

СТЕРЕОМЕТРІЯ

К. ГЕХЕЛЯ.

ТРЕТЬЕ ИЗДАНИЕ.

РЕВЕЛЬ 1887.

ИЗДАНИЕ КНИЖНАГО МАГАЗИНА

ФРАНЦА КЛУГЕ.

4 XII
A-3107

СТЕРЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ УПОТРЕБЛЕНІЯ

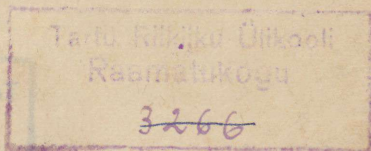
ВЪ ГИМНАЗІЯХЪ И РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩАХЪ.

Составилъ

Д^{ръ} К. ГЕХЕЛЬ.

Одобрено Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія
какъ учебникъ для гимназій и реальныхъ училищъ.

ТРЕТЬЕ ИЗДАНИЕ.



РѢВЕЛЬ 1887.

Изданіе книжнаго магазина Франца Клуге.

У О. Кранца въ С. Петербургѣ, И. Дейнера въ Москвѣ, Э. Венде и Коп. въ Варшавѣ,
Э. Лямбека въ Вильнѣ, Г. Лехелина въ Киевѣ, Э. Берншта въ Одессѣ.

Цѣна 70 коп.

Первая часть. Планиметрия (§ 1 — § 155).

Вторая часть. Стереометрия (§ 156 — § 270).

Третья часть. Плоская Тригонометрия (§ 271 — § 327).

4 x 11 A

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

3107

Оглавленіе.

I.	О прямыхъ линіяхъ и плоскостяхъ въ пространствѣ	§§ 156—185
II.	О многогранныхъ углахъ	§§ 186—191
III.	О многогранникахъ	§§ 192—219
IV.	О цилиндрѣ	§§ 220—225
V.	О конусѣ	§§ 226—234
VI.	О шарѣ	§§ 235—250
VII.	Дополнительныя теоремы къ шару .	§§ 251—264
VIII.	Задачи	§§ 265—270

Объясненіе знаковъ.

$=$ означаетъ равно.

$\angle$ „ менѣе.

$\sphericalangle$ „ болѣе.

$\parallel$ „ параллельно.

$\equiv$ „ равно и параллельно.

$\approx$ „ подобно.

$\cong$ „ равно и подобно.

$\sphericalangle$ „ уголъ.

$\perp$ „ перпендикулярно.

$\triangle$ „ треугольникъ.

$\frown$ „ дуга.

I. О прямыхъ линияхъ и плоскостяхъ въ пространствѣ.

§ 156. Стереометрія разсматриваетъ различныя сочетанія плоскостей и линій въ пространствѣ, изучаетъ геометрическія тѣла и поверхности и даетъ способы ихъ измѣренія.

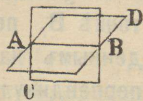
Провести плоскость чрезъ данную прямую значитъ провести плоскость такъ, чтобы съ нею вполнѣ совпала данная прямая.

Если прямая имѣетъ съ плоскостью только одну общую точку, а всѣми остальными точками лежитъ внѣ плоскости, то прямая пересѣкаетъ плоскость.

Если прямая линія пересѣкаетъ плоскость и перпендикулярна ко всѣмъ прямымъ, проведеннымъ въ этой плоскости чрезъ точку пересѣченія, то она называется перпендикуляромъ къ плоскости, а плоскость перпендикулярною къ прямой линіи.

Прямая линія и плоскость параллельны, если онѣ при произвольномъ продолженіи не пересѣкаются; точно также и двѣ плоскости параллельны, если не пересѣкаются, сколько бы онѣ не были продолжены.

§ 157. Двѣ прямыя, лежащія въ одной плоскости, всегда параллельны, если при произвольномъ продолженіи не встрѣчаются. Но въ пространствѣ двѣ прямыя могутъ имѣть такое положеніе, что не встрѣчаются при произвольномъ продолженіи, а всетаки не параллельны. Положимъ что двѣ плоскости *C* и *D* проходятъ чрезъ прямую *AB*, и что изъ двухъ какихъ нибудь точекъ этой прямой возставлены къ ней перпендикуляры *AC* и *BD*, одинъ въ плоскости *C*, другой въ плоскости *D*; эти перпендикуляры не будутъ параллельны между собою, но и не пересѣкнутся.



§ 158. Черезъ три точки, не лежащія на одной прямой, можно провести только одну плоскость; слѣдовательно положеніе плоскости совершенно опредѣляется тремя точками, не лежащими на одной прямой.

Положимъ, что двѣ точки будутъ соединены прямою, черезъ которую проведена плоскость. Обращая около прямой, какъ около неподвижной оси, эту плоскость, мы ей можемъ дать безконечно большое число различныхъ положеній. Возьмемъ гдѣ нибудь внѣ прямой еще точку и будемъ вращать плоскость до тѣхъ поръ, пока она не пройдетъ и черезъ эту точку, тогда отъ малѣйшаго вращенія плоскость должна оставить взятую нами третью точку, слѣдовательно положеніе плоскости, проходящей черезъ три данныя точки, не лежащія на одной прямой, неизмѣнно, и всѣ плоскости, проходящія черезъ три общія точки, сольются.

§ 159. 1) Черезъ двѣ пересѣкающіяся или параллельныя прямыя можно провести только одну плоскость, потому что всѣ плоскости, проходящія черезъ двѣ такія линіи, будутъ имѣть три общія точки, не лежащія на одной прямой, и потому совмѣщаются.

2) Черезъ данную точку въ пространствѣ можно провести только одну линію параллельную данной прямой.

3) Черезъ четыре или болѣе точки можно провести или только одну плоскость или ни одной.

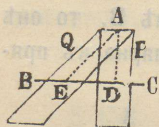
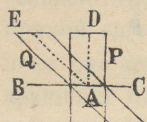
§ 160. Пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линія.

Если бы между точками, общими той и другой плоскости, были три не лежащія на одной прямой точки, то плоскости слились бы, а не пересѣклись.

§ 161. Если прямая АВ, пересѣкающая плоскость М въ точкѣ В, перпендикулярна къ двумъ прямымъ ВС и BD, проведеннымъ на плоскости М черезъ точку пересѣченія В, то она перпендикулярна и ко всякой другой прямой BE, проведенной черезъ ея основаніе В на той же плоскости, а слѣд. перпендикулярна и къ самой плоскости.

ромъ по BC , мы получимъ въ первомъ случаѣ $\angle BAD = d = CAD$, а въ второмъ тре—къ ABC , имѣющій два прямыхъ угла, что одинаково невозможно.

§ 164. Черезъ точку A , находящуюся на прямой BC или внѣ ея, можно провести только одну плоскость P , перпендикулярную къ этой прямой.



Положимъ, что кромѣ P можно провести еще плоскость $Q \perp BC$, тогда, проведя въ первомъ случаѣ чрезъ BC плоскость, которая пересѣчетъ плоскости P и Q по линіямъ AD и AE , получимъ $\angle BAD = d = BAE$. Проведя же во второмъ случаѣ плоскость чрезъ точку A и линію BC , получимъ тре—къ ADE съ двумя прямыми углами. Такъ какъ оба слѣдствія невозможны, то и самое предположеніе, что $Q \perp BC$, также невозможно.

§ 165. Если изъ точки A , лежащей внѣ плоскости M , проведемъ къ этой плоскости перпендикуляръ AB и нѣсколько наклонныхъ $AC, AD, AE \dots$, то

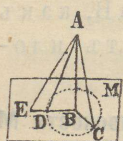
- 1) перпендикуляръ будетъ короче всякой наклонной;
- 2) наклонныя AC и AD , которыхъ основанія равно удалены отъ основанія перпендикуляра, равны между собою;
- 3) изъ двухъ наклонныхъ AE и AC та больше, которой основаніе дальше отстоитъ отъ основанія перпендикуляра.

1) Всякая наклонная, напр. AC , какъ гипотенуза прямоугольнаго тре—ка, болѣе катета AB .

2) Если $BC = BD$, то $\triangle ABC \cong ABD$, слѣд. $AC = AD$.

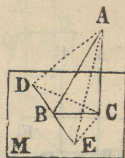
3) Если $BE > BC$, и если въ тре—кѣ ABE будетъ проведена линія AD такъ, что $BD = BC$, то $AE > AD$, слѣд. и $AE > AC$.

Слѣдствіе. Перпендикуляръ AB , какъ кратчайшая линія, которую можно провести изъ точки A на плоскость M , служить мѣрою разстоянія точки A отъ плоскости M .



§ 166. Если из точки C , основанія перпендикуляра AC къ плоскости M , проведемъ CB перпендикулярно къ линіи DE , находящейся въ этой плоскости, то прямая AB будетъ перпендикулярна къ DE .

Отложимъ $BD = BE$ и проведемъ AD, AE, CD, CE , тогда $CD = CE$, слѣд. $AD = AE$ (§ 165), и потому $\triangle ABD \cong ABE$, изъ чего слѣдуетъ, что $\angle ABD = ABE$, слѣд. $AB \perp DE$.



Слѣдствія. 1) Прямая DE перпендикулярна къ плоскости, проходящей чрезъ линіи AB и BC (§ 161).

2) Кратчайшее разстояніе линій DE и AC , не параллельныхъ и не встрѣчающихся, есть линія BC , перпендикулярная къ обѣмъ прямымъ, потому что соединивъ двѣ другія произвольныя точки A и E этихъ линій, мы получимъ $AE > AB > BC$ (§ 165, 3; § 25).

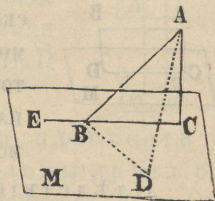
§ 167. Если изъ точки A внѣ плоскости M (фиг. § 168) проведемъ на M наклонную линію AB и перпендикуляръ AC , и соединимъ ихъ основанія B и C , то острый уголъ ABC называется угломъ наклоненія линіи AB къ плоскости M , а прямая BC проекціею линіи AB на плоскости M .

Плоскость M , въ которой лежитъ проекція линіи AB , называется плоскостью проекцій, а плоскость ABC — проектирующею.

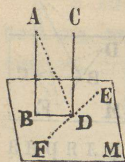
§ 168. Уголъ ABC наклоненія линіи AB съ плоскостью M есть самый меньшій изъ всѣхъ угловъ, которые наклонная AB образуетъ съ прямыми, проведенными на плоскости M чрезъ ея основаніе B , напр. съ прямою BD .

Отложимъ $BD = BC$ и проведемъ AD . Такъ какъ $AC \perp M$, то $AC < AD$ (§ 165, 1), слѣд. и $\angle ABC < ABD$ (§ 35).

Слѣдствіе. Уголъ ABE , смежный съ ABC , самый большій изъ всѣхъ угловъ, которые прямая AB образуетъ съ прямыми, проведенными въ плоскости M чрезъ ея основаніе B .



§ 169. Если из двух параллельных линий одна (AB) перпендикулярна къ плоскости М, то и другая (CD) перпендикулярна къ этой плоскости.



Соединимъ прямою BD основанія параллельныхъ линий, проведемъ въ плоскости М прямою $EF \perp BD$, и соединимъ точки А и D. Такъ какъ $AB \perp BD$ и $CD \parallel AB$, то и $CD \perp BD$. Линія FE перпендикулярна къ плоскости ADB (§ 166, 1), слѣд. и къ линіи CD, лежащей въ этой плоскости. Такъ какъ теперь CD перпендикулярна къ BD и FE, то $CD \perp M$ (§ 161).

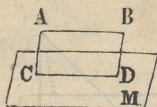
§ 170. Если двѣ прямыя AB и CD перпендикулярны къ одной и той же плоскости М, то онѣ параллельны (фиг. § 169).

Положимъ что CD не параллельна AB, тогда чрезъ точку D можно провести прямую, параллельную AB, которая будетъ перпендикулярна къ М (§ 169). Такимъ образомъ мы получили бы въ точкѣ D два перпендикуляра къ плоскости М, что невозможно (§ 163).

§ 171. Двѣ линіи въ пространствѣ, параллельныя третьей, параллельны между собою.

Плоскость, проведенная перпендикулярно къ третьей линіи, должна быть перпендикулярна и къ двумъ остальнымъ (§ 169), потому двѣ первыя прямыя, какъ перпендикуляры къ одной и той же плоскости, параллельны между собою (§ 170).

§ 172. Прямая AB параллельна плоскости М, если она параллельна прямой CD, лежащей въ этой плоскости.

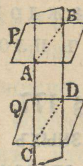


Если бы прямая AB, лежащая въ плоскости ABCD, пересѣкла плоскость М, то это могло бы случиться только въ какой нибудь точкѣ прямой CD, т. е. общаго пересѣченія обѣихъ плоскостей; но $AB \parallel CD$, слѣд. прямая AB не можетъ пересѣчь плоскость М.

Слѣдствіе. Чрезъ какую нибудь точку внѣ плоскости можно провести безчисленное множество прямыхъ, параллельныхъ этой плоскости.

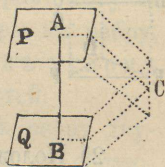
§ 173. Пересѣченія AB и CD двухъ параллельныхъ плоскостей P и Q третью плоскостью, параллельны между собою.

Прямая AB и CD , лежащая въ одной и той же плоскости, не могутъ пересѣчься, потому что онѣ находятся въ то же время въ параллельныхъ плоскостяхъ P и Q , слѣдовательно, параллельны между собою.



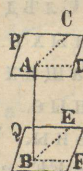
§ 174. Двѣ плоскости P и Q , перпендикулярныя къ одной и той же прямой AB , параллельны между собою.

Если бы плоскости пересѣклись, то, соединивъ какую нибудь точку C , лежащую на линіи пересѣченія, съ точками A и B , мы получили бы тре—къ ABC съ двумя прямыми углами, что невозможно, слѣд. плоскости P и Q должны быть параллельны.



§ 175. Если двѣ плоскости P и Q параллельны, то прямая AB , перпендикулярная къ одной плоскости Q , перпендикулярна и къ другой P .

Проведемъ чрезъ AB двѣ произвольныя плоскости, которыя пересѣкутъ плоскость P по линіямъ AC и AD , а плоскость Q по линіямъ BE и BF . Такъ какъ $AC \parallel BE$, $AD \parallel BF$ (§ 173) и $\angle ABE = d = ABF$ (§ 156), то и $\angle BAC = d = BAD$, слѣд. $AB \perp P$ (§ 161).



§ 176. Параллельныя линіи AB и CD , заключающіяся между параллельными плоскостями P и Q , равны между собою.

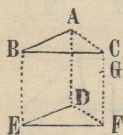
Проведемъ чрезъ AB и CD плоскость, тогда линіи пересѣченія этой плоскости съ плоскостями P и Q параллельны (§ 173), слѣдовательно $ABCD$ параллелограмъ и потому $AB = CD$.



Слѣдствія. 1) Параллельныя плоскости во всѣхъ своихъ точкахъ равно удалены другъ отъ друга, потому что прямая AB и CD и въ такомъ случаѣ будутъ равны, когда онѣ перпендикулярны къ обѣимъ плоскостямъ.

2) Всякая прямая, проведенная между двумя параллельными плоскостями перпендикулярно къ каждой изъ нихъ, служить мѣрою разстоянія этихъ плоскостей другъ отъ друга.

§ 177. Если стороны двухъ угловъ ABC и DEF , лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ и обращенныхъ отверстіями въ одну и ту же сторону, взаимно параллельны, то 1) такіе углы равны, и 2) плоскости ихъ параллельны.

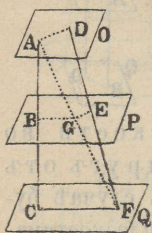


1) Отложимъ $BA = ED$, $BC = EF$, и проведемъ AC , DF , $BE...$, тогда $ABED$ будетъ параллелограмъ, и потому $AD \parallel BE$. Точно также $CF \parallel BE$, слѣд. $AD \parallel CF$, т. е. $ACFD$ параллелограмъ, откуда $AC = DF$. Такъ какъ $\triangle ABC \cong DEF$, то $\angle ABC = \angle DEF$.

2) Положимъ, что плоскости ABC и DEF не параллельны, и что чрезъ точку B проведена плоскость, которая параллельна къ плоскости DEF и пересѣчетъ прямую CF въ точкѣ G , тогда $GF = BE$ (176); но такъ какъ $CF = BE$, то $GF = CF$, что невозможно, поэтому плоскость $ABC \parallel DEF$.

Слѣдствие. Если соединить концы трехъ равныхъ и параллельныхъ прямыхъ BE , AD , CF , не лежащихъ въ одной плоскости, то образуются равные тре—ки, которыхъ плоскости параллельны. Такъ какъ $BE \parallel AD \parallel CF$, то $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$, слѣд. $\triangle ABC \cong DEF$ и по прежнему доказательству плоскости этихъ тре—ковъ параллельны.

§ 178. Двѣ прямыя въ пространствѣ AC и DF дѣлятся параллельными плоскостями O , P , Q на пропорціональныя части.



Соединимъ точки A и F прямою AF , которая пересѣчетъ плоскость P въ точкѣ G , и проведемъ чрезъ точки A , D , F , и чрезъ точки A , C , F плоскости, которыя пересѣкутся съ плоскостями O , P , Q по линиямъ AD , GE и CF , BG . Такъ какъ $AD \parallel GE$, $CF \parallel BG$ (§ 173), то получаемъ (§ 97)

$$AB : BC = (AG : GF =) DE : EF.$$

§ 179. 1) Неопредѣленное пространство, находящееся между двумя пересѣкающимися плоскостями, называется двуграннымъ угломъ; самыя плоскости сторонами, а линия пересѣченія сторонъ — ребромъ двуграннаго угла.

