TARTU ÜLIKOOL

MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND

Matemaatika instituut

Matemaatika eriala

Märten Heinsalu

Murrulised tuletised

Bakalaureusetöö

Juhendaja: Professor Arvet Pedas

Autor: .... „....” juuni 2013

Juhendaja: .... „....” juuni 2013

Lubada kaitsmisele

Professor .... „....” juuni 2013

TARTU 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Funktsioon f on diferentseeruv oma määramispiirkonna sisepunktis x, kui leidub lõplik piirväärtus

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

mida nimetatakse funktsiooni f tuletiseks kohal x ja tähistatakse $f'(x)$ või $\frac{d}{dx}f(x)$. Oletame, et funktsioonil f on olemas lõplik tuletis f' antud punkti x mingis ümbruses. Selles ümbruses kujutab siis f' argumendi x teatavat funktsiooni. Kui sellel funktsioonil on kohal x omakorda tuletis, siis viimast tuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (ehk teiseks) tuletiseks kohal x ja tähistatakse $f''(x)$ või $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$. Üldiselt, olgu $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ja funktsioonil f punktis x lõplik $(n-1)$-järku tuletis. Kui sellel $(n-1)$-järku tuletisel on kohal x omakorda tuletis, siis viimast tuletist nimetatakse funktsiooni f n-järku tuletiseks kohal x ja tähistatakse $f^{(n)}(x)$ või $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$. Aga mis juhtub siis, kui me soovime funktsiooni tuletise definitsiooni üldistada, et see kataks ka olukorrad, kus järk ei ole naturaalarvuline? Tuleb välja, et selline üldistus on võimalik ja selleks on mitu erinevat võimalust.

Sellist üldistust püüti leida juba 17. sajandi lõpus, ajal kui Newton ja Leibniz panid aluse diferentsiaal- ja integraalarvutusele. Kui Leibniz tähistas ühes oma kirjadest l'Hospitalile funktsiooni f n-järku tuletise sümboliga (vaikimisi eeldades, et n on naturaalarv)

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x),$$

siis sai ta vastuseks küsimuse: „Mida tähendab $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$, kui $n = \frac{1}{2}$?" Seda 1695. aastal kirjutatud lauset peetaksegi murrulist järku tuletiste teooria alguseks.

Kuna esialgu ei olnud näha sellise teooria rakendusvõimalusi, siis vaadeldi murrulise tuletisega seotud küsimusi kolm sajandit puhtalt teoreetilisest vaatepunktist ja sellest huvitusid enamasti vaid matemaatikud. Viimastel aastakümnetel aga on leitud, et murrulist järku tuletisi sisaldavate diferentsiaal- ja integraalvõrrandite abil on võimalik modelleerida mitmesuguste materjalide (näiteks polümeeride) käitumist. Murrulist järku tuletistega saab suurepäraselt kirjeldada ka mäluga protsesse ja materjale. Üheks täiesti uueks rakendusvaldkonnaks on matemaatiline psühholoogia, mis kasutab matemaatilisi mudeleid inimeste käitumise uurimiseks. Kuna murrulist järku tuletised võimaldavad hästi kirjeldada mäluga süsteeme ja inimeste reaktsioonid sõltuvad nende kogemustest ehk nende mälestustest, siis leiavad matemaatilise psühholoogia mudelites kasutust just murrulist järku tuletised ([2], lk 4).

Alates aastast 1695 on esitatud mitmeid võimalusi murrulist järku tuletise defineerimiseks ([1]). Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on tutvuda neist kolme kõige levinumaga: Grünwald-Letnikovi, Riemann-Liouville'i ja Caputo definitsioonidega. See on ka nende kasutusele võtmise kronoloogiline järjekord. Käesolev töö toetub suures osas monograafiates [2] ja [7] esitatud tulemustele.

Töö koosneb viiest osast.

Esimeses paragrahvis on esitatud mõned abitulemused, mida kasutatakse käesoleva töö järgnevates osades.

Järgnevas kolmes paragrahvis esitatakse Grünwald-Letnikovi, Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletiste definitsioonid, nende tuletuskäigud ja mõned olulisemad omadused.

Paragrahv 5 sisaldab eelnevalt esitatud murrulist järku tuletiste definitsioonide võrdlust. Esmalt vaadeldakse Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletiste omavahelist seost ja seejärel vaadeldakse Riemann-Liouville'i ja Grünwald-Letnikovi diferentsiaaloperaatorite vahelist seost.

Paragrahvid 6 ja 7 sisaldavad vastavalt näiteid murrulist järku tuletiste leidmisest ja murrulist järku tuletiste rakendustest.

§ 1. Vajalikud eelteadmised ja abitulemused

Selles paragrahvis esitatame mõned mõisted ja tulemused, mida läheb vaja bakalaureusetöö järgmistes osades. Siin tugineme töödele [4] ja [7].

Definitsioon 1.1. Gammafunktsiooniks nimetatakse funktsiooni Γ, mis on defineeritud seosega

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \quad a > 0$$

Näitame, et integraal

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \tag{1.1}$$

koondub, kui $a > 0$.

Olgu $a > 0$. Jaotame vaadeldava integraali (1.1) kaheks osaks:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx = \int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx + \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Kuna

$$\lim_{x \to 0} e^{-x} = 1,$$

siis integraal

$$\int_0^1 e^{-x} x^{a-1} dx \tag{1.2}$$

koondub, kui koondub integraal

$$\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a} x^a \Big|_0^1.$$

Järelikult integraal (1.2) koondub, kui $a > 0$.
Uurime nüüd integraali

$$\int_1^\infty e^{-x} x^{a-1} dx \tag{1.3}$$

koonduvust. Kuna iga a korral

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^{a+1} = 0,$$

siis leidub selline parameetrist a sõltuv arv M, et iga $x \geqslant 1$ korral

$$e^{-x} x^{a+1} \leqslant M.$$

Seega

$$e^{-x} x^{a-1} \leqslant \frac{M}{x^2},$$

millest järeldub, et integraal (1.3) koondub iga a korral. Kokkuvõttes olemegi saanud, et integraal (1.1) koondub, kui $a > 0$.

Olgu $a > 0$. Siis kehtib seos

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{1.4}$$

Tõepoolest, ositi integreerides saame

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^a dx = -e^{-x}x^a\Big|_0^\infty + a\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx = 0 + a\Gamma(a) = a\Gamma(a).$$

Osutub, et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ja iga $a > 0$ korral kehtib Euler-Gaussi valem

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^a}{a(a+1)...(a+n)}, \tag{1.5}$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ([4], lk 252-254).

Osutub, et kuigi integraal (1.1) ei koondu a mittepositiivsete väärtuste korral, saab selle integraali kaudu defineeritud funktsiooni Γ jätkata negatiivsele poolteljele. Selleks kasutame valemit (1.4).

Olgu $a < 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ selline, et $a + n > 0$. Siis defineerime (vt näiteks ([7], lk 6))

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\dots(a+(n-1))}. \tag{1.6}$$

Kui $a > 0$, siis võrdus (1.6) on samaväärne seosega (1.4). Paneme tähele, et kui $a \in \{0, -1, -2, \dots\}$, siis võrduse (1.6) paremal poolel oleva murru nimetaja võrdub nulliga. Seega pole funktsioon Γ määratud mittepositiivsete täisarvude korral.

Definitsioon 1.2. Beetafunktsiooniks nimetatakse funktsiooni B, mis on defineeritud seosega

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, \tag{1.7}$$

kus a ja b on positiivsed reaalarvud.

Üheks beetafunktsiooni ja gammafunktsiooni vaheliseks seoseks on

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \tag{1.8}$$

kus a ja b on positiivsed reaalarvud ([4], lk 249).

Definitsioon 1.3. Olgu $p > 0$. Siis defineerime $m = \lceil p \rceil$ kui vähima täisarvu, mis on suurem või võrdne arvuga p.

