TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

MATEMAATILISE STATISTIKA INSTITUUT

Hanna Läänemets

Portfelli *VaR*'i hindamine mitme riskifaktori korral

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Kalev Pärna

TARTU 2015

Portfelli *VaR*’i hindamine mitme riskifaktori korral

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade investeerimisportfelli *Value at Risk*’i (*VaR*) hindamisest mitme riskifaktori korral. Tutvustatakse *VaR*’i mõistet ja omadusi ning põhilisi hindamismeetodeid. Mitme riskifaktoriga juhtumi puhul keskendutakse portfelli *VaR*’i hindamisele normaaljaotuse eeldusel. Viimasena käsitletakse analüütiliste meetodite kasutamist optsiooniportfellide korral.

Märksõnad: *VaR, piirkahju, riskianalüüs, riskitegurid*

Estimating portfolio’s VaR in case of multiple risk factors

The aim of this thesis is to provide an overview of portfolio Value at Risk (VaR) estimation in case of several risk factors. First, the definition, characteristics and main calculation methods of VaR are introduced. For risk factor VaR, the focus is on normal linear method. Finally, the implementation of analytical methods for option portfolios is explained.

Keywords: *Value at Risk, risk assessment, risk factors*

Sisukord

Sissejuhatus

1990. aastate alguses pankrotistusid mitmed suured ettevõtted finantsriskide kehva järelevalve ja juhtimise tõttu. Sellest ajendatuna hakati rohkem finantsriskide hindamisele rõhku pöörama. *Value at Risk*'i (riski all olev väärtus, piirkahju, edaspidi *VaR*) võttis esimesena kasutusele Ameerika suurpank J.P. Morgan, kes avalikustas oma tururiski hindamise süsteemi RiskMetrics 1994. aasta oktoobris.

Tänaseks on *VaR* tõenäoliselt kõige levinum meetod finantsriski suuruse hindamiseks. See on kaasa toonud elava arutelu, kuna paljud kvantitatiivsed analüütikud ja akadeemikud kritiseerivad *VaR*'i, sest see ei rahulda subaditiivsuse tingimust. Seetõttu on *VaR* vastuolus riskide maandamise põhimõttega, mis on üks kaasaegse portfelliteooria aluseid. Lisaks eksisteerib sarnane riskimõõt, tinglik *VaR* (nimetatakse ka keskmine suurkahju, inglise keeles *conditional VaR*, *expected shortfall*, *expected tail loss*), mis on subaditiivne. (Alexander, 2008b, lk 1)

Sellegipoolest on *VaR*'il ka positiivseid külgi (Alexander, 2008b, lk 1-2):

- see on lihtsasti mõistetav, kuna vastab kindlale summale, mida on võimalik valitud tõenäosusega kaotada;
- saab teha võrdlusi erinevate turgude ja riskide vahel;
- on universaalne riskimõõt, mis kehtib kõigi tegevuste ja riskitüüpide korral;
- saab hinnata igal tasemel: nii üksiku tehingu, portfelli kui firma koguriskide puhul;
- summeerides või osadeks lahutades võtab see arvesse sõltuvusi varade või portfellide vahel.

Käesolev bakalaureusetöö on jagatud kolmeks peatükiks. Esimeses peatükis esitatakse *VaR*'i definitsioon ning erinevad portfellitulususte arvutamise võimalused. Samuti kirjeldatakse kolme peamist *VaR*'i arvutamise meetodit, milleks on ajalooline, parameetriline ning Monte Carlo simulatsioonil põhinev meetod.

Teises peatükis antakse ülevaade portfelli *VaR*'i hindamisest juhul, kui portfellil on mitu riskifaktorit. Antud peatükis keskendutakse *VaR*'i arvutamisele normaaljaotuse eeldusel. Kolmandas peatükis kirjeldatakse deltameetodi ja delta-gammameetodi kasutamist optsiooniportfelli *VaR*'i hindamisel Euroopa tüüpi optsioonide korral.

Töö on kirjutatud tekstitöötlusprogrammiga Microsoft Word. Jooniste tegemiseks ja näidete läbiviimiseks on kasutatud statistikatarkvara R ning tabelarvutustarkvara Microsoft Excel. Töös kasutatud R'i koodid on lisas.

Autor tänab juhendajat professor Kalev Pärnat bakalaureusetööd puudutavate nõuannete ja täienduste eest.

1 *Value at Risk*

VaR on riskimõõt, mis hindab suurimat oodatavat kahju, mis ületatakse normaalse turusituatsiooni korral etteantud ajaperioodi h lõppedes etteantud tõenäosusega α. Matemaatilises mõttes on *VaR* seega kahjujaotuse $(1-\alpha)$-kvantiil. *VaR*'il on kaks peamist parameetrit:

- olulisusnivoo α (või usaldusnivoo $1-\alpha$);
- ajahorisont h, mille jaoks *VaR*'i mõõdetakse (tavaliselt mõõdetud kauplemis-päevades, mitte kalendripäevades). (Jorion, 2001, lk 108)

Olulisuse nivoo on tihti paika pandud välise asutuse, näiteks finantsreguleerija poolt. Rahvusvaheline pangandusregulatsioon Basel II Accord sätestab näiteks, et pangad peavad oma tururiski *VaR*'i hindamisel kasutama olulisusnivood 1%. Krediidireitingu agentuur võib seada veelgi rangema olulisusnivoo, näiteks 0,03%. Regulatsioonide puudumisel sõltub olulisusnivoo valik *VaR*'i kasutaja suhtumisest riski: mida konservatiivsem on kasutaja, seda kõrgemat usaldusnivood kasutatakse. (Alexander, 2008b, lk 14)

Ajaperiood h on erinevate riskide puhul samuti erinev ning sõltub vara likviidsusest, näiteks Baseli pangaregulatsioon sätestab 10päevase ajahorisondi. Mida likviidsem on vara, seda lühem peaks olema ajaperiood, mille kohta riski hinnatakse. Ajavahemikku peaks vähendama, kui *VaR*'i hinnatakse keerulistes turuoludes. (Alexander, 2008b, lk 14)

1.1 Kasumi ja kahjumi jaotus

Olgu antud portfell, näiteks erinevad aktsiad, võlakirjad või riskantsed laenud. Tähistame portfelli väärtuse ajahetkel t sümboliga P_t ning eeldame, et juhuslik suurus P_t on vaadeldav ajahetkel t. Ajaperioodi $[t, t+h]$ jooksul on portfelli kasum

$$P\&L_{[t,t+h]} \coloneqq P_{t+h} - P_t \,.$$

Kuigi *P&L* on vaadeldav ajahetkel $t+h$, on see ajahetkel t juhuslik suurus. *P&L*'i jaotust nimetatakse kasumi ja kahjumi jaotuseks (*profit and loss distribution*). (McNeil, Frey, Embrechts, 2005, lk 25-26)

VaR eeldab, et praegused positsioonid jäävad muutumatuks valitud ajaperioodi jooksul ning et me hindame positsioonide väärtuste määramatust ainult ajaperioodi lõpus. Eeldades, et portfelli struktuur jääb muutumatuks, hinnatakse teoreetilise *P&L* jaotuse määramatust. Empiiriline *P&L* näitab aga nii muutusi positsioonides kui ka kõikide tegelikkuses tehtud tehingute maksumust.

Esitamaks praegusel hetkel portfelli väärtust, mis võib realiseeruda h kauplemispäeva pärast tulevikus, tuleb kasutada diskonteerimist. *P&L* peaks seega olema väljendatud nüüdisväärtuses (*present value*), mis saadakse riskivaba intressimääraga (nt London Interbank Offered Rate LIBOR) diskonteerides.

Olgu ajahetkel t portfelli väärtus P_t ja olgu B_{ht} diskonteerimismäär. Portfelli diskonteeritud väärtus ajahetkel $t+h$ on $B_{ht}\,P_{t+h}$ ja diskonteeritud teoreetiline *P&L* h kauplemispäeva jooksul on seega

$$Diskonteeritud\ h\ päeva\ P\&L = B_{ht}\,P_{t+h} - P_t.$$

Kuigi portfelli ja diskonteerimismäära väärtused ajahetkel t on teada, pole portfelli väärtus ajahetkel $t+h$ teada, seega on diskonteeritud *P&L* juhuslik suurus. Sellise juhusliku suuruse jaotuse leidmine on esimene samm porfelli *VaR*'i arvutamisel. (Alexander, 2008b, lk 15)

1.2 Tulususte jaotus

Järgneva alapeatüki kirjeldamisel on autor tuginenud raamatule (Jorion, 2001, lk 99-101).

Sageli kasutatakse *VaR*'i arvutamisel *P&L* jaotuse asemel tulususte (*returns*) jaotust. Aritmeetiline ehk diskreetne tulususemäär r_t arvutatakse kujul

$$r_t = \frac{P_t + D_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \tag{1.1}$$

kus P_t on portfelli väärtus ajahetkel t ning D_t on igasugune vahepealne makse (näiteks dividend).

Kui tegu on pika ajahorisondiga tulusustega, kasutatakse enamasti geomeetrilisi tulususi, mis defineeritakse kui logaritmiline hinnasuhe:

$$R_t = \ln\frac{P_t + D_t}{P_{t-1}}.$$

Lihtsuse mõttes eeldame edaspidi, et vahepealsed maksed D_t puuduvad.

Geomeetriliste tulususte kasutamisel on kaks eelist. Esiteks võib see olla majanduslikus mõttes tähendusrikkam. Kui geomeetrilised tulusused on normaaljaotusega, siis ei saa tulususte jaotus kunagi viia vara negatiivse hinnani. Seda sellepärast, et jaotuse vasakpoolne saba ehk $\ln\frac{P_t}{P_{t-1}} \to -\infty$ juhul, kui $\frac{P_t}{P_{t-1}} \to 0$ ehk $P_t \to 0$. Normaaljaotusega aritmeetiliste tulususte jaotuse puhul aga $r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \to -\infty$ juhul, kui $\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 < -1$ ehk $P_t < 0$. Majanduslikult on see tähenduseta, sest millegi hind ei saa olla väiksem nullist.

