TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

L. TUULMETS

ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

I

TARTU 1971

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Algebra ja geomeetria kateeder

L. TUULMETS

ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA PRAKTIKUM

I

TARTU 1971

Eessõna

Käesolev analüütilise geomeetria praktikum on koostatud eeskätt TRÜ Matemaatikateaduskonna vajadusi arvestades (ning on mõeldud kasutamiseks koos Ü. Lumiste ja K. Ariva õpikuga "Analüütiline geomeetria"), kuid suurt osa sellest saab kasutada ka teistes teaduskondades, kus õpetatakse analüütilist geomeetriat kas iseseisva ainena või kõrgema matemaatika kursuse osana.

Praktikumi I osa haarab valiku ülesandeid vektoralgebrast, reeperitest ja punkti koordinaatidest. Edasi on kavandatud järgmised materjalid: II osa - ülesanded sirgete, tasandite ja reeperiteisenduste kohta, III osa - ülesanded teist järku joonte ja pindade kohta ning IV osa - projektiivse analüütilise geomeetria ülesanded.

Ülesandekogu kasutamist lihtsustavad vajaliku teoreetilise materjali lühiesitused üksikute ainelõikude ees ning ülesannete vastuste juures esitatud näpunäited.

I peatükk

LINEAARNE VEKTORALGEBRA

1. L i n e a a r t e h t e d v e k t o r i t e g a

1. Vektoralgebra põhimõisted.

Skalaarsed ja vektoriaalsed suurused. Füüsikas eristatakse kaht liiki suurusi: 1) skalaarsuurused, mis on täielikult iseloomustatud oma reaalarvulise väärtusega, kusjuures viimast saab kujutada arvsirge punktina (näit. aeg, temperatuur, mass jne.), 2) vektorsuurused, mille täielikuks iseloomustamiseks on peale arvulise väärtuse tarvis teada veel sihti ja suunda (tung, kiirus, kiirendus jne.).

Vektori mõiste. Matemaatikas skalaar- ja vektorsuuruse vasteteks on vastavalt reaalarv ja vektor. Vektori all mõistetakse siin sirglõiku, millele on omistatud suund ; me kujutame teda noole abil. Vektori puhul kõneldakse tema sihist, suunast ja pikkusest, samuti tema alg- ja lõpp-punktist. Vektor on määratud täielikult, kui on antud algus- ja lõpp-punkt, s.t. järjestatud (nummerdatud) punktipaar. Vektorit alguspunktiga A ja lõpp-punktiga B tähistatakse $\overrightarrow{AB}$. Vektori siht määratakse sirgega, millel asub vektor või mistahes sellega paralleelse sirgega. Vektori suund määratakse otspunktide järjestusega ning näidatakse noole teravikuga. Antud sihi korral on suuna valikuks kaks võimalust. Vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkuseks (ehk mooduliks) nimetatakse lõigu AB pikkust, tähistatakse $|\overrightarrow{AB}|$ ehk AB.

Vektorite hulk jagatakse klassideks tingimusega, et ühte klassi kuuluvad kõik ühise sihi, suuna ja pikkusega vektorid. Ühte klassi kuuluvaid vektoreid nimetatakse võrdseteks.

Vektorite võrdsuse tunnus. Kaks vektorit on võrdsed siis ja ainult siis (parajasti siis), kui neil on ühine siht, suund ja pikkus. Vektorite võrdsust tähistatakse nagu skalaaride puhul märgiga „$=$". Võrdsed vektorid samastatakse, s.t. võrdseid vektoreid vaadeldakse ühe ja sellesama vektorina erinevais asendeis. Vektoreid, mille algus- ja lõpp-punkti ei ole näidatud, tähistatakse $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,... ning nende pikkusi $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$,... ehk a, b, c, ...

Ühikvektor. Vektorit pikkusega 1 nimetatakse ühikvektoriks ehk normeeritud vektoriks . Ühikvektorit, millel on vektoriga $\vec{a}$ sama siht ja suund, tähistatakse $\vec{a}_0$ ja nimetatakse vektorile $\vec{a}$ vastavaks ühikvektoriks.

Nullvektor. Vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt ühtivad, nimetatakse nullvektoriks. Nullvektori siht ja suund on määramata ning pikkus on null. Nullvektori sümbol on $\vec{0}$ (või 0, kui tähendus on vahetult selge).

Vastandvektor. Kaht vektorit, millel on ühine pikkus ja siht, kuid vastupidised suunad, nimetatakse vastandvektoreiks. Vektori $\vec{a}$ vastandvektorit märgitakse $-\vec{a}$ ("miinus $\vec{a}$ ").

Vektorite kollineaarsus. Vektoreid, mis pärast ühisesse alguspunkti kandmist asuvad ühel sirgel, nimetatakse kollineaarseteks. Kollineaarseid vektoreid iseloomustab ühine siht, s.t. neid kandvate sirgete paralleelsus. Kasutatakse tähistusi:

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ (vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed),

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on samasuunalised),

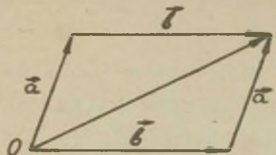
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on vastassuunalised).

Nullvektorit võib lugeda soovi korral kollineaarseks iga vektoriga.

Komplanaarsed vektorid. Kaht või enam vektorit, mis pärast ühisesse punkti kandmist asuvad ühel tasandil, nimetatakse komplanaarseteks. Komplanaarsed vektorid võivad erineda nii sihilt, suunalt kui pikkuselt, kuid nende sihid on paralleelsed ühe tasandiga. Kollineaarsed vektorid on alati komplanaarsed. Kui kolme vektori hulgas on kaks kollineaarset, siis need kolm vektorit on komplanaarsed.

2. Vektorite liitmine.

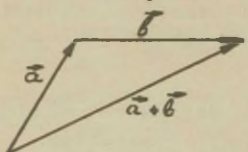
Rööpküliku reegel: kahe mittekollineaarse vektori liitmiseks kantakse nad ühisesse alguspunkti: summavektori määrab liidetavaile vektoritele ehitatud rööpküliku diagonaal. mis lähtub ühisest alguspunktist (vt. joon. 1.1).



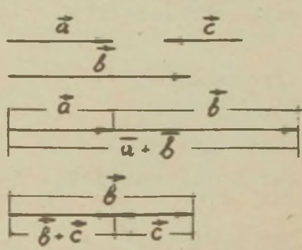
Joon. 1.1.

Seda reeglit ei saa rakendada kollineaarsete vektorite puhul, pealegi on seda tülikas kasutada suurema arvu vektorite liitmisel. Vektorite sõltumatus alguspunktist lubab anda praktilisema eeskirja.

Kolmnurga reegel: kahe vektori liitmiseks rakendatakse teine liidetav esimese liidetavaga lõpp-punkti: summavektor viib esimese liidetava alguspunktist teise liidetava lõpppunkti (vt. joon. 1.2). See reegel sobib ka kollineaarsete vektorite puhul, mil kolmnurk kidub sirglõiguks (vt. joon. 1.3).



Joon. 1.2.



Joon.1.3.

Kui vektoreid on enam kui kaks, siis saab neid liita järjestikku: liidetakse esmalt kaks, nende summaga liidetakse kolmas vektor jne. Sel viisil saab leida mistahes lõpliku arvu vektorite summa:

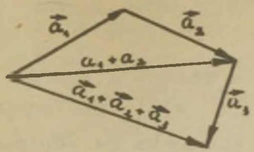
$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + \vec{a}_3$,

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3) + \vec{a}_4$,

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1}) + \vec{a}_n$.

Liitmisprotsessis rakendatakse



Joon. 1.4.

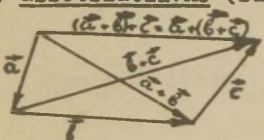
korduvalt kolmnurga reeglit (vt. joon. 1.4). Iga liidetav tuleb rakendada talle eelneva liidetava lôpp-punkti, kusjuures summavektori määrab tekkinud murdjoone sulgeja. Siit saame vektorite liitmise üldeeskirja.

<u>Hulknurga reegel:</u> lôpliku arvu vektorite liitmiseks kantakse iga järgnev vektor eelneva vektori lôpp-punkti; summavektor viib esimese liidetava alguspunktist viimase liidetava lôpp-punkti.

Komplanaarsete vektorite liitmisel on hulknurk tasandiline, mittekomplanaarsete puhul - ruumiline.

Vektorite liitmine on:

1) <u>kommutatiivne</u> (summa ei sôltu liidetavate järjekorrast), kahe liidetava korral $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (vt. joon. 1.1).
2) <u>assotsiatiivne</u> (summa ei sôltu liidetavate rühmitamisest sulgude abil), kolme liidetava puhul $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (vt. joon. 1.5.).



Joon. 1.5.

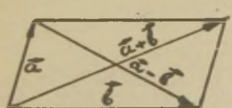
3. <u>Vektorite lahutamine</u>.

Vektorite lahutamine on vektorite liitmise pöördtehe. Kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheks $\vec{a}-\vec{b}$ nimetatakse vektorit, mille summa vektoriga $\vec{b}$ on vôrdne vektoriga $\vec{a}$.

Vahe $\vec{a}-\vec{b}=\vec{x}$ määrab seega vôrrand $\vec{a}=\vec{b}+\vec{x}$, millel on parajasti üks lahend. Vektori lahutamiseks tuleb liita vastandvektor

$$\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b}) .$$

Kahe vektori vahe geomeetriliseks konstrueerimiseks kantakse need vektorid ühisesse alguspunkti: nende vahe on vektor, mis viib vähendaja (lahutatava) lôpppunktist vähendatava lôpp-punkti (vt. joon. 1.5-6).



Joon. 1.6.

Kahe vektori summa ja vahe on määratud neile vektoritele ehitatud rööpküliku kahe diagonaaliga (vt. joon. 1.6).

4. Vektori korrutamine arvuga.

Vektorite summa $\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}$, milles $\vec{a}$ esineb k korda, on kollineaarne vektoriga $\vec{a}$ ja omab moodulit $k|\vec{a}|$. On loomulik nimetada seda summat vektori $\vec{a}$ k- kordseks ja tähistada $k\vec{a}$ või $\vec{a}k$.

Antud vektori korrutiseks arvuga (skalaariga) nimetatakse vektorit, mis on kollineaarne antud vektoriga, mille moodul võrdub arvu absoluutväärtusega ja antud vektori mooduli korrutisega ning mis on antud vektoriga sama- või vastassuunaline vastavalt sellele, kas arv on positiivne või negatiivne.

Vektori $\vec{a}$ ja arvu k korrutis $k\vec{a}$ on seega vektor, mis rahuldab tingimusi:

1) $k\vec{a} \parallel \vec{a}$,

2) $|k\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|$,

3) $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, kui $k>0$,

$k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, kui $k<0$.

Vektori korrutamisel arvuga on järgmised omadused :

1) $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$,

2) $(-k)\vec{a} = k(-\vec{a}) = -(k\vec{a})$,

3) $k\vec{a}=0$ parajasti siis, kui kehtib vähemalt üks tingimustest $k=0$, $\vec{a}=0$.

Vektori $\vec{a}$, ühikvektori $\vec{a}_o$ ja vastandvektori $-\vec{a}$ vahel on järgmised seosed:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{a}_o, \qquad \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a},$$

$$-\vec{a} = (-1)\,\vec{a} = (-|\vec{a}|)\,\vec{a}_o.$$

Vektorite liitmisel ja korrutamisel arvuga on distributiivsuse omadus:

1) $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$,

2) $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.

5. Vektori jagamine arvuga. Vektorite kollineaarsus.

Vektori korrutamisel arvuga on kaks pöördtehet. Antud nullist erineva arvu k ja vektori $\vec{a}$ puhul võrrand $k\vec{x} = \vec{a}$ määrab ühe ja ainult ühe vektori, mida tähistatakse $\frac{\vec{a}}{k}$ ja nimetatakse vektori $\vec{a}$ jagatiseks arvuga k. Jagatist arvuga võib vaadelda korrutisena arvu pöördväärtusega: $\frac{\vec{a}}{k} = \frac{1}{k}\vec{a}$.

Antud vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ korral võib moodustada võrrandi arvu x määramiseks: $x\vec{b} = \vec{a}$. See võrrand ei ole alati lahenduv (näit. kui $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ või $\vec{b}=0$ ja $\vec{a} \neq 0$); sellepärast vastavat pöördtehet pole olemas. Kui $\vec{b} \neq 0$, siis on võrrandi $x\vec{b} = \vec{a}$ lahenduvuseks tarvilik ja piisav, et $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Sel korral nimetatakse lahendit vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ <u>suhteks</u> ja tähistatakse $\vec{a}:\vec{b}$. Seega saab kõnelda ainult kollineaarsete vektorite suhtest.

Iga kahe kollineaarse vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b} \neq 0$ korral leidub parajasti üks arv x nii, et $x\vec{b}=\vec{a}$.

Tulemused võime kirjutada üldisemal kujul: kahe vektori kollineaarsuseks on tarvilik ja piisav, et kehtiks seos

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0,$$

kus arvud α ja β ei ole korraga nullid ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

<u>Vektorite liitmine ja lahutamine (koordinaatideta)</u>.

<u>1.1.</u> On antud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Konstrueerida järgmised vektorid: 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$.

<u>1.2.</u> On antud $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ ja $|\vec{a}+\vec{b}| = 24$. Arvutada $|\vec{a} - \vec{b}|$.

<u>1.3.</u> On antud $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ ja $|\vec{a}-\vec{b}| = 30$. Leida $|\vec{a}+\vec{b}|$.

<u>1.4.</u> On antud ristuvad vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, kusjuures $|\vec{a}| = 5$ ja $|\vec{b}| = 12$. Leida $|\vec{a}+\vec{b}|$ ja $|\vec{a}-\vec{b}|$.

<u>1.5.</u> Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on $\varphi = 60°$, kusjuures $|\vec{a}| = 5$ ja $|\vec{b}| = 8$. Leida $|\vec{a}+\vec{b}|$ ja $|\vec{a}-\vec{b}|$.

<u>1.6.</u> Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on $\varphi = 120°$,

kusjuures $|\vec{a}| = 3$ ja $|\vec{b}| = 5$. Leida $|\vec{a}+\vec{b}|$ ja $|\vec{a}-\vec{b}|$.

1.7. Millist tingimust peavad rahuldama vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, et kehtiksid järgmised seosed: 1) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+\vec{b}| > |\vec{a}-\vec{b}|$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}-\vec{b}|$.

1.8. Missugust tingimust peavad rahuldama vektorid $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ selleks, et vektor $\vec{p}+\vec{q}$ jaotaks $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ vahelise nurga pooleks (eeldusel, et kôigil kolmel vektoril on ühine alguspunkt).

Vektori korrutamine arvuga (koordinaatideta).

1.9. On antud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Konstrueerida järgmised vektorid: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

1.10. Kasutades vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpkülikut kontrollida järgmiste võrduste kehtivust :

1) $(\vec{a}+\vec{b}) + (\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{a}$; 4) $\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;
2) $(\vec{a}+\vec{b}) - (\vec{a}-\vec{b}) = 2\vec{b}$; 5) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$;
3) $\vec{a} + (\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}$;

6) $(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}) - (\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}) = \frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$;
7) $(\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}) + (\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}) = \frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.

1.11. Millist tingimust peavad rahuldama vektorid , et kehtiksid järgmised seosed:

1) $\vec{a}+\vec{b} = (\vec{a}-\vec{b})$; 3) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;
2) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; 4) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$;
5) $|\vec{a}-\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$?

1.12. Antud kolmnurga ABC puhul tähistatakse $\vec{AB}=\vec{m}$ ja $\vec{AC}=\vec{n}$. Konstrueerida järgmised vektorid: 1) $\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$; 2) $\frac{\vec{m}-\vec{n}}{2}$; 3) $\frac{\vec{n}-\vec{m}}{2}$; 4) $-\frac{\vec{m}+\vec{n}}{2}$. Võttes pikkusühikuks $\frac{1}{2}|\vec{n}|$ konstrueerida vektorid: 5) $|\vec{n}|\vec{m}+|\vec{m}|\vec{n}$; 6) $|\vec{n}|\vec{m}-|\vec{m}|\vec{n}$.

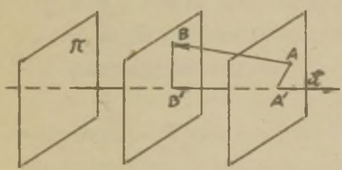
1.13. Tôestada, et kolmnurga iga külje pikkuse ja selle küljega risti oleva ühikvektori korrutiste summa on null.

Märkus. Eeldatakse, et ühikvektorid on kôik suunatud kolmnurga sisse.

2. Vektorite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus.

1. Vektori projekteerimine teise vektori sihile.

Olgu antud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ ning tasand π, mis ei ole paralleelne vektoriga $\vec{a}$. Asetame läbi punktide A ja B tasandid paralleelselt tasandiga π ja tähistame nende lõikepunktid mingi $\vec{a}$ sihilise sirgega vastavalt A' ja B'. Vektorit $\overrightarrow{A'B'}$ nimetatakse vektori $\vec{b}$ komponendiks vektori $\vec{a}$ sihile (tasandiga π määratud projekteerimisel) ja tähistatakse $\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}$ $(\parallel \pi)$ või lihtsalt $\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}$ (vt. joon. 1.7). Vektori $\vec{b}$ projektsiooniks vektori $\vec{a}$ sihile (paralleelselt tasandiga π) nimetatakse komponendi $\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}$ pikkust (moodulit), mis on varustatud pluss- või miinusmärgiga vastavalt sellele, kas $\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}$ on vektoriga $\vec{a}$ sama- või vastassuunaline. Projektsiooni tähistatakse $p_{\vec{a}}\vec{b}$ $(\parallel \pi)$ või lihtsalt $p_{\vec{a}}\vec{b}$. Niisiis



Joon. 1.7

$$p_{\vec{a}}\vec{b} = \begin{cases} |\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}|, & \text{kui } \vec{p}_{\vec{a}}\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, \\ -|\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}|, & \text{kui } \vec{p}_{\vec{a}}\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{cases}$$

Vektorite paralleelprojekteerimise puhul (paralleelselt ühe ja sama tasandiga π) kehtivad järgmised omadused:

1 a) $\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{p}_{\vec{a}}\vec{b} + \vec{p}_{\vec{a}}\vec{c}$,

1 b) $p_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = p_{\vec{a}}\vec{b} + p_{\vec{a}}\vec{c}$,

2 a) $\vec{p}_{\vec{a}}(k\vec{b}) = k\,\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}$,

2 b) $p_{\vec{a}}(k\vec{b}) = k\,p_{\vec{a}}\vec{b}$.

Analoogiliselt defineeritakse projekteerimine tasandil sirgete abil; projekteerimise sihi määrab mingi antud sirge.

Seni käsitlesime paralleelprojekteerimise üldjuhtu – kaldprojekteerimist. Kui projekteerivad tasandid (sirged) on risti vektoriga $\vec{a}$, siis kõneldakse *ortogonaalprojekteerimisest*, *ortogonaalkomponendist* $\vec{p}_{\vec{a}}\vec{b}$ ja *ortogonaalprojektsioonist* $p_{\vec{a}}\vec{b}$. Vastupidisel juhul "ortogonaal-" asemel tuleb "kald-".

2. *Vektorite lineaarkombinatsioon. Summeerimiskokkulepe.*

Vektorite lineaartehete abil defineeritakse vektorite lineaarkombinatsiooni mõiste.

Vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *lineaarkombinatsiooniks* nimetatakse avaldist

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n ,$$

kus $k_1, k_2, \ldots, k_n$ on mingid arvud.

Näiteks $k\vec{a}$ on vektori $\vec{a}$ lineaarkombinatsioon, $\vec{a}+\vec{b}$ ja $\vec{a}-\vec{b}$ on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonid. $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$ on vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ lineaarkombinatsioon jne.

Lineaarkombinatsiooni $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n$ nimetatakse *mittetriviaalseks*, kui arvude $k_1, k_2, \ldots, k_n$ hulgas leidub vähemalt üks nullist erinev (s.t. $k_1^2+k_2^2+\ldots k_n^2 \neq 0$). Vastupidisel juhul nimetatakse teda *triviaalseks* ning tema väärtuseks on siis nullvektor 0.

Summa lühidalt määramiseks kasutatakse sageli summeerimissümbolit $\sum$. Näiteks lineaarkombinatsiooni kirjutame selle sümboli abil lühidalt

$$\sum_{i=1}^{n} k_i\vec{a}_i = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n .$$

Maksimaalse lihtsuse saavutamiseks on otstarbekas jätta sümbol $\sum$ ära ja kasutada Einsteini *summeerimiskokkulepet*: iga liiget, milles mingi tähtindeks (nn. summeerimisindeks) esineb kaks korda, tuleb summeerida; liidetavate arvu määrab eelnevalt kokkulepitud (või **juurdemärgitud**) summeerimisindeksi muutumispiirkond. Kui näiteks $i = 1,2,3$, siis $k_i\vec{a}_i = k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3$. Einsteini summeerimiskokkuleppe puhul on mõnikord vaja *summeerimise keelu märki* (!). Näiteks avaldis $k_i\vec{a}_i = 0$ (!) on samaväärne järgmiste avaldistega:

$$k_1\vec{a}_1 = 0, \quad k_2\vec{a}_2 = 0, \quad k_3\vec{a}_3 = 0 .$$

3. Lineaarse sõltuvuse mõiste.

Vektoreid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ nimetatakse lineaarselt sõltuvaiks, kui leidub nende mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nulliga. Vastupidisel juhul vektoreid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuiks.

Sellest definitsioonist järeldub: vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ on lineaarselt sõltuvad, kui vähemalt üks on avaldatav ülejäänute lineaarkombinatsioonina.

Lineaarsõltuvusel on järgmised omadused:

1) Kui osa antud vektoreist on lineaarselt sõltuvad, siis ka kõik antud vektorid on lineaarselt sõltuvad.

2) Kaks vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on kollineaarsed.

3) Kolm vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui nad on komplanaarsed.

4) Tavalise kolmemõõtmelise ruumi iga neli vektorit on lineaarselt sõltuvad.

Järeldused. 1. Maksimaalne lineaarselt sõltumatute vektorite arv ruumis on kolm, tasandil - kaks, sirgel - üks. Sellepärast öeldakse, et ruum on kolme-, tasand kahe-, sirge ühemõõtmeline (-dimensionaalne).

2. Sirgel saab iga vektorit avaldada selle sirge mistahes nullist erineva vektori lineaarkombinatsioonina.

3. Tasandil saab iga vektorit avaldada selle tasandi mistahes kahe mittekollineaarse vektori lineaarkombinatsioonina.

4. Ruumis saab iga vektorit avaldada mistahes kolme mittekomplanaarse vektori lineaarkombinatsioonina.

4. Vektorvõrrand $\vec{x} = u\vec{k} + v\vec{l}$.

Antud mittekollineaarsete vektorite $\vec{k}$ ja $\vec{l}$ ning kahe reaalarvulise muutuja u ja v abil määratud vektorvõrrand $\vec{x} = u\vec{k} + v\vec{l}$ seab igale arvupaarile (u,v) vastavusse teatud vektori, kusjuures erinevatele arvupaaridele vastavad erinevad vektorid. Paari (u,v) muutumisel jäävad vektorid $\vec{k}$, $\vec{l}$ ja $\vec{x}$ komplanaarseteks. Kõneldakse, et vektorid $\vec{k} \nparallel \vec{l}$ määravad ruumis rihi. Viimane on ühine kõigile vektorpaariga $\bar{k}, \bar{l}$ paralleelsetele tasanditele (samuti nagu siht on ühine paralleelsete sirgete hulgale). Seega antud vektorvõrrand esitab kõik vektorid, mis on paralleelsed rihiga.

Vektorite lineaarne sõltuvus ja sõltumatus (koordinaatideta).

1.14. Milliseid tingimusi peavad rahuldama kordajad α ja β, et kehtiks seos

$$\alpha \frac{\bar{a}}{a} + \beta \frac{\bar{b}}{b} = 0,$$

kus $\bar{a} \neq 0$ ja $\bar{b} \neq 0$.

1.15. Vektor $\bar{c} = u\bar{a} + v\bar{b}$ on esitatud kahe mittekollineaarse vektori $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ lineaarkombinatsioonina. Kas mõlemad kordajad u ja v või üks neist võib olla võrdne nulliga?

1.16. Tõestada, et kui $\bar{k}$ ja $\bar{l}$ on tasandi mistahes kaks mittekollineaarset vektorit, siis selle tasandi iga vektor $\bar{x}$ on esitatav kujul $\bar{x} = u\bar{k} + v\bar{l}$. Tõestada, et arvud u ja v on vektoritega $\bar{x}, \bar{k}, \bar{l}$ üheselt määratud.

1.17. Näidata geomeetriline konstruktsioon, mis võimaldab esitada antud vektori kahe temaga komplanaarse liidetava summana, kui on teada:

1) ühe liidetava suund ja pikkus,
2) mõlema liidetava siht,
3) ühe liidetava siht ja teise pikkus,
4) mõlema liidetava pikkused.

Teha kindlaks, millal on esitus võimalik ja kui palju on lahendeid, kui kumbki vektor ei ole paralleelne antud vektoriga.

1.18. Tõestada, et kui $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ on ruumi mistahes kolm mittekomplanaarset vektorit, siis ruumi iga vektor $\bar{x}$ on esitatav kujul $\bar{x} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$. Tõestada, et arvud x, y, z on vektoritega $\bar{x}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ üheselt määratud.

1.19. Teades vektorite $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ esitusi mittekomplanaarsete vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ lineaarkombinatsioonina, kontrollida, kas vektorid $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ on komplanaarsed, ning jaatava vastuse korral anda nendevaheline lineaarne sõltuvus:

1) $\vec{l} = 2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{m} = 2\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{n} = 2\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$,
2) $\vec{l} = \vec{c}$, $\vec{m} = \vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$,
3) $\vec{l} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{m} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{n} = -\vec{a}+\vec{c}$.

1.20. Vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ avalduvad kolme mittekomplanaarse vektori $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ lineaarkombinatsioonidena järgmiselt:

$$\vec{a} = a^i\vec{e}_i ,$$
$$\vec{b} = b^i\vec{e}_i , \quad i = 1,2,3.$$

Milliseid seoseid peavad rahuldama kordajad, et

1) $\vec{a} = \vec{b}$; 2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 3) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

1.21. Leida antud nelja mittekomplanaarse vektori

$$\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} ; \qquad \vec{p} = \vec{a} + \vec{b} ;$$
$$\vec{n} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2} ; \qquad \vec{q} = \vec{b} - \vec{c}$$

vaheline lineaarne sõltuvus.

1.22. Esitada vektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ kolme mittekomplanaarse vektori $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$, $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b}$ ja $\vec{p} = 2\vec{b}+ 3\vec{c}$ lineaarkombinatsioonina.

1.23. Kuidas asetsevad 4 vektorit ruumis, kui nad on seotud lineaarse sõltuvusega $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = 0$, kus

1) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$;
2) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$;
3) $\alpha = \beta = 0$, $\gamma \neq 0$, $\delta \neq 0$;
4) $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\delta \neq 0$?

Kolmnurk ja vektorid.

1.24. Tõestada, et korrapärase kolmnurga keskpunkti tippudega ühendavate vektorite summa on null.

1.25. Kolmnurga ABC raskuskeskmeks on punkt O. Tõestada, et $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$.

1.26. Kolm vektorit $\vec{AB} = \vec{c}$, $\vec{BC} = \vec{a}$ ja $\vec{CA} = \vec{b}$ on kolmnurga külgedeks. Esitada vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ abil kolmnurga mediaanidega ühtivad vektorid $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ ja $\overrightarrow{CP}$.

1.27. Eelmises ülesandes antud kolmnurga mediaanid esitada ainult kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonidena.

1.28. Teha kindlaks, et vektorid, mis ühtivad mistahes kolmnurga mediaanidega, võivad omakorda olla teise kolmnurga külgedeks.

1.29. Leida kolmnurgas punkt, nii et sellest punktist kolmnurga tippudesse minevate vektorite summa oleks 0.

1.30. Punktist O lähtuvad kaks vektorit $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Leida nurga AOB poolitajal asuv vektor $\overrightarrow{OM}$.

1.31. Kolmnurga küljed on $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Leida selle kolmnurga nurgapoolitajatega kollineaarsed vektorid.

1.32. Kolmnurgas ABC on võetud nurga A poolitaja AD. Avaldada vektor $\overrightarrow{AD}$ vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ kaudu.

1.33. Kolmnurga ABC külg BC on jaotatud viieks võrdseks osaks, kusjuures kõik jaotuspunktid D_1, D_2, D_3 ja D_4 on ühendatud vastastipuga A. Tähistades küljed $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ ja $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, leida vektorite $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$ ja $\overrightarrow{D_4A}$ avaldised.

1.34. Kolmnurgas ABC punkt D jaotab külje BC suhtes m:n, s.t. $\overrightarrow{BD}:\overrightarrow{DC} = m:n$. Avaldada vektor $\overrightarrow{AD}$ vektorite $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ ja $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ lineaarkombinatsioonina.

Nelinurk või hulknurk ja vektorid.

1.35. Rombi diagonaalvektoriks on $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Esitada rombi külgvektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{DA}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonina.

1.36. Rööpküliku ABCD diagonaalvektoreiks on $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ ja $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Avaldada rööpküliku külgvektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{DA}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu.

1.37. Rööpkülikus ABCD on $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ja $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Avaldada vektorid $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ ja $\overrightarrow{MD}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu, kui M on rööpküliku diagonaalide lôikepunkt.

1.38. Leida rööpkülikus punkt, nii et sellest punktist kolmnurga tippudesse minevate vektorite summa oleks 0.

1.39. Rööpküliku ABCD külgede BC ja CD kesk - punktid on K ja L. Avaldada vektorid $\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{CD}$ vektorite $\vec{k}$ ja $\vec{l}$ kaudu, kui $\overrightarrow{AK} = \vec{k}$ ja $\overrightarrow{AL} = \vec{l}$.

1.40. Nelinurga ABCD külgede AB ja CD keskpunktideks on punktid D ja E. Tôestada, et $\overrightarrow{DE} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$. Tuletada siit teoreem trapetsi kesklôigu kohta.

1.41. Nelinurgas ABCD (tasandilises vôi ruumilises) on $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{q}$. Leida diagonaalide AC ja BC keskpunkte ühendav vektor $\overrightarrow{EF}$.

1.42. Vôrdhaarse trapetsi ABCD alumine alus $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, haar $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ning nendevaheline nurk $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$. Esitada trapetsi ülejäänud külgedeks ja diagonaalideks olevad vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonidena.

1.43. Korrapärase viisnurga ABCDE külgedeks olevad vektorid on $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{q}$ ja $\overrightarrow{EA} = \vec{r}$. Konstrueerida vektorid:

1) $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$; 2) $\vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}$;

3) $2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

1.44. Korrapärase kuusnurga lähisküljedeks on vektorid $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$ ja $\overrightarrow{AF} = \vec{q}$. Avaldada selle kuusnurga külgedeks olevad vektorid $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$ vektorite $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ kaudu.

1.45. Korrapärases kuusnurgas ABCDEF on $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$.

1) Avaldada vektorid $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{AE}$ vektorite $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ kaudu.

2) Leida vektorite suhted :

$\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC} : \overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{CF} : \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{BC}$.

1.46. Korrapärases kuusnurgas ABCDEF on $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ ja $\overrightarrow{AE} = \vec{n}$. Avaldada vektorid $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ ja $\overrightarrow{EF}$ vektorite

$\vec{m}$ ja $\vec{n}$ kaudu.

1.47. Tõestada, et korrapärase hulknurga keskpunktist tippudesse lähtuvate vektorite summa on 0.

1.48. Tõestada, et korrapärase hulknurga keskpunkti kohavektor on hulknurga tippude kohavektorite aritmeetiline keskmine.

Hulktahukas ja vektorid.

1.49. Rööptahukas on ehitatud kolmele mittekomplanaarsele vektorile $\vec{AB} = \vec{p}$, $\vec{AD} = \vec{q}$ ja $\vec{AA'} = \vec{r}$. Avaldada selle rööptahuka ülejäänud servadeks, diagonaalideks ja tahkude diagonaalideks olevad vektorid $\vec{p}$, $\vec{q}$ ja $\vec{r}$ kaudu.

1.50. Rööptahukas ABCDA'B'C'D' on antud külgservadeks olevad vektorid: $\vec{AB} = \vec{m}$, $\vec{AD} = \vec{n}$, $\vec{AA'} = \vec{p}$.

Konstrueerida vektorid:

1) $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$; 2) $\vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$;
4) $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$; 5) $-\vec{m} - \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

1.51. Tetraeedri ABCD tipust A lähtuvad servad $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$ ja $\vec{AD} = \vec{d}$. Avaldada antud vektorite kaudu tetraeedri ülejäänud servadeks olevad vektorid, tahu BCD mediaan $\vec{DM}$ ja vektor $\vec{AQ}$, kus Q on tahu BCD raskuskese.

1.52. On antud tetraeeder OABC. Tähistades $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ avaldada $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kaudu vektorid $\vec{MN}$, $\vec{PQ}$ ja $\vec{RS}$, kus M, P ja R on servade OA, OB ja OC keskpunktid; N,Q ja S aga vastavalt vastavate servade keskpunktid.

1.53. On antud kolm paarikaupa ristuvat samas punktis rakendatud jõudu M, N ja P. Leida resultantjõud R, kui M = 2kG, N = 10kG ja P = 11kG.

3. Baas ja koordinaadid. Lineaartehted vektoritega koordinaatkujul.

1. Baas ja koordinaadid.

Vektorite koordinaatide defineerimisel kasutatakse vektorite lineaarse sõltuvuse mõistet.

<u>Baas ja koordinaadid sirgel</u>. Valime sirge vektorite hulgast mingi vektori $\vec{e} \neq 0$. Iga vektor $\vec{x}$ sellest hulgast avaldub kujul $\vec{x} = x\vec{e}$. Öeldakse, et $\vec{e}$ moodustab sirge vektorite hulga <u>baasi</u>; skalaari x nimetatakse vektori $\vec{x}$ <u>koordinaadiks</u> baasil $\vec{e}$. Et $\vec{x} = x\,\vec{e}$, siis $x = \frac{|\vec{x}|}{|\vec{e}|}$ ehk

$$x = \begin{cases} \frac{|\vec{x}|}{|\vec{e}|}, & \text{kui } \vec{x} \uparrow\uparrow \vec{e} \\ -\frac{|\vec{x}|}{|\vec{e}|}, & \text{kui } \vec{x} \uparrow\downarrow \vec{e}, \end{cases}$$

s.t. vektori koordinaat võrdub absoluutväärtuselt vektori pikkusega, kui pikkusühikuks sirgel valida baasi $\vec{e}$ pikkus (s.t. lugeda baasivektor ühikvektoriks), koordinaadi märgi määrab vektori suund baasi suhtes.

Baas korraldab üksühese vastavuse sirge vektorite hulga ja reaalarvude hulga vahel, kus vektorile vastab tema koordinaat. Baasi valik määrab sirgel kindla suuna; suunaga varustatud sirget nimetatakse <u>teljeks.</u>

<u>Baas ja koordinaadid tasandil või ruumis.</u> Valime tasandi vektorite hulgast vabalt kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$. Iga vektor $\vec{x}$ vaadeldavast hulgast on vektorite $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ lineaarkombinatsioon:

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2.$$

Öeldakse, et vektorid $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$ moodustavad tasandi vektorite hulga baasi : arve x^1 ja x^2 nimetatakse vektori $\vec{x}$ <u>koordinaatideks</u> baasil $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Analoogiliselt määratakse vektori koordinaadid ruumis: fikseeritakse mingid kolm mittekomplanaarset vektorit $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ - vektorite hulga <u>baas ruumis.</u> Iga vektor $\vec{x}$ on baasi vektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ lineaarkombinatsioon:

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

ehk üksikasjalikult

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 .$$

Skalaare x^1, x^2, x^3 nimetatakse vektori $\vec{x}$ koordinaatideks baasil $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Nii tasandil kui ka ruumis on baasivektorid järjestatud: sellepärast on järjestatud ka vektori koordinaadid. Baas korraldab üksühese vastavuse tasandi vektorite hulga ja järjestatud reaalarvupaaride hulga vahel, ruumis vektorite hulga ja järjestatud reaalarvukolmikute hulga vahel. Kui vektoril $\vec{x}$ on koordinaadid x^1, x^2, x^3, siis kirjutatakse $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$, tasandil analoogiliselt $\vec{x} = (x^1, x^2)$ (või $\vec{x} = (x^1, x^2, 0)$). Vektorite koordinaadid erinevate baaside suhtes on erinevad.

Baasi nimetatakse <u>ristbaasiks</u> (ehk ortonormeeritud baasiks), kui baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ on paarikaupa ristuvad (ehk ortogonaalsed) ühikvektorid. Ristbaasi vektorite puhul kasutatakse sageli spetsiaalseid tähistusi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$; vektori koordinaate sellise baasi suhtes tähistatakse tähtedega x, y, z ja nimetatakse <u>ristkoordinaatideks.</u> Vektori ristkoordinaadid on vektori ristprojektsioonid baasivektorite sihtidele.