Definitsioon 1.4. Olgu $\alpha, \beta > 0$. Siis Mittag-Leffleri funktsioon $E_{\alpha,\beta}$ defineeritakse ([7], lk 17) lõpmatu summana

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad x \geqslant 0. \tag{1.9}$$

Lause 1.1. *Olgu* $(\alpha_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ *ja* $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ *sellised reaalarvulised jadad, et*

(1) $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 1$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{n,k} = 0$ *iga* $k \in \mathbb{N}$ *korral,*

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} = A$,

(4) *leidub* $K \geqslant 0$ *nii, et* $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}| < K$ *iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral.*

Siis

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k = A. \tag{1.10}$$

Tõestus. Olgu $(\sigma_k)_{k=1}^{\infty}$ selline jada, et $\beta_k = 1 - \sigma_k$ ja $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = 0$. Siis $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = 1$ ja lause eeldusest (2) järeldub, et iga fikseeritud $r \in \mathbb{N}$ korral

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k}\beta_k = 0.$$

Seega

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{r-1} \alpha_{n,k}\beta_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} \alpha_{n,k} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} \alpha_{n,k}\sigma_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} \alpha_{n,k}\sigma_k \\
&= A - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} \alpha_{n,k}\sigma_k.
\end{aligned}$$

Nüüd

$$\begin{aligned}
\left| A - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} \alpha_{n,k}\sigma_k \right| &< \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} |\alpha_{n,k}||\sigma_k| < \sigma^* \lim_{n\to\infty} \sum_{k=r}^{n} |\alpha_{n,k}| \\
&= \sigma^* \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_{n,k}| \leqslant \sigma^* K,
\end{aligned}$$

kus $\sigma^* = \max\limits_{k \geqslant r} |\sigma_k|$. Kuna $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k = 0$, siis iga $\epsilon > 0$ jaoks leidub $r \in \mathbb{N}$ nii, et $\sigma^* < \frac{\epsilon}{K}$. Seega

$$\left| A - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k}\beta_k \right| < \epsilon.$$

Järelikult väide (1.10) kehtib. $\square$

§ 2. Grünwald-Letnikovi tuletis

See paragrahv toetub monograafiale [7].

2.1. Grünwald-Letnikovi tuletise definitsioon

Selles punktis esitame Grünwald-Letnikovi tuletise definitsiooni ja selle tuletuskäigu.

Olgu funktsioon $f = f(t)$ diferentseeruv lõigus $[a, b]$. Siis selle funktsiooni tuletis punktis $t \in (a, b)$ on defineeritud piirväärtusena

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}. \tag{2.1}$$

Funktsiooni f teist järku tuletiseks punktis t nimetame funktsiooni f' tuletist selles punktis:

$$\begin{aligned} f''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right) \right) \end{aligned}$$

ehk

$$f''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \tag{2.2}$$

Võrdusi (2.1) ja (2.2) kasutades saame

$$f'''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3}$$

ja induktsiooniga tuletise järgu järgi saame funktsiooni f n-järku tuletise punktis t

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh),$$

kus $n \in \mathbb{N}$. Siin ja edaspidi tähistame

$$\binom{p}{r} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-r+1)}{r!}, \tag{2.3}$$

kus $p \in (-\infty, \infty)$, $r \in \mathbb{N}$ ja $0! = 1$.

Tähistame

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \tag{2.4}$$

kus p ja n on naturaalarvud. Kui $p \leqslant n$, siis

$$\lim_{h \to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t),$$

sest võrdusest (2.3) järeldub, et iga $r > p$ korral on summas (2.4) olev binoomkordaja võrdne nulliga.

Definitsioon 2.1. Olgu $p > 0$. Operaatorit ${}_{GL}D_a^p$, mis on ruumis $C[a,b]$ defineeritud võrdusega

$$({}_{GL}D_a^p f)(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh), \quad t \in [a,b] \tag{2.5}$$

kus n on naturaalarv, nimetatakse Grünwald-Letnikovi diferentsiaaloperaatoriks. Seejuures funktsiooni ${}_{GL}D_a^p f$ nimetatakse funktsiooni f Grünwald-Letnikovi p-järku tuletiseks.

Kui $p = 0$, siis defineerime ${}_{GL}D_a^0 = I$, kus I on samasusteisendus.

2.2. Grünwald-Letnikovi tuletise teine esitus

Meie edasiseks eesmärgiks on teisendada piirväärtust (2.5). Selleks kõigepealt muudame võrduse (2.4) esitust järgneval viisil.

Kuna iga $p > 0$ ja $r \in \mathbb{N}$ korral kehtib seos

$$\binom{p}{r} = \binom{p-1}{r} + \binom{p-1}{r-1}, \tag{2.6}$$

kusjuures $r = 0$ korral

$$\binom{p-1}{r-1} = \binom{p}{r} - \binom{p-1}{r} = \frac{p!}{(p-0)!0!} - \frac{(p-1)!}{(p-1-0)!0!} = 1 - 1 = 0, \tag{2.7}$$

siis

$$\begin{aligned}
f_h^{(p)}(t) &= h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t - rh) + h^{-p} \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \binom{p-1}{r-1} f(t - rh) \\
&= h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p-1}{r} f(t - rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} \binom{p-1}{r} f(t - (r+1)h) \\
&= (-1)^n \binom{p-1}{n} h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{p-1}{r} \Delta f(t - rh),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{t-a}{n}$ ja

$$\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h)$$

on esimest järku tagurpidi diferents funktsioonist f kohal $t - rh$.
Paneme tähele, et avaldis

$$\begin{aligned}
&h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-1}{r}\Delta f(t-rh)\\
&\qquad= h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta f(t-rh) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r\binom{p-2}{r-1}\Delta f(t-rh)\\
&\qquad= (-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}f(a+h) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta f(t-rh)\\
&\qquad\quad + h^{-p}\sum_{r=-1}^{n-2}(-1)^{r+1}\binom{p-2}{r}\Delta f(t-(r+1)h)\\
&\qquad= (-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}f(a+h)\\
&\qquad\quad + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta f(t-rh) + (-1)^{-1+1}\binom{p-2}{-1}h^{-p}f(t)\\
&\qquad\quad - h^{-p}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta f(t-(r+1)h)
\end{aligned}$$

on seoste (2.3),

$$\begin{aligned}
\Delta f(t-rh) - \Delta f(t-(r+1)h) &= \Delta\big(f(t-rh) - f(t-(r+1)h)\big)\\
&= \Delta(\Delta f(t-rh)) = \Delta^2 f(t-rh)
\end{aligned}$$

ja

$$a + h = (t - nh) + h = t - (n-1)h$$

alusel võrdne avaldisega

$$(-1)^{n-1}\binom{p-2}{n-1}h^{-p}f(a+h) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta^2 f(t-rh).$$

Analoogiliselt saame, et

$$h^{-p}\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r\binom{p-2}{r}\Delta^2 f(t-rh) = (-1)^{n-2}\binom{p-3}{n-2}h^{-p}\Delta^2 f(a+2h) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-3}(-1)^r\binom{p-3}{r}\Delta^3 f(t-rh).$$

Seega, kasutades binoomkordajate omadust (2.6) $m-1$ korda avaldises (2.8), saame, et

$$f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{n-k}\binom{p-1-k}{n-k}h^{-p}\Delta^k f(a+kh) + h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m}(-1)^r\binom{p-m}{r}\Delta^m f(t-rh). \tag{2.9}$$

Leiame võrduses (2.9) oleva summa

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\binom{p-1-k}{n-k}h^{-p}\Delta^k f(a+kh) \tag{2.10}$$

k-nda liikme piirväärtuse:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}h^{-p}\Delta^k f(a+kh)\\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}(nh)^{-p+k}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}\\
&= (t-a)^{-p+k}\left(\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-k}\binom{p-k-1}{n-k}(n-k)^{p-k}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{p-k}\right)\\
&\quad\times\left(\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k}\right).
\end{aligned}$$

Kuna

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-k})^{p-k} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} = f^{(k)}(a)$$

ning võrduse (1.5) alusel (kus võrduses (1.5) esitatud gammafunktsiooni $\Gamma(a)$ valemis

$a = -p + k$ ja $m = n - k$)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} (n-k)^{p-k} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{(-p+k+1)(-p+k+2)...(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \frac{(-p+k)(-p+k+1)(-p+k+2)...(-p+n)}{(n-k)^{-p+k}(n-k)!(-p+k)} \\
&\quad = \frac{1}{(-p+k)\Gamma(-p+k)} = \frac{1}{\Gamma(-p+k+1)},
\end{aligned}$$

siis

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} \binom{p-k-1}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) = \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}.$$

