachte es Kater dahin, daß die Schwingungen auf jeder Axe genau in derselben Zeit erfolgten. Um endlich die Distanz zwischen beiden Schneiden, also die Länge des einfachen Pendels, zu messen, wurde dieses in ein festes, mit einer Furche versehenes Stück von Mahagoniholz so gelegt, daß die Messerschneiden etwa 1/12 Zoll über der Oberfläche hervorragten (Fig. 11). An ein hervorragendes Holzstück K war eine Feder befestigt, welche mit dem Pendel in Verbindung stand und durch eine zweite Feder mit einer Kraft von etwa zehn Pfund, dem Gewichte des Pendels, gespannt wurde. Lagen nun die beiden Schneiden genau parallel, so wurde ihre Distanz gemessen. Er legte deshalb an die äußersten Kanten der Schneiden Messingplatten, deren jede einen feinen Strich hatte, und nachdem er auf diese die Mikroskope gestellt hatte, nahm er das Pendel aus der erwähnten Vorrichtung und an seine Stelle einen Maßstab; da die Distanz der feinen Striche auf den Messingplatten von den Rändern bekannt war, so ergab sich daraus auch die Distanz der Schneiden.

So einfach die Idee dieses Pendels ist und so leicht es scheint, auf diesem Wege ein genaues Resultat zu erlangen, so sind grade bei ihm manche Fehler zu befürchten, die zwar von dem Erfinder selbst vermieden sind, die ich jedoch hier noch näher betrachten will. Vor allem ist eine völlig gleiche Beschaffenheit und vollkommener Parallelismus der beiden Schneiden erfoderlich; ebenso müssen die Achatplatten, auf denen es schwingt, genau horizontal stehen. Wie groß der aus diesen Umständen entstehende Fehler in der Dauer einer Schwingung sei, hat Lubbock [53]) ausführlicher untersucht.

53) Phil. Trans. 1830. p. 202.

Wir wollen uns durch einen Punkt des Pendels O in der Ebene, auf welcher das Pendel ruht, die drei rechtwinkligen Coordinaten Ox, Oy und Oz vorstellen, und es liegen Ox und Oy in der Horizontale; der Einfachheit wegen wollen wir uns vorstellen, daß die Drehungsaxe mit der Linie Ox zusammenfalle. Es sei ferner g die Schwerkraft, ε der Winkel, welchen eine von der Axe Ox gefällte Verticale mit Oz bildet, a die Entfernung des Schwerpunktes von der Linie Ox, M die Masse des Pendels und $M(k^2 + a^2)$ das Moment der Trägheit des um die Axe Ox schwingenden Pendels, dann ist die Länge des entsprechenden einfachen Pendels

$$\frac{a^2 + k^2}{a \cos \varepsilon}.$$

Liegt der Schwerpunkt im Punkte G und sind Gx_1, Gy_1 und Gz_1 drei Axen, welche sich daselbst durchschneiden, sind ferner δ und δ_1 die Abweichungen der Messerschneiden in Hinsicht auf Azimuth und Höhe, und sind

$$y_1 = x_1 \operatorname{tang} \delta + \beta$$
$$z_1 = x_1 \frac{\operatorname{tang} \delta_1}{\cos \delta} + \gamma$$

die Gleichungen der Axe Ox bezogen auf die Coordinaten Gx_1, Gy_1 und Gz_1, welche letztere sich mit dem Pendel zugleich fortbewegen, so lassen sich die einzelnen Umstände folgendermaßen bestimmen. Es seien

$$ay = bx + \beta$$
$$az = cx + \gamma$$

die Gleichungen einer geraden Linie (ϱ) im Raume, so sind die Gleichungen eines Perpendikels auf derselben, welches durch den Anfang der Coordinaten geht,

$$ax = by + cz = 0$$
$$\gamma(ay - bx) = \beta(az - cx)$$

und die kürzeste Distanz von dem Anfange der Coordinaten bis zu der gegebenen Linie ist

$$\sqrt{\frac{(\beta b - \gamma c)^2 + \beta^2 c^2 + \gamma^2 a^2}{a^2(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfang und die gegebene Linie geht, ist

$$\gamma(ay - bx) = \beta(az - ca)$$

und die Gleichungen für den Durchschnitt dieser Ebene mit (xy) sind

$$\gamma y = \beta^2$$
$$x = 0.$$

Wenn ferner $a_1 y = b_1 x + \beta_1$

$$a_1 z = c_1 x + \gamma_1$$

die Gleichungen einer andern geraden Linie (ϱ_1) im Raume sind, so wird der Winkel zwischen ϱ und ϱ_1

$$\cos \varrho\varrho_1 = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}},$$

also der Cosinus des Winkels, welchen die Linie ϱ mit der Ebene xy bildet,

$$\gamma(ay - bx) = \beta(az - cx)$$

mit der Ebene zy wird derselbe

$$\frac{\beta b + \gamma c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}$$

und der Sinus desselben Winkels wird

$$\sqrt{\frac{(\beta b-\gamma c)^2+\beta^2 c^2+\gamma^2 a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich nun sehr leicht auf vorliegende Aufgabe anwenden. Es sei C der Punkt der Schneide, wo ein Perpendikel vom Schwerpunkte G dieselbe schneidet; es sei C_1 der Punkt, wo die Ebene zy mit der Axe Ox zusammentrifft; ferner sei C_2 der Punkt, wo eine der Flächen des Pendels, welches wir uns als ein Parallelepipedon vorstellen wollen, ebendiese Schneide trifft, endlich sei G_2 der Punkt dieser Fläche, wo dieselbe von einem aus G gezogenen Perpendikel durchschnitten wird. Bezeichnen wir nun mit t die halbe Dicke des Pendels, so ist

$$GC = G_2C_2 \sin CC_1G - t \cos CC_1G$$

$$\sin^2 CC_1G = \frac{[\beta \sin\delta \cos\delta_1 - \gamma \sin\delta_1]^2 + \beta^2 \sin^2\delta_1 + \gamma^2 \cos^2\delta \cos^2\delta_1}{\beta^2+\gamma^2}$$

$$\cos CC_1G = \frac{\beta \sin\delta \cos\delta_1 + \gamma \sin\delta_1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}.$$

Setzen wir $GC_1 = a_1$, und ist λ ein kleiner Winkel, so ist

$$\beta = a_1 \sin\lambda,\ \gamma = a_1 \cos\lambda$$

$$\sin^2 CC_1G = [\sin\lambda \sin\delta \cos\delta_1 - \cos\lambda \sin\delta_1]^2 + \sin^2\lambda \sin^2\delta_1 + \cos^2\delta \cos^2\delta_1$$

$$\cos CC_1G = \sin\lambda \sin\delta \cos\delta_1 + \cos\lambda \sin\delta_1.$$

Übersehen wir die Größen $\sin\lambda \sin\delta$ und $\sin^2\lambda \sin^2\delta_1$ so wird

$$\cos CC_1G = \sin\delta_1,\ \sin CC_1G = \cos\delta_1$$
$$GC = G_2C_2 \cos\delta_1 - t \sin\delta_1.$$

Es seien nun ε, ε_1, ε_2 die Winkel, welche die Linie Ox mit den Axen Gx_1, Gy_1 und Gz_1 bildet; A, B, C die Trägheitsmomente des Pendels in Beziehung auf diese Axen und $GC = a_1$ dann ist die Länge des einfachen Pendels

$$= \frac{Ma^2 + A\cos^2\varepsilon + B\cos^2\varepsilon_1 + C\cos^2\varepsilon_2}{Ma \cos\varepsilon_1}$$

$$\cos\varepsilon = \cos\delta_1 \cos\delta,\ \cos\varepsilon_1 = \cos\delta_1 \sin\delta,\ \cos\varepsilon_2 = \sin\delta_1.$$

Ist nun C der Punkt der Axe Ox, wo sie von einem aus G gezogenen Perpendikel getroffen wird, so wird, wenn der oben gesetzte Index die Schneide bezeichnet, die Länge des einfachen Pendels in dem Falle, wo $\varepsilon_1 = 0$ gleich

$$GC_1 + \frac{A\cos^2\varepsilon'_1 + B\cos^2\varepsilon'_1 + C\cos^2\varepsilon'_2}{MGC_1}.$$

Es sei $A = Mk_1^2$, $B = Mk_1^2$, $C = Mk^2$, sind nun beide Schneiden isochronisch, so ist

$$GC_1 + \frac{k^2}{GC_1} - \frac{k^2\sin^2\varepsilon' - k_1^2\cos^2\varepsilon'_1 - k^2\cos^2\varepsilon'_2}{GC_1}$$
$$= GC_2 + \frac{k^2}{GC_2} - \frac{k^2\sin^2\varepsilon'' - k_1^2\cos^2\varepsilon''_1 - k_2^2\cos^2\varepsilon''_2}{GC_2}$$

und daraus

$$k^2 = GC_1 . GC_2 + \frac{GC_2}{GC_2 - GC_1}[k^2\sin^2\varepsilon' - k_1^2\cos^2\varepsilon'_1 - k_2^2\cos^2\varepsilon'_2]$$
$$- \frac{GC_1}{GC_2 - GC_1}[k^2\sin\varepsilon''^2 - k_1^2\cos\varepsilon''^2_1 - k_2^2\cos\varepsilon''^2_2].$$

Die Länge des einfachen Pendels ist

$$GC_1 + GC_2 + \frac{k^2(\sin^2\varepsilon' - \sin^2\varepsilon'') - k_1^2(\cos^2\varepsilon'_1 - \cos^2\varepsilon''_1) - k_2^2(\cos^2\varepsilon'_2 - \cos^2\varepsilon''_2)}{GC_2 - GC_1}$$

$$GC = G_2C_2\cos\delta_1 - t\sin\delta_1 = G_2C_2\left[1 - 2\sin^2\frac{\delta_1}{2}\right] - t\sin\delta_1.$$

Die scheinbare Länge des Pendels ist $C'_2C''_2$.
Die wahre Länge des einfachen Pendels ist

$$G_2C'_2 + G_2C''_2 - 2G_2C'_2 \sin\frac{{}^2\delta''^2}{2} - 2G_2C''_2 \sin\frac{{}^2\delta''^2_1}{2} - t\sin\delta_1' - t\sin\delta''_1$$
$$+ \frac{k^2(\sin^2\varepsilon' - \sin^2\varepsilon'') - k_1^2(\cos^2\varepsilon'_1 - \cos^2\varepsilon''_1) - k_2^2(\cos^2\varepsilon'_2 - \cos^2\varepsilon''_2)}{GC'' - GC'}$$

der Winkel $C'_2G_2C''_2 = \lambda_1 - \lambda_2$

$$C'_2C''_2 = G_2C'_2 + G_2C''_2 - \frac{2C'_2G_2.C''_2G_2}{C'_2C''_2}\left[\sin\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right]^2$$

die wahre Länge des Pendels ist mithin

$$C'_2C''_2 + \frac{2C'G.C''G}{C'C''}.\sin^2\frac{\lambda' - \lambda''}{2} - 2GC'\sin^2\frac{\delta'_1}{2} - 2GC''\sin^2\frac{\delta''_1}{2} - t\sin\delta'_1 - t\sin\delta''_1$$
$$+ \frac{k^2(\sin\varepsilon'_2 - \sin\varepsilon'')^2 - k_1^2(\cos\varepsilon'_2 - \cos\varepsilon''_1)^2 - k_2^2(\cos\varepsilon'_2 - \cos\varepsilon''_2)^2}{GC'' - GC'}.$$

Das Zeichen von $t\sin\delta_1$ hängt davon ab, auf welcher Seite des Pendels die Distanz zwischen beiden Schneiden gemessen wird; doch kann diese Größe dadurch eliminirt werden, daß man auf beiden Seiten die Bestimmung dieser Entfernung macht und das Mittel beider benutzt. Wenn man in die obigen Ausdrücke die numerischen Werthe der Größen setzt, so lassen sich die zu befürchtenden Fehler herleiten. Es zeigt sich dann, daß eine kleine Abweichung von der horizontalen Lage der Axen oder der Achatplatten einen Fehler von mehren Schwingungen während des Tages verursacht.