2. <u>Lineaartehted vektoritega koordinaatkujul.</u>

Olgu vektorid x ja y antud oma koordinaatidega mingi baasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ suhtes :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{ja} \quad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3),$$

s.t.

$$\vec{x} = x_i \vec{e}_i \ ; \qquad \vec{y} = y_i \vec{e}_i \ ; \qquad i = 1,2,3.$$

(1) Vektorid on võrdsed parajasti siis, kui vastavad koordinaadid on võrdsed:

$\vec{x} = \vec{y}$ siis ja ainult siis, kui $x_i \vec{e}_i = y_i \vec{e}_i$ ehk $(x_i - y_i)\vec{e}_i = 0$, s.t. kui

$$x_1 = y_1 \ , \quad x_2 = y_2 \ , \quad x_3 = y_3 \ . \qquad (1.1)$$

(2) Kahe vektori summa (vahe) koordinaatideks on nende vektorite vastavate koordinaatide summad (vahed):

$\vec{x} \pm \vec{y} = x_i \vec{e}_i \pm y_i \vec{e}_i = (x_i \pm y_i)\vec{e}_i$, s.t.

$$\vec{x} \pm \vec{y} = (x_1 \pm y_1 \ , \ x_2 \pm y_2 \ , \ x_3 \pm y_3). \qquad (1.2)$$

Nullvektori koordinaadid on nullid.

(3) Vektori korrutamisel arvuga korrutub selle arvuga vektori iga koordinaat:

$$k\bar{x} = k(x_i\bar{e}_i) = (kx_i)\,\bar{e}_i, \quad \text{s.t.}$$

$$k\bar{x} = (kx_1,\ kx_2,\ kx_3\ ) \,. \tag{1.3}$$

(4) Vektorid on kollineaarsed parajasti siis, kui nende koordinaadid on võrdelised.

Kui $\bar{x} \parallel \bar{y}$; $\bar{y} \neq 0$, siis $\bar{x} = k\bar{y}$. Järelikult

$$x_i = ky_i, \text{ s.t. } \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = k \,. \tag{1.4}$$

Vastupidi, seosest (1.4) järeldub vektorite kollineaarsus.

(5) Tunnus vektorite lineaarseks sõltuvuseks.
Kui $\bar{x} = x_i\bar{e}_i$, $\bar{y} = y_i\bar{e}_i$, $\bar{z} = z_i\bar{e}_i$, $i = 1,2,3$
mingi baasi suhtes ja

$$k_1\bar{x} + k_2\bar{y} + k_3\bar{z} = 0 \,,$$

siis seoste (1. 1–4) põhjal

$$k_1x_i + k_2y_i + k_3y_i = 0 \,. \tag{1.5}$$

Vastupidi, seosest koordinaatide vahel (1.5) järeldub seos vektorite vahel.

Juhul kui seoses (1.5) kordajatest k_1, k_2, k_3 vähemalt üks on nullist erinev, on tegemist vektorite $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ lineaarse sõltuvusega.

Kolm vektorit on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui vektorite koordinaatidest moodustatud determinant on võrdne nulliga, s.t.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \,.$$

Lineaartehted vektoritega koordinaatide abil.

1.54. On antud kolm vektorit: $\bar{a} = (\ 2,4)$, $\bar{b} =(-3,1)$, $\bar{c} = (5,-2)$. Leida vektorid

1) $2\vec{a} + 3\vec{b} - 5\vec{c}$,
2) $\vec{a} + 24\vec{b} + 14\vec{c}$.

1.55. On antud kolm vektorit $\vec{a} = (3,-1)$, $\vec{b} = (1,-2)$, $\vec{c} = (-1,7)$. Leida vektori $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ koordinaadid baasil $\vec{a}, \vec{b}$.

1.56. Tasandil on antud kaks vektorit $\vec{p}=(2,-3)$, $\vec{q}=(1, 2)$. Leida vektori $\vec{a} = (9, 4)$ arenduse koordinaadid baasil $\vec{p}, \vec{q}$.

1.57. Tasandil on antud kolm vektorit $\vec{a} = (3,-2)$, $\vec{b} = (-2, 1)$ ja $\vec{c} = (7,-4)$. Leida iga vektori koordinaadid ülejäänud kahest vektorist moodustatud baasil.

1.58. Esitada vektor $\vec{c}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonina, kui

1) $\vec{a} = (4,-2)$, $\vec{b} = (3,5)$, $\vec{c} = (1,-7)$;
2) $\vec{a} = (5, 4)$, $\vec{b} = (-3,0)$, $\vec{c} = (19, 8)$;
3) $\vec{a} = (-6, 2)$, $\vec{b} = (4,7)$, $\vec{c} = (9,-3)$.

1.59. On antud kolm vektorit $\vec{a} = (5, 3)$, $\vec{b} = (2, 0)$, $\vec{c} = (4, 2)$. Valida arvud α ja β nii, et kolm vektorit $\alpha\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\beta\vec{c}$ moodustaksid kolmnurga, kui iga vektor rakendada eelmise lõpp-punkti.

1.60. Ruumis on antud vektorid $\vec{a} = (3,-2,6)$ ja $\vec{b} = (-2, 1, 0)$. Leida vektorid:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $2\vec{a}$;
4) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 5) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; 6) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

1.61. Ruumis on antud kolm vektorit $\vec{a} = (5, 7, 2)$, $\vec{b} = (3, 0, 4)$, $\vec{c} = (-6, 1,-1)$.
Leida vektorid 1) $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$; 2) $5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$.

1.62. Ruumis on antud kolm vektorit $\vec{p} = (3,-2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1,-2)$, $\vec{r} = (2, 1,-3)$. Leida vektori $\vec{c} = (11,-6, 5)$ koordinaadid baasil $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$.

1.63. On antud neli vektorit $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1,-1, 2)$, $\vec{c} = (2, 2,-1)$ ja $\vec{d} = (3, 7,-7)$. Leida iga vektori koordinaadid ülejäänud kolmest vektorist moodustatud baasil.

1.64. Vektorid $\vec{AB} = (2, 6,-4)$ ja $\vec{AC} = (4, 2,-2)$ on kolmnurga ABC külgedeks. Leida kolmnurga mediaan vektorite $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ ja $\overline{CP}$ koordinaadid.

1.65. Leida, millistel α ja β väärtustel vektorid $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ ja $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ on kollineaarsed.

1.66. Näidata, et iga kolme vektori $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ ning iga kolme arvu λ, μ, ν korral vektorid $\lambda\bar{a} - \mu\bar{b}$, $\nu\bar{b} - \lambda\bar{c}$, $\mu\bar{c} - \nu\bar{a}$ on komplanaarsed.

1.67. On antud neli vektorit $\bar{a} = (1, 5, 3)$, $\bar{b} = (6, -4, -2)$, $\bar{c} = (0, -5, 7)$, $\bar{d} = (-20, 27, -35)$. Valida arvud α, β ja γ nii, et vektorid $\alpha\bar{a}$, $\beta\bar{b}$, $\gamma\bar{c}$ ja $\bar{d}$ moodustaksid kinnise murdjoone, kui iga järgnev vektor rakendada eelmise vektori lõpp-punktist.

1.68. Esitada vektor $\bar{d}$ vektorite $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarkombinatsioonina, kui

1) $\bar{a} = (2, 3, 1)$, $\bar{b} = (5, 7, 0)$, $\bar{c} = (3, -2, 4)$, $\bar{d} = (4, 12, -3)$;

2) $\bar{a} = (5, -2, 0)$, $\bar{b} = (0, -3, 4)$, $\bar{c} = (-6, 0, 1)$, $\bar{d} = (25, -22, 16)$;

3) $\bar{a} = (3, 5, 6)$, $\bar{b} = (2, -7, 1)$, $\bar{c} = (12, 0, 6)$, $\bar{d} = (0, 20, 18)$.

1.69. Teha kindlaks, millistel allpool toodud juhtudel vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ on lineaarselt sõltuvad ning esitada sel puhul vektor $\bar{c}$ vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ lineaarkombinatsioonina:

1) $\bar{a} = (5, 2, 1)$, $\bar{b} = (-1, 4, 2)$, $\bar{c} = (-1, -1, 6)$;
2) $\bar{a} = (6, 4, 2)$, $\bar{b} = (-9, 6, 3)$, $\bar{c} = (-3, 6, 3)$;
3) $\bar{a} = (6, -18, 12)$, $\bar{b} = (-8, 24, -16)$, $\bar{c} = (8, 7, 3)$;
4) $\bar{a} = (2, -3, 5)$, $\bar{b} = (-8, 12, -15)$, $\bar{c} = (6, -9, 10)$.

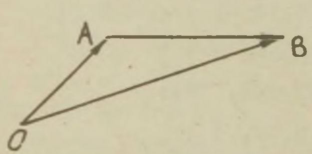
II peatükk

REEPER JA PUNKTI KOORDINAADID

§ 1. P u n k t i   k o h a v e k t o r

Punktihulkade kirjeldamiseks vektorite abil on tarvis korraldada vastavus vektorite ja punktide vahel. Selline vastavus saadakse ühe suvalise punkti fikseerimisega sirgel, tasandil või ruumis.

Fikseeritud punkti O nimetatakse <u>alguspunktiks</u> (ehk pooluseks). Punkti P <u>kohavektoriks</u> alguspunkti O suhtes nimetatakse vektorit $\overrightarrow{OP}$. Igale punktile seatakse vastavusse tema kohavektor O suhtes. Seejuures (vt. joon. 2.1)



Joon. 2.1

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Järelikult vektor on oma lõpp-punkti ja alguspunkti kohavektorite vahe. Kui punktide A, B, C, ... kohavektoriteks on $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... ühe ja sama pooluse suhtes, kirjutatakse $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, ...

<u>2.1.</u> Anda tingimus kolme punkti $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ ja $C(\vec{c})$ kollineaarsuseks.

<u>2.2.</u> Mida võib öelda kolme punkti $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ ja $C(\vec{c})$ vastastikuse asendi kohta, kui nende kohavektorid on seotud järgmiselt:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0,$$

kusjuures

$$\alpha + \beta + \gamma = 0?$$

<u>2.3.</u> Milline on nelja punkti $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ ja $D(\vec{d})$ komplanaarsuse tingimus?

2.4. Näidata, et kolmnurga tippude kohavektorite summa on null, kui koordinaatide alguspunkt asub kolmnurga raskuskeskmes.

2.5. Kus peab asetsema koordinaatide alguspunkt, selleks et rööpküliku kõigi tippude kohavektorite summa oleks null? Kui palju on sellel ülesandel lahendeid?

2.6. Rööpküliku kolme tipu A, B, C kohavektorid on $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Avaldada nende kaudu B vastastipu D kohavektor $\vec{d}$.

2.7. Tõestada, et tetraeedri vastaskülgede keskpunkte ühendavad lõigud lõikuvad ühes ja samas punktis ning poolituvad selles.

2.8. Näidata, et n materiaalse punkti raskuskeskmest kõikidesse nendesse punktidesse suunatud vektorite summa on null (eeldusel, et kõikides n punktides on võrdsed massid).

§ 2. Afiinne reeper. Ortoreeper ja risti reeper.

1. Afiinne reeper.

Süsteemi, mis koosneb alguspunktist ja vektorbaasist, nimetatakse afiinseks reeperiks (ehk afiinseks koordinaatsüsteemiks), Igale punktile x saab seada vastavusse tema kohavektori $\vec{x} = \vec{OX}$. Kohavektori koordinaate antud baasil nimetatakse punkti x afiinseks koordinaadiks. Seega punkti afiinseteks koordinaatideks antud reeperi suhtes on tema kohavektori koordinaadid sama reeperi suhtes. Kui on antud kaks punkti A ja B kohavektoritega $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, siis $\vec{AB}=\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ ning vektori koordinaadid on otspunktide koordinaatide vahed (lõpp-punkti koordinaatidest tuleb lahutada alguspunkti koordinaadid).

Afiinne reeper sirgel koosneb ühest punktist O ja ühest vektorist $\vec{e}\neq 0$. Teda tähistatakse $R= \{O,\vec{e}\}$ (vt. joon. 2.2). Sirge suvalise punkti X afiinse koordinaadi x määrab vektorvõrdus

$$\vec{OX} = x\vec{e}.$$

Joon. 2.2

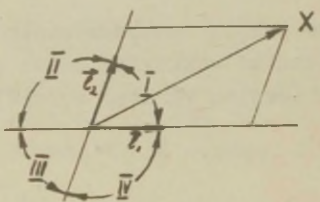
Punkti X koordinaadiga x tähistatakse sümboliga X(x). Reeper $R=\{O,\vec{e}\}$ korraldab üksühese vastavuse sirge punktide hulga ja kõigi reaalarvude hulga vahel : $X \leftrightarrow x$. Reeperi fikseerimine muudab sirge arvteljeks.

<u>Afiinne reeper tasandil</u> koosneb punktist O ja kahest mittekollineaarsest vektorist $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$: $R=\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (vt. joon 2.3). Tasandi suvalise punkti X koordinaatideks x_1 ja x_2 (ehk x ja y) on tema kohavektori $\vec{OX}$ koordinaadid, mis määratakse võrdusest

$$\vec{OX}=x^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\,; \quad \alpha = 1,\ 2,$$

ehk

$$\vec{OX}=x^1\vec{e}_1+ x^2\vec{e}_2.$$



Joon. 2.3

Punkti X koordinaatidega x^1 ja x^2 (ehk x ja y) tähistatakse $X(x^1, x^2)$ (ehk X(x, y). Reeper $R=\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ korraldab üksühese vastavuse tasandi punktide hulga ja kõigi järjestatud reaalarvupaaride hulga vahel:

$$X \xleftrightarrow{R} (x^1, x^2).$$

Reeper määrab tasandil kaks sirget, mis läbivad punkti O ja on paralleelsed vektoritega $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$. Neil sirgeil on määratud reeperid $\{O; \vec{e}_1\}$ ja $\{O, \vec{e}_2\}$, s.t. nad osutuvad arvtelgedeks. Neid telgi nimetatakse koordinaattelgedeks; vektorile $\vec{e}_1$ vastavat telge nimetatakse <u>abstsissteljeks</u> ehk x^1-teljeks (x-teljeks) ja vektorile $\vec{e}_2$ vastavat - <u>ordinaatteljeks</u> ehk x^2-teljeks (y-teljeks). Punkti koordinaate x^1 ja x^2 (ehk x ja y) nimetatakse vastavalt <u>abstsissiks</u> ja <u>ordinaadiks</u>.

Kui $x^1=0$ (x=0), siis punkt X asub ordinaatteljel; kui $x^2=0$ (y=0), siis abstsissteljel.

Koordinaatteljed jaotavad tasandi neljaks koordinaatnurgaks (ehk "veerandiks"), mis nummerdatakse joonisel

2.3 näidatud viisil.

Tasandi afiinse reeperi baasivektorite vahelise nurga suurust nimetatakse <u>reeperinurgaks</u> ning tähistatakse sageli sümboliga ω. Afiinset reeperit, mille baasivektorid on ühikvektorid, nimetatakse <u>kaldreeperiks</u>. Kahe punkti $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ vaheline kaugus on võrdne vektori

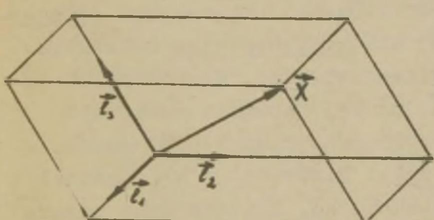
$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

pikkusega ja arvutatakse kaldreeperi korral järgmise valemiga

$$|\vec{AB}| = AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}, \quad (2.1)$$

kus ω on reeperinurk .

<u>Afiinne reeper ruumis</u> koosneb punktist O ja kolmest mittekomplanaarsest vektorist: $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (ehk $R = \{O, \vec{e}_i, i=1,2,3\}$) (vt. joon. 2.4). Punkti X afiinseteks koordinaatideks on punkti kohavektori $\vec{OX}$ koordinaadid. Kui $\vec{OX} = x^i\vec{e}_i$, i=1,2,3, s.t. $\vec{OX} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3$, (ehk $\vec{OX} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$), siis kirjutatakse $X(x^1, x^2, x^3)$ (ehk $X(x,y,z)$). Reeper $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korraldab üksühese vastavuse ruumi punktide hulga ja kõigi järjestatud reaalarvukolmikute vahel: $X \xleftrightarrow{R} (x^1, x^2, x^3)$.



Joon. 2.4

Reeper määrab ruumis kolm punktis O lõikuvat <u>koordinaattelge</u> ja kolm mööda neid telgi paarikaupa lõikuvat tasandit - <u>koordinaattasandit</u>. Telge, mille sihi määrab vektor $\vec{e}_3$, nimetatakse <u>aplikaatteljeks</u> (ehk x^3-teljeks, ehk z-teljeks), koordinaati x^3 (ehk z) -punkti <u>aplikaadiks</u>. Koordinaattasandeid nimetatakse nendel tasanditel asuvate telgede järgi: x^1x^2-tasand (ehk xy-tasand), x^1x^3-tasand (ehk xz-tasand) ja x^2x^3-tasand (ehk yz-tasand).

Afiinse reeperi korral on vektorbaas üldjuhul täiesti suvaline, s.t. baasivektorite pikkuste ja reeperinurkade kohta ei esitata mingeid kitsendusi peale nõude, et vektorid oleksid lineaarselt sõltumatud, s.t. mittekollineaarsed (tasandil) ja mittekomplanaarsed (ruumis).

Ka ruumis nimetatakse sellist afiinset reeperit, mille baasivektorid on ühikvektorid, <u>kaldreeperiks</u>.

2. <u>Ortoreeper ja ristreeper</u>.

Afiinse reeperi (baasi) puhul eristatakse järgmisi erijuhte. Kui baasivektorid on vastastikku risti (ortogonaalsed), siis kõneldakse <u>ortoreeperist</u> ehk ortogonaalsest reeperist (ortobaasist ehk ortogonaalsest baasist). Kui baasivektorid on ühikvektorid, siis kõneldakse <u>normeeritud reeperist</u> (baasist).

Normeeritud ortoreeperit (-baasi) nimetatakse <u>ortonormeeritud reeperiks</u> (baasiks) ehk <u>ristreeperiks</u> (-baasiks), ka Descartes'i[1] ristkoordinaadistikuks. Ristreeperit tähistatakse sageli $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, tasandil vastavalt $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$[2]. Punkti koordinaate ristreeperi suhtes nimetatakse <u>ristkoordinaatideks</u>. Ristreeperi kasutamisel rida valemeid oluliselt lihtsustuvad. Näiteks kahe tasandil asuva punkti $A(x_1, y_1)$ ja $B(x_2, y_2)$ vaheline kaugus, mis on võrdne vektori $AB=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ pikkusega, arvutatakse ristreeperis valemiga[3]

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2.2)$$

<u>Märkus</u>. Kui ülesandes reeper (baas) on ristreeper, siis lihtsuse mõttes me seda edaspidi eraldi ei märgi.

---

[1] René Descartes /dekaart, lad./ Renatus Cartesius (1596-1650).

[2] Kui ülesannetes esinevad tähistused $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, on alati tegemist kas ristreeperi või ristbaasiga.

[3] Valem kehtib ainult ristreeperi korral ja on erijuht valemist (2.1), kui $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Punkti koordinaat sirgel.

2.9. Konstrueerida punktid $A(1)$, $B(\sqrt{2})$, $C(-\sqrt{3})$, $D(2/3)$, $E(\sqrt{5}-1)$, $F(-0,(4))$.

2.10. Konstrueerida punktid, mille koordinaadid rahuldaksid võrrandeid:

1) $\frac{5x-2}{3} - \frac{2x-1}{7} = \frac{3x+4}{2} - 3$;

2) $x^2 - 4 = 0$;

3) $|1-x| = 3$;

4) $x^2 + x - 6 = 0$;

5) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$;

6) $x^2 + 4x + 4 = 0$;

7) $x^2 - x + 6 = 0$.

2.11. Kirjeldada punktide geomeetrilist asendit, kui nende koordinaadid rahuldavad järgmisi võrratusi:

1) $x > 2$; 2) $|x| \leq 1$; 3) $x-5 \leq 10$; 4) $x^2+x-12 > 0$;

5) $x^2+x-12 < 0$.

2.12. Tõestada samasus $X_{AB}X_{CD}+X_{AC}X_{DB}+X_{AD}X_{BC}=0$, kus A, B, C, D on suvalised punktid arvteljel, X_{AB} - vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaat jne.

2.13. Arvutada punkti A koordinaat, kui on teada:
1) $B(3)$ ja $\overrightarrow{AB}=(5)$; 2) $B(2)$ ja $\overrightarrow{AB}=(-3)$; 3) $B(-5)$ ja $\overrightarrow{BA}=(-3)$; 4) $B(0)$ ja $|\overrightarrow{AB}|=2$; 5) $B(2)$ ja $|\overrightarrow{AB}|=3$; 6) $B(-5)$ ja $|\overrightarrow{AB}|=2$.

2.14. Olgu sirgel antud kolm suvalist punkti A, B ja C. Sõltumata nende vastastikusest asendist, kehtib seos: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Kontrollida selle võrduse õigsust järgmiste punktide puhul:

a) $A(-3)$, $B(5)$ ja $C(12)$;

b) $A(4)$, $B(1)$ ja $C(6)$;

c) $A(3)$, $B(-7)$ ja $C(-2)$;

d) $A(x_1)$, $B(x_2)$ ja $C(x_3)$.

2.15. Leida punktide A ja B vaheline kaugus d alljärgnevatel juhtudel: 1) $A(1)$, $B(-7)$; 2) $A(3)$, $B(-2)$; 3) $A(-6)$, $B(-10)$. Kontrollida tulemust joonisel.

Ristreeper tasandil.

2.16. Konstrueerida punktid: A(2; 7), B(3,0), C(1,-4), D(0,5), E(-1,2), F(-4,-3), G(-2,0), H(0,-3), K($-3\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$), L(2, - 3), N(0, 5).

2.17. Leida punktide A(2, -3), B(3, -1), C(-5, 1), D(-3, -2), E(-5, -1) projektsioonide koordinaadid abstsissteljel.

2.18. Leida punktide A(-3, 2), B(-5, 1), C(3, -2), D(-1,1) E(-6, -2) projektsioonide koordinaadid ordinaatteljel.

2.19. Teha kindlaks, millises veerandis asub punkt M(x,y), kui 1) $xy>0$; 2) $xy<0$; 3) $x-y=0$; 4) $x+y=0$; 5) $x+y>0$; 6) $x+y<0$; 7) $x-y>0$; 8) $x-y<0$.

2.20. Olgu antud punkt M(x,y). Leida punktiga M sümmeetriline punkt

1) koordinaatide alguspunkti suhtes;
2) abstsisstelje suhtes;
3) ordinaattelje suhtes;
4) esimese ja kolmanda koordinaatnurga poolitaja suhtes;
5) teise ja neljanda koordinaatnurga poolitaja suhtes.

2.21. Leida punktiga A(2, 3), B(-3, 2), C(-1, -1), D(-3, -5), E(-4, 6), F(a, b) sümmeetrilised punktid x-telje suhtes.

2.22. Leida punktidega A(-1, 2), B(3, -1), C(-2, -2), D(-2, 5), E(3, -5), F(a, b) sümmetrilised punktid y-telje suhtes.

2.23. Leida punktidega A(3, 3), B(2, -4), C(-2, 1), D(5, -3), E(-5, -4), F(a, b) sümmeetrilised punktid koordinaatide alguspunkti suhtes.

2.24. Leida punktidega A(2, 3), B(5, -1), C(-3, 4) sümmeetrilised punktid esimese koordinaatnurga poolitaja suhtes.

2.25. Leida punktidega A(3, 5), B(-4, 3), C(7, -2) sümmeetrilised punktid teise koordinaatnurga poolitaja suhtes.

2.26. Milline on ühel koordinaatnurga poolitajal asuva punkti koordinaatide vaheline seos?

2.27. Punktide A(-2, 5) ja M(x, y) vaheline kaugus on 3 pikkusühikut. Leida punkti M koordinaadid, kui 1) A ja M asetsevad x-teljega paralleelsel sirgel; 2) A ja M asetsevad y-teljega paralleelsel sirgel.

Vektorid ja lõigud

2.28. Leida vektori $\overrightarrow{AB}=(x,y)$ lôpp-punkti koordinaadid, kui

1) x=4, y=-2, A(1,2);
2) x=-1, y=3, A(-1,0);
3) x=0, y=-3, A(4,3).

2.29. Leida vektori $\overrightarrow{AB}$ pikkus ja siht, kui

1) A(-1,4), B(4,-8);
2) A(4,7), B(-2,-1);
3) A(1,2), B(4,6).

2.30. On antud kaks punkti A(3, 7) ja B(5, 6). Leida vektori $\overrightarrow{AB}$ projektsioon koordinaattelgedel.

2.31. Konstrueerida koordinaatide alguspunktist lähtuvad lõigud, kui nende projektsioonid koordinaattelgedel on: 1) x=3, y=2; 2) x=2, y=-5; 3) x=-5, y=0; 4) x=-2, y=3; 5) x=0, y=3; 6) x=-5, y=-1.

2.32. Konstrueerida lõigud, mille alguspunktiks on punkt M(2, -1) ning nende projektsioonid koordinaattelgedel on: 1) x=4, y=3; 2) x=2, y=0; 3) x=-3, y=1; 4) x=-4, y=-2; 5) x=0, y=-3; 6) x=1, y=-3.

2.33. Lõigu M_1M_2 projektsioonid koordinaattelgedel on x=5, y=-4 ning alguspunkt on $M_1(-2, 3)$. Leida selle lõigu lõpp-punkti koordinaadid.

2.34. Lõikude projektsioonid koordinaattelgedel on: 1) x=3, y=-4; 2) x=12, y=5; 3) x=-8, y=6; Leida nende lõikude pikkused.

2.35. Lõigu pikkus d on 5 ning ta projektsioon abstsissteljel 4. Leida selle lõigu projektsioon ordinaatteljel, kui ta moodustab ordinaatteljega: 1) teravnurga; 2) nürinurga.

2.36. Lõigu MN pikkus on 13, ta algus asetseb punktis M(3, -2) ning ta projektsioon abstsissteljel on 12. Leida selle lõigu otspunkti koordinaadid, kui ta moodustab ordinaatteljega: 1) teravnurga; 2) nürinurga.

2.37. Lõigu MN pikkus on 17, ta lõpp-punkt on N(-7,3) ning projektsioon ordinaatteljel 15. Leida selle lõigu alguspunkti koordinaadid, kui ta moodustab abstsissteljega: 1) teravnurga; 2) nürinurga.

Kollineaarsed punktid. Kaugused.

2.38. Kontrollida, kas antud kolm punkti

1) (0,5), (2,1), (-1,7);
2) (3,1), (-2,-9), (8,11);
3) (0,2), (-1,5), (3,4)

asetsevad ühel sirgel.

2.39. On antud punktid A(0,0), B(3,-4), C(-3,4), D(-2,2) ja E(10,-3). Leida punktide 1) A ja B; 2) B ja C; 3) A ja C; 4) C ja D; 5) A ja D; 6) D ja E vaheline kaugus d.

2.40. Leida x-teljel punkt, mis asetseb võrdsel kaugusel koordinaatide alguspunktist ja punktist A(9,-3).

2.41. Leida ordinaatteljel punkt, mis asetseb punktist A(4,-6) 5 ühiku kaugusel.

2.42. Leida punkti M ordinaat, kui ta abstsiss on 7 ning kaugus punktini N(-1,5) on 10.

2.43. Leida punkt, mille kaugus x-teljest ja punktist A (-5,2) on 10.

2.44. Leida punkt, mille kaugused punktidest A (-5,1), B (3,-5) ja C (2,2) on võrdsed.

2.45. Leida antud kolmest punktist A(2,2), B(-5,1) ja C(3,-5) võrdsel kaugusel asuva punkti koordinaadid.

2.46. Millist tingimust peavad rahuldama punkti M(x, y) koordinaadid, et see punkt asetseks võrdsetel kaugustel punktidest A(7,-3) ja B(-2,1).

Kolmnurk. rööpkülik. nelinurk.

2.47. Näidata, et kolmnurk on korrapärane, kui ta tipud on A $(5, \frac{\pi}{2})$, B $(8, \frac{5\pi}{6})$ ja C $(3, \frac{7\pi}{6})$.

2.48. Näidata, et kolmnurk tippudega A (6,5), B (1,10) ja C (3,2) on täisnurkne.

2.49. Kolmnurga tipud on A(2,-3), B(1,3) ja C(-6,-4). Leida punkt M, mis ühtib tipuga A, kui joonis murtakse kokku mööda sirget BC.

2.50. Ruudu külg on 1. Leida ruudu tippude koordinaadid, kui koordinaattelgedeks on: 1) kaks mitteparalleelset ruudu külge; 2) kaks diagonaali; 3) sirged, mis on paralleelsed ruudu külgedega ning lõikuvad keskpunktis.

2.51. Reeperi telgedeks on rombi diagonaalid. Punktid $A(x_1,y_1)$ ja $B(x_2,y_2)$ on rombi lähistipud. Avaldada ülejäänud tippude koordinaadid antud tippude koordinaatide kaudu.

2.52. Rööpküliku ABCD kolm tippu on A(2,3), B(4,-1) ja C(0,5). Määrata neljas tipp D.

2.53. Rööpküliku kolm tippu on:

1) A(4,2), B(5,7), C(-3,4);

2) A(3,-5), B(5,-3), C(-1,3).

Leida tipu B vastastipp D.

2.54. Antud trapetsi ABCD kolm järjestikust tippu on A(-1,-2), B(1,3) ja C(9,9). Leida trapetsi neljas tipp D, kui trapetsi alus AD=15.

2.55. Võrdhaarse trapetsi pikem alus AB=8, kõrgus 3 ja alusnurk 45°. Võtame trapetsi pikema aluse abstsissteljeks, aluse keskpunktist ehitatud ristsirge ordinaatteljeks, kusjuures positiivseks suunaks loeme trapetsi sisemusse suunduva ristlõigu suuna. Leida trapetsi tippude, diagonaalide lõikepunkti M ja haarade lõikepunktide koordinaadid.

2.56. Korrapärase kuusnurga külje pikkuseks on 6 mõõtühikut. Leida kuusnurga tippude ristkoordinaadid, kui koordinaatide alguspunktiks on kuusnurga keskpunkt ja x-telg läbib kuusnurga kaht vastastippu.

2.57. Tõestada, et korrapärase hulknurga tippude samanimeliste koordinaatide aritmeetiline keskmine on võrdne hulknurga keskpunkti vastava koordinaadiga.

Ristreeper ruumis.

2.58. Millistes oktantides võivad asuda punktid, kui 1) $xy>0$; 2) $xz<0$; 3) $yz>0$; 4) $xyz>0$; 5) $xyz<0$.

2.59. Millistes oktantides võivad asuda punktid, mille koordinaadid rahuldavad järgmisi võrrandeid: 1) $x-y=0$; 2) $x+y=0$; 3) $x-z=0$; 4) $x+z=0$; 5) $y-z=0$; 6) $y+z=0$.

2.60. Olgu antud punktid $A(4, 3, 5)$, $B(-3, 2, 1)$, $C(2, -3, 0)$ ja $D(0, 0, -3)$. Leida nende punktide projektsioonid: 1) xy-tasandil; 2) xz-tasandil; 3) yz-tasandil; 4) abstsissteljel; 5) ordinaatteljel; 6) aplikaatteljel.

2.61. Leida koordinaatide alguspunkti O kaugus punktidest $A(4, -2, -4)$, $B(-4, 12, 6)$, $C(12, -4, 3)$, $D(12, 16, -15)$.

2.62. Antud on punktid $A(1, -2, -3)$, $B(2, -3, 0)$, $C(3, 1, -9)$, $D(-1, 1, -12)$. Arvutada lõikude AC, BD ja CD pikkused.

2.63. Abstsissteljel leida punkt, mille kaugus punktist $A(-3, 4, 8)$ on 12.

2.64. Leida vektori $\vec{a}=(3, -1, 4)$ lõpp-punkt N, kui vektori alguspunkt on $M(1, 2, -3)$.

2.65. Leida vektori $\overrightarrow{AB}=(2, -3, -1)$ alguspunkt, kui ta lõpp-punkt on $B(1, -1, 2)$.

2.66. On antud punktid $A(3, -1, 2)$ ja $B(-1, 2, 1)$. Leida vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{BA}$ koordinaadid.

2.67. Kolmnurga tipud on: $A(-1, 2, 3)$, $B(5, -3, 4)$ ja $C(2, 1, 6)$. Avaldada kolmnurga küljvektorid reeperi ühikvektorite $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ kaudu.

2.68. Kas on võimalik lahendada eelmisele ülesandele vastupidist ülesannet, s.o. teades kolmnurga külgvektoreid, leida kolmnurga tippude kohavektorid?

2.69. On antud kolmnurga tipp $A(2, -5, 3)$ ning külgvektorid $\overrightarrow{AB}=(4, 1, 2)$ ja $\overrightarrow{BC}=(3, -2, 5)$. Leida ülejäänud tipud ja külgvektor $\overrightarrow{CA}$.

2.70. Tõestada, et kolmnurk tippudega $A_1(3, -1, 6)$, $A_2(-1, 7, -2)$ ja $A_3(1, -3, 2)$ on täisnurkne.

2.71. Tõestada, et kolmnurk tippudega $A(3, -1, 2)$, $B(0, -4, 2)$ ja $C(-3, 2, 1)$ on võrdkülgne.

2.72. Tõestada, et kolmnurga $M(3, -2, 5)$, $N(-2, 1,-3)$, $P(5, 1, -1)$ sisenurgad on teravnurgad.

2.73. Kas kolmnurk tippudega $M_1(4, -1, 4)$, $M_2(0, 7, -4)$, $M_3(3, 1, -2)$ on teravnurkne, täisnurkne või nürinurkne?

2.74. Rööpküliku ABCD kolm tippu on $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$ ja $C(-1, 1, 2)$. Leida neljas tipp D.

2.75. Rööpküliku ABCD kolm tippu on $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ ja $C(1, 2, -3)$. Leida tipu B vastastipp D.

2.76. Nelinurga tipud on määratud kohavektoritega $\vec{a}=5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{d}=2\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$. Tõestada, et see nelinurk on rööpkülik.

2.77. Kontrollida, kas neli punkti $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ osutuvad trapetsi tippudeks.

2.78. Olgu antud kuubi neli tippu $A(-a, -a, -a)$, $B(a, -a, -a)$, $C(-a, a, -a)$ ja $D(a, a, a)$. Määrata kuubi ülejäänud tipud.

Afiinne reeper tasandil.

2.79. Kaldreeperis, mille baasivektorite vaheline nurk on $\omega=\frac{\pi}{4}$, konstrueerida kolmnurk tippudega $A(3, 5)$, $B(-4, 7)$, $C(5,5, -3,5)$.

2.80. Konstrueerida punktid $A(3, 2)$, $B(-4, 6)$, $C(-2, -5)$, $D(4, -1)$ kaldreeperis, kui reeperinurk on $\omega=\frac{\pi}{6}$.

2.81. Leida kaldreeperis järgmiste punktide kaugus teineteisest:

1) $A=(1, 10)$, $B=(7, 2)$, $\omega=60^{\circ}$;

2) $A=(0, -4)$, $B=(7, -2)$, $\omega=30^{\circ}$;

3) $A=(-5, 4)$, $B=(-1, -5)$, $\omega=45^{\circ}$;

4) $A=(5{,}4,\ 6{,}2)$, $B=(7{,}5,\ 2{,}8)$, $\omega=120^{\circ}$.

2.82. Leida reeperinurk ω, kui punkti A (10, -4) kaugus punktist B (7, -1) on 3 mõõtühikut.

2.83. Kaldreeperis on antud punkt M(6,4), kusjuures reeperinurk $\omega=150^{\circ}$. Leida selle punkti kaugus reeperiteljest.

2.84. Leida punkti M koordinaadid kaldreeperis, kui ta kaugused reeperitelgedest on vastavalt 1 ja 1,5 ühikut ja $\omega=\frac{\pi}{6}$.

2.85. Leida lõikude projektsioonid reeperitelgedel, kui lõigu pikkus d ja reeperinurk ω on vastavalt: 1) d=12, $\omega=\frac{2}{3}\pi$; 2) d=6, $\omega=-\frac{\pi}{6}$; 3) d=2, $\omega=-\frac{\pi}{4}$.

2.86. Lõigu projektsioonid reeperitelgedel on X=1, Y=- 3. Leida selle lõigu projektsioon teljel, mis moodustab x-teljega nurga $\varphi=\frac{2}{3}\pi$.

2.87. On antud punktid $M_1(1, -5)$ ja $M_2(4, -1)$. Leida lõigu M_1M_2 projektsioonid teljel, mis moodustab x-teljega nurga $\varphi=-\frac{\pi}{6}$.

2.88. On antud kaks punkti P(-5, 2) ja Q(3, 1). Leida lõigu PQ projektsioon teljel, mis moodustab x-teljega nurga $\varphi=\arctan\frac{3}{4}$.

2.89. On antud kaks punkti $M_1(2, -2)$ ja $M_2(7, -3)$. Leida lõigu M_1M_2 projektsioon teljel, mis läbib punkte A(5, -4), B(-7, 1) ning on suunatud: 1) punktist A punkti B ning 2) punktist B punkti A.

2.90. Rombi külje pikkuseks on 3 mõõtühikut. Leida rombi tippude koordinaadid, kui rombi küljed on reeperitelgedeks.

2.91. On antud korrapärane kuusnurk ABCDEF. Leida tippude koordinaadid, kui koordinaatide alguspunktiks on punkt A, abstsisstelje positiivne suund ühtib vektori AB positiivse suunaga ning ordinaattelje positiivne suund ühtib vektori $\vec{AE}$ suunaga, kusjuures ühiklõiguks mõlemal teljel on kuusnurga külg.

2.92. On antud kaks rööpküliku lähistippu A(-1, 3) ja B(2, -1). Leida kaks ülejäänud tippu, kui reeperitelgedeks on rööpküliku diagonaalid.