Seega saame summa (2.10) piirväärtuse kirjutada kujul

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{n-k} \binom{p-1-k}{n-k} h^{-p} \Delta^k f(a+kh) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}. \tag{2.11}$$

Võrduses (2.9) oleva teise summa

$$h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m} (-1)^r \binom{p-m}{r} \Delta^m f(t-rh) \tag{2.12}$$

piirväärtuse leidmiseks kirjutame selle kujul

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)} \sum_{r=0}^{n-m} (-1)^r \Gamma(m-p) \binom{p-m}{r} r^{-m+p+1} h(rh)^{m-p-1} \frac{\Delta^m f(t-rh)}{h^m}.$$

Kasutame nüüd lauset 1.1. Selleks võtame

$$\begin{aligned}
\beta_r &= (-1)^r \Gamma(-p+m) \binom{p-m}{r} r^{-m+p+1}, \\
\alpha_{n,r} &= h(rh)^{m-p-1} \frac{\Delta^m f(t-rh)}{h^m}
\end{aligned}$$

ja

$$h = \frac{t-a}{n}$$

ning kontrollime lause 1.1 eeldusi (1) – (4).

Kasutades võrdust (1.5) saame, et

$$\begin{aligned}\beta_r &= \lim_{r\to\infty}(-1)^r\binom{p-m}{r}r^{-m+p+1}\frac{r!r^{-p+m}}{(-p+m)(-p+m+1)\dots(-p+m+r)}\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{\big((p-m)(p-m-1)\dots(p-m-r+1)\big)(-1)^r r^{-m+p+1}r!r^{-p+m}}{r!(-p+m)(-p+m+1)\dots(-p+m+r)}\\ &= \lim_{r\to\infty}\frac{r}{-p+m+r}.\end{aligned}$$

Seega

$$\lim_{r\to\infty}\beta_r = 1 \tag{2.13}$$

Kui $m-p>0$, siis iga $r\in\mathbb{N}$ korral

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n,r} = \lim_{h\to\ 0}h(rh)^{m-p-1}\frac{\Delta^m f(t-rh)}{h^m} = f^{(m)}(t)\lim_{h\to\ 0}h(rh)^{m-p-1} = 0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-m}\alpha_{n,r} = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}}\sum_{r=1}^{n-m}h(rh)^{m-p-1}\frac{\Delta^m f(t-rh)}{h^m} = \int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f^{(m)}(\tau)d\tau,$$

kus $\tau = t-rh$ ja $h=\frac{t-a}{n}$ on lõigu $[a,t]$ ühtlase alajaotuse iga alamlõigu pikkus ([3], lk 352). See integraal leidub, kui funktsioon f on m korda pidevalt diferentseeruv lõigus $[a,t]$.

Kuna lõigus pidev funktsioon on selles lõigus tõkestatud, siis summa $\sum\limits_{r=1}^{n}\left|\alpha_{n,r}\right|$ on tõkestatud iga $n\in\mathbb{N}$ korral. Järelikult on lause 1.1 eeldused täidetud ja me saame, et

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p}\sum_{r=0}^{n-m}(-1)^r\binom{p-m}{r}\Delta^m f(t-rh)\\ &\qquad = \frac{1}{\Gamma(-p+m)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f^{(m)}(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Kasutades seda piirväärtust ja piirväärtust (2.11), saame avaldise (2.5) esitada kujul

$$({}_{GL}D_a^p f)(t) = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p-1}f^{(m)}(\tau)d\tau. \tag{2.14}$$

Valem (2.14) on saadud eeldustel, et $f\in C^m[a,b]$, $t\in[a,b]$ ja m on naturaalarv, mis rahuldab tingimust $m>p$. Arvu m vähim võimalik väärtus on määratud võrratusega $m-1\leqslant p<m$.

§ 3. Riemann-Liouville'i tuletis

Selles paragrahvis toome kõigepealt sisse Riemann-Liouville'i integraali mõiste ja seejärel defineerime Riemann-Liouville'i tuletise Riemann-Liouville'i integraali abil. See paragrahv põhineb monograafial [2].

3.1. Riemann-Liouville'i integraali definitsioon

Olgu D operaator, mis seab lõigus [a,b] diferentseeruvale funktsioonile f vastavusse tema tuletise f':

$$(Df)(x) = f'(x), \quad x \in [a, b].$$

Olgu J_a operaator, mis teisendab lõigus $[a, b]$ integreeruva funktsiooni f funktsiooniks $J_a f$ nii, et

$$(J_a f)(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral hakkame kasutama sümboleid D^n ja J_a^n tähistamaks operaatorite D ja J_a n-kordset rakendamist:

$$\begin{aligned} &D^1 = D, \quad J_a^1 = J_a \\ &D^n = DD^{n-1}, \quad J_a^n = J_a J_a^{n-1}. \end{aligned}$$

Defineerime $D^0 = I$ ja $J_a^0 = I$.

Järgnevas huvitab meid, kas ja kuidas saame neid mõisteid üldistada nii, et oleks kaetud ka olukorrad, kus $n \notin \mathbb{N}$. Selleks esitame kõigepealt mõned vajalikud abitulemused lausetena 3.1 ja 3.2, mille tõestused võib leida vastavalt õpikutest ([3], lk 371) ja ([6], lk 224).

Lause 3.1. *Olgu $f\colon [a, b] \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ pidev funktsioon ja olgu $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ defineeritud võrdusega*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Siis F on diferentseeruv ja

$$F' = f.$$

Lause 3.2. *Olgu f lõigus $[a, b]$ integreeruv funktsioon. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral kehtib Cauchy valem*

$$(J_a^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

Lause 3.1 põhjal

$$DJ_af = f.$$

ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$D^n J_a^n f = f. \tag{3.1}$$

Operaatorite D ja J_a üldistamisel soovime säilitada selle omaduse.

Definitsioon 3.1. Olgu $p > 0$. Operaatorit ${}_{RL}J_a^p$, mis on ruumis $C[a,b]$ defineeritud võrdusega

$$({}_{RL}J_a^p f)(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (x-t)^{p-1} f(t)dt, \quad x \in [a,b] \tag{3.2}$$

nimetatakse Riemann-Liouville'i p-järku integraaloperaatoriks. Seejuures funktsiooni ${}_{RL}J_a^p f$ nimetatakse funktsiooni f Riemann-Liouville'i p-järku integraaliks.

Kui $p = 0$, siis defineerime ${}_{RL}J_a^0 = I$.
Järgnevalt esitame kaks tulemust, mida läheb vaja edaspidi. Lause 3.3 tõestuse võib leida monograafiast ([2], lk 14).

Lause 3.3. *Olgu $p, r \geqslant 0$ ja $f \in C[a,b]$. Siis*

$$({}_{RL}J_a^p({}_{RL}J_a^r f))(x) = ({}_{RL}J_a^{p+r} f)(x), \quad x \in [a,b].$$

Lause 3.4. *Olgu $p > 0$ ja $(f_k)_{k=1}^\infty$ lõigul $[a,b]$ koonduv pidevate funktsioonide jada. Siis*

$$({}_{RL}J_a^p \lim_{k\to\infty} f_k)(x) = (\lim_{k\to\infty} {}_{RL}J_a^p f_k)(x), \quad x \in [a,b].$$

Tõestus. Olgu $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$. Siis f on pidev lõigul [a,b]. Tähistame $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Hindame funktsioonide $({}_{RL}J_a^p f_k)(x)$ ja $({}_{RL}J_a^p f)(x)$ vahet, kui $x \in [a,b]$. Operaatori ${}_{RL}J_a^p$ definitsiooni põhjal

$$\begin{aligned}
|({}_{RL}J_a^p f_k)(x) - ({}_{RL}J_a^p f)(x)| &= \Big|\frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x (f_k(t) - f(t))(x-t)^{p-1} dt\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^x |f_k(t) - f(t)|(x-t)^{p-1} dt \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(p)} ||f_k - f||_\infty \int_a^x (x-t)^{p-1} dt.
\end{aligned}$$

Kuna iga $x \in [a,b]$ korral

$$\int_a^x (x-t)^{p-1} dt = -\frac{1}{p}(x-t)^p\Big|_a^x = \frac{1}{p}(x-a)^p$$

ja $\Gamma(p)p = \Gamma(p+1)$, siis

$$
\begin{aligned}
|({}_{RL}J_a^p f_k)(x) - ({}_{RL}J_a^p f)(x)| &\leqslant \frac{1}{\Gamma(p+1)} ||f_k - f||_\infty (x-a)^p \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(p+1)} ||f_k - f||_\infty (b-a)^p.
\end{aligned}
$$

Et $||f_k - f||_\infty \to \infty$ protsessis $k \to \infty$, siis iga $x \in [a,b]$ korral

$$
|({}_{RL}J_a^p f_k)(x) - ({}_{RL}J_a^p f)(x)| \to 0,
$$

kui $k \to \infty$. □

3.2. Riemann-Liouville'i tuletise definitsioon

Tuginedes eelmises punktis sissetoodud Riemann-Liouville'i integraaloperaatori ${}_{RL}J_a^p$ mõistele, saame defineerida Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaatori.