Auch Bessel[54]) hat die Umstände bei der Bewegung dieses Pendels untersucht und gezeigt, wie dasselbe eingerichtet werden muß, falls die Beobachtungen ein ganz scharfes Resultat geben sollen. Da das von Kater construirte Pendel nicht ganz symmetrisch ist, so wird der Widerstand der Luft in beiden Lagen desselben nicht völlig gleich sein. Wenn es daher dahin gebracht ist, daß die Schwingungen des Pendels in der Luft auf beiden Axen isochronisch sind, so verschwindet diese Gleichheit im leeren Raume, wie es namentlich durch die Versuche von Baily erwiesen ist[55]). Da nun das Pendel seiner Masse nach nicht symmetrisch construirt sein darf, so schlägt er vor, es wenigstens der äußern Gestalt nach symmetrisch zu machen, also an einer Stange zwei gleich große und gegen die Axen gleichgestellte Linsen zu befestigen, von denen aber die eine mit Metall gefüllt, die andere hohl ist. Ferner zieht er es vor, das bewegliche Gewicht fortzulassen, allein das Pendel so zu construiren, daß die Schwin-

54) Abh. der berl. Akad. 1826. S. 95. 55) Phil. Trans. 1832. p. 437.

gungszeiten um beide Schneiden nahe gleich werden, welches dadurch geleistet werden kann, daß man die Stange, an welcher Schneiden und Linsen befestigt sind, anfänglich etwas zu lang läßt und sie dann an beiden Enden symmetrisch so lange abkürzt, bis die Gleichheit der Schwingungszeiten nahe stattfindet. Wenn endlich die Schneiden nicht ganz scharf sind, so wird die Dauer einer Schwingung etwas abgeändert; theoretisch läßt sich zwar zeigen, daß, wenn die cylindrischen Flächen beider Schneiden völlig gleich sind, keine Abweichung in der Schwingungsdauer von dem einfachen Pendel stattfinde, dessen Länge durch die Distanz beider Schneiden angegeben wird, aber es ist gewiß ein seltener Zufall, daß diese Gleichheit wirklich stattfindet. Deshalb müssen nach Bessel die Schneiden so eingerichtet werden, daß sie mit einander verwechselt werden können.

c) Bessel's Verfahren[56]). Um die Fehler in der Bestimmung des Schwingungsmittelpunktes und der Länge des Pendels zu vermeiden, beobachtete Bessel nicht die Schwingungszeit und Länge eines Pendels, sondern die Schwingungszeiten zweier Pendel, deren Längenunterschied der Toise du Pérou gleich gemacht wurde. Dazu wurde folgende Einrichtung gewählt. An einer lothrechten eisernen Stange ist eine einige Linien große wagerechte Ebene unwandelbar befestigt, auf welche die Toise mit einem ihrer Enden lothrecht gestellt werden kann; ferner ist eine Einrichtung vorhanden, von welcher das aus einer Kugel an einem Faden bestehende Pendel herabhängt, und welche entweder auf der erwähnten festen Ebene, oder auf dem oberen Ende der auf dieselbe gestellten Toise ihren Ruhepunkt hat, sodaß der Anfangspunkt des Pendels, in beiden Fällen, einen Höhenunterschied erhält, welcher der Länge der Toise genau gleich ist; endlich ist am unteren Ende der eisernen Stange eine Mikrometerschraube, durch welche kleine Unterschiede in der Höhe der herabhängenden Kugel gemessen werden können. Die Bestimmung der Pendellänge wird daher dadurch erlangt, daß man die Schwingungszeiten der an zwei verschiedenen Fäden befestigten Kugel beobachtet, deren Länge so nahe um eine Toise verschieden ist, daß der Höhenunterschied der Kugel an beiden Pendeln, nämlich an dem kürzeren, wenn es von der festen Ebene und an dem längeren, wenn es von der oberen Fläche der Toise herabhängt, durch die Mikrometerschraube gemessen werden kann. Diese Schwingungszeiten zweier Pendel, deren Längen selbst unbekannt sind, deren Längenunterschied aber bekannt ist, sind hinreichend zu der Bestimmung der gesuchten Größe.

Der dazu von Repsold construirte Apparat besteht aus folgenden Theilen. Er ist an einem Gebälke von Mahagoniholz aaaa (Taf. II. Fig. 12) aufgestellt, welches an einer Mauer befestigt wird; in dieser Mauer ist sieben Zoll über dem Fußboden ein starkes, in der Zeichnung nicht sichtbares, Eisen befestigt, auf welchem das untere Querholz des Gebälkes ruht; zwei andere Eisen bb, am obern Ende in der Mauer befestigt, welche vorn hakenförmig gekrümmt sind, dienen zur Befestigung des Gebälkes, und durch Keile, welche zwischen ihnen und dem Gebälke eingeschoben sind, wird das letztere lothrecht gestellt. In dem oberen Querholze dieses Gebälkes ist ein Bolzen c befindlich, auf welchem die zehn Fuß zwei Zoll lange, vier Zoll breite und vier Linien dicke eiserne Stange dd aufgehängt ist; um sie genau lothrecht zu stellen, dienen das Loth ff und die Schrauben gg, hh, sowie drei Paare anderer Schrauben, welche sich in den Querhölzern des Gebälks befinden und von der Rückseite desselben mittels eines Schlüssels gedreht werden. An der großen eisernen Stange befindet sich der lothrechte stählerne Cylinder i, dessen beide Enden kegelförmig sind; mit dem untern, welches abgerundet ist, ruht er auf einem an der Stange festen Ansatze, das obere Ende ist senkrecht auf der Axe des Cylinders abgeschnitten und bildet eine kreisförmige polirte Ebene von drei Linien Durchmesser, welche genau senkrecht auf der Axe des Cylinders steht.

Auf diese Ebene kann die Toise kk gestellt werden und wird dann durch schwache Federn mm aufrecht erhalten; jedoch ist eine Hülse n in der Mitte derselben festgeklemmt, unter welche zwei um die Unterlagen oo bewegliche Hebel greifen, an deren andern Armen so schwere Gewichte wirken, daß sie die Toise genau tragen. Dadurch ist die Verkürzung der Länge aufgehoben worden, welche die Toise erfahren würde, wenn man sie aus der wagerechten Lage, in welcher sie mit ihrem Originale verglichen worden ist, brächte und auf eins ihrer Enden stellte; die obere Hälfte verkürzt sich nämlich um dieselbe Quantität, um welche sich die untere verlängert.

Die Toise schwebt also frei und erlangt eine feste Stellung auf dem Cylinder i nur durch das Übergewicht, welches sie bei dem Gebrauch des längern Pendels dadurch erhält, daß der Apparat, von welchem dieses herabhängt, auf ihrem obern Ende ruht. Dieser Apparat, welchen Bessel den Aufhängungsrahmen des Pendels nennt, hat folgende Einrichtung. An der rechten Seite der großen eisernen Stange, in der Höhe sowol des oberen als unteren Endes der Toise, sind zwei Paar von Lagern qq angebracht, den Lagern eines Mittagsfernrohres ähnlich; auf diese werden Cylinder von gehärtetem Stahle von einem Zoll Durchmesser gelegt, sodaß ihre Axen senkrecht auf die Ebene der großen Stange gerichtet sind und mittels einer Wasserwage und einer an dem vordern Lager befindlichen Schraubenbewegung genau horizontal gestellt werden. Bei den Versuchen mit dem längern Pendel wird der Aufhängungsrahmen, mit den umgekehrten daran befindlichen Lagern, auf den obern Cylinder gelegt, bei den Versuchen mit dem kürzern Pendel auf den untern. In dem letzten Falle wird die Toise etwa einen Zoll in die Höhe geschoben, damit die horizontale Ebene des Cylinders von derselben frei werde.

Der Aufhängungsrahmen besteht aus einem eisernen Rahmen, unter dessen, den Lagern entgegengesetztem, Ende ein Cylinder von Stahl befestigt ist. Dieser hat an dem hintern, der großen Stange zugewandten, Ende eine Kugel, von welcher zwei Segmente senkrecht auf die Axe des Cylinders abgeschnitten sind; an dem vordern hat er

56) Abh. der berl. Akad. 1826. S. 1.

einen kleinern Cylinder von 0,996 Linien Durchmesser, den Abwickelungscylinder. An dem an dem Aufhängungsrahmen befindlichen, schräg aufwärtsgehenden, Stücke wird der Pendelfaden festgeklemmt, dann über den Abwickelungscylinder geführt und nun durch die Kugel des Pendels gespannt. Sobald diese Kugel angehängt ist, zieht ihr Gewicht den Aufhängungsrahmen vorn herab, sodaß die Kugel am hintern Ende des Abwickelungscylinders, bei den Versuchen mit dem langen Pendel auf die Mitte der obern Fläche der Toise drückt, und dieser die feste Stellung auf der wagerechten Ebene des Cylinders i gibt, wozu auch die Reibung der Hebel an ihren Ruhepunkten oo beiträgt; bei den Versuchen mit dem kurzen Pendel drückt die Kugel auf die wagerechte Ebene des Cylinders i selbst.

Bei den Versuchen werden die auf den Lagern qq liegenden Cylinder nivellirt; indem sie dadurch horizontal werden, wird auch die Are des Abwickelungscylinders entweder horizontal, oder sie macht wenigstens mit dem Horizonte stets denselben Winkel. Der Unterschied in der Länge beider Pendel ist also die der Temperatur des Versuches zugehörige Länge der Toise. Die Construction des Abwickelungscylinders, welcher am hintern Ende eine Kugel hat, macht die Untersuchung nöthig, ob die beiden Lager qq genau eine Toise von einander entfernt sind.

Um den Höhenunterschied der Kugel in beiden zusammengehörigen Versuchen zu messen, ist an dem untern Ende der großen eisernen Stange die Vorrichtung r befindlich. Sie besteht aus einem Hohlcylinder von Glockenmetall, am Eisen der Stange befestigt, in welchem sich ein Cylinder von Stahl von sieben Linien Durchmesser auf- und abwärts schieben und auch um seine Are drehen läßt. Unter das untere Ende dieses Cylinders wirkt die Schraube s, sodaß er durch Drehung derselben erhöhet und erniedrigt und die Quantität dieser Veränderungen durch die Umdrehungen der Schraube gemessen werden kann. Das obere Ende des Cylinders wird indessen nicht unmittelbar mit der Kugel in Berührung gebracht, sondern es ist darauf ein 60 Mal vergrößernder doppelter Fühlhebel t befestigt, dessen kürzerer Arm eine horizontale polirte Stahlebene trägt. Die Schraube s wird soweit gedreht, bis die die Kugel berührende Stahlebene am kurzen Arme des Fühlhebels, den längeren bis zu einem Zeichen an seinem Gehäuse erhebt.