2.93. Leida korrapärase kuusnurga tippude koordinaadid, kui kuusnurga külg on a, reeperi alguspunkt asetseb kuusnurga keskpunktis ning abstsisstelg läbib kaht vastastippu.

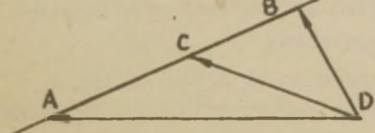
2.94. Trapetsi ABCD alumine alus AB on kolm korda pikem ülemisest alusest CD. Reeperi alguspunktiks võtame punkti A, abstsisstelje positiivseks suunaks aluse AB suuna, ordinaadi positiivseks suunaks haara AD suuna ning külgede AB ja AD pikkused ühiklõikudeks nendel telgedel. Leida trapetsi tippude, diagonaalide lõikepunkti O ning haarade lõikepunkti S koordinaadid.

2.95. On antud afiinne reeper, kusjuures reeperinurk $\omega = \arccos(-\frac{3}{4})$ ning ühiklõik abstsissteljel on 2,5 korda pikem ühiklõigust ordinaatteljel. Konstrueerida selles reeperis punktid A(4, 2), B(-2, 1), C(-3, -3), D(2, - 3).

§ 3. Lõigu jagamine antud suhtes

1. Lihtsuhe.

Kolme ühel sirgel asuva punkti A, B, C lihtsuhteks punktide antud järjekorras nimetatakse arvu (vektorite suhet) $\lambda = \vec{AC}:\vec{CB}$ ja tähistatakse (ABC). Olgu punktide A ja B kohavektorid alguspunkti O suhtes $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ (vt. joon. 2.5). Määrame punkti C kohavektori $\vec{c}$. Et $\vec{AC} \parallel \vec{CB}$, siis lihtsuhe eksisteerib ja on



Joon. 2.5.

üheselt määratud võrrandiga

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}.$$

Avaldame $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB}$ otspunktide kohavektorite kaudu: $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}-\vec{c}$. Asendades saadud avaldised võrrandisse, saame

$$\vec{c} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{c}),$$

ehk, kui $1 + \lambda \neq 0$, s.t. $A \neq B$, siis

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} + \lambda \vec{b}}{1 + \lambda} . \tag{2.3}$$

Arvu λ nimetatakse ka suhteks, milles punkt C jagab lõigu AB. Antud definitsioon määrab selle suhte ka siis, kui punkt C asub sirgel AB väljaspool lõiku AB. Et sellisel juhul $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$, siis on lõigu välispunkti korral lihtsuhe $\lambda < 0$. Kui aga C on lõigu AB sisepunkt, siis $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$ ja $\lambda > 0$.

Erijuhul, kui C on lõigu keskpunkt, $\lambda = 1$, s.t. <u>lõigu keskpunkti kohavektor on otspunktide kohavektorite aritmeetiline keskmine</u>

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} . \tag{2.4}$$

Kui punktid on määratud koordinaatidega $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, siis punkt C jagab lõigu AB lihtsuhtes λ, kus $\lambda = \overrightarrow{AC}:\overrightarrow{CB}$ on vektorite $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{CB}$ vastavate koordinaatide ühine suhe

$$\lambda = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} . \tag{2.5}$$

Kui punktid A, B ja lihtsuhe λ on antud, siis jaotuspunkti C koordinaadid leitakse seosest (2.5)

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} ; \; y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \; ; \; z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \tag{2.6}$$

ning lõigu keskpunkti koordinaadid on võrdsed otspunktide koordinaatide aritmeetilise keskmisega

$$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2} \; ; \; y_3 = \frac{y_1+y_2}{2} \; ; \; z_3 = \frac{z_1+z_2}{2} . \tag{2.7}$$

Tasandil kasutatakse kahte esimest, sirgel ainult esimest seost. Valemid (2.5) - (2.7) on afiinsed valemid ja ristreeperis ei lihtsustu.

2. Nelja punkti liitsuhe. Harmoonilised punktipaarid.

Nelja ühel sirgel asetseva punkti A, B, C, D ($A \neq D$), ($B \neq C$) liit- ehk anharmooniliseks suhteks nimetatakse arvu ν, mis on võrdne lihtsuhete $\lambda = (ABC)$, $\mu = (ABD)$ jagatisega

$$\nu = (ABCD) = (ABC) : (ABD) = \frac{\lambda}{\mu} . \qquad (2.8)$$

Kui punktid ühel sirgel on määratud koordinaatidega $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, siis liitsuhe arvutatakse valemiga:

$$\nu = (ABCD) = \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1} : \frac{x_4-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_1}{y_2-y_1} : \frac{y_4-y_1}{y_2-y_1} =$$

$$= \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} : \frac{z_4-z_1}{z_2-z_1} \qquad (2.9)$$

Kui liitsuhe (ABCD) = -1, öeldakse, et punktid C ja D jagavad lõigu AB harmooniliselt, ehk teisiti, et paarid A,B ja C,D on harmoonilised.

Lõigu jagamine antud suhtes (sirgel).

2.96. Määrata lihtsuhe $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$, milles punkt M(x) jagab punktidega $M_1(x)$ ja $M_2(x)$ piiratud lõigu M_1M_2.

2.97. Leida lihtsuhe (ABC), kui:

1) A(2), B(7), C(5); 4) A(3), B(2), C(3);
2) A(-3), B(-3), C(6); 5) A(1), B(1), C(1).
3) A(-1), B(0), C(3);

2.98. On antud kolm punkti A(-7), B(-1) ja C(1). Määrata lihtsuhe λ, milles **igaüks antud punktidest jagab ülejäänud kahe punkti vahelise lõigu.**

2.99. Leida kolmest punktist $A(1)$, $B(3)$ ja $C(-2)$ moodustatud lihtsuhete kõik kuus väärtust.

2.100. Teades, et $(ABC)=\lambda$, leida (ACB), (BAC), (BCA), (CAB), (CBA).

2.101. On antud $(ABP)=\lambda$, $(ABQ)=\mu$. Leida (PQA) ja (PQB).

2.102. On antud $(ABP)=\lambda$, $(ABQ)=\mu$, $(ABR)=\nu$. Leida (PRQ).

2.103. On antud $(ABP)=\lambda$, $(ABQ)=\mu$ ning lõigu PQ keskpunkt R. Leida (ABR).

2.104. Sirgel on antud kaks punkti A ja B, mis jaotavad ta kolmeks osaks: lõiguks AB; kiireks, mis jääb punktist B paremale, ja kiireks, mis jääb punktist A vasakule. Samal sirgel on antud liikuv punkt X, mis jaotab lõigu AB suhtes λ. Uurida, kuidas muutub λ, kui punkt X paikneb ümber punktide A ja B vahel, kui punkt X ühtib ühega nendest punktidest, kui kaugeneb piiramatult punktist B paremale või punktist A vasakule.

2.105. Määrata kahe antud punkti $M_1(x_1)$ ja $M_2(x_2)$ poolt piiratud lõigu keskpunkti koordinaat x.

2.106. Leida lõigu M_1M_2 keskpunkti koordinaat x järgmistel juhtudel:

1) $A(3)$, $B(9)$;
2) $C(-5)$, $D(2)$;
3) $E(-6)$, $F(6)$.

2.107. On antud kaks punkti $M_1(x_1)$ ja $M_2(x_2)$. Leida lõiku M_1M_2 suhtes λ ($\lambda = \frac{M_1X}{XM_2}$) jaotav punkt $X(x)$.

2.108. Leida punkti X koordinaat x, kui ta jaotab punktidega $M_1(3)$ ja $M_2(6)$ piiratud lõigu suhtes:

1) $\lambda = 3$; 2) $\lambda = \frac{2}{3}$; 3) $\lambda = -\frac{1}{2}$; 4) $\lambda = 0$; 5) $\lambda = 1$.

2.109. Leida punkti B koordinaat, kui punkt $C(-2)$ jaotab punktide $A(3,5)$ ja $B(x)$ vahelise lõigu suhtes $\lambda = \frac{5}{2}$.

2.110. Leida punkti M koordinaat, kui on teada:

1) $M_1(3)$, $M_2(7)$ ja $\lambda = M_1M : MM_2 = 2$;

2) A(2), B(-5) ja $\lambda = AM : MB = 3$;

3) C(-1), D(3) ja $\lambda = CM : MD = \frac{1}{2}$;

4) A(-1), B(3) ja $\lambda = AM : MB = -2$;

5) A(1), B(-3) ja $\lambda = BM : MA = -3$;

6) A(-2), B(-1) ja $\lambda = BM : MA = -\frac{1}{2}$.

2.111. Tõestada, et kui punktide O, E ja M koordinaadid on vastavalt 0, 1 ja x, siis x = -(MEO).

2.112. On antud kaks punkti A(5) ja B(-3). Leida:

1) punktiga A punkti B suhtes sümmeetrilise punkti M koordinaat;

2) punktiga B punkti A suhtes sümmeetrilise punkti N koordinaat.

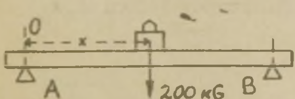
2.113. Punktidega A(-2) ja B(19) piiratud lõik on jaotatud kolmeks võrdseks osaks. Leida jaotuspunktide koordinaadid.

2.114. Leida punktidega P(-25) ja Q(-9) kolmeks võrdseks osaks jaotatud lõigu otspunktide A ja B koordinaadid.

2.115. Punktidesse, mille koordinaadid on 1, 2, 3,..., 10 on paigutatud vastavalt massid 1, 2, 3, ..., 10. Leida süsteemi raskuskeskme koordinaat.

2.116. Kang on jaotatud sentimeetriteks ja millimeetriteks. Jaotustele 23,7 ja 74,3 cm vastavatesse punktidesse on rakendatud koormused 350 ja 475 G. Leida kangil punkt, kuhu tuleb asetada tugipunkt, et kang oleks tasakaalus.

2.117. Horisontaalne latt, mille pikkus on 3 m ja kaal 80 kG, toetub otstega liikumatutele tugedele A ja B (joon. 3.6). Kui kaugele punktist A tuleb paigutada koormus 200 kG, et rõhk punktile B oleks 110 kG?



Joon. 2.6.

2.118. Varras, mille pikkus on 60 cm, on otstest üles riputatud kahe nööri abil. Üks nendest nööridest ei talu 20 kG ületavat pinget. Kui kaugele vastavast varda otspunktist võib rakendada koormuse 96 kG?

Liitsuhe. Harmooniline suhe.

2.119. On antud liitsuhe $(ABCD)=\nu$. Oletades, et punktid A, B, C, D on paarikaupa erinevad, leida antud nelja punkti kõik 24 liitsuhet, mis vastavad antud punktide kõigile permutatsioonidele. Vaadata juhtumeid: 1) $\nu = -\mathrm{tg}^2\alpha$; 2) $\nu = -1$.

2.120. Leida nelja punkti A, B, C, D liitsuhted (ABCD) järgmistel juhtudel:

1) A(1), B(-3), C(1), D(4);
2) A(2), B(-6), C(0), D(5);
3) A(4), B(0), C(-3), D(4);
4) A(1), B(1), C(3), D(2);
5) A(-5), B(-2), C(-2), D(6);
6) A(-1), B(6), C(-4), D(-4).

2.121. On antud kolm punkti A(-3), B(1) ja C(2). Leida igale nendest neljas harmooniline kahe ülejäänu suhtes.

2.122. On antud punktid A(1), B(2), C(4) ja $(ABCD)= -1$. Leida punkt D.

2.123. Tõestada, et kui punktipaar C,D jaotab harmooniliselt punktipaari A,B, siis $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.

2.124. Tõestada, et kui punkt O jaotab lõigu AB pooleks, kuid punktid C ja D jaotavad lõigu AB harmooniliselt, siis $OA^2 = OC \cdot OD$.

2.125. On antud punktide harmooniline nelik A_1, A_2, A_3, A_4. Tõestada, et lõigu A_3A_4 keskpunkt on lõigu A_1A_2 suhtes välimiseks punktiks.

Lõigu jagamine antud suhtes (tasandil)

2.126. Tõestada, et igal alltoodud juhul punktid A, B ja C asetsevad ühel sirgel ja leida lihtsuhe (ABC):

1) A(2, 1), B(-2, 5), C(0, 3);
2) A(1, 6), B(5, 10), C(-3, 2);
3) A(0, 0), B(-3, -3), C(1, 1).

2.127. Leida punktidega $M_1(2, 3)$ ja $M_2(-5, 1)$ piiratud lõiku M_1M_2 suhtes λ jaotava punkti M koordinaadid, kui:

1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -\frac{1}{2}$; 3) $\lambda = -4$; 4) $\lambda = \frac{1}{3}$.

2.128. On antud kolm ühel sirgel asuvat punkti A(1,-1), B(3, 3) ja C(4, 5). Leida suhe λ, milles igaüks neist punktidest jaotab kahe ülejäänud punktiga piiratud lõigu.

2.129. Leida lõigu M_1M_2 keskpunkti koordinaadid, kui:

1) $M_1(2, 3)$, $M_2(-4, 7)$;
2) $M_1(-2, 4)$, $M_2(2, -4)$;
3) $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.

2.130. Üks lõigu AB otspunkte asetseb punktis A(2,3), lõigu keskpunkt on M(1, -2). Leida lõigu teine otspunkt.

2.131. Lõik otspunktidega A=(x, 5) ja B=(-2, y) jaguneb punktis C=(1, 1) pooleks. Leida punkti A abstsiss ja punkti B ordinaat.

2.132. Kolmnurga tipud on A(1, -3), B(3, -5) ja C(-5, 7). Leida kolmnurga külgede keskpunktid.

2.133. Kolmnurga tipud on A(3, -7), B(5, 2) ja C(-1, 0). Leida külgede keskpunktid.

2.134. Leida kolmnurga tipud, kui kolmnurga külgede keskpunktid on:

1) $A_1=(-2, 1)$, $B_1=(2, 3)$ ja $C_1=(4, -1)$;
2) $M_1=(2, 4)$, $M_2=(-3, 0)$ ja $M_3=(2, 1)$;
3) M=(2, -1), N=(-1, 4) ja P=(-2, 2).

2.135. Arvutada kolmnurga mediaanide pikkused, kui kolmnurga tipud on A(3, -2), B(5, 2), ja C(-1, 4).

2.136. On antud kolmnurga tipud A(1, 4), B(3, -9), C(-5, 2). Leida tipust B tõmmatud mediaani pikkus.

2.137. Kolmnurgas ABC: A(5, -4), B(-1, 2), C(5, 1) on tõmmatud mediaan AD. Arvutada mediaani AD pikkus.

2.138. Leida kolmnurga mediaanide keskpunktid, kui kolmnurga tipud on:

1) A(-6, 6), B(14, 2), C(-2, 10);
2) A(0, 0), B(15, -3), C(2, -9).

2.139. Teades rööpküliku ABCD kahte lähistippu A ja B ning diagonaalide lõikepunkti M, leida ülejäänud kaks tippu järgmistel juhtudel:

1) A(-4, -7), B(2, 6), M(3, 11);
2) A(-3, 5), B(1, 7), M(1, 1);
3) A($-4\frac{1}{2}$, -7), B(2, 6), M(3, $1\frac{1}{2}$).

2.140. Rööpküliku ühe külje otspunktid on A_1 (2, 1) ja A_2 (-3, 4) ning diagonaalide lõikepunkt M (-1, 0). Leida rööpküliku tipud A_3 ja A_4.

2.141. On antud kaks punkti A(3, -1) ja B(2, 1). Leida: 1) punktiga A punkti B suhtes sümmeetrilise punkti M koordinaadid; 2) punktiga B punkti A suhtes sümmeetrilise punkti N koordinaadid.

2.142. Punktidega A(1, -3) ja B(4, 3) piiratud lõik on jaotatud kolmeks võrdseks osaks. Leida jaotuspunktide koordinaadid.

2.143. On antud kaks punkti A(-4, 2) ja B(8, -7). Leida punktid C ja D, mis jaotavad lõigu AB kolmeks võrdseks osaks.

2.144. Punktid C_1(1, 2) ja C_2(3, 4) jagavad lõigu AB kolmeks võrdseks osaks. Leida punktid A ja B.

2.145. Leida punktidega P(2, 2) ja Q(1, 5) kolmeks võrdseks osaks jaotatud lõigu otspunktid A ja B.

2.146. Punktide A(3, 2) ja B(15, 6) vaheline lõik on jaotatud viieks võrdseks osaks. Leida jaotuspunktide koordinaadid.

2.147. Leida kolmnurga mediaanide lõikepunkti koordinaadid, kui kolmnurga tipud on: (1, 4), (-5, 0) ja (-2, -1).

2.148. Leida kolmnurga mediaanide lõikepunkt, kui kolmnurga tipud on A (1, 2), B (0, 5) ja C (-2, 3).

2.149. Kolmnurga tipud on A (1, -4), B (3, -8) ja C (5, 0). Leida punktid, milles mediaanid jagunevad kolmeks võrdseks osaks.

2.150. Kolmnurga mediaanide lõikepunkt asetseb abstsissteljel, kaks kolmnurga tippu punktides A(2, -3) ja B(-5, 1) ning kolmas tipp C asetseb ordinaatteljel. Määrata punktide M ja C koordinaadid.

2.151. Kahel sarnasel kolmnurgal on ühine tipp A(3, -6) ja ühine nurk tipu A juures. Leida suurema kolmnurga kaks ülejäänud tippu, kui väiksema tipud on B(6,2, -3,6) ja C(5, 1) ning vastavate külgede suhe on $\frac{5}{2}$.

2.152. Rööpküliku ABCD tipp A on ühendatud külje BC keskpunktiga M ja tipp B - küljel CD asetseva punktiga N, mille kaugus punktist D on $\frac{1}{3}$CD. Millistes suhetes jagab lõigud AM ja BN nende lõikepunkt K.

2.153. Leida nelinurga A(3, -2), B(3, 5), C(0, 4), D(-1, -1) diagonaalide AC ja BD lõikepunkt M.

2.154. On antud nelinurga tipud A(-2, 14), B(4, -2), C(6, -2) ja D(6, 10). Leida diagonaalide AC ja BD lõikepunktid.

2.155. On antud nelinurga tipud A(-3, 12), B(3, 4), C(5, -4) ja D(5, 8). Määrata, millises suhtes diagonaal AC jagab diagonaali BD.

2.156. On antud trapetsi kolm **järjestikust** tippu A(-2, -3), B(1, 4) ja C(3, 1). Leida neljas tipp D tingimusel, et alus AD on viis korda pikem alusest BC.

Lõigu jagamine antud suhtes (ruumis).

2.157. On antud kolmnurga tipud: $M_1(3, 2, -5)$, $M_2(1, -4, 3)$, $M_3(-3, 0, 1)$. Leida kolmnurga külgede keskpunktid.

2.158. Kolmnurga tipud on A(2, -1, 4), B(3, 2, -6), C(-5, 0, 2). Arvutada tipust A tõmmatud mediaani pikkus.

2.159. On antud rööpküliku ABCD kaks tippu A(2, -3, -5), B(-1, 3, 2) ja diagonaalide lõikepunkt E(4, -1, 7). Määrata rööpküliku kaks ülejäänud tippu.

2.160. Leida lõigu otspunktid, kui punktid C(2, 0, 2) ja D(5, -2, 0) jagavad lõigu kolmeks võrdseks osaks.

2.161. Lõik otspunktidega A(-1, 8, 3) ja B(9, -7, -2) on jagatud punktidega C, D, E, F viieks võrdseks osaks. Leida nende punktide koordinaadid.

2.162. Homogeense kangi raskuskese asetseb punktis C(1, -1, 5) ja üks tema otspunkt on A(-2,-1, 7). Määrata teise otspunkti koordinaadid.

2.163. Lõigu otspunktid on A (1, 1, 1) ja B (1, 2, 0). Leida lõigu jaotuspunkt C, mis jagab lõigu suhtes 2:1.

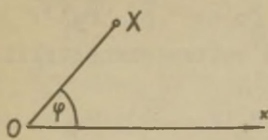
2.164. Lõigu AB jaotuspunkt C jagab lõigu suhtes 5:2. Leida lõigu otspunkt B, kui A (3, 7, 4) ja C (8, 2, 3).

2.165. Leida suhted λ_1 , λ_2 , λ_3 , milles koordinaattasandid jagavad lõigu otspunktidega A (2, -1, 7) ja B (4, 5, -2).

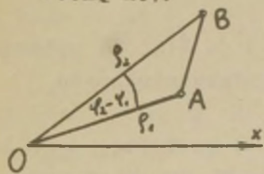
2.166. Lõik A_0A_5 on jaotatud viieks võrdseks osaks, kusjuures jaotuspunktidest A_1 (3, -5, 7) ja A_4 (-2, 4, -8). Leida A_0, A_2, A_3, A_5.

§ 4. Polaarkoordinaadid

Polaarkoordinaadid on määratud, kui on antud punkt O - nn. poolus ja poolusest lähtuv poolsirge - nn. polaartelg. Punkti X polaarkoordinaatideks nimetatakse tema kohavektori $\overrightarrow{OX}$ pikkust - polaarraadiust ρ (punkti kaugust poolusest) ja polaartelje ning kohavektori $\overrightarrow{OX}$ vahelist nurka - polaarnurka φ (vt. joon. 2.7). Kaks koordinaati (ρ , φ) määravad punkti asendi tasandil üheselt. Üksühese vastavuse saamiseks tasandi punktide ja koordinaatide paaride (ρ , φ) vahel on piisav, et polaarnurk φ muutuks vahemikus $0 \leq \varphi < 2\pi$ (positiivsed nurgad saadakse kohavektori pöörlemisel vastu kellaosuti liikumist). Kui sellist kitsendust



Joon. 2.7.



Joon. 2.8,

ei tehta, siis üks ja sama punkt määratakse koordinaatidega (ρ , $\varphi + 2n\pi$), kus n on suvaline täisarv. Kui kasutatakse üldistatud polaarkoordinaate, kus ρ võib olla ka negatiivne, siis loetakse, et (ρ , φ) ja ($-\rho$, $\varphi + \pi$) on üks ja seesama. Kahe punkti A(ρ_1 , φ_1) ja B(ρ_2 , φ_2) vaheline kaugus polaarkoordinaatide puhul arvutatakse järgmise valemi abil (vt. joon. 2.8):

$$AB = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

2.167. Konstrueerida punktid, mille polaarkoordinaadid on:

A(3, $\frac{\pi}{6}$), B(1, $\frac{5\pi}{3}$), C(5, $\frac{7\pi}{6}$), D(0,5, $\frac{\pi}{2}$), E(2,5, $\frac{2\pi}{3}$), F(6, π), G(3, $\frac{4\pi}{3}$), H(3, $-\frac{\pi}{6}$), I(-2, $\frac{\pi}{4}$).

2.168. Konstrueerida punktid, mille polaarkoordinaadid on:

A(3, $\frac{\pi}{2}$), B(2, π), C(3, $-\frac{\pi}{4}$), D(4, $3\frac{1}{7}$), E(5, 2) ja F(1,-1) (punktide D, E ja F asukohad leida ligikaudselt).

2.169. Kuidas asetsevad punktid, mille polaarkoordinaadid rahuldavad ühte järgmistest võrranditest:

1) $\rho = 1$; 2) $\rho = 5$; 3) $\rho = a$; 4) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 5) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 6) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 7) $\varphi = \text{const}$?

2.170. On antud punkt A(5, $\frac{2\pi}{3}$) polaarkoordinaatides. Leida: 1) punkt B, mis on sümmeetriline punktiga A pooluse suhtes; 2) punkt C, mis on sümmeetriline punktiga A polaartelje suhtes.

2.171. Leida punktidega (1, $\frac{\pi}{4}$), (3, $\frac{2\pi}{3}$), ($\frac{2}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$), M(ρ , φ) sümmeetrilised punktid: 1) pooluse suhtes; 2) polaartelje suhtes.

2.172. Leida punktidega $M_1(3, \frac{\pi}{4})$, $M_2(2, -\frac{\pi}{2})$, $M_3(3, -\frac{\pi}{3})$, $M_4(1, 2)$ ja $M_5(5, -1)$ polaartelje suhtes sümmeetriliste punktide polaarkoordinaadid.

2.173. Leida punktidega $M_1(5, \frac{\pi}{2})$, $M_2(2, -\frac{\pi}{3})$, $M_3(4, \frac{5}{6}\pi)$, $M_4(3, -2)$ pooluse suhtes sümmeetriliste punktide polaarkoordinaadid.

2.174. On antud punktid $A(8, -\frac{2}{3}\pi)$ ja $B(6, \frac{\pi}{3})$ polaarkoordinaatides. Leida punkte A ja B ühendava sirglõigu keskpunkti polaarkoordinaadid.

2.175. On antud punktid $M_1(12, \frac{4}{9}\pi)$ ja $M_2(12, -\frac{2}{9}\pi)$ polaarkoordinaatides. Leida punkte M_1 ja M_2 ühendava sirglõigu keskpunkti polaarkoordinaadid.

2.176. On antud rööpküliku ABCD kaks tippu $A(3, -\frac{4}{9}\pi)$ ja $B(5, \frac{3}{14}\pi)$ polaarkoordinaatides, kusjuures poolus ühtib diagonaalide lõikepunktiga. Leida rööpküliku kaks ülejäänud tippu.

2.177. On antud korrapärane kuusnurk, mille külg on a. Leida kuusnurga tippude polaarkoordinaadid, kui üks tipp on pooluseks ja sellest tipust lähtuv kuusnurga külg on polaarteljeks eeldusel, et polaarnurk rahuldab tingimust $0 \leq \varphi < \pi$.

Kahe punkti vaheline kaugus.

2.178. On antud punktid $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ ja $M_2(\rho_2, \varphi_2)$ polaarkoordinaatides. Leida nende punktide vaheline kaugus d.

2.179. On antud punktid $M_1(5, \frac{\pi}{4})$ ja $M_2(8, -\frac{\pi}{12})$ polaarkoordinaatides. Arvutada nende punktide vaheline kaugus.

2. 180. Arvutada punktide $A(2, \frac{\pi}{12})$ ja $B(1, \frac{5\pi}{12})$; $C(4, \frac{\pi}{5})$ ja $D(6, \frac{6\pi}{5})$; $E(3, \frac{11\pi}{18})$ ja $F(4, \frac{\pi}{9})$ vahelised kaugused.

2.181. Leida polaarteljel punkt, mis asetseb punktist $A(4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ viie ühiku kaugusel.

2.182. Ruudu lähistipud polaarkoordinaatides on $M_1(12, -\frac{\pi}{10})$ ja $M_2(3, \frac{\pi}{15})$. Leida ruudu pindala.

2.183. Ruudu vastastipud polaarkoordinaatides on $P(6, -\frac{7}{12}\pi)$ ja $Q(4, \frac{1}{6}\pi)$. Leida ruudu pindala.

2.184. Kolmnurga tipud polaarkoordinaatides on $A(5, \frac{\pi}{2})$, $B(8, \frac{5\pi}{6})$, $C(3, \frac{7\pi}{6})$. Kontrollida, kas see kolmnurk on korrapärane.

2.185. Kolmnurga OAB üks tipp asub pooluses ning teised kaks on $A(\rho_1, \varphi_1)$ ja $B(\rho_2, \varphi_2)$. Arvutada kolmnurga pindala.

2.186. Kolmnurga OAB üks tipp asub pooluses O, kaks ülejäänud tippu on $A(5, \frac{\pi}{4})$ ja $B(4, \frac{\pi}{12})$. Arvutada selle kolmnurga pindala.

2.187. Kolmnurga üks tipp asetseb pooluses, kahe ülejäänud tipu polaarkoordinaadid on $(4, \frac{\pi}{9})$ ja $(1, \frac{5\pi}{18})$. Arvutada kolmnurga pindala.

2.188. On antud korrapärase kolmnurga kaks tippu $A(4, -\frac{1}{12}\pi)$ ja $B(8, \frac{7}{12}\pi)$ polaarkoordinaatides. Leida kolmnurga pindala.

2.189. Kolmnurga tipud polaarkoordinaatides on $A(9, \frac{\pi}{10})$, $B(12, \frac{4\pi}{15})$ ja $C(10, \frac{3\pi}{5})$. Leida kolmnurga pindala.

2.190. Kolmnurga tipud polaarkoordinaatides on $A(3, \frac{1}{8}\pi)$, $B(8, \frac{7}{24}\pi)$ ja $C(6, \frac{5}{8}\pi)$. Arvutada kolmnurga pindala.

2.191. Konstrueerida koordinaatide alguspunktist lähtuvad lõigud, kui nende pikkused ning polaarnurgad on vastavalt: 1) $d=5$, $\varphi=\frac{\pi}{5}$; 2) $d=3$, $\varphi=\frac{5}{6}\pi$; 3) $d=4$, $\varphi=-\frac{\pi}{3}$; 4) $d=3$, $\varphi=-\frac{4}{3}\pi$.

2.192. Lõikude projektsioonid koordinaattelgedel on: 1) $X=1$, $Y=\sqrt{3}$; 2) $X=3\sqrt{2}$, $Y=-3\sqrt{2}$; 3) $X=-2\sqrt{3}$, $Y=2$. Leida nende lõikude pikkused ja polaarnurgad.

2.193. Leida lõigu projektsioon x-teljel, kui on antud lõigu pikkus ning nurk, mille ta moodustab teljega: 1) $d=6$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$; 2) $d=6$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$; 3) $d=7$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 4) $d=5$, $\varphi=0$; 5) $d=5$, $\varphi=\pi$; 6) $d=4$, $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

§ 5. Võrrandi geomeetriline sisu

1. Kõvera konstrueerimine võrrandi järgi.

Võrrand, mis seob kahte muutuvat suurust x ja y, omab lihtsa geomeetrilise sisu, kui vaadelda muutujaid x ja y kui xy-tasandi punkti koordinaate. Kahte koordinaati x ja y siduv võrrand määrab tasandil kõvera.

Võrrandi järgi kõvera joonestamiseks koostatakse harilikult tabel, andes ühele muutujatest väärtusi ja arvutades teise muutuja vastavad väärtused kõvera võrrandist. Leides küllaldase arvu (sõltuvalt kõvera kujust) kõvera punkte ja ühendades leitud punktid pideva joonega, saamegi kõvera ligikaudse kuju.

Enne kõvera konstrueerimisele asumist punktide abil on soovitav kõvera omadusi uurida, lähtudes kõvera võrrandist. Sümmeetriliste kõverate korral konstrueeritakse punktide abil ainult kõvera üks osa ja kõik sümmeetrilised osad joonestatakse juba sümmeetriaomaduste põhjal.

2. Kõvera võrrandi koostamine kõvera geomeetriliste omaduste põhjal.

Kõvera xy-tasandil võib määrata kui mingit geomeetrilist omadust rahuldavate punktide hulga, kusjuures antud omadus on ainult vaadeldud hulga punktidel. Punktide geomeetriline omadus eraldab kõvera punktid tasandi ülejäänud punktidest.

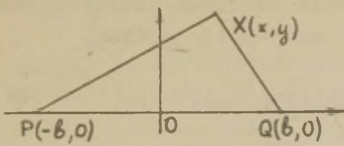
Teatud geomeetrilise omadusega määratud kõvera võrrandi koostamisel tuleb väljendada analüütiliselt fakt, et kõigil kõvera punktidel on see etteantud omadus.

Näide. Cassini [1] ovaaliks nimetatakse tasandilist kõverat, mille iga punkti kauguste korrutis samal tasandil

---

[1] Cassini, Giovanni Domenico (1625-1712), itaalia päritoluga prantsuse astronoom.

asuvast kahest kindlast punktist on konstantne. Tähistame Cassini ovaali suvalise punkti X(x,y) kauguste konstantse korrutise kahest fikseeritud punktist P ja Q sümboliga a^2 ja punktide P ja Q vahelise kauguse 2b.



Joon. 2.9.

Enne kui asuda kõvera võrrandi koostamisele, tuleb valida reeper, mis oleks geomeetriliselt kõveraga võimalikult hästi seotud. Mida paremini on reeper valitud, seda lihtsama kuju omab kõvera võrrand. Antud juhul valime ristreeperi x-teljeks sirge PQ (vt. joon. 2.10) ja alguspunktiks lõigu PQ keskpunkti. Kuna punktid P ja Q on samaväärsed, võib oletada, et kõver on sümmeetriline ning reeperi valiku tõttu on punktid P(-b,0) ja Q(b,0) sümmeetrilised y-telje suhtes.

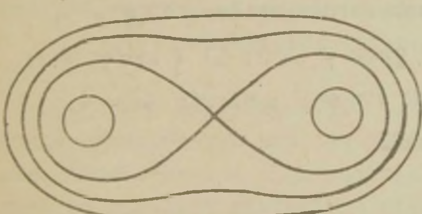
Kõvera võrrandi saame, kui väljendame valemiga kõvera geomeetrilise omaduse, et Cassini ovaali suvalise punkti X kaugus punktidest P ja Q on a^2, s.t.

$$|\overrightarrow{XP}|\,|\overrightarrow{XQ}| = a^2$$

ehk koordinaatides

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2$$

Sellega ongi Cassini ovaali võrrand koostatud (vt. joon. 2.11). Jääb ainult veel võrrandi lihtsustamine. Vabanedes radikaalidest $(x^2+y^2+b^2+2bx)(x^2+y^2+b^2-2bx)=a^4$ ja teostades lihtsustused, võime Cassini ovaali võrrandi esitada kujul



Joon. 2.10.

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^2 - b^2.$$

Koostatud võrrandist on vahetult näha, et Cassini ovaal on sümmeetriline nii x-telje kui ka y-telje suhtes.

Võrranditega määratud punktihulgad.

2.194. Kontrollida, kas punktid A(0, 5), B(-2, 3) ja C(1, -1,5) asetsevad kõveral $2x^2-3xy+y-5=0$.

2.195. Mis on iseloomulik kõvera võrrandile, kui kõver läbib koordinaatide alguspunkti?

2.196. Teha kindlaks, millised geomeetrilised kujundid on määratud järgmiste võrranditega:

1) $x-y=0$;	6) $y=a$;
2) $x+y=0$;	7) $(x-1)(x+3)=0$;
3) $x^2-y^2=0$;	8) $xy=0$;
4) $x^2+y^2=0$;	9) $x(x+1)(x-2)=0$;
5) $x^2+y^2=a^2$;	10) $(x+a)(y-b)=0$.

2.197. Konstrueerida kõverad, mille võrrandid on: 1) $2x+3y=6$; 2) $y=x-5$; 3) $y=x^2$; 4) $y=(x-1)^2+2$; 5) $y=x^3$.

2.198. Konstrueerida kõverad, mis on määratud võrranditega: 1) $xy=4$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$; 3) $(x^2+1)y=4x$.

2.199. Konstrueerida kõver, mille võrrand on $x^2y=4a^2\cdot(2a-y)$. (See kõver kannab Agnesi[1] loki nime).

2.200. Konstrueerida kõver (neljaleheline roos), mille võrrand on $\rho = 10 \sin 2\varphi$.

2.201. Teha kindlaks, millised kõverad on määratud järgmiste võrranditega polaarkoordinaatides: 1) $\rho = 5$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; 4) $\rho\cos\varphi = 2$; 5) $\rho\sin\varphi = 1$; 6) $\rho = 6\cos\varphi$; 7) $\rho = 10\sin\varphi$; 8) $\sin\varphi = \frac{1}{2}$; 9) $\sin\rho = \frac{1}{2}$. Teha joonised.

---

[1] Agnesi [anjeesi], Maria Gaetana (1718–1799), itaalia naismatemaatik.

Kõvera võrrandi koostamine kõvera geomeetriliste omaduste põhjal.

2.202. Konstrueerida kõver, kui ta polaarkoordinaadid rahuldavad võrrandit $\rho = \frac{\varphi}{2}$ (Archimedese spiraal).

2.203. Konstrueerida järgmised Archimedese spiraalid: 1) $\rho = 2\varphi$; 2) $\rho = 5\varphi$; 3) $\rho = \frac{\varphi}{\pi}$; 4) $\rho = -\frac{\varphi}{\pi}$.

2.204. Leida poolusest lähtuval ning polaarteljega nurga $\varphi = \frac{\pi}{6}$ moodustaval kiirel Archimedese spiraali $\rho = 3\varphi$ poolt eraldatud lõikude pikkused.

2.205. Archimedese spiraalil $\rho = \frac{5}{\pi}\varphi$ on võetud punkt C, mille polaarraadius on 47. Teha kindlaks, mitmeks osaks jaotab see spiraal punkti C polaarraadiuse.

2.206. Konstrueerida kõver $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$ (hüperboolne spiraal).

2.207. Konstrueerida järgmised hüperboolsed spiraalid: 1) $\rho = \frac{1}{\varphi}$; 2) $\rho = \frac{5}{\varphi}$; 3) $\rho = \frac{\pi}{\varphi}$; 4) $\rho = -\frac{\pi}{\varphi}$.

2.208. Leida hüperboolsel spiraalil $\rho = \frac{6}{\varphi}$ punkt P, mille polaarkoordinaadiks on 12. Teha joonis.

2.209. Konstrueerida järgmised logaritmilised spiraalid: 1) $\rho = 2^{\varphi}$; 2) $\rho = (\frac{1}{2})^{\varphi}$.

2.210. Leida logaritmilisel spiraalil $\rho = 3^{\varphi}$ punkt, mille polaarraadius on 81. Teha joonis.

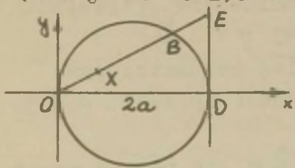
2.211. Tsükloidiks nimetatakse ringjoone mingi punkti trajektoori, kui ringjoon veereb ilma libisemata mööda sirget. Leida tsükloidi parameetrilised võrrandid, võttes parameetriks veereva ringjoone raadiuse pöördenurga.

