# Einige Sätze

über

# DIE CYCLOIDE

vom

Schulinspector *W. Nerling*.

## Einladungsschrift

zur

öffentlichen Prüfung

in

der Privatschule zu Hasenpoth

am 26. Juni 1842.

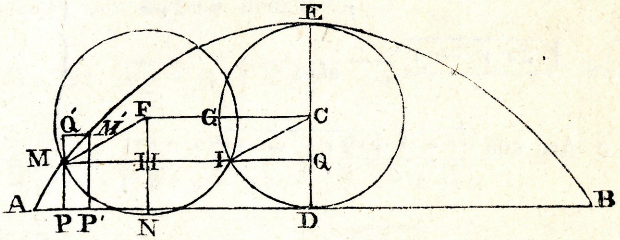
Mitau,
gedruckt bei Johann Friedrich Steffenhagen und Sohn.

1842.

Der Druck dieser Schrift wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.

Riga, am 31. März 1842.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.




**D**ie Cycloide ist eine transscendente krumme Linie, welche mittelst eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises, während dieser sich auf einer geraden Linie fortbewegt, beschrieben wird. Ein sinnliches Bild giebt ein Nagel eines Wagenrades, der eine Cycloide in der Luft beschreibt.

$AEB$ stellt eine solche krumme Linie dar, $EDE$ heifst der Erzeugungskreis, $AB$ die Basis, $E$ der Scheitel der Cycloide.

1) Aufgabe. Die Gleichung der Cycloide zu finden, wenn $A$ der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist.

Auflösung. $M$ sei ein Punkt in der Curve, $AP = x$, $PM = y$ und Winkel $MFN = \alpha$; ferner ziehe man $MH$ parallel $AP$ und $FN$ parallel $MP$.

Aus der Entstehung der Cycloide folgt:

$AD = EGD = r\pi$, wenn $r$ der Halbmesser des Erzeugungskreises und $\pi$ der halbe Kreisumfang für den Halbmesser als Einheit ist; eben so $AN = MN = r\alpha$ also

$$\left.\begin{array}{l} x = AN - MH = r\,(\alpha - \sin\alpha) \\ y = NF - FH = r\,(1 - \cos\alpha) \end{array}\right\} \quad (A)$$

Um $x$ durch $y$ auszudrücken, eliminire man $\alpha$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{r-y}{r}, \quad \alpha = \text{Arc}\cos\frac{r-y}{r} \\
1-\cos\alpha^2 &= \sin\alpha^2 = 1-\left(\frac{r-y}{r}\right)^2 = \frac{2ry-y^2}{r^2} \\
\sin\alpha &= \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r} \quad \text{also} \\
x &= r\ \text{Arc}\cos\frac{r-y}{r}\ \sqrt{2ry-y^2}
\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

2) **Aufgabe.** Die Gleichung der Cycloide zu finden, wenn $E$ der Anfangspunkt des Coordinatensystems ist.

**Auflösung.** Man ziehe den Durchmesser $ED$ und $MQ$ parallel $AD$, $CJ$ parallel $MF$; so ist $EQ = x$, $QM = y$ und $ECJ = \beta = \pi - \alpha$;

$$x = EC + CQ = r\ (1-\cos\beta)$$
$$y = MJ + JQ = r\ (\beta + \sin\beta)$$

Man verfahre hier ebenso wie bei $(B)$ so erhält man

$$y = r\ \text{Arc}\cos\frac{r-x}{r} + \sqrt{2rx-x^2} \qquad (C)$$

3) **Lehrsatz.** Die halbe Cycloide ist dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich.

**Beweis.** Es seien die Coordinaten zweier Punkte in der Curve $x, y$; $x + \triangle x$, $y + \triangle y$, und $x, y$ u. s. w. sind Funktionen vom $t$; so ist

$$\text{Chor} = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\triangle s}{\triangle t}\,\frac{\text{Chor}}{\triangle s} = \sqrt{\left(\frac{\triangle x}{\triangle t}\right)^2 + \left(\frac{\triangle y}{\triangle t}\right)^2}$$

Nimmt man nun an, dafs die Curve aus unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten besteht, so ist

$$\text{Lim}\ \frac{\triangle s}{\triangle t}\ \frac{\text{Chor}}{\triangle s}{}^{*} = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

wo $ds$ das Differential des Bogens bedeutet.