Teine peamine eelis geomeetriliste tulususte kasutamisel on see, et neid saab lihtsalt laiendada erinevatele perioodidele. Näiteks olgu tulusused antud 2kuulise perioodi kohta. Logaritmilist tulusust saab lahutada kaheks osaks kui

$$R_{t,2} = \ln\frac{P_t}{P_{t-2}} = \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} + \ln\frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} = R_{t-1} + R_t.$$

Kahe kuu geomeetriline tulusus on seega lihtsalt kahe eraldi kuu tulususte summa. Diskreetsete tulususte korral pole osadeks lahutamine nii lihtne.

Paljudes olukordades on erinevused kahe tulususe vahel väikesed. Teame, et $R_t = \ln\frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln(1 + r_t)$. Kui r_t on väike, siis saab R_t arendada Taylori ritta kui $R_t = r_t - \frac{r_t^2}{2} + \frac{r_t^3}{3} + \cdots$, mis lihtsustub valemiks $R_t \approx r_t$. Seetõttu pole praktikas eriti vahet, kas kasutada diskreetset või pidevat tulusust, kui tulusused on väikesed. See ei pruugi aga kehtida turgude puhul, kus on suured muutused või kui ajahorisonti mõõdetakse aastates.

1.3 *VaR*'i matemaatiline definitsioon

Definitsioon 1.1. Olgu portfelli tulusus X jaotusfunktsiooniga $F_X(x) = P(X \leq x)$ ning olulisusnivoo $\alpha \in (0,1)$. Siis portfelli *VaR* avaldub kujul

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{q \in \mathbb{R} : P(X > q) \leq 1 - \alpha\} = -\inf\{q \in \mathbb{R}: F_X(q) \geq \alpha\}.$$

(McNeil, Frey, Embrechts, 2005, lk 38)

Kui portfelli keskmine tulusus on 0, siis $100\alpha\%$ *VaR* on diskonteeritud *P&L* jaotuse *α*-kvantiil. See tähendab, et $100\alpha\%$ h päeva *VaR* on summa, millest suurem kahju võib esineda tõenäosusega α, kui portfelli struktuur on järgmise h päeva jooksul muutumatu. Et hinnata *VaR*'i ajahetkel t, peame leidma diskonteeritud h päeva *P&L* jaotuse *α*-kvantiili $x_{ht,\alpha}$. Seega peame leidma sellise $x_{ht,\alpha}$, et $P(B_{ht}P_{t+h} - P_t < x_{ht,\alpha}) = \alpha$ ning siis $VaR_{ht,\alpha} = -x_{ht,\alpha}$. Kui *VaR*'i hinnatakse tulususe jaotusest, peame leidma sellise $x_{ht,\alpha}$, et $P\left(\frac{B_{ht}P_{t+h}-P_t}{P_t} < x_{ht,\alpha}\right) = \alpha$. (Alexander, 2008b, lk 16-17)

Kui *VaR*'i hinnatakse *P&L* jaotusest, esitatakse *VaR* arvulise suurusena, nt eurodes või dollarites. Kui *VaR*'i hinnatakse aga tulususte jaotusest, esitatakse see protsendina portfelli hetkeväärtusest. Vajadusel saab arvutada *VaR*'i arvulist väärtust, korrutades vastav protsent portfelli väärtusega.

1.4 *VaR*'i parameetriline hindamine

Kui on võimalik eeldada, et tulusused on mingi kindla jaotusega, nt normaaljaotusega, siis muutub *VaR*'i arvutamine üsna lihtsaks. Sellisel juhul saab *VaR*'i tuletada otse portfelli standardhälbest, kasutades tegurit, mis sõltub usaldusnivoost. Sellist meetodit kutsutakse parameetriliseks, kuna kasutatakse parameetrite nagu nt standardhälbe hindamist, selle asemel et leida empiirilise jaotuse kvantiil.

Oletame, et tahame arvutada *VaR*'i portfelli jaoks, mille diskonteeritud tulusused on sõltumatud ja normaaljaotusega. Tähistame lihtsuse mõttes tulususe X. Eeldame seega, et

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Standardiseerivat teisendust kasutades saame

$$P(X < x_\alpha) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma} < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right),$$

kus $Z \sim N(0,1)$. Seega kui $P(X < x_\alpha) = \alpha$, siis

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha.$$

Definitsiooni kohaselt aga $\mathrm{P}(\mathrm{Z} < \Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha$, seega

$$\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(\alpha),$$

kus Φ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon. Kuna $VaR_\alpha = -x_\alpha$ ja standardse normaaljaotuse sümmeetria tõttu $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha)$, saame

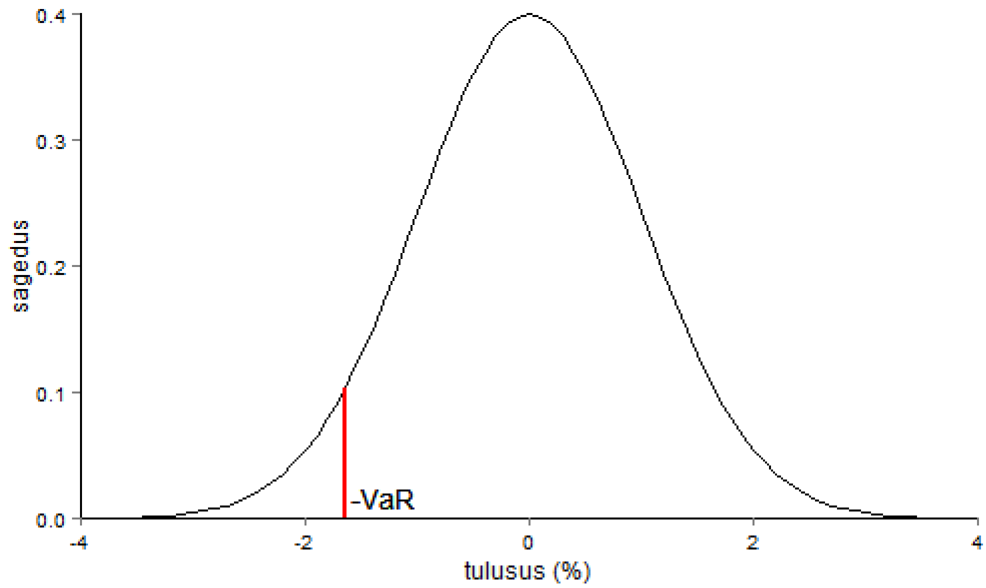
$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma - \mu. \tag{1.2}$$

See on valem $100\alpha\%$ VaR'i jaoks, kirjeldatuna protsendina portfelli väärtusest. Kui tahame VaR'i väljendada rahalises suuruses, peame vastavat protsenti korrutama portfelli praeguse väärtusega: $VaR_\alpha = P_t(\Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma - \mu)$. (Alexander, 2008b, lk 18-19)

VaR'i mõõdetakse tavaliselt lühikese ajaperioodi kohta ning siis saab eeldada, et portfelli keskväärtus selle aja jooksul on null. Sellisel juhul saab VaR'i arvutamise valem veelgi lihtsama kuju:

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma. \tag{1.3}$$

Joonis 1.1 kujutab 5% VaR'i juhul, kui portfelli tulusused on standardse normaaljaotusega. VaR on sellisel juhul $-x_{0,05} = 1,64\%$.



Joonis 1.1. 5% *VaR* juhul, kui tulusused on standardse normaaljaotusega

Näide 1.1. Olgu Prantsuse investoril 200 000€ väärtuses aktsiaid ühes Saksamaa aktsiaseltsis. Selle aktsia tulususe standardhälve 10päevase ajahorisondi puhul on 1,72%. 5% VaR on sellisel juhul

$$VaR_{0,05} = 200\,000 \cdot 1,72\% \cdot \Phi^{-1}(1-0,05) = 200\,000 \cdot 1,72\% \cdot 1,645 = 5\,658,80(€).$$

1.5 *VaR* erinevate ajahorisontide puhul

VaR'i hinnatakse tihti lühikese ajaperioodi, nt ühe päeva kohta, ning saadud tulemust kasutatakse, et kirjeldada pikema ajahorisondi *VaR*'i. Tuletame valemi, et arvutada 1 päeva *VaR*'i abil h päeva *VaR*.

Oletame, et mõõdame 1 päeva *VaR*'i ning portfelli päevased tulusused on sõltumatud ja normaaljaotusega. 1 päeva *VaR* on siis

$$VaR_{1,\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_1 - \mu_1,$$

kus μ_1 ja σ_1 on päevase tulususe keskväärtus ja standardhälve. Kasutame päevaseid diskonteeritud logaritmilisi tulususi

$$R_{1t} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \approx \ln\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right),$$

kus P_t tähistab portfelli väärtust ajahetkel t. Logaritmilisi tulususi kasutame, kuna need on aditiivsed: h päeva diskonteeritud logaritmiline tulusus on summa h järjestikusest päevasest diskonteeritud *log*-tulususest. Kuna normaaljaotusega juhuslike suuruste summa on samuti normaaljaotusega, on portfelli h päeva tulusused normaaljaotusega keskväärtusega $\mu_h = h\mu_1$ ja standardhälbega $\sigma_h = \sqrt{h}\sigma_1$. (Alexander, 2008b, lk 21)

Eeldades, et h päeva tulusused on ligikaudu normaaljaotusega, on h päeva *VaR* hinnatav valemiga

$$VaR_{h,\alpha} \approx \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{h}\sigma_1 - h\mu_1.$$

See lähend on üsna hea, kui h on väike, kuid ajahorisondi kasvades muutub *log*-tulususte kasutamine järjest ebatäpsemaks.