2.212. Konstrueerida kõver: $\rho = a(1 - \cos\varphi)$. (Kardioid).

2.213. Ristkülik, mille kaks külge ühtivad reeperi telgedega, deformeerub nii, et diagonaali pikkus a jääb endiseks. Koordinaatide alguspunktis asuva tipu vastastipust on tõmmatud ristlõik ristküliku diagonaalile. Selle lõigu alguspunkt joonistab ristküliku deformeerimisel kõvera, mida nimetatakse astroidiks. Leida astroidi võrrand ning teha joonis.

2.214. Näidata, et astroidi (vt. ülesanne nr. 2.213) saab defineerida kui ühe ringjoone sees ilma libisemata veereva teise ringjoone mingi punkti trajektoori, kui veereva ringjoone raadius on $\frac{1}{4}$ liikumatu ringjoone raadiusest.

2.215. On antud ringjoone diameeter OD=2a ja puutuja DE (vt. joon. 2.12). Läbi punkti O on tõmmatud kiir OE ning viimasel leitud punkt X nii, et lõik OX on võrdne ringjoone ja puutuja vahelise lõiguga BE. Kui kiir OE pöörleb ümber punkti O, siis punkti X trajektoor on kõver, mida nimetatakse Diokles'e tsissoidiks. Leida selle kõvera võrrand ning konstrueerida graafik.

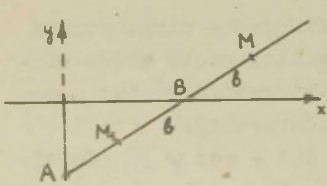


Joon. 2.11.

2.216. Leida evolvendi, s.o. liikumatult poolilt mahakeritava pingul niidi otspunkti trajektoori parameetrilised võrrandid.

2.217. Lemniskaadiks nimetatakse Cassini ovaali erijuhtu tingimusel, et a=b. Leida lemniskaadi võrrand ristreeperis ja polaarkoordinaatides. Konstrueerida lemniskaat, kui a=5.

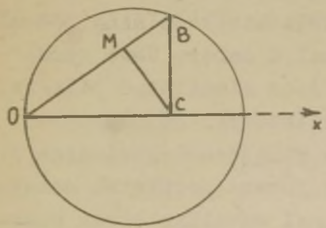
2.218. Punkt A asetseb kaugusel a sirgest x. Igal punkti A läbival ja sirget x lõikaval sirgel y on nende sirgete lõikepunktist B konstantsel kaugusel b märgitud punktid M ja M_1. Leida nende punktide hulga võrrand. Sellisel teel saadud kõverat nimetatakse konhoidiks. Joonestada konhoid kolmel juhul: $a > b$, $a = b$ ja $a < b$.



Joon. 2.12.

2.219. On antud sirge x ning punkt A, mis asub sellest sirgest kaugusel a. Punkti A ümber pöörleb kiir AB ning sellele kiirele on kantud punktist B (kiire ja sirge x lõikepunkt) mõlemale poole lõigud $BM=BM_1=OB$, kus O on punktist A sirgele x joonestatud ristlõigu aluspunkt. Kiire AB pöörlemisel moodustavad punktid M ja M_1 kõvera, mida nimetatakse strofoidiks. Leida selle kõvera võrrand ning konstrueerida see kõver.

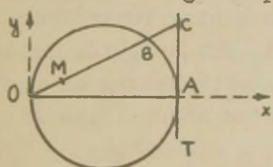
2.220. On antud ringjoon diameetriga OA=2r. Diameetri otspunktist O on joonestatud kõõl OB ning selle otspunktist B on joonestatud ristlõik diameetrile OA; selle ristlõigu aluspunktist C on joonestatud ristlõik kõõlule OB. Millise kõvera moodustab teise ristlõigu aluspunkt M, kui kõõl OB pöörleb ümber punkti O?



Joon. 2.13.

2.221. On antud ringjoon (raadiusega a) ja ringjoone punkt O. Ümber punkti C pöörleb kiir, mis lõikab ringjoont muutuvas punktis A. Asetame kiirele positiivses suunas punktist A lõigu AX=AB, kus B on ringjoone punkt, mis asetseb diametraalselt punkti O vastas. Milline on punkti X trajektoor kiire pöörlemisel?

2.222. On antud ringjoon, mille diameeter OA=2r (vt. joon. 2.15). Diameetri ühest otspunktist on joonestatud puutuja AT ning teisest otspunktist on joonestatud kiir, mis lõikab ringjoont veel punktis B ning antud puutujat punktis C. Sellele kiirele on alguspunktist O asetatud lõik OM, mis on võrdne lõiguga BC. Kiire pöörlemisel punkti O ümber lõigu OM pikkus muutub ning punkt M joonestab kõvera, mida nimetatakse tsissoidiks. Leida tsissoidi võrrand ning konstrueerida see kõver.

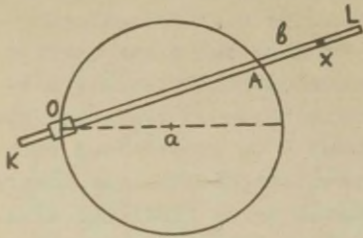


Joon. 2.14.

2.223. Muutumatu pikkusega lõigu AB=2a otspunktid libisevad mööda täisnurga külge. Täisnurga tipust O on tõmmatud sellele lõigule ristlõik OM. Leida nende ristlõikude aluspunktide geomeetriline koht.

Märkus. Kõigepealt tuletada otsitava kõvera võrrand polaarkoordinaatides.

2.224. Joonise tasapinnale punkti O on kinnitatud liugur, mis võib pöörelda selle punkti ümber. Varras KL on pistetud liugurisse ja ta võib selles vabalt libiseda ning pöörelda punkti O ümber. Ühte varda punkti A on kinnitatud pliiats. Varda liikumisel joonestab pliiats ringjoone raadiusega a. Millise kõvera joonistab samal liikumisel suvaline varda punkt X?



Joon. 2.15.

Märkus. Tähistades muutumatu kauguse AX=b leida algul otsitava kõvera - Pascali teo - võrrand polaarkoordinaatides. Vaadelda kolme juhtumit: $a<b$, $a = b$, $a>b$.

2.225. On antud kaks punkti P ja Q ning nendevaheline kaugus a ja funktsioon $f(X)=d_1^2 - d_2^2$, kus $d_1= XP$ ja $d_2= XQ$. Leida selle funktsiooni avaldis, kui koordinaatide alguspunktiks on punkt P ning x-telg on suunatud mööda lõiku PQ.

2.226. Eelmise ülesande tingimuste kohaselt avaldada funktsioon f(X) nii vahetult kui ka koordinaatide teisendamise abil, kui 1) koordinaatide alguspunktiks on valitud lõigu PQ keskpunkt ja x-telg on suunatud mööda lõiku PQ; 2) koordinaatide alguspunktiks on punkt P ja x-telg on suunatud mööda lõiku QP.

2.227. On antud ruut ABCD küljega a ning funktsioon $f(X)=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$, kus $d_1= XA$, $d_2=XB$, $d_3=XC$ ja $d_4=XD$. Leida selle funktsiooni avaldis, kui koordinaattelgedeks on ruudu diagonaalid (kusjuures x-telg on suunatud mööda lõiku AC ja y-telg mööda lõiku BD).

2.228. Eelmise ülesande tingimuste kohaselt leida f(X) avaldis (nii vahetult kui ka koordinaatide teisendamise abil, kasutades eelmise ülesande tulemust), kui koordinaatide alguspunktiks on punkt A, koordinaatteljed on suunatud mööda ruudu külgi (x-telg mööda lõiku AB, y-telg mööda lõiku AD).

III peatükk

MITTELINEAARTEHTED VEKTORITEGA

§ 1. Areaalkorrutis

Tasandi kahe vektori $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ korral reaalarvu $|\bar{x}||\bar{y}| \sin\angle(\bar{x},\bar{y})$ nimetatakse nende vektorite <u>areaalkorrutiseks</u>[1] ja tähistatakse $\bar{x}\wedge\bar{y}$:

$$\bar{x}\wedge\bar{y} = |\bar{x}|\,|\bar{y}| \sin\angle(\bar{x},\bar{y}). \qquad (3.1)$$

<u>Areaalkorrutiste omadused</u>:

1) antikommutatiivsus (ehk alternatiivsus)

$$\bar{x}\wedge\bar{y} = -\,\bar{y}\wedge\bar{x};$$

2) distributiivsus

$$(\bar{x} + \bar{y})\wedge\bar{z} = \bar{x}\wedge\bar{z} + \bar{y}\wedge\bar{z};$$

3) assotsiatiivsus reaalarvuga korrutamise suhtes

$$(\alpha\,\bar{x})\wedge\bar{y} = \alpha(\bar{x}\wedge\bar{y}).$$

Siit järeldub, et

$$\bar{x}\wedge\bar{y} = 0 \qquad (3.2)$$

parajasti siis, kui $\bar{x}\parallel\bar{y}$. Samuti järeldub siit valem areaalkorrutise arvutamiseks, kui vektorid on määratud oma koordinaatidega. Olgu

$$\bar{x} = x^i\bar{e}_i, \quad \bar{y} = y^i\bar{e}_i\,, \quad i = 1, 2, \qquad (3.3)$$

siis

$$\bar{x}\wedge\bar{y} = (x^1y^2-x^2y^1)\,\bar{e}_1\wedge\bar{e}_2 = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix}\,\bar{e}_1\wedge\bar{e}_2. \qquad (3.4)$$

Definitsioonist järeldub, et ristuvate ühikvektorite areaalkorrutis on võrdne ühega ja järelikult ristreeperis valem areaalkorrutise arvutamiseks omab kuju:

---

[1] Lad. k. area - pindala.

8

$$\bar{x}\wedge\bar{y} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{vmatrix} . \qquad (3.5)$$

Kahele mittekollineaarsele vektorile $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ehitatud rööpküliku pindlala on

$$S\,(x,y) = \bar{x}\wedge\bar{y} \ . \qquad (3.6)$$

Areaalkorrutise $\bar{x}\wedge\bar{y}$ märk sõltub orientatsioonist tasandil. Seosed (3.3) kujutavad endast erijuhtu baasiteisendusvalemitest, kus teisendusmaatriksi

$$C = \left\| \begin{matrix} x^1 & x^2 \\ y^1 & y^2 \end{matrix} \right\|$$

determinandiks on parajasti areaalkorrutis ristreeperis

$$C = x^1y^2 - x^2y^1 = \bar{x}\wedge\bar{y} \ .$$

Seostest (3.4) järeldub, et üldiselt baasid $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ ja $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ on sama- või erisuguselt orienteeritud, sõltuvalt sellest, kas $\bar{x}\wedge\bar{y}$ ja $\bar{e}_1\wedge\bar{e}_2$ on sama- või erimärgilised.

Areaalkorrutise üldistuseks ruumis on vektorkorrutis (vt. § 3).

3.1. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud on: 1) A(4, 2), B(9, 4) ja C(7, 6);
2) K(2, -3), L(3, 2) ja M(-2, 5);
3) M(-3, 2), N(5, -2) ja P(1, 3);
4) $M_1(3, -4)$, $M_2(-2, 3)$ ja $M_3(4, 5)$;
5) $A_1(2, 1)$, $A_2(3, 4)$ ja $A_3(1, 6)$;
6) $B_1(-2, 4)$, $B_2(0, -3)$ ja $B_2(1, 7)$;
7) $C_1(5, 4)$, $C_2(11, 0)$ ja $C_3(0, 3)$.

3.2. Kolmnurga kaks tippu on A(5, 1) ja B(-2, 2), kolmas tipp C asub x-teljel. Leida kolmnurga tipp C, kui kolmnurga pindala on 10.

3.3. Kolmnurga pindala on S=3, kaks tippu on A(3, 1) ja B(1, -3) ning kolmas tipp asetseb y-teljel. Leida tipp C.

3.4. Kolmnurga pindala on S=3, kaks tippu A(3, 1) ja B(1, -3) ning kolmnurga **raskuskese** asetseb x-teljel. Leida kolmnurga tipp C.

3.5. Kolmnurga tipud on A(3, 6), B(-1, 3) ja C(2, -1). Leida tipust C joonestatud kõrgus.

3.6. Leida kolmnurga ümbermõõt ja pindala, kui ta tipud on A(-2, 1), B(2, -2) ja C(8, 6).

3.7. Rombi külg on $5\sqrt{10}$ ning kaks vastastippu on P(4, 9) ja Q(-2, 1). Leida rombi pindala.

3.8. Rombi külg on $5\sqrt{2}$ ning kaks vastastippu on P(3, -4) ja Q(1, 2). Leida rombi kõrgus.

3.9. Kontrollida, kas punktid A(-2, 8), B(1, 5) ja C(4, 1) on rombi tipud ning arvutada selle rombi pindala.

3.10. Leida rööpküliku pindala, kui on antud rööpküliku kolm tippu: A(-2, 3), B(4, -5) ja C(-3, 1).

3.11. Rööpküliku tipud on A(3, 7), B(2, -3) ja C(-1,4). Arvutada tipust B küljele AC joonestatud kõrgus.

3.12. Rööpküliku pindala on S=12 ruutühikut ning ta tipud on A(-1, 3) ja B(-2, 4). Leida rööpküliku kaks ülejäänud tippu tingimusel, et rööpküliku diagonaalide lõikepunkt asetseb abstsissteljel.

3.13. Rööpküliku pindala on S = 17 ruutühikut ning kaks tippu on A(2,1) ja B(5,-3). Leida selle rööpküliku kaks ülejäänud tippu, kui ta diagonaalide lõikepunkt asetseb ordinaatteljel.

3.14. On antud punktid: A(1, 3), B(4, 7), C(2, 8) ja D(-1, 4). Kontrollida, kas nelinurk ABCD on rööpkülik ning leida küljele AB joonestatud kõrgus.

3.15. Arvutada viisnurga pindala, kui viisnurga tipud asetsevad punktides A(-2, 0), B(0, -1), C(2, 0), D(3, 2) ja E(-1, 3).

§ 2. Skalaarkorrutis

Kahe vektori $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ skalaarkorrutiseks [1] nimetatakse reaalarvu

$$\vec{x}\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\angle(\vec{x},\vec{y}). \tag{3.7}$$

Skalaarkorrutise omadused:

1) $\vec{x}\vec{y} = \vec{y}\vec{x}$ (kommutatiivsus);

2) $(\vec{x} + \vec{y})\vec{z} = \vec{x}\vec{z} + \vec{y}\vec{z}$ (distributiivsus);

3) $\lambda(\vec{x}\vec{y}) = (\lambda\vec{x})\vec{y} = \vec{x}(\lambda\vec{y})$ (assotsiatiivsus arvuga korrutamise suhtes).

Skalaarkorrutist $\vec{x}\vec{x}$ nimetatakse skalaarruuduks ja tähistatakse $\vec{x}^2$. Vektori skalaarruut on võrdne vektori pikkuse $|\vec{x}| = x$ ruuduga, s.t. $\vec{x}^2 = x^2$, ehk

$$x = |\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2}. \tag{3.8}$$

Punktide A ja B vaheline kaugus (lõigu AB pikkus) võrdub **vektori** $\overrightarrow{AB}$ (**või** $\overrightarrow{BA}$) **pikkusega. Järelikult** $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Skalaarkorrutise definitsioonist tuleneb valem vektoritevahelise nurga määramiseks. Kui $\vec{x} \neq 0$ ja $\vec{y} \neq 0$, siis

$$\cos\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\vec{x}\vec{y}}{xy} = \frac{\vec{x}\vec{y}}{\sqrt{\vec{x}^2}\sqrt{\vec{y}^2}}. \tag{3.9}$$

Skalaarkorrutis $\vec{x}\vec{y}$ on null järgmistel juhtudel: 1) kui üks teguritest on null; 2) kui $\cos\angle(\vec{x},\vec{y})=0$, s.t. kui $\vec{x}\perp\vec{y}$. Kui skalaarkorrutises üks või mõlemad tegurid on võrdsed nulliga, siis skalaarkorrutis on võrdne nulliga. Arvestades, et vektori 0 siht on määramata ja teda võib seega lugeda ristuvaks (ortogonaalseks) iga vektoriga, võib öelda, et vektorite ortogonaalsuseks on tarvilik ja piisav skalaarkorrutise võrdumine nulliga.

---

[1] Skalaarkorrutist tähistatakse $\vec{x}\vec{y}$ või $\vec{x}.\vec{y}$ või $(\vec{x},\vec{y})$. Kui tegurid on üksliikmed, siis tavaliselt eelistatakse esimest tähistust, kui tegurid on hulkliikmed, eelistatakse kolmandat tähistust.

Ühikvektorite $\bar{x}_0$ ja $\bar{y}_0$ **skalaarkorrutis** on võrdne vektoritevahelise nurga **koosinusega**

$$\bar{x}_0\bar{y}_0 = \cos\sphericalangle(\bar{x}_0,\bar{y}_0) . \qquad (3.10)$$

Kollineaarsete vektorite vaheline nurk on 0 või π .

Kuna korrutis $x \cos\sphericalangle(\bar{x},\bar{y})$ määrab vektori $\bar{x}$ projektsiooni vektori $\bar{y}$ sihile (mida tähistatakse $p_{\bar{y}}\bar{x}$) ja korrutis $y \cos\sphericalangle(\bar{x},\bar{y})$ määrab vektori $\bar{y}$ projektsiooni vektori $\bar{x}$ sihile (tähistatakse $p_{\bar{x}}\bar{y}$), siis skalaarkorrutist võime defineerida veel kahe valemiga

$$\bar{x}\bar{y} = |\bar{x}|\, p_{\bar{x}}\bar{y} \quad , \quad \bar{x}\bar{y} = |\bar{y}|\, p_{\bar{y}}\bar{x} . \qquad (3.11)$$

Viimasest seosest leiame ühe vektori projektsiooni teise vektori sihile

$$p_{\bar{x}}\bar{y} = \frac{\bar{x}\bar{y}}{x} \quad , \quad p_{\bar{y}}\bar{x} = \frac{\bar{x}\bar{y}}{y} . \qquad (3.12)$$

Siit tuleneb omakorda, et vektori korrutis ühikvektoriga $\bar{y}_0$ võrdub vektori projektsiooniga ühikvektori sihile

$$\bar{x}\bar{y}_0 = p_{\bar{y}_0}\bar{x} . \qquad (3.13)$$

Kolme vektorit ei saa skalaarselt korrutada, sest juba kahe vektori skalaarkorrutis on arv. Suurus $(\bar{x}\bar{y})\bar{z}$ on vektor.

Kui ristbaasi $\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ korral on antud kaks vektorit oma koordinaatidega $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3)$ ja $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$, s.t. $\bar{x}=x_1\bar{i} + x_2\bar{j} + x_3\bar{k}$, $\bar{y} = y_1\bar{i} + y_2\bar{j} + y_3\bar{k}$, siis

$$\bar{x}\bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 , \qquad (3.14)$$

s.t. vektorite skalaarkorrutis ristbaasi korral võrdub nende vektorite vastavate koordinaatide korrutisega. Vektori pikkus võrdub seega ruutjuurega koordinaatide ruutude summast

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} . \qquad (3.15)$$

Nurk kahe vektori vahel:

$$\cos\angle(\bar{x},\bar{y}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}} . \qquad (3.16)$$

Kahe vektori ortogonaalsuse tingimus:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0. \qquad (3.17)$$

Nurgad vektori ja baasivektorite vahel:

$$\cos\angle(\bar{x}, \bar{i}) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} ,$$

$$\cos\angle(\bar{x}, \bar{j}) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} , \qquad (3.18)$$

$$\cos\angle(\bar{x},\bar{k}) = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} .$$

Vektori projektsioon teise vektori sihil:

$$P_{\bar{x}}\bar{y} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} . \qquad (3.19)$$

Tasandil kehtivad ristbaasi korral analoogilised valemid (tuleb võtta vaid $\vec{x}=(x_1, x_2, 0)$, $\vec{y}=(y_1, y_2, 0)$.

Olgu $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ mingid vektorid, mille koordinaadid antud <u>üldise afiinse baasi</u> $\{0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ suhtes on

$$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \ \bar{y} = (y_1, y_2, y_3), \text{ s.t.}$$

$$\bar{x} = x_i\bar{e}_i, \ \bar{y} = y_i\bar{e}_i, \ i=1, 2, 3.$$

Kasutades skalaarkorrutise omadusi, saame vektorite skalaar- - korrutise arvutada järgmise valemi abil:

$$\begin{aligned}\bar{x}\bar{y} &= (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3)(y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3) = x_1y_1\bar{e}_1^2 + \\ &+ x_2y_2\bar{e}_2^2 + x_3y_3\bar{e}_3^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\bar{e}_1\bar{e}_2 + \qquad (3.20) \\ &+ (x_1y_3 + x_3y_1)\bar{e}_1\bar{e}_3 + (x_2y_2 + x_3y_2)\bar{e}_2\bar{e}_3.\end{aligned}$$

Kasutades summeerimiskokkulepet, saab tulemuse kirjutada lühidalt:

$$\vec{x}\vec{y} = x_i y_j \vec{e}_i \vec{e}_j \qquad (3.21)$$

ehk tähistades

$$g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j , \qquad (3.22)$$

saame kahe vektori skalaarkorrutise avaldada kujul

$$\vec{x}\vec{y} = x_i y_j g_{ij}. \qquad (3.23)$$

Erijuhuna valemist (3.23) saame valemi vektori skalaarruudu (pikkuse ruudu) arvutamiseks üldises afiinses reeperis:

$$\vec{x}^2 = x_i x_j g_{ij}. \qquad (3.24)$$

Kaldreeperis

$$\vec{e}_1^2 = \vec{e}_2^2 = \vec{e}_3^2 = 1; \; g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j = \cos\angle(\vec{e}_i \vec{e}_j) \qquad (3.25)$$

ja valem (3.23) kahe vektori skalaarkorrutise arvutamiseks omab kuju

$$\vec{x}\vec{y} = x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3+(x^1y^2+x^2y^1)\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_2)+(x^1y^3+ \\ +x^3y^1)\cos\angle(\vec{e}_1\vec{e}_3)+(x^2y^3+x^3y^2)\cos\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3), \qquad (3.26)$$

ning valem (3.24) skalaarruudu (pikkuse ruudu) arvutamiseks on järgmine

$$\vec{x}^2 = (x^1)^2+ (x^2)^2+ (x^3)^2+ 2x^1x^2\cos\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + \\ + 2x^1x^3\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{e}_3) + 2x^2x^3\cos\angle(\vec{e}_2,\vec{e}_3). \qquad (3.27)$$

Erijuhul, kui afiinne baas on ristbaas (ortonormeeritud), s.t. $g_{ij}= \vec{e}_i\vec{e}_j = \delta_{ij}$, omab vektorite skalaarkorrutise avaldis juba eespool antud kuju (3.14) ning skalaarruudu avaldised (3.24) ja (3.27) omavad kuju (3.15).

Vektorvõrrand $\vec{x}\vec{n}=c$.

Arvude korrutamise pöördtehe on jagamine. Vektorite skalaarkorrutamise pöördtehtena ei saa "skalaarsest jagamisest" rääkida, sest "jagatis" ei ole ühene. Võrrandil $\vec{x}\vec{n} = c$ on lõpmata palju lahendeid: üks võrrand $|\vec{x}||\vec{n}| \cos\angle(\vec{x}\vec{n}) = c$ sisaldab kaht tundmatut $|\vec{x}|$ ja $\angle(\vec{x}\,\vec{n})$.

Olgu $\vec{a}$ selle võrrandi üks lahend, s.t. $(\vec{a}, \vec{n}) = c$, siis $(\vec{x},\vec{n}) - (\vec{a},\vec{n})=0$ ehk $(\vec{x}-\vec{a}, \vec{n})=0$, s.t. $\vec{x}-\vec{a}\perp\vec{n}$. Tasandilisel juhul järeldub siit, et iga vektor $\vec{b}\perp\vec{n}$ määrab vektoriga $\vec{x}-\vec{a}$ kollineaarse sihi: $\vec{x}-\vec{a}\parallel\vec{b}$. Selle tõttu kehtib võrdus

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}\ , \tag{3.28}$$

kus t on mingi skalaarmuutuja. Vastupidi, kui $\vec{b}\perp\vec{n}$, siis koos vektoriga $\vec{x}=\vec{a}$ on ka vektor $x=a+bt$ võrrandi $\vec{x}\vec{n}=c$ lahend. Järelikult, tasandil on võrrand $\vec{x}\vec{n}=c$ samaväärne parameetrilise vektorvõrrandiga $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$, kus $\vec{a}$ on esimese võrrandi mingi lahend ja $\vec{b}\perp\vec{n}$.

Ruumis iga vektorpaari $\vec{b}\nparallel\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{n}$, $\vec{c}\perp\vec{n}$ korral on võrrand $\vec{x}\vec{n}=c$ analoogilistel põhjustel samaväärne parameetrilise vektorvõrrandiga

$$\vec{x} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c}\,. \tag{3.29}$$

Võrrandi $\vec{x}\vec{n}=c$ üldlahend $\vec{x}$ on selle võrrandi ühe erilahendi ja vastava homogeense võrrandi $\vec{x}\vec{n}=0$ üldlahendi (tasandil $t\vec{b}$, ruumis $u\vec{b}+v\vec{c}$) summa.

Geomeetriliselt määrab võrrand $\vec{x}\vec{n}=c$ tasandil sirge, ruumis tasandi. Vektorit $\vec{n}$ nimetatakse vastavalt sirge või tasandi normaalvektoriks.

3.16. Leida vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ skalaarkorrutis, kui

1) $|\vec{x}| = 8$, $|\vec{y}| = 5, \angle(\vec{x},\vec{y}) = 60^\circ$;
2) $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 1, \angle(\vec{x},\vec{y}) = 135^\circ$;
3) $\vec{x}\perp\vec{y}$;
4) $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 6$, $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$;
5) $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 1$, $\vec{x}\downarrow\uparrow\vec{y}$.

3.17. Leida skalaarkorrutis $\vec{x}\vec{y}$, kui $\vec{x}=3\vec{p}-2\vec{q}$ ja $\vec{y}=\vec{p}+4\vec{q}$ ning $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ on ristuvad ühikvektorid.

3.18. Leida skalaarkorrutis $\vec{p}\vec{q}$, kui $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$; $\vec{q}=\vec{a}-4\vec{b}-5\vec{c}$, kus $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

3.19. Arvutada vektori $\vec{p} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}$ pikkus, kui $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on paarikaupa ristuvad vektorid.

3.20. Leida vektori $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ pikkus, kui $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

3.21. Vektorid $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ ja $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ on risti. Millise nurga moodustavad ühikvektorid $\vec{s}$ ja $\vec{t}$?

3.22. Kontrollida, kas vektorid $\vec{p}=\vec{a}(\vec{b}\vec{c})-\vec{b}(\vec{a}\vec{c})$ ning $\vec{c}$ on teineteisega risti.

3.23. Tõestada, et vektor $\vec{p}=\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^2}$ on risti vektoriga $\vec{a}$.

3.24. On antud, et $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Leida, millistel α väärtustel on vektorid $\vec{a}+\alpha\vec{b}$, $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ teineteisega risti.

3.25. Leida, millisel α väärtusel vektorid $\vec{p}=\alpha\vec{a}+17\vec{b}$ ja $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ on risti, kui $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}\vec{b})=\frac{2\pi}{3}$.

3.26. Vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ moodustavad nurga $\varphi=\frac{2}{3}\pi$, kusjuures $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Leida 1) $\vec{a}\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})$; 6) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; 7) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

3.27. Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad paarikaupa nurgad 60°. Leida vektori $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ pikkus, kui $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ ja $|\vec{c}| = 6$.

3.28. Arvutada $3\vec{m}^2-2(\vec{m}\vec{n})+4\vec{n}^2$, kui $|\vec{m}| = \frac{1}{3}$, $|\vec{n}| = 6$ ja $\angle(\vec{m}\vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

3.29. Arvutada $\vec{a}^2+3(\vec{a}\vec{b})-2(\vec{b}\vec{c})+1$, kui $\vec{a}=4\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$, $\vec{c}=2\vec{m}-3\vec{n}$ ning $\vec{m}^2=4$, $\vec{n}^2=1$, $\angle(\vec{m}\vec{n})=\frac{\pi}{2}$.

3.30. Võrdkülgse kolmnurga külgvektoriteks on ühikvektorid $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{CA}=\vec{b}$, $\vec{AB}=\vec{c}$. Leida avaldis $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$.

3.31. On antud kolm vektorit $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$, mis rahuldavad tingimust $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=0$. Leida $\vec{x}\vec{y}+\vec{y}\vec{z}+\vec{z}\vec{x}$, kui $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 1$ ja $|\vec{z}| = 4$.

3.32. Kolmnurga ABC külgede pikkused on BC=5, CA=6 ja AB=7. Leida vektorite $\vec{BA}$ ja $\vec{BC}$ skalaarkorrutis.

3.33. Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad kolmnurga, s.t. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Leida $\vec{c}$ pikkus, kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on teada.

3.34. Leida vektoritele $\vec{x}=5\vec{p}+2\vec{q}$ ja $\vec{y}=\vec{p}-3\vec{q}$ ehitatud rööpküliku diagonaalide pikkused, kui $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{q}|= 3$ ja $\angle(\vec{p}\vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

3.35. Kolmnurga külgedeks on vektorid, mis avalduvad ristuvate ühikvektorite kaudu järgmiselt: $\overline{AB}=5\bar{a}+2\bar{b}$, $\overline{BC}=2\bar{a}-4\bar{b}$, $\overline{CA}=-7\bar{a}+2\bar{b}$. Leida kolmnurga ABC mediaani $\overline{AM}$ ja kõrguse $\overline{AD}$ pikkused.

3.36. Tähistades rombi ühest tipust lähtuvad küljed $\bar{a}$ ja $\bar{b}$, tõestada, et **rombi diagonaalid on risti.**

3.37. Jõud $\bar{P}$ ja $\bar{Q}$, mis mõjuvad 120° nurga all, on rakendatud ühte punkti. Leida resultantjõud $\bar{R}$, kui $|\bar{P}| = 7$ ja $|\bar{Q}| = 4$.

3.38. Leida jõud, mis on võrdne viie komplanaarse, suuruselt võrdse ning samasse punkti rakendatud jõu resultandiga, kui nurk iga kahe järgneva jõu vahel on 72°.

Vektoritevaheline nurk. Projektsioonid (koordinaatideta).

3.39. Arvutada vektorite $\bar{x}=3\bar{i}+2\bar{j}$ ja $\bar{y}=\bar{i}+5\bar{j}$ vaheline nurk, kui $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ on vastastikku ristuvad ühikvektorid.

3.40. Vektorid $\overline{AB}=2\bar{i}-6\bar{j}$, $\overline{BC}=\bar{i}+7\bar{j}$ ja $\overline{CA}=-3\bar{i}-\bar{j}$ moodustavad kolmnurga, kusjuures $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ on vastastikku ristuvad ühikvektorid. Leida selle kolmnurga nurgad.

3.41. Leida vektori $\bar{x}=6\bar{i}-2\bar{j}+3\bar{k}$ pikkus ja nurgad, millised ta moodustab ristuvate ühikvektoritega $\bar{i}$, $\bar{j}$ ja $\bar{k}$.

3.42. Arvutada rööpküliku ABCD diagonaalide vaheline nurk, kui rööpküliku külgvektorite $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$ vaheline nurk $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ja $|\overline{AB}| = \sqrt{3}$; $|\overline{AD}| = 1$.

3.43. Leida täisnurkse võrdhaarse kolmnurga teravnurkade tippudest tõmmatud mediaanide vaheline nurk.

3.44. Leida võrdhaarse kolmnurga tipunurk, kui aluse otspunktidest tõmmatud mediaanid on risti.

3.45. **Leida vektori** $\bar{x}=10\bar{i}+2\bar{j}$ projektsioon teljele, millel on vektoriga $\bar{y}=5\bar{i}-12\bar{j}$ sama suund, kusjuures $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ on vastastikku ristuvad ühikvektorid. Arvutada telje ja ühikvektorite $\bar{i}$ ja $\bar{j}$ vahelised nurgad.

3.46. Vektorite projektsioonid samal teljel on: $p_{\bar{x}}=5$, $p_{\bar{y}}=-3$, $p_{\bar{z}}=-8$ ja $p_{\bar{w}}=6$. Kas võib sellest järeldada, et need vektorid moodustavad kinnise murdjoone?

3.47. Kolmnurga ABC külgvektoriteks on $\overline{AB}=\bar{b}$ ja $\overline{AC}=\bar{c}$. Avaldada tipust B tõmmatud kõrgusvektor $\overline{BD}$ vektorite $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ kaudu.

3.48. Rööpkülik on ehitatud vektoritele $\bar{a}$ ja $\bar{b}$. Avaldada vektor, mis on küljele $\bar{a}$ tõmmatud kõrguseks.

Võrrandi tõlgendamine. Jagamine antud suhtes (koordinaatideta).

3.49. Leida vektori $\bar{x}$ lõpp-punktide hulk, kui $\bar{x}$ alguspunkt on punktis A ja $\bar{x}$ rahuldab tingimust $(\bar{x},\bar{a})=\alpha$, kus $\bar{a}$ on etteantud vektor ja α on antud positiivne arv.

3.50. Leida vektori $\bar{x}$ lõpp-punktide hulk, kui $\bar{x}$ on rakendatud punkti A ja $\bar{x}$ rahuldab tingimusi $(\bar{x},\bar{a})=\alpha$, $(\bar{x},\bar{b})=$ $=\beta$, kus $\bar{a},\bar{b}$ on antud mittekollineaarsed vektorid ja α,β on antud positiivsed arvud.

3.51. Täisnurkses kolmnurgas ABC on tõmmatud kõrgus CH hüpotenuusile AB. Avaldada vektor $\overline{CH}$ vektorite $\bar{a}=\overline{CB}$ ja $\bar{b}=\overline{CA}$ kaudu.

3.52. On antud ristkülik ABCD ja punkt M (mis võib asuda ristküliku tasandil või ka väljaspool seda). Näidata, et: 1) punktist M ristküliku vastastippudesse kulgevate vektorite skalaarkorrutis on võrdne samast punktist M teistesse vastastippudesse kulgevate vektorite skalaarkorrutisega $\overline{MA}\,\overline{MC} = \overline{MB}\,\overline{MD}$; 2) ühe paari vektorite skalaarruutude summa on võrdne teise paari vektorite skalaarruutude summaga: $\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MD}^2$.

3.53. Punkt D jaotab kolmnurgas ABC külje AB suhtes AD:DB= λ. Leida lõigu CD pikkus kolmnurga kolme külje ja arvu λ kaudu.

3.54. Tõestada, et punktide ABCD mistahes paigutuse puhul tasandil või ruumis kehtib võrdus $\overline{BC}\,\overline{AD} + \overline{CA}\,\overline{BD} +$ $+ \overline{AB}\,\overline{CD} = 0$.

3.55. Tõestada, et kui tetraeedris ABCD kaks serva on vastavalt risti oma vastasservadega, siis ka ülejäänud kaks serva on teineteisega risti.

Algebraliste seoste kontroll.

3.56. Tõestada samasus $(\bar{a}+\bar{b})^2 + (\bar{a}-\bar{b})^2 = 2(\bar{a}^2+\bar{b}^2)$ ning selgitada ta geomeetriline tähendus.

3.57. Kuidas peavad üksteise suhtes asetsema vektorid $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$, selleks et kehtiks võrdus $(\bar{a}\bar{b})\bar{c}=\bar{a}(\bar{b}\bar{c})$?

3.58. Kontrollida, kas kehtivad järgmised võrdused (kus $a = |\bar{a}|$):

1) $\bar{a}a = a^2$;
2) $\bar{a}^2 a = a^3$;
3) $\bar{a}^2\bar{a} = a^3$;
4) $\bar{a}(\bar{a}\bar{b}) = a^2\bar{b}$;
5) $\bar{a}(\bar{b}\bar{b}) = \bar{a}\bar{b}^2$;
6) $(\bar{a}\pm\bar{b})^2 = \bar{a}^2+\bar{b}^2\pm 2\bar{a}\bar{b}$;
7) $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-\bar{b}^2$;
8) $(\bar{a}\bar{b})^2 = \bar{a}^2\bar{b}^2$.

3.59. Teha kindlaks, miks samasus

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

mis on õige reaalarvude korral, ei kehti vektorite puhul.

3.60. Tõestada, et kahe vektori skalaarkorrutis ei muutu, kui ühele vektorile liita teise teguriga ristuv vektor.

Skalaarkorrutise arvutamine, kui vektorid on määratud koordinaatide abil (tasandil)

3.61. Vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ koordinaadid on:

1) $\bar{a} = (5, 2)$, $\bar{b} = (-3, 6)$;
2) $\bar{a} = (6, -8)$, $\bar{b}(12, 9)$;
3) $\bar{a}= (3, -5)$, $\bar{b} = (7, 4)$.

Leida nende vektorite skalaarkorrutis.

3.62. On antud vektorid $\bar{a}=(5, 2)$, $\bar{b}=(7, -3)$. Leida vektor $\bar{x}$, mis rahuldab samaaegselt kahte võrrandit $\bar{a}\bar{x}=38$ ja $\bar{b}\bar{x}=30$.

3.63. On antud kolm vektorit $\bar{a}=(3, -2)$, $\bar{b}=(-5, 1)$ ja $\bar{c}=(0, 4)$. Leida

1) $3\bar{a}^2 - 4\bar{a}\bar{b} + 5\bar{b}^2 - 6\bar{b}\bar{c} - 2\bar{c}^2$;
2) $2(\bar{a}\bar{b})\bar{c} - 3(\bar{b}^2)\bar{a} + (\bar{a}\bar{c})\bar{b}$.