Definitsioon 3.2. Olgu $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$. Siis operaatorit ${}_{RL}D_a^p$, mis on defineeritud võrdusega

$$
({}_{RL}D_a^p f)(x) = (D^m {}_{RL}J_a^{m-p} f)(x), \quad x \in [a,b] \tag{3.3}
$$

nimetatakse Riemann-Liouville'i p-järku diferentsiaaloperaatoriks, funktsiooni ${}_{RL}D_a^p f$ aga nimetatakse funktsiooni f Riemann-Liouville'i p-järku tuletiseks (me eeldame, et funktsioon f on selline, et $D^m {}_{RL}J_a^{m-p} f$ eksisteerib).

Kui $p = 0$, siis defineerime $D_a^0 = I$.

Paneme tähele, et kui $p \in \mathbb{N}$, siis operaator ${}_{RL}D_a^p$ ühtib tavalise p-järku diferentsiaaloperaatoriga D^p.

Osutub, et Riemann-Liouville'i tuletiste ja Riemann-Liouville'i integraalide vahel kehtib võrdusega (3.1) analoogiline seos.

Lause 3.5. *Olgu $p \geqslant 0$, $m = \lceil p \rceil$, $a \in \mathbb{R}$ ja funktsioon f selline, et ${}_{RL}D_a^p({}_{RL}J_a^p f$ eksisteerib. Siis*

$$
({}_{RL}D_a^p({}_{RL}J_a^p f))(x) = f(x), \quad x \in (a,b).
$$

TÕESTUS. Olgu $x \in [a,b]$. Riemann-Liouville'i tuletise definitsiooni ja lause 3.3 põhjal

$$
({}_{RL}D_a^p({}_{RL}J_a^p f))(x) = (D^m({}_{RL}J_a^{m-p}({}_{RL}J_a^p f)))(x) = (D^m {}_{RL}J_a^m f)(x) = (D^m J_a^m f)(x),
$$

millest saame võrduse (3.1) alusel

$$
(D^m J_a^m f)(x) = (If)(x) = f(x).
$$

$\square$

Lause 3.6. *Olgu* $p, r \geqslant 0$, $m = \lceil p \rceil$, $n = \lceil p \rceil$ *ja* $a \in \mathbb{R}$. *Kui* $\phi \in C[a,b]$ *ja* $f = {}_{RL}J_a^{p+r}\phi$, *siis*

$$({}_{RL}D_a^p {}_{RL}D_a^r f)(x) = ({}_{RL}D_a^{p+r} f)(x), \quad x \in [a,b]. \tag{3.4}$$

TÕESTUS. Olgu $x \in [a,b]$. Funktsiooni f Riemann-Liouville'i tuletise definitsiooni põhjal

$$({}_{RL}D_a^p {}_{RL}D_a^r f)(x) = ({}_{RL}D_a^p {}_{RL}D_a^r {}_{RL}J_a^{p+r}\phi)(x) = (D^m {}_{RL}J_a^{m-p} D^n {}_{RL}J_a^{n-r} {}_{RL}J_a^{p+r}\phi)(x),$$

millest saame lausete 3.3 ja 3.5 alusel

$$\begin{aligned}
(D^m {}_{RL}J_a^{m-p} D^n {}_{RL}J_a^{n-r} {}_{RL}J_a^{p+r}\phi)(x) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-p} D^n {}_{RL}J_a^{n+p}\phi)(x) \\
&= (D^m {}_{RL}J_a^{m-p} D^n {}_{RL}J_a^{n} {}_{RL}J_a^{p}\phi)(x) \\
&= (D^m {}_{RL}J_a^{m-p} {}_{RL}J_a^{p}\phi)(x) \\
&= (D^m {}_{RL}J_a^{m}\phi)(x) \\
&= \phi(x).
\end{aligned}$$

Järelikult $({}_{RL}D_a^p {}_{RL}D_a^r f)(x) = \phi(x)$. Kuna $f = {}_{RL}J_a^{p+r}\phi$, siis ${}_{RL}D_a^{p+r} f = \phi$ ja seega

$$({}_{RL}D_a^p {}_{RL}D_a^r f)(x) = ({}_{RL}D_a^{p+r} f)(x).$$

$\square$

§ 4. Caputo tuletis

See paragrahv toetub monograafiale [2].

Definitsioon 4.1. Olgu $p \geqslant 0$, $m = \lceil p \rceil$ ja $f \in C^m[a,b]$. Defineerime operaatori $\hat{D}_a^p$ võrdusega

$$(\hat{D}_a^p f)(x) = ({}_{RL}J_a^{m-p} D^m f)(x), \quad x \in [a,b]. \tag{4.1}$$

Kui $p = 0$, siis defineerime $\hat{D}_a^0 = I$.

Paneme tähele, et kui $p \in \mathbb{N}$, siis operaator $\hat{D}_a^p$ ühtib tavalise p-järku diferentsiaaloperaatoriga D^p. Tõepoolest, kui $p \in \mathbb{N}$, siis $m = \lceil p \rceil = p$ ja $\hat{D}_a^p = {}_{RL}J_a^0 D^p f = ID^p f = D^p f$.

Lause 4.1. *Olgu $p \geqslant 0$, $m = \lceil p \rceil$ ja f selline lõigus $[a,b]$ määratud funktsioon, et leiduvad $({}_{RL}D_a^p f)(x)$ ja $(f^{(m-1)})(x)$ lõigus $[a,b]$. Siis*

$$(\hat{D}_a^p f)(x) = ({}_{RL}D_a^p (f - T_{m-1}[f;a]))(x), \quad x \in [a,b]$$

kus $T_{m-1}[f;a]$ on $(m-1)$-järku Taylori polünoom funktsioonist f punktis a s.t.

$$(T_{m-1}[f;a])(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Kui $m = 0$, siis defineerime $T_{m-1}[f;a] = 0$.

Definitsioon 4.2. Olgu $p \geqslant 0$, $m = \lceil p \rceil$ ja funktsioon f selline lõigus [a,b] määratud funktsioon, et leidub $({}_{RL}D_a^p (f - T_{m-1}[f;a]))(x)$ lõigus $[a,b]$. Siis operaatorit ${}_C D_a^p f$, mis on defineeritud võrdusega

$$({}_C D_a^p f)(x) = ({}_{RL}D_a^p (f - T_{m-1}[f;a]))(x), \quad x \in [a,b]. \tag{4.2}$$

nimetatakse Caputo p-järku diferentsiaaloperaatoriks. Seejuures funktsiooni ${}_C D_a^p f$ nimetatakse funktsiooni f Caputo p-järku tuletiseks.

Paneme tähele, et kui $p \in \mathbb{N}$, siis operaator ${}_C D_a^p$ ühtib tavalise p-järku diferentsiaaloperaatoriga D^p. Tõepoolest, kui $p \in \mathbb{N}$, siis $m = \lceil p \rceil = p$ ja

$$\begin{aligned}({}_C D_a^p f)(x) &= ({}_{RL}D_a^p (f - T_{m-1}[f;a]))(x) = ({}_{RL}D_a^p f)(x) - ({}_{RL}D_a^p (T_{m-1}[f;a]))(x) \\ &= (D^m f)(x) - (D^m (T_{m-1}[f;a]))(x) = (D^m f)(x) \\ &= (D^p f)(x), \quad x \in [a,b],\end{aligned}$$

sest m-järku tuletis $(m-1)$-järku polünoomist on null.