1.6 Ajalooline ehk mitteparameetriline meetod

Üks võimalus *VaR*'i hindamiseks lisaks parameetrilisele meetodile on kasutada ajaloolisi tulususi $X_{t-n+1}, \dots, X_t$. Esmalt järjestatakse kasutatavad tulusused kasvavalt. Teame, et $VaR_\alpha = -x_\alpha$. Üks võimalik hinnang *VaR*'ile on siis tulusus indeksiga $[n\alpha] + 1$, kus $[n\alpha]$ tähistab suurimat $n\alpha$ mitte ületavat täisarvu. Näiteks kui $\alpha = 0{,}95$ ning valimimaht $n =$

1000, siis *VaR*'i hinnanguks võetakse suuruselt 50. tulusus. (McNeil, Frey, Embrechts, 2005, lk 51)

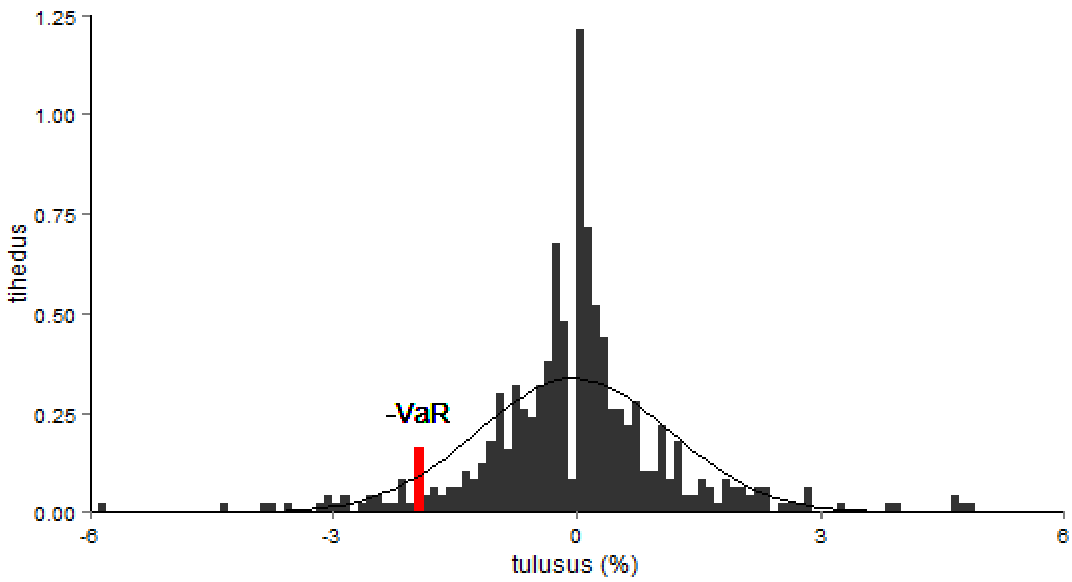
Soovides ühepäevaste tulususte põhjal hinnata h päeva *VaR*'i, võib kasutada ajaloolist simuleerimist. Ajalooline *VaR*'i mudel eeldab, et kõik tulevikus võimalikud stsenaariumid on minevikus läbi kogetud ning et ajaloo põhjal simuleeritud jaotus vastab tulevase ajaperioodi tulususte jaotusele. Selle meetodi puhul valitakse juhuslikult h tulusust vektorist $(X_{t-n+1}, \dots, X_t)$ ning leitakse uuritava vara tulususe hinnang $\hat{X}^h$ perioodiks h. Sooritades sama protseduuri palju kordi, saame leida portfelli h päeva tulususe empiirilise jaotuse. Sellest jaotusest saab hinnata *VaR*'i eelnevalt kirjeldatud viisil. (Alexander, 2008b, lk 42-43)

Näide 1.2. Joonisel 1.2 on esitatud ajaloolise meetodiga leitud 5% *VaR*'i hinnang Tallink Grupi (TAL1T) aktsiate tulususele. Ajaloolised tulusused on perioodist 16.04.2013-16.04.2015 ning andmed pärinevad Nasdaq Balti börsid veebilehelt. Mitteparameetrilise meetodiga leitud $VaR_{MP} = 1{,}96\%$.

Antud andmete põhjal on aktsia tulususte keskväärtuse ja standardhälbe hinnangud vastavalt $\mu = -0{,}04$ ja $\sigma = 1{,}18$. Kui hinnata aktsia 5% *VaR*'i parameetrilise meetodiga, saame

$$VaR_P = \Phi^{-1}(0{,}95) \cdot 1{,}18 - 0{,}04 = 1{,}99(\%).$$

Seega pole kahe meetodi *VaR*'i hinnangutes väga suurt erinevust, kuigi jooniselt 1.2 on näha, et tulususte jaotus erineb sama keskväärtuse ja standardhälbega normaaljaotusest tunduvalt.



Joonis 1.2. Ajaloolise meetodiga leitud hinnang Tallink Grupi tulususte *VaR*'ile

Ajaloolist *VaR*'i on lihtne kasutada, sest pole vaja teha mingeid eeldusi tulususte jaotuste kohta. Meetodi ainuke eeldus on, et tulususte jaotus on ajaperioodi möödudes identne minevikus olnud jaotusega. Kuna ajaloolise meetodi puhul pole vaja hinnata kovariatsioonimaatriksit, lihtsustab see oluliselt *VaR*'i arvutamist suurte portfellide korral (Jorion, 2001, lk 223).

Põhiline puudus ajaloolise simulatsiooni kasutamisel on tingitud valimimahust. Kui riskifaktorite ajaloos on puuduvaid andmeid või mudelisse lisandub mõni uus riskifaktor, võib ajalooliste andmete leidmisega olla probleeme (McNeil, Frey, Embrechts, 2005, lk 51). Valimimaht peaks olema võimalikult suur, sest vastasel juhul võivad andmestikust välja jääda harvaesinevad ekstreemsed väärtused, mis mõjutavad *VaR*'i oluliselt. Samas pole otstarbekas kasutada väga vanu andmeid, sest turuolukord ning uuritava vara käitumine võib olla muutunud (Alexander, 2008b, lk 44).

1.7 Monte Carlo simulatsioon

Ajaloolise ja parameetrilise *VaR*'i hindamise meetodi korral eeldatakse, et finantsturu käitumine tulevikus on samasugune nagu minevikus. Monte Carlo meetod võimaldab aga hinnata tulevikus asetleidvaid tulususi, kasutades näiteks mõnda vara hinnastamise mudelit või aegridade metoodikat (Unt, 2014, lk 20). Ajaloolisi andmeid kasutatakse selleks, et kalibreerida vastavat mudelit. Valitud meetodiga genereeritakse m võimalikku portfelli tulusust ning *VaR*'i hinnang leitakse seejärel sarnaselt mitteparameetrilise meetodiga (McNeil, Frey, Embrechts, 2005, lk 52).

Monte Carlo simulatsioonimeetod on väga paindlik ning seda saab kasutada ka mittelineaarsete portfellide (nt optsiooniportfellide) korral (Alexander, 2008b, lk 45). Samas nõuab see teiste meetoditega võrreldes oluliselt rohkem arvutusressursse. Lisaks on väga oluline valida tulususte simuleerimiseks õige mudel, et saada võimalikult täpsed hinnangud. Monte Carlo meetodi puhul tuleb simuleerida võimalikult palju tulususi, et vähendada valimimahust tingitud ebatäpsust (Jorion, 2001, lk 226).

2 *VaR*'i arvutamine mitme riskifaktori korral

Esimeses peatükis kasutati *VaR*'i hindamiseks portfelli kogutulusust ning saadi seega lineaarse portfelli täielik *VaR*. Praktikas hinnatakse portfelliriski enamasti aga portfelli riskifaktorite kaardistamise (*mapping*) abil, mis juhul hinnatakse süstemaatilist *VaR*'i (nimetatakse ka kogu riskifaktori *VaR*). *Specific VaR* ehk jäägi *VaR* mõõdab riski, mida kaardistamine ei hõlma.

Riskifaktorite kaardistamine tähendab, et tuleb konstrueerida mudel, mis seob portfelli tulususe või *P&L*'i erinevate riskifaktorite tulusustega (Alexander, 2008b, lk 25). Riskifaktorite muutuste kordajaid nimetatakse portfelli sensitiivsusteks riskifaktorite muutuste suhtes.

Riskijuhid kasutavad portfelli riskifaktorite kaardistust, kuna erinevate riskitegurite analüüsimine võimaldab efektiivselt riske maandada ning kapitali paigutada. Samuti on portfellid enamasti liiga suured, et mõõta *VaR*'i kõikide erinevate varade tulususte põhjal. Näiteks kui aktsiaportfellis on 1000 aktsiat, siis nõuaks *VaR*'i hindamine 1000 aktsia tulususe mitmemõõtmelise jaotuse hindamist. Riskifaktorite kaardistamise korral saab *VaR*'i hinnata aga vaid mõne riskifaktori tulususe abil.

Kui hindame portfelli *VaR*'i riskifaktorite kaardistamise abil, on *VaR*'i hindamise mudelil kolm riskiallikat (Alexander, 2008b, lk 25):

- riskifaktorite kaardistamise valik on subjektiivne ning sõltub riskijuhist;
- riskifaktorite kordajatel võivad olla hinnanguvead;
- kasutades riskifaktorite kaardistust, mõõdame ainult süstemaatilist *VaR*'i ning jätame hindamata riskifaktoritest mittesõltuva *VaR*'i.