3.64. Leida punktide 1) A(11, 4); 2) B(-3, -4), 3) C(-11, 0); 4) D(5, 12) kaugus koordinaatide alguspunktist.

3.65. Leida punktide A(5, 2) ja B(1, -1); C(-6, 3) ja D(0, -5); O(0, 0) ja P(-3, 4); Q(9, -7) ja R(4, 5) vaheline kaugus.

3.66. Leida punktide A ja B vaheline kaugus, kui

1) A(4, 3), B(7, 7);
2) A(3, 1), B(-2, 4);
3) A(12, -1), B(0, 4);
4) A(3, 5), B(4, 6).

X 3.67. Leida koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktidest (1, 1) ja (3, 7) võrdsel kaugusel.

3.68. Leida abstsissteljel punkt M, mille kaugus punktist N(2, -3) on 5.

3.69. Leida ordinaatteljel punkt M, mille kaugus punktist N(-8, 13) on 17.

3.70. Leida y-teljel punkt, mis asetseb punktist (-8, -4) ja koordinaatide alguspunktist võrdsel kaugusel.

3.71. Leida koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktist M(-5, 9) kaugusel 15.

3.72. Kolmnurga tipud on A(3, 2), B(-1, -1) ja C(11,-6) Leida külgede pikkused.

3.73. Tõestada, et punktid A(2, 2), B(-1,6), C(-5, 3) ja D(-2, -1) on ruudu tippudeks.

3.74. Ruudu lähistipud on A(2, -1) ja B(-1, 3). Leida kaks ülejäänud tippu.

3.75. Ruudu lähistipud on A(3, -7) ja B(-1, 4). Leida ruudu pindala.

3.76. On antud ruudu vastastipud A(3, 0) ja C(-4, 1). Leida ruudu teised tipud.

3.77. Ruudu vastastipud on P(3, 5) ja Q(1, -3). Leida ruudu pindala.

3.78. Rombi vastastipud on A(8, -3) ja C(10, 11) ning külje AB pikkus on 10. Leida selle rombi ülejäänud tippude koordinaadid.

3.79. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ koordinaadid on:

1) $\vec{a}=(4, 3)$, $\vec{b}=(1, 7)$;

2) $\vec{a}=(6, -8)$, $\vec{b}=(12, 9)$;

3) $\vec{a}=(2, 5)$, $\vec{b}=(3, -7)$;

4) $\vec{a}=(2, -6)$, $\vec{b}=(-3, 9)$.

Leida vektoritevaheline nurk.

3.80. Leida vektorite $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ vaheline nurk järgmistel juhtudel:

1) A(2, 1), B(-2, 3), C(1, 0), D(3, 4);

2) A(1, 2), B(2, 3), C(2, -1), D(-3, 1);

3) A(1, 1), B(2, 4), C(5, -1), D(9, 1);

4) A(2, 3), B(3, 6), C(3, 5), D(1, 9);

5) A(1, 7), B(2, 4), C($-3\sqrt{3}$, 3), D(1, $\sqrt{3}$);

6) A(0, 0), B(2, 1), C(0, 0), D(-2, 5).

3.81. On antud neli punkti A(-3, 1), B(2, 4), C(0, -5) ja D(-3, 0). Tõestada, et $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

3.82. Tõestada, et kolmnurk ABC on täisnurkne, kui

1) A(0, 0), B(3, 1), C(1, 7);

2) A(1, 1), B(2, 3), C(5, -1).

3.83. Selgitada, kas kolmnurk on terav-, täis- või nürinurkne, kui kolmnurga tipud on:

1) P(-2, 1), Q(4, 8), R(10, 6);

2) A(3, 1), B(7, 5), C(5, -1);

3) $M_1(1, 1)$, $M_2(0, 2)$, $M_3(2, -1)$;

4) M(-1, 3), N(1, 2), P(0, 4).

3.84. Rööpküliku ABCD tipud on A(3, -7), B(5, -7), C(-2, 5) ning neljas tipp D asetseb tipu B vastas. Leida selle rööpküliku diagonaalide pikkused.

3.85. Kolmnurga tipud on A(5, 0), B(0, 1) ja C(3, 3). Leida kolmnurga sisenurgad.

3.86. Kolmnurga tipud on A($-\sqrt{3}$, 1), B(0, 2) ja C($-2\sqrt{3}$, 2). Leida tipu A juures olev välisnurk.

3.87. On antud kaks punkti M(2, 2) ja N(5, -2). Leida abstsissteljel punkt P, nii et $\angle$ MPN oleks täisnurk.

3.88. On antud vektor $\overline{OA}=(x,y)$. Leida vektori $\overline{OA}$ nurga φ võrra pööramisel saadud vektori $\overline{OB}$ koordinaadid.

3.89. On antud kaks punkti A(2, 1) ja B(5, 5). Leida vektori $\overline{AB}$ nurga $\frac{5\pi}{6}$ võrra pööramisel saadud vektori $\overline{AC}$ lõpp-punkt.

3.90. Vektorid $\bar{a}=(-12, 16)$ ja $\bar{b}=(12, 5)$ on rakendatud ühes punktis. Leida ühikvektor, mis on rakendatud samas punktis ning poolitab vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vahelise nurga.

3.91. Leida vektori $\bar{a}=(7, -4)$ projektsioon vektoriga $\bar{b}=(-8, 6)$ paralleelsel teljel.

3.92. On antud vektor $\bar{a}=(6, -8)$. Leida vektoriga $\bar{a}$ kollineaarse ühikvektori $\bar{a}_0$ koordinaadid, kui vektorid $\bar{a}$ ja $\bar{a}_0$ on 1) samasuunalised; 2) vastassuunalised.

3.93. Leida korrapärase kuusnurga keskpunkt, kus kaks lähistippu on A(2, 0) ja B(5, $3\sqrt{3}$).

3.94. Leida korrapärase n-nurkse hulknurga tipu A_k koordinaadid, kui on teada esimese tipu $A_1(x_1, y_1)$ ja keskpunkti $S(x_0, y_0)$ koordinaadid.

3.95. Vektorite $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ pikkused on a_1, a_2 a_3 ning need vektorid moodustavad x-telje positiivse suunaga vastavalt nurgad φ_1, φ_2, φ_3. Leida vektori $\overline{A_0A_3}$ koordinaadid.

3.96. Vektorite $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ pikkused on vastavalt d_1, d_2, ..., d_n ning need vektorid moodustavad x-telje positiivse suunaga vastavalt nurgad φ_1, φ_2, ..., φ_n. Leida punkti A_n koordinaadid, kui on teada $A_0(x_0, y_0)$.

Skalaarkorrutise arvutamine, kui vektorid on määratud oma koordinaatidega (ruumis).

3.97. Leida vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ skalaarkorrutis, kui $\bar{a}= 4\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\bar{b}= 3\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$.

3.98. Leida vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ skalaarkorrutis, kui

1) $\bar{a}=(3, 5, 7)$, $\bar{b}=(-2, 6, 1)$;

2) $\bar{a}=(3, 0, -6)$, $\bar{b}=(2, -4, 0)$;

3) $\bar{a}=(2, 5, 1)$, $\bar{b}=(3, -2, 4)$.

3.99. On antud vektorid $\bar{a}=(4, -2, -4)$, $\bar{b}=(6, -3, 2)$. Arvutada 1) $\bar{a}\bar{b}$; 2) $\sqrt{\bar{a}^2}$; 3) $\sqrt{\bar{b}^2}$; 4) $(2\bar{a}-3\bar{b})(\bar{a}+2\bar{b})$.

3.100. On antud kolm vektorit $\bar{a}=(5, -6, 1)$, $\bar{b}=(-4, 3, 0)$, $\bar{c}=(5, -8, 10)$. Arvutada avaldised:

1) $3\bar{a}^2 - 4\bar{a}\bar{b} + 2\bar{c}^2$;
2) $2\bar{a}^2 + 4\bar{b}^2 - 5\bar{c}^2$;
3) $3\bar{a}\bar{b} - 4\bar{b}\bar{c} - 5\bar{a}\bar{c}$.

3.101. On antud kolm vektorit $\bar{a}=(3, 1, 2)$, $\bar{b}=(2, 7, 4)$, $\bar{c}=(1, 2, 1)$. Leida 1) $(\bar{a}\bar{b})\bar{c}$; 2) $\bar{a}^2(\bar{b}\bar{c})$; 3) $\bar{a}^2\bar{b} + \bar{b}^2\bar{c} + \bar{c}^2\bar{a}$.

3.102. On antud punktid A(-1, 3, 7), B(2, -1, 5) ja C(0, 1, -5). Leida

1) $(2\overline{AB}-\overline{CB})(2\overline{BC}+\overline{BA})$;
2) $\overline{AB}^2$;
3) $\overline{AC}^2$;
4) vektorite $(\overline{AB}\ \overline{AC})$ ja $\overline{AB}(\overline{AC}\ \overline{BC})$ koordinaadid.

Vektori pikkus.

3.103. Arvutada vektori $\bar{a}=(6, 3, -2)$ pikkus.

3.104. Arvutada vektoritele $\bar{a}=(3, -5, 8)$, $\bar{b}=(-1, 1, -4)$ ehitatud rööpküliku diagonaalide pikkused.

3.105. Leida vektoritele $\bar{a}=(3, 4, -12)$, $\bar{b}=(6, -2, -3)$ ja $\bar{c}=(6, 7, -6)$ vastavad ühikvektorid $\bar{a}_0$, $\bar{b}_0$ ja $\bar{c}_0$.

3.106. Vektori koordinaadid on X=4, Y=-12. Leida kolmas koordinaat Z, kui $|\bar{a}| = 13$.

3.107. On antud punktid A(-1, 5, -10), B(5, -7, 8), C(2, 2, -7) ja D(5, -4, 2). Kontrollida, kas vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on kollineaarsed. Teha kindlaks, milline vektor on pikem ja mitu korda, kas nad on sama- või vastassuunalised.

3.108. Leida punkti A(4, -3, 5) kaugus nullpunktist ja koordinaattelgedest.

3.109. Leida punktide $A_1(-1, 0, 1)$ ja $A_2(1, 2, 2)$ kaugus teineteisest.

3.110. Leida tetraeedri servade pikkused, kui tetraeedri tipud on $A_1(0, 0, 0)$, $A_2(-1, 2, -3)$, $A_3(2, -1, 3)$ ja $A_4(1, 2, 1)$.

3.111. z-teljel leida punkt, mis asetseks võrdsel kaugusel punktidest $A(-4, 1, 7)$ ja $B(3, 5, -2)$.

3.112. yz-tasandil leida punkt, mis asetseks võrdsel kaugusel punktidest $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$ ja $C(0, 5, 1)$.

3.113. Leida kolmnurga pindala, kui kolmnurga tipud on $A(0, 2, -3)$, $B(4, 4, 1)$ ja $C(-1, 0, -1)$.

3.114. Leida tetraeedri pindala, kui tetraeedri tipud ristkoordinaadistikus on $A(2, 2, 2)$, $B(2, 2, -2)$, $C(2,-2,2)$ ja $D(-2, 2, 2)$.

Vektoritevaheline nurk (koordinaatidega).

3.115. Leida vektorite $\overleftarrow{a}$ ja $\overleftarrow{b}$ vaheline nurk, kui
1) $\overleftarrow{a}=(2, 5, 4)$, $\overleftarrow{b}=(6, 0, 3)$;
2) $\overleftarrow{a}=(1, 1, -4)$, $\overleftarrow{b}=(1, -2, 2)$.

3.116. Leida vektorite $\overleftarrow{a}$ ja $\overleftarrow{b}$ vahelise nurga koosinus, kui
1) $\overleftarrow{a}=(2, -4, 4)$, $\overleftarrow{b}=(-3, 2, 6)$;
2) $\overleftarrow{a}=(8, 4, 1)$, $\overleftarrow{b}=(2, -2, 1)$.

3.117. Arvutada vektori $\overleftarrow{a}$ sihikoosinused, kui
1) $\overleftarrow{a}=(12, -15, -16)$; 2) $\overleftarrow{a}= \frac{1}{13}(3, 4, 12)$.

3.118. Kas vektor võib moodustada koordinaattelgedega järgmised nurgad: 1) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$;
2) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
3) $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 150^\circ$, $\gamma = 60^\circ$?

3.119. Kas vektor võib moodustada koordinaattelgedega järgmised nurgad: 1) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
2) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
3) $\alpha = 150^\circ$, $\gamma = 30^\circ$?

3.120. Vektor moodustab x- ja z-teljega vastavalt nurgad $\alpha = 120^\circ$ ja $\gamma = 45^\circ$. Millise nurga moodustab ta y-teljega?

10

3.121. Vektor $\bar{a}$ moodustab x- ja y-teljega nurgad $\alpha = 60^\circ$ ja $\beta = 120^\circ$. Leida vektori koordinaadid, kui $|\bar{a}| = 2$.

3.122. Leida punkti M koordinaadid, kui ta kohavektor moodustab koordinaattelgedega võrdsed nurgad ning pikkus on 3.

3.123. Leida punkt, mis asetseb x-teljega 30° nurga moodustaval sirgel ning on punktist A(3, 0) 8 ühiku kaugusel.

3.124. Kaks vektorit $\bar{a}=(2, -3, 6)$ ja $\bar{b}=(-1, 2, -2)$ on rakendatud samasse punkti. Leida vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vahelise nurga poolitajat mööda kulgeva vektori $\bar{c}$ koordinaadid, kui $|\bar{c}| = 3\sqrt{42}$.

3.125. Vektorid $\bar{a}=(-3, 0, 4)$ ja $\bar{b}=(5, -2, -14)$ lähtuvad samast punktist. Leida ühikvektor, mis algab samast punktist ning jaotab vektorite $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ vahelise nurga pooleks.

3.126. Kolmnurga tipud on A(-1, -2, 4), B(-4,-2, 0) ja C(3, -2, 1). Leida tipu B juures olev sisenurk.

3.127. Kolmnurga tipud on A(3, 2, -3), B(5, 1, -1) ja C(1, -2, 1). Leida tipu A juures olev välisnurk.

3.128. Arvutada kolmnurga A(1, 2, 1), B(3, -1, 7) ja C(7, 4, -2) sisenurgad ja teha kindlaks, kas kolmnurk on võrdkülgne.

3.129. Nelinurga tipud on A(1, -2, 2), B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1) ja D(-5, -5, 3). Tõestada, et ta diagonaalid AC ja BD on teineteisega risti.

3.130. Teha kindlaks, millisel α väärtusel on vektorid $\bar{a}=\alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ ja $\bar{b}= \bar{i} + 2\bar{j} - \alpha\bar{k}$ teineteisega risti.

3.131. Leida ühikvektor $\bar{p}$, mis on risti vektoriga $\bar{a}=(3, 6, 8)$ ja abstsissteljega.

3.132. Vektoriga $\bar{a}=(6, -8, -7,5)$ kollineaarne vektor $\bar{x}$ moodustab z-teljega teravnurga. Leida selle vektori koordinaadid, kui $|\bar{x}| = 50$.

3.133. Vektoritega $\bar{a}= 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ja $\bar{b}= 18\bar{i} - 22\bar{j} -5\bar{k}$ risti olev vektor $\bar{x}$ moodustab y-teljega nürinurga. Leida selle vektori koordinaadid, kui $|\bar{x}| = 14$.

3.134. Leida vektoriga $\bar{a}=(2, 1, -1)$ kollineaarne vektor $\bar{x}$, mis rahuldab tingimust $\bar{x}\bar{a}=3$.

3.135. Leida vektoritega $A=(2, 3, 1)$ ja $\bar{b}=(1, -2, 3)$ risti olev vektor $\bar{x}$, mis rahuldab tingimust

$$\bar{x}(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k})= -6.$$

3.136. On antud kaks vektorit: $\bar{a}=(3, -1, 5)$ ja $\bar{b}=(1, 2, -3)$. Leida z-teljega risti olev vektor $\bar{x}$, mis rahuldab tingimusi $\bar{x}\bar{a}=9$, $\bar{x}\bar{b}=-4$.

3.137. On antud kaks samast punktist lähtuvat vektorit $\bar{a}=(8, 4, 1)$ ja $\bar{b}=(2, -2, 1)$. Leida samast punktist lähtuv vektor $\bar{c}$, mille pikkus on võrdne vektori $\bar{a}$ pikkusega, on risti vektoriga $\bar{a}$ ja komplanaarne vektoritega $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ning moodustab vektoriga $\bar{b}$ teravnurga.

Projektsioonid (koordinaatidega).

3.138. Leida vektori $\bar{a}$ projektsioon vektori $\bar{b}$ sihil, kui

1) $\bar{a}=(5, 2, 5)$, $\bar{b}=(2, -1, 2)$;

2) $\bar{a}=(8, 4, 1)$, $\bar{b}=(2, -2, 1)$.

3.139. Leida vektori $\bar{s}=(4, -3, 2)$ projektsioon teljel, mis moodustab koordinaattelgedega võrdsed teravnurgad.

3.140. Leida vektori $\bar{s}=(2, -3, -5)$ projektsioon teljel, mis moodustab x- ja z-teljega nurgad $\alpha = 45^0$, $\gamma = 60^0$ ning y-teljega teravnurga.

3.141. On antud kaks punkti $A(3, -4, -2)$ ja $B(2, 5, -2)$. Leida vektori $\overline{AB}$ projektsioon teljel, mis moodustab x- ja y-teljega nurgad $\alpha = 60^0$, $\beta = 120^0$ ning z-teljega nürinurga.

3.142. On antud vektori pikkus $|\bar{a}| = 2$ ning nurgad $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$. Leida vektori $\bar{a}$ projektsioonid koordinaattelgedel.

3.143. On antud kolm vektorit: $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 12\bar{k}$. Leida $p_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b})$.

3.144. On antud kolm vektorit: $\vec{a}=(1, -3, 4)$, $\vec{b}=(3, -4, 2)$ ja $\vec{c}=(-1, 1, 4)$. Leida $p_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

3.145. On antud kolm vektorit: $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+5\vec{j}$, $\vec{c}=4\vec{i}+4\vec{j}$. Leida $p_{\vec{c}}(3\vec{a}-2\vec{b})$.

3.146. On antud kaks punkti $M(-5, 7, -6)$ ja $N(7, -9, 9)$. Leida vektori $\vec{a}=(1, -3, 1)$ projektsioon vektori $\overrightarrow{MN}$ sihil.

3.147. On antud punktid $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$ ja $D(3, 2, -4)$. Leida $p_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

Segaülesandeid.

3.148. On antud kolm vektorit: $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. Leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldab tingimusi $\vec{x}\vec{a}=-5$, $\vec{x}\vec{b}=-11$, $\vec{x}\vec{c}=20$.

3.149. On antud kolm vektorit $\vec{a}=(3, -2, 4)$, $\vec{b}=(5, 1, 6)$, $\vec{c}=(-3, 0, 2)$. Leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldab samaaegselt kolme võrrandit: $\vec{a}\vec{x}=4$, $\vec{b}\vec{x}=35$, $\vec{c}\vec{x}=0$.

3.150. On antud kaks vektorit $\vec{a}=(1, 1, 1)$ ja $\vec{b}=(1,0,0)$. Leida vektor $\vec{c}$, mis on risti vektoriga $\vec{a}$, moodustab vektoriga $\vec{b}$ nurga 60° ning on suunatud nii, et vektorite kolmik a, b, c on samuti orienteeritud kui ristbaas $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

3.151. Arvutada, millist tööd teeb jõud $\vec{f}=(3, -5, 2)$, kui ta rakenduspunkt nihkub vektori $\vec{s}=(2, -5, 7)$ alguspunktist lõpp-punkti.

3.152. Leida jõu $\vec{f}=(3, -2, 5)$ töö, kui ta rakenduspunkt liigub mööda sirget punktist $A(2, -3, 5)$ punkti $B(3, -2, -1)$.

3.153. Kolm jõudu $M=(3, -4, 2)$, $N=(2, 3, -5)$ ja $P=(-3, -2, 4)$ on rakendatud ühte punkti. Leida nende jõududega võrdse jõu poolt tehtud töö, kui see jõud paikneb ümber punktist $M_1(5, 3, -7)$ mööda sirget punkti $M_2(4, -1, -4)$

3.154. Vektoriga $\vec{f}=(1, -8, -7)$ määratud jõud jaguneb kolmeks jõuks, kusjuures üks neist on määratud vektoriga $\vec{a}=(2, 2, 1)$. Leida jõu $\vec{f}$ vektori $\vec{a}$ sihiline komponent.

3.155. Kuubi tippu on rakendatud kolm jõudu, millede suurused on 1, 2 ja 3 ning nad on suunatud sellest tipust lähtuvate tahkude diagonaale mööda. Leida nende kolme jõu resultantjõud.

Kaldreeper.

3.156. Leida kahe punkti M(3, 0) ja N(1, -2) vaheline kaugus, kui kaldreeperi reeperinurk $\omega = 120^\circ$.

3.157. On antud kolmnurk A(0, 0), B(7, 4), C(-1, 6) kaldreeperis $\omega = 60^\circ$. Arvutada punktist A joonestatud mediaani pikkus.

3.158. Punktid M(-3, -5) ja N(x, y) on sümmeetrilised x-telje suhtes. Leida punkti N koordinaadid, kui kaldreeperi reeperinurk $\omega = 60^\circ$.

3.159. Leida korrapärase kuusnurga tipud, kui kuusnurga külg a=1 ning koordinaattelgedeks on valitud kaks lähiskülge selliselt, et koordinaatide alguspunkti vastas asuva tipu koordinaadid on positiivsed.

3.160. Arvutada kolmnurga A(14, 3), B(9, -2), C(4, 1) külgede pikkused, kui $\omega = 2/3\pi$.

3.161. Kaldreeperis reeperinurgaga $\omega = \arccos(-3/5)$ on antud korrapärase kolmnurga kaks tippu A(2, -2) ja B(7, 1). Leida kolmnurga kolmas tipp.

3.162. Leida kaldreeperi reeperinurk ω, kui punktide A(10, -4) ja B(7, -1) vaheline kaugus on 3.

3.163. Ringjoone keskpunkt asetseb punktis C(-7, 4) ning raadius on R=6. Leida reeperinurga poolitajatega paralleelsete diameetrite otspunktid, kui $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

3.164. Kaldreeperis $\omega = 150^\circ$ kolmnurga tipud on O(0, 0), A(3, 1) ja B(-1, 4). Arvutada kolmnurga pindala.

3.165. Leida reeperinurk, kui kolmnurga A(-5, -1), B(3, -2), C(1, 4) pindala on 11,5 ruutühikut.

Afiinne reeper.

3.166. Konstrueerida afiinne koordinaatide süsteem, kui

1) $g_{22}=1$, $g_{11}=4$, $g_{12}=0$;

2) $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{12}=\frac{1}{2}$;

3) $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$;

4) $g_{11}=4$, $g_{12}=-8$, $g_{22}=25$.

3.167. Leida vektori $\bar{a}=(56, -10)$ pikkus, kui $g_{11}=4$, $g_{12}=8$ ja $g_{22}=25$.

3.168. Leida vektori $\bar{a}=(7, -8)$ pikkus, kui $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

3.169. Leida vektoriga $\bar{a}=(7, -8)$ risti olev ühikvektor $\bar{b}$, kui $g_{11}=4$, $g_{12}=8$, $g_{22}=25$.

3.170. Reeperivektorite pikkused on $|\bar{e}_1|=2$, $|\bar{e}_2|=3$ ning nendevaheline nurk $\omega=\frac{\pi}{3}$. Leida g_{11}, g_{12}, g_{22} ning punktide $A(1, -2)$ ja $B(-3, 4)$ vaheline kaugus.

3.171. Afiinse reeperi vektorite pikkused on vastavalt $|\bar{e}_1|=4$, $|\bar{e}_2|=2$. Nendevaheline nurk on $\omega=\frac{\pi}{3}$. Kolmnurga ABC tippude koordinaadid antud reeperis on $A(1, 3)$, $B(1, 0)$ ja $C(2, 1)$. Leida kolmnurga külgede AB ja AC pikkused ning nendevaheline nurk A.

3.172. Afiinse reeperi vektorite pikkused on vastavalt $|\bar{e}_1|=2$, $|\bar{e}_2|=3$ ning nendevaheline nurk $\omega=\frac{5\pi}{6}$. Selles reeperis on antud vektorid $\bar{a}=(1,2)$ ja $\bar{b}=(2, 2)$. Leida esimese ja teise vektori vaheline nurk.

3.173. On antud kolmnurk ABC tippudega $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ ja $C(3, 5)$ afiinses reeperis. Kolmnurga külgede pikkused on vastavalt $AB=\sqrt{52}$, $AC=4$, $BC=\sqrt{28}$. Leida selle reeperi vektorite pikkused ning nendevaheline nurk.

3.174. On antud kolmnurk ABC tippudega $A(1, 0)$, $B(0,1)$, $C(3, 2)$ afiinses reeperis. Täisnurk asetseb tipu C juures ning kaatetid on $CA=2$, $CB=3$. Leida kolmnurga $A'B'C'$ külgede pikkused ning nendevaheline nurk, kui selle kolmnurga tippude koordinaadid on A'(1, 1), B'(2, 2) ja C'(2, 4).

3.175. Sirge, mis läbib punkte A(4, 1) ja B(-2, y), moodustab võrdsed nurgad mõlema reeperiteljega. Leida punkti B ordinaat üldise afiinse reeperi korral.

§ 3. Vektorkorrutis

Kahe vektori $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vektorkorrutiseks nimetatakse vektorit $\vec{z}$, mis rahuldab tingimusi:

1) $\vec{z} \perp \vec{x}$, $\vec{z} \perp \vec{y}$ (sihi määratlus);
2) $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ on parempoolne kolmik (suuna määratlus);
3) $|\vec{z}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin\angle(\vec{x},\vec{y})$ (pikkuse määratlus).

Vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vektorkorrutist tähistatakse kas $\vec{x}\times\vec{y}$ või $[\vec{x},\vec{y}]$.

Vektorkorrutise pikkusel

$$|\vec{x}\times\vec{y}| = |\vec{x}||\vec{y}| \sin\angle(\vec{x},\vec{y}) \tag{3.30}$$

on lihtne geomeetriline tähendus: kui kanda tegurid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ühisesse alguspunkti, siis nendega määratud rööpküliku pindala on

$$S = |\vec{x}|h = |\vec{x}||\vec{y}| \sin\angle(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}\times\vec{y}| \tag{3.31}$$

Seega vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vektorkorrutis on vektor, mis võrdub pikkuselt teguritele ehitatud rööpküliku pindalaga, on risti selle rööpküliku tasandiga ja suunatud nii, et tema lõpp-punktist vaadates lühem pööre $\vec{x}$ poolt $\vec{y}$ poole toimub vastassuunaliselt kellaosuti liikumisele.

Vektorkorrutise omadused:

1) antikommutatiivsus $\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}$;
2) assotsiatiivsus skalaarse teguri suhtes
   $(\lambda\vec{x}\times\vec{y}) = \lambda(\vec{x}\times\vec{y})$, $(\vec{x}\times\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x}\times\vec{y})$;
3) distributiivsus vektorite liitmise suhtes
   $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\times\vec{y} + \vec{x}\times\vec{z}$, $(\vec{x}+\vec{y})\times\vec{z} = \vec{x}\times\vec{z} + \vec{y}\times\vec{z}$.

Antud punkti A rakendatud vektori $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ momendiks punkti O suhtes nimetatakse vektorit $\vec{r}\times\vec{a}$, kus $\vec{r}=\overrightarrow{OA}$. Kui vektor $\overrightarrow{AB}$ libiseb mööda sirget AB, siis muutub küll vektor $\vec{r}$, kuid vektori $\vec{a}$ moment punkti O suhtes ei muutu. Vektori momendi mõistet kasutatakse mehaanikas (jõumoment, impulsimoment).

Vektorvõrrand $\vec{x}\times\vec{k} = \vec{c}$. Vektorkorrutise definitsioonist järeldub, et vektorvõrrand, kus $\vec{k}$ ja $\vec{c}$ on konstantsed vektorid, omab lõpmata palju lahendeid. Olgu $\vec{a}$ selle võrrandi mingi lahend, s.t. $\vec{a}\times\vec{k}=\vec{c}$, siis $\vec{x}\times\vec{k}=\vec{a}\times\vec{k}$, $(\vec{x}-\vec{a})\times\vec{k}=0$ ja $\vec{x}-\vec{a}\parallel\vec{k}$. Järelikult võrrandi $\vec{x}\times\vec{k}=\vec{c}$ iga lahend on kirjutatav kujul

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{k},$$

kus t on mingi skalaarmuutuja. Vaadeldava võrrandi üldlahend on seega selle võrrandi ühe erilahendi $\vec{a}$ ja vastava homogeense võrrandi $\vec{x}\times\vec{k}=0$ üldlahendi $t\vec{k}$ summa.

Võrrand $\vec{x}\times\vec{k}=\vec{c}$ määrab seega sirge, mis läbib punkti A kohavektoriga $\vec{a}$ vektori $\vec{k}$ sihis.

Vektorkorrutiste arvutamine (koordinaatideta)

3.176. Arvutada vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vektorkorrutise pikkus $|\vec{x}\times\vec{y}|$, kui

1) $|\vec{x}| = 6$, $|\vec{y}| = 5$; $\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\pi}{6}$;

2) $|\vec{x}| = 10$, $|\vec{y}| = 2$ ja $\vec{x}\vec{y} = 12$.

3.177. Arvutada skalaarkorrutis $\vec{x}\vec{y}$, kui $|\vec{x}| = 3$, $\vec{y} = 26$ ja $|\vec{x}\times\vec{y}| = 72$.

3.178. Teades, et $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{y}| = 2$ ja $\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{2}{3}\pi$, arvutada 1) $(\vec{x}\times\vec{y})^2$; 2) $[(2\vec{x}+\vec{y})\times(\vec{x}+2\vec{y})]^2$; 3) $[(\vec{x}+3\vec{y})\times(3\vec{x}-\vec{y})]^2$.

3.179. Põhjendada, et kehtivad järgmised võrdused:

1) $(\vec{x}\times\vec{y})^2 + (\vec{x}\vec{y})^2 = \vec{x}^2\vec{y}^2$;

2) $\vec{x}\times(\vec{y}+\lambda\vec{x}) = (\vec{x}\times\mu\vec{y})\times\vec{y} = \vec{x}\times\vec{y}$.

3.180. Näidata, et $(\vec{x}\times\vec{y})^2 \leq \vec{x}^2\vec{y}^2$. Millal kehtib siin võrdus?

3.181. Vektorite $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ vahel kehtivad seosed $\vec{x}\times\vec{y} = \vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{x}\times\vec{u} = \vec{y}\times\vec{v}$. Tõestada, et vektorid $\vec{x}-\vec{v}$ ja $\vec{y}-\vec{u}$ on kollineaarsed.

3.182. Millisel α väärtusel on vektorid $\vec{p}=\alpha\vec{a}+5\vec{b}$ ja $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ kollineaarsed, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed?

3.183. Näidata, et kui kolm vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ei ole kollineaarsed, siis võrdustest $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$ järeldub võrdus $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ ja vastupidi.

3.184. Millist tingimust peavad rahuldama vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$, et vektorid $\vec{x}+\vec{y}$ ja $\vec{x}-\vec{y}$ oleksid kollineaarsed?

3.185. Teades ristküliku külgvektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ pikkusi $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, arvutada ristküliku diagonaalvektorite pikkus.

3.186. Leida vektorkorrutis $(\vec{x}+\vec{y})\times(\vec{x}-\vec{y})$, kui $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on mittekollineaarsed. Anda tulemusele geomeetriline tõlgendus.

3.187. Leida vektoritele $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}$ ja $\vec{y}=\vec{a}-4\vec{b}$ ehitatud rööpküliku pindala, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on ristuvad ühikvektorid.

3.188. Leida vektoritele $\vec{AB}=\vec{m}+2\vec{n}$ ja $\vec{AD}=\vec{m}-3\vec{n}$ ehitatud rööpküliku pindala, kui $\vec{m}=5$, $\vec{n}=3$ ja $\angle(\vec{m},\vec{n})=\frac{\pi}{6}$.

3.189. On antud kolmnurga kaks külge $\vec{AB}=3\vec{p}-4\vec{q}$ ja $\vec{BC}=\vec{p}+5\vec{q}$. Leida kolmnurga kõrgus $\vec{CD}$, kui $\vec{p}$ ja $\vec{q}$ on ristuvad ühikvektorid.

3.190. Leida vektoritele $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}-\vec{p}$ ja $\vec{b}=\vec{m}-3\vec{n}+\vec{p}$ ehitatud rööpküliku diagonaalide vahelise nurga siinus, kui $\vec{m}$, $\vec{n}$ ja $\vec{p}$ on ristuvad ühikvektorid.

3.191. Leida vektori $\vec{x}=3\vec{p}-12\vec{q}+4\vec{r}$ projektsioon teljel, mille sihivektoriks on vektor $\vec{y}=(\vec{p}-2\vec{r})\times(\vec{p}+3\vec{q}-4\vec{r})$, kusjuures $\vec{p}$, $\vec{q}$ ja $\vec{r}$ on ristuvad ühikvektorid.

3.192. Tõestada, et vektorid $\vec{x}=\vec{p}\times\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{q}\times\vec{n}$ ja $\vec{z}=\vec{r}\times\vec{n}$ on komplanaarsed.

3.193. Ühest punktist lähtub kolm mittekomplanaarset vektorit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Näidata, et nende vektorite otspunkte läbiv tasand on risti vektoriga $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$.

3.194. Kas vasaku käe kolm esimest sõrme moodustavad vasakpoolse või parempoolse vektorite kolmiku, kui pöial ja esimene sõrm on välja sirutatud peopesa tasandil ning keskmine sõrm on kõverdatud peopesa poole? Anda vastus parema käe samade sõrmede kohta.

3.195. Näidata, et vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}, \vec{c}$ tsüklilisel ümberpaigutamisel kolmikute iseloom (vasak- või parempoolne) ei muutu.

3.196. Kontrollida, et vektorkolmiku kahe vektori ümberpaigutamisel vasakpoolne kolmik muutub parempoolseks ja vastupidi.

3.197. Lihtsustada korrutised $\vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{y} \times \vec{z}$, $\vec{z} \times \vec{x}$ teades, et ühikvektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ on risti ning moodustavad 1) parempoolse või 2) vasakpoolse kolmiku.

3.198. Tõestada, et vektorkorrutis ei muutu, kui ühele tegurile liita teise teguriga kollineaarne vektor.

3.199. Näidata, et vektori $\vec{x}$ vektorkorrutis temaga ristuva ühikvektoriga $\vec{y}$ on samaväärne vektori $\vec{x}$ pööramisega täisnurga võrra kellaosuti liikumise suunas ühikvektoriga $\vec{y}$ ristuval tasandil.

3.200. Teha kindlaks, kas vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ vektorkorrutist võib asendada kolme järgmise operatsiooniga:

1) vektori $\vec{x}$ projekteerimisega vektoriga $\vec{y}$ ristuvale tasandile;
2) projekteeritud vektori pööramisega täisnurga võrra kellaosuti liikumise suunas samal tasandil;
3) pööratud vektori korrutamisega teguri $\vec{y}$ mooduliga.

3.201. On antud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Leida $\vec{x}$ nii, et $\vec{a}=\vec{b} \times \vec{x}$. Kas ülesanne on alati lahenduv ja kui palju on tal lahendeid?

3.202. Avaldada vektor $\vec{x}=(3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}) \times (\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})$ ristuvate ühikvektorite $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ parempoolse kolmiku kaudu.

3.203. Ristuvate ühikvektorite vasakpoolse kolmiku $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ korral $\vec{x}=(3\vec{m}+4\vec{n}+5\vec{p}) \times (\vec{m}+6\vec{n}+4\vec{p})$. Leida vektori $\vec{x}$ pikkus.

3.204. Leida vektorkorrutis $\vec{x}\times\vec{y}$, kui
1) $\vec{x}=(2, 3, 1)$, $\vec{y}=(5, 6, 4)$;
2) $\vec{x}=(5, -2, 1)$, $\vec{y}=(4, 0, 6)$;
3) $\vec{x}=(-2, 6, -4)$, $\vec{y}=(3, -9, 6)$.

3.205. On antud vektorid $\vec{x}=(3, -1, -2)$ ja $\vec{y}=(1, 2,-1)$. Leida vektorkorrutised: 1) $\vec{x}\times\vec{y}$; 2) $(2\vec{x}+\vec{y})\times\vec{y}$; 3) $(2\vec{x}-\vec{y})\times(2\vec{x}+\vec{y})$.

3.206. On antud vektorid $\vec{a}=(2, -3, 1)$, $\vec{b}=(-3, 1, 2)$ ja $\vec{c}=(1, 2, 3)$. Arvutada $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ ja $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.

3.207. On antud punktid A(2, -1, 2), B(1, 2, -1) ja C(3, 2, 1). Arvutada vektorkorrutised: 1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$; 2) $(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA})\times\overrightarrow{CB}$.

3.208. Arvutada vektoritele $\vec{a}=(8, 4, 1)$ ja $\vec{b}=(2, -2, 1)$ ehitatud rööpküliku pindala.

3.209. On antud punktid A(1, 2, 0), B(3, 0, -3) ja C(5, 2, 6). Leida kolmnurga ABC pindala.

3.210. Kolmnurga tipud on A(1, -1, 2), B(5, -6, 2) ja C(1, 3, -1). Leida tipust B küljele AC langetatud kõrguse pikkus.

3.211. Leida vektorite $\vec{a}=(2, -2. 1)$ ja $\vec{b}=(2, 3, 6)$ vahelise nurga siinus.

3.212. Vektoritega $\vec{a}=(4, -2, -3)$ ja $\vec{b}=(0, 1, 3)$ ristuv vektor $\vec{x}$ moodustab y-teljega nürinurga. Leida vektori $\vec{x}$ koordinaadid, kui $|\vec{x}| = 26$.