2) Два двугранные углы равны, если ихъ можно такъ наложить другъ на друга, что ихъ ребра и стороны совпадутъ.

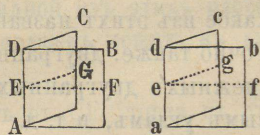
Если одна плоскость пересѣкаетъ другую такъ, что по обѣимъ сторонамъ образуетъ съ ней равные двугранные углы, то эти углы называются прямыми, а каждая изъ плоскостей перпендикулярною къ другой.

3) Если изъ какой нибудь точки ребра двуграннаго угла возставимъ въ плоскостяхъ сторонъ перпендикуляры къ ребру, то образованный ими уголъ называется линейнымъ угломъ двуграннаго, или угломъ наклоненія плоскостей.

Плоскость линейнаго угла перпендикулярна къ ребру двуграннаго угла (§ 161). Въ какой бы точкѣ ребра мы ни образовали линейные углы, всѣ они равны между собою (§ 177).

§ 180. Два двугранные углы $BADC$ и $badc$ относятся какъ ихъ линейные углы FEG и feg .

Если двугранные углы равны, то и ихъ линейные углы также равны. Наложимъ одинъ двугранный уголъ на другой такъ, чтобы они совпали другъ съ другомъ, и чтобы точка e упала въ точку E , тогда линіи ef и EF , eg и EG , также совмѣстятся, потому что углы fea и FEA , gea и GEA , какъ прямые, равны между собою.



Если же двугранные углы не равны, но соизмѣримы, такъ что ихъ общую мѣру, которая также двугранный уголъ, можно отложить въ $BADC$ m разъ, и въ $badc$ n разъ, то будемъ имѣть:

$$BADC : badc = m : n.$$

При отложеніи общей мѣры въ двугранныхъ углахъ линейный уголъ FEG раздѣляется на m , а уголъ feg на n равныхъ частей, потому что равнымъ двуграннымъ угламъ соотвѣтствуютъ и равные линейные углы, слѣд. будетъ

$$FEG : feg = m : n.$$

Изъ обѣихъ этихъ пропорцій слѣдуетъ:

$$\text{BADC} : \text{badc} = \text{FEG} : \text{feg}.$$

Если углы BADC и badc несоизмѣримы, то рассуждая подобно тому, какъ въ § 57, можно доказать, что отношеніе двугранныхъ угловъ не можетъ быть ни больше, ни меньше отношенія линейныхъ угловъ FEG и feg, и слѣд. будетъ равно ему.

§ 181. Слѣдствія. 1) Двугранный уголъ измѣряется соотвѣтствующимъ ему линейнымъ угломъ. Если мы примемъ прямой двугранный уголъ за единицу мѣры двугранныхъ угловъ вообще, то числовая величина всякаго двуграннаго угла будетъ равна числовой величинѣ его линейнаго угла, т. е. всякій изъ нихъ измѣренный своею единицею, даетъ одно и тоже число.

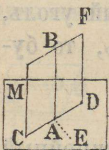
2) Такъ какъ измѣреніе двуграннаго угла приводится къ измѣренію соотвѣтствующаго ему линейнаго, то и дуга круга, заключающаяся между сторонами линейнаго угла, можетъ также служить мѣрою соотвѣтствующаго ему двуграннаго угла.

3) Двугранные углы бываютъ острые, прямые, тупые, дополнительные, смежные, вертикальные и т. д., смотря по тому, какое изъ этихъ названій соотвѣтствуетъ ихъ линейнымъ угламъ. Точно также: двугранные вертикальные углы равны; сумма двухъ смежныхъ двугранныхъ угловъ равна двумъ прямымъ двуграннымъ угламъ, и т. д.

§ 182. Если прямая АВ перпендикулярна къ плоскости М, то и всякая плоскость CF, проведенная чрезъ эту прямую, также перпендикулярна къ плоскости М.

Проведемъ на плоскости М прямую АЕ перпендикулярно къ линіи CD пересѣченія обѣихъ плоскостей, тогда прямая АВ, какъ перпендикуляръ къ плоскости М, будетъ перпендикулярна и къ каждой изъ прямыхъ CD и АЕ. Уголъ наклоненія (BAE) обѣихъ плоскостей — прямой, слѣдовательно плоскость $CF \perp M$.

Слѣдствія. 1) Если три прямые АВ, АС, АЕ, пересѣкающіяся въ одной точкѣ А, взаимно перпендикулярны, то всякая изъ нихъ перпенди-



кулярна къ плоскости, проходящей чрезъ двѣ остальные, и плоскости M , CF и BAE взаимно перпендикулярны.

2) Плоскость угла наклоненія двухъ плоскостей перпендикулярна къ каждой изъ нихъ.

3) Проектирующая плоскость какой либо прямой перпендикулярна къ плоскости проекцій (фиг. § 168).

§ 183. Если двѣ плоскости M и CF взаимно перпендикулярны, то прямая AB , проведенная въ одной плоскости CF перпендикулярно къ линіи пересѣченія CD , будетъ перпендикулярна и къ другой плоскости M (фиг. § 182).

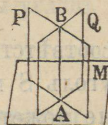
Если проведемъ въ плоскости M прямую $AE \perp CD$, то $\sphericalangle BAE = d$, потому что $CF \perp M$, а такъ какъ и $\sphericalangle BAC = d$, то $AB \perp M$ (§ 161).

§ 184. Если двѣ плоскости M и CF (фиг. § 182) взаимно перпендикулярны, и изъ какой нибудь точки ихъ пересѣченія будетъ проведенъ перпендикуляръ AB къ одной изъ этихъ плоскостей, напр. M , то этотъ перпендикуляръ долженъ лежать въ другой плоскости CF .

Предположимъ, что AB не лежитъ въ CF , тогда въ этой плоскости изъ точки A можно было бы провести перпендикулярную къ общему сѣченію CD прямую, которая въ то же время перпендикулярна къ плоскости M (§ 182); слѣдовательно въ точкѣ A мы имѣли бы два перпендикуляра къ плоскости M , что невозможно (§ 163).

§ 185. Если двѣ плоскости P и Q перпендикулярны къ третьей M , то и линія AB пересѣченія двухъ первыхъ плоскостей перпендикулярна къ третьей плоскости.

Если возставимъ изъ точки A перпендикуляръ къ плоскости M , то онъ долженъ находиться въ плоскости P и въ плоскости Q (§ 184), слѣд. этотъ перпендикуляръ будетъ общимъ пересѣченіемъ AB плоскостей P и Q .



II. О многогранныхъ углахъ.

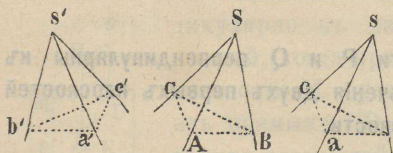
§ 186. 1) Если нѣсколько плоскостей пересѣкаются въ одной и той же точкѣ, то неопредѣленное пространство, заключающееся между этими плоскостями, называется многограннымъ или тѣлеснымъ угломъ, а точка общаго пересѣченія плоскостей — вершиною многограннаго угла.

Плоскости, составляющія многогранный уголъ, называются его сторонами или гранями, а прямая линія, по которой пересѣкаются стороны, — ребрами угла. Линейные углы, составляемые ребрами, называются плоскими углами.

По числу граней или плоскихъ угловъ, которое всегда равно числу реберъ, многогранные углы бываютъ 3, 4, 5... гранные. Подъ именемъ частей многограннаго угла подразумѣваются его плоскіе и двугранные углы, напр. трехгранный уголъ имѣетъ шесть частей, три плоскихъ угла и три двугранныхъ.

2) Два многогранные углы равны, когда при наложеніи другъ на друга они совпадаютъ всѣми своими частями.

Въ равныхъ многогранныхъ углахъ всѣ плоскіе и двугранные углы одного порознь равны тѣмъ же частямъ другого, но обратно изъ равенства частей двухъ тѣлесныхъ угловъ слѣдуетъ равенство самыхъ угловъ только въ такомъ случаѣ, когда соотвѣтственно равныя части въ обоихъ углахъ одинаково расположены. Если же равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ, напр. въ одномъ углѣ такой порядокъ слѣва на право, какой въ другомъ справа на лѣво, то такіе многогранные углы при наложеніи совмѣститься не могутъ и называются симметричными.



Если въ трехгранныхъ углахъ S, s, s' будетъ

$$\angle ASB = asb = a's'b'$$

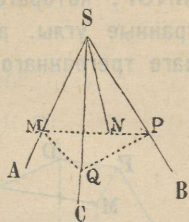
$$\angle ASC = asc = a's'c'$$

$$\angle BSC = bsc = b's'c',$$

и если кромѣ того соотвѣтствующіе двугранные углы равны, тогда трехгранный уголъ S можетъ быть приведенъ въ совпаденіе съ угломъ s , но не можетъ совпадать съ угломъ s' . Углы S и s равны между собою, а S и s' симметричны.

§ 187. Во всякомъ трехгранномъ углѣ $SABC$ сумма двухъ плоскихъ угловъ болѣе третьяго.

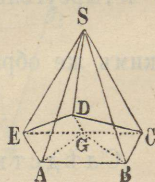
Если все плоскіе углы равны, то предположеніе ясно само собою; если же они не равны, то слѣдуетъ только доказать, что наибольшій уголъ менѣе суммы двухъ остальныхъ. Пусть ASB наибольшій изъ плоскихъ угловъ. Соединимъ двѣ произвольныя точки на сторонахъ этого угла прямою MP и отложимъ въ его плоскости уголъ $MSN = ASC$, а на ребрѣ SC линію $SQ = SN$. Проведемъ прямыя MQ и PQ , тогда $\triangle MSN \cong MSQ$, слѣд. $MN = MQ$. Такъ какъ $MQ + PQ > PM$, то $PQ > PN$. Въ треугольнѣхъ PSQ и PSN сторона PS общая, а $SQ = SN$, слѣд. $\angle PSQ > \angle PSN$, и такъ:



$$\begin{aligned} \angle PSQ + \angle MSQ &> \angle PSN + \angle MSN \\ \angle BSC + \angle ASC &> \angle ASB. \end{aligned}$$

§ 188. Во всякомъ многогранномъ углѣ сумма плоскихъ угловъ менѣе четырехъ прямыхъ.

Пересѣчемъ стороны угла S произвольною плоскостію $ABCDE$, и изъ какой нибудь точки G происшедшаго мно—ка проведемъ къ вершинамъ его угловъ прямыя; тогда около G уобразуется столько же треугольнѣхъ $AGB, BGC, \dots$, сколько ихъ находится около вершины S многограннаго угла, слѣд. и сумма угловъ какъ тѣхъ, такъ и другихъ треугольнѣхъ будетъ одна и таже. Но по § 187

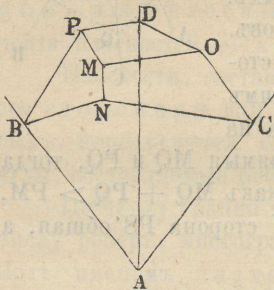


$$\begin{aligned} \angle ABC &< \angle SBA + \angle SBC, \\ \angle BCD &< \angle SCB + \angle SCD \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

посему сумма угловъ мно—ка $ABCDE$ менѣе суммы угловъ при основаніяхъ треугольнѣхъ $ASB, BSC, \dots$, слѣд. сумма угловъ $ASB, BSC, \dots$ при вершинѣ S должна быть менѣе суммы угловъ около точки G , т. е. менѣе четырехъ прямыхъ.

§ 189. Если изъ произвольной точки M внутри трехграннаго угла $ABCD$ провести плоскости перпендикулярно къ его ре-

брамъ, то эти плоскости образуютъ другой трехгранный уголъ $MNOP$, котораго плоскіе углы дополняютъ соответствующіе двугранные углы, а двугранные соответствующіе плоскіе углы перваго трехграннаго угла до двухъ прямыхъ.



Пусть ребра трехграннаго угла A пересѣчены плоскостями въ точкахъ B, C, D . По самому построению уголъ NBP есть линейный двуграннаго угла при ребрѣ AB , слѣд. $\angle ABN = d$ и $\angle ACN = d$. Плоскости BM и CM перпендикулярны къ плоскости BAC , проходящей чрезъ перпендикуляры AB и AC къ плоскостямъ BM и CM (§ 182); слѣд. прямая $MN \perp BAC$ (§ 185), а потому $\angle MNB = d = MNC$, такъ что BNC есть линейный уголъ двуграннаго при ребрѣ MN . Точно также $\angle MPB = d = MPD$. Такъ какъ въ четырехугольникѣ $MNBP$ сумма всѣхъ угловъ равна $4d$, и углы N и P прямые, то

$$\angle NBP + NMP = 2d.$$

Въ четырехугольникѣ $BACN$ по той же причинѣ

$$\angle BAC + BNC = 2d.$$

Такимъ же образомъ можно доказать, что

$$\angle NCO + NMO = 2d. \text{ и т. д.}$$

Слѣдствіе. Чѣмъ тупѣе одинъ изъ обоихъ трехгранныхъ угловъ, тѣмъ болѣе заостренъ другой и обратно.

Ребра каждаго изъ этихъ угловъ перпендикулярны къ сторонамъ другаго.

Каждый изъ трехгранныхъ угловъ A и M называется полярнымъ угломъ другаго.

§ 190. Во всякомъ трехгранномъ углѣ сумма трехъ двугранныхъ угловъ больше 2 прямыхъ и меньше 6 прямыхъ.

Обозначимъ чрезъ B, C, D двугранные углы даннаго трехграннаго угла (фиг. § 189), и чрезъ b, c, d соответствующіе плоскіе углы его полярнаго угла (около точки M), тогда (§ 189)

$$B + b = 2.90^\circ$$

$$C + c = 2.90^\circ$$

$$D + d = 2.90^\circ, \text{ слѣд.}$$

$$(B + C + D) + (b + c + d) = 6.90^\circ.$$

Такъ какъ $b + c + d < 4.90^\circ$ (§ 188), то

$$B + C + D > 2.90^\circ$$

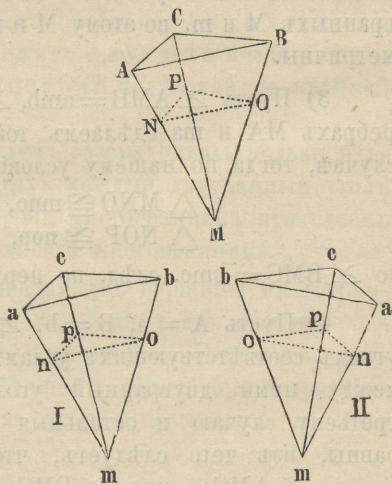
$$B + C + D < 6.90^\circ.$$

§ 191. Два трехгранные угла равны между собою или симметричны, если въ нихъ соответственно равны :

- 1) три плоскіе угла, или
- 2) три двугранные угла, или
- 3) два плоскіе угла и лежащій между ними двугранный уголъ, или
- 4) два двугранные угла и лежащій между ними плоскій уголъ.

Докажемъ, что всѣ части трехгранныхъ угловъ M , m (I) и m (II), удовлетворяющихъ одному изъ 4-хъ приведенныхъ условий, соответственно равны, при чемъ углы M и m (I), въ которыхъ соответственно равныя части одинаково расположены, равны между собою, а углы M и m (II) симметричны, потому что въ нихъ соответственно равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ. Представимъ себѣ что во всѣхъ трехгранныхъ углахъ грани MBC

и mbc лежатъ въ плоскости бумаги, а ребра MA и ma выдаются передъ бумагою. — Доказательство равенства частей въ равныхъ и симметричныхъ трехгранныхъ углахъ одно и то же. Соответствующие двугранные углы многогранныхъ угловъ обозначимъ чрезъ A, B, C и a, b, c .



1) Пусть $\angle AMB = amb$, $\angle AMC = amc$, $\angle BMC = bmc$. Отложимъ на двухъ соответствующихъ ребрахъ равные отрезки MN и mn , и изъ точекъ N и n проведемъ плоскости PNO и pno , перпендикулярныя къ ребрамъ AM и am . Тогда легко вывести, что

$$\begin{aligned}\triangle MNO &\cong mno, \triangle MNP \cong mnp, \\ \triangle MOP &\cong mop, \triangle NOP \cong nop,\end{aligned}$$

слѣд. $\angle ONP = onp$, т. е. $\angle A = a$. Такимъ же построениемъ на другихъ ребрахъ можно доказать, что $\angle B = b$; $\angle C = c$. Изъ этого слѣдуетъ равенство угловъ M и m (I), и симметричность угловъ M и m (II).

2) Пусть $A = a$, $B = b$, $C = c$. Если построимъ полярные углы, соответствующіе даннымъ трехграннымъ M и m , то въ нихъ плоскіе углы равны, потому что дополняютъ равные углы до $2d$, слѣд. по предыдущему и соответствующіе двугранные углы также равны. Отсюда слѣдуетъ обратно равенство соответствующихъ плоскихъ угловъ данныхъ трехгранныхъ M и m , по этому M и m (I) равны, а M и m (II) симметричны.

3) Пусть $\angle AMB = amb$, $\angle AMC = amc$, $A = a$. Если при ребрахъ MA и ma сдѣлаемъ тоже построение какъ въ первомъ случаѣ, тогда по нашему условію $\angle ONP = onp$. Такъ какъ

$$\begin{aligned}\triangle MNO &\cong mno, \triangle MNP \cong mnp, \\ \triangle NOP &\cong nop, \triangle MOP \cong mop,\end{aligned}$$

то $\angle BMC = bmc$, слѣд. по первому случаю $B = b$, $C = c$.