Um zufällige Änderungen der Temperatur zu entfernen, ist der Apparat in ein Gehäuse mit Spiegelglasplatten eingeschlossen und man dreht die Schraube s nicht unmittelbar, sondern bei verschlossenen Fenstern mittels der Handhabe u, welche durch ein Stirnrad auf die Schraube wirkt. Auch wird das Pendel bei verschlossenem Gehäuse sowol in Bewegung gesetzt als angehalten; dieses geschieht durch die Zange v, welche sich vor- und rückwärts schieben läßt und durch welche man also das Pendel beliebig weit von der Lothlinie entfernen kann, ehe man es seiner Bewegung überläßt. In w ist eine Scale, welche die Schwingungsweiten mißt. In das Eisen der großen Stange eingelassen sind die Kugeln der Thermometer e′, e″, e‴; zwei andere Thermometer l′ und l‴ hängen frei im Gehäuse und zeigen die Temperatur der Luft; das erstere, dessen Kugel sich in der Höhe der Pendelkugel befindet, bleibt immer an seinem Orte; das letztere hat seine Kugel stets in der Höhe des Aufhängungspunktes der Pendel und befindet sich also an dem in der Zeichnung angegebenen Orte, wenn mit dem langen Pendel experimentirt wird; wird aber das kurze Pendel angewandt, so wird das Thermometer so tief gehängt, als dann erfoderlich ist. In dieser Lage ist das Thermometer in l″.

Endlich sind sowol das Gebälk von Mahagoniholz, als auch die große eiserne Stange so eingerichtet, daß sie, des leichteren Transportes wegen, in der Mitte aus einander genommen werden können.

Der Stahlfaden, welcher die schwingende Kugel trägt, ist nicht selbst in Berührung mit dem Abwickelungscylinder, sondern es ist an dem Aufhängungsrahmen ein 1,4 Linien breites, etwa 0,008 Linie dickes Messingblättchen festgemacht, welches über den Abwickelungscylinder gelegt ist und einige Linien unter demselben eine Klemme von Messing gelegt, welche 20,77 Gran des preußischen Pfundes trägt. Der Pendelfaden ist an beiden Enden in kleine Schraubenklemmen befestigt, deren jede 19,72 Gran wiegt. Von ihnen wird die eine in die mit einer Schraubenmutter versehene Klemme am Messingblättchen, die andere in eine gleiche in die Kugel angebrachte Schraubenmutter eingeschraubt. Sollen übrigens diese Versuche ein genaues Resultat geben, so ist erforderlich, daß man um den Abwickelungscylinder ein schmales Blättchen lege; wollte man einen cylindrischen Draht nehmen, so könnten daraus manche Anomalien entstehen, wie dieses namentlich die Versuche von Baily erwiesen haben, indem das in derselben Verticalebene schwingende Pendel nach und nach eine elliptische Bewegung annahm, deren Excentricität sich beständig zugleich mit der Lage der großen Are änderte, ein Beweis, daß das Pendel unter diesen Umständen nach und nach in ein konisches überging. Phil. Trans. 1832. p. 461.

Bei dieser Einrichtung beschreibt das Pendel keinen Kreisbogen, sondern einen Bogen der Curve, deren Evolute der Durchschnittskreis des Abwickelungscylinders ist; außerdem werden hier die Gesetze der Bewegung etwas vom früher Betrachteten abweichen, daß die Federkraft des um den Cylinder gewickelten Fadens eine kleine Krümmung am obern Theile hervorbringt, was offenbar einen Einfluß auf die Schwingungsdauer haben muß. Da indessen diese Methode nicht auf die Länge eines Pendels, sondern auf den Längenunterschied zweier Pendel gegründet ist, so wird diese Federkraft völlig unschädlich, wofern sie nur für beide gleich ist. Bessel betrachtet die Gesetze der Bewegung in diesem Falle ausführlich; es möge genügen, hier das Endresultat anzugeben. Ist ϱ die Tiefe der als Punkt betrachteten Kugel unter der Are des Abwickelungscylinders im Zustande der Ruhe, so schwingt das Pendel in derselben Zeit als ein einfaches von der Länge

$$\varrho + 11\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{\mu}{4a^2}\right)}\right]\sqrt{\mu}\,.\,\sin\tfrac{1}{2}u'^2,$$

wo μ die elastische Kraft des Fadens bezeichnet, die Kraft, welche den Faden spannt, als Einheit genommen, a den Halbmesser des Abwickelungscylinders und u′ den Schwingungswinkel.

Um zu zeigen, wie die Resultate übereinstimmen, welche durch diese verschiedenen Methoden erhalten werden, hat Bessel die von ihm gefundene Größe mit denen verglichen, welche durch ein unveränderliches Pendel erhalten wurden, das in Paris und späterhin in Königsberg oscillirte. Durch sein Verfahren fand er die Länge des Pendels auf der Sternwarte in Königsberg in einer Höhe von 11,2 Toisen über dem Meere gleich 440,8147 Linien, oder, auf das Niveau des Meeres reducirt, gleich 440,8179 Linien. Wird diese Größe durch die Schwingungen eines unveränderlichen Pendels in Paris und Königsberg bestimmt, so ergeben sich folgende Größen:

	Paris	Königsberg
Borda	440‴,5593	440‴,8349
Biot	440‴,5674	440‴,8430.

Eine dritte Bestimmung wurde für Paris durch Arago und Humboldt dergestalt vorgenommen, daß sie ein unveränderliches Pendel in Paris und Greenwich schwingen ließen und aus Kater's Bestimmung für letzteren Ort den Werth für Paris ableiteten. Dadurch wird

Kater 440‴,6872 440‴,8501.

Alle diese drei Längen sind größer, als die von Bessel gefundene, die erste um 0‴,0202, die zweite um 0‴,0283, die dritte um 0‴,0354. Diese Unterschiede mögen aber, wie Bessel bemerkt, ihren Grund zum Theil darin haben, daß bei den älteren Versuchen die Reduction auf den leeren Raum nicht ganz richtig war.

12) Länge des Secundenpendels an verschiedenen Orten. In dem Artikel Pendel hat Muncke in der neuen Ausgabe von Gehler's physikalischem Wörterbuche die sämmtlichen neueren Messungen der Länge des einfachen Secundenpendels in Millimetern zusammengestellt; nur wenige Bestimmungen sind seit jener Zeit hinzugekommen; ich will daher diese Tafel mit den wenigen neueren Messungen unverändert geben.

Beobachter	Ort	Breite (° ′ ″)	Pendellänge
Freycinet	Malouinen	51 35 18	994,0657
Duperrey	——	51 31 44	994,1295
Fallows	Cap d. g. Hoffnung	33 55 56	992,5887
Freycinet	——	33 55 15	992,5677
Freycinet	Port Jackson	33 51 34	992,6260
Duperrey	——	——	992,5879
Brisbane	Paramatta	33 48 43	992,5590
Dunlop	——	——	992,5730
Lütke	Valparaiso	33 2 30	992,5178
Freycinet	Rio Janeiro	22 55 13	991,6956
Foster	——	22 55 22	991,7137
Basil Hall	——	——	991,7170
Duperrey	Isle de France	20 9 40	991,7707
Lütke	St. Helena	15 54 59	991,6035
Sabine	Bahia	12 59 21	991,2203
Sabine	Ascension	7 55 48	991,1948
Duperrey	——	7 55 9	991,1824
Sabine	Maranham	2 31 43	990,8975
Freycinet	Rawak	0 1 34	990,9466
Sabine	St. Thomas	0 24 21	991,1109
Basil Hall	Gallopagosinseln	0 32 19	991,0403
Lütke	Ualan	5 21 16	991,3043
Sabine	Sierra-Leone	8 29 28	991,1073
Sabine	Trinidad	10 38 56	991,0609
Goldingham	Madras	13 4 9	991,2723
Lütke	Guahan	13 26 21	991,4277
Freycinet	Guam. Ins.	13 27 51	991,4520
Sabine	Jamaika	17 56 7	991,4725
Freycinet	Mowi	20 52 7	991,7850
Basil Hall	San Blas	21 32 24	991,5633
Foster	——	——	991,5903
Lütke	Boni	27 4 12	992,3773
Biot	Lipari	38 28 37	993,0792
Biot	Formentera	38 39 56	993,0697
Sabine	New York	40 42 43	993,1586
Biot	Barcellona	41 23 15	993,2321
Duperrey	Toulon	43 7 20	993,3652
Biot, Mathieu	Figeac	44 36 45	993,4578
Biot, Mathieu	Bordeaux	44 50 26	993,4529
Biot	Fiume	45 19 0	993,5841
Biot	Padua	45 24 3	993,6073
Biot	Mailand	45 28 1	993,5476
Biot, Mathieu	Clermont	45 46 48	993,5823
Littrow	Wien	48 12 35	993,9483
Borda, Cassini	Paris	48 50 14	993,8462
Biot, Bouvard	——	——	993,8668
Sabine, Kater	——	——	993,8606
Kater	Shanklin-Farm	50 37 24	994,0470
Biot, Mathieu	Dünkirchen	51 2 10	994,0804
Kater	London	51 31 8	994,1234
Kater	Arbury Hill	52 16 55	994,2275
Bessel	Berlin	52 30 16	994,2318
Lütke	St. Peter u. Paul	53 0 53	994,3734
Kater	Clifton	53 27 43	994,3016
Schumacher	Altona	53 32 45	994,3520
Bessel	Königsberg	54 42 50	994,4099
Kater	Forth Leith	55 58 37	994,5352
Biot	——	——	994,5310
Lütke	Sitka	57 2 58	994,6200
Kater	Portsoy	57 40 59	994,6906
Svanberg, Cronstrand	Stockholm	59 20 43	994,8059
Lütke	Petersburg	59 56 21	994,9100
Sabine	Brassa	60 9 42	994,9985
Kater	Unst	60 45 25	994,9384
Biot	——	——	994,9457
Sabine	Drontheim	63 25 54	995,0132
Sabine	Hare-Island	70 26 17	995,6370
Sabine	Hammerfest	70 40 5	995,5312
Foster	Port Bowen	73 13 39	995,7724

Beobachter	Ort	Breite	Pendellänge
Sabine	Grönland	74° 32' 19''	995,7465
Sabine	Melville	74 47 12	995,8560
Sabine	Spitzbergen	79 49 58	996,0359

Wie man sieht, so ändert sich die Länge des Pendels regelmäßig mit der Breite und fast ein jeder Beobachter hat sich bemüht, aus den von ihm und seinen Vorgängern gefundenen Größen den Werth dieses Elementes, sowie die Abplattung der Erde abzuleiten. Da eine nähere Untersuchung des letzteren Gegenstandes in den Artikel Erde gehört, so scheint es zweckmäßiger dahin auch das auf das Pendel Bezügliche zu verweisen; hier genüge es, einige dieser Ausdrücke für die Länge des Secundenpendels zu geben. Bezeichnen wir die Polhöhe mit φ und die ihr entsprechende Länge des Secundenpendels mit l_φ, so geben die von Schmidt benutzten Messungen in englischen Zollen folgende Gleichung [57])

$$l_\varphi = 339'',015233 + 0'',202898 \sin^2\varphi$$

Biot dagegen glaubt, daß der Ausdruck von 0° bis 45° der Breite ein anderer sein müsse, als von 45° bis 90° und er gibt in Millimetern die folgenden Gleichungen:

von 0° bis 45°: $l_\varphi = 991,027015 + 4,986672 \sin^2\varphi$

von 45° bis 90°: $l_\varphi = 991,027015 + 5,337224 \sin^2\varphi$.