3.213. z-telje ja vektoriga $\vec{a}=(8, -15, 3)$ ristuv vektor $\vec{x}$ moodustab x-teljega teravnurga. Leida $\vec{x}$ koordinaadid, kui $|\vec{x}|= 51$.

3.214. Leida vektoritega $\vec{a}=(2, -3, 1)$ ja $\vec{b}=(1, -2, 3)$ ristuv vektor $\vec{x}$, mis rahuldab tingimust $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.

3.215. Jõud $\vec{f}=(3, 2, -4)$ on rakendatud punktis A(2, -1, 1). Leida selle jõu moment koordinaatide alguspunkti suhtes [1].

[1] Kui vektor $\vec{f}$ kujutab jõudu, mis on rakendatud mingis punktis M ja vektor $\vec{a}$ läheb mingist punktist O punkti M, siis vektor $\vec{a}\times\vec{f}$ kujutab endast jõu $\vec{f}$ momenti punkti O suhtes.

3.216. Jõud $\vec{p}=(2, -4, 5)$ on rakendatud punktis $M_0(4, -2, 3)$. Leida selle jõu moment punkti $A(3, 2, -1)$ suhtes.

3.217. Jõud $\vec{p}$ on rakendatud punkti A. Leida selle jõu momendi suurus ja sihikoosinused punkti C suhtes, kui;

1) $\vec{p}=(3, 4, -2)$, $A(2, -1, -2)$, $C(0, 0, 0)$;

2) $\vec{p}=(2, 2, 9)$, $A(4, 2, -3)$, $C(2, 4, 0)$.

3.218. On antud jõud $\vec{M}=(2, -1, -3)$, $\vec{N}=(3, 2, -1)$ ja $\vec{P}=(-4, 1, 3)$, mis on rakendatud punktis $C(-1, 4, -2)$. Leida resultantjõu momendi suurus ja sihikoosinused punkti $A(2, 3, -1)$ suhtes.

§ 4. Segakorrutis

Kahe vektori $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ **vektorkorrutise** $\vec{x}\times\vec{y}$ **skalaarkorrutist** $(\vec{x}\times\vec{y})\vec{z}$ kolmanda vektoriga $\vec{z}$ nimetatakse <u>kolme vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ segakorrutiseks</u>. Kolme vektori segakorrutis on reaalarv, mille absoluutväärtus võrdub neile vektoritele ehitatud <u>rööptahuka ruumalaga</u> ja on positiivne parempoolse ning negatiivne vasakpoolse kolmiku puhul. Et kehtib samasus $(\vec{x}\times\vec{y})\vec{z}=\vec{x}(\vec{y}\times\vec{z})$, siis segakorrutise tähistamiseks kasutatakse lihtsamat tähist, s.t. $(\vec{x}\vec{y}\vec{z})$ või $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$.

Segakorrutise algebralised omadused:

1) Sõltuvus tegurite järjekorrast. Segakorrutise absoluutväärtus säilib tegurite igal ümberpaigutusel; märk muutub vastupidiseks kahe teguri vahetamisel ja seega säilib tegurite tsüklilisel ümbervahetamisel.

2) Segakorrutis on <u>assotsiatiivne</u> reaalarvuga korrutamise suhtes: $((\lambda\vec{x})\vec{y}\vec{z})=(\vec{x}(\lambda\vec{y})\vec{z})=(\vec{x}\vec{y}(\lambda\vec{z}))=\lambda(\vec{x}\vec{y}\vec{z})$.

3) Segakorrutis on <u>distributiivne</u> vektorite liitmise suhtes: $((\vec{x}_1+\vec{x}_2)\vec{y}\vec{z})=(\vec{x}_1\vec{y}\vec{z})+(\vec{x}_2\vec{y}\vec{z})$,

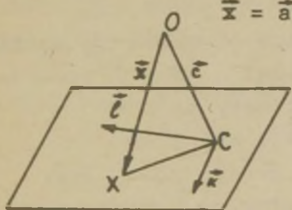
$(\vec{x}(\vec{y}_1+\vec{y}_2)\vec{z})=(\vec{x}\vec{y}_1\vec{z})+(\vec{x}\vec{y}_2\vec{z})$,

$(\vec{x}\vec{y}(\vec{z}_1+\vec{z}_2)) = (\vec{x}\vec{y}\vec{z}_1) + (\vec{x}\vec{y}\vec{z}_2)$.

<u>Vektorvõrrand $(\vec{x}\vec{k}\vec{l}) = c$.</u> Võrrandil on juhul kui $\vec{k} \nparallel \vec{l}$ lõpmata palju lahendeid, sest üks võrrand $|\vec{x}|\,|\vec{k}\times\vec{l}|\cos\angle(\vec{x}, \vec{k}\times\vec{l})=c$ sisaldab kaht tundmatut $\vec{x}$ ja $\angle(\vec{x}, \vec{k}\times\vec{l})$. Geomaetrilises mõttes saab vektoritele $\vec{k}$ ja $\vec{l}$ ehitada lõpmata palju rööptahukaid, mille ruumala on c.

Olgu $\vec{a}$ selle võrrandi mingi lahend, s.t. $(\vec{a}\vec{k}\vec{l})=c$, siis $(\vec{x}\vec{k}\vec{l})=(\vec{a}\vec{k}\vec{l})$ ehk $(\vec{x}-\vec{a})\vec{k}\vec{l}=0$, mis tähendab, et vektorid $\vec{x}-\vec{a}$, $\vec{k}$ ja $\vec{l}$ on komplanaarsed. Järelikult $\vec{x}-\vec{a}$ on vektorite $\vec{k}$ ja $\vec{l}$ lineaarkombinatsioon. Osutub niisiis, et lähtevõrrand on samaväärne võrrandiga

$$\vec{x} = \vec{a} + u\vec{k} + v\vec{l}.$$



Joon. 3.

Kui $\vec{x}$ rakendada fikseeritud punkti O, nii et $\vec{x}=\overrightarrow{OX}$, siis lõpp-punktid X täidavad tasandi, mis läbib punkti A kohavektoriga $\vec{c}=\overrightarrow{OA}$ ning on määratud rihivektoripaariga $\vec{k}$, $\vec{l}$.

<u>3.219.</u> Tõestada, et kolme vektori segakorrutis on null, kui kaks neist vektoreist on kollineaarsed.

<u>3.220.</u> Tõestada algebraliselt, et kolme komplanaarse vektori segakorrutis on null.

<u>3.221.</u> Tõestada vektorite $\vec{x}\times\vec{y}$, $\vec{x}\times\vec{z}$ ja $\vec{x}\times\vec{w}$ komplanaarsus.

<u>3.222.</u> Näidata, et kui $\vec{x}\times\vec{y} + \vec{y}\times\vec{z} + \vec{z}\times\vec{x}=0$, siis vektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ on komplanaarsed.

<u>3.223.</u> Tõestada, et vektorite $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ komplanaarsuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks on võrdus $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = 0$, kusjuures vähemalt üks arvudest α, β, γ peab olema nullist erinev.

<u>3.224.</u> Tõestada, et $|\vec{x}\vec{y}\vec{z}| \leq |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,|\vec{z}|$. Millistel eeldustel on võimalik võrdus?

<u>3.225.</u> Tõestada samasused 1) $(\vec{x}+\vec{y})(\vec{y}+\vec{z})(\vec{z}+\vec{x})=2\vec{x}\vec{y}\vec{z}$; 2) $\vec{x}\vec{y}(\vec{z} + \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \vec{x}\vec{y}\vec{z}$, kus λ ja μ on suvalised arvud.

3.226. Leida vektoritele $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ ja $\vec{z}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ ehitatud rööptahuka ruumala.

3.227. Leida alljärgnevatele vektoritele ehitatud rööptahuka ruumala:

1) $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}-3\vec{r}$ ja $\vec{c}=\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}$ (kus $\vec{p}$, $\vec{q}$ ja $\vec{r}$ on ristuvad ühikvektorid);

2) $\vec{a}=3\vec{m}+5\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{c}=2\vec{m}+7\vec{n}$ (kus $|\vec{m}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{n}|=3$, $\angle(\vec{m}\vec{n})=135^{\circ}$).

3.228. Arvutada vektoritele $\vec{x}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{y}=\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$ ja $\vec{z}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ ehitatud rööptahuka kõrgus, kui aluseks on vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud rööpkülik ($\vec{i}$, $\vec{j}$ ja $\vec{k}$ - ristuvad ühikvektorid).

3.229. Leida $(\vec{i}\times\vec{j})\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

3.230. Teha kindlaks, milline on vektorite kolmik $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (parem- või vasakpoolne), kui

1) $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{j}$; 2) $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{j}$;

3) $\vec{a}=\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}$, $\vec{c}=\vec{k}$; 3) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$;

5) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{j}$; 6) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{k}$.

3.231. Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ moodustavad parempoolse ristuvate vektorite kolmiku. Arvutada $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, kui $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$.

3.232. Vektor $\vec{c}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Nurk vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahel on 30°. Leida $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, kui $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$.

3.233. Arvutada segakorrutis $\vec{x}\vec{y}\vec{z}$, kui

1) $\vec{x}=(2, 0, 1)$, $\vec{y}=(1, 3, -2)$, $\vec{z}=(4, -1, 1)$;

2) $\vec{x}=(1, -1, 3)$, $\vec{y}=(-2, 2, 1)$, $\vec{z}=(3, -2, 5)$.

3.234. Näidata, et vektoritele $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ ja $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ rajatud tetraeedri ruumala on võrdne ühe kuuendikuga nende vektorite segakorrutise absoluutväärtusest, s.o.

$$V=\frac{1}{6}\,|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

3.235. Tetraeedri tipud on A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1) ja D(4, 1, 3). Leida tetraeedri ruumala.

3.236. Tetraeedri tipud on A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7) ja D(-5, -4, 8). Leida tipust D langetatud kõrgus.

3.237. Tetraeedri ruumala on $V=5$ ja kolm tippu asetsevad punktides $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ ja $C(2, -1, 3)$. Leida neljanda tipu D koordinaadid, kui ta asetseb y-teljel.

3.238. Teha kindlaks, kas vektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ on komplanaarsed, kui:

1) $\vec{x}=(2, 3, -1)$, $\vec{y}=(1, -1, 3)$, $\vec{z}=(1, 9, -11)$;
2) $\vec{x}=(3, -2, 1)$, $\vec{y}=(2, 1, 2)$, $\vec{z}=(3, -1, -2)$;
3) $\vec{x}=(2, -1, 2)$, $\vec{y}=(1, 2, -3)$, $\vec{z}=(3, -4, 7)$.

3.239. Lähtudes kolme vektori $\overrightarrow{AB}=(X_1, Y_1, Z_1)$, $\overrightarrow{AC}=(X_2, Y_2, Z_2)$ ja $\overrightarrow{AD}=(X_3, Y_3, Z_3)$ komplanaarsuse tingimusest, anda nelja punkti $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ ja $D(x_4, y_4, z_4)$ komplanaarsuse tingimus.

3.240. Tõestada, et neli punkti $A(1, 2, -1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1, 2, 1)$ ja $D(2, 1, 3)$ asetsevad samal tasandil.

§ 5. Topeltvektorkorrutis

Vektorkorrutise $\vec{x}\times\vec{y}$ ja vektori $\vec{z}$ vektorkorrutis on jälle vektor, mida nimetatakse <u>topeltvektorkorrutiseks.</u>

Iga vektorkolmiku $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ korral kehtib samasus

$$(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} = \vec{y}(\vec{x}\vec{z}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}).$$

Kahe vektorkorrutise skalaarkorrutise avaldis:

$$(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} (\vec{x}\vec{z}) & (\vec{x}\vec{w}) \\ (\vec{y}\vec{z}) & (\vec{y}\vec{w}) \end{vmatrix} .$$

Kahe vektorkorrutise vektorkorrutise avaldis:

$$(\vec{x}\times\vec{y})\times(\vec{z}\times\vec{w}) = \vec{z}(\vec{x}\vec{y}\vec{w}) - \vec{w}(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = \vec{y}(\vec{x}\vec{z}\vec{w}) - \vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{w}).$$

Jacobi samasus:

$$(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} + (\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{x} + (\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y} = 0.$$

3.241. Näidata, et kui $\vec{x}\perp\vec{y}$ ja $\vec{x}\perp\vec{z}$, siis $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})=0$.

3.242. Millistel tingimustel kehtib $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}=\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})$.

3.243. On antud, et $\vec{z}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$. Leida vektorite $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ vaheline seos, mis ei sisaldaks kordajaid λ ja μ.

3.244. Kas on võimalik leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldaks samaaegselt kahte võrrandit: $\vec{x}\vec{a}=\alpha$ ja $\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$, kus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ on antud vektorid ning α - antud arv.

3.245. Näidata, et kehtib võrdus $\vec{a}_1\vec{b}_2+\vec{a}_2\vec{b}_2=0$, kui leidub vektor $\vec{x}$, mis rahuldab samaaegselt kahte võrrandit $\vec{a}_1\times\vec{x}=\vec{b}_1$ ja $\vec{a}_2\times\vec{x}=\vec{b}_2$.

3.246. Leida vektor $\vec{x}$, mis rahuldab võrrandite süsteemi $\vec{x}\vec{a}=\alpha$, $\vec{x}\vec{b}=\beta$ ja $\vec{x}\vec{c}=\gamma$, kus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ on mittekomplanaarsed vektorid.

3.247. Tõestada samasused:

1) $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}) = \vec{y}(\vec{x}\vec{z})-\vec{z}(\vec{x}\vec{y})$;

2) $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}+(\vec{y}\times\vec{z})\times\vec{x}+(\vec{z}\times\vec{x})\times\vec{y}=0$;

3) $(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w})=(\vec{x}\vec{z})(\vec{y}\vec{w})-(\vec{x}\vec{w})(\vec{y}\vec{z})=\begin{vmatrix}\vec{x}\vec{z} & \vec{x}\vec{w}\\ \vec{y}\vec{z} & \vec{y}\vec{w}\end{vmatrix}$;

4) $(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w})+(\vec{x}\times\vec{z})(\vec{w}\times\vec{y})+(\vec{x}\times\vec{w})(\vec{y}\times\vec{z})=0$;

5) $(\vec{x}\times\vec{y})\times(\vec{z}\times\vec{w})=\vec{z}(\vec{x}\vec{y}\vec{w})-\vec{w}(\vec{x}\vec{y}\vec{z})=\vec{y}(\vec{x}\vec{z}\vec{w})-\vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{w})$;

6) $(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{y}\times\vec{w})(\vec{w}\times\vec{x})=(\vec{x}\vec{y}\vec{z})^2$;

7) $\vec{x}\times(\vec{x}\times(\vec{x}\times(\vec{x}\times\vec{y})))=\vec{x}^4\vec{y}$, kui $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ristuvad;

8) $\vec{x}\times(\vec{y}\times(\vec{z}\times\vec{w}))=(\vec{x}\times\vec{z})(\vec{y}\vec{w})-(\vec{x}\times\vec{w})(\vec{y}\vec{z})$;

9) $\vec{x}\times(\vec{y}\times(\vec{z}\times\vec{w}))=(\vec{x}\vec{z}\vec{w})\vec{y}-(\vec{x}\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w})$;

10) $(\vec{x}\times\vec{y})^2(\vec{x}\times\vec{z})^2-((\vec{x}\times\vec{y})(\vec{x}\times\vec{z}))^2=\vec{x}^2(\vec{x}\vec{y}\vec{z})^2$;

11) $(\vec{x}\times\vec{y})(\vec{y}\times\vec{z})(\vec{y}\times\vec{z})(\vec{z}\times\vec{x})(\vec{z}\times\vec{x})(\vec{x}\times\vec{y})=(\vec{x}\vec{y}\vec{z})^4$;

12) $(\vec{x}\vec{y})(\vec{z}\times\vec{w})+(\vec{x}\vec{z})(\vec{w}\times\vec{y})+(\vec{x}\vec{w})(\vec{y}\times\vec{z})=\vec{x}(\vec{y}\vec{z}\vec{w})$;

13) $(\vec{x}\vec{y}\vec{z})\vec{w}=(\vec{w}\vec{y}\vec{z})\vec{x}+(\vec{w}\vec{z}\vec{x})\vec{y}+(\vec{w}\vec{x}\vec{y})\vec{z}$;

14) $(\vec{x}\vec{y}\vec{z})(\vec{u}\vec{v}\vec{w}) = \begin{vmatrix}\vec{x}\vec{u} & \vec{x}\vec{v} & \vec{x}\vec{w}\\ \vec{y}\vec{u} & \vec{y}\vec{v} & \vec{y}\vec{w}\\ \vec{z}\vec{u} & \vec{z}\vec{v} & \vec{z}\vec{w}\end{vmatrix}$;

15) $(\vec{x}\vec{y}\vec{z})^2= \begin{vmatrix}\vec{x}^2 & \vec{x}\vec{y} & \vec{x}\vec{z}\\ \vec{y}\vec{x} & \vec{y}^2 & \vec{y}\vec{z}\\ \vec{z}\vec{x} & \vec{z}\vec{y} & \vec{z}^2\end{vmatrix}$.

3.248. On antud vektorid $\vec{x}=(3, 1, 2)$, $\vec{y}=(2, 7, 4)$ ja $\vec{z}=(1, 2, 1)$. Arvutada 1) $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}$; 2) $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})$.

3.249. Leida $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$, kui $\vec{a}=(-1, 3, 2)$, $\vec{b}=(3, 0, -1)$, $c=(2, 0, 1)$ ja $d=(2, 4, 3)$.

3.250. Leida $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$, kui $\vec{a}=(3, 0, -1)$, $\vec{b}=(-1, 3, 2)$, $\vec{c}=(2, 4, 3)$ ja $\vec{d}=(2, 0, 1)$.

Segaülesandeid (vektorarvutus).

3.251. Kas järgmised võrdused on samaväärsed:

1) $\vec{x}=\vec{y}$ ja $\alpha\vec{x}=\alpha\vec{y}$;
2) $\vec{x}=\vec{y}$ ja $\vec{x}\vec{z}=\vec{y}\vec{z}$;
3) $\vec{x}=\vec{y}$ ja $\vec{x}\times\vec{z}=\vec{y}\times\vec{z}$;
4) $\vec{x}=\vec{y}$ ja $\vec{x}+\vec{z}=\vec{y}+\vec{z}$.

3.252. Leida $(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

3.253. Näidata, et vektorid $\vec{a}=(1, -5, 3)$ ja $\vec{b}=(-2, 10, -6)$ on kollineaarsed.

3.254. Leida kordajad α ja γ, kui vektorid $\vec{x}=\alpha\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ ja $\vec{y}=3\vec{i}+\vec{j}+\gamma\vec{k}$ on kollineaarsed.

3.255. Näidata, et vektorid $\vec{x}=(2, -3, 0)$ ja $\vec{y}=(3, 2, 1)$ on risti.

3.256. Leida xy-tasandil vektor $\vec{x}$, mis oleks risti vektoriga $\vec{y}=(5, -3, 4)$ ning pikkuselt temaga võrdne.

3.257. Näidata, et vektorid $\vec{x}=(-3, 0, 2)$, $\vec{y}=(2, 1,-4)$ ja $\vec{z}=(11, -2, -2)$ on komplanaarsed.

3.258. Näidata, et vektor $\overline{AB}$ on komplanaarne ühikvektoritega $\vec{i}$ ja $\vec{k}$, kui $\overline{OA}=6\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ ja $\overline{OB}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$.

3.259. Kontrollida, kas kolm vektorit

1) $\vec{a}=(2, -1, 3)$, $\vec{b}=(1, 4, 2)$, $\vec{c}=(3, 1, -1)$;
2) $\vec{l}=(1, 6, 5)$, $\vec{m}=(3, -2, 4)$, $\vec{n}=(7, -18, 2)$

on komplanaarsed.

3.260. Leida vektoritele $\vec{a}=(2, -1, 3)$ ja $\vec{b}=(1, -3, 1)$ ehitatud rööpküliku pindala.

3.261. Leida vektori $\vec{a}=(6, -2, 3)$ pikkus ja sihikoosinused.

3.262. Leida ühikvektori $\overline{OB}=(1, 0)$ ja vektori $\overline{AB}$ vahelise nurga koosinus, siinus ja tangens, kui

1) A(-2, 3), B(4, 9); 2) A(2, 1), B(3, 0);
3) A(3, 2), B(-5, 2); 4) A(5, 3), B(5, -7);
5) A(1, 4), B(2, 5); 6) A(1, 4), B(2, 1).

3.263. Leida vektori $\overline{AB}$ ristprojektsioon teljel, mille sihivektoriks on vektor $\overline{CD}$, kui A(-4, 2), B(6, 4), C(-6, -1), D(-1, -13).

3.264. Tõestada, et kolmnurk tippudega A(5, -4), B(3, 2) ja C(2, -5) on täisnurkne.

3.265. On antud võrdkülgse kolmnurga kaks tippu A(2, 1) ja B(6, 3). Leida selle kolmnurga kolmas tipp.

3.266. Võrdhaarse kolmnurga aluseks on lõik AC, kusjuures A(-4, 2), C(4, -4). Leida selle kolmnurga tipu B koordinaadid, kui alusnurgad on arctan $\frac{5}{6}$.

3.267. On antud kolmnurk ABC: A(2, -3), B(1, 3) ja C(-6, -4). Leida punkt M, mis on sümmeetriline tipuga A külje BC suhtes.

3.268. Teades kolmnurga tippude kohavektoreid $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$, leida mediaanide lõikepunkti kohavektor.

3.269. Leida kolmnurga ABC: A(2, 2), B(-5, 1), C(3,-5) ümber joonestatud ringi keskpunkt ja raadius.

3.270. On antud kolmnurga kaks küljvektorit $\overline{AB}=(2, 1, -2)$ ja $\overline{BC}=(3, 2, 6)$. Leida selle kolmnurga nurgad.

3.271. Leida eelmise ülesande andmete põhjal kolmnurga pindala.

3.272. Kolmnurga tipud on A(2, -1, -3), B(1, 2, -4) ja C(3, -1, -2). Leida tipust A vastasküljele ehitatud kõrgusega kollineaarse vektori h koordinaadid, kui h moodustab y-teljega nürinurga ning ta pikkus on $2\sqrt{34}$.

3.273. On antud ruudu kaks kõrvuti asetsevat tippu A(-3, 2) ja B(2, 4) . Leida ruudu ülejäänud tipud.

3.274. On antud ruudu vastastipud A(-3, 2) ja B(5, -4). Leida ülejäänud tipud C ja D.

3.275. Rombi vastastipud on A(8, -3), C(10, 11). Leida rombi teised tipud, kui rombi külje pikkus on 10.

3.276. Rööpküliku kolme tipu A, B ja C kohavektorid on $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$. Leida neljanda tipu D kohavektor $\vec{d}$.

3.277. Teades rööpküliku ABCD kolme tipu kohavektoreid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, leida rööpküliku diagonaalide lõikepunkti kohavektor $\vec{r}$.

3.278. On antud trapetsi kolm tippu $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ ja $C(\vec{c})$. Leida neljanda tipu raadiusvektor $\vec{d}$, diagonaalide lõikepunkti raadiusvektor $\vec{r}$ ja külgservade lõikepunkti raadiusvektor $\vec{p}$, teades, et alus AD on λ korda suurem alusest BC.

3.279. Teades rööptahuka ABCDA'B'C'D' nelja tipu raadiusvektoreid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ja $\vec{a}'$, leida ülejäänud nelja tipu raadiusvektorid

3.280. Rööptahuka külgvektoriteks on vektorid $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Leida tipust O lähtuva rööptahuka diagonaali ja tippe A, B, C läbiva tasandi lõikepunkti kohavektor.

3.281. Leida vektoritele $\vec{P}=(3, 1, -2)$, $\vec{Q}=(-4, 0, 3)$ ja $\vec{R}=(1, 5, -1)$ ehitatud rööptahuka ruumala ning teha kindlaks, kas need vektorid moodustavad vasakpoolse või parempoolse kolmiku.

3.282. Massid $m_1, m_2, \ldots, m_n$ on paigutatud punktidesse $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, ..., $M_n(\vec{r}_n)$. Leida selle masspunktide süsteemi raskuskeskme kohavektor.

3.283. Näidata, et n materiaalse punkti raskuskeskmest kõikidesse punktidesse suunduvate vektorite summa on null, kui kõigis n punktis on võrdsed massid.

3.284. Kahte vektorkolmikut $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ ja $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ nimetatakse kaaskolmikuteks, kui nende kolmikute vektorid on seotud järgmiselt:

$$\vec{a}_i\vec{b}_k = \begin{cases} 1, & \text{kui } i=k, \\ 0, & \text{kui } i\neq k. \end{cases}$$

Leida vektorkolmiku $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ kaaskolmiku vektorid $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, kasutades skalaar- ja vektorkorrutist.

3.285. Leida vektorkolmiku $\vec{a}_1=(2, 1, -1)$, $\vec{a}_2=(-3, 0, 2)$, $\vec{a}_3=(5, 1, -2)$ kaaskolmiku vektorid.

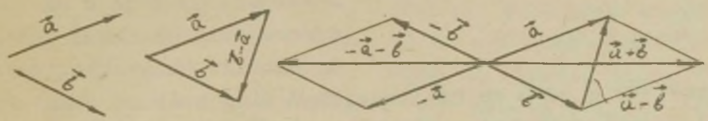
3.286. On antud kolme jõu komponendid: $\vec{a}_x=5\vec{i}$, $\vec{a}_y=2\vec{j}$, $\vec{a}_z=-7\vec{k}$; $\vec{b}_x=3\vec{i}$, $\vec{b}_y=6\vec{j}$, $\vec{b}_z=4\vec{k}$; $\vec{c}_x=12\vec{i}$, $\vec{c}_y=\vec{j}$, $\vec{c}_z=15\vec{k}$. Leida antud jõudude resultantjõu suurus ja siht.

V a s t u s e d

I peatükk

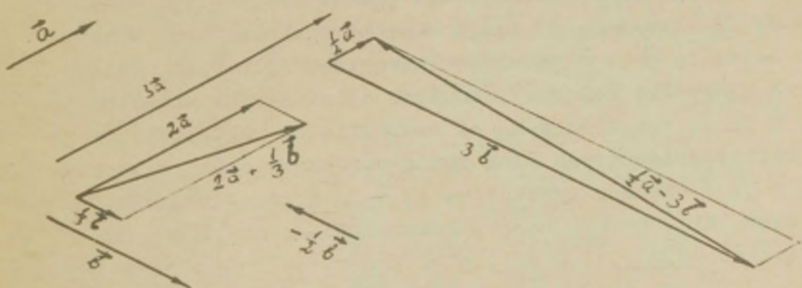
LINEAARNE VEKTORALGEBRA

1.1. Vt. joon. 1.8. 1.2. $|\vec{a}-\vec{b}| = 22$. 1.3. $|\vec{a}+\vec{b}| = 20$.

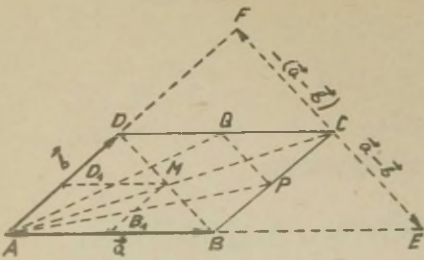


Joon. 1.8.

1.4. $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| = 13$. 1.5. $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11{,}4$; $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$. 1.6. $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{19} \approx 4{,}4$; $|\vec{a}-\vec{b}| = 7$. 1.7. 1) $\vec{a} \perp \vec{b}$. Selgitus. Vektorid $\vec{a}+\vec{b}$ ja $\vec{a}-\vec{b}$ on vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpküliku diagonaalid; kui rööpküliku diagonaalid on võrdsed, siis rööpkülik on ristkülik; 2) vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk peab olema teravnurk; 3) vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk peab olema nürinurk. 1.8. $|\vec{p}| = |\vec{q}|$, kuna rööpküliku diagonaalid jaotavad külgedevahelise nurga pooleks ainult rombi korral. 1.9. Vt. joon. 1.9. 1.10. Vt. joon. 1.10.



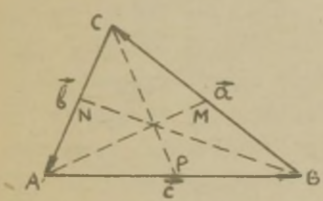
Joon. 1.9.



Joon. 1.10.

1) $\triangle$ ACE; 2) $\triangle$ ACF; 3) $\triangle$ ABD; 4) rööpkülik AB_1MD_1; 5) $\triangle$ MBC; 6) ja 7) $\triangle$ APQ. 1.11. 1) $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed. Rööpküliku diagonaalid on kollineaarsed ainult siis, kui ta küljed on kollineaarsed; 2) $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on samasuunalised, kuna nende sihtide ühikvektorid on võrdsed; 3) $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed ning neil on sama siht; 4) $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed, kuid vastassuunalised. 1.13. Märkus. Iga kolmnurga külje pikkuse korrutis temaga risti oleva ühikvektoriga on vektor, mille pikkus on võrdne külje pikkusega ja suund on selle küljega risti. Seega selle vektori võime saada, kui pöörame kolmnurga külge täisnurga võrra. 1.14. 1) $\alpha = \beta = 0$, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on mittekollineaarsed; 2) $\alpha = \beta$, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed ning vastassuunalised; 3) $\alpha = -\beta$, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on samasuunalised. 1.15. $u = v = 0$, kui $\vec{c}=0$; $u = 0$ ja $v \neq 0$, kui $\vec{c}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed; $u \neq 0$ ja $v = 0$, kui $\vec{c}$ ja $\vec{a}$ on kollineaarsed. 1.17. 1),2) Esitus on alati võimalik ja lahend on ühene; 3),4) lahendeid võib olla kaks, üks või mitte ühtegi olenevalt antud liidetavate pikkustest. 1.19. 1) $\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}=0$; 2) $2\vec{l}+\vec{m}-\vec{n}=0$; 3) $\vec{l},\vec{m},\vec{n}$ - mittekomplanaarsed. Märkus. Et leida $\vec{l}$, $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ vahelist lineaarset sõltuvust, tuleb neid määravast kolmest võrdusest elimineerida abivektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$; kui seda teha ei saa, siis on vektorid $\vec{l}$, $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ mittekomplanaarsed ning antud võrdusest saame vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ esitused vektorite $\vec{l}$, $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ lineaarkombinatsioonidena. Nii näiteks juhul 3) saame $\vec{a}=\vec{l}-\vec{m}$, $\vec{b}=-\vec{l}+2\vec{m}-\vec{n}$ ja $\vec{c}=\vec{l}-\vec{m}+\vec{n}$. 1.20. 1) $a^1=b^1$, $a^2=b^2$, $a^3=b^3$; 2) $\frac{a^1}{b^1} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3}{b^3}$. Märkus. Kasutame vektorite kollineaarsuse tingimust $\vec{a}=\lambda\vec{b}$. 3) Kordajatevahelisi seoseid, mis ei sõltu vektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ valikust, pole olemas. 1.21. $3\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{p}+4\vec{q}=0$. Märkus.

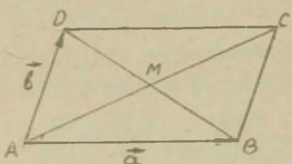
Otsitav lineaarne sõltuvus saadakse vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ elimineerimise teel antud võrdustest. 1.22. $\vec{s} = 2/5\vec{m} + 3/5\vec{n} + 3/5\vec{p}$. 1.23. 1) Võib olla neli vektorit, kusjuures ei ole ühtegi kahte kollineaarset ja ühtegi kolme komplanaarset vektorit; kui kaks antud vektorit on kollineaarsed, siis kõik neli vektorit on komplanaarsed; kui kolm vektorit on kollineaarsed, siis on kollineaarsed kõik neli; kui kolm vektorit on komplanaarsed, siis on ka kõik neli komplanaarsed; 2) $\vec{b}$, $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ on komplanaarsed; 3) $\vec{c}$ ja $\vec{d}$ on kollineaarsed; 4) $\vec{d}=0$. 1.24. Märkus. Nulliga võrdumise tingimus tuleneb kõige lihtsamalt faktist, et pöörates kõiki liidetavaid 120° (või 240°) võrra, summa ei muutu. 1.26. Vt. joon 1.11. $\vec{AM} = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$ või $\vec{AM} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$; $\vec{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$ või $\vec{BN} = \frac{\vec{a}-\vec{c}}{2}$; $\vec{CP} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$ või $\vec{CP} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.



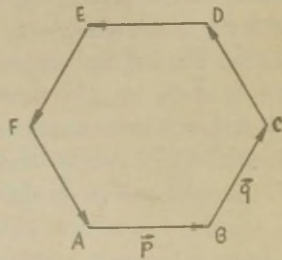
Joon. 1.11

1.27. $\vec{AM} = -(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2})$; $\vec{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$; $\vec{CP} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. 1.28. Märkus. Et kolm vektorit $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ ja $\vec{CP}$ oleksid kolmnurga külgedeks, peab olema täidetud tingimus $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = 0$. Selle õigsuses veendume, kui väljendame iga mediaani põhikolmnurga külgede $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ kaudu pidades silmas, et $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. 1.29. Kolmnurga mediaanide lõikepunkt. 1.30. $\vec{OM} = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}$. 1.31. Kolmnurga sisenurkade poolitajatega kollineaarsed vektorid: $\vec{p}_1 = \frac{\vec{c}}{c} - \frac{\vec{b}}{b}$, $\vec{q}_1 = \frac{\vec{a}}{a}\frac{\vec{c}}{c}$, $\vec{r}_1 = \frac{\vec{b}}{b} - \frac{\vec{a}}{a}$; välisnurkade poolitajatega kollineaarsed vektorid: $\vec{p}_2 = \frac{\vec{c}}{c} + \frac{\vec{b}}{b}$, $\vec{q}_2 = \frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{c}}{c}$, $\vec{r}_2 = \frac{\vec{b}}{b} + \frac{\vec{a}}{a}$. 1.32. $\vec{AD} = \frac{\vec{AB}|\vec{AC}| + \vec{AC}|\vec{AB}|}{|\vec{AB}| + |\vec{AC}|}$. 1.33. $\vec{D_1A} = -(\vec{c} + 1/5\vec{a})$; $\vec{D_2A} = -(\vec{c}+2/5\vec{a})$; $\vec{D_3A} = -(\vec{c}+3/5\vec{a})$; $\vec{D_4A} = -(\vec{c}+4/5\vec{a})$. 1.34. $\vec{AD} = \frac{m}{m+n}\vec{b} + \frac{n}{m+n}\vec{c}$. 1.35. $\vec{AB} = 1/2\vec{a} - 1/2\vec{b}$. $\vec{BC} = 1/2\vec{a} + 1/2\vec{b}$; $\vec{CD} = -1/2\vec{a} + 1/2\vec{b}$; $\vec{DA} = -1/2\vec{a} - 1/2\vec{b}$. 1.36. $\vec{AB} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\vec{BC} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{CD} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $\vec{DA} = -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. 1.37. Vt. joon. 1.12. $\vec{MA} = -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$; $\vec{MB} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$; $\vec{MC} = \frac{\vec{b}+\vec{a}}{2}$; $\vec{MD} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. 1.38. Diagonaalide lõikepunkt. 1.39. $\vec{BC} = \frac{4\vec{l}-2\vec{k}}{3}$, $\vec{CD} = \frac{2\vec{l}-4\vec{k}}{3}$.

1.41. $\overrightarrow{EF}=\frac{\vec{m}+\vec{p}}{2}-\frac{\vec{n}+\vec{q}}{2}$. 1.42. $\overrightarrow{BC}=-\frac{b}{a}\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=\frac{b-a}{a}\vec{a}$; $\overrightarrow{AC}=$ $=\frac{a-b}{a}\vec{a}+\vec{b}$; $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$. 1.44. $\overrightarrow{BC}=\vec{p}+\vec{q}$, $\overrightarrow{CD}=-\vec{q}$, $\overrightarrow{DE}=-\vec{p}$, $\overrightarrow{EF}=-\vec{p}-\vec{q}$. 1.45. Vt. joon. 1.13. 1) $\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q}$; $\overrightarrow{AD}=2\vec{q}$; $\overrightarrow{AE}=2\vec{q}-\vec{p}$; 2) $\overrightarrow{BC}:\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}$; $\overrightarrow{BC}:\overrightarrow{EF}=-1$; $\overrightarrow{CF}:\overrightarrow{AB}=-2$. Suntel $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{BC}$ pole môtet, sest vektorid on mittekollineaarsed. 1.46. $\overrightarrow{AC}=3/2\vec{m}+1/2\vec{n}$; $\overrightarrow{AD}=$



Joon. 1.12.



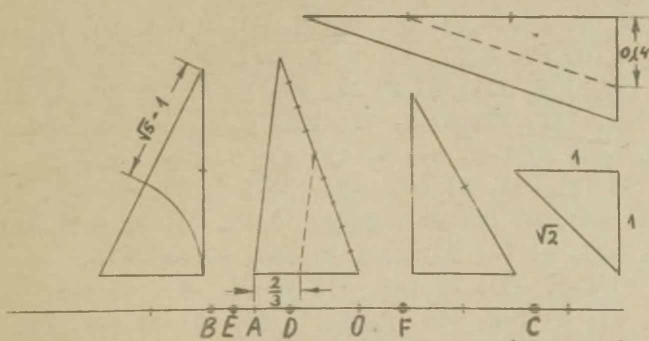
Joon. 1.13.