2.1 Staatilised portfellid

Nagu varem öeldud, peab praeguse portfelli riski hindamiseks kindla ajahorisondi jooksul olema portfell selle aja jooksul muutumatu. Olgu meil portfell, mis koosneb k riskantsest varast ning olgu n_i portfellis oleva *i*-nda vara ühikute arv ja P_{it} *i*-nda vara väärtus ajahetkel t. Siis *i*-nda vara osakute väärtus ajahetkel t on $n_i \cdot P_{it}$ ja portfelli väärtus ajahetkel t on

$$P_t = \sum_{i=1}^{k} n_i \, P_{it}.$$

Portfelli i-nda vara kaal ajahetkel t on

$$w_{it} = \frac{n_i\, p_{it}}{P_t}.$$

Kui mõne portfellis oleva vara hind muutub, muutuvad automaatselt kõik portfelli kaalud. Rääkides portfelli muutumatusest, võib see tähendada kahte asja. Esiteks võime eeldada, et portfelli ei tasakaalustata: portfelli osakuid igal varal hoitakse püsivana, seega iga kord kui mõne vara hind muutub, muutuvad kõik portfelli kaalud. Teisel juhul tasakaalustatakse mõne vara hinna muutuse korral osakuid, et hoida portfelli kaalud konstantsena. Samad põhimõtted kehtivad ka, kui esitada portfelli tulusus riskifaktorite kaudu. (Alexander, 2008b, lk 20)

VaR'i hindamisel võib kasutada mõlemat eeltoodud varianti. Staatiline *VaR* eeldab, et tasakaalustamist ei toimu. Seda eeldust kasutatakse, kui *VaR* arvutatakse otse riskihorisondi kohta, mitte ei kasutata lühema ajahorisondi põhjal hindamist. Dünaamiline *VaR* eeldab, et portfelli tasakaalustatakse pidevalt, nii et portfelli kaalud (või riskifaktorite sensitiivsused) on ajahorisondi jooksul konstantsed. Sellisel juhul saab kasutada lühema ajaperioodi *VaR*'i põhjal arvutamise meetodit. (Alexander, 2008b, lk 21)

2.2 Portfelli *VaR* normaaljaotuse eeldusel

Parameetriline lineaarne *VaR*'i mudel (nimetatakse ka dispersioon-kovariatsioonmeetod, delta-normaalmeetod, analüütiline *VaR*'i mudel) sobib sellisele portfellile, mille tulususe või *P&L*'i jaotus on lineaarkombinatsioon riskifaktorite või varade tulusustest. Kõige lihtsam eeldus mudeli jaoks on, et riskifaktorite või varade tulusused on normaaljaotusega ning nende ühisjaotus on mitmemõõtmelise normaaljaotusega. Selliste eeldustega on võimalik tuletada küllaltki lihtne valem *VaR*'i arvutamiseks. (Alexander, 2008b, lk 42)

Olgu meil portfell, mis koosneb erinevatest varadest, mille positsioonid on valitud ajaperioodil fikseeritud. See tähendab, et portfelli tulusus on lineaarkombinatsioon portfellis olevate varade tulusustest, kus kaalud näitavad suhtelist kogust, mis investeeriti perioodi alguses. Portfelli *VaR*'i saab seega esitada kui kombinatsiooni portfellis olevate varade riskidest.

Olgu portfelli tulusus ajaperioodil $[t, t+1]$

$$R_{p,t+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t+1}, \tag{2.1}$$

kus N on portfellis olevate erinevate varade arv, $R_{i,t+1}$ on *i*-nda vara tulusus keskväärtusega μ_i ja standardhälbega σ_i ning w_i on vara kaal. Kaalu w_i saab arvutada, jagades vastava vara väärtuse P_i portfelli koguväärtusega P. Portfellitulusust saab üles kirjutada ka maatrikskujul:

$$R_p = w_1 R_1 + \cdots + w_N R_N = [w_1 w_2 \dots w_N] \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_N \end{bmatrix} = w^T R.$$

Portfelli oodatav tulusus (keskväärtus) on

$$E(R_p) = \mu_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i$$

ning dispersioon on

$$D(R_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij},$$

kus σ_{ij} on *i*-nda ja *j*-nda vara tulususte vaheline kovariatsioon.

Portfelli tulususe dispersiooni saab maatrikskujul kirjutada kui

$$\sigma_p^2 = [w_1 w_2 \dots w_N] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_N \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Tähistades kovariatsioonimaatriksi sümboliga Σ, saame portfelli tulususe dispersiooni kujul $\sigma_p^2 = w^T \Sigma w$.

VaR'i hindamiseks peame teadma portfelli tulususe jaotust. Kui eeldame, et kõik üksikute varade tulusused on normaaljaotusega, siis portfelli tulusus, mis on lineaarkombinatsioon normaaljaotusega juhuslikest suurustest, on samuti normaaljaotusega. Teame eelnevast, et normaaljaotuse korral $VaR_{ht,\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_{ht.}$ Seega kui portfelli algne väärtus on P, on portfelli *VaR*

$$VaR_p = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_p P = \Phi^{-1}(1-\alpha) P \sqrt{w^T \Sigma w}. \tag{2.3}$$

Iga portfellis oleva vara *VaR*'i saab muidugi ka üksikult hinnata kui

$$VaR_i = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_i|P_i| = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_i|w_i|P. \qquad (2.4)$$

Riskijuhid kaardistavad peaaegu alati portfelli mõne üksiku riskifaktori suhtes. Portfelli süstemaatiline tulusus või P&L on see osa tulususest, mis on kirjeldatud riskifaktorite muutuste poolt. Lineaarses portfellis saab seda esitada summana

$$Y = \sum_{i=1}^{m} \theta_i R_i,$$

kus R_i tähistab i-nda riskifaktori tulusust ning kordajad θ_i tähistavad portfelli sensitiivsust i-nda riskifaktori suhtes. (Alexander, 2008b, lk 63)

Et arvutada süstemaatilist *VaR*'i, peame teadma portfelli h päeva süstemaatilise tulususe (või $P\&L$'i) keskväärtust $E(Y_h)$ ja dispersiooni $D(Y_h)$. Neid saab leida analoogiliselt eelnevalt kirjeldatud meetodile, kuid nüüd kasutame varade tulususte asemel riskifaktorite tulususi. Tähistame riskifaktorite tulususte keskväärtuste vektori $\mu_h = (\mu_{1h}, \dots, \mu_{mh})^T$, portfelli praegused sensitiivsused m riskifaktori suhtes $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ ning riskifaktorite h päeva tulususte $m \times m$ kovariatsioonimaatriksi Ω_h. Portfelli h päeva süstemaatilise tulususe keskväärtus ja dispersioon on seega maatrikskujul võimalik üles kirjutada kui

$$E(Y_h) = \theta^T \mu_h, \qquad D(Y_h) = \theta^T \Omega_h \theta.$$

Normaaljaotusega lineaarne *VaR*'i mudel eeldab, et riskifaktorid on mitmemõõtmelise normaaljaotusega, seetõttu on keskväärtus ja dispersioon kõik, mida on jaotuse kirjeldamiseks vaja. Saame 100α% h päeva süstemaatilise *VaR*'i valemi kujul

$$VaR_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\theta^T \Omega_h \theta} - \theta^T \mu_h.$$

Sageli eeldatakse, et keskväärtus on null, siis

$$VaR_{h,\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\theta^T \Omega_h \theta}. \qquad (2.5)$$

Süstemaatilise *VaR*'i hindamiseks on seega vaja teada vaid praegust riskifaktorite sensitiivsuste hinnangut θ ning riskifaktorite h päeva tulususte kovariatsioonimaatriksi prognoosi Ω_h. Eeldades, et iga riskifaktor on sõltumatu ja normaaljaotusega juhuslik suurus, on $\Omega_h = h\Omega_1$. Seega ka süstemaatilise h päeva *VaR*'i puhul saab kasutada valemit

$$VaR_{h,\alpha} = \sqrt{h} \times VaR_{1,\alpha}.$$

Näide 2.1. Olgu USAs tegutseval investoril samasugune positsioon nagu kirjeldatud näites 1 (lk 11). On teada, et USD/EUR valuutakursi tulususe standardhälve on 10päevase ajahorisondi puhul 0,35%. Korrelatsioonikordaja kahe tulususe vahel on -0,1. Praegune valuutakurss on 1 EUR = 1,099 USD.

Kuna USA investor arvestab varasid dollarites, on lisaks aktsiahinnale riskiteguriks ka valuutakurss. Valemist (1.1) lähtudes $P_{t+1} = P_t(1 + r_t)$, kahe riskifaktori korral aga $P_{t+1} = P_t(1 + r_1)(1 + r_2)$. Kuna r_1 ja r_2 on väikesed arvud, siis $P_{t+1} \approx P_t(1 + r_1 + r_2)$. Portfelli tulusus on seega ligikaudu kahe riskifaktori tulususe summa ning saame kasutada praeguses peatükis tuletatud valemeid.

Kahe tunnuse vaheline korrelatsioon on definitsiooni kohaselt

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

seetõttu saame kahe riskifaktori korral portfelli dispersiooni kirjutada valemi (2.2) põhjal kui

$$\sigma_p^2 = (w_1\ w_2)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2\rho_{12}w_1w_2\sigma_1\sigma_2.$$

Positsiooni *VaR*'i saab seetõttu valemite (2.3) ja (2.4) abil esitada kujul

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12}VaR_1VaR_2}, \tag{2.6}$$

kus VaR_1 on aktsia hinna ja VaR_2 valuutakursi *VaR* ning ρ_{12} on aktsia hinna ja valuutakursi vaheline korrelatsioonikordaja. Seega

$$VaR_1 = 5\ 658{,}8 \cdot 1{,}099 = 6\ 219{,}02\ (\$),$$

$$VaR_2 = 200\ 000 \cdot 0{,}35\% \cdot 1{,}645 \cdot 1{,}099 = 1\ 265{,}50\ (\$),$$

$$VaR = \sqrt{6219{,}02^2 + 1265{,}5^2 + 2 \cdot (-0{,}1) \cdot 6219{,}02 \cdot 1265{,}5} = 6221{,}23\ (\$).$$

Portfelli riski (standardhälvet) saab vähendada, kui portfellis on palju varasid või nendevahelised korrelatsioonid on väikesed. Oletame, et kõikidel varadel on sama risk σ, kõik korrelatsioonid ρ on võrdsed ning iga vara on portfellis kaaluga $1/N$. Kahe tunnuse vaheline korrelatsioon on definitsiooni järgi

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

seega saame korrelatsioonimaatriksi Σ kirjutada kujul

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \cdots & \rho\sigma^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho\sigma^2 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Portfelli tulususe dispersioon on valemi (2.2) põhjal

$$\sigma_p^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \rho \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \cdot 1 + \frac{1}{N} \cdot \rho + \cdots + \frac{1}{N} \cdot \rho & \dots & \frac{1}{N} \cdot \rho + \cdots + \frac{1}{N} \cdot \rho + \frac{1}{N} \cdot 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix} =$$