$$y = r\ \text{Arc cos}\ \frac{r - x}{r} + \sqrt{2rx - x^2}$$

$$dy = \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}} + \frac{(r - x)\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = \frac{(2r - x)\,dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = dx\sqrt{\frac{2r - x}{x}}\ \text{folglich}$$

$$\left.\begin{aligned} ds &= dx^2 + \left(\frac{2r - x}{x}\right) dx^2 = dx\sqrt{\frac{2r}{x}}\,, \\ s &= \sqrt{2r}\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2rx} + \text{Const.} \end{aligned}\right\}\quad (D)$$

Wird das Integral von $x = o$ bis $x = 2r$ genommen; so wird $s = 4r$, wie zu beweisen war.

4) Aufgabe. Die Determinanten ** der Sekante $(\xi, \eta)$, der Tangente $(\xi', \eta')$ und der Normale $(\xi'', \eta'')$ zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Coordinaten zweier Punkte in der Cycloide durch $x, y$ und $x + \triangle x$, $y + \triangle y$; so haben wir

$$\xi = \frac{x + \triangle x - x}{\text{Chor}} = \frac{\triangle x}{\text{Chor}}, \quad \eta = \frac{y + \triangle y - y}{\text{Chor}} = \frac{\triangle y}{\text{Chor}} \qquad (E)$$

oder $\xi = \dfrac{\triangle x}{\triangle s}\,\dfrac{\triangle s}{\text{Chor}}$, $\quad \eta = \dfrac{\triangle y}{\triangle s}\,\dfrac{\triangle s}{\text{Chor.}}$

---

* $\text{Lim}\ \dfrac{\text{Chor}}{\triangle s} = \text{Lim}\ \dfrac{\triangle s}{\text{Chor}} = 1.$

** Siehe: Die vierte Vorlesung über mathematische Analysis von *Bartels.*

Lasse man nun den Punkt $x + \triangle x$, $y + \triangle y$ sich dem Punkte $x\,y$ unendlich nähern; so nähert sich die Sekante unendlich einer andern geraden Linie, welche die Berührungslinie oder Tangente der Curve genannt wird. Folglich sind:

$$\xi' = \overset{\triangle t}{\mathrm{Lim}} \frac{\triangle x}{\triangle s} \; \frac{\triangle s}{\mathrm{Chor}} = \frac{d\,x}{d\,s}$$

$$\eta' = \overset{\triangle t}{\mathrm{Lim}} \frac{\triangle y}{\triangle s} \; \frac{\triangle s}{\mathrm{Chor}} = \frac{d\,y}{d\,s}$$

Setzt man für $d\,x$ u. s. w. die Werthe, so ist, da

$$d\,s = d\,x \sqrt{\frac{2\,r}{x}} \quad \text{und} \quad d\,y = d\,x \sqrt{\frac{2\,r - x}{x}}$$

$$\xi' = \sqrt{\frac{x}{2\,r}} \quad \text{und} \quad \eta' = \sqrt{\frac{2\,r - x}{2\,r}} \qquad (F)$$

Um $\xi'$, $\eta'$ durch den Winkel auszudrücken, setzt man aus $(C)$ den Werth für $x$; so erhält man

$$\xi' = \sin \tfrac{1}{2}\beta, \quad \eta' = \cos \tfrac{1}{2}\beta.$$

Eine senkrechte Gerade auf die Tangente eines Punktes in der Curve wird die Normale dieses Punktes genannt. Daher hat man

$\xi'\,\xi'' + \eta'\,\eta'' = o$ also $\xi'' : \eta'' = -\eta' : \xi'$ und da $\xi''^2 + \eta''^2 = 1 = \xi'^2 + \eta'^2$ folglich $\xi'' = -\eta'$ und $\eta'' = \xi'$.

Erklärung. Wenn die Coordinaten zweier Curven für einen Punkt einander gleich sind, so schneiden sie sich oder haben eine Berührung der nullten Ordnung. Sind auch die Differentialien der Coordinaten dieser Curven für den Punkt einander gleich, so haben sie eine Berührung der ersten Ordnung und wenn die zweiten Differentialien gleich sind, eine Berührung der zweiten Ordnung u. s. w.

Hat ein Kreis mit einer gegebenen ebenen Curve eine Berührung der zweiten Ordnung, so nennt man ihn den Krümmungskreis, dessen Halbmesser den Krümmungshalbmesser.