§ 5. Grünwald-Letnikovi, Riemann-Liouville'i ja Caputo tuletiste definitsioonide vahelised seosed

Selles paragrahvis võrdleme eelnevalt antud kolme erinevat tuletise definitsiooni.

5.1. Riemann-Liouville'i tuletise ja Caputo tuletise vaheline seos

Esmalt võrdleme eespool defineeritud Riemann-Liouville'i tuletise ja Caputo tuletise definitsioone.

Kõigepealt paneme tähele, et Riemann-Liouville'i tuletis konstantsest funktsioonist $f(x) = c \quad (x \in [a,b])$, ei pruugi olla võrdne nulliga.
Tõepoolest, olgu $f(x) = c$, kus $x \in [a,b]$ ja c on mingi konstant. Olgu $a \in \mathbb{R}$, $p > 0$ ja $m = \lceil p \rceil$. Kui $p \in \mathbb{N}$, siis ${}_{RL}D_a^p = D^p$ ja seega

$$({}_{RL}D_a^p f)(x) = (D^p)f(x) = 0.$$

Kui $p \notin \mathbb{N}$, siis definitsioonist (3.3) lähtuvalt saame, et

$$\begin{aligned}({}_{RL}D_a^p f)(x) &= (D^m {}_{RL}J_a^{m-p} f)(x)) \\ &= D^m(\frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1} c dt) \\ &= D^m(\frac{1}{\Gamma(m-p)(m-p)}(-c(x-t)^{m-p})\big|_a^x) \\ &= D^m(\frac{1}{\Gamma(m-p)(m-p)} c(x-a)^{m-p}).\end{aligned}$$

Seega valemi (1.4) alusel saame

$$({}_{RL}D_a^p f)(x) = \frac{c(x-a)^{-p}}{\Gamma(-p+1)}, \quad x \in [a,b]. \tag{5.1}$$

Paneme tähele, et see tuletis võrdub nulliga siis ja ainult siis kui $c = 0$. Samas Caputo p-järku tuletis funktsioonist $f(x) = c$ $(x \in [a,b])$ on definitsiooni (4.2) ja lause 4.1 põhjal alati võrdne nulliga:

$$({}_{C}D_a^p f)(x) = (\hat{D}_a^p f)(x) = ({}_{RL}J_a^{m-p} D^m f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1} c^{(m)} dt = 0.$$

Osutub, et Riemann-Liouville'i diferentsiaaloperaatori ja Caputo diferentsiaaloperaatori vahel kehtib järgnev seos.

Lause 5.1. *Olgu $p > 0$, $m = \lceil p \rceil$ ja $a \in \mathbb{R}$ ning olgu lõigus $[a, b]$ määratud funktsioon f selline, et tal leiduvad Caputo ja Riemann-Liouville'i p-järku tuletised $({}_{RL}D_a^p f)(x)$ ja $({}_C D_a^p f)(x)$, kus $x \in [a, b]$. Siis*

$$({}_C D_a^p f)(x) = ({}_{RL}D_a^p f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(x-a)^{k-p}. \tag{5.2}$$

TÕESTUS. Olgu $x \in [a, b]$. Siis definitsiooni (4.2) põhjal

$$({}_C D_a^p f)(x) = ({}_{RL}D_a^p (f - T_{m-1}[f;a]))(x) = ({}_{RL}D_a^p f)(x) - ({}_{RL}D_a^p T_{m-1}[f;a])(x).$$

Kuna funktsiooni f $(m-1)$-järku Taylori polünoom punktis a avaldub seosega

$$T_{m-1}[f;a] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

ja näite 6.1 alusel

$$({}_{RL}D_a^p)(x-a)^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(-p+k+1)}(x-a)^{-p+k},$$

siis

$$\begin{aligned}
({}_{RL}D_a^p T_{m-1}[f;a])(x) &= {}_{RL}D_a^p \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} {}_{RL}D_a^p (x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(-p+k+1)}(x-a)^{-p+k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(-p+k+1)}(x-a)^{-p+k}.
\end{aligned}$$

Seega

$$({}_C D_a^p f)(x) = ({}_{RL}D_a^p f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(x-a)^{k-p}.$$

□

Lause 5.2. *Lause 5.1 eeldustel*

$${}_C D_a^p f(x) = {}_{RL}D_a^p f(x)$$

parajasti siis, kui

$$f^{(k)}(a) = 0 \ \text{iga}\ k \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \ \text{korral.}$$

5.2. Riemann-Liouville'i tuletise ja Grünwald-Letnikovi tuletise vaheline seos

Nüüd uurime Riemann-Liouville'i ja Grünwald-Letnikovi tuletiste vahelist seost.

Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja $f \in C^m[a,b]$. Siis iga $p \in (0,m)$ korral leiduvad funktsioonil f p-järku Riemann-Liouville'i ja Grünwald-Letnikovi tuletised ja need on võrdsed.

Tõepoolest, olgu $m \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant m-1 \leqslant p < m$ ja $x \in [a,b]$. Siis võrduse (2.14) põhjal

$$({}_{GL}D_a^p f)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(x-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1} f^{(m)}(t)dt$$

ja võrduse (5.2) põhjal

$$({}_{RL}D_a^p f)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(x-a)^{k-p} + ({}_C D_a^p f)(x).$$

Rakendades järjest definitsiooni (4.2), lauset 4.1, definitsiooni (4.1) ja definitsiooni (3.2), saame

$$\begin{aligned}({}_C D_a^p f)(x) &= ({}_{RL}D_a^p(f - T_{m-1}[f;a]))(x) = (\hat{D}_a^p f)(x) = ({}_{RL}J_a^{m-p} D^m f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1} f^{(m)}(t)dt.\end{aligned}$$

Seega

$$({}_{GL}D_a^p f)(x) = ({}_{RL}D_a^p f)(x). \tag{5.3}$$

§ 6. Näited

Selles paragrahvis leiame eri definitsioonide alusel mõnede astmefunktsioonide tuletised.

6.1. Näiteid Riemann-Liouville'i tuletise leidmise kohta

Alustame Riemann-Liouville'i tuletise definitsiooni põhjal tuletiste leidmist. Selles punktis saadud tulemusi kasutame ka Caputo ja Grünwald-Letnikovi tuletiste leidmiseks.

Olgu $a \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $m = \lceil p \rceil$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $x \in [a, b]$. Vaatleme vaid olukorda, kus $p \notin \mathbb{N}$, sest vastasel juhul ühtib Riemann-Liouville'i p-järku diferentsiaaloperaator ${}_{RL}D_a^p$ tavalise diferentsiaaloperaatoriga D^p.

Näide 6.1. Olgu $f(x) = (x-a)^b$, $b \geqslant 0$. Siis funktsiooni f Riemann-Liouville'i p-järku integraali definitsiooni alusel

$$({}_{RL}J_a^{m-p}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1}(t-a)^b dt.$$

Tehes muutujavahetuse

$$s = \frac{t-a}{x-a},$$

saame

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(m-p)} \int_a^x (x-t)^{m-p-1}(t-a)^b dt &= \frac{1}{\Gamma(m-p)}(x-a)^{m-p+b} \int_a^x \frac{(x-t)^{m-p-1}}{(x-a)^{m-p}} \frac{(t-a)^b}{(x-a)^b} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-p)}(x-a)^{m-p+b} \int_0^1 \frac{(1-s)^{m-p-1}}{x-a} s^b (x-a) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(m-p)}(x-a)^{m-p+b} \int_0^1 (1-s)^{m-p-1} s^b ds.
\end{aligned}$$

Beetafunktsiooni definitsiooni põhjal

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)}(x-a)^{m-p+b} \int_0^1 (1-s)^{m-p-1} s^b ds = \frac{1}{\Gamma(m-p)}(x-a)^{m-p+b} B(b+1, m-p).$$