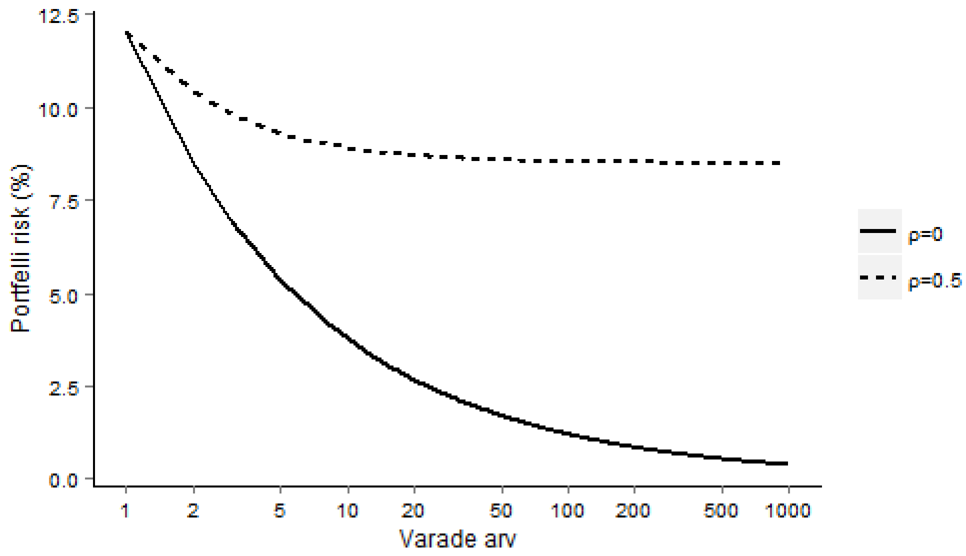
$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho & \dots & \frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \\ \frac{1}{N} \\ \vdots \\ \frac{1}{N} \end{pmatrix} =$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho\right) + \cdots + \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho\right) \right) = \sigma^2 \left(\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho \right).$$

Portfelli risk avaldub siis kujul

$$\sigma_p = \sigma \sqrt{\frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\rho}.$$

Olgu ühe vara risk näiteks 12%. Joonis 2.1 näitab, kuidas portfelli risk muutub portfellis olevate varade arvu kasvades, kui korrelatsioon on 0,5 ja kui korrelatsioon on 0.



Joonis 2.1. Portfelli riski muutumine varade arvu kasvades

Jooniselt 2.1 on näha, et madalad korrelatsioonid aitavad vähendada portfelli riski. Kui meil on näiteks kahe riskifaktoriga portfell ning faktorite vaheline korrelatsioon on 1, on portfelli *VaR* valemi (2.6) põhjal kahe riskifaktori *VaR*'ide summa:

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2VaR_1VaR_2 \cdot 1} = VaR_1 + VaR_2.$$

Kui aga korrelatsioon on 0, on portfelli *VaR* väiksem kui kahe riskifaktori *VaR*'ide summa:

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2} < VaR_1 + VaR_2.$$

2.3 Näide aktsiaportfelli *VaR*'i hindamisest

Järgneva alapeatüki eesmärk on kirjeldada reaalsete andmete korral aktsiaportfelli *VaR*'i hindamist normaaljaotuse eeldusel. Vaadeldakse kümmet Balti põhinimekirja kuuluvat aktsiat: Arco Vara (ARC), Baltika (BLT), Ekspress Grupp (EEG), Merko Ehitus (MRK), Nordecon (NCN), Olympic Entertainment Group (OEG), Silvano Fashion Group (SFG), Tallink Grupp (TAL), Tallinna Kaubamaja Grupp (TKM) ning Tallinna Vesi (TVE). Andmed pärinevad veebisaidilt www.nasdaqomxbaltic.com/market/. Portfelli *VaR*'i hindamiseks kasutatakse aktsiate kohandatud sulgemishindu (eurodes) ning logaritmilisi tulususi perioodil 16.04.2014-16.04.2015.

Oletame, et portfellis on 1000 aktsiat igalt ettevõttelt. Näide aktsiate väärtustest on esitatud tabelis 2.1.

Tabel 2.1. Näide *VaR*'i hindamiseks kasutatud andmestikust

Kuupäev	ARC	BLT	…	TKM	TVE
16.04.2014	1,170	0,464	…	5,240	13,200
17.04.2014	1,170	0,451	…	5,200	13,300
…	…	…	…	…	…
15.04.2015	1,170	0,384	…	5,920	14,700
16.04.2015	1,170	0,384	…	5,900	14,800

Portfelli väärtus VaR'i hindamise hetkel (16.04.2015) oli $P_P = 1000 \cdot (P_{ARC1T} + \cdots + P_{TVEAT}) = 39006(€)$. Aktsia i kaal w_i on aktsia väärtus jagatud portfelli koguväärtusega, näiteks Arco Vara aktsiate kaal portfellis on $1000 \cdot 1{,}17/39006 = 0{,}030$. Kaalude vektori w elemendid on esitatud tabelis 2.2.

Tabel 2.2. Kaalude vektori elemendid

Aktsia	ARC	BLT	EEG	MRK	NCN	OEG	SFG	TAL	TKM	TVE
Kaal	0,030	0,010	0,036	0,251	0,029	0,051	0,041	0,021	0,151	0,379

Teades kaalude vektorit ning aktsiate tulususi, saame valemi (2.1) põhjal arvutada portfelli tulususte hinnangud perioodil 16.04.2014-16.04.2015. Portfelli tulususte keskväärtus valimis on 0,053% ning standardhälve 0,516%. Normaaljaotuse eeldusel saame portfelli 5% *VaR*'i hinnanguks $39006 \cdot 1{,}645 \cdot 0{,}00516 = 331{,}1(€)$.

3 Optsiooniportfellide *VaR*’i hindamine

3.1 Sissejuhatus

Seni käsitlesime *VaR*’i arvutamist juhtudel, kus portfell sõltub vaid ühest riskitegurist või portfelli tulusus on avaldatav kui lineaarkombinatsioon erinevate riskifaktorite tulusustest. Need juhud ei kata aga kõiki praktikas esinevaid olukordi. Näiteks optsiooniportfellide puhul lineaarset mudelit kasutada ei saa, sest optsiooni hind pole lineaarses sõltuvuses alusvara hinnast.

Optsioon on väärtpaber, mis annab omanikule õiguse saada tulevikus rahasumma, mille suurus on määratud finantsturu käitumisega kuni selle õiguse realiseerimise momendini (Kangro, 2006, lk 2). Optsioonid jagunevad ostu- ja müügioptsioonideks vastavalt sellele, kas optsioon annab õiguse alusvara osta või müüa. Eristatakse Euroopa ja Ameerika optsioone: Euroopa tüüpi optsiooni täitmispäevaks on ainult üks konkreetne kuupäev tulevikus, Ameerika tüüpi optsioone saab aga rakendada pikema ajaperioodi vältel. Käesolevas bakalaureusetöös tegeletakse Euroopa tüüpi optsioonidega.

Näide 3.1. Optsiooni omanikul on õigus osta kuue kuu pärast tuhat Merko Ehituse aktsiat 9 000 euro eest. Sellisel juhul on tegemist Euroopa tüüpi ostuoptsiooniga.

Euroopa tüüpi ostuoptsioonide (*call*) hinnastamiseks kasutatakse tavaliselt Black-Scholesi valemit. Oletame, et ostuoptsioon annab omanikule õiguse ajal T osta ühe aktsia hinnaga E, r on riskivaba hoiuse protsent ning aktsia omanikule makstakse pidevalt protsentuaalset dividendi protsendiga D. Olgu $C(S,t,T)$ ostuoptsiooni hind ajahetkel t, alusvara hind ajahetkel t on S ning alusvara volatiilsus on σ. Siis

$$C(S,t,T) = Se^{-D(T-t)}\Phi(d_1) - Ee^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

kus

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - D + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

ja Φ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon. (Kangro, 2006, lk 7)

Hindamaks optsiooniportfelli riski, tuleb esmalt prognoosida portfelli võimalikke väärtusi tulevikus. Selleks kasutatakse riskifaktorite kaardistust, kuna siis saab portfelli *VaR*’i hinnata küllaltki kiiresti. Riskifaktorite sensitiivsused hindavad portfelli väärtuse muutumist, kui riskifaktor veidi muutub. Optsiooniportfellide kaardistamine riskifaktorite suhtes põhineb Taylori valemil. (Alexander, 2008a, lk 341)

Olgu funktsioon $f: D \to R$ lahtises intervallis D n korda diferentseeruv, olgu $a \in D$. Funktsiooni f Taylori valem punktis a on (Leiger, 2014, lk 73)

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(a,x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

kus $R_{n+1}(a,x)$ on jääkliige.

Optsiooniportfellide kaardistamisel kasutatakse mitme muutuja funktsiooni Taylori valemit. Olgu m muutuja funktsiooni $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletised $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$, $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ tähistab argumendi muutu. Avaldis

$$d_{\boldsymbol{A}}f(h_1, \ldots, h_m) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{A})h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\boldsymbol{A})h_m$$

on funktsiooni f täisdiferentsiaal punktis $\boldsymbol{A} = (a_1, \ldots, a_m)$.

Olgu m muutuja funktsioon $w = f(x_1, \ldots, x_m)$ määratud punkti $\boldsymbol{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ ümbruses $U_\delta(\boldsymbol{A})$ ning punktis $\boldsymbol{A}$ n korda diferentseeruv. Siis suvalise $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ korral avaldub m muutuja funktsiooni Taylori valem kujul (Leiger, 2010, lk 41)

$$f(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{A}) + d_{\boldsymbol{A}}f(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2!}d_{\boldsymbol{A}}^2 f(\boldsymbol{h}) + \cdots + \frac{1}{n!}d_{\boldsymbol{A}}^n f(\boldsymbol{h}) + \alpha_n, \tag{3.2}$$

kus α_n on jääkliige ning $\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{\alpha_n}{\|\boldsymbol{h}\|^n} = 0$.