Werden dagegen alle Bestimmungen zusammengenommen,

$$l_\varphi = 991,027015 + 5,161948 \sin^2\varphi.$$

Die meisten dieser Messungen sind in der Nähe des Meeres gemacht, als aber Parrot seine Reise nach dem Ararat machte, so nahm er ein Pendel mit, dessen Schwingungen er in Tiflis und am Ararat beobachtete und die Vergleichung dieser Größen schloß sich nach Struve sehr innig an die obigen Werthe an [58]).

13) Uhrpendel. Seitdem Huygens das Pendel zur Regulirung der Zeit bei den Uhren angewendet und dem Apparate ein praktisches Interesse gegeben hatte, wurde es möglich, viele Messungen und Beobachtungen mit größerer Schärfe zu bestimmen, als es früher möglich gewesen war. Die Bemühungen der Künstler, den Apparat und besonders sein Eingreifen in das Räderwerk zu verbessern, werden in dem Art. Uhren betrachtet werden; hier muß dagegen ein Übelstand berührt werden, welchen man sehr bald bemerkte. Da bei jeder Uhr der Fortgang des Zeigers, also ihr Gang, von dem Intervalle abhängt, welches zwischen zwei Aushebungen eines Zahnes durch das Pendel verfließt, so ist einleuchtend, daß der Gang der Uhr ein anderer wird, wenn sich die Schwingungsdauer des Regulators ändert. Nehmen wir indessen ein Pendel, bestehend aus der sogenannten Linse, welche an einem Stabe befestigt ist, so ist die Schwingungsdauer nur dann constant, wenn das Pendel selbst unverändert bleibt. Diese letzte Bedingung aber findet nicht statt; denn wenn die Temperatur steigt, so dehnt der Stab sich aus, der Schwingungspunkt rückt tiefer und die Uhr geht wegen dieser Verlängerung des Pendels langsamer, während sie schneller geht, wenn die Wärme sinkt. Wäre es möglich, ein Material zu finden, welches bei jeglicher Temperatur dieselben Dimensionen behielte, so würde natürlich dieses am besten zur Construction von Pendeln sein; da jedoch ein solches unbekannt ist, so hat man sich seit Graham's Verbesserung der Pendel im J. 1715 vielfach bemüht, verschiedene Körper dergestalt zu combiniren, daß ihr gemeinsamer Schwingungspunkt stets denselben Abstand von der Axe hätte. Es sind dieses die sogenannten Compensationspendel.

57) Mathem. und phys. Geogr. I, 381. 58) Parrot, Reise nach dem Ararat. II, 141.

Bei allen Compensationspendeln werden zwei Körper, auf welche die Wärme ungleich einwirkt, dergestalt mit einander verbunden, daß, wenn der Schwingungspunkt des einen nach Unten gerückt wird, der des andern in die Höhe steigt; beide Größen aber müssen so beschaffen sein, daß der Schwingungspunkt des ganzen Systemes dieselbe Lage behält. Graham versuchte daher, Metallstäbe mit einander zu verbinden, aber er fand für die Ausdehnung verschiedener Metalle Größen, welche so wenig von einander abwichen, daß er diese Idee aufgab und erst in den Jahren 1721 bis 1723 wurde es ihm möglich, das Quecksilberpendel zu construiren, bei welchem die Ausdehnung des Eisens durch die entgegengesetzte des Quecksilbers compensirt wird.

Bei dem Quecksilberpendel liegt die Idee des Thermometers zum Grunde. Man nehme ein Thermometer, von welchem Kugel und ein Theil der Röhre mit Quecksilber gefüllt sind, und lasse es als ein Pendel oscilliren. Wird nun die Temperatur größer, so rückt die Kugel nach Unten und das Pendel wird länger. Da jedoch ein Theil des Quecksilbers in die Röhre gestiegen ist, so wird der Schwingungspunkt desselben nicht so tief sinken, als wenn dieses nicht der Fall gewesen wäre; ja es kann sogar, je nach dem Verhältnisse zwischen den Dimensionen der Röhre und der Kugel geschehen, daß der Schwingungspunkt der Quecksilbermasse bei der Erwärmung in die Höhe steigt. Bei dem Quecksilberpendel ist letzteres der Fall; es werden dem Apparate solche Dimensionen gegeben, daß das Quecksilber bei der Erwärmung das Pendel um ebenso viel verkürzt, als die übrigen Theile ausgedehnt werden, und umgekehrt.

Gewöhnlich besteht das Quecksilberpendel aus einer eisernen Pendelstange von einigen Linien Durchmesser; an ihrem unteren Ende wird eine Platte befestigt, mit welcher ein Glascylinder durch Schrauben oder anderweitig genau verbunden wird. Dieser Cylinder dient zur Aufnahme des Quecksilbers. Die Theorie dieses Pendels ist nach Horner [59]) die folgende. Da der Schwingungspunkt des Pendels sich nahe in der Mitte des Quecksilbercylinders oder auf seiner halben Höhe befindet, so muß dieser Punkt um soviel erhoben werden, als die Verlängerung der eisernen Pendelstange und des den Glascylinder haltenden Rahmens beträgt; mithin muß der ganze Quecksilbercylinder so hoch sein, daß seine Ausdehnung das Doppelte jener Verlängerung beträgt, oder, wenn l die Länge des eisernen Pendels, e die Ausdehnung des Eisens, q den halben Quecksilbercylinder und m die Ausdehnung des letzteren Metalles bezeichnet, so muß $le = mq$ sein. Daraus folgt $m : e = l : q$, d. h. für gleiche absolute Verlängerungen verhalten sich die Längen der Körper umgekehrt wie ihre specifischen Ausdehnungen. Nun ist die Länge des ganzen Pendels $l + q$, man erhält also

$$m : e = l + q : q,$$

oder

$$m - e : e = l : q$$

und hieraus

$$q = \frac{el}{m - e}.$$

59) Gehler's Wörterbuch. II, 201.

Nun geben die Versuche über Ausdehnung für einerlei Temperaturänderung das Verhältniß $e : m = 117 : 1750 = 1 : 15$, folglich $\frac{e}{m-e} = \frac{1}{14}$ und daraus, wenn man $l = 36,7$ Zolle nimmt, $q = \frac{1}{14} . l = 2,62$, es wird mithin eine Quecksilbersäule von 5,24 Zoll Höhe verlangt, wozu bei einer Weite des Gefäßes von zwei Zollen etwa neun Pfund Quecksilber erfodert werden. Horner gibt dieser Einrichtung den Vorzug vor andern Pendeln; er meint jedoch selbst, daß daraus ein Zweifel entstehen könne, ob eine so bedeutende, in Glas eingeschlossene, Quecksilbermasse die Temperatur so schnell annehme, als die dünne, frei schwebende Eisenstange; aber man darf nicht vergessen, daß die Änderungen der Wärme in dem verschlossenen Uhrkasten überhaupt nur langsam vor sich gehen und außerdem kann man den Fehler dadurch compensiren, daß man auch die Eisenstange in eine Barometerröhre einschließt.

Indessen behauptet Kater, daß Pendel von der angeführten Construction keineswegs gleichförmig von der Wärme afficirt werden, er schlägt deshalb vor, einen gläsernen Cylinder von etwa sieben Zoll Höhe und 2,5 Zoll Durchmesser zu nehmen und diesen mit einem langen Halse von derselben Glasart zu versehen, und glaubt, daß hier die Änderungen der Wärme gleichförmig erfolgen. Nach einer Versicherung von Biot [60]) und eigenen Erfahrungen von Kater soll ein solches Pendel treffliche Dienste thun [61]).

Häufiger werden die aus verschiedenen Metallstäben zusammengesetzten Rostpendel gebraucht, welche zuerst Harrison im J. 1726 construirte. Bei diesem Pendel werden zwei völlig gleiche Stäbe von einem Metalle durch Querstreifen irgend eines Metalles zu einem Rechtecke verbunden; der obere dieser Querstreifen trägt in seiner Mitte den Apparat, wodurch das Pendel mit der Uhr verbunden wird, der untere dagegen trägt zwei nach Oben gehende Stäbe eines zweiten Metalles, die oben durch einen Querstreifen verbunden sind, an welchem der die Linse tragende Stab hängt. Bei dieser Einrichtung haben die fünf Stäbe in ihrer Verbindung das Ansehen eines Rostes, der mittlere und die beiden äußern bestehen aus demselben Metalle. Wenn sich nun diese Stäbe ausdehnen, so rückt der Schwingungspunkt nach Unten, dagegen heben die nach Oben gerichteten Stäbe denselben etwas aufwärts. Wenn nun die Ausdehnung der nach Oben gehenden Stäbe ebenso groß ist, als die der nach Unten laufenden, so wird der Abstand zwischen Axe und Schwingungspunkt stets derselbe bleiben. Am häufigsten werden diese Pendel aus Eisen und Zink verfertigt, die Stäbe von jenem Metalle gehen nach Unten und die von diesem nach Oben. Man kann dafür auch andere Metalle nehmen, stets aber muß dasjenige, dessen Länge für dieselbe Änderung der Wärme mehr zunimmt, nach Oben gerichtet werden. Das Verhältniß zwischen der Länge dieser Stäbe läßt sich folgendermaßen bestimmen [62]). Es sei a die Länge der Stahlfeder, an welcher das Pendel an der Uhr hängt, von der Axe bis zum oberen Querstreifen des Rostes, l die Länge der Eisenstäbe des Rostes und T die Länge der Eisenstange, an welcher die Linse hängt, so ist $a + l + T$ die Länge des Eisenstabes. Ist ferner λ die Länge der nach Oben gerichteten Zinkstäbe und endlich L die Distanz zwischen Schwingungspunkt und Axe, so ist

$$L = a + l + T - \lambda.$$

60) Biot, Traité de physique. I, 172. 61) Kater. Mechanics. p. 333 bei Muncke in Gehler's Wörterb. VII, 388.