5) **Aufgabe.** Den Krümmungshalbmesser $\varrho$ zu finden.

**Auflösung.** Seien $a, b$ die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises; $x', y'$ die Coordinaten eines Punktes in derselben und $\varrho$ dessen Radius; so ist

$$(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = \varrho^2$$

Da dieser Kreis durch den Punkt $(x, y)$ der Cycloide gehen soll; so hat man

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \varrho^2$$

Betrachtet man zuerst die Berührung der ersten Ordnung, also wenn $dx' = dx$ und $dy' = dy$; so erhält man aus den Gleichungen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \varrho^2$$

$$(x - a)\, dx + (y - b)\, dy = o$$

die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises

$$\left.\begin{aligned} a &= x - \frac{dy}{ds}\varrho \\ b &= y + \frac{dx}{ds}\varrho \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

Hieraus sieht man, dafs die Determinanten von $\varrho$ gleich den Determinanten der Normale; folglich liegt $\varrho$ in der Normale.

Ist auch $d^2x' = d^2x$, $d^2y' = d^2y$; so hat man noch eine dritte Gleichung:

$$(x - a)\, d^2x + (y - b)\, d^2y + ds^2 = o$$

Setzt man aus $(G)$ $x - a = \frac{dy}{ds}\varrho$, $y - b = -\frac{dx}{ds}\varrho$ in diese dritte Gleichung, so hat man

$$\frac{\varrho}{ds}(dy\, d^2x - dx\, d^2y) = -ds^2$$

$$\varrho = \frac{ds^3}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Für $\overset{\beta}{d}x$ * $= r \sin\beta$, $\overset{\beta}{d^2}x = r\cos\beta$

$$\overset{\beta}{d}y = r(1+\cos\beta),\quad \overset{\beta}{d^2}y = -r\sin\beta$$

$$\overset{\beta}{d}s^2 = 4r^2\cos^2 \tfrac{1}{2}\beta \text{ gesetzt, ist}$$

$$\varrho = -4r\cos \tfrac{1}{2}\beta.$$

Im Scheitel ist $\beta = o$, also $\varrho = -4r$.

Erklärung. Sucht man eine Gleichung zwischen $a$ und $b$; so erhält man die Curve, in welcher alle Mittelpunkte der Krümmung der Cycloide liegen. Man nennt diese Curve der Mittelpunkte die Evolute der gegebenen Curve, diese gegebene Curve selbst aber die Evolvente von jener.

6) Aufgabe. Eine Gleichung der Evolute zu finden.

Auflösung. Setzt man für $dx$, $dy$, $d^2x$ u. s. w. die Werthe in die Gleichung ($G$), so hat man

$$a = x + 4r\cos^2 \tfrac{1}{2}\beta,\quad b = y - 2r\sin\beta.$$

Für $\beta$ und $y$ aus ($C$) gesetzt,

$$a = x + 2(2r - x)$$

$$b = r \operatorname{Arc\,cos} \frac{r-x}{r} - \sqrt{2rx - x^2}$$

$$\text{also } x = 4r - a$$

daher die Gleichung der Evolute:

$$b = r \operatorname{Arc\,cos} \frac{r-(4r-a)}{r} - \sqrt{2r(4r-a) - (4r-a)^2}$$

welches wieder dieselbe Cycloide mit der gegebenen ist, aber in verkehrter Lage.

---

* $\overset{\beta}{d}x$ soll heifsen: das Differential von $x$ in Bezug auf $\beta$, also $= \frac{dx}{d\beta}$.

7) Aufgabe. Den Flächeninhalt der Cycloide zu finden.

Auflösung. Es sei der Flächeninhalt $AMP = F$; $AP = x$, $MP = y$, $PP' = \triangle x$, $MQ' = \triangle y$ und $MM'\,PP' = \triangle F$; so ist $\triangle F > y \triangle x$ und $\triangle F < (y + \triangle y) \triangle x$

$$\text{oder} \quad y \frac{\triangle x}{\triangle t} < \frac{\triangle F}{\triangle t} < (y + \triangle y) \frac{\triangle x}{\triangle t}$$

Hiervon die Gränze in Bezug auf $\triangle t$, giebt $y\,dx = dF$ und $F = \int y\,dx$.