4) Пусть $A = a$, $B = b$, $\angle AMB = amb$. Въ полярныхъ углахъ соответствующихъ угламъ M и m два плоскіе и лежащій между ними двугранный уголъ будутъ равны, слѣд. по третьему случаю и остальные части полярныхъ угловъ также равны, изъ чего слѣдуетъ, что въ данныхъ углахъ M и m $C = c$, $\angle AMC = amc$, $\angle BMC = bmc$.

Слѣдствіе. Трехгранный уголъ вполне определяется, если даны величина и расположеніе трехъ его частей, соответственно одному изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ.

III. О многогранникахъ.

§ 192. 1) Часть пространства, ограниченная со всѣхъ сторонъ кривыми поверхностями или плоскостями, называется тѣломъ, а граница или предѣлъ тѣла — его поверхностью. Если мы измѣряемъ тѣло съ помощію соотвѣтствующей единицы, то получаемъ его объемъ. Два тѣла, независимо отъ ихъ формы, называются равновеликими или равномѣрными, если они имѣютъ равные объемы. Равными же тѣла называются тогда, когда можно ихъ представить такъ наложенными другъ на друга, что они совпадутъ взаимно всѣми своими частями.

2) Если поверхность тѣла состоитъ изъ плоскостей, то такое тѣло называется многогранникомъ. Многоугольники, ограничивающіе многогранникъ, называются его сторонами; прямая, по которымъ пересекаются стороны, — ребрами, точки пересѣченія реберъ — вершинами, а углы, образованные двумя послѣдовательными ребрами — плоскими углами. При каждомъ ребрѣ лежитъ двугранный уголъ, а при каждой вершинѣ — многогранный или по крайней мѣрѣ трехгранный уголъ.

Изъ многогранниковъ мы будемъ разсматривать только выпуклые, т. е. такіе, въ которыхъ каждый двугранный уголъ менѣе $2d$, такъ что каждая сторона многогранника при своемъ продолженіи не встрѣтитъ поверхности многогранника.

3) Всякая прямая, соединяющая двѣ вершины многогранника и не лежащая въ плоскости какой-либо его стороны, называется діагональю многогранника. Плоскость, разсѣкающая многогранникъ и проходящая черезъ ребро и противоположную вершину или чрезъ два ребра, называется діагональною плоскостью.

4) Многогранники называются подобными, если они ограничены подобными и одинаково расположенными сторонами, пересекающимися подъ соотвѣтственно равными двугранными углами.

5) Изъ опредѣленія равенства тѣлъ видно, что въ равныхъ многогранникахъ всѣ части (стороны, ребра, плоскіе и дву-

гранные углы) одного должны быть равны соответствующим частямъ другаго, и что равныя части совершенно одинаково расположены, если мы помѣстимъ оба многогранника какими либо двумя соответственными сторонами по одну и ту же сторону какой либо плоскости.

Но обратно изъ равенства всѣхъ частей не всегда слѣдуетъ равенство самыхъ многогранниковъ. Если соответственно равныя части расположены въ обратномъ порядкѣ, то многогранники будутъ симметричны и при наложеніи другъ на друга не совпадутъ всѣми своими частями.

Два многогранника, симметричные третьему, равны между собою. — Изображеніе многогранника въ плоскомъ зеркалѣ симметрично ему самому.

6) Многогранникъ, въ которомъ двѣ противоположныя стороны равныя и параллельныя многоугольники, а всѣ прочія стороны параллелограммы, называется призмою. Эти два противоположныхъ многоугольника служатъ основаніями призмы. Совокупность площадей всѣхъ параллелограммовъ составляетъ боковую поверхность призмы. Призмы бываютъ трехсторонними, четырехсторонними , смотря по числу сторонъ многоугольниковъ, служащихъ основаніями.

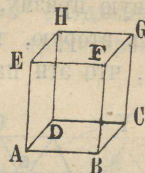
Высота призмы есть разстояніе между ея основаніями, т. е. перпендикуляръ, опущенный изъ произвольной точки верхняго основанія на нижнее. Прямая, по которымъ пересѣкаются плоскости, образующія боковую поверхность, называются боковыми ребрами. — Если боковыя ребра перпендикулярны къ основанію, тогда призма называется прямою, и каждое ребро равно высотѣ призмы; во всякомъ же другомъ положеніи реберъ призма называется косою или наклонною, и ея высота менѣе боковаго ребра.

Всякое сѣченіе призмы плоскостью, параллельною основанію, образуетъ фигуру, равную основанію, потому что въ полученномъ такимъ образомъ мно—кѣ и въ основаніи какъ стороны такъ и углы соответственно равны (§ 173, § 37, § 177).

Каждой вершинѣ призмы прилежатъ три плоскіе угла. Всякая n -сторонняя призма имѣетъ $n + 2$ ограничивающихъ ее плоскостей, $2n$ вершинъ и $3n$ реберъ.

7) Если основаніе призмы будетъ параллелограмъ, то такую призму называютъ параллелепипедомъ, слѣд. параллелепипедъ ограничивается шестью параллелограмми.

Въ параллелепипедѣ каждыя два противолежащія параллелограма, напр. AF и DG , равны другъ другу и лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, потому что стороны этихъ параллелограмовъ соответственно равны и параллельны ($AB \parallel DC$, $AE \parallel DH$...), слѣд. и углы параллелограмовъ равны, а потому $AF \cong DG$ и $AF \parallel DG$ (§ 177).



Всякія двѣ противолежащія стороны параллелепипеда можно разсматривать какъ основанія. Разстояніе сторонъ, принятыхъ за основанія, будетъ высотой параллелепипеда.

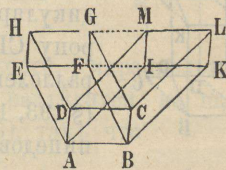
Параллелепипедъ, въ которомъ боковыя стороны перпендикулярны къ основанію, называется прямымъ, въ противномъ же случаѣ — косымъ. Очевидно, что въ прямомъ параллелепипедѣ всѣ боковыя стороны прямоугольники; если сверхъ того и основанія прямоугольники, то параллелепипедъ называется прямоугольнымъ. Въ прямоугольномъ параллелепипедѣ каждыя двѣ пересекающіяся стороны образуютъ прямые двугранные углы.

8) Кубомъ называется прямоугольный параллелепипедъ, ограниченный со всѣхъ сторонъ квадратами.

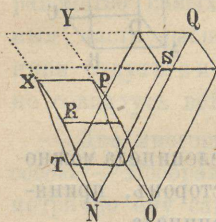
§ 193. Два параллелепипеда, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

Дадимъ параллелепипедамъ такое положеніе, что ихъ нижнія основанія совмѣстятся, а верхнія будутъ лежать въ одной и той же плоскости. При этомъ могутъ быть два случая, а именно будутъ ли кромѣ того двѣ боковыя стороны лежать въ одной плоскости или нѣтъ.

1) Параллелепипеды BH и AL , имѣющіе общее основаніе $ABCD$, органичены съ двухъ боковъ параллельными плоскостями $ABKE$ и $DCLH$, отчего ихъ верхнія основанія лежатъ между параллельными прямыми EK и HL . — Двѣ трехстороннія

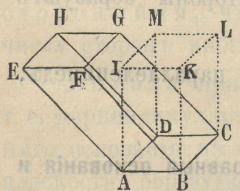


призмы $AEIDHM$ и $BFKCGL$ равны, такъ какъ легко доказать, что всѣ ихъ части соответственно равны и совершенно одинаково расположены. Если мы отнимемъ отъ всего тѣла $ABNL$ первую призму, то получимъ параллелепипедъ AL , а если отнимемъ вторую, то получимъ параллелепипедъ BH , изъ чего слѣдуетъ, что эти параллелепипеды равновелики между собою.



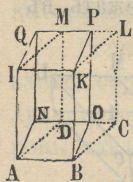
2) Параллелепипеды NP и NQ имѣютъ общее нижнее основаніе TO , а верхнія основанія лежатъ въ одной плоскости, но не между параллельными прямыми. Продолжимъ плоскости OS , TQ , TR , OP , чтобы образовать новый параллелепипедъ NY , который будетъ имѣть основаніями TO и XY . Такъ какъ по предыдущему каждый изъ данныхъ параллелепипедовъ равновеликъ этому новому, то они должны быть равновелики и между собою.

§ 194. Всякій параллелепипедъ $ABCDEFGH$ можетъ быть обращенъ въ прямоугольный, имѣющій съ нимъ равновеликое основаніе и равную высоту.



Проведемъ чрезъ ребра AB , BC , CD , AD плоскости, перпендикулярныя къ нижнему основанію $ABCD$, и продолжимъ до пересѣченія съ ними плоскость верхняго основанія, тогда полученный такимъ образомъ параллелепипедъ $ABML$ будетъ имѣть съ даннымъ одно и то же основаніе и равную высоту, а потому будетъ равновеликъ данному (§ 193). Если теперь AC прямоугольникъ, то прямоугольный параллелепипедъ $ABML$ и будетъ требуемый.

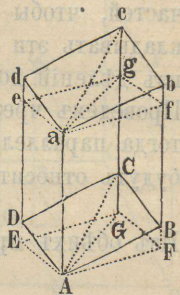
Если же AC не прямоугольникъ, то стоитъ только чрезъ ребра AI и BK провести плоскости, перпендикулярныя къ сторонѣ $ABKI$, и продолжить сторону $CLMD$, тогда образуется прямоугольный параллелепипедъ $ABPQ$, который равновеликъ съ $ABML$ (§ 193, 1), потому что за основаніе обоихъ параллелепипедовъ можно принять ихъ общую сторону $ABIK$. Кромѣ того, такъ какъ въ этихъ параллелепипедахъ основанія равновелики, $ABON = ABCD$, и высоты равны, то изъ этого



слѣдуетъ, что параллелепипеды $ABGH$ и $ABPQ$ имѣютъ равновеликія основанія, равныя высоты и объемы.

§ 195. Всякій параллелепипедъ $ABCDabcd$ раздѣляется діагональною плоскостью на двѣ равновеликія трехстороннія призмы $ABCabc$ и $ADCadc$.

Проведемъ чрезъ оконечности ребра Aa перпендикулярныя къ нему плоскости, тогда параллелепипедъ $AFGEafge$, образованный пересѣченіемъ этихъ плоскостей съ боковыми сторонами даннаго параллелепипеда будетъ прямой и раздѣляется діагональною плоскостью на двѣ равныя призмы $AFGa$ и $AEga$, потому что ихъ части равны и одинаково расположены. Такъ какъ по той же самой причины многогранныя тѣла $ABCGF$ и $abcsf$, $ACDEG$ и $acdeg$ попарно равны, то половины прямого параллелепипеда равновелики по одиначкѣ косымъ призмамъ $ABCabc$ и $ADCadc$, слѣд. и эти послѣднія также равновелики другъ другу.



Слѣдствіе. Трехстороннія призмы, на которыя раздѣляется косой параллелепипедъ діагональною плоскостью, симметричны другъ другу.

§ 196. Прямоугольные параллелепипеды AD и ad , имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты.

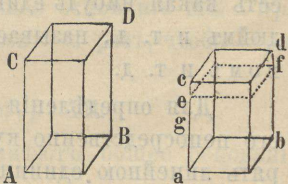
Если высоты AC и ac соизмѣримы и ихъ общая мѣра заключается m разъ въ AC , и n разъ въ ac , тогда $AC : ac = m : n$.

Представимъ себѣ, что по всей длинѣ сторонъ AC и ac отложена общая мѣра и чрезъ полученныя такимъ образомъ точки дѣленія проведены плоскости, параллельныя основаніямъ параллелепипедовъ, тогда AD раздѣлится на m , и ad на n равныхъ параллелепипедовъ (§ 193), такъ что

$$AD : ad = m : n.$$

Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$AD : ad = AC : ac.$$



Эта пропорція должна существовать и въ такомъ случаѣ, когда высоты AC и ac несоизмѣримы. Положимъ что эта пропорція не вѣрна, а существуетъ другая

$$AD : ad = AC : ag,$$

гдѣ $ag < ac$. Раздѣлимъ сторону AC на такое число равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была $< gc$. Если будемъ откладывать эти части на линіи ac , начиная отъ точки a , то одно изъ дѣленій должно упасть гдѣ нибудь въ точкѣ e между g и c . Проведемъ чрезъ точку e плоскость, параллельную плоскости ab , тогда параллелепипеды AD и ae , имѣющіе соизмѣримыя высоты, будутъ относиться

$$AD : ae = AC : ae.$$

Изъ обѣихъ пропорцій получимъ

$$ad : ae = ag : ae,$$

что невозможно, потому что $ad > ae$, а $ag < ae$. Точно также можно доказать, что четвертый членъ пропорціи $AD : ad = AC : ac$ не можетъ быть больше линіи ac , а потому эта пропорція всегда должна быть справедлива.

§ 197. Измѣрить какое нибудь тѣло значитъ опредѣлить, сколько разъ заключается въ немъ другое тѣло, принятое за единицу мѣры. Какъ для измѣренія площадей пользуются квадратомъ, построеннымъ на единицѣ длины, точно также для измѣренія объема или кубическаго содержанія тѣла употребляютъ за единицу кубъ, котораго ребро есть какая нибудь единица длины. Кубъ, котораго ребро футъ, дюймъ и т. д., называется кубическимъ футомъ, дюймовомъ и т. д.

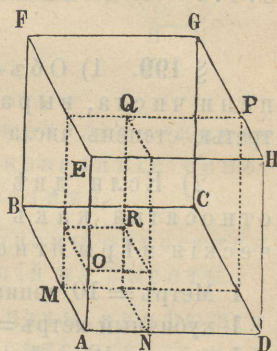
Для опредѣленія объема тѣла нѣтъ надобности, измѣрять его непосредственно кубическою единицею, но достаточно измѣрять линейною единицею нѣкоторыя линіи, отъ которыхъ зависитъ величина тѣла.

§ 198. Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію трехъ его реберъ, пересѣкающихся въ одной изъ его вершинъ, или произведенію его основанія на высоту.

Эту теорему нужно понимать такъ: Если мы измѣряемъ одною и тою же единицею длины три пере-

сѣкающіяся въ одной вершинѣ ребра, и получимъ числа m , n , p , то параллелепипедъ, измѣренный соотвѣтствующею кубическою единицею, дастъ число mnp .

Положимъ, что AG прямоугольный параллелепипедъ, и какаянибудь единица линейной мѣры, напр. футъ, заключается m разъ въ ребрѣ AB , n разъ въ AD , p разъ въ AE , при чѣмъ m , n , p могутъ быть цѣлыми, дробными и ирраціональными числами. Отложимъ отъ вершины A по тремъ ребрамъ линіи AM , AN , AO , равныя единицѣ длины, такъ что $AB = m \cdot AM$, $AD = n \cdot AN$, $AE = p \cdot AO$.



Проведемъ чрезъ точку M плоскость, параллельную сторонѣ AN , чрезъ точку N плоскость параллельную сторонѣ AF , и чрезъ точку O плоскость параллельную основанію AC , тогда полученное такимъ образомъ тѣло AR будетъ кубическая единица, соотвѣтствующая принятой нами линейной. Такъ какъ параллелепипедъ AQ и кубъ AR имѣютъ общее основаніе, то они относятся какъ $AE : AO$ (§ 196), и такъ какъ AE равна p разъ взятой линіи AO , то и кубъ AR нужно взять p разъ, чтобы образовать параллелепипедъ AQ , слѣд.

$$AQ = p \cdot AR.$$

Параллелепипеды AP и AQ имѣютъ общее основаніе ME и при томъ $AD = n \cdot AN$, потому AQ должно взять n разъ, чтобы образовать AP , слѣд.

$$AP = n \cdot AQ \text{ или } AP = n \cdot p \cdot AR.$$

Наконецъ параллелепипеды AG и AP имѣютъ общее основаніе AN и кромѣ того $AB = m \cdot AM$, слѣд.

$$AG = m \cdot AP, \text{ и такъ какъ } AP = n \cdot p \cdot AR, \text{ то}$$

$$AG = mnp \cdot AR \text{ или } \frac{AG}{AR} = mnp.$$

Такъ какъ mnp есть площадь основанія, и p высота даннаго параллелепипеда AG , то его объемъ mnp равенъ произведенію основанія mnp на высоту p .

Если m , n , p цѣлыя числа, напр. 3, 4, 5, то отложивъ принятую линейную единицу на ребрахъ AB , AD , AE и проведя изъ точекъ дѣленія плоскости параллельныя сторонамъ параллелепипеда, мы убѣдимся наглядно, что онъ заключаетъ $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ соотвѣтствующихъ кубическихъ единицъ.

§ 199. 1) Объемъ куба равенъ третьей степени числа, выражающаго длину его ребра. Посему третью степень числа называютъ его кубомъ.

2) Если двѣ какія нибудь линейныя мѣры относятся какъ $m:n$, то соотвѣтствующія кубическія мѣры относятся какъ $m^3:n^3$. Напр.

1 Метръ = 10 дециметрамъ = 100 сантиметрамъ,

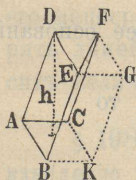
1 кубичный метръ = 1000 куб. децим. = 1000000 куб. сантим.

1 футъ = 12 дюймамъ, 1 куб. футъ = 1728 куб. дюймамъ.

§ 200. Объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію изъ его основанія на высоту.

Такъ какъ всякій параллелепипедъ равновеликъ прямоугольному, имѣющему съ нимъ равновеликое основаніе и равную высоту (§ 194), а объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію основанія на высоту (§ 198), то и объемъ всякаго параллелепипеда равенъ произведенію основанія на высоту.