Kuna võrduse (1.8) alusel

$$B(b+1, m-p) = \frac{\Gamma(b+1)\Gamma(m-p)}{\Gamma(m-p+b+1)},$$

siis

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)}(x-a)^{m-p+b}B(b+1,m-p)=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(m-p+b+1)}(x-a)^{m-p+b}.$$

Kui $p-b\in\mathbb{N}$, siis $p>b$ ja $m-(p-b)\in\{0,1,\dots,m-1\}$. Seetõttu

$$D^m\big(\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(m-p+b+1)}(x-a)^{m-p+b}\big)=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(m-p+b+1)}D^m\big((x-a)^{m-p+b}\big)=0.$$

Kui $p-b\notin\mathbb{N}$, siis

$$D^m\big(\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(m-p+b+1)}(x-a)^{m-p+b}\big)=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(-p+b+1)}(x-a)^{-p+b}.$$

Seega funktsiooni $f(x)=(x-a)^b$ Riemann-Liouville'i p-järku tuletis avaldub järgmiselt:

$$({}_{RL}D_a^p f)(x)=\begin{cases}0, & \text{kui } p-b\in\mathbb{N}\\ \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(-p+b+1)}(x-a)^{-p+b}, & \text{kui } p-b\notin\mathbb{N}.\end{cases}$$

Näide 6.2. Olgu $f(x)=c$ ja $0<x\leqslant b$. Siis võrduse (5.1) põhjal

$$({}_{RL}D_0^p f)(x)=\frac{cx^{-p}}{\Gamma(-p+1)}.$$

Seega

$$({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f)(x)=\frac{cx^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}=\frac{c}{\sqrt{x\pi}}.$$

Seose (3.4) alusel ${}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}=D({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}})$. Järelikult

$$({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} f)(x)=D(\frac{c}{\sqrt{x\pi}})=-\frac{c}{2\sqrt{\pi}}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Näide 6.3. Olgu $f(x)=\sqrt{x}$ ja $0<x\leqslant b$. Siis näite 6.1 põhjal

$$({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f)(x)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)}x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

ja

$$({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} f)(x)=D(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})=0.$$

Näide 6.4. Olgu $f(x)=x$ ja $0\leqslant x\leqslant b$. Siis näite 6.1 põhjal

$$({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f)(x)=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1+1)}x^{-\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

ja

$$({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}f)(x) = D(2\sqrt{\frac{x}{\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{x\pi}}.$$

Näide 6.5. Olgu $f(x) = x^2$ ja $0 \leqslant x \leqslant b$. Siis näite 6.1 põhjal

$$({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+2+1)}x^{-\frac{1}{2}+2} = \frac{2}{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}.$$

ja

$$({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}f)(x) = D(\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}) = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} = 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Näide 6.6. Olgu $f(x) = x^3$ ja $0 \leqslant x \leqslant b$. Siis näite 6.1 põhjal

$$({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}f)(x) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+3+1)}x^{-\frac{1}{2}+3} = \frac{6}{\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{5}{2}} = \frac{6}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}x^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}.$$

ja

$$({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}}f)(x) = D(\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}) = \frac{8}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}.$$

Näide 6.7. Olgu $f(x) = e^x$ ja $x \geqslant 0$. Kuna

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

siis

$$({}_{RL}J_0^{m-p}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_0^x (x-t)^{m-p-1}e^t dt = \frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_0^x (x-t)^{m-p-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}dt.$$

Lause 3.4 põhjal

$$\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_0^x (x-t)^{m-p-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_o^x (x-t)^{m-p-1}t^k dt.$$

Seega näite 6.1 alusel

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_0^x (x-t)^{m-p-1}t^k dt &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(m-p+k+1)}x^{m-p+k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(m-p+k+1)}x^{m-p+k}.\end{aligned}$$

Kasutades gammafunktsiooni omadust (1.4), saame

$$({}_{RL}D_0^{p}f)(x) = D^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(m-p+k+1)}x^{m-p+k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(-p+k+1)}x^{-p+k}.$$

Paneme tähele, et Mittag-Leffleri funktsiooni definitsiooni (1.9) alusel

$$({}_{RL}D_0^p f)(x) = x^{-p} E_{1,1-p}(x).$$

Märkus 6.1. Eelnevalt vaadeldud astmefunktsioonide ja eksponentfunktsiooni Grünwald-Letnikovi p-järku tuletised on seose (5.3) põhjal võrdsed samade funktsioonide Riemann-Liouville'i p-järku tuletistega.

6.2. Caputo tuletis mõnedest funktsioonidest

Olgu $a \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $m = \lceil p \rceil$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ja $x \in [a, b]$. Vaatleme vaid olukorda, kus $p \notin \mathbb{N}$, sest vastasel juhul ühtib Caputo p-järku diferentsiaaloperaator ${}_C D_a^p$ tavalise diferentsiaaloperaatoriga D^p.

Näide 6.8. Olgu $f(x) = (x - a)^b$, kus $0 \leqslant x \leqslant b$. Siis

$$(\hat{D}_a^p f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } b \in \{0, 1, 2, ..., m-1\} \\ \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1-p)}(x-a)^{b-p}, & \text{kui } b \geqslant m, \end{cases}$$

mis lause 4.1 põhjal on funktsiooni f Caputo p-järku tuletis $({}_C D_a^p f)(x)$.
Tõepoolest, kui $b \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, siis $(D^m f)(x) = 0$ ja

$$(\hat{D}_a^p f)(x) = ({}_{RL}J_a^{m-p} D^m f)(x) = 0.$$

Kui $b \geqslant m$, siis

$$(D^m f)(x) = b(b-1)...(b-(m-1))(x-a)^{b-m}$$

ja

$$\begin{aligned}(\hat{D}_a^p f)(x) &= {}_{RL}J_a^{m-p}\big(b(b-1)...(b-(m-1))(x-a)^{b-m}\big) = \\ &= b(b-1)...(b-(m-1))\,{}_{RL}J_a^{m-p}(x-a)^{b-m}.\end{aligned}$$

Kuna $b \geqslant m$ ehk $b - m \geqslant 0$, siis näite 6.1 alusel

$${}_{RL}J_a^{m-p}(x-a)^{b-m} = \frac{\Gamma(b-m+1)}{\Gamma(b-m+1+m-p)}(x-a)^{m-p+b-m} = \frac{\Gamma(b-(m-1))}{\Gamma(b-p+1)}(x-a)^{b-p}.$$

Võrduse (1.4) põhjal

$$\begin{aligned}b(b-1)...(b-(m-1)\Gamma(b-(m-1)) &= b(b-1)...(b-(m-2)\Gamma(b-(m-2)) \\ &= \ldots = \Gamma(b+1)\end{aligned}$$

ja seega

$$(\hat{D}_a^p f)(x) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1-p)}(x-a)^{b-p},$$

kui $b \geqslant m$.

Näide 6.9. Olgu $f(x) = c$ ja $x \in [a, b]$. Siis

$$({}_C D_0^p f)(x) = (\hat{D}_0^p f)(x) = ({}_{RL} J_0^p D^m)(c) = ({}_{RL} J_0^p)(0) = 0.$$

Seega

$$({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f)(x) = 0.$$

ja

$$({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f)(x) = 0.$$

Näide 6.10. Olgu $f(x) = \sqrt{x}$ ja $0 \leqslant x \leqslant b$. Siis näite 6.8 põhjal

$$({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1)} x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Kuna $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ ja $\frac{1}{2} < 1 = \lceil \frac{3}{2} \rceil - 1$, siis ei saa näite 6.8 alusel leida $({}_C D_0^{\frac{3}{2}} f)(x)$ väärtust.

Näide 6.11. Olgu $f(x) = x$ ja $0 \leqslant x \leqslant b$. Siis näite 6.8 põhjal

$$({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1+1)} x^{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

ja

$$({}_C D_0^{\frac{3}{2}} f)(x) = 0,$$

sest $m = \lceil \frac{3}{2} \rceil = 2$ ja $b = 1 \in \{0, m-1\} = \{0, 1\}$.