Optsiooni kõige olulisemad riskitegurid on alusvara hinna muutus, selle hinnamuutuse ruut ning kaubeldava volatiilsuse muutus. Optsiooni sensitiivsusi erinevate riskifaktorite suhtes nimetatakse „kreeklasteks“ (*Greeks*). Need on osatuletised optsiooni hinnast erinevate riskifaktorite järgi. Järgnevalt kirjeldatakse enimlevinud „kreeklasi“.

3.2 „Kreeklased“

Käesoleva punkti kirjeldamisel on autor tuginenud tööle (Alexander, 2008a, lk 161-163).

Olgu mingi ühe alusvaraga optsiooni (mitte tingimata ülaltoodud ostuoptsioon) hind g, selle alusvara hind S ning volatiilsus σ. Optsiooni **delta** on optsiooni hinna esimene osatuletis alusvara hinna järgi:

$$\delta := \frac{\partial g}{\partial S}.$$

Delta näitab optsiooni väärtuse muutumist võrreldes alusvara väärtuse muutumisega. Mida rohkem erineb delta nullist, seda rohkem tõuseb optsiooni väärtus alusvara hinna muutudes.

Optsiooni **gamma** näitab delta muutumist alusvara hinna muutumise korral. See on esimene osatuletis deltast ning teine osatuletis optsiooni hinnast alusvara hinna S järgi:

$$\gamma := \frac{\partial^2 g}{\partial S^2}.$$

Teeta on osatuletis optsiooni hinnast aja järgi ning näitab, kuidas optsiooni hind muutub lõppemistähtajale lähemale jõudes:

$$\theta := \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Vega näitab optsiooni hinna muutust ühikulise alusvara volatiilsuse muutuse korral. See on osatuletis optsiooni hinnast alusvara volatiilsuse järgi:

$$\nu := \frac{\partial g}{\partial \sigma}.$$

Roo näitab optsiooni hinna muutuse seost intressimäära muutusega:

$$\pi := \frac{\partial g}{\partial r}.$$

Optsiooni positsiooni „kreeklased“ on defineeritud kui tavaline „kreeklane“ korrutatud alusvara ühikute arvuga (positsiooniga). Positsiooni delta on seega näiteks

$$\delta^P = \delta \times N.$$

Optsiooniportfellide kaardistamisel kasutatakse tihti „kreeklaste“ protsendiliste või positsiooniväärtuste asemel koguväärtusi (*value Greeks*), sest need on aditiivsed üle erinevate alusvarade.

Optsiooni ühiku väärtus (*point value*) on alusvara ühe ühiku väärtus. Optsiooni *P&L* avaldub kujul $P\&L = \Delta g \times pv$, kus Δg on optsiooni hinna muutus.

Delta koguväärtus (*value delta*) on tavaline delta korrutatud alusvara ühikute arvuga N, alusvara hinnaga S ja ühiku väärtusega:

$$\delta^{\$} = \delta \cdot N \cdot S \cdot pv = \delta^P \cdot S \cdot pv.$$

Sarnaselt saab defineerida gamma koguväärtuse (*value gamma*):

$$\gamma^{\$} = \gamma \cdot N \cdot S^2 \cdot pv = \gamma^P \cdot S \cdot pv.$$

3.3 Delta-gamma lähend ühe alusvara korral

Punktide 3.3-3.5 kirjeldamisel on autor tuginenud töödele (Alexander, 2008a, lk 344-346, 349-350) ning (Alexander, 2008b, lk 250-251).

Et hinnata optsiooniportfelli riski, peame teadma portfelli võimalikke väärtusi tulevikus. Optsiooniportfelli võimalike väärtuste prognoosimiseks kasutatakse mingisugust riskifaktorite kaardistust. Lihtne viis portfelli kaardistada on kasutada optsiooni deltat ja gammat. Kui kõik optsioonid portfellis on sama alusvaraga hinnaga S, saab portfelli hinna muutuse kirjutada Taylori valemi (3.1) abil kujul

$$\Delta P \approx \delta^P \Delta S + \frac{1}{2}\gamma^P (\Delta S)^2,$$

kus δ^P ja γ^P on portfelli kogu positsiooni delta ja gamma ning ΔS on alusvara hinna muutus. Seda valemit nimetatakse delta-gamma lähendiks.

Korrutades mõlemat võrrandi poolt alusvara ühiku väärtusega, saame valemi optsiooniportfelli *P&L*’i kohta:

$$P\&L \approx [\delta^P \Delta S + \frac{1}{2}\gamma^P (\Delta S)^2] \cdot pv.$$

Kuna $\delta^{\$} = \delta^P \cdot S \cdot pv$ ja $\gamma^{\$} = \gamma^P \cdot S \cdot pv$, siis saame eelneva valemi kujul

$$P\&L \approx \delta^{\$}R + \frac{1}{2}\gamma^{\$}R^2,$$

kus $R = \Delta S/S$ on alusvara tulusus.

3.4 Delta-gamma lähend mitme alusvara korral

Olgu meil optsiooniportfell, millel on n erinevat alusvara hindadega $S_1, \dots, S_n$, ning olgu $\Delta S = (\Delta S_1, \dots, \Delta S_n)^T$ alusvara hindade muutuste vektor. Portfelli koondpositsiooni delta ja gamma avalduvad kujul

$$\delta_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial S_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial P}{\partial S_n} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_1} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial S_1 \partial S_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 P}{\partial S_n \partial S_1} & \cdots & \frac{\partial^2 P}{\partial S_n \partial S_n} \end{pmatrix},$$

kus P on portfelli hind. Portfelli väärtuse muutuse saame nüüd Taylori valemi (3.2) abil kirja panna kui

$$\Delta P \approx \delta_P^T \Delta S + \frac{1}{2}(\Delta S)^T \Gamma_P \Delta S.$$

Kuna erinevatel alusvaradel on erinevad ühiku väärtused, ei saa kirjutada $P\&L = \Delta P \cdot pv$ nagu eelmises alapeatükis. Olgu pv_i i-nda alusvara optsioonide ühiku väärtus. Siis saame defineerida delta ja gamma koguväärtuste vektorid kui

$$\delta_{\$} = \left(\delta_1^{\$}, \dots, \delta_n^{\$}\right)^T, \quad \Gamma_{\$} = \left(\gamma_{ij}^{\$}\right),$$

kus $\delta_i^{\$} = \frac{\partial P}{\partial S_i} \cdot S_i \cdot pv_i$ ja $\gamma_{ij}^{\$} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j} \cdot S_i \cdot S_j \cdot \sqrt{pv_i pv_j}$.

Nüüd saame mitme alusvaraga delta-gamma lähendi portfelli *P&L*'ile kirja panna kui

$$P\&L \approx \delta_{\$}^T R + \frac{1}{2} R^T \Gamma_{\$} R,$$

kus $R = (R_1, \dots, R_n)^T$ on alusvara tulususte vektor.

3.5 Delta-gamma-vega-teeta-roo lähend

Mida rohkem riskifaktoreid mudelisse lisada, seda täpsemaks läheb portfelli $P\&L$'i hinnang. Kuna optsiooniportfelli väärtus muutub aja jooksul isegi siis, kui alusvara väärtus jääb samaks, tuleb arvesse võtta ka portfelli sõltuvust ajast. Selleks tuleb mudelisse lisada teeta. Lisades valemisse roo, arvestame ka intressimääradega. Vega arvestab optsiooni kaubeldava volatiilsusega. Kokku saame optsiooniportfelli $P\&L$'i delta-gamma-vega-teeta-roo lähendi (ühe või mitme alusvara korral) kujul

$$P\&L \approx \delta_\$^T R + \frac{1}{2} R^T \Gamma_\$ R + \theta_\$ \Delta t + \pi_\$^T \Delta r + \nu_\$^T \Delta\sigma,$$

kus $\theta_\$$ on summa iga positsiooni teetast korrutatud optsiooni ühiku väärtusega, $\pi_\$$ on summa iga positsiooni roost korrutatud optsiooni ühiku väärtusega ning r on intressimäärade vektor. $\Delta\sigma$ tähistab kaubeldavate volatiilsuste muutuste vektorit ning $\nu_\$$ vega koguväärtuste (*value vega*) vektorit. Vektori $\nu_\$$ arvutamisest on pikemalt juttu raamatus (Alexander, 2008a, lk 356).

3.6 Analüütilised optsiooniportfelli *VaR*'i hinnangud

Olles alapeatükkides 3.3-3.5 kirjeldanud erinevaid võimalusi, kuidas ligikaudselt hinnata optsiooniportfelli $P\&L$'i, saab edasi liikuda optsiooniportfelli *VaR*'i hindamise juurde. Ka optsiooniportfellide korral saab *VaR*'i hinnata kõigi kolme meetodiga, mida kirjeldati esimeses peatükis. Järgnevalt kirjeldatakse kahte analüütilist meetodit optsiooniportfelli *VaR*'i hindamiseks.

3.6.1 Delta-normaalmeetod

Punktid 3.6.1 ja 3.6.2 põhinevad raamatul (Alexander, 2008b, lk 172-173, 257-262), välja arvatud seal, kus on märgitud teisiti.

Kõige lihtsam on optsiooniportfelli $P\&L$'i esitada esimest järku Taylori lähendi abil. Esimest järku Taylori lähend ühe alusvaraga optsiooniportfelli diskonteeritud $P\&L$'ile on

$$P\&L \approx \delta^\$ R,$$

kus $\delta^\$$ on portfelli delta koguväärtus ning $R = \Delta S / S$ on alusvara diskonteeritud tulusus.