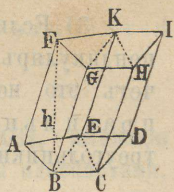
§ 201. Объемъ всякой призмы равенъ произведенію ея основанія на высоту.



1) Рассмотрим сначала треугольную призму $ABCDEF$, которой высота h . Проведя изъ точекъ B , C , E , F линіи, параллельныя ребрамъ AC , AB , DF , DE , дополнимъ призму до параллелепипеда AG , имѣющаго ту же высоту h . Такъ какъ $AG = ABKC \times h$ (§ 200) и призма $ABCDEF = \frac{1}{2} AG$ (§ 195), то

$$ABCDEF = \frac{ABKC}{2} \times h = ABC \times h.$$

2) Многоугольную призму $ABCDEFGH\text{IK}$ можно раздѣлить на нѣсколько треугольных, имѣющихъ съ нею ту же высоту h . Объемы этихъ призмъ будутъ $ABE \times h$, $BCE \times h$, $CDE \times h$, слѣд. сумма ихъ, т. е. объемъ многоугольной призмы равна



$$(ABE + BCE + CDE) h = ABCDE \times h.$$

§ 202. Слѣдствія. 1) Два параллелепипеда или двѣ призмы, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

2) Параллелепипеды или призмы относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

3) Параллелепипеды или призмы, имѣющія равновеликія основанія, относятся какъ ихъ высоты, а имѣющія равныя высоты, относятся какъ основанія.

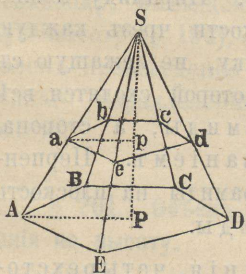
§ 203. 1) Многогранникъ, котораго одна сторона многоугольникъ, а всѣ остальные — треугольники, имѣющіе одну общую вершину, называется пирамидою. Пирамиду можно построить, проведя послѣдовательно плоскости чрезъ каждую изъ сторонъ какого нибудь мно—ка и точку, не лежащую съ нимъ въ одной плоскости. Точка, въ которой сходятся всѣ тре—ки, называется вершиною пирамиды, а сторона, противолежащая этой вершинѣ, — основаніемъ. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины пирамиды на плоскость основанія, называется высотой пирамиды.

2) Пирамиды бываютъ трехстороннія, четырехстороннія и т. д., смотря по числу сторонъ основанія или по числу тре—ковъ, составляющихъ боковую поверхность. Самая простая изъ всѣхъ пирамидъ — трехсторонняя, потому что она образована четырьмя плоскостями, а чтобы замкнуть пространство со всѣхъ сторонъ нужно по крайней мѣрѣ 4 плоскости. Всѣ тѣлесные углы пирамиды въ такомъ случаѣ тригранны, и всякая изъ ея сторонъ можетъ быть принята за основаніе. Всякая n —сторонняя пирамида имѣетъ $n + 1$ ограничивающихъ ее плоскостей, $n + 1$ вершинъ и $2n$ реберъ.

3) Если основаніе пирамиды правильный мно—къ, и перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе, пересѣчетъ это послѣднее въ его центрѣ, то пирамида называется правильною. Въ ней всѣ боковыя стороны равнобедренные треугольники.

4) Если пирамида пересѣкается плоскостью, параллельною основанію, то часть ея, заключающаяся между плоскостью сѣченія и основаніемъ, называется усѣченною пирамидою, а разстояніе двухъ ея параллельныхъ сторонъ — высотой усѣченной пирамиды. Всякая n —сторонняя усѣченная пирамида имѣетъ $n + 2$ ограничивающихъ ее плоскостей, $2n$ вершинъ и $3n$ реберъ.

§ 204. Если пирамида $SABCDE$ будетъ пресѣчена плоскостью, параллельною основанію, то 1) сѣченіе $abcde$ будетъ мно—къ, подобный основанію $ABCDE$, 2) площади подобныхъ мно—ковъ $ABCDE$ и $abcde$ относятся какъ квадраты ихъ разстояній (SP и Sp) отъ вершины пирамиды.



1) Стороны мно—ковъ $ABCDE$ и $abcde$ параллельны (§ 173), отчего и углы ихъ соответственно равны (§ 177). Кромѣ того мы имѣемъ пропорціи:

$$AB : ab = (AS : aS) = AE : ae = ED : ed \dots$$

слѣд. $ABCDE \propto abcde$.

2) Проведемъ чрезъ ребро SA и высоту SP плоскость. Линіи AP и ap сѣченія этой плоскости съ плоскостями $ABCDE$ и $abcde$ параллельны, почему $\triangle ASP \propto aSp$, а такъ какъ кромѣ того и $\triangle ASB \propto aSb$, то

$$SP : Sp = SA : Sa = AB : ab, \text{ или } SP^2 : Sp^2 = AB^2 : ab^2. \text{ Но } (§ 111) \\ ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2, \text{ слѣд. } ABCDE : abcde = SP^2 : Sp^2.$$

Слѣдствія. 1) Если пирамида разсѣчена плоскостью, параллельною основанію, то отрѣзанная такимъ образомъ меньшая пирамида подобна цѣлой (§ 192, 4).

2) Основанія подобныхъ пирамидъ относятся какъ квадраты ихъ высотъ.

§ 205. Если двѣ пирамиды $SABCD$ и $PFGH$, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, пересѣчены плоскостями, параллельными основаніямъ, на равныхъ разстояніяхъ ($Se = Pk$) отъ вершины, то площади пересѣченій ($abcd$ и fgh) равновелики.

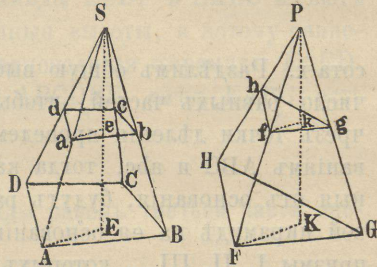
Положимъ, что обѣ пирамиды помѣщены своими основаніями въ одной и той же плоскости и пересѣчены плоскостью, ей параллельною. Если SE и PK высоты пирамидъ, то (§ 204, 2)

$$ABCD : abcd = SE^2 : Se^2$$

$$FGH : fgh = PK^2 : Pk^2.$$

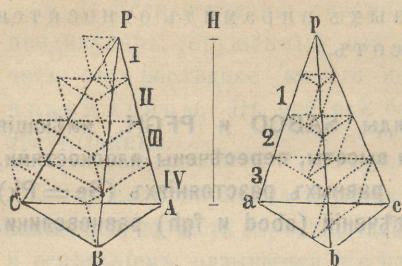
Но по условію

$ABCD = FGH, SE = PK, Se = Pk$,
потому и $SE^2 = PK^2, Se^2 = Pk^2$,
слѣд. и $abcd = fgh$.



§ 206. Двѣ трехстороннія пирамиды, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

Представимъ себѣ, что высоты обѣихъ пирамидъ раздѣлены на одно и то же безконечно большое число равныхъ частей и чрезъ точки дѣленія проведены плоскости, параллельныя основаніямъ, тогда каждая два сѣченія обѣихъ пирамидъ, одинаково удаленныя отъ вершинъ, равны (§ 205). Каждую часть пирамиды, заключающуюся между двумя послѣдовательными сѣкущими плоскостями, можно разсматривать какъ трехгранную призму (хотя строго говоря она усѣченная пирамида), потому что два безконечно близкія сѣченія пирамиды безъ замѣтной ошибки равны одно другому. Такимъ образомъ пирамида разложится на безконечно большое число чрезвычайно низкихъ призмъ, и такъ какъ каждая изъ нихъ въ одной пирамидѣ равна соотвѣтствующей ей въ другой, то и суммы ихъ, т. е. самыя пирамиды должны быть такъ же равны.



Другое доказательство. Помѣстимъ обѣ пирамиды ихъ основаніями въ одной плоскости, и предположимъ, что $РАВС > раbc$ и именно что

$$РАВС - раbc = Q.$$

Разность Q всегда можно представить въ видѣ призмы, которой основаніе ABC , а высота h . Раздѣлимъ общую высоту H обѣихъ пирамидъ на такое число равныхъ частей, чтобы каждая изъ нихъ была меньше h ; чрезъ точки дѣленія проведемъ плоскости, параллельныя основаніямъ ABC и abc , тогда каждая два сѣченія, равно удаленныя отъ основанія, будутъ равны (§ 205). Построимъ въ первой пирамидѣ на ея основаніи и на каждомъ сѣченіи внѣшнія призмы $I, II, III, \dots$, которыхъ боковыя ребра параллельны ребру AP , а во второй пирамидѣ построимъ подѣ каждымъ сѣченіемъ внутреннія призмы $1, 2, 3, \dots$ такъ, чтобы ихъ боковыя ребра были параллельны ребру ap , тогда по равенству основаній и высотъ (§ 202, 1) будетъ $I=1, II=2, III=3$, такъ что нижняя призма IV составляетъ разность между суммою всѣхъ внѣшнихъ и суммою всѣхъ внутреннихъ призмъ. Такъ какъ

$$I + II + III + IV > РАВС$$

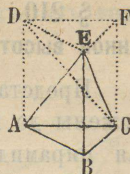
$$I + 2 + 3 < раbc, \text{ то}$$

$$(I + II + III + IV) - (1 + 2 + 3) > РАВС - раbc, \text{ т. е. } IV > Q.$$

Однакожь призма IV не можетъ быть болѣе призмы Q , потому что хотя обѣ онѣ имѣютъ одно и то же основаніе ABC , но высота призмы IV выбрана нами меньше h , высоты призмы Q , слѣд. предположеніе, что $РАВС > раbc$, невозможно. Точно такъ же можно доказать, что не можетъ быть $РАВС < раbc$, а потому должно быть $РАВС = раbc$.

§ 207. Объемъ трехсторонней пирамиды $EABC$ равенъ трети объема призмы, имѣющей съ нею одно и то же основаніе и ту же высоту.

Если изъ вершинъ А и С проведемъ линіи AD и CF, параллельныя ребру BE, и чрезъ точку E плоскость параллельную основанію ABC, то образуется трехсторонняя призма ABCDEF, которая имѣетъ одно и то же основаніе и ту же высоту съ данной пирамидою. Чрезъ это построение къ данной трехсторонней пирамидѣ EABC прибавится четырехсторонняя EACFD. Проведя плоскость ECD, мы раздѣлимъ EACFD на двѣ трехстороннія пирамиды EACD и ECDF, которыя равновелики (§ 206). Но пирамиды ECDF и EABC имѣютъ равныя основанія DEF и ABC и равныя высоты, и потому равновелики. Такимъ образомъ три равновеликія пирамиды EACD, ECDF, EABC составляютъ призму ABCDEF, слѣд. EABC есть третья часть этой призмы.



§ 208. Объемъ всякой пирамиды равенъ третьей части произведенія ея основанія на высоту.

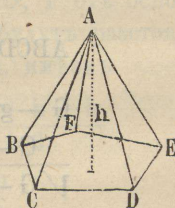
Для трехсторонней пирамиды это предложеніе прямо слѣдуетъ изъ § 201 и § 207.

Многосторонняя пирамида ABCDEF можетъ быть раздѣлена на трехстороннія ABCF, ACDF, ADEF, имѣющія съ нею одну и ту же высоту h . Объемы этихъ пирамидъ будутъ

$$\frac{1}{3}h \cdot BCF, \quad \frac{1}{3}h \cdot CDF, \quad \frac{1}{3}h \cdot DEF,$$

слѣд. объемъ многосторонней пирамиды

$$ABCDEF = \frac{1}{3}h (BCF + CDF + DEF) = \frac{1}{3}h \cdot BCDEF.$$



§ 209. Слѣдствія. 1) Двѣ пирамиды, имѣющія равновеликія основанія и равныя высоты, равновелики.

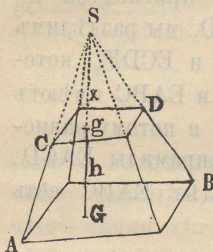
2) Объемъ всякой пирамиды равенъ трети объема призмы, имѣющей тѣ же основаніе и высоту.

3) Пирамиды, имѣющія равновеликія основанія, относятся какъ ихъ высоты, имѣющія же равныя высоты, относятся какъ ихъ основанія.

§ 210. Определить объем усеченной пирамиды ABCD по данной высоте h и основаниям G и g .

Представимъ себѣ, что стороны усеченной пирамиды продолжены до пересѣченія ихъ въ вершинѣ S , такъ что усеченная пирамида дополнится до цѣлой SAB. Обозначимъ высоту верхней дополнительной пирамиды чрезъ x , тогда (§ 208)

$$\begin{aligned} \text{вся пирамида } SAB &= \frac{1}{3}G(h+x), \\ \text{верхняя пирамида } SCD &= \frac{1}{3}gx, \text{ слѣд.} \\ \text{усеченная пирамида } ABCD &= \frac{1}{3}G(h+x) - \frac{1}{3}gx \\ &\text{или } ABCD = \frac{1}{3}[Gh + (G-g)x]. \end{aligned}$$



Для выраженія x посредствомъ данныхъ величинъ мы имѣемъ (§ 204, 2)

$$G:g = (h+x)^2:x^2 \text{ или } \sqrt{G}:\sqrt{g} = h+x:x,$$

$$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}, \text{ слѣд.}$$

$$ABCD = \frac{1}{3} \left(Gh + (G-g) \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} \right) \text{ или}$$

$$ABCD = \frac{1}{3}h \left(G + \frac{G-g}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} \times \sqrt{g} \right). \text{ Но}$$

$$G-g = (\sqrt{G} + \sqrt{g})(\sqrt{G} - \sqrt{g}), \text{ слѣд.}$$

$$\frac{G-g}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = \sqrt{G} + \sqrt{g}, \text{ и потому}$$

$$ABCD = \frac{1}{3}h [G + (\sqrt{G} + \sqrt{g})\sqrt{g}] \text{ или}$$

$$ABCD = \frac{1}{3}h (G + \sqrt{Gg} + g).$$

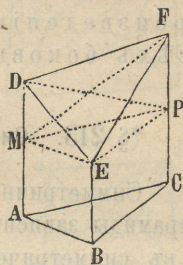
И такъ мы получимъ объемъ усеченной пирамиды, если сложимъ площади верхняго и нижняго основанія и среднее геометрическое между ними, и полученную сумму умножимъ на треть высоты.

Усеченная пирамида равновелика полной пирамидѣ той же высоты, но основаніе которой равновелико суммѣ верхняго и нижняго основанія и средняго пропорціального между обоими основаніями усеченной пирамиды.

§ 211. Объемъ трехсторонней призмы ABCDEF, усеченной непараллельно основанію, равняется произведенію ея основанія

ABC на треть суммы перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ вершинъ D, E, F на основаніе ABC.

Черезъ вершину E, которая ближе всѣхъ прочихъ къ основанію ABC, проведемъ плоскость EMP, параллельную этому послѣднему; тогда $\triangle MEP \cong ABC$ (§192,6). Усѣченная призма раздѣлится на призму ABCMEP и на четырехстороннюю пирамиду EMDFP. Эту послѣднюю можно разсѣчь плоскостью EDP на двѣ трехстороннія пирамиды DMEP и FDEP.



Проведемъ плоскость EFM, тогда

$$\triangle FDP = FMP \quad (\S 87), \text{ и потому}$$

$$\text{пир. EFDP} = \text{пир. EFMP} (\S 206) \text{ т.е.}$$

$$\text{пир. FDEP} = \text{пир. FMEP}.$$

Если обозначимъ разстоянія вершинъ E, D, F отъ основанія ABC чрезъ h , $h+m$, $h+p$, то m и p будутъ разстояніями вершинъ D и F отъ плоскости EMP, слѣд. имѣемъ

$$\text{призма ABCMEP} = ABC \times h = ABC \times \frac{h+h+h}{3}$$

$$\text{пирамида DMEP} = MEP \times \frac{m}{3} = ABC \times \frac{m}{3}$$

$$\text{пирамида FMEP} = MEP \times \frac{p}{3} = ABC \times \frac{p}{3}$$

Сложивъ эти три равенства, найдемъ что

$$ABCDEF = ABC \times \frac{h + (h+m) + (h+p)}{3}.$$

§ 212. Слѣдствія. 1) Такъ какъ это выраженіе равно

$$\frac{1}{3} ABC \cdot h + \frac{1}{3} ABC (h+m) + \frac{1}{3} ABC (h+p), \text{ то}$$

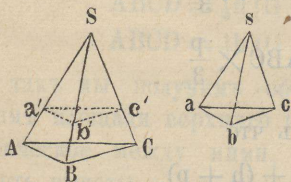
трехсторонняя призма, усѣченная непараллельно основанію, равновелика тремъ пирамидамъ, имѣющимъ то же основаніе ABC, а вершины въ вершинахъ D, E, F.

2) Если призма прямая, то высоты ее будут боковые ребра, слѣд. объемъ прямой трехсторонней призмы, усѣченной непараллельно основанію, равняется произведенію ее основанія на одну треть суммы всѣхъ боковыхъ реберъ.

***§ 213. Симметричные многогранники равновелики.**

Симметричныя пирамиды равновелики, потому что объемъ пирамиды зависитъ только отъ ее высоты и площади основанія, а въ симметрическихъ многогранникахъ всѣ соотвѣтственныя части равны между собою. Такъ какъ два симметричные многогранника могутъ быть разсѣчены плоскостями на равное число попарно симметрическихъ пирамидъ, то они должны имѣть равные объемы.