Diese Länge des Pendels gilt jedoch nur für eine bestimmte Temperatur; steigt letztere um t Grade und bezeichnen wir die lineare Ausdehnung des Eisens für einen Grad mit F, die des Zinkes mit Z, so geht die Länge L bei der Temperaturerhöhung von t Graden über in

$$L_1 = a + l + T - \lambda + [(a + l + T) F - \lambda Z] t.$$

Soll $L = L_1$ werden, so muß das in Parenthese eingeschlossene Glied verschwinden, also

$$(a + l + T) F - \lambda Z = 0$$

werden. Nun ist $a + l + T = L + \lambda$

und mithin wird

$$(L + \lambda) T - \lambda Z = 0,$$

oder

$$\lambda = \frac{LF}{Z - F}.$$

Für dieselbe Temperaturänderung geben die Messungen über Ausdehnung das Verhältniß

$$F : Z = 117 : 296,$$

also wird

$$\lambda = \frac{117}{179} . L.$$

Nehmen wir $L = 36,7$ Zoll, so wird $\lambda = 24$ Zoll, also in diesem Falle sind die Zinkstäbe bedeutend kürzer, als die des Eisens.

Statt des Zinkes könnte man auch irgend ein anderes Metall nehmen, welches sich stärker ausdehnt als Eisen. Wollte man z. B. Messing nehmen, so ist das Verhältniß

$$F : Z = 117 : 188,$$

wenn wir mit Z die lineare Ausdehnung des Messings bezeichnen. Dadurch wird

$$\lambda = \frac{117}{71} L \text{ nahe } \frac{3}{2} L,$$

62) Biot, Traité de physique. I, 175.

d. h. die Länge der Messingstange muß nahe $1\frac{1}{2}$ so groß sein, als die des ganzen Apparates, wodurch derselbe indessen sehr unbequem wird. Man kann jedoch den Rost auch aus diesen beiden Metallen aus einer größeren Anzahl von Stäben machen, wie es mehre Künstler mit Erfolg versucht haben. Die beiden äußersten Eisenstäbe bleiben, wie oben, mit den beiden Stegen versehen; auf dem unteren Stege stehen die beiden Messingstäbe, welche oben den Querstreifen tragen, an denen zwei nach Unten laufende parallele Eisenstäbe befestigt sind, welche an ihrem untern Ende einen Querstreifen führen, der zwei nach Oben laufende Messingstäbe trägt, an deren Steg der die Linse führende eiserne Stab hängt. In diesem Falle ist jedes Paar von Metallstäben, das gegen die Mitte hin liegt, kürzer als das zunächst außer ihm befindliche und das Verhältniß ihrer Längen läßt sich auf folgende Art bestimmen. Sind l und λ die Dimensionen der beiden äußersten Paare von Eisen und Messing, l_1 und λ_1 die der folgenden Paare und bleiben die übrigen Bezeichnungen wie oben, so ist

$$L = a + l + l_1 + T - \lambda - \lambda_1,$$

für die Temperaturerhöhung von t Graden wird

$$L_1 = a + l + l_1 + T - \lambda - \lambda_1 + [(a + l + l_1 + T)F - (\lambda + \lambda_1)Z]t,$$

soll $L = L_1$ werden, so muß ebenso wie oben

$$(a + l + l_1 + T)F - (\lambda + \lambda_1)Z = 0$$

sein. Da nun

$$a + l + l_1 + T = L + \lambda + \lambda_1,$$

so geht diese Gleichung über in

$$(L + \lambda + \lambda_1)F - (\lambda + \lambda_1)Z = 0,$$

oder

$$\lambda + \lambda_1 = \frac{LF}{Z - F} = \tfrac{1}{2}L$$

oder

$$2(\lambda + \lambda_1) = 3L,$$

d. h. die doppelte Summe der Dimensionen aller Messingstäbe muß gleich der dreifachen Distanz zwischen Axe und Schwingungspunkt sein und hier läßt sich nun leicht die Vertheilung vornehmen. Sind überhaupt eine noch größere Zahl von Paaren combinirt, so wird bei Messing und Eisen

$$2(\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots) = 3L.$$

Es hängt natürlich von dem Willen und dem Geschmack des Künstlers ab, wie er den Rost einrichten wolle, und so könnte er z. B. bei Messing und Eisen recht gut ein Pendel construiren, bei welchem die Messingstangen länger wären, als die von Eisen, und so verfertigte auch Julien le Roy im J. 1748 eine Uhr für die Sternwarte zu Cluny; aber jedenfalls ist es vortheilhafter, dem Pendel so kurze Dimensionen zu geben, als möglich, denn da die Temperatur in den oberen Theilen verschlossener Räume gewöhnlich etwas höher ist, als unten, so wird es selten geschehen, daß der Apparat in allen seinen Theilen einerlei Wärme habe. Von der Schwierigkeit, in diesem Falle ein scharfes Resultat zu erlangen, überzeugte sich auch Bessel bei seinen Untersuchungen über die Länge des Secundenpendels[63]). Da sein längeres Pendel zu einer Schwingung etwa $1\frac{3}{4}$ Secunde gebrauchte, so wünschte er eine Uhr von derselben Schwingungsdauer des Pendels zu erhalten, aber ein Pendel von gewöhnlicher Einrichtung hätte in diesem Falle etwa zehn Fuß lang sein müssen. Er versuchte daher die Uhr mit einem Pendel von einer neuen Construction zu versehen, welches nicht länger war, als ein gewöhnliches; es war aus einer Eisen- und Messingstange zusammengesetzt, deren erstere sich über dem Aufhängepunkte befand, die andere darunter; beiden waren solche Dimensionen gegeben, daß die Einwirkung von Wärme und Kälte compensirt wurde. Allein er war gezwungen, diesen Versuch aufzugeben, indem der Gang der Uhr zu unregelmäßig wurde, was er wenigstens zum Theil der ungleichen Wärme am obern und untern Theile zuschreibt.

63) Abh. der berl. Akad. 1826. S. 13.

Herapath[64]) hat Zink und Eisen auf eine Art verbunden, welche etwas von der gewöhnlichen rostförmigen Construction abweicht. An der Feder, welche das Pendel trägt und welche drei englische Zoll Länge hat, hängt eine eiserne Pendelstange von 27,92 Zoll Länge. Diese trägt an ihrem untern Ende eine Scheibe und auf dieser ruht eine Zinkröhre von 27,92 Zoll Länge. Über diesen Cylinder wird eine eiserne Röhre geschoben und an dieser hängt die Linse. Eine ähnliche Vorrichtung hat Kater neuerdings empfohlen, wobei er aber Blei statt Zink nimmt, wie dieses schon früher Benzenberg vorgeschlagen hatte.

Außer mehren andern Constructionen, bei denen häufig nur das äußere Ansehen des Apparates geändert ist, möge es genügen, hier eine Einrichtung von John Smeaton zu erwähnen, welche von Kater sehr gerühmt wird[65]). Die Pendelstange besteht aus massivem Glase, unten mit einer stählernen Schraube und einer aufgeschraubten Nuß versehen. Auf letzterer ruht ein auf die Glasstange geschobener hohler Cylinder von Zink, ungefähr zwölf Zoll lang und $\frac{1}{8}$ Zoll dick. Über diesen wird von Oben herab eine hohle Röhre von Eisenblech gestürzt, deren oberer Rand so stark einwärts gebogen ist, daß sie auf dem Cylinder ruht, unten dagegen ist der Rand auswärts gebogen und trägt auf der hierdurch gebildeten Fläche einen hohlen Cylinder von Blei, etwas mehr als zwölf Zoll lang. Es folgt hieraus, daß die Glasstange und die Röhre von Eisenblech sich herabwärts ausdehnen, der hohle Cylinder von Zink und der von Blei aber aufwärts, sodaß der Mittelpunkt der Schwingung durch beide einander entgegengesetzte Wirkungen stets in gleicher Höhe erhalten wird. Die Regulirung der Compensation wird wol dadurch am besten erreicht, daß man dem Cylinder von Zink unten einen Boden mit einem Loche gäbe und in dieses einen Cylinder von Zink schraubte, den man nach Erfodern der Umstände heben oder senken kann. Setzen wir die Länge der Glasstange 38 Zoll, die der Feder zwei Zoll, der eisernen Schraube bis an die aufgeschraubte Mutter zwei Zoll, die der Blechröhre zehn Zoll und die des Bleicylinders zehn Zoll; so wird, nach den bekannten Ausdehnungen dieser Körper die Zinkröhre 11,5 Zoll lang.

64) Philos. Mag. LXV, 374. Horner in Gehler's Wörterb. II, 205. 65) bei Muncke in Gehler's Wörterb. VII, 392.

Die bisher betrachteten Vorrichtungen sind diejenigen, bei denen die Compensation am leichtesten erreicht wird. Mehre andere Vorrichtungen, wie durch Hebel oder durch Krümmung zusammengesetzter Federn, auf eine solche Art als bei den Unruhen der Chronometer, übergehe ich hier, da sie zwar sinnreich sind, sich aber schwerer ausführen lassen. Ebenso übergehe ich die Pendel aus gut getrocknetem und gefirnißtem Holze, da sie zwar häufig so gute Dienste leisten als rostförmige, in andern Fällen aber einen sehr unregelmäßigen Gang hatten, sodaß man sich wenigstens nicht unbedingt auf ihre Angaben verlassen kann. (*Kämtz.*)

PENDELBEWEGUNG (im Organismus). Obgleich sich das höhere Leben grade durch Befreiung von den Gesetzen des tiefern bekundet, so kann doch diese Befreiung nur eine indirecte sein, indem die einer gewissen Lebensstufe als solcher ausschließlich zukommenden Verhältnisse über alle Bewegungen in ziemlichem Grade herrschen, die allgemeineren Naturkräfte verhüllen und namentlich dem Bewußtsein entziehen. So findet die eigentliche Pendelschwingung im lebenden Körper statt. Ist der Mensch eine Zeit lang gegangen, so wird der Schenkel Behufs des Vorschreitens nicht mehr willkürlich bewegt, sondern unwillkürlich. Indem der mit Kraft rückwärts auf die Ballen gestemmte Fuß von der Erde aufgehoben wird, folgt der nun nur an seinem Anheftungspunkte, der Pfanne, einem Kugelgelenke, fixirte, unten aber nicht mehr gestützte, Schenkel den Gesetzen der Schwere wie ein aufgehobener Pendel, und schwingt, ohne wesentliche Mitwirkung der vorwärts bewegenden (Streck-) Muskeln; würde auch, nachdem er den Bogen zurückgelegt hat, eine gleich große Rückschwingung machen, wenn nicht der Fuß bei Vollendung des ersten Schwingungsbogens sich senkte, und mit den Zehen und Ballen von Neuem auf den Boden stützte. Während dieses Processes ist der andere Fuß rückwärts angestemmt, und beschreibt, nach Aufhebung vom Stützpunkte einen ähnlichen Bogen. Setzt man ferner den einen Fuß auf eine erhobene Unterlage, und bringt den andern Schenkel in Bewegung, so kann er wie ein Pendel hin und her schwingen. Dasselbe geschieht, wenn man den Schenkel im Knie beugt (während man auf ebenem Boden stehen kann) und also schwingen läßt. Die Dauer der Schwingungen hängt von der Länge des Beines und der Massenvertheilung an demselben ab. Kurze Beine schwingen schneller als lange (wie dasselbe von den Pendeln im Allgemeinen im vorigen Artikel bemerkt ist). Bei demselben Individuum sind die Schwingungen immer von gleicher Dauer. Hierdurch wird eine große Regelmäßigkeit im Gange erreicht. Die Bewegung kann durch Muskelanstrengung allerdings beschleunigt werden, aber es gibt für jeden Menschen eine bestimmte Schritt- oder Schwingungszahl in einer gegebenen Zeit, die er nicht überschreiten kann. Der schwingende Schenkel ist etwas im Knie gebeugt, damit er nicht anstößt. E. H. Weber hat in Gesellschaft seines Bruders diese Untersuchungen geführt.