Aus der Gleichung ($B$) erhält man:

$$x = r \operatorname{Arc\,cos} \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

$$dx = \frac{r\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}} - \frac{(r-y)\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}}$$

$$\text{also} \int y\,dx = \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}} = \tfrac{3}{2} r \int \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}} - \frac{y}{2} \sqrt{2ry-y^2}.$$

Setzt man für $y = z^2$, $dy = 2z\,dz$; so wird

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}} = 2 \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{2r-z^2}} = 2r \int \frac{dz}{\sqrt{2r-z^2}} - z\sqrt{2r-z^2}$$

folglich ist, wenn man $y$ und $dy$ wieder setzt

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{2ry-y^2}} = 2r \operatorname{Arc\,sin} \left| \sqrt{\frac{y}{2r}} \right. - \sqrt{2ry-y^2}$$

$$= r \operatorname{Arc\,cos} \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}$$

und also

$$\int y\,dx = \tfrac{3}{2} r^2 \operatorname{Arc\,cos} \frac{r-y}{r} - \tfrac{1}{2}(3r-y)\sqrt{2ry-y^2} + \text{Const.}$$

Nimmt man das Integral von $y = o$ bis $y = 2r$, so erhält man die Fläche der halben Cycloide $F = \tfrac{3}{2} r^2 \pi$.

Die Fläche der Cycloide ist also dreimal so grofs, als der Inhalt des Erzeugungskreises.

8) Aufgabe. Den durch Umdrehung der Cycloide entstandenen Körper zu finden.

Auflösung. Dreht sich die Cycloide um die Achse der $x$, so sind die Schnitte senkrecht auf diese Achse Kreise, deren Inhalt $= \pi y^2$; folglich der durch Umdrehung der Cycloide entstandene Körper

$$= \pi \int y^2 dx.$$

Setzt man aus ($A$) die Werthe für $y$ und $dx$, so wird

$$\pi \int y^2 dx = \pi \int r^3 (1 - \cos\alpha)^3 d\alpha$$

$$= \pi r^3 \left[\int d\alpha - 3\int \cos\alpha\, d\alpha + 3\int \cos\alpha^2 d\alpha - \int \cos^3\alpha\, d\alpha\right]$$

Es ist aber:

$$\int d\alpha = \alpha + \text{Const}$$

$$3\int \cos\alpha\, d\alpha = 3 \sin\alpha + \text{Const}$$

$$3\int \cos\alpha^2 d\alpha = \tfrac{3}{2}\int (1 + \cos 2\alpha)\, d\alpha = \tfrac{3}{2}\int d\alpha + \tfrac{3}{2}\int \cos 2\alpha\, d\alpha$$
$$= \tfrac{3}{2}\alpha + \tfrac{3}{4} \sin 2\alpha + \text{Const}$$

$$\int \cos\alpha^3 d\alpha = \tfrac{1}{4}\int \cos 3\alpha\, d\alpha + \tfrac{3}{4}\int \cos\alpha\, d\alpha = \tfrac{1}{12} \sin 3\alpha + \tfrac{3}{4} \sin\alpha + \text{Const}$$

also ist

$$\pi \int y^2 dx = \pi r^3 \left[\tfrac{5}{2}\alpha - \tfrac{15}{4} \sin\alpha + \tfrac{3}{4} \sin 2\alpha - \tfrac{1}{12} \sin 3\alpha\right] + \text{Const}$$

demnach der ganze Körper

$$2\pi r^3 \int_0^{\pi} (1 - \cos\alpha)^3 d\alpha = 5\pi^2 r^3.$$

---

Ehe ich noch einige merkwürdige Eigenschaften der Cycloide darlege, will ich die dazu nöthigen Sätze aus der Variationsrechnung behandeln.

Die Variationsrechnung hat zum Zweck einen Ausdruck, der schon nach einem Gesetze der Veränderlichkeit differentiirt wurde, nach einem andern Gesetze der Veränderlichkeit zu differentiiren. Um dieses durch ein Zeichen auszudrücken, bedient man sich, wie in der Differentialrechnung des $d$, hier des $\delta$ d. h. hat man eine Funktion von $t$, $x$, $dx$ u. s. w. wo $x = f\,(t,\, \Theta)$, $t$ und $\Theta$ aber von einander unabhängig sind; so bezeichnet man das Differential dieser Gröfse in Bezug auf $t$ durch $d$ und das Differential in Bezug auf $\Theta$ durch $\delta$. Ob man eine veränderliche Gröfse erst differentiirt und dann variirt oder umgekehrt, hat auf das Resultat der Rechnung keinen Einflufs, oder