Oletame, et alusvara h päeva diskonteeritud tulusused on normaaljaotusega keskväärtusega μ_h ning standardhälbega σ_h. Sellisel juhul on portfelli h päeva *P&L*'i jaotus ligikaudu

$$P\&L_h \sim N\left(\delta^\$\mu_h, \left(\delta^\$\sigma_h\right)^2\right).$$

Eeldame, et $\mu_h = 0$. Nüüd saame 100α% h päeva *VaR*'i hinnangu valemi (1.3) põhjal kirjutada kujul

$$VaR_{h,\alpha} \approx \delta^\$ \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha)\sigma_h,$$

kus $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ on standardse normaaljaotuse $(1-\alpha)$-kvantiil.

Üldisemalt saab sama meetodit rakendada ka optsiooniportfellile, millel on mitu erinevat alusvara. *P&L* on siis

$$P\&L \approx \sum_{i=1}^{n} \delta_i^\$ R_i = \delta_\$^T R,$$

kus $\delta_\$ = (\delta_1^\$, \dots, \delta_n^\$)^T$ on delta koguväärtuste vektor ning $R = (R_1, \dots, R_n)^T$ on alusvara tulususte vektor. Kui eeldame, et *P&L* on mitmemõõtmelise normaaljaotusega, saame valemi (2.5) põhjal

$$VaR_{h,\alpha} \approx \Phi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\delta_\$^T \Omega_h \delta_\$},$$

kus Ω_h on alusvara diskonteeritud tulususte h päeva kovariatsioonimaatriks.

Sellise lineaarse mudeli kasutamine optsiooniportfelli puhul on siiski väga ebatäpne, sest optsiooniportfellide väärtused ei ole alusvarade väärtustest lineaarselt sõltuvad. Täpsema tulemuse saame, kui kasutame delta-gamma lähendit.

3.6.2 Delta-gamma *VaR*

Olgu meil optsiooniportfell, mille *P&L* on antud delta-gamma lähendi kujul $P\&L \approx \delta_\$^T R + \frac{1}{2} R^T \Gamma_\$ R$. Oletame, et alusvarade tulusused on mitmemõõtmelise normaaljaotusega kovariatsioonimaatriksiga Ω_h. Kuna portfelli *P&L* sisaldab ruutliiget, ei ole see normaaljaotusega, kuid delta-gamma lähendi valemi põhjal on võimalik hinnata *P&L* jaotuse keskväärtust, dispersiooni, asümmeetriakordajat ning järsakuskordajat.

Definitsioon 3.1. Asümmeetriakordaja a arvutatakse tunnuse hälvete kuupide summa järgi:

$$a = \frac{1}{n\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^3.$$

Asümmeetriakordaja näitab, kas jaotus on sümmeetriline või raske sabaga. (Tiit & Möls, 1997, lk 34)

Definitsioon 3.2. Ekstsess ehk järsakus arvutatakse hälvete neljandate astmete summa kaudu:

$$e = \frac{1}{n\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^4 - 3.$$

Järsakus näitab seda, kas jaotusel on terav tipp ja rasked sabad või mitte. (Tiit & Möls, 1997, lk 34)

$P\&L$'i keskväärtus avaldub kujul

$$E(P\&L) = \mu = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\Gamma_\$ \Omega_h), \tag{3.3}$$

kus tr tähistab maatriksi jälge ehk diagonaalielementide summat.

Järgmised momendid avalduvad kujul:

$$D(P\&L) = \sigma^2 = \frac{1}{2} \mathrm{tr}[(\Gamma_\$ \Omega_h)^2] + \delta_\$^T \Omega_h \delta_\$, \tag{3.4}$$

$$E[(P\&L - \mu)^3] = \mathrm{tr}[(\Gamma_\$ \Omega_h)^3] + 3\delta_\$^T \Omega_h \Gamma_\$ \Omega_h \delta_\$, \tag{3.5}$$

$$E[(P\&L - \mu)^4] = 3\,\mathrm{tr}[(\Gamma_\$ \Omega_h)^4] + 12\delta_\$^T \Omega_h (\Gamma_\$ \Omega_h)^2 \delta_\$ + 3\sigma^2. \tag{3.6}$$

Seega asümmeetriakordaja ja järsakus on avaldatavad kui

$$a = \frac{\mathrm{tr}[(\Gamma_\$ \Omega_h)^3] + 3\delta_\$^T \Omega_h \Gamma_\$ \Omega_h \delta_\$}{\left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}\left[(\Gamma_\$ \Omega_h)^2\right] + \delta_\$^T \Omega_h \delta_\$\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3.7}$$

$$e = \frac{3\,\mathrm{tr}[(\Gamma_\$ \Omega_h)^4] + 12\delta_\$^T \Omega_h (\Gamma_\$ \Omega_h)^2 \delta_\$ + 3\sigma^2}{\left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}\left[(\Gamma_\$ \Omega_h)^2\right] + \delta_\$^T \Omega_h \delta_\$\right)^2} - 3. \tag{3.8}$$

Et saadud nelja momendi põhjal hinnata optsiooniportfelli VaR'i, võib kasutada 4-parameetrilist Johnson SU jaotust.

Definitsioon 3.3. Juhuslik suurus X on Johnson SU jaotusega, kui

$$\left(\frac{X-\xi}{\lambda}\right) = \sinh\left(\frac{Z-\gamma}{\delta}\right),$$

kus Z on standardse normaaljaotusega juhuslik suurus. Parameeter ξ määrab jaotuse asukoha, λ on skaalaparameeter, γ asümmeetriakordaja ning δ järsakuskordaja.

Juhusliku suuruse X jaotuse α-kvantiil on arvutatav kujul

$$x_\alpha = \lambda \sinh\left(\frac{z_\alpha-\gamma}{\delta}\right) + \xi,$$

kus z_α on standardse normaaljaotuse α-kvantiil. Kui X tähistab portfelli h päeva tulusust, saame leida portfelli VaR'i kujul

$$VaR_{h,\alpha} = -\lambda \sinh\left(\frac{z_\alpha-\gamma}{\delta}\right) - \xi.$$

Johnson SU jaotuse parameetreid saab hinnata Tuenteri algoritmiga:

1. Olgu $\omega = \exp(\delta^{-2})$.
2. Olgu $m = \left(4 + 2\left[\omega^2 - \left(\frac{\hat{\varkappa}+6}{\omega^2+2\omega+3}\right)\right]\right)^{\frac{1}{2}} - 2$,

   kus $\hat{\varkappa}$ on järsakuse hinnang.
3. Arvutame ω ülemise piiri:

   $$\omega^{\text{ülemine}} = \left(-1 + \left(2(\hat{\varkappa}+2)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
4. Arvutame ω alumise piiri:

   $$\omega^{alumine} = \max(\omega_1, \omega_2),$$

   kus ω_1 on võrrandi $\omega^4 + 2\omega^3 + 3\omega^2 - \hat{\varkappa} - 6 = 0$ lahend ning ω_2 on võrrandi $(\omega-1)(\omega+2)^2 = \hat{\tau}^2$ lahend, kus $\hat{\tau}$ on asümmeetriakordaja hinnang.
5. Leiame sellise ω, et $\omega^{alumine} < \omega < \omega^{\text{ülemine}}$ ja

   $$(\omega - 1 - m)\left(\omega + 2 + \frac{m}{2}\right)^2 = \hat{\tau}^2.$$
6. Siis on Johnson SU jaotuse parameetrite hinnangud järgmised:

$$\hat{\delta} = (\ln \omega)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\hat{\gamma} = \theta\hat{\delta}, \qquad \text{kus } \theta = -\operatorname{sign}(\hat{\tau}) \sinh^{-1}\left[\left(\frac{(\omega+1)(\omega-1-m)}{2\omega m}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{2\hat{\sigma}^2}{(\omega-1)(\omega\cosh 2\theta + 1)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\hat{\xi} = \hat{\mu} - \operatorname{sign}(\hat{\tau})\frac{\hat{\sigma}(\omega-m-1)^{\frac{1}{2}}}{(\omega-1)},$$

kus $\hat{\mu}$ ja $\hat{\sigma}$ on portfelli tulususe keskväärtus ja standardhälve.

Näide 3.2. (Põhineb raamatu (Alexander, 2008b, lk 261-262) näitel) Olgu meil optsiooniportfell, mille alusvaradeks on võlakiri ja aktsia. Olgu portfelli *P&L*'i delta-gamma lähend

$$P\&L \approx (1 \quad 5)\begin{pmatrix} R_A \\ R_V \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(R_A \quad R_V)\begin{pmatrix} 25 & -7{,}5 \\ -7{,}5 & 125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_A \\ R_V \end{pmatrix},$$

kus R_A on aktsia tulusus ning R_V võlakirja tulusus. Mõõtühikud on miljonites eurodes. Oletame, et aktsia ja võlakirja tulusused on mõlemad normaaljaotusega, tulususte volatiilsused on vastavalt $\sigma_A = 20\%$ ja $\sigma_V = 30\%$ ning korrelatsioon tulususte vahel on $\rho = -0{,}25$. Leiame Johnson SU jaotuse abil optsiooniportfelli 10 päeva 1% *VaR*'i.