Wir haben nun die Pendelbewegung noch in einem andern Sinne zu betrachten. Der höhere Organismus kann nämlich nur dadurch bestehen, daß er die Lebensbedingungen der allgemeinen kosmischen Dinge in gewissem Sinne erfüllt, und erst über denselben seinen eigenthümlichen Bestimmungen zufolge sein Leben dahinführt. So ist die Pflanze den Gesetzen der Schwere nicht minder unterthan, als der Stein, aber in ihrem lebendigen Wuchse drängt sie sich, der planetaren Kraft entgegen, zum Lichte. Die Pflanze ist aber nur durch äußere Gewalt aus dieser Richtung zu wenden; abgekrümmt erhebt sie, mit einer gewissen vitalen Elasticität, den ferneren Wuchs zu der alten Richtung; sie ist aber gezwungen, diese Richtung zu halten, wie eine gespannte Saite. Das Thier endlich, wie Alles, den Gesetzen der Schwere untergeben, wirkt nicht allein durch lebendigen Wachsthum, sondern auch durch die Muskelkraft dieser äußern Gewalt direct entgegen, wie bekannt genug ist.

Aber noch in anderm Sinne wiederholen sich die Erscheinungen niederer Stufen auf den höheren. Wenn wir die Schwere in ihrer Bedeutung erfaßt haben, so finden wir dieselbe in dem Assimilationsprocesse wieder, während das sinnliche Phänomen des Fallens nicht mehr vorhanden ist. Ebenso haben wir sichtliche, mechanische Pendelschwingungen im Organismus betrachtet, und wollen die inneren, analogen, unsichtbaren Bewegungen vergegenwärtigen. Wir betrachten zuvörderst eine allgemein bekannte Sache. Wenn durch Muskelcontraction eine gewaltsame Bewegung vollbracht worden ist, so erschlaffen die gebrauchten Muskeln, und kehren zu der in der Ruhe gewöhnlichen Ausdehnung zurück. Bei sehr reizbaren oder schwachen Menschen tritt aber nach der Contraction nicht sogleich die der Ruhe eigenthümliche mittlere Spannung (Erschlaffung, Ausdehnung) ein, sondern es folgt zunächst ein taktmäßiges Zittern, d. i. eine Reihe abwechselnder Zusammenziehungen und Erschlaffungen. Dieses Zittern ist ganz den Bewegungen eines Pendels analog, welcher, angestoßen, nicht unmittelbar in seine senkrechte Lage zurückkehrt, sondern eine Reihe Schwingungen vollbringt. Die scheinbare und wirkliche Verschiedenheit beider Bewegungen liegt darin, daß der normale Zustand des Pendels örtliche Ruhe (vgl. den Art. Perpendikel), centrale Richtung, der des Organismus aber Bewegung (horizontale), und das aus dieser und der centroperipherischen Richtung resultirende Dasein eine diagonale Lebensbewegung (vgl. auch Parallelogramm der Kräfte) bedingt; daß ferner die Schwingungen nicht nach gleichgültigen Seiten gerichtet sind, wie nach rechts und links, sondern daß sie von Innen nach Außen, und von Außen nach Innen gehen, aus der Welt in den individuellen Organismus und aus dem Organismus in die Welt, die egoistische und universale Richtung des Lebens bezeichnend. Die fragliche Eigenschaft des Organismus kommt auch in vielen Punkten mit der Elasticität überein: der elastische Körper, zusammengedrückt, dehnt sich aus; ausgedehnt, zieht er sich zusammen; hinabgeworfen, springt er wieder empor. Die analogste Bewegung bleibt aber die Pendelbewegung. Die Lunge wird von der atmosphärischen Luft angestoßen: sie weicht, d. h. sie dehnt sich aus; durch die Reaction der den Thorax umschließenden Muskeln wird sie wieder zusammengezogen und stößt die Luft aus. So duldet der Organismus anfänglich den mechanischen Eindruck, wie den dynamischen, eines Fremden, Äußeren, aber alsbald ist er bestrebt, sich des Ungehörigen zu entledigen und in seine vorige Lage zurückzukehren. Bekanntlich bewirken Druck und Stoß auf die Körperoberfläche Geschwulst, die Wundlippen schwellen an; Alles nach demselben Gesetze. Daß die Pendelbewegung, wie auch in den oben angeführten organischen Vorgängen, als *Winkelbewegung* erscheint, ist ganz zufällig und unwesentlich. Wir sehen das an der ganz analogen Bewegung der Spiralfeder, welche uns die Verhältnisse des Lebens in seinen Reactionen gewissermaßen schematisch vor Augen stellt. Wie die Feder an ihrem äußeren freien Ende gedrängt, alle ihre Windungen verengert, dann aber nicht nur in ihre vorige Raumausdehnung zurückkehrt, sondern dieselbe überschreitet: so zieht sich auch der Organismus, an seinen äußern, der Welt zugänglichen, Flächen beeinträchtigt, zusammen, und nachdem das lebendige Ganze die Versehrung empfunden hat, erfolgt die gegenwirkende Ausdehnung von Innen nach Außen sich fortpflanzend. Alle die beschriebenen Schwingungen gehen in bestimmten Zeitmaßen vor sich, und nur in wenigen Fällen ist der Willkür eine Beschleunigung oder Verzögerung gestattet. Was die Beschleunigung betrifft, so ist dieselbe, hier wie in dem ersten Falle, nur bis zu einer gewissen Grenze, und nur mit größerer Muskelanstrengung möglich. Wie beim gewöhnlichen Gehen die Muskelbewegung kaum empfunden wird, obgleich doch die Schrittbewegung ohne dieselbe, trotz aller mechanischen Begünstigung, nicht möglich ist, so wird noch weniger die beim Ein- und Ausathmen nöthige Muskelanstrengung empfunden, in dem Maße, daß der gesunde Mensch gewöhnlich ganz bewußtlos athmet, und, wie man ganz richtig zu sagen pflegt, gar nicht fühlt, daß er eine Lunge und Brust hat. Wird aber das natürliche Maß der Bewegung nicht ganz erfüllt, oder bis zu einem gewissen Grade überschritten, sodaß die Gesetze der Mechanik von den lebendigen eigenwilligen Bestrebungen sehr überwogen werden, so muß der ämulirende Organismus große Kraft aufwenden. Wir nehmen wahr, daß das Aufhalten und Verzögern der Bewegung noch viel schwieriger ist, als das Beschleunigen. Ein übermäßig langsamer Gang greift mehr an, als ein schneller, wovon sich Jeder, der den Versuch bis zu einer gewissen Zeit ausdehnen will, überzeugen kann. Ein unnatürlich schnelles Athemholen kann lange fortgesetzt werden, während tieferes Athmen viel schwieriger, und das völlige Anhalten des Athems ganz unmöglich ist (wenn das Anhalten des Athems möglich wäre, so würde Niemand großer Vorbereitungen zum Selbstmorde bedürfen). Schlaf und Wachen in kürzeren Perioden sich folgen zu lassen, ist zwar lästig, aber beiweitem minder als das Gegentheil. Es ist merkwürdig, daß alle Verzögerung der genannten und anderer Lebensbewegungen wie eine Last, wie ein Gegendruck empfunden wird. So der verlangsamte Gang, der gehemmte Athem, das lange Wachen, grade wie der im Schwingen gehemmte Pendel gegen den haltenden Finger drückt. Je schneller die normalen Schwingungen des Pendels erfolgen, desto schneller muß die Reaction des im Gange Gehinderten empfunden werden. Je schneller eine Bewegung des Organismus zu sein pflegt, desto inniger liegt dieselbe am Leben. So ist der Herzschlag die schnellste Bewegung, langsamer ist das Athmen, noch langsamer die Speiseaufnahme und Entleerung, noch langsamer der Wechsel des Wachens und Schlafes. Diese nach den Gesetzen der Pendelbewegung erfolgenden Veränderungen bedingen die *Periodicität* (s. d. Art.) der Lebenserscheinungen.

Die Nichtachtung der Wahrheit, daß gewisse Gesetze *allem* Leben gebieten, hat in dem durchsehenen Kreise sonderbare Irrungen veranlaßt. Man machte zuerst bei Gelegenheit der Arzneiprüfungen die Beobachtung, daß nach einer gewissen Einwirkung eine Reihe von Veränderungen wurde, in welcher sich diametral entgegengesetzte Zustände offenbarten. In einem andern Kreise waren solche Erscheinungen längst bekannt, indem man von jeher die Fieberparoxismen mit Frost und Hitze auftreten sah. Hier fand sich, nachdem gesunde Menschen eine mäßige Quantität irgend eines Giftes verschluckt hatten, etwa Diarrhöe und Verstopfung, langsamer und sehr beschleunigter Puls, Traurigkeit und übergroße Lustigkeit. Dergleichen Wechselzustände wurden nicht bei allen Arzneiwirkungen beobachtet, und von Samuel Hahnemann als sehr eigenthümliche und geheimnißvolle Ereignisse aufgefaßt, und Wechselwirkungen genannt. Diese sogenannten Wechselwirkungen sind die einfachen Erscheinungen der allem Lebendigen unter gewissen Bedingungen eignen pendelartigen Beweglichkeit, und ihr Wesen kann, soweit überhaupt Naturerscheinungen einer Aufklärung fähig sind, nach den obigen Erörterungen gar nicht mehr dunkel, oder wenigstens nicht sonderlich erscheinen. Viel eher könnte es befremden, daß man nicht *alle* Arzneien (Gifte) gleiche schwankende Bewegungen im Organismus anregen sieht.