$$\delta d x = d \delta x$$

denn da $\delta\,(x + dx) = \delta x + \delta d x$ ist; so haben wir

$$\delta d x = \delta\,(x + d x) - \delta x.$$

Aber in $\delta x$ die Variable $x$ in $x + dx$ übergehen lassen, und so dann $\delta x$ davon abziehen, heifst $\delta x$ differentiiren; daher ist auch

$$\delta\,(x + d x) - \delta x = d \delta x.$$

Ebenso ist es einerlei, ob ich erst variire und dann integrire oder umgekehrt, also

$$\delta \int V d x = \int \delta\,(V d x)$$

Setzt man $\int V d x = W$, so folgt

$$d W = V d x \quad \text{und} \quad \delta d W = d \delta W = \delta\,(V d x)$$

folglich $\delta W = \int \delta\,(V d x)$ für $W$ den Werth gesetzt, ist:

$$\delta \int V d x = \int \delta\,(V d x).$$

Es sei $u = \varphi\,(t,\, x,\, d x \ldots \overset{n}{d} x) = d v = \psi\,(t,\, x,\, d x \ldots \overset{n-1}{d} x)$, so kann man die Variationen von $u$ und $v$ immer durch folgende Reihen darstellen:

$$\delta u = P \delta x + P_1 \delta d x + \ldots\ldots P_n \delta \overset{n}{d} x$$

$$\delta v = Q \delta x + Q_1 \delta d x + \ldots\ldots Q_{n-1} \delta \overset{n-1}{d} x$$

nun ist $\delta u = \delta d v = d \delta v$ also

$$\delta u = d \delta v = \begin{array}{r|r|r|l} d Q \delta x + Q & \delta d x + Q_1 & \delta d^2 x \ldots Q_{n-2} & \delta \overset{n-1}{d} x + Q_{n-1} \delta \overset{n}{d} x \\ + d Q_1 & + d Q_2 & + d Q_{n-1} & \end{array}$$

Hieraus folgt: $P = dQ\,,\quad P_1 = Q + dQ_1 \ldots\ldots$

$$\underset{n-1}{P} = \underset{n-2}{Q} + d\underset{n-1}{Q}\,,\quad \underset{n}{P} = \underset{n-1}{Q}$$

Nun ist $d\delta v$ integrabel und

$$dQ - d(Q + dQ_1) + d^2(Q_1 + dQ_2) \ldots\ldots \pm \overset{n}{d}\underset{n-1}{Q} = O$$

daraus folgt wenn $\delta u$ integrabel ist

$$P - dP_1 + d^2P_2 \ldots\ldots \pm \overset{n}{d}\underset{n}{P} = o \text{ sein mufs.}$$

Beim Maximo und Minimo ist

$$\delta \int u = \int \delta u = o.$$

Was hier von einer veränderlichen Gröfse bewiesen worden ist, kann auch von mehreren bewiesen werden.

Folgender Satz ist bei der Anwendung der Variationsrechnung auf Mechanik sehr fruchtbar.

$$\left.\begin{array}{l} P\delta x + P'\delta dx + P''\delta d^2x \ldots \overset{n}{P}\delta\overset{n}{d}x \\ Q\delta y + Q'\delta dy + \ldots\ldots\ldots \overset{n}{Q}\delta\overset{n}{d}y \\ R\delta z + R'\delta dz \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{n}{R}\delta\overset{n}{d}z \end{array}\right\} \quad (H)$$

$$= \mathfrak{P}\delta x + \mathfrak{Q}\delta y + \mathfrak{R}\delta z + d\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}'\delta x + \mathfrak{P}''\delta dx \\ \mathfrak{Q}'\delta y + \ldots\ldots \\ \mathfrak{R}'\delta z + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

wo $\mathfrak{P} = P - dP' + d^2P'' \ldots\ldots \pm \overset{n}{d}\overset{n}{P}$ bedeutet.

Der Beweis folgt aus der Operation selbst, weil

$$P = \mathfrak{P} + d\mathfrak{P}'\,,\quad P' = \mathfrak{P}' + d\mathfrak{P}'' \text{ u. s. w.}\,,\quad \overset{n}{P} = \overset{n}{\mathfrak{P}}.$$

Aehnliche Ausdrücke haben $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$.