Näide 6.12. Olgu $f(x) = x^2$ ja $0 \leqslant x \leqslant b$. Siis näite 6.8 põhjal

$$({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+2+1)} x^{-\frac{1}{2}+2} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.$$

ja

$$({}_C D_0^{\frac{3}{2}} f)(x) = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(-\frac{3}{2}+2+1)} x^{-\frac{3}{2}+2} = 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Näide 6.13. Olgu $f(x) = x^3$ ja $0 \leqslant x \leqslant b$. Siis näite 6.8 põhjal

$$({}_C D_0^{\frac{1}{2}} f)(x) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}+3+1)} x^{-\frac{1}{2}+3} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}.$$

ja

$$({}_C D_0^{\frac{3}{2}} f)(x) = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(-\frac{3}{2}+3+1)} x^{-\frac{3}{2}+3} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.$$

Näide 6.14. Olgu $f(x) = e^x$ ja $x \geqslant 0$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(e^x)^{(n)} = e^x$, siis lause 4.1 põhjal

$$({}_C D_0^p f)(x) = ({}_{RL} J_0^{m-p} D^m f)(x) = ({}_{RL} J_0^{m-p} f)(x).$$

Kasutades Mittag-Leffleri funktsiooni definitsiooni (1.9) ja näites 6.7 saadud funktsiooni e^x Riemann-Liouville'i $(m-p)$-järku integraali, saame

$$({}_C D_0^p f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m-p+k+1)} x^{m-p+k} = x^{m-p} E_{1,m-p+1}(x).$$

§ 7. Murrulist järku tuletiste rakendused

On teada, et täisarvulise järguga tuletistel on selged füüsikalised ja geomeetrilised tõlgendused. Viimasel ajal on ka murrulist järku tuletised leidnud laialdast kasutust füüsikas, keemias, rahanduses ja ka mitmetes teistes teadusvaldkondades ([2], lk 3). Selles paragrahvis toome nendest mõned näited.

7.1. Abeli integraalvõrrand

See punkt toetub monograafiale [7].

Definitsioon 7.1. Olgu $0 < a < 1$. Abeli integraalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t \frac{\phi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-a}} = f(t), \quad t > 0, \tag{7.1}$$

kus f on mingi etteantud funktsioon ja ϕ on otsitav funktsioon.

Abeli integraalvõrrandit on põhjalikult uuritud ja see on leidnud rakendusi mitmetes valdkondades (näiteks viskoelastsuse kirjeldamisel).

Kui f on pidevalt diferentseeruv, siis Abeli integraalvõrrandi lahend esitub seosega

$$\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^a}, \quad t > 0.$$

Me näeme, et kui $p > 0$, $m = \lceil p \rceil$ ja $a = p - m + 1$, siis võrrandi (7.1) lahend ϕ avaldub murrulist järku tuletisena funktsioonist f:

$$\phi(t) = ({}_{RL}D_0^a f)(t), \quad t > 0. \tag{7.2}$$

Mitmete praktiliste probleemide lahendused taanduvad integraalvõrranditeks, mis esmapilgul ei pruugi omada midagi ühist Abeli integraalvõrrandiga, aga mis on siiski sellega samaväärsed. Toome nendest mõned näited.

a) Vaatleme võrrandit

$$\int_0^\infty \frac{\phi(\sqrt{s^2+y^2})}{\sqrt{s^2+y^2}} ds = \frac{f(y)}{2y}, \quad y > 0, \tag{7.3}$$

kus ϕ on otsitav funktsioon ja f on mingi pidevalt diferentseeruv funktsioon. Tähistades

$$\frac{\phi(r)}{r} = F(r^2),$$

saame võrrandi (7.3) kirjutada kujul

$$\int_0^\infty F(s^2+y^2)ds = \frac{f(y)}{2y}.$$

Tehes asendused $x = y^2$ ja $\xi = s^2$, saame

$$\int_0^\infty \xi^{-\frac{1}{2}} F(x+\xi)d\xi = \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \tag{7.4}$$

Muutujavahetus $\tau = (x+\xi)^{-1}$ võimaldab võrrandi (7.4) vasaku poole kirjutada kujul

$$\begin{aligned}
\sqrt{x}\int_0^\infty \xi^{-\frac{1}{2}} F(x+\xi)d\xi &= \int_{x^{-1}}^0 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\frac{1}{\tau}-x}} F(\frac{1}{\tau})(-\tau^{-2})d\tau \\
&= \int_0^{x^{-1}} \frac{\sqrt{x\tau}}{\sqrt{1-x\tau}} F(\tau^{-1})\tau^{-2}d\tau \\
&= \int_0^{x^{-1}} \left(\frac{1-x\tau}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} F(\tau^{-1})\tau^{-\frac{3}{2}}d\tau \\
&= \int_0^{x^{-1}} \left(x^{-1}-\tau\right)^{-\frac{1}{2}} F(\tau^{-1})\tau^{-\frac{3}{2}}d\tau.
\end{aligned}$$

Seega seos (7.4) võtab kuju

$$\int_0^{x^{-1}} \left(x^{-1}-\tau\right)^{-\frac{1}{2}} F(\tau^{-1})\tau^{-\frac{3}{2}}d\tau = f(\sqrt{x}).$$

Tähistades

$$t = \frac{1}{x} \quad \text{ja} \quad \psi(\tau) = \tau^{-\frac{3}{2}}F(\tau^{-1}),$$

saame võrrandi

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}}\psi(\tau)d\tau = f(\frac{1}{\sqrt{t}}).$$

See on võrrand kujul (7.1), kus $a = \frac{1}{2}$. Paneme tähele, et jagades selle võrrandi mõlemad pooled läbi arvuga $\Gamma(\frac{1}{2})$, saame võrduse vasakule poolele Riemann-Liouville'i $\frac{1}{2}$-järku integraali funktsioonist $\psi(t)$. Seega

$$\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}f)(\frac{1}{\sqrt{t}})$$

ja, tehes tagasiasendused, saame, et võrrandi (7.3) lahend ϕ avaldub kujul

$$\phi(t) = tF(t^2) = t^{-2}\psi(t^{-2}) = \frac{t^{-2}}{\Gamma(\frac{1}{2})}({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}}f)(t), \quad t>0.$$

b) Vaatleme Poisson'i integraalvõrrandit kujul

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r\cos w)\sin^{2v+1} w dw = f(r), \quad r > 0, \tag{7.5}$$

kus ψ on otsitav funktsioon ja f on mingi pidevalt diferentseeruv funktsioon. Osutub, et võrrand (7.5) on samaväärne Abeli integraalvõrrandiga (7.1). Tõepoolest, peale muutujavahetust $x = r\cos w$ saame

$$\int_0^r \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^v \psi(x)dx = rf(r),$$

sest $(\arccos z)' = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ja $\sin(\arccos z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$. Seejärel, tähistades $y = r^{-2}$ ja $\rho(y) = y^{-\frac{1}{2}}f(y^{-\frac{1}{2}})$, saame võrrandi

$$\int_0^{y^{-\frac{1}{2}}} (1 - yx^2)^v \psi(x)dx = \rho(y),$$

mille saab teguriga y^{-v} läbi korrutades kirjutada kujul

$$\int_0^{y^{-\frac{1}{2}}} (y^{-1} - x^2)^v \psi(x)dx = y^{-v}\rho(y).$$

Tehes asendused $\tau = x^2$ ja $t = y^{-1}$ ning tähistades

$$\phi(\tau) = \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}} \quad \text{ja} \quad g(t) = 2t^v\rho(\frac{1}{t}),$$

jõuame Abeli integraalvõrrandini kujul

$$\int_0^t (t-\tau)^v \phi(\tau)d\tau = g(t), \quad t > 0,$$

Seega

$$\phi(t) = \frac{1}{\Gamma(v+1)}({}_{RL}D_0^{v+1}g)(t),$$

ning järelikult võrrandi (7.5) lahend ψ avaldub kujul

$$\begin{aligned}\psi(t) = t\phi(t^2) &= \frac{t}{\Gamma(v+1)}({}_{RL}D_0^{v+1}g)(t^2) = \frac{t}{\Gamma(v+1)}({}_{RL}D_0^{v+1})(2t^{2v}\rho(t^{-2})) \\ &= \frac{t}{\Gamma(v+1)}({}_{RL}D_0^{v+1})(2t^{2v+1}f(t)), \quad t > 0.\end{aligned}$$

c) Vaatleme integraalvõrrandit kujul

$$\int_0^y \frac{1}{(y^2-x^2)^b}\psi(x)dx = f(y), \quad y>0, \tag{7.6}$$

kus $0<b<1$, ψ on otsitav funktsioon ja f on mingi pidevalt diferentseeruv funktsioon. Tehes asendused $\tau = x^2$ ja $t = y^2$, tähistades $\phi(\tau) = \frac{\psi(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau}}$ ning jagades võrrandi (7.6) pooli läbi teguriga $\Gamma(1-b)$, saame Abeli integraalvõrrandi kujul

$$\frac{1}{\Gamma(1-b)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^b}\phi(\tau)d\tau = \frac{2}{\Gamma(1-b)}f(\sqrt{t}).$$