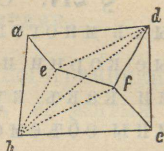
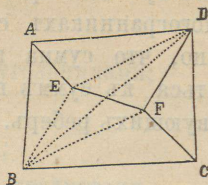
***§ 214. Двѣ трехстороннія пирамиды $SABC$ и $sabc$ подобны, если имѣютъ по равному двугранному углу, заключающемуся между двумя соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными сторонами.**



Пусть $\triangle ASB \propto \triangle asb$, $\triangle ASC \propto \triangle asc$ и двугранный угол $BASC = basc$. Отложимъ $Sa' = sa$, $Sb' = sb$, $Sc' = sc$ и проведемъ чрезъ точки a' , b' , c' , плоскость, тогда пирамида $Sa'b'c' \cong sabc$ (§ 191, 3). Такъ какъ $\triangle ASB \propto \triangle a'Sb'$ и $\triangle ASC \propto \triangle a'Sc'$, то $AB \parallel a'b'$ и $AC \parallel a'c'$ (§ 98). Изъ параллельности этихъ линій слѣдуетъ параллельность плоскостей ABC и $a'b'c'$ (§ 177, 2), и потому пирамиды $SABC$ и $Sa'b'c'$ подобны (§ 204 слѣд. 1), слѣд. и $SABC \propto sabc$.

***§ 215. Два подобные многогранники $ABCDEF$ и $abcdef$ можно разложить на равное число соотвѣтственно подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ.**

Пусть къ одной сторонѣ $ABCD$, какъ къ основанію, прилегаютъ два четыре—ника $AEFD$, $BEFC$ и два тре—ника ABE , CDF . Проведя діагональныя плоскости BDE , BDF , мы разсѣчемъ много—никъ на трехстороннія пирамиды $ABDE$, $FBDE$, $CBDF$. Другой много—никъ, въ которомъ тѣ же буквы обозначаютъ соотвѣтствующія вершины, разсѣченъ такимъ же образомъ. Такъ какъ оба много—ника ограничены подобными и одинаково расположенными сторонами, пересѣкающимися подъ соотвѣтственно равными двугранными углами (§ 192, 4), то и тре—ки, на которые распадутся четыре—ки, соотвѣтственно подобны (§ 110, 2), а потому (§ 214) пирамида $ABDE \sim abde$, $FBDE \sim fbde$, $CBDF \sim cbdf$, такъ какъ каждая изъ этихъ двухъ пирамидъ имѣетъ по равному двугранному углу, заключающемуся между двумя соотвѣтственно подобными и одинаково расположенными сторонами.



***§ 216.** Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ : 1) поверхности относятся какъ квадраты, 2) объемы — какъ кубы сходственныхъ реберъ.

1) Въ двухъ подобныхъ многогранникахъ стороны попарно подобны, и потому всѣ соотвѣтствующія ребра пропорциональны. Площади двухъ соотвѣтствующихъ сторонъ многогранниковъ относятся какъ квадраты соотвѣтствующихъ реберъ, почему и суммы площадей сторонъ будутъ относиться также какъ квадраты реберъ.

2) Если многогранниками будутъ двѣ трехстороннія пирамиды P и p , то обозначивъ ихъ основанія чрезъ G и g , а высоты чрезъ H и h , и какія нибудь два соотвѣтствующія ребра чрезъ K и k , получимъ (§ 204, слѣд. 2)

$G : g = H^2 : h^2$, слѣд. и $GH : gh = H^3 : h^3$. Но такъ какъ (§ 209)

$GH : gh = P : p$, $H^3 : h^3 = K^3 : k^3$, то $P : p = K^3 : k^3$.

Два подобные многогранника разсѣкаются плоскостями на равное число подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ (§ 215), а подобныя пирамиды относятся какъ кубы ихъ соот-

вѣтствующихъ реберъ. Такъ какъ, кромѣ того, въ подобныхъ многогранникахъ соотвѣтствующія ребра пропорціональны, то ясно, что сумма пирамидъ одного многогранника будетъ относиться къ суммѣ всѣхъ пирамидъ другаго, какъ кубы соотвѣтствующихъ реберъ.

***§ 217.** Соотвѣтствующія ребра двухъ подобныхъ многогранниковъ относятся какъ квадратные корни изъ числовой величины поверхностей, или какъ кубическіе корни изъ числовой величины объемовъ многогранниковъ.

Если напр. дано построить многогранникъ, который былъ бы подобенъ данному и имѣлъ вдвое большую поверхность, то два соотвѣтствующія ребра должны относиться какъ $1 : \sqrt{2}$. Если же объемъ искомаго многогранника долженъ быть вдвое болѣе объема даннаго, то соотвѣтствующія ребра должны относиться какъ $1 : \sqrt[3]{2}$.

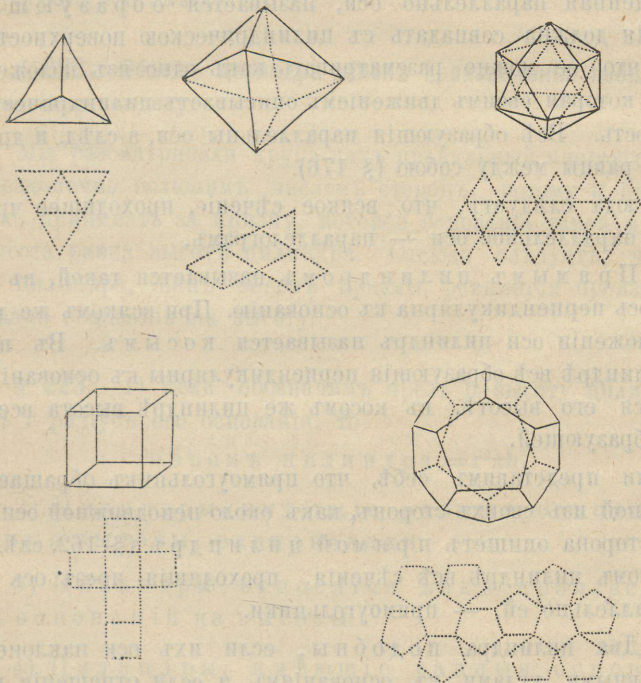
***§ 218.** Можетъ быть только пять различныхъ правильныхъ многогранниковъ, т. е. такихъ, которые ограничены равными правильными многоугольниками, и въ которыхъ всѣ тѣлесные углы равны между собою.

Для образованія тѣлеснаго угла нужно по крайней мѣрѣ 3 много—ника, и сумма плоскихъ угловъ, ограничивающихъ многогранный уголъ, должна быть менѣе 360° (§ 188). Если 3, 4 или 5 равныхъ прав. тре—ковъ (каждый уголъ $= 60^\circ$) составлены такъ, что образуютъ тѣлесный уголъ, то сумма всѣхъ плоскихъ угловъ, лежащихъ около вершины тѣлеснаго угла, равна $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$, $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$, слѣд. меньше 360° . Но такъ какъ $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$, то изъ прав. тре—ковъ можно составить только три различныхъ прав. многогранника. Изъ равныхъ квадратовъ и изъ равныхъ прав. пятиугольниковъ можно составить только по одному трегранному углу. Изъ прав. много—ковъ большаго числа сторонъ не могутъ быть составлены многогранные углы, такъ какъ уже сумма трехъ угловъ прав. шестиугольника равна $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$.

*§ 219. Правильные многогранники бывают следующие:

- 1) Тетраэдръ, ограниченный 4 треугольниками;
- 2) Октаэдръ, огран. 8 тре—ками;
- 3) Икосаэдръ, огран. 20 тре—ками;
- 4) Гексаэдръ или Кубъ, огран. 6 квадратами.
- 5) Додекаэдръ, огран. 12 пятиугольниками.

Слѣдующія фигуры представляют эти многогранники и ихъ поверхности, разпрямленные въ плоскость, но взятые въ меньшемъ размѣрѣ.



IV. О цилиндрѣ.

§ 220. 1) Если прямая движется по окружности двухъ круговъ, лежащихъ въ параллельныхъ плоскостяхъ, постоянно оставаясь параллельною линіи, соединяющей центры этихъ круговъ, то образуется кривая поверхность, называемая цилиндрическою; тѣло, ограниченное этою послѣднею и двумя параллельными кругами, называется цилиндромъ, каждый изъ параллельныхъ круговъ — основаніемъ, линія, соединяющая центры основаній, — осью, а разстояніе плоскостей основаній другъ отъ друга — высотой цилиндра.

2) Всякая линія, соединяющая двѣ точки обоихъ основаній и проведенная параллельно оси, называется образующею. Эта линія должна совпадать съ цилиндрическою поверхностью, потому что ее можно разсматривать какъ одно изъ положеній прямой, которая своимъ движеніемъ описываетъ цилиндрическую поверхность. Всѣ образующія параллельны оси, а слѣд. и другъ другу и равны между собою (§ 176).

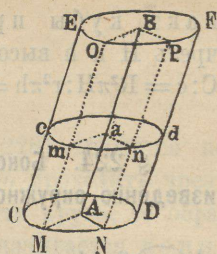
Отсюда слѣдуетъ, что всякое сѣченіе, проходящее чрезъ ось или параллельное оси — параллелограмъ.

3) Прямымъ цилиндромъ называется такой, въ которомъ ось перпендикулярна къ основанію. При всякомъ же другомъ положеніи оси цилиндръ называется косымъ. Въ прямомъ цилиндрѣ всѣ образующія перпендикулярны къ основанію и равняются его высотѣ, въ косомъ же цилиндрѣ высота всегда менѣе образующей.

Если представимъ себѣ, что прямоугольникъ обращается около одной изъ своихъ сторонъ, какъ около неподвижной оси, то другая сторона опишетъ прямой цилиндръ (§ 162, слѣд.). Въ прямомъ цилиндрѣ всѣ сѣченія, проходящія чрезъ ось его или параллельно ей, — прямоугольники.

4) Два цилиндра подобны, если ихъ оси наклонены подъ равными углами къ основаніямъ и если отношенія ихъ осей къ радіусамъ основаній равны.

§ 221. Всякое сѣченіе (сmd) цилиндра плоскостью, параллельною основанію, образуетъ кругъ, который равенъ основанію, и котораго центръ лежитъ на оси цилиндра.



Проведемъ чрезъ ось по двумъ произвольнымъ направленіямъ плоскости, которая пересѣкутъ основаніе и параллельную ему плоскость сѣченія по линіямъ Am и an , AN и an . Такимъ образомъ получатся параллелограммы $AMam$ и $ANan$ (§ 220, 2; § 173), слѣд. $AM=am$, $AN=an$; а такъ какъ $AM=AN$, то и $am=an$, т. е. точки m и n одинаково удалены отъ a . Это заключеніе справедливо для всѣхъ точекъ, лежащихъ на кривой пересѣченія цилиндра, слѣд. эта кривая есть кругъ, котораго центръ находится на оси цилиндра, а радіусъ равенъ радіусу его основанія.

§ 222. Объемъ цилиндра равенъ произведенію площади его основанія на высоту.

Мы разсматривали кругъ какъ правильный многоугольникъ съ безконечно большимъ числомъ сторонъ, потому и цилиндръ можно принимать за призму, которой основаніе такой мно—къ, а высота равна высотѣ цилиндра. Отсюда слѣдуетъ, что объемъ цилиндра, какъ объемъ призмы, равняется произведенію площади основанія на высоту.

§ 223. 1) Если обозначимъ чрезъ h высоту цилиндра, а чрезъ r радіусъ его основанія, то

$$\text{объемъ цилиндра} = r^2 \pi h.$$

2) Цилиндры, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики.

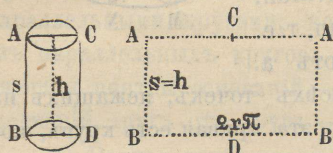
3) Цилиндры относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

4) Цилиндры, имѣющіе равныя основанія, относятся какъ ихъ высоты, а имѣющіе равныя высоты, какъ основанія, а слѣд. и какъ квадраты радіусовъ основаній (§ 149).

5) Два подобные цилиндра (C, c) относятся какъ кубы радіусовъ (R, r) ихъ основаній или

какъ кубы производящихъ (S, s). Если обозначимъ чрезъ H и h высоты цилиндровъ, то $H:h = R:r = S:s$, слѣд. $C:c = R^2\pi H:r^2\pi h = R^2H:r^2h = R^3:r^3 = S^3:s^3$.

§ 224. Боковая поверхность прямого цилиндра равна произведенію окружности его основанія на высоту.



Такъ какъ всякая прямая, параллельная оси цилиндра, и соединяющая двѣ точки, лежащія на верхнемъ и нижнемъ его основаніи, совпадаетъ съ боковою поверхностью цилиндра, то мы можемъ представить себѣ эту поверхность разсѣченною по длинѣ одной изъ образующихъ и развернутою на плоскости. Такимъ образомъ получится прямоугольникъ, котораго одна сторона равна окружности основанія, а другая высотѣ цилиндра. Такъ какъ площадь прямоугольника равна произведенію двухъ его перпендикулярныхъ сторонъ, то боковая поверхность цилиндра равна произведенію окружности его основанія на высоту.

§ 225. 1) Если обозначимъ чрезъ h высоту прямого цилиндра, чрезъ s образующую, и чрезъ r радіусъ основанія, тогда окружность основанія будетъ $2r\pi$, слѣд.

$$\text{боковая поверхность цилиндра} = 2r\pi h = 2r\pi s.$$

2) Такъ какъ площадь основанія $= \pi r^2$, то вся поверхность (О) прямого цилиндра равна $2r\pi h + \pi r^2 + \pi r^2$, т. е.

$$O = 2r\pi (r + h) = 2r\pi (r + s).$$

3) Боковые поверхности O и o двухъ подобныхъ прямыхъ цилиндровъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ основаній или квадраты ихъ производящихъ.

Такъ какъ $O:o = 2R\pi S:2r\pi s = RS:rs$, то

$$O:o = R^2:r^2 = S^2:s^2.$$

V. О конусѣ.

§ 226. 1) Если прямая AB (фиг. § 228) движется по окружности BDC круга такъ, что постоянно проходитъ чрезъ неподвижную точку A , лежащую внѣ плоскости круга, то образованная ея движеніемъ кривая поверхность называется конической, а тѣло, ограниченное этою поверхностью и площадью круга, — конусомъ; движущаяся прямая называется образующею, неподвижная точка A — вершиною, кругъ BDC — основаніемъ, линія AE , соединяющая вершину A съ центромъ E основанія — осью, а перпендикуляръ AF , опущенный изъ вершины на основаніе, — высотой конуса.

2) Прямымъ конусомъ называется такой, котораго ось перпендикулярна къ основанію, въ противномъ же случаѣ конусъ называется косымъ. Прямой конусъ образуется движеніемъ прямоугольнаго тре—ка около одного изъ его катетовъ, при чемъ другой катетъ описываетъ основаніе, а гипотенуза боковую поверхность конуса. Въ прямомъ конусѣ высота совпадаетъ съ осью и всѣ образующія равны (§ 165, 2).

3) Всякое сѣченіе, проходящее чрезъ вершину конуса, есть треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны — образующія, а третья — хорда основанія конуса. Если сѣченіе проходитъ чрезъ ось, то треугольникъ состоитъ изъ двухъ образующихъ и діаметра основанія. Въ прямомъ конусѣ всѣ его сѣченія — равнобедренные тре—ки, а всѣ осевыя сѣченія образуютъ равные равнобедренные тре—ки, перпендикулярные къ основанію.

4) Два конуса подобны, если ихъ оси наклонены подъ одинаковыми углами къ основаніямъ и относятся какъ радіусы основаній.

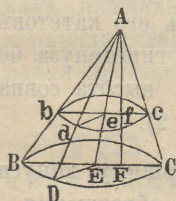
§ 227. Если конусъ разсѣкается плоскостью, параллельною основанію, то часть его, заключающаяся между плоскостью сѣченія и основаніемъ, называется усѣченнымъ конусомъ, осталая же часть, заключающаяся между плоскостью сѣченія и вершиною, дополнительнымъ конусомъ.

Основаніе конуса и площадь его сѣченія называются основаніями, разстояніе основаній другъ отъ друга — высотой, а линія, соединяющая центры основаній — осью усѣченнаго конуса. Смотря по тому, будетъ ли ось перпендикулярна къ основаніямъ или нѣтъ, конусъ называется прямымъ или косымъ.

Всякая прямая, совпадающая съ боковою поверхностью конуса и соединяющая двѣ точки основаній, проходитъ при продолженіи чрезъ вершину дополнительнаго конуса, и называется образующею. Въ прямомъ конусѣ всѣ образующія равны.

§ 228. 1) Всякое сѣченіе bdc конуса, параллельное основанію BDC , есть кругъ, котораго центръ находится на оси AE конуса.

2) Площадь основанія конуса и площадь сѣченія, проведеннаго параллельно основанію, относятся какъ квадраты ихъ разстояній (AE, Af) отъ вершины.



1) Проведемъ чрезъ ось въ произвольныхъ направленіяхъ двѣ плоскости, которыя пересѣкутъ основаніе и параллельную ему плоскость сѣченія по линіямъ BC и bc , DE и de , тогда $BC \parallel bc$ и $DE \parallel de$ (§ 173). Изъ подобія тре—ковъ слѣдуетъ

$$BE:be = AE:ae = DE:de.$$

Такъ какъ $BE = DE$, то и $be = de$. Точно также можно доказать, что разстояніе точки e отъ остальныхъ точекъ линіи сѣченія равно be , слѣд. кривая сѣченія есть кругъ.

2) Если прямая AF перпендикулярна къ основаніямъ BDC и bdc , то изъ подобія тре—ковъ слѣдуетъ

$$BE:be = AB:ab = AF:af, \text{ слѣд. и}$$

$$BE^2:be^2 = AB^2:ab^2 = AF^2:af^2.$$

Такъ какъ площади круговъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ, то

$$\text{кругъ } BE:\text{кругъ } be = AB^2:ab^2 = AF^2:af^2.$$

§ 229. 1) Если конусъ разсѣченъ плоскостію, параллельною основанію, то полученный та—

кимъ образомъ меньшій конусъ подобенъ цѣлому (§ 226, 4).