Ist das Integral von $(H) = o$, also

$$\int (\mathfrak{P}\,\delta x + \mathfrak{Q}\,\delta y + \mathfrak{R}\,\delta z) + \mathfrak{P}'\,\delta x \,\ldots\ldots = o,$$

so folgt aus den frühern Sätzen (pag. 12), daſs $\mathfrak{P} = o$, $\mathfrak{Q} = o$ und $\mathfrak{R} = o$ seyn müssen.

---

Unsere Curve hat die merkwürdige Eigenschaft, daſs, in so fern ihre Achse vertical und ihr Scheitel am tiefsten steht, ein schwerer von dem höchsten Punkte dieser Curve ausgehender Punkt jeden beliebigen Bogen derselben in kürzerer Zeit zurücklegt, als einen zwischen denselben Grenzpunkten enthaltenen Bogen irgend einer andern Curve. Weswegen die Cycloide den Beinamen: ***Brachystochrona*** oder die Linie des schnellsten Falles führt.

9) Aufgabe. Diejenige Curve zu suchen, die ein schwerer Punkt durchlaufen muſs, wenn er von einem Punkt zum andern in der kürzesten Zeit kommen soll.

Auflösung. Die Entstehung einer Curve geschieht durch den Durchschnitt zweier Flächen, denkt man sich aber statt der Flächen Kräfte, die nach der Normale wirken; so wird wie die Mechanik lehrt: *

$$\overset{t}{d}{}^2 x + \lambda \xi + \lambda' \xi' = o$$

$$\overset{t}{d}{}^2 y + \lambda \eta + \lambda' \eta' = o$$

$$\overset{t}{d}{}^2 z + \lambda \zeta + \lambda' \zeta' - g = o$$

mit $2\overset{t}{d}x$, $2\overset{t}{d}y$, $2\overset{t}{d}z$ multiplicirt, dann addirt, giebt $2\overset{t}{d}s\,\overset{t}{d}{}^2 s = 2g\overset{t}{d}z$, das Integral davon

$$ds^2 = 2gz\,dt^2 \text{ und}$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{2gz}} = t.$$

---

* Pag. 386 *Traite de Mécanique par Poisson, seconde édition.*

Soll $t$, wie die Aufgabe erfordert, innerhalb gewisser Grenzen ein Minimum sein; so mufs

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{2gz}} = o$$

oder da man $\frac{1}{\sqrt{2g}}$, weil es konstant ist, weglassen kann

$$\int \delta \frac{ds}{\sqrt{z}} = o \text{ sein.}$$

$$\int \delta \frac{ds}{\sqrt{z}} = \int \left[ \frac{dx}{ds\sqrt{z}} d\delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{z}} d\delta y + \frac{dz}{ds\sqrt{z}} d\delta z - \tfrac{1}{2} \frac{ds}{z^{3/2}} \delta z \right] = o$$

Diesen Ausdruck verwandelt nach ($H$) erhält man:

$$= \int \left[ d \,.\, \frac{dx}{ds\sqrt{z}} \delta x + d \frac{dy}{ds\sqrt{z}} \delta y + \left( d \,.\, \frac{dz}{ds\sqrt{z}} + \tfrac{1}{2} \frac{ds}{z^{3/2}} \right) \delta z \right] + V.$$

Wird das Integral innerhalb gewisser Grenzen genommen, so wird, weil $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ so wohl am Anfange als am Ende $= o$ ist, auch $V = o$.

Es ist nach den Sätzen der Variationsrechnung (pag. 13)

$$\left.\begin{array}{lcl} d \,.\, \dfrac{dx}{ds\sqrt{z}} = o & & \\ & & \dfrac{dx}{ds\sqrt{z}} = a \\ d \,.\, \dfrac{dy}{ds\sqrt{z}} = o & \text{also} & \\ & & \dfrac{dy}{ds\sqrt{z}} = b \\ d \,.\, \dfrac{dz}{ds\sqrt{z}} + \tfrac{1}{2} \dfrac{ds}{z^{3/2}} = o & & \end{array}\right\} \quad (J)$$

Daraus folgt, weil $b\,dx - a\,dy = o$; $bx - ay = c$, dafs die Curve in einer Ebene parallel mit der Achse der $z$ liegt. $a$, $b$ quadrirt und addirt; giebt

$$\frac{dx^2 + dy^2}{ds^2 z} = a^2 + b^2 \quad \text{oder} \quad \frac{ds^2 - dz^2}{ds^2 z} = \frac{1}{k} \;*$$

$$k\,ds^2 - k\,dz^2 = ds^2 z$$

$$ds = \frac{\sqrt{k} \,.\, dz}{\sqrt{k - z}} \quad \text{und} \quad s = -2\sqrt{k} \,.\, \sqrt{k - z}$$

welche die Gleichung der Cycloide ist, wie zu zeigen war.