$=\vec{m}+\vec{n}$; $\overrightarrow{AF}=-1/2\vec{m}+1/2\vec{n}$; $\overrightarrow{EF}=-1/2\vec{m}-1/2\vec{n}$. 1.49. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B'C'}=\vec{q}$; $\overrightarrow{CD}=$ $=\overrightarrow{C'D'}=-\vec{p}$; $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{DC'}=\vec{p}+\vec{r}$; $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}=\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}=\vec{p}+\vec{q}$; $\overrightarrow{AC'}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{CA'}=-\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{D'A'}=-\vec{q}$; $\overrightarrow{A'B'}=\vec{p}$; $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}=\vec{r}$; $\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{CD'}=-\vec{p}+\vec{r}$; $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{CB'}=-\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}=-\vec{p}+\vec{q}$; $\overrightarrow{BD'}=-\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$; $\overrightarrow{DB'}=\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$.
1.51. $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$; $\overrightarrow{DB}=\vec{d}-\vec{b}$; $\overrightarrow{DM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{d}$; $\overrightarrow{AQ}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$.
1.52. $\overrightarrow{MN}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}$, $\overrightarrow{PQ}=\frac{\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{RS}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}}{2}$. 1.53. $|\vec{R}|=15$.
1.54. (-30, 21), (0, 0). 1.55. $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$. 1.56. $\vec{a}=2\vec{p}+5\vec{q}$.
1.57. $\vec{a}=2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$. 1.58. 1) $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-\frac{3}{2}\vec{a}$. 1.59. $\alpha=2$, $\gamma=-3$. 1.60. 1) (1, -1, 6); 2) (5, -3, 6); 3) (6, -4, 12); 4) $(1, -\frac{1}{2}, 0)$; 5) (0, -2, 12); 6) $(3, -\frac{5}{3}, 2)$. 1.61. 1) (3, 22, -3); 2) (19, 39, 30).
1.62. $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$. 1.63. $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{d}$, $\vec{b}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{c}-$ $-\frac{1}{3}\vec{d}$, $\vec{a}=\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$. 1.64. $\overrightarrow{AM}=(3, 4, -3)$; $\overrightarrow{BN}=(0, -5, 3)$; $\overrightarrow{CP}=(-3, 1, 0)$. 1.65. $\alpha=4$, $\beta=-1$. 1.67. $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. 1.68. $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; $\vec{d}=5\vec{a}+4\vec{b}$; $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{c}$. 1.69. 1) Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on lineaarselt sõltumatud; 2) vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on lineaarselt sõltuvad $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; 3) vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on lineaarselt sõltuvad, kuid vektor $\vec{c}$ ei ole esitatav vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ lineaarkombinatsioonina, kuna nad on omavahel kollineaarsed, aga vektor $\vec{c}$ ei ole nendega kollineaarne;

II peatükk

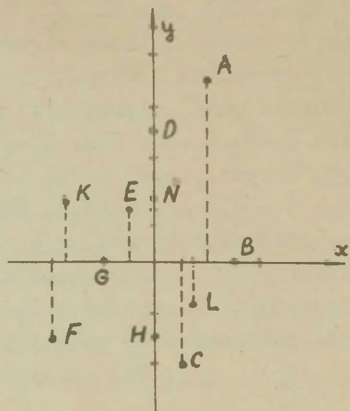
REEPER JA PUNKTI KOORDINAADID

2.1. $(\vec{b}-\vec{a})=\lambda(\vec{c}-\vec{a})$ või $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})=0$. Tingimus väljendab vektorite $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ kollineaarsust. 2.2. Kolm punkti on kollineaarsed. 2.3. $\alpha(\vec{b}-\vec{a})+\beta(\vec{c}-\vec{a})+\gamma(\vec{d}-\vec{a})=0$, kus $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$. 2.4. Märkus. Eelnevalt leida raskuskeskme kohavektor $\vec{c}=\frac{1}{3}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3)$, kus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ on kolmnurga tippude kohavektorid vabalt valitud alguspunkti korral. 2.5. Rööpküliku diagonaalide lõikepunktis. Lahend on ainus. Märkus. Iga rööpküliku puhul alguspunkti mistahes asendi korral kehtib seos $\vec{a}_1+\vec{a}_3=\vec{a}_2+\vec{a}_4$, s.o. $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4=2(\vec{a}_2+\vec{a}_4)$. 2.6. $\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$. 2.7. Märkus. Kõigi kolme lõigu keskpunktidel on sama kohavektor $\vec{c}=\frac{1}{4}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4)$, kus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ on tetraeedri tippude kohavektorid. 2.8. Märkus. Tähistame antud masspunktide kohavektorid (vabalt valitud koordinaatide alguspunkti korral) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$. Tõestame, et nende raskuskese on määratud kohavektoriga $\vec{c}=\frac{1}{n}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\ldots+\vec{a}_n)$. 2.9. Vt. joon. 2.16.



Joon. 2.16

2.10. 1) $x=2$; 2) $x_1=2, x_2=-2$; 3) $x_1=-2$, $x_2=4$; 4) $x_1=2$, $x_2=-3$; 5) $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=1$; 6) $x_1=x_2=-2$; 7) võrrandil on imaginaarsed lahendid, imaginaarsete koordinaatidega punkte ei saa konstrueerida. 2.11. Punktid asetsevad: 1) punktist M(2) paremal; 2) lõigul $[M_1(-1), M_2(1)]$; 3) punktist M(5) vasakule suunduval kiirel $[M(5), -\infty)$; 4) väljaspool lõiku $[M_1(-4), M_2(3)]$; 5) vahemikus $(M_1(-4), M_2(3))$.
2.13. 1) -2; 2) 5; 3) -8; 4) -2 ja 2; 5) -1 ja 5; 6) -7 ja -3. 2.15. 1) 8; 2) 5; 3) 4. 2.16. Vt. joon. 2.17.

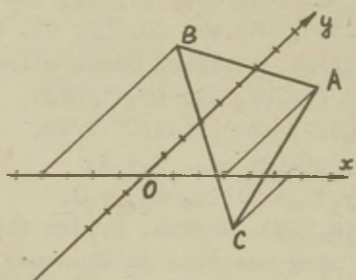


Joon. 2.17.

2.17. $A_x(2, 0)$, $B_x(3, 0)$, $C_x(-5, 0)$, $D_x(-3, 0)$, $E_x(-5; 0)$.
2.18. $A_y(0, 2)$, $B_y(0, 1)$, $C_y(0, -2)$, $D_y(0, 1)$, $E_y(0, -2)$.
2.19. 1),3) I, III; 2),4) II, IV; 5) I, II, IV; 6) II, III, IV; 7) I, III, IV; 8) I, II, III. 2.20. 1) $(-x, -y)$; 2) $(x, -y)$; 3) $(-x, y)$; 4) (y, x); 5) $(-y, -x)$.
2.21. 1) (2, -3), 2) (-3, -2), 3) (-1, 1), 4) (-3, 5), 5) (-4, -6), 6) (a; -b). 2.22. 1) (1, 2), 2) (-3, -1), 3) (2, -2), 4) (2, 5), 5) (-3; -5), 6)(-a, b).
2.23. 1) (-3, -3); 2) (-2, 4); 3) (2, -1); 4) (-5, 3); 5) (5, 4); 6) (-a, -b). 2.24. 1) (3, 2); 2) (-2, 5); 3) (4, -3). 2.25. 1) (-5, -3); 2) (-3, 4); 3) (2, -7).
2.26. $x=y$ ja $x=-y$. 2.27. 1) $M_1(1, 5)$ ja $M_2(-5, 5)$: 2) $M_1(-2, 8)$ ja $M_2(-2, 2)$. 2.28. 1) B(5,0); 2) B(-2, 3);

3) B(4, 0). <u>2.29.</u> 1) d=13, cos $\varphi = \frac{5}{13}$, sin $\varphi = -\frac{12}{13}$; 2) d=10, cos $\varphi = -\frac{3}{5}$, sin $\varphi = -\frac{4}{5}$; 3) d=5, cos $\varphi = \frac{3}{5}$, sin $\varphi = \frac{4}{5}$. <u>2.30.</u> $p_x\overline{AB}=2$, $p_y\overline{AB}=-1$. Märkus. Lõigu projektsioonid telgedel on võrdsed otspunktide samanimeliste koordinaatide vahedega. Projektsiooni märk sõltub sellest, kas projektsiooni suund langeb ühte telje positiivse või negatiivse suunaga. <u>2.33.</u> (3, -1). <u>2.34.</u> 1) 5; 2) 13; 3) 10. <u>2.35.</u> 1) 3; 2) -3. <u>2.36.</u> 1) (-9, 3); 2)(-9, -7). <u>2.37.</u> 1) (-15, -12); 2) (1, -12). <u>2.38.</u> 1) ja 2) asetsevad, 3) ei asetse. <u>2.39.</u> 1) 5; 2) 10; 3) 5; 4) $\sqrt{5}$; 5) $2\sqrt{2}$; 6) 13. <u>2.40.</u> M(5, 0). <u>2.41.</u> $M_1(0, -3)$; $M_2(0, -9)$. <u>2.42.</u> Ülesandel on kaks lahendust: $y_1=11$, $y_2=-1$. <u>2.43.</u> (1, 10) ja (-11, 10). <u>2.44.</u> (-1, -2). <u>2.45.</u> M(-1, -2). <u>2.46.</u> 18x-8y=53. <u>2.47.</u> AB=BC=CA=4. <u>2.49.</u> M(-5, 4). Märkus. Punkti M leiame tingimusest: AB=MF ja AC=MC. <u>2.50.</u> 1)(0,0), (1, 0), (1, 1), (0, 1) või (0, 0) (-1, 0), (-1, 1), (0, 1) või (0, 0), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1) või (0, 0), (1, 0), (1, -1), (0, -1) sõltuvalt sellest, millised ruudu küljed on võetud reeperitelgedeks; 2) $(1/2\sqrt{2}, 0)$, $(0, 1/2\sqrt{2})$, $(-1/2\sqrt{2}, 0)$, $(0, -1/2\sqrt{2})$; 3) (1/2, 1/2), (-1/2, 1/2), (-1/2, -1/2), (1/2, -1/2). <u>2.51.</u> $C(2x_2-x_1, y_1)$ ja $D(x_2, 2y_1-y_2)$ või $C'(x_1, 2y_2-y_1)$ ja $D'(2x_1-x_2, y_2)$. <u>2.52.</u> $D_1(2, 1)$, $D_2(-2, 9)$, $D_3(6, -3)$. Märkus. Neljas tipp võib olla iga tipu vastastipp ning seetõttu on ülesandel 3 lahendit. <u>2.53.</u> 1) D(-4, -1); 2) D(-3, 1). Märkus. Kasutame abipunkti - diagonaalide lõikepunkti. <u>2.54.</u> D(11, 7). <u>2.55.</u> A(-4, 0), B(4, 0), C(1, 3), D(-1, 3), M(0, $\frac{12}{5}$), S(0, 4). <u>2.56.</u> (6, 0), $(3, 3\sqrt{3})$, $(-3, 3\sqrt{3})$, (-6, 0), $(-3, -3\sqrt{3})$, $(3, -3\sqrt{3})$. <u>2.58.</u> 1) I, III, V, VII; 2) II, III, V, VIII; 3) I, II, VII, VIII; 4) I, III, VI, VIII, 5) II, IV, V, VII. <u>2.59.</u> 1) I, III, V, VII; 2) II, IV, VI, VIII; 3) I, III, VI, VII; 4) II, IV, V, VIII; 5) III, IV, VI, VII. <u>2.60.</u> 1) (4, 3, 0), (-3, 2, 0) punkt C asetseb xy-tasandil, järelikult tema projektsioon sellel tasandil ühtib punkti endaga (0, 0, 0); 2) (4, 0, 5), (-3, 0, 1), (2,0,0); 3) (0, 3, 5), (0, 2, 1), (0, -3, 0); 4) (4, 0, 0),

(-3, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 0); 5) (0, 3, 0), (0, 2, 0), (0, -3, 0), (0, 0, 0); 6) (0, 0, 5), (0, 0, 1), (0, 0, 0). 2.61. OA=6; OB=14; OC=13; OD=25. 2.62. 7, 13, 5. 2.63. (5, 0, 0) ja (-11, 0, 0). 2.64. N(4, 1, 1). 2.65. A(-1, 2, 3). 2.66. $\vec{AB}=(-4, 3, -1)$, $\vec{BA}=(4, -3, 1)$. 2.67. $\vec{AB}=6\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{BC}=-3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{CA}=-3\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$. 2.68. Ei ole võimalik, kuna antud koordinaatidega vektorid on vabavektorid. Kolmnurga paralleelnihkel ruumis tema külgede projektsioonid telgedel ei muutu. 2.69. B(6, -4, 5), C(9, -6, 10), $\vec{CA}=(-7, 1, -7)$. 2.73. $\angle M_1M_3M_2$ on nürinurk. 2.74. Rööpküliku neljas tipp võib olla ühes järgmistest punktidest: $D_1(- , 4, -4)$, $D_2(1, -2, 8)$, $D_3(5, 0, -4)$. 2.75. D(9, -5,6). 2.76. Märkus. $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$, s.o. küljed AB ja DC on võrdsed ja paralleelsed. 2.78. (a, a, -a), (a, -a, a), (-a, a, a), (-a, -a, a). 2.79. Vt. joon. 2.18.

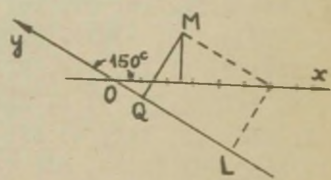


Joon. 2.18.

2.81. 1) $d \approx 7,21$; 2) $d \approx 8,77$; 3) $d \approx 6,79$; 4) $d \approx 4,81$.

2.82. $\omega = \frac{\pi}{3}$. 2.83. $d_1=2$; $d_2=3$. Märkus. (Vt. joon. 2.19). $d_1=MP=AM\sin(\pi-\omega)=y\sin\omega=4\cdot1/2=2$; $d_2=MQ=AL=OA\sin(\pi-\omega)=x\sin\omega=6\cdot1/2=3$.

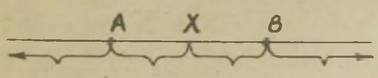
2.84. $M_1(3, 2)$, $M_2(-3, 2)$, $M_3(-3, -2)$ ja $M_4(3, -2)$. Märkus. Ülesandel on neli lahendit, kuna pole määratud, millises veerandis punkt asub. 2.85. 1) $X=-6$, $Y=6\sqrt{3}$; 2) $X=3\sqrt{3}$, $Y=-3$; 3) $X=\sqrt{2}$, $Y=-\sqrt{2}$.



Joon. 2.19.

2.86. -2. 2.87. $\frac{3\sqrt{3} - 4}{2}$. 2.88. 4. 2.89. 1) -5; 2) 5.
2.90. $(\pm 3, \pm 3)$, $(0, \mp 3)$, $(0, 0)$, $(\pm 3, 0)$. 2.91. $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, $D(1, \sqrt{3})$, $E(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$, $F(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.
2.92. $C(5, 3)$, $D(2, 7)$ ja $C(-1, -5)$ ja $(-4, -1)$.
2.93. $(a, 0)$, $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{3}\, a)$, $(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}\sqrt{3}\, a)$, $(-a, 0)$, $(-\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}\ 3\, a)$, $(\frac{1}{2}a, -\frac{1}{2}\ 3\, a)$. 2.94. $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(\frac{1}{3}, 1)$, $D(0, 1)$, $O(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $S(0, \frac{3}{2})$. 2.96. $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$.
2.97. 1) $\frac{3}{2}$; 2) -1; 3) $-\frac{4}{3}$; 4) 0; 5) ei ole määratud.

2.98. $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 3$; $\lambda_2 = \frac{CB}{BA} = \frac{1}{3}$; $\lambda_3 = \frac{AC}{CB} = -4$; $\lambda_4 = \frac{BC}{CA} = -\frac{1}{4}$; $\lambda_5 = \frac{BA}{AC} = -\frac{3}{4}$; $\lambda_6 = \frac{CA}{AB} = -\frac{4}{3}$. 2.99. $(ABC) = -\frac{3}{5}$, $(ACB) = -\frac{2}{5}$, $(BCA) = \frac{2}{3}$, $(BAC) = -\frac{5}{3}$, $(CAB) = -\frac{5}{2}$, $(CBA) = \frac{3}{2}$. 2.100. $(ACB) = -1 - \lambda$, $(BAC) = \frac{1}{\lambda}$, $(BCA) = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$, $(CAB) = -\frac{1}{1+\lambda}$, $(CBA) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$. 2.101. $(PQA) = -\frac{\lambda(1+\mu)}{\mu(1+\lambda)}$, $(PQB) = -\frac{1+\mu}{1+\lambda}$. 2.102. $\frac{(1+\nu)(\mu - \lambda)}{(1+\lambda)(\nu - \mu)}$.
2.103. $(ABR) = \frac{\lambda + \mu + 2\lambda\mu}{2 + \lambda + \mu}$. 2.104. Vt. joon. 2.20.



Joon. 2.20.

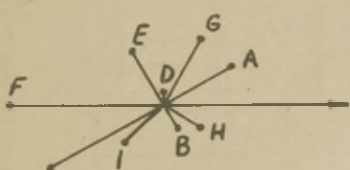
$A = X$; $\lambda = \frac{AX}{XB} = \frac{AA}{AB} = 0$.

$B = X$; $\lambda = \frac{AX}{XB} = \frac{AB}{BB} = \infty$.

$X \to \infty$; $\lambda = \frac{AX}{XB} = \frac{AB + BX}{XB} = \frac{AB}{XB} - 1$; $\lambda \to -1$.
2.105. $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. 2.106. 1) 6; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 0. 2.107. $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. 2.108. 1) $\frac{21}{4}$; 2) $\frac{21}{5}$; 3) 0; 4) 3; 5) $\frac{9}{2}$.
2.109. $B(-4, 2)$. 2.110. 1) $\frac{17}{3}$; 2) $-\frac{13}{4}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 7; 5) 3; 6) 0. 2.112. 1) $M(-11)$; 2) $N(13)$. 2.113. (5) ja (12).
2.114. $A(7)$ ja $B(-41)$. 2.115. 7. 2.116. $x \approx 52{,}8$ cm (täpsusega kuni 1 mm). Märkus. Tugipunkt peab ühtima kangi tasakaalupunktiga, s.t. mõjuvate jõudude rakenduspunktide vaheline lõik tuleb jaotada nende jõududega pöördvõrdelisteks osadeks. 2.117. $x = 1{,}05$ m. Märkus. Toele B mõjub poole lati kaal, s.o. 40 kG. Järelikult koormusest 200 kG võib toele B

langeda 110–40=70 kG ning toele A ülejäänud 130 kG. Võtame punkti A koordinaatide alguspunktiks ning jaotame lõigu AB suhtes 70:130=7:13. 2.118. Mitte lähemale kui 47,5 cm. 2.119. Kuus erinevat väärtust: ν, $\nu-1$, $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\frac{1}{\nu}$, $\frac{1}{1-\nu}$ ja $\frac{\nu}{\nu-1}$; 1) $-\mathrm{tg}^2\alpha$, $-\sec^2\alpha$, $\mathrm{cosec}^2\alpha$, $-\mathrm{ctg}^2\alpha$, $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$; 2) −1, 2 ja 1/2. 2.120. 1) 0; 2) $-\frac{11}{9}$; 3), 5) ei ole määratud; 4) 1. 2.121. $C'(\frac{1}{3})$, $B'(3\frac{2}{3})$, $A'(1\frac{4}{9})$. Märkus. Kui punkt C jaotab lõigu AB suhtes λ, siis punktiga C neljas harmooniline paari A ja B suhtes jaotab sama lõigu suhtes $-\lambda$. 2.122. $D(\frac{8}{5})$. 2.125. Märkus. Leida suhe, milles lõigu A_3A_4 keskpunkt jaotab lõigu A_1A_2. 2.126. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{4}$. 2.127. 1) $(-\frac{8}{3}, \frac{5}{3})$; 2) (9, 5); 3) $(-\frac{22}{3}, \frac{1}{3})$; 4) $(\frac{1}{4}, \frac{5}{2})$. 2.128. $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3$; $\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$. 2.129. 1) (−1, 5); 2) (0, 0); 3) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 2.130. B(0, −7). 2.131. x=4; y=−3. 2.132. Külgede AB, BC ja AC keskpunktid on vastavalt (2, −4), (−1, 1), (−2, 2). 2.133. M(4, −2,5), N(2, 1), O(1, −3,5). 2.134. 1) (−4, 5), (8, 1), (0, −3); 2) (−3, 3), (7, 5), (−3, −3); 3) (1, −3), (3, 1), (−5, 7). 2.135. $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$ ja $\sqrt{41}$. 2.136. 13. 2.137. $AD = \frac{\sqrt{157}}{2}$. 2.138. 1) $A_1(0, 6)$, $B_1(5, 5)$, $C_1(1, 7)$; 2) $A_1(4,25, -3)$, $B_1(8, -3,75)$; $C_1(4,75, -5,25)$. 2.139. 1) C(10, 9), D(4, −4); 2) (5, −3), (1, −5); 3) O(10,5, 10), D(4, −3). Märkus. Rööpküliku diagonaalid poolituvad lõikepunktis. Kui on antud lõigu teine otspunkt ja keskpunkt, võib otsitavaid tippe määrata kui lõigu otspunkte. 2.140. $A_3(-4, -1)$, $A_4(1, -4)$. 2.141. 1) M(1, 3); 2) N(4, −3). 2.142. (2, −1) ja (3, 1). 2.143. C(0, −1), D(4, −4). 2.144. A(−1, 0) ja B(5, 6). 2.145. A(3, −1) ja B(0, 8). 2.146. $M_1(5,4, 2,8)$, $M_2(7,8, 3,6)$, $M_3(10,2, 4,4)$, $M_4(12,6, 5,2)$. Märkus. Jaotame lõigu AB neljas erinevas suhtes: $\lambda_1 = \frac{1}{4}$; $\lambda_2 = \frac{2}{3}$; $\lambda_3 = \frac{3}{2}$; $\lambda_4 = \frac{4}{1}$. 2.147. (−2, 1). Märkus. Otsitav punkt jaotab iga mediaani tipust arvates suhtes 2:1.

2.148. $(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3})$. 2.149. (3, -4), (4, -2), (3, -6), (2, -4). 2.150. M(-1, 0) ja C(0, 2). 2.151. $B_1(11, 0)$, $C_1(8, 11{,}5)$. Märkus. Otsitavad tipud jagavad lõigud AB ja AC suhtes $\lambda = -\frac{5}{3}$. 2.152. $\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KM}=3$, $\overrightarrow{BK}:\overrightarrow{KN}=\frac{3}{5}$. Märkus. Võtta vektorid $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{AB}$ afiinse reeperi baasivektoriteks. 2.153. M(1, 2). Märkus. Tähistame suhte, milles otsitav punkt M(x, y) jagab diagonaali, tähega λ. Seda suhet võib arvutada punktide A, C ja M abstsisside või ordinaatide kaudu. Kuna mõlemad suhted peavad olema võrdsed suhtega λ, saame võrrandi, mis seob koordinaate x ja y. Teise võrrandi saame, võttes abstsisside ja ordinaatide suhted võrdseks suhtega λ_1, milles punkt M jagab diagonaali BD. 2.154. $(4\frac{1}{2}, 1)$. 2.155. 1:3, punktist B arvates. 2.156. D(8, -18). 2.157. (2, -1, -1), (-1, -2, 2), (0, 1, -2). 2.158. 7. 2.159. C(6, 1, 19), D(9, -5, 12). 2.160. A(-1, 2, 4), B(8, -4, 2). 2.161. C(1, 5, 2), D(3, 2, 1), E(5, -1, 0), F(7, -4, -1). 2.162. x=4, y=-1, z=3. 2.163. (0, 1, -2). 2.164. B=(10, 0, 2,6). 2.165. $\lambda_1 = \frac{7}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$. 2.166. $A_0(\frac{14}{3}, -8, 12)$, $A_2(\frac{4}{3}, -2, 2)$, $A_3(-\frac{1}{3}, 1, -3)$, $A_5(-\frac{11}{3}, 7, -13)$. 2.167. Vt. joon. 2.21. 2.169. 1),2),3) ringjoontel, mille keskpunktid asetsevad pooluses ning raadiused on vastavalt 1, 5 ja a; 4),5),6),7) - kiirtel, mis lähtuvad poolusest ja moodustavad polaarnurga 30°, 60°, 90°, φ.

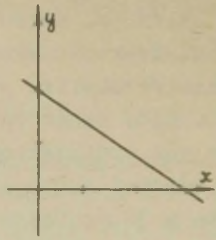


Joon. 2.21.

2.170. 1) $B(5, \frac{5\pi}{3})$; 2) $C(5, \frac{4\pi}{3})$. 2.171. 1) $(1, \frac{5}{4})$, $(3, \frac{5\pi}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{5\pi}{6})$, $(\rho, \varphi + \pi)$; 2) $(1, \frac{7\pi}{4})$, $(3, \frac{4\pi}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{6})$, $(\rho, 2\pi - \varphi)$. 2.172. $(3, -\frac{\pi}{4})$, $(2, \frac{\pi}{2})$, $(3, \frac{\pi}{3})$, (1, -2), (5, 1). 2.173. $(5, -\frac{\pi}{2})$, $(2, \frac{2}{3}\pi)$, $(4, -\frac{1}{6}\pi)$, $(3, \pi - 2)$. 2.174. $(1, -\frac{2\pi}{3})$. 2.175. $(6, \frac{\pi}{9})$. 2.176. $C(3, \frac{5\pi}{9})$,

)$-2x + 3y = 6$

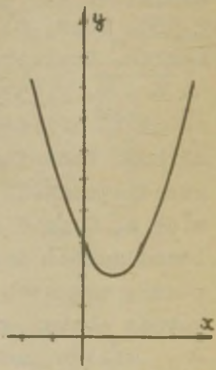
x	y
0	2
1	4/3
2	2/3
3	0
4	-2/3
...	...
-1	8/3
-2	10/3
...	...



Joon. 2.22.

4) $y = (x-1)^2 + 2$

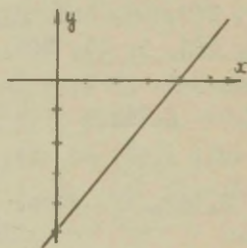
x	y
0	3
1	2
2	3
3	6
4	11
..	...
-1	6
-2	11
..	...



Joon. 2.25.

2) $y = x - 5$

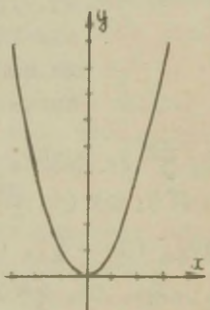
x	y
0	-5
1	-4
2	-3
...	...
5	0
6	1
...	...
-1	-6
...	...



Joon. 2.23.

3) $y = x^2$

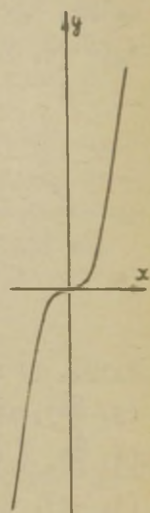
x	y
0	0
±1	1
±2	4
±3	9
...	...
±1/2	1/4
±1/4	1/16



Joon.2.24.

5) $y = x^3$

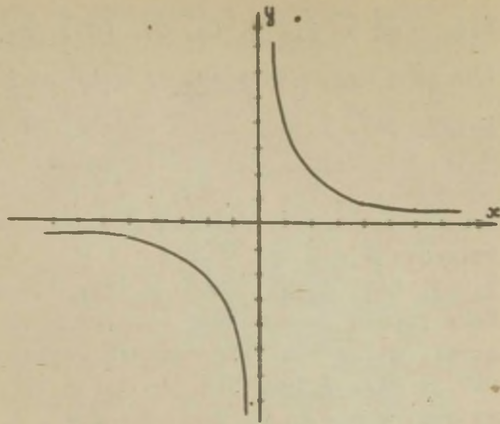
x	y
0	0
1	1
2	8
3	27
...	...
-1	-1
-2	-8
-3	-27
...	...
1/2	1/8
...	...



Joon. 2.26.

a) $xy = 4$

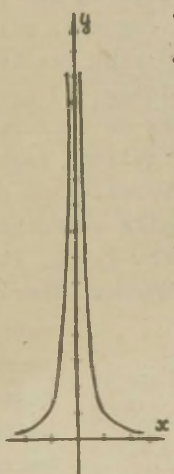
x	y
1	4
1/2	8
1/4	16
$x \to 0$	$y \to \infty$
2	2
3	$1\frac{1}{3}$
4	1
6	2/3
8	1/2
...	...
−1	−4
−1/2	−8
...	...



Joon. 2.27.

b) $y = \frac{1}{x^2}$

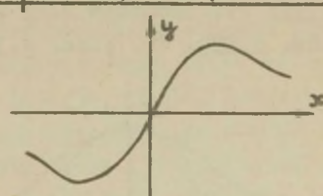
x	y
±1	1
±2	1/4
±3	1/9
±4	1/16
...	...
±1/2	4
±1/3	9
±1/4	16
...	...



Joon. 2.28.

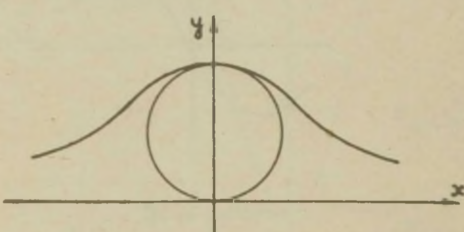
c) $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$

x	y	x	y
0	0	−1	−2
1	2	−2	−8/5
2	8/5	...	...
3	12/10	1/2	8/5
4	16/17	1/3	12/10
5	20/26	1/4	16/17
...	...	...	...



Joon. 2.29.

$D(5, -\frac{11}{14})$. 2.177. $(a, 0)$, $(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$, $(2a, \frac{\pi}{3})$, $(a\sqrt{3}, \frac{\pi}{2})$, $(a, \frac{2\pi}{3})$, $(0, \frac{0}{0})$. 2.178. $d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$. 2.179. $d=7$. 2.180. $AB=\sqrt{3}$, $CD=10$, $EF=5$. 2.181. $M_1(1, 0)$ ja $M_2(7, 0)$. 2.182. $9(17-4\sqrt{3})$. 2.183. $2(13+6\sqrt{2})$. 2.184. $AB=BC=CA=7$. 2.185. $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\left[\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$. Märkus. Kolmnurga pindala arvutamiseks kasutame trigonomeetrilist valemit: $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$. 2.186. 5. 2.187. $S=1$. 2.188. $28\sqrt{3}$. 2.189. $S = 6(5\sqrt{3} - 3)$. Märkus. Teha joonis ja arvutada otsitav pindala, kasutades kolmnurki, mille üks tipp asetseb pooluses, s.o. kolmnurki OAB, OBC ja OAC. 2.190. $3(4\ 3 - 1)$. 2.192. 1) $d=2$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$; 2) $d=6$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$; 3) $d=4$, $\varphi = \frac{5}{6}\pi$. 2.193. 1) 3; 2) -3; 3) 0; 4) 5; 5) -5; 6) 2. 2.194. Punktid A ja C asuvad kõveral, punkt B mitte. 2.195. Kõvera võrrandis puudub vabaliige. 2.196. 1) Koordinaatnurga poolitaja; 2) teise ja neljanda koordinaatnurga poolitaja; 3) mõlemad nurgapoolitajad; 4) imaginaarne kõver, millel on üks reaalne punkt – koordinaatide alguspunkt; 5) ringjoon, mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ning raadius on a; 6) sirge, mis on paralleelne abstsisstteljega; 7) kaks sirget, mis on paralleelsed y-teljega; 8) kaks koordinaattelge; 9) kolm sirget: ordinaattelg $(x=0)$ ja sellega kaks paralleelset sirget; 10) kaks sirget: üks on paralleelne ordinaatteljega $(x+a=0)$ ning teine on paralleelne abstsissteljega $(y-b=0)$. 2.197. Vt. joonised 2.22 – 2.26. 2.198. Vt. joonised 2.27 – 2.29. 2.199. Vt. joon. 2.30. Märkus. Võrrandist järeldub

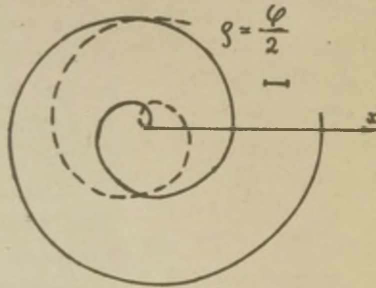


Joon. 2.30.

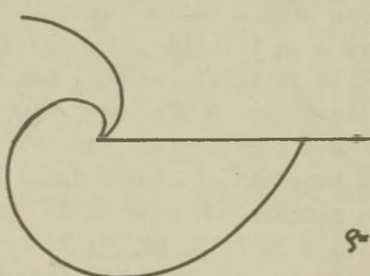
vahetult, et kõver on sümmeetriline y-telje suhtes ega lõika x-telge ($y=0$ ei rahulda võrrandit). Kui $a>0$, asub kõver tervikuna ülemises pooltasandis: $y = \frac{8a^3}{4a^2+x^2}$. Viimasest avaldisest näeme, et abstsissi x kasvades kahaneb ordinaat y. Kui x=0, siis y=2a. Peale esialgset uurimist määrame veel arvutamise teel mõned jooksvad punktid ning veendume, et kõveral on joonisel 2.30 esitatud kuju. Kõvera konstrueerimiseks tuleb anda konstandile a mingi väärtus. 2.200. Vt. joon. 2.31. 2.201. 1) Ringjoon, mille keskpunkt asub pooluses ja raadius on 5; 2) poolusest lähtuv kiir, mis moodustab polaarteljega nurga $\frac{\pi}{3}$; 3) poolusest lähtuv kiir, mis moodustab polaarteljega nurga $-\frac{\pi}{4}$; 4) sirge, mis on risti polaarteljega ning eraldab sellel lõigu a=2 (arvestades poolusest); 5) sirge, mis asetseb ülemisel pooltasandil, on paralleelne polaarteljega ning asetseb sellest 1 ühiku kaugusel; 6) ringjoon, mille keskpunkt on $C_1(3, 0)$ ning raadius 3; 7) ringjoon, mille keskpunkt on $C_2(5, \frac{\pi}{2})$ ning raadius 5; 8) joon koosneb kahest poolusest lähtuvast kiirest, kusjuures üks moodustab polaarteljega nurga $\frac{\pi}{6}$, teine nurga $\frac{5}{6}\pi$; 9) joon koosneb kontsentrilistest ringjoontest, mille keskpunktid asuvad pooluses ning raadiused arvutatakse valemiga $r=(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, kus n on suvaline mittenegatiivne täisarv. 2.202. Vt. joon. 2.32 ja tabel. Märkus. Kui anname polaarkoordinaatidele negatiivseid väärtusi, saame kõvera teise haru, mis on märgitud punktiiriga. Konstrueerimisel pole vajadust arvutada kohavektori ligikaudseid väärtusi, piisab, kui võtta lõik pikkusega π ning leida näidatud osad. 2.203. Vt. joon. 2.33 ja 2.34. 2.204. Pooluse juurde jääva lõigu pikkus on $\frac{\pi}{2}$ ning iga järgmise pikkus on 6π (vt. joon. 2.35). 2.205. Viieks osaks (vt. joon. 2.36) 2.206. Vt. joon. 2.37. 2.207. Vt. joon. 2.38 ja 2.39. 2.209. Vt. joon. 2.40. 2.210. Vt. joon. 2.41. (81, 4). 2.211. $x=a(t-\sin t)$; $y=a(1-\cos t)$. Lahendus. Vt. joon. 2.42. $x=OA=OB-AB=MB-MP=at-a\cdot\sin t=a(t-\sin t)$; $Y=AM=BC=PC=a-a\cdot\cos t=a(1-\cos t)$

Joon. 2.31.

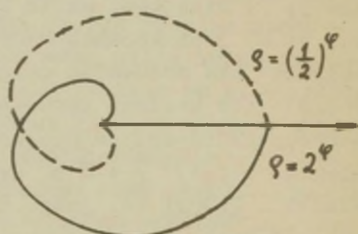
	(Nr. 2.202)
0	0
$\pi/12$	...
$\pi/6$	$\pi/12 \approx 0{,}26$
$\pi/4$	$\pi/8 \approx 0{,}39$
$\pi/3$	$\pi/6 \approx 0{,}52$
$\pi/2$	$\pi/4 \approx 0{,}79$
$2\pi/3$	$\pi/3 \approx 1{,}05$
$3\pi/4$	$3\pi/8 \approx 1{,}18$
π	$\pi/2 \approx 1{,}57$
$5\pi/4$	...
$4\pi/3$	...
$3\pi/2$	$3\pi/4 \approx 2{,}36$
$5\pi/3$	...
2π	$\approx 3{,}14$
$5\pi/2$	...
3π	$3\pi/2 \approx 4{,}71$
4π	$2\pi \approx 6{,}28$
...	...



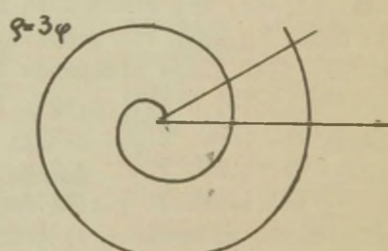
Joon. 2.32.