2) Площади основаній подобныхъ конусовъ относятся какъ квадраты высотъ конусовъ.

§ 230. Объемъ всякаго конуса равенъ трети произведенія площади его основанія на высоту.

Если разсматривать кругъ какъ правильный многоугольникъ о безконечномъ числѣ сторонъ, то конусъ можно принимать за пирамиду съ безконечно большимъ числомъ граней, изъ чего слѣдуетъ, что объемъ конуса, какъ и пирамиды, равенъ трети произведенія площади основанія на высоту.

Слѣдствія. 1) Обозначимъ чрезъ h высоту конуса, и чрезъ r радіусъ его основанія, тогда основаніе $= r^2\pi$. слѣд.

$$\text{объемъ конуса} = \frac{1}{3}r^2\pi h.$$

2) Если s будетъ образующая прямого конуса, r радіусъ основанія, то высота конуса $= \sqrt{s^2 - r^2}$, слѣд.

$$\text{объемъ} = \frac{1}{3}r^2\pi \sqrt{s^2 - r^2}.$$

3) Два конуса, имѣющіе равныя основанія и высоты, равновелики.

4) Два конуса относятся какъ произведенія ихъ основаній на высоты.

5) Два подобные конуса относятся какъ кубы ихъ осей или радіусовъ.

Такъ какъ объемъ конуса равенъ трети объема цилиндра, имѣющаго съ нимъ равныя основаніе и высоту, а подобные цилиндры относятся какъ кубы ихъ осей или радіусовъ (§ 223, 5), то конусы имѣютъ то же самое отношеніе.

§ 231. Опредѣлить объемъ усѣченнаго конуса по данной высотѣ h и радіусамъ R и r нижняго и верхняго основаній.



Положимъ, что усѣченный конусъ дополненъ до цѣлаго чрезъ продолженіе его боковой поверхности. Если назовемъ высоту дополнительнаго конуса чрезъ x , то высота цѣлаго будетъ $x + h$, слѣд. (§ 230, 1)

$$\text{цѣлый конусъ} = \frac{1}{3}R^2\pi (h + x)$$

$$\text{дополнительный} = \frac{1}{3}r^2\pi x, \text{ слѣд.}$$

$$\begin{aligned} \text{усѣченный} &= \frac{1}{3}R^2\pi (h + x) - \frac{1}{3}r^2\pi x, \\ &= \frac{1}{3}\pi [R^2h + (R^2 - r^2)x]. \end{aligned}$$

Такъ какъ $R:r = (h+x):x$, слѣд. $x = \frac{hr}{R-r}$, то

$$\text{усѣченный конусъ} = \frac{1}{3}\pi \left(R^2h + \frac{R^2 - r^2}{R-r} \cdot hr \right)$$

$$R^2 - r^2 = (R+r)(R-r), \text{ слѣд.}$$

$$\text{усѣченный конусъ} = \frac{1}{3}\pi h [R^2 + (R+r)r] = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + Rr + r^2).$$

Это выраженіе можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ: $\frac{1}{3}h(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)$, и такъ какъ $\pi Rr = \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}$, то объемъ усѣченнаго конуса равенъ объему полнаго конуса той же высоты, но основаніе котораго равновелико суммѣ верхняго и нижняго основаній усѣченнаго конуса, сложенной съ среднимъ геометрическимъ между этими же основаніями.

§ 232. Боковая поверхность прямого конуса равна половинѣ произведенія окружности его основанія на производящую.



Такъ какъ прямая, соединяющая вершину конуса съ какою-либо точкою основанія, совпадаетъ съ боковою поверхностью, то мы можемъ представить себѣ что поверхность конуса разрѣзана по какой-либо образующей и развернута на плоскости. Такъ какъ всѣ точки окружности основанія равно удалены отъ вершины, то развернутая боковая поверхность конуса будетъ круговой вырѣзкомъ,

котораго радіусъ равенъ образующей конуса, а дуга — окружности основанія. Площадь круговаго вырѣзка равняется половинѣ произведенія его дуги на радіусъ (§ 147), слѣд. и боковая поверхность прямого конуса равна половинѣ произведенія его окружности основанія на образующую.

Слѣдствія. 1) Если обозначимъ чрезъ s образующую прямого конуса, и чрезъ r радіусъ основанія, тогда окружность основанія будетъ равна $2\pi r$, слѣд.

$$\text{боковая поверхность} = r s \pi.$$

$$\text{вся поверхность} = r s \pi + r^2 \pi = \pi r (s + r).$$

2) Если будутъ даны радіусъ r , и высота конуса h , то образующая $s = \sqrt{r^2 + h^2}$, слѣд.

$$\text{боковая поверхность} = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\text{вся поверхность} = \pi r (r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

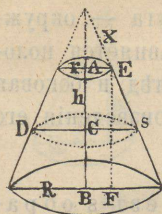
3) Окружность 'средняго сѣченія конуса, т. е. сѣченія, проведеннаго параллельно основанію и дѣлящаго высоту пополамъ, равна половинѣ окружности основанія, потому что окружность основанія относится къ окружности сѣченія, какъ радіусъ первой окружности къ радіусу второй, радіусы же эти относятся, какъ цѣлая высота къ половинѣ. Отсюда видно, что боковая поверхность конуса равна произведенію окружности средняго сѣченія на производящую.

4) Боковыя поверхности (O, o) двухъ прямыхъ конусовъ относятся какъ квадраты ихъ осей (A, a) или образующихъ (S, s) или радіусовъ (R, r) .

Такъ какъ $O:o = RS\pi:rs\pi$, и

$$A:a = R:r = S:s, \text{ то } O:o = R^2:r^2 = S^2:s^2 = A^2:a^2.$$

§ 233. Определить боковую поверхность прямого усѣченнаго конуса по данной производящей s и радіусамъ R и r нижняго и верхняго основаній.



Представимъ себѣ, что усѣченный конусъ дополненъ до цѣлаго и обозначимъ образующую дополнительнаго чрезъ x , а цѣлаго чрезъ $s+x$, тогда

$$\text{боков. пов. цѣлаго кон.} = R(s+x)\pi$$

$$\text{боков. пов. дополн. кон.} = rx\pi, \text{ слѣд.}$$

$$\begin{aligned} \text{боков. пов. усѣч. кон.} &= R(s+x)\pi - rx\pi \\ &= (Rs + (R-r)x)\pi. \end{aligned}$$

Такъ какъ $R:r = (s+x):x$, то $x = \frac{rs}{R-r}$, слѣд.

$$\text{боков. пов. усѣч. кон.} = (Rs + rs)\pi = (R+r)\pi s.$$

Это выраженіе равно $(\pi R + \pi r)s$, слѣд. боковая поверхность усѣченного конуса равна полусуммѣ окружностей нижняго и верхняго оснований, умноженной на образующую.

§ 234. 1) Если чрезъ середину оси AB проведемъ плоскость, параллельную основанію, тогда радіусъ круга сѣченія

$$CD = \frac{R+r}{2}, \text{ а окружность его} = 2\left(\frac{R+r}{2}\right)\pi = (R+r)\pi.$$

Выраженіе $(R+r)\pi s$ (§ 233) показываетъ, что боковая поверхность усѣченного прямого конуса равна произведенію его образующей на окружность средняго сѣченія.

2) Вся поверхность прямого усѣченного конуса равна

$$(R+r)\pi s + R^2\pi + r^2\pi = \pi[R^2 + r^2 + (R+r)s].$$

3) Если въ формулѣ $(R+r)\pi s$ положимъ $r=0$, то получимъ выраженіе боковой поверхности цѣлаго конуса, а положивъ $R=r$ получимъ $2r\pi s$, т. е. выраженіе боковой поверхности цилиндра (§ 225, 1).

4) Если кромѣ R и r дана высота $AB=h$ прямого усѣченного конуса, то опустивъ изъ точки E на нижнее основаніе конуса перпендикуляръ $EF=h$, получимъ $s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$; тогда боковая поверхность M и вся поверхность O усѣченного конуса будутъ равны

$$M = (R+r)\pi \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$$

$$O = \pi[R^2 + r^2 + (R+r)\sqrt{h^2 + (R-r)^2}]$$

VI. О шарѣ.

§ 235. Если полуокружность вращается около діаметра, какъ около оси, до тѣхъ поръ, пока она не возвратится въ первоначальное положеніе, то дуга полуокружности описываетъ шаровую поверхность. Тѣло, ограниченное шаровою поверхностью, называется шаромъ, а центръ вращаемаго полуокруга — центромъ шара. — Всякая прямая, соединяющая центръ шара съ какою нибудь точкою, лежащею на его поверхности, называется радіусомъ, а прямая, проходящая чрезъ центръ шара и соединяющая двѣ точки его поверхности, діаметромъ шара.

Изъ самого образованія шара слѣдуетъ, что всѣ его радіусы, а слѣдовательно и всѣ діаметры равны. Поэтому шаръ можно разсматривать какъ тѣло, ограниченное поверхностью, которой всѣ точки равно отстоятъ отъ одной точки, находящейся внутри шара и называемой центромъ.

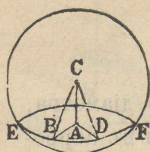
Шары, имѣющіе равные радіусы, равны. Если мы представимъ себѣ, что они наложены такъ другъ на друга, что ихъ центры совпадаютъ, тогда и всѣ точки ихъ поверхностей должны также совпасть.

§ 236. Поверхность шара есть кривая по всѣмъ направленіямъ поверхность.

Если бы мы предположили, что какая нибудь часть поверхности шара плоска, то могли бы провести на этой части прямую линію, а взявъ на этой прямой три точки и проведя плоскость чрезъ эту прямую и центръ шара, мы получили бы три точки, лежащія на одной прямой и равно отстоящія отъ четвертой (центра шара), что невозможно (§ 32, 1).

Слѣдствіе. Прямая линія можетъ пересѣчь шаровую поверхность не болѣе какъ въ двухъ точкахъ.

§ 237. Если шаровая поверхность пересѣкается плоскостью, то линія пересѣченія будетъ кругъ.



Если плоскость сѣченія проходитъ чрезъ центръ, то справедливость этой теоремы видна изъ самого опредѣленія шара. Если же сѣкущая плоскость не проходитъ чрезъ центръ С, то опустивъ на эту плоскость изъ центра перпендикуляръ СА и соединивъ двѣ какія либо точки В и D линіи пересѣченія съ точками А и С, мы будемъ имѣть $\triangle CAB \cong \triangle CAD$ (§ 27 слѣд.), слѣд. $AB = AD$. Этотъ выводъ справедливъ для всякихъ двухъ точекъ линіи пересѣченія, и потому всѣ точки этой послѣдней равно удалены отъ точки А, слѣд. линія пересѣченія есть кругъ.

§ 238. 1) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на пересѣкающую его плоскость, проходитъ чрезъ центръ круга сѣченія.

2) Линія, соединяющая центръ шара съ центромъ круга, произшедшаго отъ сѣченія шара плоскостью, перпендикулярна къ этой послѣдней.

3) Перпендикуляръ, возставленный изъ центра круга сѣченія, пройдетъ чрезъ центръ шара, потому что онъ долженъ совпасть съ прямою, соединяющею эти центры (§ 163).

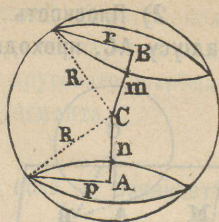
4) Перпендикуляры, возставленные изъ центровъ двухъ какихъ либо непараллельныхъ круговъ сѣченій встрѣчаются въ центрѣ шара.

5) Центры двухъ параллельныхъ сѣченій лежатъ на одномъ и томъ же діаметрѣ, перпендикулярномъ къ плоскостямъ обоихъ сѣченій.

6) Кругъ сѣченія опредѣляется тремя точками на поверхности шара (§ 158).

§ 239. 1) Сѣченія, находящіяся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара, равны. 2) Плоскости равныхъ сѣченій находятся на равныхъ разстояніяхъ отъ центра шара. 3) Сѣченія тѣмъ больше, чѣмъ они ближе къ центру шара. 4) Изъ двухъ неравныхъ сѣченій большее находится ближе къ центру.

Если изъ центра шара на двѣ сѣкущія плоскости опустимъ перпендикуляры m и n , то эти послѣдніе будутъ служить разстояніями плоскостей отъ центра шара и пройдутъ чрезъ центры сѣченій. Проведемъ въ обоихъ кругахъ сѣченій радіусы r и p и соединимъ ихъ концы съ центромъ шара радіусомъ R ; тогда изъ произшедшихъ такимъ образомъ прямоугольныхъ тре—ковъ будемъ имѣть :



$$R^2 = r^2 + m^2, R^2 = p^2 + n^2, \text{ слѣд. } r^2 + m^2 = p^2 + n^2.$$

1) Если $m = n$, то $r^2 = p^2$ или $r = p$.

2) Если $r = p$, то $m^2 = n^2$ или $m = n$.

3) Если $n < m$, то $p^2 > r^2$ или $p > r$.

4) Если $p > r$, то $n^2 < m^2$ или $n < m$.

§ 240. 1) Сѣченіе, проходящее чрезъ центръ шара, называется большимъ кругомъ, всѣ же остальные — малыми кругами.

2) Всѣ большіе круги одного и того же шара равны между собою, потому что имѣютъ равные радіусы.

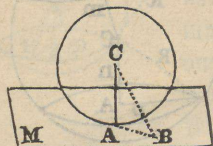
3) Два большіе круга дѣлятся взаимно пополамъ, такъ какъ ихъ плоскости проходятъ чрезъ центръ шара, по тому и линія пересѣченія плоскостей пройдетъ также чрезъ центръ и будетъ общимъ діаметромъ обоихъ круговъ.

4) Посредствомъ наложенія легко удостовѣриться, что шаръ и его поверхность дѣлятся пополамъ всякою плоскостью, проходящею чрезъ центръ шара. Каждая половина шара называется полушаріемъ.

5) Чрезъ двѣ діаметрально противоположныя точки поверхности шара можно провести безчисленное множество большихъ круговъ, а чрезъ двѣ не діаметрально противоположныя только одинъ большой и безчисленное множество малыхъ круговъ.

§ 241. 1) Если плоскость M перпендикулярна къ радіусу AC въ концѣ его A , то она касается шара, т. е. имѣетъ съ нимъ только одну общую точку.

2) Плоскость M , касательная къ шару, перпендикулярна къ радіусу AC , проходящему черезъ точку касанія.



1) Если $AC \perp M$, то соединивъ центръ C съ произвольною точкою B лежащею въ плоскости M (за исключеніемъ точки A), получимъ $CB > CA$ (165, 1); слѣд. B и всякая другая точка плоскости M , за исключеніемъ точки A , лежатъ внѣ шара.

2) Если плоскость M имѣетъ съ шаромъ только одну общую точку A , то всякая прямая BC , соединяющая центръ C съ какою нибудь точкою B плоскости M , будетъ болѣе радіуса CA , слѣд. линия CA будетъ кратчайшее разстояніе точки C отъ плоскости M , т. е. перпендикуляръ изъ точки C на плоскость M .

Слѣдствія. 1) Перпендикуляръ, опущенный изъ центра шара на касательную къ нему плоскость, пересѣчетъ эту послѣднюю въ точкѣ касанія.

2) Перпендикуляръ къ касательной плоскости, возставленный въ точкѣ ея касанія, пройдетъ черезъ центръ шара (§ 163).

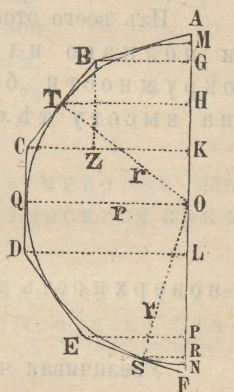
§ 242. 1) Всякая плоскость, пересѣкающая шаръ, дѣлитъ его на два шаровые отрѣзка или сегмента. Если сѣкущая плоскость пройдетъ черезъ центръ шара, то каждый сегментъ будетъ полушаріемъ. Площадь круга сѣченія называется основаніемъ сегмента. Если проведемъ діаметръ перпендикулярно къ основанію, то часть его, лежащая между центромъ основанія и поверхностью шара, называется высотой шароваго сегмента.

2) Часть шаровой поверхности, заключающаяся между двумя параллельными сѣкущими плоскостями, называется зоною или шаровымъ поясомъ, а часть шара, лежащая между этими плоскостями, шаровымъ слоемъ. Площади параллельныхъ круговъ служатъ шаровому слою основаніями, а разстояніе между основаніями — высотой, такъ что эта послѣдняя измѣряется частію радіуса шара, перпендикулярнаго къ основаніямъ и заключающагося между ними. — Если одна изъ параллельныхъ плоскостей касательна къ шару, то образуется сегментъ, имѣющій только одно основаніе.

3) Если вырѣзокъ круга сдѣлаетъ полный оборотъ около одного изъ радиусовъ, его ограничивающихъ, то образуется шаровой вырѣзокъ или секторъ, а дуга круговаго вырѣзка описываетъ при этомъ поверхность шароваго сегмента.

§ 243. Поверхность шара равна $4\pi r^2$, если r означаетъ радиусъ шара.