---

* **Die Gröfse ist von der — 1 Dimension.**

Wir haben nur die beiden ersten Gleichungen ($J$) betrachtet; es ist aber die dritte identisch mit den Betrachteten. Man eliminire $t$ und differentiire $x, y, z$ in Bezug auf $s$; so hat man

$$\frac{\overset{s}{d} x}{\sqrt{z}} = a\,, \quad \frac{\overset{s}{d} y}{\sqrt{z}} = b\,, \quad d\,.\,\frac{\overset{s}{d} z}{\sqrt{z}} + \tfrac{1}{2}\frac{1}{z^{3/2}} = o$$

Multiplicirt man den letzten Ausdruck mit

$$2\,\frac{\overset{s}{d} z}{\sqrt{z}}\,, \quad \text{also} \quad \frac{2\overset{s}{d} z}{\sqrt{z}}\; d\,.\,\frac{\overset{s}{d} z}{\sqrt{z}} + \tfrac{1}{2}\frac{\overset{s}{d} z}{z^2} = o$$

so ist das Integral davon

$$\frac{\overset{s}{d} z^2}{z} - \tfrac{1}{2}\frac{1}{z} = -\frac{1}{k'}$$

$$ds = \frac{\sqrt{2k'}\,dz}{\sqrt{k'-2z}} \quad \text{wie oben.}$$

Man erhält auch auf folgende Art die Gleichung der Cycloide durch $x, y$ ausgedrückt.

Da die Ebene worin die Curve liegt parallel mit $z$ ist, so kann man sie als die Ebene der $yz$ annehmen; alsdann ist

$$ds = \sqrt{dz^2 + dy^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{z}\sqrt{dz^2+dy^2}} = \frac{1}{\sqrt{2r}}$$

$$dy = \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{2r-z}}$$

Setzt man $2r - z = x'$, so wird

$$dy = dx'\sqrt{\frac{2r-x'}{x'}}\,,$$

welches ebenfalls die Gleichung der Cycloide ist.

Erklärung. Die Cycloide hat auch den Beinamen: *Tautochrona*; weil, wenn ein materieller Punkt von irgend einem Punkte in der Curve herunterfällt, er immer in derselben Zeit den niedrigsten Punkt erreicht.

10) Aufgabe. Zu zeigen, dafs diejenige Curve im widerstehenden Mittel, welche für $ds = o$, $t =$ const. wird, die Cycloide ist.

Auflösung. Wenn man $ds = ST$ ausdrücken kann; wo $S = \varphi s$ und $T = \psi t$, so dafs für $s = o$ auch $S = o$, und für $ds = o$ auch $T = o$, $S$ aber nicht $= o$; für $T = o$ aber $t =$ const. wird; so ist die Aufgabe gelöset.

Es sei der Widerstand $mds + nds^2 = fv$: so ist nach den Regeln der Mechanik

$$d^2x + \lambda\xi + \lambda'\xi' + fv\frac{dx}{ds} = o$$

$$d^2y + \lambda\eta + \lambda'\eta' + fv\frac{dy}{ds} = o$$

$$d^2z + \lambda\zeta + \lambda'\zeta' + fv\frac{dz}{ds} + g = o$$

mit $dx$ u. s. w. multiplicirt, giebt

$$ds\,d^2s + fv\,ds + g\,dz = o \quad \text{oder}$$

$$d^2s + mds + nds^2 + g\frac{dz}{ds} = o$$

Nun ist $ds = ST$

$$d^2s = SdT + TdS = SdT + T\overset{s}{d}S\,ds = SdT + S\overset{s}{d}S\,T^2$$

$$\text{also}\quad d^2s = SdT + S\overset{s}{d}S\,T^2$$

$$mds = mST$$

$$nds^2 = nS^2T^2$$

$$g\frac{dz}{ds} = kS$$

$$\text{folglich:}\quad S\,[dT + k + mT + (nS + \overset{s}{d}S)\,T^2] = o$$

Setzt man nun für $nS + \overset{s}{d}S = 1$ oder irgend eine Const.; so wird $\overset{s}{d}S = 1 - nS$