Es ist schon vorhin angedeutet worden, wie schwierig es ist, den schwingenden Pendel vor der Zeit zu fixiren, und wie im Organismus solche Störung ganz unmöglich, oder, wo möglich, höchst nachtheilig ist (vgl. d. Art. Periodicität). Wenn wir den längeren Pendel langsame, den kürzeren schnelle Schwingungen vollbringen sehen, so möchten wir a priorisch annehmen, daß etwas Analoges in den Organismen vorkommen müßte, falls die Behauptung, daß die organischen Bewegungen gleich Pendelschwingungen, richtig sei. Wir erkennen auch in der That etwas dergleichen, indem die Dauer gewisser Perioden von der körperlichen Masse abhängend gefunden wird. Je größer die Wassermasse, desto größer die Wellen; je höher die menschliche Architektur, desto langsamer der Pulsschlag. Je größer ein Organismus, desto langsamer sein Wachsthum. Dieses Letzte ist jedoch nicht allgemein gültig. Wir sehen das Rind und Pferd viel schneller erwachsen, als den Menschen; während freilich der Elephant, der Walfisch und andere sehr große Thiere ein

viel langsameres Wachsthum zeigen. Sicherer ist noch die Dauer der Trächtigkeit und die Anzahl der zugleich erzeugten Jungen an die Körpermasse gebunden, obgleich herüber und hinüber Abweichungen vorkommen müssen; so tragen die kleinen Fledermäuse gewöhnlich nur *ein* Junges; die Raubthiere, Schweine ꝛc. sehr viele. Die Dauer der Trächtigkeit ist aber bei sehr fruchtbaren Thieren geringer. Wir können, trotz dieser scheinbaren Unregelmäßigkeiten, doch die Analogie wiederum anordnen, wenn wir beachten, daß ein schwererer Pendel schneller schwingen muß, als ein leichter; und man könnte wenig dagegen einwenden, wenn die Ernährung vieler Jungen im Fruchthälter mit einer größeren Beschwerung des Pendels verglichen würde. Die Langsamkeit des Pulses bei langgebauten Menschen ist eins der bedeutendsten Merkmale der Pendelbewegung. Man sollte sich versucht fühlen, zu glauben, daß der Puls in kurzen Körpern vielmehr langsamer sein könnte, weil hier das Blut immer noch zeitig genug an seine Bestimmungsorte käme, während es auf dem langen Wege eher einer Beschleunigung bedürfte; aber umgekehrt. Die Athmung ist durchschnittlich bei kleinen Thieren schneller sich bewegend, als bei großen. Als einer mehr paradoxen Analogie gedenken wir des Umstandes, daß bei Thieren mit kurzem Darmkanale das Nahrungsbedürfniß schneller wiederkehrt, als bei solchen, deren tractus intestinorum lang ist.

Wieder mehr Annäherung ist darin zu finden, daß lange Muskeln sich nicht so schnell zu bewegen scheinen, als kurze. Wenigstens bewegen sie sich nicht so energisch, und bekanntlich lehrt die Physik, daß die Kraft als Product der Masse und Schnelligkeit zu denken ist. Es ist sehr denkbar, daß dieser Umstand zum großen Theile mit der durch kurze Extremitäten begünstigten, durch lange beschränkten Schnelligkeit der Ortsbewegung (wovon wir oben sagten) zusammenhänge; mühsame Distinctionen können hier zu nichts führen. Recht auffallend ist die pendelartige Bewegung in der Regenbogenhaut des Auges, welche sich, von starkem Lichte berührt, so zusammenzieht, daß die Pupille verengert wird. Wirkt nun ein geeignetes Licht plötzlich auf das Auge ein, so zieht sich die genannte Haut mit ihren Kreisfasern zusammen, erweitert sich aber wieder, und vollbringt eine Reihe regelmäßiger Schwingungen, bis endlich die Zusammenziehung bei fortwirkendem Lichte dauernd wird, oder bei entferntem der vorigen Ausdehnung weicht. Aber auch noch weiter wiederholt sich die Pendelbewegung räumlich; im Herzschlage. Wenn sich das Herz zusammenzieht, so schwingt es, am Aortenbogen hängend, mit seiner Spitze, welche sich zugleich etwas krümmt, nach Vorn, und schlägt an die Wand des Brustkastens; bei der Ausdehnung sinkt es wieder zurück. Die Form der Bewegung ist aber in der That hier ganz zufällig, und wird durch fremdartige Dinge motivirt, während die wesentliche Bewegung selbst keine andern Motive hat, als jede Pendelbewegung.

Wir müssen auch noch die complementären Farben den Gesetzen der Pendelbewegung unterordnen. Die Schwingungen würden nicht anders zu betrachten sein, als die im Organismus vorkommenden. Wie sie sich hier von Innen nach Außen, und von Außen nach Innen richten, so hat eine jede Urfarbe ihr Complement in einer secundären. Das Auge, von einer gewissen Farbe stark getroffen, erzeugt aus sich entweder daneben, oder successiv die complementäre. Doch ist es mehr geneigt, auf Urfarben zu reagiren und somit secundäre zu erzeugen, als umgekehrt.

Wie der pendelartig schwingende Körper zu fallen bestrebt ist, und einseitig angeheftet im Falle aufgehalten wird, so wird der Organismus, indem er bereit ist, sich dem Ganzen hinzugeben, durch seine einseitige Anheftung (individuelle Natur) zurückgehalten und vollbringt durch stete Gegenwirkung der Beiden seine Schwingungen. Der fallende Körper strebt nur nach dem Planeten als solchem, der Organismus desgleichen, hat aber besondere Neigung zu den Elementen.

In den psychischen Kreisen nennen wir eine schnelle pendelartige Bewegung: Unentschlossenheit, wenn sie sich auf Willensäußerung bezieht, entbehren aber für andere analoge Bewegungen entsprechender Bezeichnungen. Man betrachtet diese Unentschlossenheit mit Recht als ein Zeichen von Schwäche; wie der nicht lebenskräftige Muskel, wenn er sich bewegt, zittert, so zittert der schwache Wille, wenn er zur Thätigkeit veranlaßt wird. Diese Analogie wird noch deutlicher, wenn wir uns der Bewegung des Wagebalkens erinnern, welche sich von der Pendelbewegung nicht unterscheidet. Wie in der physischen Reaction schon ein der Pendelbewegung Entsprechendes gefunden worden ist, so können wir auf ein Gleiches die psychischen Gegenwirkungen zurückführen. Wir kennen die Schwierigkeit, den Willen des Andern zu determiniren, und das an sich wunderliche Phänomen, daß ein Mensch, wenn er sich am meisten gegen eine Zumuthung sträubt, der Willfährigkeit am nächsten ist. Solches geschieht von Menschen, die sehr reizbar und beweglich sind; sie fliehen, wie der leise aufgehängte Pendel, weit vor der fremden Berührung, nähern sich bald eifrig, und können ebenso wieder zurückgestoßen werden, je nachdem die Umstände das Ende der alternativen Deliberation herbeiführen. Es ist von großer Wichtigkeit, das Gemeinsame solcher durch die ganze Welt gehender Bewegungen hervorzuheben; man muß nur nicht vergessen, daß, vermöge der Synergie sämmtlicher Richtungen eines besondern Lebensverhältnisses, jede Bewegung ganz eigenthümlich modificirt erscheinen muß, indem sie namentlich ihrer Erscheinung zum Theil entäußert wird, wie die cylindrischen Bienenzellen durch wechselseitige Beschränkung und Drängung der zugleich nach angeborenem Triebe schaffenden Individuen sechseckig werden.

Man könnte auch den Organismus in seinen vitalen Bewegungen schematisch darstellen, indem man aus einem Anheftungspunkte eine Anzahl Pendel verschiedener Längen schwingen machte. Die Anschauung dieser sich durch einander in den verschiedensten Zeiträumen bewegenden Körper bringt ein so eigenthümliches Bild in die Seele, daß erst recht deutlich werden wird, warum die meisten Pendelbewegungen im Organismus so unsichtbar sein müssen.

(*G. O. Piper.*)

PENDELOQUEN. Man bezeichnet mit diesem Namen überhaupt kleine Verzierungsstücke, welche an Schmuck (Ohrringe, Uhrketten, Tuchnadeln rc.), ferner an Leuchter u. dergl. angehängt werden, und entweder aus Gold, Edelsteinen oder geschliffenem Glase bestehen. An Ohrgehängen haben diese Theile sehr gewöhnlich eine längliche (oben zugespitzte, unten breitere und stumpfe oder abgerundete), gleichsam birn- oder tropfenartige Gestalt; und dann pflegt man sie insbesondere auch Tropfen zu nennen. Von der Anwendung zu solchem Zwecke erhalten die länglichen, an einem Ende zugespitzten Diamanten in der Sprache der Juweliere und Steinschneider den Namen Pendeloquen. (*Karmarsch.*)

PENDENNIS-CASTLE (nördl. Br. 50° 9', westl. L. 5° 1' nach dem Meridian von Greenwich), heißt ein von Heinrich VIII. zur Beschützung des Hafens von Falmouth in der englischen Grafschaft Cornwall angelegtes und von der Königin Elisabeth stärker befestigtes Fort. (*G. M. S. Fischer.*)

PENDEREL, ein Bauerngeschlecht, das sich in der englischen Geschichte unsterblich gemacht hat. Sechs Brüder dieses Namens waren zu Hobbal-Grange, in dem Kirchspiel Tong, Shropshire, geboren. Drei davon, Johann, Georg und Thomas, dienten während des Bürgerkrieges in König Karl's I. Heere, und war Thomas bei Stow geblieben, während Johann und Georg den Krieg überlebten, und 1651 als Forsthüter zu Boscobel, in Shropshire, nordöstlich von Bridgenorth, an der Grenze von Staffordshire, standen. Von den andern drei Brüdern besorgte Wilhelm das Hauswesen, Humfried arbeitete in der Mühle und Richard hatte ein Stück des Gutes Hobbal-Grange in Pacht. Als Karl II. von dem Schlachtfelde bei Worcester flüchtete, vernahm er von dem Grafen von Derby, daß Boscobel-house in dem Augenblicke für ihn die sicherste Zuflucht sein würde. Dahin ließ er sich daher von Karl Giffard nach dem Besitzthum seiner Familie Whiteladies, das von Boscobel wenig entlegen, geleiten. Früh am Morgen des 4. Sept. 1651 erreichten sie Whiteladies nach einem Ritte von 25 Meilen. Während das Gefolge einer kurzen Ruhe genoß, bereitete sich in dem abgelegensten Gemache der König zu der ihm bestimmten Rolle. Mit kurz abgeschnittenem Haar, einer passenden Färbung auf Gesicht und Händen, unter einem groben abgetragenen Bauernkittel, eine schwere Holzart unter dem Arm, konnte er, nach seinen harten Zügen, sehr wohl für das gelten, was er vorzustellen sich bemühte. Bei Anbruch des Tages nahmen die Wenigen, welche um das Geheimniß wußten, in lebhafter Bewegung von dem König Abschied; sie riefen ihre Cameraden zu Roß, und ritten von dannen, ohne eben zu wissen wohin, aber in der tröstlichen Hoffnung, die Aufmerksamkeit der Verfolger zu beschäftigen und so die Flucht des Königs zu erleichtern. Es verging auch kaum eine Stunde, als ein von dem Obersten Cotsal angeführter Reiterhaufen herangesprengt kam; alle Schlupfwinkel von Whiteladies wurden durchsucht; als der König nirgends zu finden war, verfolgten diese Reiter hastig die Spur des frischen Hufschlages. Karl hatte inzwischen Boscobel erreicht, geführt von Franz Yates, einem zu dem Ende von Karl Giffard zurückgelassenen Diener, der mit einer Schwester der Penderel verheirathet war. In dem neuen Zufluchtsorte angelangt, konnte Karl sich der Betrachtung nicht erwehren, daß er sich gänzlich in der Gewalt der Penderel befinde, und daß die Armuth dieser Leute sie leicht in Versuchung führen könnte, an ihm zum Verräther zu werden. Er erinnerte sich aber des ihnen von Derby und Giffard gegebenen Zeugnisses: es seien die Penderel Männer von geprüfter Treue, auf dem Gute geboren, erzogen in den Grundsätzen einer treugesinnten katholischen Familie; schon öfter hätten sie sich bereit finden lassen, um Priester und Cavaliere den Nachstellungen der Civil- und Militairbehörden zu verbergen. Richard Penderel, „the trusty Richard," führte den König in das Dickicht des anstoßenden Waldes, und es vertheilten sich die Brüder auf verschiedene Punkte, um die allenfallsige Annäherung eines Feindes zu erspähen, und sodann ein Warnungszeichen zu geben. Naß und stürmisch war der Tag; Richard bemerkte, daß der hohe Gast der Ermüdung erlag, die eine Folge von den Anstrengungen auf dem Schlachtfelde und von den Schrecknissen der Flucht war; er breitete unter einer mächtigen Eiche eine Bettdecke aus, dem König zum Lager, er ließ durch seine Schwester Yates das Beste, zu welchem das Haus vermögend, auftischen. Nicht wenig erschrak Karl bei dem unerwarteten Anblicke eines Weibes; „darf ein bedrängter Cavalier Euch vertrauen?" fragte er die Unbekannte. „Ja, Herr," entgegnete sie, „eher wollte ich sterben, als Euch verrathen." Es kam auch Jane, der Penderel Mutter, und sie küßte des Königs Hände, fiel auf die Knie, Gott zu danken, „daß er ihre Söhne erkoren habe, um, wie sie zuversichtlich hoffe, ihres Herrn und Königs Leben zu erhalten." In dem Gespräch mit dem trusty Richard gerieth Karl auf den Gedanken, bei einem Ritter in Wales Schutz zu suchen, bis sich eine Gelegenheit zur Überfahrt nach Frankreich ergäbe. Noch an demselben Abend sollte das Unternehmen versucht werden. Um neun Uhr verließen die beiden den Wald, vorläufig in der Absicht, im Hause eines katholischen Recusanten zu Madley, unfern der Severne, zwischen Bridgenorth und Shrewsbury, einzukehren. Der Weg wurde ihnen durch einen zufälligen Schrecken sehr verlängert, sie trafen zu Mitternacht in Madley ein, der Eigenthümer, Wolf, aus dem Schlafe geweckt, zeigte sich sogleich bereit, die Reisenden aufzunehmen, aber es bestürmten ihn lange Besorgnisse um ihre Sicherheit. Häufig ward er durch Einquartierung belästigt, eben lagen in dem Dorfe zwei Milizcompagnien und kürzlich hatte ein Zufall die Entdeckung und Durchstöberung von allen Verstecken in seinem Hause veranlaßt. Inzwischen war es bei dem grauenden Tage für die Flüchtlinge gleich gefährlich vorwärts oder rückwärts zu gehen; sie verbargen sich in der bei dem Hause angebauten Scheuer, und Kundschafter gingen aus, um die Punkte in Augenschein zu nehmen, auf denen der Fluß überschritten werden könne. Diese kamen aber mit der einstimmigen Meldung zurück, daß jede Brücke besetzt und ein Boot nirgends aufzutreiben sei. Die Nacht mußte