P&L'i valemist näeme, et $\delta_\$ = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ja $\Gamma_\$ = \begin{pmatrix} 25 & -7{,}5 \\ -7{,}5 & 125 \end{pmatrix}$. Kuna aktsia ja võlakirja tulususte standardhälbed on antud aasta kohta, peab h-päevase tulususte kovariatsioonimaatriksi saamiseks korrutama aastast kovariatsioonimaatriksit teguriga $h/250$. Riskifaktorite tulususte kovariatsioonimaatriks on seega

$$\Omega_h = \frac{10}{250}\begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \rho\sigma_A\sigma_V \\ \rho\sigma_A\sigma_V & \sigma_V^2 \end{pmatrix} = \frac{10}{250}\begin{pmatrix} 0{,}09 & -0{,}015 \\ -0{,}015 & 0{,}04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0036 & -0{,}0006 \\ -0{,}0006 & 0{,}0016 \end{pmatrix}.$$

Järgmisena arvutame valemite (3.3)-(3.6) põhjal *P&L* jaotuse neli momenti:

$$E(P\&L) = \mu = 0{,}150,$$

$$D(P\&L) = \sigma^2 = 0{,}256,$$

$$E[(P\&L - \mu)^3] = 0{,}032,$$

$$E[(P\&L - \mu)^4] = 0{,}222.$$

P&L jaotuse asümmeetriakordaja ja järsakus on valemite (3.7) ja (3.8) põhjal $a = 1{,}913$ ja $e = 47{,}153$. Järsakus on positiivne, seega saab Johnson SU jaotuse parameetreid hinnata Tuenteri algoritmiga. Kuna asümmeetriakordaja on positiivne, hinnatakse Johnson SU jaotus keskväärtuse -0,150 ja asümmeetriakordaja -1,913 kohta ning *VaR* hinnatakse jaotuse ülemise saba kvantiilina. Algoritmi kasutades saame jaotuse parameetriteks

$$\hat{\delta} = 1{,}152,$$

$$\hat{\gamma} = 5{,}301,$$

$$\hat{\lambda} = 0{,}003,$$

$$\hat{\xi} = 0{,}283.$$

Standardse normaaljaotuse 0,99-kvantiil on 2,326. Optsiooniportfelli 10 päeva 1% delta-gamma *VaR* on seega

$$VaR_{h,\alpha} = -1 \cdot \left(-\hat{\lambda}\sinh\left(\frac{z_\alpha - \hat{\gamma}}{\hat{\delta}}\right) - \hat{\xi}\right) = 261024(€).$$

Alapeatükkides 3.6.1 ja 3.6.2 esitatud analüütilised meetodid optsiooniportfelli *VaR*'i hindamiseks on küll üsna lihtsasti rakendatavad, kuid mitte kõige täpsemad. Optsiooniportfellide puhul soovitatakse kasutada pigem mitteparameetrilist meetodit või Monte Carlo simulatsiooni. Nende meetoditega on kergem kasutada ka punktis 3.5 kirjeldatud delta-gamma-vega-teeta-roo lähendit *P&L*'ile. Mitteparameetrilise ja Monte Carlo meetodi rakendamise kohta on pikemalt juttu raamatus (Alexander, 2008b).

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuriti ühepoolse riskimõõdu VaR hindamist mitme riskifaktoriga investeerimisportfelli korral. Eeskätt vaadeldi VaR'i hindamiseks kasutatavaid analüütilisi meetodeid. Eraldi kirjeldati lineaarsetele ja mittelineaarsetele portfellidele sobivaid meetodeid.

Esimeses peatükis selgitati portfelli riski hindamiseks vajalikke mõisteid nagu aritmeetiline ja logaritmiline tulusus ning $P\&L$ jaotus. Samuti esitati VaR'i üldine definitsioon ning peamised arvutusmeetodite tüübid, milleks on parameetriline, mitteparameetriline ning Monte Carlo meetod. Parameetrilise ja mitteparameetrilise meetodi hinnangute võrdlemiseks viidi läbi näide, kasutades Tallink Grupi aktsia tulususi. Näitest selgus, et kuigi tulusused polnud normaaljaotusega, ei erinenud kahe meetodi hinnangud väga palju: mitteparameetrilise meetodi hinnang oli $VaR_{MP} = 1{,}96\%$ ning parameetrilise meetodi oma $VaR_{P} = 1{,}99\%$.

Teises peatükis kirjeldati portfelli VaR'i hindamist mitme riskifaktori korral. Esitati teooria riski hindamise kohta normaaljaotuse eeldusel ning viidi läbi illustreeriv näide portfelli kohta, mille risk sõltub aktsiahinnast ja valuutakursist. Samuti tuletati valem selgitamaks, et portfelli riski saab vähendada, kui portfellis on palju varasid või nendevahelised korrelatsioonid on väikesed. Lisaks kasutati peatükis tuletatud valemeid, et hinnata VaR Balti põhinimekirja kuuluvatest aktsiatest koosneva portfelli puhul.

Viimases peatükis selgitati optsiooni mõistet ja hinnastamiseks kasutatavat valemit. Seejärel kirjeldati meetodeid, mille abil saab ligikaudselt hinnata optsiooniportfelli $P\&L$'i väärtust. Neid valemeid kasutades tutvustati kahte lihtsamat analüütilist meetodit (delta-normaalmeetod ja delta-gamma meetod), millega hinnata optsiooniportfelli VaR'i. Lõpetuseks toodi illustreeriv näide optsiooniportfelli delta-gamma VaR'i hindamisest.

Kasutatud kirjandus

Alexander, C. (2008a). *Market Risk Analysis Volume III: Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments.* Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

Alexander, C. (2008b). *Market Risk Analysis Volume IV: Value-at-Risk Models.* Chichester: John Wiley & Sons Ltd.

Jorion, P. (2001). *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.* McGraw-Hill.

Kangro, R. (2006). *Finantsmatemaatika võrrandid*, loengukonspekt, matemaatika-informaatikateaduskond, Tartu Ülikool.

Leiger, T. (2014). *Matemaatiline analüüs I,* loengukonspekt, matemaatika-informaatikateaduskond, Tartu Ülikool.

Leiger, T. (2010). *Matemaatiline analüüs IV,* loengukonspekt, matemaatika-informaatikateaduskond, Tartu Ülikool.

McNeil, A. J., Frey, R., Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools.* Princeton: Princeton University Press.

Nasdaq OMX Baltic. *Balti börsid*. http://www.nasdaqomxbaltic.com/market/?lang=et [16.04.2015]

Tiit, E.-M., & Möls, M. (1997). *Rakendusstatistika lühikursus.* Tartu.

Unt, T. (2014). *Koopulad ja nende kasutamine portfelli VaR'i hindamisel,* magistritöö. Tartu: Tartu Ülikooli matemaatilise statistika instituut.

Lisad

Lisa 1. Kood joonise 1.1 tegemiseks

```
library(ggplot2)
x=c(-5,5)
ggplot(data.frame(x), aes(x)) + stat_function(fun = dnorm)+
  xlab("tulusus (%)") + ylab("sagedus") +
  theme(panel.grid.minor=element_blank(),panel.background=element_blank(),
  axis.line = element_line(colour = "black"),
  axis.text=element_text(colour="black")) +
  geom_segment(aes(x=qnorm(p=0.05), y=0, xend = qnorm(p=0.05),
  yend=dnorm(qnorm(p=0.05))), color="red", size=1) +
  geom_text(aes(x=qnorm(p = 0.05), label="-VaR", y=0),
  hjust = -0.1, vjust=-0.5, text=element_text(size=10)) +
  coord_cartesian(xlim = c(-4,4), ylim = c(0,0.4))
```

Lisa 2. Kood näite 1.2 jaoks

```
library(dplyr)
n_h=length(tallink$tulusus)
alpha=0.05
indeks = floor(alpha*n_h)+1
sorteeritud = arrange(tallink,tulusus)
#mitteparameetriline VaR'i hinnang
VaR_mp= sorteeritud$tulusus[indeks]*100
#parameetriline VaR'i hinnang
VaR_p=1.645*sd(sorteeritud$tulusus*100)-mean(sorteeritud$tulusus*100)
#joonis
ggplot(sorteeritud, aes(x=tulusus*100))+geom_histogram(binwidth=0.1,
  aes(y=..density..))+ xlab("tulusus (%)") + ylab("tihedus")+
  geom_segment(aes(x=VaR_mp, y=0, xend = VaR_mp, yend=0.16), color="red",
  size=2)+
  theme(panel.grid.minor=element_blank(),panel.background=element_blank(),
  axis.line = element_line(colour = "black"),
  axis.text=element_text(colour="black"))+
```

```
  geom_text(aes(x=VaR_mp, label="-VaR", y=0),
  hjust =0.5, vjust=-4.1, text=element_text(size=10)) +
  coord_cartesian(xlim = c(-6,6), ylim = c(0,1.25)) +
  stat_function(fun=dnorm, args=list(mean=mean(sorteeritud$tulusus*100),
      sd=sd(sorteeritud$tulusus*100)))
```

Lisa 3. Kood joonise 2.1 jaoks

```
d=12
roo1=0
roo2=0.5
df = data.frame(d1=rep(NA, 1000), d2=rep(NA, 1000))
for (i in 1:1000){
  df$d1[i]=d*sqrt((1/i)+(1-1/i)*roo1)
  df$d2[i]=d*sqrt((1/i)+(1-1/i)*roo2)
}
library(reshape2)
uus=melt(df, id.vars=c("nr"))
ggplot(uus, aes(x=nr, y=value, linetype=variable))+geom_line(size=1)+
  scale_x_log10(breaks=c(1,2,5,10,20,50,100,200,500,1000))+
  xlab("Varade arv") + ylab("Portfelli risk (%)") +
  theme(panel.grid.minor=element_blank(),panel.background=element_blank(),
        axis.line = element_line(colour = "black"),
        axis.text=element_text(colour="black"))+
  theme(legend.title=element_blank())+
  scale_linetype(labels=c("ρ=0","ρ=0.5"))
```

Lisa 4. Kood peatükis 2.3 esitatud näite jaoks

```
kaal1=dflog$ARC1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal2=dflog$BLT1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal3=dflog$EEG1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal4=dflog$MRK1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal5=dflog$NCN1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal6=dflog$OEG1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal7=dflog$SFG1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
```

```
kaal8=dflog$TAL1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal9=dflog$TKM1T[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaal10=dflog$TVEAT[250]*1000/dflog$portfell[250]
kaalud = c(kaal1,kaal2,kaal3,kaal4,kaal5,kaal6,kaal7,kaal8,kaal9,kaal10)
kaalud=matrix(kaalud, nrow=1, ncol=10)
tulusused=dflog[,c(2,4,6,8,10,12,14,16,18,20)]
tulusused = data.matrix(tulusused)
portfelli_tulusused=rep(NA,250)
for (i in 1:250){
portfelli_tulusused[i]=kaalud%*%tulusused[i,]
}
DR_p=sd(portfelli_tulusused)
VaR=1.645*39006*DR_p
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Hanna Läänemets,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Portfelli *VaR*'i hindamine mitme riskifaktori korral", mille juhendaja on prof. Kalev Pärna,

1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 29.04.2015