$$\frac{\overset{s}{d}S}{1 - nS} = 1 \quad \text{oder} \quad -\frac{n\overset{s}{d}S}{1 - nS} = -n$$ das Integral davon, giebt

$$lg\ (1 - nS) = -ns \ * \quad \text{oder}$$

$$1 - nS = e^{-ns}$$

$$S = \frac{1}{n}(1 - e^{-ns})$$

und man hat:

$$\frac{g}{k}\frac{dz}{ds} = \frac{1}{n}(1 - e^{-ns}),$$ wird $n = o$ gesetst, so ist

$$\frac{g}{k}\frac{dz}{ds} = s$$ das Integral davon

$$\frac{2g}{k}z = s^2$$

welches die Gleichung der Cycloide ist. —

Aus der Gleichung $S(\overset{t}{d}T + k + mT + T^2) = o$ bestimmt man auch $T$, denn es ist $\overset{t}{d}T + k + mT + T^2 = o$, weil $S$ nicht Null sein kann.

$$\overset{t}{d}T = -(k + mT + T^2)$$

$$\int\frac{\overset{t}{d}T}{k + mT + T^2} = -t + \text{Const}$$

für $T = x - \frac{1}{2}m$ und für $k - \frac{1}{4}m^2 = \gamma^2$ gesetzt, erhält man

$$\int\frac{dT}{k + mT + T^2} = \frac{1}{\gamma^2}\int\frac{dx}{1 + (\frac{x}{\gamma})}2 = \frac{1}{\gamma}\text{ Arc } tg\,\frac{x}{\gamma} + \text{Const},$$ also

$$\frac{1}{\gamma}\text{ Arc } tg\,\frac{\frac{1}{2}m + T}{\gamma} = -t + \text{Const.}$$

---

* Die Constante wird hier $= o$, weil für $s = o$ auch $S = o$ wird.

Um die Constante zu bestimmen, setze man $t = o$, dann wird $s = o$, $S = o$ und $ds =$ Const., folglich $T = \infty$, und es ist

$$\text{Arc}\, tg\, \infty = \text{const} = {}^1\!/_2\, \pi \quad \text{also}$$

$$-\frac{1}{\gamma}\, \text{Arc}\, tg\, \frac{{}^1\!/_2\, m + T}{\gamma} = t - {}^1\!/_2\, \pi \quad \text{oder}$$

$${}^1\!/_2\, \pi - \frac{1}{\gamma}\, \text{Arc}\, tg\, \frac{{}^1\!/_2\, m + T}{\gamma} = t = \text{Arc}\, tg\, \frac{\gamma}{{}^1\!/_2\, m + T}$$

$$\frac{\gamma}{{}^1\!/_2\, m + T} = tg\, t$$

$$\frac{\gamma}{tg\, t} - {}^1\!/_2\, m = T\,.$$

Es ist aber für $ds = o$ auch $T = o$ also

$$\frac{\gamma}{tg\, t} - {}^1\!/_2\, m = o$$

$$\frac{2\gamma}{m} = tg\, t\,.$$

Die öffentliche Prüfung wird am 26. Juni 1842 Vormittags von 8 — 12, und Nachmittags von 3 — 5 Uhr, und zwar in folgender Ordnung gehalten werden:

In *I. Classe:* Religion. — Griechisch. — Stereometrie und Algebra. — Russische Geschichte in russischer Sprache. —

In *II. Classe:* Lateinisch. — Geographie in französischer Sprache. — Geometrie. — Russisch. —

In *III. Classe:* Geschichte. — Lateinisch. — Französisch. — Deutsche Sprache. —

Se. Excellenz der Hasenpothsche Herr Oberhauptmann, Landrath, Staatsrath, Ritter mehrer Orden, Baron *von Korff*, der Hasenpothsche Herr Hauptmann, Coll. Assessor, Baron *von Offenberg*, der Hasenpothsche Herr Kreisrichter Baron *von Roenne*, der Herr Bürgermeister der Stadt Hasenpoth *Gröning*, sämmtliche Behörden des Landes und der Stadt, die Aeltern und Vormünder der Schüler, so wie alle Freunde der Jugendbildung und Schule werden hiemit ergebenst eingeladen dieser Feierlichkeit gewogentlichst beizuwohnen. —