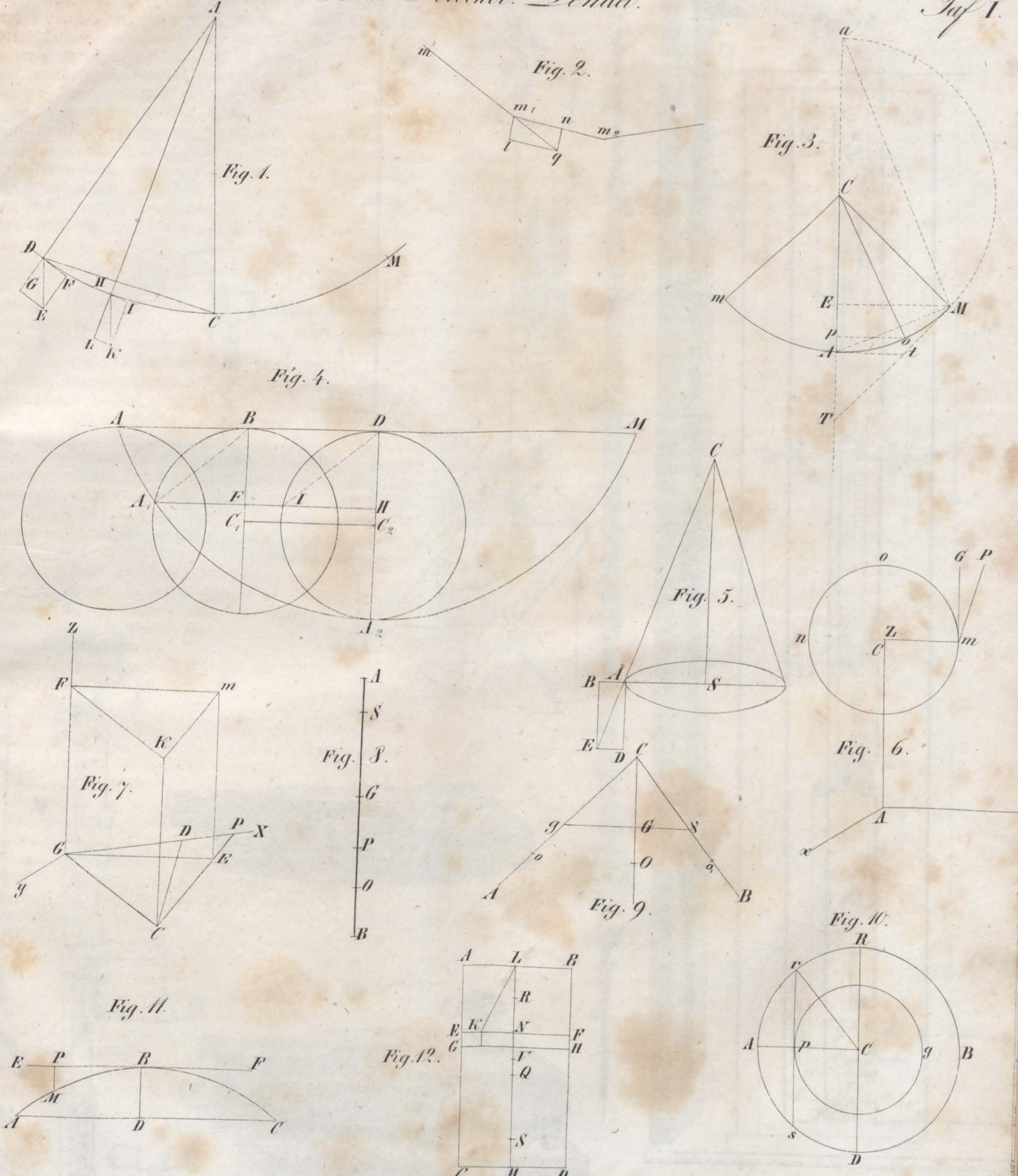

Fig. 1.
A D G F H I E C M h K
Fig. 2.
m m1 n m2 l q
Fig. 3.
a C m E M p A o t T
Fig. 4.
A B D M A1 F I H C1 C2 A2
Fig. 5.
C A S B E D
Fig. 6.
o G P n Z C m A x
Fig. 7.
Z F m K G D P X E y C
Fig. 8.
A S G P O B
Fig. 9.
C g G s o O A B
Fig. 10.
R r A p C g B s D
Fig. 11.
E P R F M A D C
Fig. 12.
A L B R E K N F G V H Q S C M D

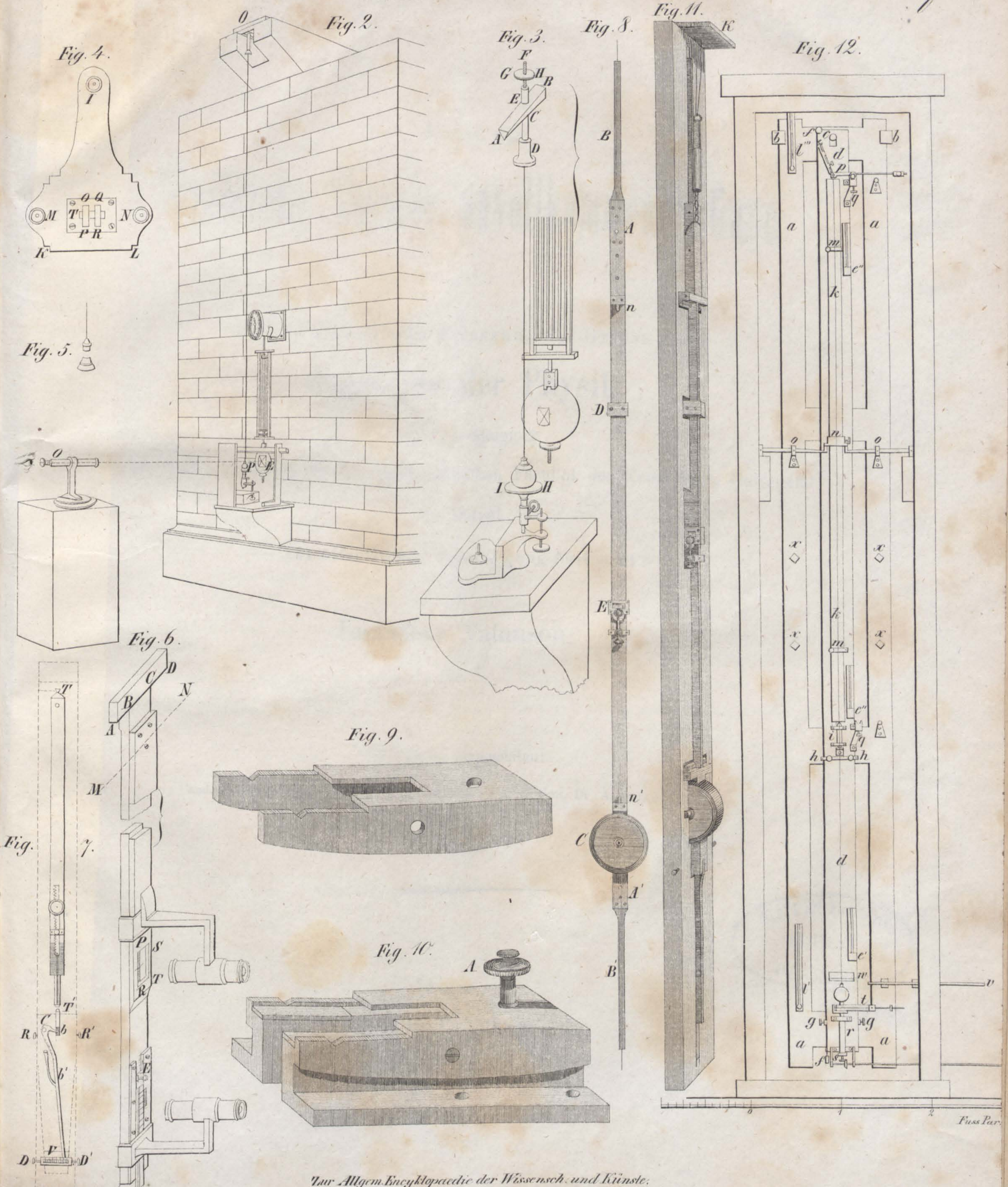
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fuss Par.