Seega

$$\phi(t) = \frac{2}{\Gamma(1-b)}({}_{RL}D_0^{1-b}f)(\sqrt{t})$$

ning järelikult algse integraalvõrrandi (7.6) lahendiks ψ on

$$\psi(t) = t\phi(t^2) = \frac{2t}{\Gamma(1-b)}({}_{RL}D_0^{1-b}f)(t^2), \quad t>0.$$

7.2. Difusiooni modelleerimine

Tavalise, Fick'i difusiooni all mõistetakse osakeste liikumist kõrgema kontsentratsiooniga alast madalama kontsentratsiooniga alasse. Ühemõõtmelisel juhul iseloomustab osakeste kontsentratsiooni Gaussi jaotus ja seda kirjeldab difusioonivõrrand

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x^2}. \tag{7.7}$$

Võrrandi (7.7) lahend $\phi(x,t)$ võib näiteks iseloomustada materjali temperatuuri punktis x ajahetkel t.

Sellel protsessil leidub erandeid. Näiteks koopiamasinates ja laserprinterites olevates pooljuhtides toimuv aukude ja elektronide liikumine ei järgi tavalist difusiooni. Osutub, et sellise erandliku difusiooni võrrandiks on

$$({}_{RL}D_0^p\phi)(x,t) = \frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}, \tag{7.8}$$

kus funktsiooni ϕ Riemann-Liouville'i p-järku tuletis on võetud aja t järgi. Paneme tähele, et kui $p=1$, siis võrrand (7.8) ühtib tavalise difusioonivõrrandiga (7.7). Kui $p<1$, siis on tegemist subdifusiooniga ehk osakesed liiguvad aeglaselt, ja kui $p>1$, siis on tegemist superdifusiooniga ehk osakeste kiire liikumisega. Subdifusiooni näideteks on saasteainete liikumine põhjavees, reostuse levik keskkonnaõnnetuste korral ja valkude difusioon läbi rakumembraanide. Superdifusiooni näideteks on suurte molekulide liikumine kristalsetel pindadel, merelindude (nt albatrossi) lend ja reostuse levik meres ([5], lk 17-19).

7.3. Muud rakendused

Murrulist järku tuletistega saab suurepäraselt kirjeldada mälu ja teiste päritavate omadustega protsesse ja materjale ([2], lk 4).

Murrulist järku diferentsiaal- ja integraalvõrrandid leiavad rakendust ka järgmistes uurimisalades: viskoelastsed materjalid, polümeersed materjalid, helilainete levik mittehomogeensetes poorsetes materjalides (nagu näiteks inimeste luudes), maavärinate dünaamika, elektriliinide temperatuuri modelleerimine, äärte tuvastamine masinnägemisega, optika, geoloogia, meditsiin, statistika ja astrofüüsika. Loodud on ka murrulist järku mudeleid armastusest ja emotsioonidest. On kindlaks tehtud, et need on täpsemad, kui täisarvulist järku diferentsiaalvõrrandeid kasutavad mudelid ([5], lk 20-21).

Fractional derivatives

Bachelor's Thesis

Märten Heinsalu

Summary

This thesis consists of five parts.

The first section contains definitions and theorems that are needed in following sections. These mostly regard Euler's gamma and beta functions. This includes the domain of Euler's gamma function, the relationship between the two functions and the gamma function's limit representation.

The second section consists of three chapters and provides Grünwald-Letnikov's, Riemann-Liouville's and Caputo's approaches to fractional derivatives. Each chapter includes the definitions, the reasoning behind those definitions and some of the more important properties of those definitions.

The third section concerns the relationships between the three previously stated definitions of fractional derivatives. Firstly, it explores the connection between Riemann-Liouville's and Caputo's fractional differential operators, and secondly, the relationship between Riemann-Liouville's and Grünwald-Letnikov's definitions of fractional derivatives.

The fourth section gives examples on how to find fractional derivatives of some power functions based on the three different definitions explored in this paper. The example functions are $(x-a)^b$, $\sqrt{x}$, x^2, x^3 and the constant function $f(x) = c$.

The final section gives examples of the applications of fractional derivatives. It primarily focuses on how to solve Abel's integral equation and equations that are equivalent to Abel's integral equation using fractional order derivatives and how to model some special cases of diffusion.

Kasutatud kirjandus

[1] M. Bashour, M. Dalir, *Applications of fractional calculus,* Appl. Math. Sci. (Ruse) **4** (2010) 1021–1032.

[2] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type,* Springer, London, 2010.

[3] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I,* Eesti Raamat, Tallinn, 1965.

[4] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs II,* Valgus, Tallinn, 1968.

[5] P. S. V. Nataraj, *Fractional Calculus and Fractional Differential Equations with SCILAB,* Indian Institute Of Technology, Mumbai, 2010.

[6] A. Pedas, G. Vainikko *Harilikud diferentsiaalvõrrandid,* Tartu Ülikool, Tartu, 2011.

[7] I. Podlubny, *Fractional differential equations,* Academic Press, San Diego, 1999.

Lisa 1

Mõnede funktsioonide erinevate definitsioonide põhjal leitud tuletiste võrdlus

Kuna seose (5.3) põhjal on kõikide siin vaadeldavate funktsioonide Riemann-Liouville'i ja Grünwald-Letnikovi tuletised võrdsed, siis järgnevad tabelid sisaldavad vaid Riemann-Liouville ja Caputo tuletisi.

Funktsioon $f(x)$, $x > 0$	$({}_{RL}D_0^{\frac{1}{2}} f)(x)$	$({}_{C}D_0^{\frac{1}{2}} f)(x)$
$f(x) = c$	$c(x\pi)^{-\frac{1}{2}}$	0
$f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = x$	$2(\frac{x}{\pi})^{\frac{1}{2}}$	$2(\frac{x}{\pi})^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = x^2$	$\frac{8}{3\pi^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{8}{3\pi^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}}$
$f(x) = x^3$	$\frac{16}{5\pi^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{5}{2}}$	$\frac{16}{5\pi^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{5}{2}}$
$f(x) = e^x$	$\frac{1}{\sqrt{x}}E_{1,\frac{1}{2}}(x)$	$\sqrt{x}E_{1,\frac{3}{2}}(x)$

Funktsioon $f(x)$, $x > 0$	$({}_{RL}D_0^{\frac{3}{2}} f)(x)$	$({}_{C}D_0^{\frac{3}{2}} f)(x)$
$f(x) = c$	$-\frac{c}{2\pi^{\frac{1}{2}}}x^{-\frac{3}{2}}$	0
$f(x) = \sqrt{x}$	0	ei leidu
$f(x) = x$	$(\frac{1}{x\pi})^{\frac{1}{2}}$	0
$f(x) = x^2$	$4(\frac{x}{\pi})^{\frac{1}{2}}$	$4(\frac{x}{\pi})^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = x^3$	$\frac{8}{3\pi^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{8}{3\pi^{\frac{1}{2}}}x^{\frac{3}{2}}$
$f(x) = e^x$	$x^{-\frac{3}{2}}E_{1,-\frac{1}{2}}(x)$	$\sqrt{x}E_{1,\frac{3}{2}}(x)$

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina_________________________Märten Heinsalu_________________________________

(*autori nimi*)

(sünnikuupäev:__17.01.1991____)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

________________________Murrulised tuletised_____________________________________,

(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendaja on _________________Arvet Pedas__________________________________,

(*juhendaja nimi*)

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **04.06.2013**