Если около полукруга MQN, котораго радиусъ r , опишемъ полупериметръ прав. мно—ка ABCDEF съ четнымъ числомъ сторонъ и представимъ себѣ, что вся фигура обращается около линіи AF, то ABCDEF опишетъ тѣло вращенія, а каждая изъ сторонъ — поверхность конуса, или полного, или усѣченного плоскостью, параллельною основанію, или же наконецъ цилиндра. Опустимъ изъ вершинъ мно—ка перпендикуляры на ось AF, тогда отрѣзки оси AG, GK, KL... будутъ высотами полученныхъ отъ вращенія мно—ка полныхъ и усѣченныхъ конусовъ и цилиндра.



1) Чтобы вычислить поверхность усѣченного конуса, образованнаго движеніемъ линіи BC, проведемъ изъ точки B прямую $BZ \perp CK$ и изъ середины T стороны BC, т. е. изъ точки ея прикосновенія съ кругомъ, прямую $TH \perp AF$, и кромѣ того радиусъ $TO = r$. Такъ какъ TH будетъ радиусъ круга средняго сѣченія усѣченного конуса, то (§ 234, 1)

$$\text{поверхность } BC = 2\pi \cdot TH \cdot BC.$$

$$\text{Но } \triangle BCZ \sim \triangle THO \text{ (§ 103, 2), слѣд.}$$

$$BC:TO = BZ:TH \text{ или}$$

$$BC:r = GK:TH, \text{ т. е.}$$

$$BC \cdot TH = r \cdot GK, \text{ слѣд.}$$

$$\text{поверхность } BC = 2\pi r \cdot GK.$$

2) Чтобы вычислить поверхность цилиндра, образованнаго движеніемъ линіи CD, проведемъ изъ точки касанія Q радиусъ QO. Такъ какъ $QO = DL$, то (§ 224)

$$\text{поверхность } CD = 2\pi r \cdot KL.$$

3) Наконецъ чтобы вычислить поверхность полного конуса, проведемъ изъ точки касанія S прямую $SR \perp AF$ и радіусъ SO , тогда (§ 232, 4)

$$\text{поверхность } EF = 2\pi \cdot SR \cdot EF.$$

$$\text{Но } \triangle EFP \propto OSR, \text{ слѣд.}$$

$$EF:r = FP:SR \text{ или } EF \cdot SR = r \cdot FP, \text{ слѣд.}$$

$$\text{поверхность } EF = 2\pi r \cdot FP.$$

Изъ всего этого видно, что поверхность цилиндра и полного или усѣченного конуса равняется окружности большаго круга ($2\pi r$), умноженной на высоту тѣла, такъ что

$$\text{пов. } AB = 2\pi r \cdot AG$$

$$\text{пов. } BC = 2\pi r \cdot GK$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\text{пов. } EF = 2\pi r \cdot PF, \text{ слѣд.}$$

$$\begin{aligned} \text{поверхность тѣла вращенія} &= 2\pi r (AG + GK + \dots + PF) \\ &= 2\pi r \cdot AF. \end{aligned}$$

Увеличивая число сторонъ описаннаго мно—ка, мы можемъ сдѣлать разность между его периметромъ и окружностью меньше всякой данной величины. Съ увеличеніемъ числа сторонъ величина оси AF приближается къ величинѣ діаметра, въ которую она и обращается, если число сторонъ мно—ка будетъ безконечно велико, т. е. когда мно—къ обратится въ кругъ, въ какомъ случаѣ тѣло вращенія обратится въ шаръ. Если въ выраженіе $2\pi r \cdot AF$ подставимъ $AF = 2r$, тогда

$$\text{поверхность шара} = 4r^2\pi.$$

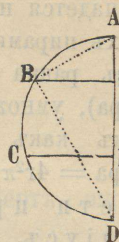
Слѣдствія. 1) Поверхность шара въ 4 раза больше площади его большаго круга.

2) Поверхности шаровъ относятся какъ квадраты ихъ радіусовъ или діаметровъ. Если O и o поверхности шаровъ, R и r радіусы, D и d діаметры, то

$$O:o = 4R^2\pi:4r^2\pi = R^2:r^2 = D^2:d^2.$$

§ 244. Поверхность шароваго сегмента или пояса равна $2\pi rh$, если h — высота пояса, а r радіусъ шара.

Будемъ обращать полуокружность $ABCD$ около діаметра AD , къ которому прямыя BE и CF перпендикулярны, тогда дуга AB опишетъ поверхность шароваго сегмента, а дуга BC — шаровой поясъ, AE и EF будутъ высоты. Такимъ же образомъ, какъ при вычисленіи поверхности шара (§ 243), выводится, что поверхность шароваго сегмента или пояса равняется окружности большаго круга, умноженной на высоту сегмента или пояса. Если $AE = h$, то поверхность $AB = 2\pi rh$, и если $EF = h$, то поверхность $BC = 2\pi rh$.



Слѣдствія. 1) Поверхности сегментовъ или поясовъ одного и того же шара относятся какъ ихъ высоты.

2) Поверхность сегмента или пояса относится къ поверхности шара, какъ его высота къ діаметру шара.

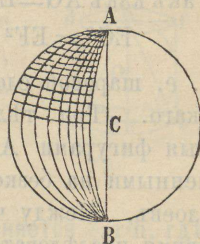
3) Если проведемъ хорду AB , то изъ прямоугольнаго тре—ка ABD получимъ (§ 197, 1)

$$AB^2 = AD \cdot AE = 2r \cdot AE, \text{ слѣд. и } 2\pi r \cdot AE = \pi \cdot AB^2, \text{ т. е.}$$

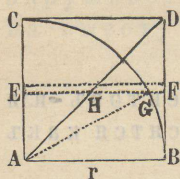
Поверхность шароваго сегмента равняется площади круга, котораго радіусъ равенъ линейному разстоянію вершины сегмента отъ окружности основанія.

§ 245. Объемъ шара равенъ $\frac{4}{3}r^3\pi$, если r — радіусъ шара.

Представимъ себѣ, что чрезъ концы діаметра AB проведено безчисленное множество большихъ круговъ и безчисленное множество малыхъ круговъ, перпендикулярныхъ діаметру AB . Тогда вся поверхность шара раздѣлится на безчисленное множество четырехугольниковъ и треугольниковъ, которые по причинѣ своей малости могутъ быть приняты за плоскіе. Если представимъ, что точки пересѣченія



этих круговъ будутъ соединены съ центромъ шара, то шаръ распадется на безконечно малыя пирамиды. Высота каждой изъ этихъ пирамидъ равна радіусу шара (r), а сумма ихъ объемовъ равна суммѣ всѣхъ ихъ оснований (т. е. поверхности шара), умноженной на треть общей высоты (т. е. радіуса r). Такъ какъ (§ 243) поверхность шара $= 4r^2\pi$, то объемъ шара $= 4r^2\pi \times \frac{1}{3}r = \frac{4}{3}r^3\pi$, т. е. объемъ шара равенъ трети произведенія его поверхности на радіусъ.



Второе доказательство. Пусть $ABDC$ будетъ квадратъ, котораго стороны равны радіусу r , AD діагональ квадрата и BGC четверть окружности, описанной радіусомъ r . Если будемъ обращать всю фигуру около линіи AC , какъ около оси, то квадратъ опишетъ прямой цилиндръ, тре—къ ACD — прямой конусъ, а четверть круга BGC — полушаріе. Если разсѣжемъ всѣ эти тѣла двумя плоскостями, перпендикулярными къ AC и безконечно близкими другъ къ другу, то цилиндрическій слой EF , шаровой слой EG и коническій EH можно разсматривать какъ прямые цилиндры съ безконечно малою высотой, которую назовемъ чрезъ h . Тогда

$$\text{цилиндрическій слой} = EF^2 \cdot \pi h$$

$$\text{шаровой слой} = EG^2 \cdot \pi h$$

$$\text{коническій слой} = EH^2 \cdot \pi h.$$

Проведемъ линію AG , тогда въ $\triangle AEG$ (§ 93) $EG^2 = AG^2 - AE^2$.

Такъ какъ $AG = EF$, $AE = EH$, потому что $\angle CAD = CDA = EHA$, то

$$EG^2 = EF^2 - EH^2, \text{ слѣд. } EG^2 \pi h = EF^2 \pi h - EH^2 \pi h,$$

т. е. шаровой слой равенъ цилиндрическому слою безъ коническаго. Три тѣла, цилиндръ, полушаріе и конусъ, описанныя фигурами $ABDC$, $ABGC$, ACD , можно представить разсѣченными на безконечное множество такихъ безконечно тонкихъ слоевъ. Между частями тѣлъ вращенія, отсѣченными каждыми двумя послѣдовательными плоскостями, будетъ существовать выведенное нами отношеніе, а потому и между суммами всѣхъ

этих частей, т. е. полушаріемъ, цилиндромъ и конусомъ будетъ та же зависимость. Такъ какъ

$$\text{цилиндръ} = r^3\pi, \text{ конусъ} = \frac{1}{3}r^3\pi, \text{ то}$$

$$\text{полушаріе} = r^3\pi - \frac{1}{3}r^3\pi = \frac{2}{3}r^3\pi, \text{ или}$$

$$\text{весь шаръ} = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

§ 246. 1) Если обозначимъ чрезъ d діаметръ шара, то $\frac{d}{2} = r$, слѣд.

$$\text{объемъ шара} = \frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi.$$

2) Объемы (K, k) двухъ шаровъ относятся какъ кубы ихъ радіусовъ (R, r) или діаметровъ (D, d), потому что

$$K:k = \frac{4}{3}R^3\pi:\frac{4}{3}r^3\pi = R^3:r^3 = D^3:d^3.$$

3) Если объемъ шара $\frac{4}{3}r^3\pi$ извѣстенъ, а требуется вычислить поверхность шара, то обозначая эту послѣднюю чрезъ x , находимъ

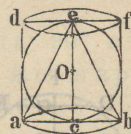
$$\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{3}rx, \text{ слѣд. } x = 4r^2\pi.$$

*§ 247. Если около шара опишемъ прямой цилиндръ, а въ этотъ послѣдній впишемъ прямой конусъ такъ, чтобы большой кругъ шара былъ общимъ основаніемъ цилиндра и конуса, а діаметръ шара общею высотой этихъ же тѣлъ, то будемъ имѣть такое отношеніе:

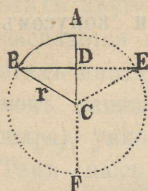
$$\text{объемъ кон.:об. шара:об. цил.} = 1:2:3.$$

Если обозначимъ чрезъ r радіусъ шара, то объемы конуса, шара и цилиндра будутъ $\frac{2}{3}r^3\pi$, $\frac{4}{3}r^3\pi$, $2r^3\pi$, слѣд. объемы этихъ трехъ тѣлъ относятся какъ

$$\frac{2}{3}r^3\pi:\frac{4}{3}r^3\pi:2r^3\pi = 1:2:3.$$



§ 248. Объемъ сферическаго вырѣзка равняется $\frac{2}{3}\pi r^2h$, гдѣ r означаетъ радіусъ шара, h высоту шароваго сегмента, ограничивающаго шаровой вырѣзкомъ.



Пусть ABC будет круговой секторъ, отъ обращенія котораго около радіуса AC получился шаровой секторъ ABCEA. Такъ какъ шаръ можно разсматривать какъ совокупность пирамидъ, имѣющихъ безконечно малыя основанія и равную радіусу шара высоту, то и шаровой секторъ можно разбить на подобныя же пирамиды.

Изъ этого представленія легко найти объемъ сектора, умноживъ ограничивающую его поверхность шароваго сегмента на третью радіуса. Если $AD = h$, то поверхность шароваго сегмента, описаннаго вращеніемъ дуги AB около радіуса AC, равна $2\pi rh$, слѣд. объемъ сектора $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

§ 249. Объемъ сферическаго сегмента равняется $h^2\pi(r - \frac{1}{3}h)$, гдѣ r — радіусъ шара, h высота сегмента.

Если въ круговомъ секторѣ ABCEA (фиг. § 248) проведемъ радіусъ AC перпендикулярно къ хордѣ BE и всю фигуру будемъ вращать около радіуса AC, то отъ вращенія сектора получимъ сферическій секторъ, отъ вращенія площади ABD — сферическій сегментъ, а отъ вращенія треуг. BDC — прямой конусъ. Сегментъ ABEA равняется сектору ABCEA безъ прямого конуса CBE. Обозначивъ AC чрезъ r , и AD чрезъ h , получимъ

$$CD = r - h, \quad BD^2 = r^2 - (r - h)^2 = (2r - h)h, \quad \text{слѣд.}$$

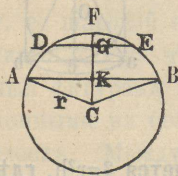
$$\text{конусъ CBE} = \frac{1}{3}BD^2\pi \cdot CD = \frac{1}{3}(2r - h)h\pi(r - h).$$

Но такъ какъ секторъ ABCEA $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$, то

$$\text{сегментъ} = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}(2r - h)h\pi(r - h)$$

$$= \frac{1}{3}h\pi [2r^2 - (2r - h)(r - h)]$$

$$= \frac{1}{3}h^2\pi (3r - h) = h^2\pi (r - \frac{1}{3}h).$$



§ 250. Сферическій слой ADEB равенъ разности между сегментами FABF и FDEF. Если даны высоты сегментовъ $FK = H$, $FG = h$, и радіусъ шара r , то

$$\text{сфер. слой} = H^2\pi (r - \frac{1}{3}H) - h^2\pi (r - \frac{1}{3}h)$$

$$= \pi r (H^2 - h^2) - \frac{\pi}{3} (H^3 - h^3).$$

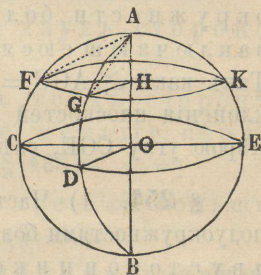
*VII. Дополнительные теоремы къ шару.

§ 251. Подъ сферическимъ разстояніемъ двухъ точекъ, лежащихъ на одномъ и томъ же шарѣ, подразумѣтся меньшая изъ дугъ большаго круга, проходящаго чрезъ эти точки.

Полюсами какого либо круга, проведеннаго на шарѣ, называются точки, въ которыхъ діаметръ, перпендикулярный къ плоскости этого круга, пересѣкаетъ поверхность шара. Діаметръ, соединяющій полюсы круга называется осью этого послѣдняго.

§ 252. Каждый изъ полюсовъ равно удаленъ отъ всѣхъ точенъ соотвѣтствующаго ему круга.

Положимъ что діаметръ АВ перпендикуляренъ къ площади большаго круга CDE и малаго FGK. Дуги AC, AD, BC, BD... равны между собою, потому что каждая изъ нихъ есть четверть окружности.



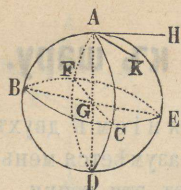
Относительно малаго круга хорды AF и AG равны (§ 165, 2), слѣд. и дуги AF и AG, BF и BG также равны (§ 46, 1).

Слѣдствія. 1) Каждый полюсъ большаго круга отстоитъ отъ всякой точки этого послѣдняго на 90° .

2) Параллельные круги имѣютъ общіе полюсы и общую ось.

3) Если точка А шара отстоитъ на 90° отъ двухъ какихъ либо точекъ С и D того же шара, не лежащихъ на концахъ одного и того же діаметра, то она есть полюсъ большаго круга, проходящаго чрезъ эти точки.

Такъ какъ дуга $AC = AD = 90^\circ$, то $\angle AOC = \angle AOD = 90^\circ$, а потому АО перпендикулярна къ плоскости CDE, слѣд. А есть полюсъ круга CDE.



§ 253. 1) Угломъ двухъ большихъ круговъ или сферическимъ угломъ, напр. $\angle CAE$, называется уголъ наклоненія плоскостей этихъ круговъ, — дуги AC и AE его сторонами, а точка A — его вершиною.

2) Сферическій уголъ $\angle CAE$ равенъ углу $\angle HAK$, образованному линіями, касающимися его сторонъ въ вершинѣ A . Такъ какъ эти касательныя находятся въ плоскостяхъ сторонъ AC и AE , и перпендикулярны къ линіи AD пересѣченія этихъ плоскостей (52, 2), то $\angle HAK$ служить мѣрою наклоненія плоскостей (179, 3).

3) Сферическій уголъ $\angle CAE$ измѣряется дугою CE , описанною изъ его вершины A четвертью окружности большаго круга, какъ радіусомъ, и заключающеюся между сторонами этого угла. Такъ какъ $\angle AGC = \angle AGE = 90^\circ$, то $\angle CGE$ будетъ угломъ наклоненія плоскостей круговъ CA и EA ; но дуга CE служить мѣрою углу $\angle CGE$, слѣд. она будетъ измѣрять и уголъ $\angle CAE$.

§ 254. 1) Часть поверхности шара, ограниченная двумя полукругностями большаго круга называется сферическимъ двусторонникомъ. Оба сферическіе угла двусторонника равны.

2) Часть поверхности шара, ограниченная тремя дугами большихъ круговъ, называется сферическимъ треугольникомъ. Сферическіе тре—ки, подобно прямолинейнымъ, бываютъ прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Мы будемъ разсматривать только такіе сферическіе треугольники, которыхъ стороны и углы, каждый въ отдѣльности, менѣе 180° .

3) Равными сферическими тре—ками называются такіе, которые при взаимномъ наложеніи другъ на друга совмѣщаются всѣми своими частями. Если же всѣ части сферическихъ тре—ковъ попарно равны, но расположены въ обратномъ, порядкѣ, то тре—ки называются симметричными.