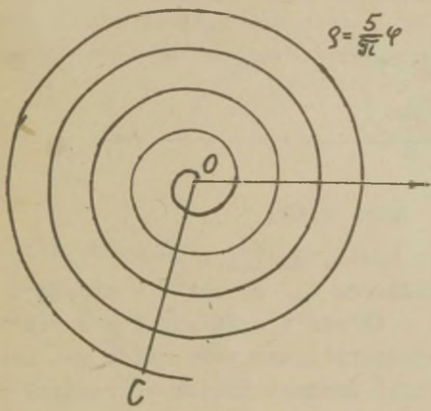
Joon. 2.33.



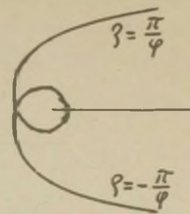
Joon. 2.34.



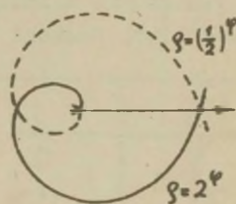
Joon. 2.35



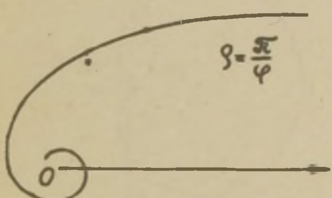
Joon. 2.36.



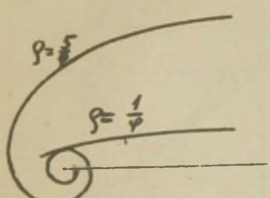
Joon. 2.39.



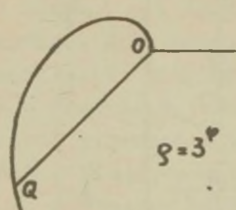
Joon. 2.40.



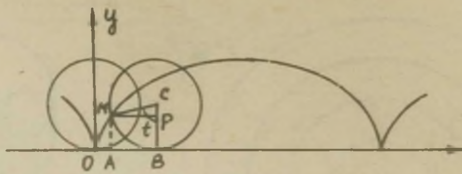
Joon. 2.37.



Joon. 2.38.



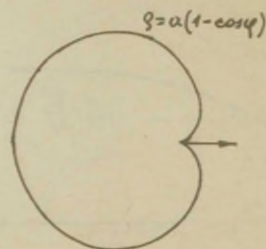
Joon. 2.41.



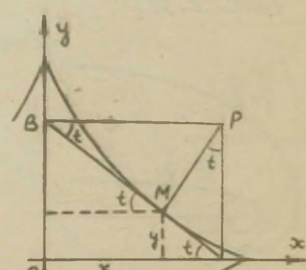
Joon. 2.42.

<u>2.212.</u> Vt. joon. 2.43 ja tabel. <u>2.213.</u> $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, vt. joon. 2.44. Lahendus. $x=MB\cdot\cos t = BP\cdot\cos^2 t = AB\cdot\cos^3 t = a\cos^3 t$; $y = AM\cdot\sin t = AP\cdot\sin^2 t = AB\cdot\sin^3 t = a\cdot\sin^3 t$. Seega saime astroidi parameetrilised võrrandid: $x=a\cos^3 t$ ja $y=a\cdot\sin^3 t$. Elimineerides nendest kahest võrrandist parameetri t, saamegi vastuses antud astroidi võrrandi.

φ	ϱ
0	0
$\frac{\pi}{12}$	...
$\frac{\pi}{6}$	...
$\frac{\pi}{4}$	...
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{a}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	a
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3a}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	...
π	$2a$
$\frac{5\pi}{4}$	...
$\frac{4\pi}{3}$	...
$\frac{3\pi}{2}$	a

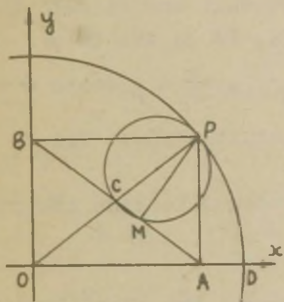


Joon. 2.43.

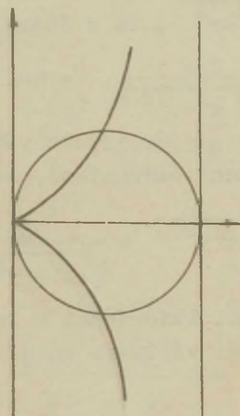


Joon. 2.44.

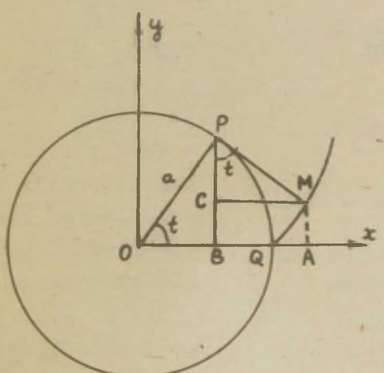
2.214. Vt. joon. 2.45. Märkus. Ristküliku tipp P kirjeldab liikumatu ringjoone, mille raadius on OP=a. Punkte P, M ja C läbiva ringjoone raadius on $\frac{a}{4}$ ja viimane veereb ilma libisemata mööda esimast ringjoont. Et selles veenduda, on küllaldane tõestada, et $\smile MP = \smile PD$. 2.215. Vt. joon. 2.46.



Joon. 2.45.



Joon. 2.46.



Joon. 2.47.

2.216. Vt. joon. 2.47. $x=a(\cos t+t\cdot\sin t)$; $y= = a(\sin t - t\cos t)$. Märkus. Kuni mahakerimiseni niidi otspunkt asetseb punktis Q. Mahakerimisel pingutatud niit ühtib ringjoone puutujaga, kusjuures puutuja pikkus on $PM = \smile PQ = at$.

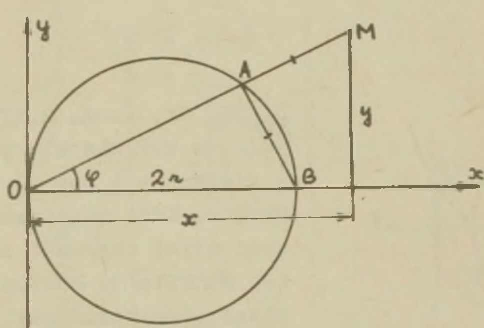
2.217. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ või $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$.
2.218. $x^2\cdot y^2=(y+a)^2(b^2-y^2)$. Märkus. Et teha kindlaks seos muutuvate koordinaatide ja antud parameetrite a ja b vahel, kasutame kolmnurkade sarnasust. 2.219. $y(x^2+y^2)=$ $=a(x^2-y^2)$. Vt. eelmine ülesanne. 2.220. $\rho=2r\cos^3\varphi$ või $(x^2+y^2)^2=2rx^3$. 2.221. Kahe ringjoone kaared on:
1) $(x-a)^2+(y-a)^2=2a^2$, kui $y>0$ ja 2) $(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2$, kui $y<0$. Lahendus (joon. 2.48). Vastavalt kõvera definitsioonile: OX=OA+AX=OA+AB. Avaldame OX, OA ja AB: $OX=$ $=\sqrt{x^2+y^2}$, $OA=2a\cos\varphi=\dfrac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $AB=\pm 2a\sin\varphi=$ $=\pm\dfrac{2ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (+ kui $\varphi>0$ ja järelikult $y>0$; − kui $\varphi<0$ ja järelikult $y<0$). Asetades saadud lõikude avaldised põhivõrrandisse, saame

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2ax}{\sqrt{x^2+y^2}}\pm\frac{2ay}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

või $x^2+y^2-2ax\pm$ $\pm 2ay=0$. Täiendades x ja y sisaldavad liikmed täisruutudeks, saamegi vastuses antud ringjoone võrrandi.

2.222. $y^2=$ $=\dfrac{x^3}{2r-x}$.

2.223. $\rho=$ $=a\sin 2\varphi$ või $(x^2+y^2)^3=$ $=4a^2x^2y^2$. Kõver kujutab nelja kroonlehega õit südamikuga koordinaatide alguspunktis, s.t. koosneb neljast koordinaatide alguspunktist lähtuvast aasast.



Joon. 2.48.

2.224. $\rho = a\cos\varphi + b$ või $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. Kogu kõvera saame ainult siis, kui punkt A joonestab kaks korda ringjoone. 2.225. $f(x,y)=2ax-a^2$. 2.226. 1) $f(x,y)=2ax$; 2) $f(x,y)=-2ax-a^2$. 2.227. $f(x,y)=4x^2+4y^2+2a^2$. 2.228. $f(x,y)=4x^2+4y^2-4ax-4ay+4a^2$.

III peatükk
MITTELINEAARTEHTED VEKTORITEGA

3.1. 1) 7; 2) 14; 3) 12; 4) 26; 5) 4; 6) $\frac{27}{2}$; 7) 13. 3.2. (32, 0); (-8, 0). 3.3. (0, -8) või (0, -2). 3.4. (5,2) või (2, 2). 3.5. 5. 3.6. $P=15+5\sqrt{5}$; $S=25$. 3.7. 150. 3.8. $4\sqrt{2}$. 3.9. $AB=BC$; $S=7$. 3.10. 20. 3.11. 7,4. 3.12. $C_1(-7, -3)$, $D_1(-6, -4)$ või $C_2(17, -3)$, $D_2(18, -4)$. 3.13. $C_1(-2, 12)$, $D_1(-5, 16)$ või $C_2(-2, 2/3$, $D_2(-5, 14/3)$. 3.14. $AB=DC$ ja $AB \parallel DC$; $h=2{,}2$. Märkus. Kõrguse arvutamiseks avaldame pindala kahel erineval viisil. 3.15. 12,5. Näpunäide. Hulknurga pindala arvutamiseks jagame hulknurga kolmnurkadeks. 3.16. 1) 20; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; 4) 18; 5) -3. 3.17. $\vec{x}\vec{y}=-5$. Lahendus. $\vec{x}\vec{y}=(3\vec{p}-2\vec{q})(\vec{p}+4\vec{q})=3\vec{p}^2+12\vec{p}\vec{q}-2\vec{p}\vec{q}-8\vec{q}^2= =3-8=-5$, sest vastavalt tingimusele $\vec{p}^2=\vec{q}^2=1$ ja $\vec{p}\vec{q}=\vec{q}\vec{p}=0$. 3.18. $\vec{p}\vec{q}=9$. 3.19. $|\vec{p}|=\sqrt{\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2}$. 3.20. $|\vec{a}|=5$. 3.21. $\frac{\pi}{3}$. 3.22. Märkus. Leida skalaarkorrutis $\vec{p}\vec{c}$ ning teha kindlaks, kas see on null. 3.24. $\alpha=\pm\frac{3}{5}$. 3.25. $\alpha=40$. 3.26. 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37; 7) 73. 3.27. $|\vec{p}|=10$. 3.28. 143. 3.29. 104. 3.30. -3/2. 3.31. $\vec{x}\vec{y}+\vec{y}\vec{z}+\vec{z}\vec{x}=-13$. 3.32. -19. 3.33. $|\vec{c}|=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\vec{b}\cos\gamma}$. Märkus. Nurk $\angle(\vec{a}\vec{b})$ on kolmnurga välisnurk, tema täiendnurk on tähistatud γ. 3.34. $|\vec{x}+\vec{y}|=15$; $|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{593}$. 3.35. $|\vec{AM}|=6$; $|\vec{AD}|=\frac{12\sqrt{5}}{5}$. Märkus. Kõigepealt tuleb mediaani ja kõrguse vektor avaldada kolmnurga külgede kaudu ning seejärel ühikvektorite kaudu: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+1/2\overrightarrow{BC}$ ja $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\pm\overrightarrow{BC}$, kus λ tuleb arvutada $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BC}$ ristseisu tingimuse järgi. 3.36. Märkus. On küllaldane näidata, et rombi puhul, kui

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$, diagonaalide skalaarkorrutis on null.
3.37. $|\vec{R}|=\sqrt{37}$. 3.38. Resultantjõud on võrdne nulliga.
3.39. $\angle(\vec{x},\vec{y}) = \frac{\pi}{4}$. 3.40. $A = \frac{\pi}{2}$; $B = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ja $C = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$. 3.41. $|\vec{x}|=7$, $\cos\angle(\vec{x},\vec{i})= \frac{6}{7}$, $\cos\angle(\vec{x},\vec{j})= -\frac{2}{7}$, $\cos\angle(\vec{x},\vec{k})= \frac{3}{7}$. 3.42. $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$. 3.43. $\cos \varphi = 4/5$. Märkus. Avaldada kõigepealt mediaanid kaatetite kaudu.
3.44. $\cos \alpha = 4/5$. Märkus. Avaldada mediaanvektorid servvektorite kaudu. 3.45. $p_{\vec{y}}\vec{x} = \frac{\vec{x}\vec{y}}{y}$, $\cos\angle(\vec{y}\vec{i}) = \frac{5}{13}$, $\cos\angle(\vec{y},\vec{j}) = -\frac{12}{13}$. 3.46. Ei. Ülesande tingimusest järeldub, et vektor $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}+\vec{w}$ on risti projektsioonteljega.
3.47. $\overrightarrow{BD} = \frac{\vec{b}\vec{c}}{c^2}\vec{c}-\vec{b}$. 3.48. $\vec{h} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{a^2}\vec{a}-\vec{b}$. 3.49. Tasand, mis on risti vektoriga $\vec{a}$ ja eraldab sellel alates punktist A lõigu pikkusega $\frac{\alpha}{a}$. 3.50. Kahe sellise tasandi lõikesirge, mis on risti vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ sihtidega ning eraldab nendel alates punktist A vastavalt lõigud $\frac{\alpha}{a}$ ja $\frac{\beta}{b}$.
3.51. $\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{a}^2\vec{b} + \vec{b}^2\vec{a}}{\vec{c}^2}$, Märkus. Punkt H jaotab hüpotenuusi AB suhtes $\overrightarrow{AH}:\overrightarrow{HB}= \lambda =a^2:b^2$. 3.53. $CD^2= \frac{\lambda}{1+\lambda} a^2 + \frac{1}{1+\lambda}b^2 - \frac{1}{(1+\lambda)^2}c^2$, kus a, b, c on kolmnurga kolme külje pikkused. 3.54. Märkus. Iga vektor esitada tema algus- ja lõpp-punkti kohavektorite kaudu. 3.55. Märkus. Vt. eelmist ülesannet. 3.56. Rööpküliku diagonaalide ruutude summa on võrdne külgede ruutude summaga. 3.57. Siin on kaks võimalust: 1) vektor $\vec{b}$ on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{c}$; 2) vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{c}$ on kollineaarsed. 3.58. 1) Ei kehti, sest vektori $\vec{a}$ korrutis arvuga a ei ole arv, vaid on vektoriga $\vec{a}$ kollineaarne vektor; 2),5),6),7) kehtivad; 3) ei kehti (vt.1); 4),8) kehtivad ainult kollineaarsete vektorite korral.
3.61. 1) -3; 2) 0; 3) 1. 3.62. $\vec{x}=(6, 4)$. 3.63. 1) 181; 2) (-196, 12). 3.64. 1) $\sqrt{137}$; 2) 5; 3) 11; 4) 13.
3.65. 5; 10; 5; 13. 3.66. 1) 5; 2) $\sqrt{34}$; 3) 13; 4) $\sqrt{2}$.
3.67. (14, 0) ja (0, 14/3). 3.68. $M_1(6, 0)$ ja $M_2(-2, 0)$.
3.69. $M_1(0, 28)$ ja $M_2(0, -2)$. 3.70. (0, -10).
3.71. (7, 0), (-17, 0), $(0,9+10\sqrt{2})$, $(0, 9-10\sqrt{2})$. 3.72. AB=5; BC=13; $CA=8\sqrt{2}$. 3.74. Ülesande tingimust rahuldavad kaks ruutu, mis on sümmeetrilised külje AB suhtes, ühe

ruudu tipud on $C_1(-5, 0)$, $D_1(-2, -4)$ ning teisel ruudul $C_2(3, 6)$ ja $D_2(6, 2)$. 3.75. 137. 3.76. B(0, 4) ja D(-1, -3). 3.77. 34. 3.78. B(2, 5) ja D(16, 3). 3.79. 1) 45°; 2) 90°; 3) 135°; 4) 180°. 3.80. 1) $\cos\varphi=0$, $\sin\varphi=-1$, $\varphi=270^\circ+360^\circ k$;

2) $\cos\varphi=-\frac{3}{\sqrt{58}}$, $\sin\varphi=\frac{7}{\sqrt{58}}$, $\varphi=\arccos(-\frac{3}{\sqrt{58}})+2k\pi$;

3) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi=315^\circ+360^\circ k$;

4) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi=45^\circ+360^\circ k$;

5) $\cos\varphi=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi=60^\circ+360^\circ k$;

6) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{145}}$, $\sin\varphi=\frac{12}{\sqrt{145}}$, $\varphi=\arcsin\frac{12}{\sqrt{145}}+2k\pi$;

k omab kõiki täisarvulisi väärtusi. 3.82. $AB=\sqrt{10}$; $AC=\sqrt{50}$; $BC=\sqrt{40}$; $AC^2=AB^2+BC^2$. 3.83. 1) Nürinurkne; kuna $PR^2>PQ^2+QR^2$; 2) täisnurkne; 3) nürinurkne; 4) teravnurkne.

3.84. 13, 15. 3.85. $\angle ABC=\angle BAC=\frac{\pi}{4}$; $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$. 3.86. Märkus. Arvutada kolmnurga külgede pikkused ning kasutada seejärel koosinusteoreemi. 3.87. $P_1(1, 0)$ ja $P_2(6, 0)$. 3.88. $x' = X\cos\varphi - Y\sin\varphi$, $y' = X\sin\varphi + Y\cos\varphi$.

3.89. $C(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}, -2\sqrt{3})$. 3.90. $(\frac{3}{\sqrt{130}}, \frac{11}{\sqrt{130}})$.

3.91. -8. 3.92. 1) (0,6, -0,8); 2) (-0,6, 0,8).

3.93. $M_1(8, 0)$ või $M_2(-1, 3\sqrt{3})$.

3.94. $(x_0+(x_1-x_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n} - (y_1-y_0)\sin\frac{2\pi(k-1)}{n}$, $y_0+(x_1-x_0)\sin\frac{2\pi(k-1)}{n} + (y_1-y_0)\cos\frac{2\pi(k-1)}{n})$.

3.95. $a_1\cos\omega_1+a_2\cos\omega_2+a_3\cos\omega_3$, $a_1\sin\omega_1+a_2\sin\omega_2+a_3\sin\omega_3$. 3.96. $(x_0+d_1\cos\varphi_1+\ldots+d_n\cos\varphi_n$, $y_0+d_1\sin\varphi_1+\ldots+d_n\sin\varphi_n)$. 3.97. $\vec{a}\vec{b}=-20$. 3.98. 1) 31; 2) 6; 3) 0. 3.99. 1) 22; 2) 6; 3) 7; 4) -200.

3.100. 1) 716; 2) -721; 3) -353. 3.101. 1) (21, 42, 21); 2) 280; 3) (115, 242, 137). 3.102. 1) -524; 2) 13; 3) 3; 4) $(\vec{AB},\vec{AC})\cdot\vec{BC}=(-70, 70, -350)$ ja $\vec{AB}(\vec{AC},\vec{BC})=(-78, 104, -312)$.

3.103. $|\vec{a}|=7$. 3.104. $|\vec{a}+\vec{b}|=6$, $|\vec{a}-\vec{b}|=14$.

3.105. $\vec{a}_0=\frac{1}{13}(3, 4, -12)$, $\vec{b}_0=\frac{1}{7}(6, -2, -3)$, $\vec{c}_0=\frac{1}{11}(6,7,-6)$.

3.106. $z=\pm 3$. 3.107. Vektor $\overrightarrow{AB}$ on kaks korda pikem vektorist CD. Nad on samasuunalised. 3.108. $5\sqrt{2}$; $\sqrt{34}$; $\sqrt{41}$; 5. 3.109. $d=3$. 3.110. $A_1A_2=A_1A_3=A_3A_4=14$; $A_1A_4=\sqrt{6}$; $A_2A_3=3\sqrt{6}$; $A_2A_4=2\sqrt{5}$. 3.111. (0, 0, 14/9). 3.112. (0, 1, −2). 3.113. 9. 3.114. $S=8(3+\sqrt{3})$. 3.115. 1) 90°; 2) 135°.

3.116. 1) $\cos\alpha = \frac{5}{21}$; 2) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. 3.117. 1) $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$; 2) $\cos\alpha = \frac{3}{13}$, $\cos\beta = -\frac{4}{13}$, $\cos\gamma = \frac{12}{13}$. 3.118. 1),3) võib; 2) ei või. 3.119. 1),3) Ei või; 2) võib. 3.120. 60° või 120°. 3.121. $a=(1, -1, \sqrt{2})$ või $a=(1, -1, -\sqrt{2})$. 3.122. $M_1(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $M_2(-\sqrt{3},-\sqrt{3},-\sqrt{3})$. 3.123. $x_1=3+4\sqrt{3}$; $y_1=4$ või $x_2=3-4\sqrt{3}$; $y_2=-4$. 3.124. $c=(-3,15,12)$. 3.125. $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 3.126. 45°.

3.127. $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$. 3.130. $\alpha = -6$. 3.131. $\vec{p}=\pm\frac{1}{5}(0,-4, 3)$. 3.132. $\vec{x}=(-24, 32, 30)$. 3.133. $\vec{x}=(-4, -6, 12)$. 3.134. $\vec{x}=\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. 3.135. $\vec{x}=(-3, 3, 3)$. 3.136. $\vec{x}=(2,-3, 0)$. 3.137. $(5/\sqrt{2}, -11/\sqrt{2}, 4/\sqrt{2})$. 3.138. 1) 6; 2) 3. 3.139. $\sqrt{3}$. 3.140. −3. 3.141. −5. 3.142. $X=\sqrt{2}$, $Y = 1$, $Z = -1$. 3.143. −4. 3.144. 5. 3.145. −11. 3.146. 3. 3.147. $-6\frac{5}{7}$. 3.148. $\vec{x}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$. 3.149. $\vec{x}=(2, 7, 3)$.

3.150. $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$. 3.151. 17. Märkus. Selle jõu töö avaldub valemiga $w=\vec{f}\vec{s}$. 3.152. 31. 3.153. 13.

3.154. $X=-\frac{14}{3}$, $Y=-\frac{14}{3}$, $Z=-\frac{7}{3}$. 3.155. 5. 3.156. $d=2$.

3.157. $AM=7$. 3.158. $x=-8$, $y=5$. 3.159. (0, 0), (1, 0), (2, 1), (2, 2), (1, 2), (0, 1). 3.160. $AB=5$; $AC=2\sqrt{21}$; $BC=7$. 3.161. $C_1\left(\frac{9}{2}, -\frac{1+4\sqrt{3}}{2}\right)$ või $\left(\frac{9}{2}, \frac{-1+4\sqrt{3}}{2}\right)$. Märkus. Otsitav tipp C peab rahuldama järgmisi tingimusi: CA=AB ja CB=AB. 3.162. $\omega = \frac{\pi}{3}$. 3.163. $M_1(-1, 10)$, $M_2(-13, -2)$, $M_3(-7+2\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3})$, $M_4(-7-2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3})$. Märkus. Kõik otsitavad punktid asetsevad antud keskpunktist C 6 ühiku kaugusel, peale selle ühe diameetri puhul $\varphi = \omega - \varphi$ ning teise puhul $\varphi = \pi + (\omega - \varphi)$. 3.164. $S=3{,}25$. 3.165. $\omega = 30^\circ$ või $\omega = 150^\circ$. 3.166. 1) $\omega = \frac{\pi}{2}$, $|\vec{e}_1|= 2$, $|\vec{e}_2|= 1$; 2) $\omega = \frac{\pi}{3}$, $|\vec{e}_1|= 1$, $|\vec{e}_2|=1$; 3) $\cos\omega = \frac{4}{5}$, $|\vec{e}_1|= 2$, $|\vec{e}_2|= 5$;

4) $\cos\omega = -\frac{4}{5}$, $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 5$. 3.167. $|\vec{a}| = 78$. 3.168. $|\vec{a}| = 30$. 3.169. $\vec{b}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$, $\vec{b}_2 = (-\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$.
3.170. $g_{11} = \vec{e}_1^{\,2} = 4$, $g_{22} = \vec{e}_2^{\,2} = 9$, $g_{12} = |\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos\omega = 2\cdot 3\,\frac{1}{2} = 3$,
$d = \sqrt{g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2} = \sqrt{4(-4)^2 + 2\;3\;(-4)\;6 + 9\;6^2} = \overline{244}$.
3.171. $AB = 6$, $AC = 4$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$. 3.172. $= \frac{5\pi}{3}$. 3.172. $|\vec{e}_1| = 2$, $|\vec{e}_2| = 1$, $\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{2\pi}{3}$. 3.174. $A'B' = 1$, $A'C' = 5$, $\cos A' = \frac{4}{5}$.
3.175. $y = -5$. Märkus. Lahendamiseks võib kasutada valemit lõigu AB pikkuse arvutamiseks üldises afiinses reeperis. Kui $A(x_1 y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ja lõik moodustab x-telje positiivse suunaga nurga φ, siis valem omab kuju:
$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\omega - \varphi)}$. 3.176. 1) 15; 2) 16. 3.177. $\vec{x}\vec{y} = \pm 30$. 3.178. 1) 3; 2) 27; 3) 300. 3.180. Vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ristseisu korral. 3.182. $\alpha = -15$. 3.184. Vektorid $\vec{y}$ ja $\vec{x}$ peavad olema kollineaarsed. 3.185. 24.
3.186. $(\vec{x}+\vec{y})\times(\vec{x}-\vec{y}) = 2\vec{x}\times\vec{y}$. See samasus näitab, et antud rööpküliku diagonaalidele ehitatud rööpküliku pindala on keks korda suurem esialgse rööpküliku pindalast. 3.187. $|\vec{a}\times\vec{b}| = 11$. 3.188. 37,5. 3.189. $CD = 3{,}8$. 3.190. $\sin\varphi = \sqrt{\frac{248}{273}}$.
3.191. $\vec{p}\vec{x}\vec{y} = \pm 6/7$ olenevalt sellest, kas $\vec{p}$, $\vec{q}$, ja $\vec{r}$ moodustavad parem- või pahempoolse kolmiku. 3.193. Märkus. Kasutada samasust: $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}$. 3.194. Vasaku käe kolm esimest sõrme moodustavad vasakpoolse kolmiku, parema käe samad sõrmed moodustavad parema käe kolmiku.
3.197. 1) $\vec{x}\times\vec{y} = \vec{z}$, $\vec{y}\times\vec{z} = \vec{x}$, $\vec{z}\times\vec{x} = \vec{y}$; 2) $\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{z}$, $\vec{y}\times\vec{z} = -\vec{x}$, $\vec{z}\times\vec{x} = -\vec{y}$.
3.201. Ei ole lahenduv kahel juhul: 1) kui $\vec{b} = 0$ ja $\vec{a} \neq 0$ ja 2) kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole teineteisega risti. Kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on teineteisega risti, siis rahuldab ülesande tingimusi lõpmata hulk vektoreid $\vec{x}$. Kõik nad on risti vektoriga $\vec{a}$. Nende seas on lühim vektor (risti vektoriga $\vec{b}$), mille pikkus on $|\vec{x}| = \frac{a}{b}$; ülejäänud lahendid saadakse antud vektorist, liites talle vektoriga $\vec{b}$ paralleelse suvalise vektori.
3.202. $\vec{x} = 3\vec{i} - 17\vec{j} - 4\vec{k}$. 3.203. $|\vec{x}| = 21$. 3.204. (6, -3, -3), (-12, -26, -8), (0, 0, 0). 3.205. 1) (5, 1, 7); 2) (10, 2, 14); 3) (20, 4, 28). 3.206. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (-7, 14, -7)$;

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(10, 13, 19)$. 3.207. 1) (6, -4, -6); 2) (-12, 8, 12). 3.208. $18\sqrt{2}$. 3.209. 14. 3.210. 5. 3.211. $\sin\varphi=\frac{5\sqrt{17}}{21}$. 3.212. (-6, -24, 8). 3.213. $\vec{m}=$ $=(45, 24, 0)$. 3.214. $\vec{x}=(7, 5, 1)$. 3.215. (2, 11, 7). 3.216. (-4, 3, 4). 3.217. 1) 15; $\cos\alpha=2/3$, $\cos\beta=-2/15$, $\cos\gamma=11/15$; 2) 28; $\cos\alpha=-3/7$, $\cos\beta=-6/7$, $\cos\gamma=2/7$. 3.218. $\sqrt{66}$. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta=-\frac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma=-\frac{7}{\sqrt{66}}$.

3.220. Märkus. Kui vektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ on komplanaarsed, siis segakorrutise arvutamisel võib z asendada $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ lineaarkombinatsiooniga. 3.224. Juhul kui vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ on üksteisega risti. 3.226. $v=4|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. 3.227. 1) $v=25$; 2) $v=0$. Märkus. Teise ülesande vastus on ilmne, kuna vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ $\vec{c}$ on komplanaarsed. 3.228. $h=\frac{49}{\sqrt{323}}$.

3.229. 1. 3.230. 1),4) parempoolne; 2),3),6) vasakpoolne; 5) vektorid on komplanaarsed. 3.231. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=24$. 3.232. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=$ $=\pm27$. Plussmärk on juhul, kui vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ kolmik on parempoolne, miinusmärk - kui vektorite kolmik on vasakpoolne. 3.233. 1) -11; 2) -7. 3.235. 3. 3.236. 11. 3.237. $D_1(0, 8, 0)$; $D_2(0, -7, 0)$. 3.238. 1),3) komplanaarsed; 2) mittekomplanaarsed.

3.239. $$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.242. Võrdus kehtib siis ja ainult siis, kui on täidetud vähemalt üks kahest tingimusest: 1) vektor $\vec{y}$ on risti vektoritega $\vec{x}$ ja $\vec{z}$; 2) vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{z}$ on kollineaarsed. 3.243. $(\vec{z}\times\vec{x})\vec{y}=0$. Märkus. On soovitav mitte kasutada kolme vektori komplanaarsuse valmis tingimust, vaid lahendada ülesanne, elimineerides võrdusest $\vec{z}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}$ kordajad λ ja μ. λ elimineerimiseks korrutame võrduste mõlemaid pooli vektoriaalselt $\vec{a}$-ga. μ elimineerimiseks korrutame saadud võrduse $\vec{b}$-ga (skalaarselt). 3.244. $\vec{x}=\frac{\alpha\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}}{ab}$. Lahendus. Korrutame võrduse $\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$ mõlemaid pooli vektoriaalselt vektoriga $\vec{a}$. Saame $(\vec{x}\times\vec{b})\times\vec{a}=\vec{c}\times\vec{a}$. Edasi $(\vec{x}\times\vec{b})\times\vec{a}=\vec{b}(\vec{x}\vec{a})-\vec{x}(\vec{b}\vec{a})=$

$= \vec{c}\times\vec{a}$. Arvestades, et $\vec{x}\vec{a}=\alpha$, saame $\alpha\vec{b}-\vec{x}(\vec{b}\vec{a})=\vec{c}\times\vec{a}$. Lahendades viimase võrrandi $\vec{x}$ suhtes, saame toodud vastuse.

<u>3.246.</u> $\vec{x} = \dfrac{\alpha(\vec{b}\times\vec{c})+\beta(\vec{c}\times\vec{a})+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}$. Lahendus. Korrutame esimest võrrandit arvuga β, teist arvuga α ja lahutame esimesest võrrandist teise. Saame $\vec{x}(\alpha\vec{b}-\beta\vec{a})=0$, s.t. $\vec{x}\perp(\alpha\vec{b}-\beta\vec{a})$. Analoogiliselt $\vec{x}(\beta\vec{c}-\gamma\vec{b})=0$, s.t. $\vec{x}\perp(\beta\vec{c}-\gamma\vec{b})$. Kui $\vec{x}$ on risti kahe vektoriga, siis ta on kollineaarne nende vektorite vektorkorrutisega $\vec{x}=\lambda(\alpha\vec{b}-\beta\vec{a})\times(\beta\vec{c}-\gamma\vec{b})=$ $=\lambda\beta\left[\alpha(\vec{b}\times\vec{c})+\beta(\vec{c}\times\vec{a})+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})\right]$. Kordaja λ leidmiseks korrutame võrduse mõlemaid pooli skalaarselt vektoriga $\vec{b}$ ja kasutame võrrandit $\vec{x}\vec{b}=\beta$, saame $\beta\lambda=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

<u>3.248.</u> 1) (-46, 29, -12); 2) (-7, 7, 7). <u>3.249.</u> (4,60,32). <u>3.250.</u> -104. <u>3.251.</u> 1) Kui $\alpha\neq 0$, siis võrdused on samaväärsed, s.o. võrdusest $\vec{x}=\vec{y}$ järeldub $\alpha\vec{x}=\alpha\vec{y}$ ja vastupidi. Teiste sõnadega, vektorvõrdust võib korrutada ja jagada nullist erineva arvuga; 2) esimesest võrdusest järeldub teine, kui vastupidine ei kehti. Võrdusest $\vec{x}\vec{z}=\vec{y}\vec{z}$ järeldub vaid, et $(\vec{x}-\vec{y})\vec{z}=0$, s.t. $(\vec{x}-\vec{y})\perp\vec{z}$; 3) esimesest järeldub teine, kuid mitte vastupidi. Võrdusest $\vec{x}\times\vec{z}=\vec{y}\times\vec{z}$ järeldub vaid, et $(\vec{x}-\vec{y})\parallel\vec{z}$; 4) võrdused on samaväärsed.

<u>2.252.</u> 3. <u>3.254.</u> $\alpha = 15$; $\gamma = -1/5$. <u>3.256.</u> $\vec{x}=\left(\dfrac{15}{\sqrt{17}},\dfrac{25}{\sqrt{17}},0\right)$ ja $\vec{x}=\left(-\dfrac{15}{\sqrt{17}},-\dfrac{25}{\sqrt{17}},0\right)$. <u>3.259.</u> 1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ on mittekomplanaarsed; 2) $\vec{l}$, $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ on komplanaarsed. <u>3.260.</u> $3\sqrt{10}$.

<u>3.261.</u> a = 7; $\cos\alpha = \frac{6}{7}$, $\cos\beta = -\frac{2}{7}$, $\cos\gamma = \frac{3}{7}$.

<u>3.262.</u> 1) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45^\circ + 360^\circ k$;

2) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = 315^\circ + 360^\circ k$;

3) $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 180^\circ + 360^\circ k$;

4) $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = -1$, $\operatorname{tg}\varphi$ pole määratud, $\varphi = 270^\circ + 360^\circ k$;

5) sama, mis 1); 6) $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{tg}\varphi = -3$.

<u>3.263.</u> 2. <u>3.265.</u> $C_1(4-\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$, $C_2(4+\sqrt{3},\ 2-2\sqrt{3})$.

<u>3.266.</u> $B_1(\frac{5}{2}, \frac{7}{3})$, $B_2(-\frac{5}{2}, -\frac{13}{3})$. Märkus. Pöörates vektorit

$\overrightarrow{AC}$ nurga φ = arctan $\frac{5}{6}$ võrra ning muutes ta pikkust $\frac{1}{2\cos\varphi}$ korda, saame vektori $\overrightarrow{AB}$. 3.267. M(-5, 4).
3.268. $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}$. 3.269. Keskpunkt on (-1, -2), raadius r=5. 3.270. cosA= $\frac{\sqrt{2}}{6}$; cosB= 4/21; cosC= $\frac{9\sqrt{2}}{14}$.
3.271. S = $\frac{5}{2}\sqrt{17}$. 3.272. X=-6, Y=-8, Z=-6. 3.273. D(-5,7), C(0, 9) või D'(-1, -3), C'(4, -1). 3.274. C(4, 3), D(-2, -5). Märkus. Olgu M diagonaali AB keskpunkt. Tippude C ja D leidmiseks pöörame vektorit $\overrightarrow{MB}$ kord nurga $\frac{\pi}{2}$, kord nurga $-\frac{\pi}{2}$ võrra. 3.275. B(2, 5), D(16, 3).
3.276. 1) $r_1+r_2-r_3$. 3.277. $\vec{r} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$. 3.278. $\vec{d}=\vec{a}+(\vec{c}-\vec{b})$, $\vec{r} = \frac{\vec{a}+\lambda\vec{c}}{1+\lambda}$, $\vec{p} = \frac{\vec{a}-\lambda\vec{b}}{1-\lambda}$. 3.279. $\vec{d}= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b}'= \vec{b} - \vec{a} + \vec{a}'$, $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{a} + \vec{a}'$, $\vec{d}' = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}'$. 3.280. $r= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$.
3.281. v=6. Vektorid $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ja $\vec{R}$ moodustavad vasakpoolse kolmiku, kuna nende segakorrutis on negatiivne.
3.282. $\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+ \dots +m_n\vec{r}_n}{m_1+m_2+ \dots +m_n}$. 3.284. $\vec{b}_1= \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3}$, $\vec{b}_2= \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3}$, $\vec{b}_3= \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3}$. 3.285. $\vec{b}_1$=(-2/3, 4/3, -1), $\vec{b}_2$=(1/3, 1/3, 1), $\vec{b}_3$=(2/3, -1/3, 1). 3.286. $\vec{R}$=(20, 9, 12); R=25; cos α = 20/25; cos β = 9/25; cos γ = 12/25.

Sisukord

Л.Туулметс

ПРАКТИКУМ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

I

На эстонском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г.Тарту, ул.Юликооли, 18

Vastutav toimetaja Ü. Lumiste
Korrektor M. Raisma

TRÜ rotaprint 1971. Paljundamisele antud 13.VII 1971.
Trükipoognaid 7,75. Tingtrükipoognaid 7,21. Arvestus-
poognaid 5,64. Trükiarv 600. Paber 30 x 42. 1/4.
MB 06478. Tell. nr. 610.

Hind 35 kop.

Hind 35 kop.