§ 255. Если чрезъ центръ шара и стороны сферическаго тре—ка проведемъ плоскости, то получится трехгранный уголъ, котораго плоскіе углы равны сторонамъ, а двугранные равны

угламъ сферическаго тре—ка. Такимъ образомъ каждому сфер. тре—ку соотвѣтствуетъ трегранный уголъ, съ вершиною въ центрѣ шара и наоборотъ, — каждому трегранному углу соотвѣтствуетъ сферическій тре—къ, который получится, если мы какимъ нибудь радіусомъ изъ вершины треграннаго угла какъ изъ центра опишемъ шаръ, при чемъ точки пересѣченія реберъ угла съ поверхностью шара будутъ вершинами сферическаго тре—ка.

§ 256. Всѣ теоремы (§ 187—191) для плоскихъ и двугранныхъ угловъ треграннаго угла могутъ быть прямо отнесены къ сферическимъ тре—камъ, если мы вмѣсто двугранныхъ и плоскихъ угловъ треграннаго вставимъ соотвѣтствующія стороны и углы сферическаго тре—ка. Такимъ образомъ мы получимъ слѣдующія теоремы.

1) Въ сфер. тре—кѣ сумма двухъ сторонъ болѣе третьей (§ 187).

2) Въ сфер. тре—кѣ сумма всѣхъ сторонъ меньше 4 прямыхъ угловъ, т. е. меньше периметра большаго круга сферы (§ 188).

3) Сумма трехъ угловъ сфер. тре—ка больше 2 прямыхъ и меньше 6 прямыхъ (§ 190).

4) Два сфер. тре—ка равны или симметричны, если въ нихъ попарно равны (§ 191):

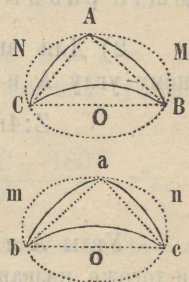
а) три стороны, или б) три угла, или

с) двѣ стороны и лежащій между ними уголъ, или

д) два угла и лежащая между ними сторона.

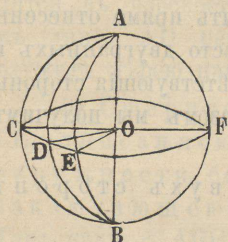
§ 257. Два симметричныя тре—на ABC и abc равновелики.

Такъ какъ дуги AB и ab , AC и ac , BC и bc равны между собою, то и хорды ихъ равны, слѣд. плоскій $\triangle ABC \cong abc$. Если мы около этихъ тре—ковъ опишемъ окружности, то эти послѣднія будутъ равны между собою, слѣд. и равно удалены отъ центра шара (§ 239, 2), а потому поверхности шаровыхъ сегментовъ, которыхъ основаніями служатъ эти круги, должны быть равны другъ



другу (§ 244, 1). Очевидно, что двухугольная фигура M , ограниченная двумя пересекающимися дугами, равна фигурѣ m ; подобнымъ образомъ $N = n$, $O = o$. Отнявъ отъ равныхъ между собою поверхностей шаровыхъ сегментовъ равныя фигуры M, N, O, m, n, o , мы получимъ въ остаткѣ равновеликіе тре—ки ABC и abc .

§ 258. Поверхность сферическаго двусторонника относится къ поверхности шара, какъ уголъ двусторонника къ четыремъ прямымъ.



Если два сфер. двусторонника имѣютъ равные углы CAD и DAE , то они равны, потому что, при наложеніи, взаимно совпадаютъ. Если одинъ двусторонникъ $ADBEA$ откладывается цѣлое число разъ на другомъ, $AEBFA$, то и уголъ перваго отложится столько же разъ на углѣ втораго, а если большой кругъ $CDEF$ перпендикуляренъ къ сторонамъ двусторонника, то и дуга DE отложится то же число разъ на дугѣ EF . Если при наложеніи получится остатокъ, то съ помощію такого же какъ въ § 57 приема можно убѣдиться, что и въ этомъ случаѣ двусторонники будутъ относиться, какъ ихъ углы. Разсматривая всю поверхность шара какъ двусторонникъ, котораго уголъ $= 4d$, мы получимъ такую пропорцію: поверхность сфер. двусторонника относится къ поверхности шара, какъ уголъ его къ $4d$, или измѣряющая его уголъ дуга къ окружности большаго круга.

§ 259. 1) Двусторонники того же шара, имѣющіе равные углы, равны между собою.

2) Для вычисленія поверхности двусторонника Z по данному углу A и радіусу r или поверхности O шара имѣемъ:

$$Z:4r^2\pi = A:4d \text{ или } Z:O = A:4d, \text{ слѣд.}$$

$$Z = \frac{Ar^2\pi}{d} = \frac{A}{4d} \cdot O.$$

Углы A и d должны быть выражены въ единицахъ одного и тогоже названія, т. е. въ градусахъ, минутахъ или секундахъ.

3) Тѣло К, отсѣкаемое отъ шара плоскостями, проходящими чрезъ стороны двугранника, заключается столько разъ въ шарѣ, сколько разъ уголъ двусторонника заключается въ $4d$, т. е.

$$K : \frac{4}{3}r^3\pi = A : 4d, \text{ слѣд. } K = \frac{r^3\pi}{3d} \cdot A.$$

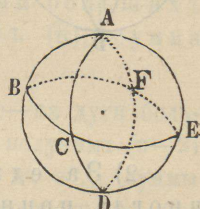
§ 260. Поверхность сферическаго треугольника ABC относится къ цѣлой поверхности шара O, какъ сферическій излишекъ, т. е. разность между суммою его угловъ и $2d$, относится къ $8d$.

Продолжимъ стороны тре—ка ABC такъ, чтобы онѣ составили полные круги, тогда (§ 259, 2)

$$ABC + BCD = ABDC A = \frac{A}{4d} \cdot O.$$

$$ABC + ACE = BAECB = \frac{B}{4d} \cdot O$$

$$ABC + ABF = CAFBC = \frac{C}{4d} \cdot O$$



Сложивъ эти равенства и вставивъ $ABF = DCE$ (§ 257), получимъ

$$3ABC + BCD + ACE + DCE = \frac{A + B + C}{4d} \cdot O$$

$$\text{Но } ABC + BCD + ACE + DCE = 2O.$$

Вычтя это уравненіе изъ предыдущаго, найдемъ

$$\frac{ABC}{O} = \frac{A + B + C - 2d}{8d}$$

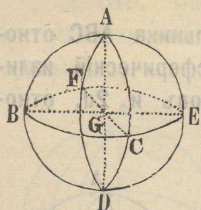
§ 261. 1) Такъ какъ поверхность шара $O = 4r^2\pi$, то плоскость сферическаго тре—ка выражается помощію угловъ тре—ка и радіуса r такъ :

$$\triangle ABC = \frac{A + B + C - 2d}{8d} \cdot 4r^2\pi = \frac{A + B + C - 180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2\pi.$$

Углы A, B, C и d должны быть выражены въ однѣхъ и тѣхъ же единицахъ угловой мѣры.

2) Всѣ тре—ки на одномъ и томъ же шарѣ равновелики, если сумма ихъ угловъ равна.

3) Поверхности сфер. тре—ковъ одного и того же шара относятся какъ ихъ сферическіе излишки.



§ 262. 1) Три плоскостями, проведенными чрезъ центръ шара перпендикулярно другъ къ другу, шаровая поверхность дѣлится на 8 частей, которыя равны между собою. Каждая изъ этихъ частей, напр. ABC, замкнута дугами, равными четвертямъ окружностей большихъ круговъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами, называется сферическимъ октантомъ.

2) За единицу мѣры шаровой поверхности иногда принимается сфер. октантъ. При такой единицѣ мѣры поверхность шара равна 8.

3) Если за единицу угловой мѣры примемъ прямой уголъ, а за единицу мѣры сфер. поверхности — сфер. октантъ, то поверхность сфер. треугольника равна сферическому излишку.

Такъ какъ сфер. октантъ $= \frac{1}{8} \cdot 4\pi^2$, то $\pi^2 = 2$ сфер. октантамъ. Вставивъ это выраженіе въ выведенную выше формулу (§ 261), получимъ

$$\triangle ABC = \left(\frac{A + B + C - 2d}{d} \right) \text{ сфер. окт.}$$

Но d и сфер. октантъ единицы мѣры, слѣд.

$$\triangle ABC = A + B + C - 2.$$

Если напр. каждый изъ угловъ сфер. тре—ка ABC равенъ $\frac{1}{3}d$, то $\triangle ABC = \frac{1}{3} \times 3 - 2 = 1$, т. е. равенъ 1 сфер. октантамъ.

4) Если обозначимъ чрезъ A отношеніе угла сфер. двусторонника Z къ прямому углу, то поверхность двусторонника Z равна $2A$ шаровымъ октантамъ, что выведется изъ пропорцій $Z:8 = A:4$.

5) Поверхность сфер. тре—ка равняется поверхности сфер. двусторонника, котораго уголъ равенъ половинѣ сфер. избытка этого тре—ка.

Обозначимъ чрезъ x уголъ сфер. двусторонника, равнаго данному сфер. тре—ку, и приравняемъ выраженія этихъ поверхностей; тогда получимъ (§ 259, 2 и § 261, 1)

$$\frac{xr^2\pi}{d} = \frac{A + B + C - 2d}{2d} \cdot r^2\pi, \quad x = \frac{1}{2}(A + B + C) - d.$$

§ 263. 1) Найти поверхность сфер. многоугольника, т. е. части шаровой поверхности, ограниченной болѣе чѣмъ тремя дугами большихъ круговъ, если дано число сторонъ (n), сумма угловъ (S) и радіусъ шара (r).

Проведя изъ какой либо вершины много—ка дуги большихъ круговъ къ остальнымъ его вершинамъ, мы получимъ $(n-2)$ сфер. тре—ковъ. Если обозначимъ чрезъ $s, s', s'' \dots$ суммы угловъ каждаго изъ этихъ тре—ковъ, то поверхности ихъ будутъ (261, 1):

$$\frac{s-180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2\pi, \quad \frac{s'-180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2\pi, \quad \frac{s''-180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2\pi \dots \text{ слѣд.}$$

$$\text{мно—къ} = \frac{s + s' + s'' \dots - (n-2)180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2\pi = \frac{S - (n-2)180^\circ}{180^\circ} \cdot r^2\pi,$$

гдѣ S должно быть выражено въ градусахъ и частяхъ градуса.

2) Если принимать за единицы мѣры прямой уголъ и сферическій октантъ, то поверхность сфер. мно—ка равна $S - 2(n-2)$.

§ 264. Найти объемъ шаровой пирамиды, т. е. части шара, ограниченной сфер. много—комъ и плоскостями, проведенными чрезъ стороны сфер. мно—ка, если даны радіусъ (r) шара и углы много—ка.

Можно представить себѣ, что шаровая пирамида состоитъ изъ безконечно большаго числа безконечно малыхъ пирамидъ, которыя имѣютъ общую вершину въ центрѣ шара, основанія которыхъ составляютъ ограничивающій пирамиду сфер. мно—къ, а высоты равны радіусу (r) шара. Изъ этого слѣдуетъ, что

объемъ шаровой пирамиды равняется поверхности сфер. мно—ка, умноженной на $\frac{1}{3}r$.

Если основаніе сфер. пирамиды будетъ сфер. тре—къ, котораго углы A, B, C , то объемъ шаровой пирамиды (§ 261, 1)

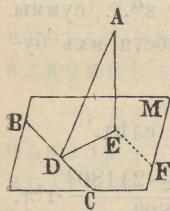
$$= \frac{A + B + C - 180^\circ}{540^\circ} \cdot r^3 \pi$$

Если же основаніе мно—къ, въ которомъ n сторонъ и сумма угловъ $= S$, тогда объемъ шаровой пирамиды (§ 263, 1)

$$= \frac{S - (n - 2) 180^\circ}{540^\circ} \cdot r^3 \pi.$$

VIII. Задачи.

§ 265. (Прямая линія и плоскости § 156 — § 185).



1) Изъ точки A , лежащей внѣ плоскости M , опустить на нее перпендикуляръ.

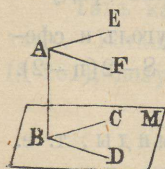
2) Изъ точки E , лежащей на плоскости M , возставить къ ней перпендикуляръ.

3) Чрезъ точку E провести плоскость, перпендикулярную къ линіи AE .

4) Чрезъ точку A провести плоскость, параллельную данной плоскости M .

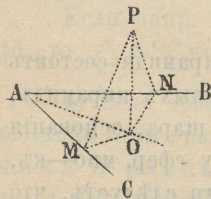
5) Чрезъ данную прямую AB провести плоскость, перпендикулярную къ плоскости M .

6) Провести плоскость, равно удаленную отъ данныхъ точекъ A, B, C, D , не лежащихъ въ одной и той же плоскости.



7) Провести плоскость такъ, чтобы каждая точка ея (напр. P) была равно удалена отъ сторонъ данного угла BAC .

8) Провести прямую линію, равно отстоящую отъ трехъ параллельныхъ линій, не лежащихъ въ одной и той же плоскости.



5) По тремъ двуграннымъ угламъ A , B , C трехграннаго угла найти его плоскіе углы.

6) Построить трехгранный уголъ а) по тремъ даннымъ плоскимъ угламъ ASB , ASC , BSC , б) по двумъ даннымъ плоскимъ угламъ, ASB , BSC , и заключающемуся между ними двугранному углу ABC .

7) Построить трехгранный уголъ, равный данному углу $SABC$.

§ 267. (Многогранники § 192 — § 219).

1) По данному ребру построить кубъ.

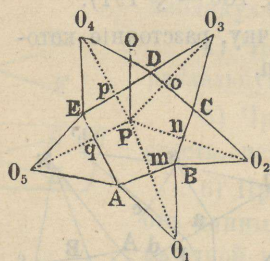
2) Разсѣчь кубъ плоскостью такъ, чтобы линіи сѣченія образовали правильный шестиугольникъ.

3) Даны длина и положеніе трехъ выходящихъ изъ одной точки прямыхъ AB , AD , AE (фиг. § 192); построить параллелепипедъ, у котораго эти прямые были бы ребрами.

4) Построить прямоугольный параллелепипедъ по данному ребру такъ, чтобы онъ былъ бы равновеликъ кубу P^2 .

5) Построить призму по данному основанію, величинѣ и положенію боковаго ребра.

6) Усѣченную трехстороннюю призму обратить въ прямую, основаніе которой равнялось бы сѣченію данной призмы плоскостью, перпендикулярною къ боковымъ ребрамъ (§ 212).



7) Начертить на плоскости поверхность пирамиды, если даны а) основаніе $ABCDE$, высота OP и точка P пересѣченія основанія съ высотой, б) основаніе $ABCDE$ и двѣ смежныя грани ABO и BCO .

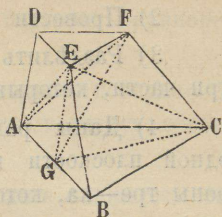
8) Пирамиду $SABCDE$ (§ 204) раздѣлить плоскостью, параллельною основанію такъ, чтобы площади основанія и сѣченія относились, какъ линіи m и n .

9) Построить а) тетраэдръ, б) октаэдръ, в) додекаэдръ, д) икосаэдръ, по данному ребру.

10) Начертить на плоскости уголъ наклоненія двухъ смежныхъ плоскостей а) тетраэдра, б) октаэдра, в) додекаэдра, д) икосаэдра.

11) Построить тре—къ, котораго площадь была бы среднею пропорціональною между основаніями данной усѣченной пирамиды $ABCDEF$.

12) Усѣченную пирамиду разсѣчь плоскостью, параллельною основаніямъ такъ, чтобы площадь сѣченія была среднею пропорціональною между обѣими основаніями.



§ 268. (Цилиндръ и конусъ, § 220 — § 234).

1) Построить цилиндръ и конусъ, если даны радіусъ r основанія, высота h и уголъ m наклоненія оси къ основанію.

2) Даны радіусъ r основанія и высота h прямого цилиндра; построить другой прямой цилиндръ, котораго боковая поверхность равнялась бы всей поверхности, а основаніе — основанію перваго цилиндра.

3) Построить кругъ, котораго площадь равнялась бы цѣлой поверхности а) прямого цилиндра, б) прямого конуса, которыхъ радіусы основаніи и высоты даны.

4) Начертить кругъ, равный всей поверхности прямого усѣченного конуса, имѣющаго радіусы R и r и образующую s .

5) Выразить въ линіяхъ отношеніе между объемами двухъ данныхъ конусовъ.

6) Построить цилиндръ и конусъ, сумма объемовъ которыхъ равнялась бы объему даннаго усѣченного конуса, а высота всѣхъ трехъ тѣлъ была бы одинакова.

7) Усѣченный прямой конусъ разсѣчь плоскостью, параллельною основаніямъ такъ, чтобы площадь сѣченія была среднею пропорціональною между площадями основаній.

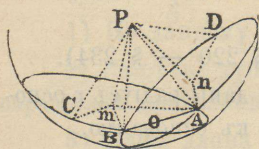
8) Чрезъ точку A , данную внѣ цилиндра, провести плоскость, которая бы коснулась его по образующей.

9) Чрезъ точку A внѣ конуса провести къ нему касательную плоскость.

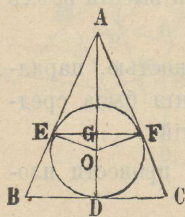
§ 269. (Шара § 235 — § 250).

1) Чрезъ точку P , лежащую внѣ шара, провести къ шару касательную плоскость.

- 2) Провести плоскость касательную къ двумъ шарамъ.
- 3) Раздѣлить параллельными кругами поверхность шара на три части, которыя бы относились какъ $m:n:p$.
- 4) Даны радиусы a, b, c трехъ шаровъ, лежащихъ на одной плоскости и соприкасающихся между собою, найти стороны тре—ка, котораго вершины лежатъ въ точкахъ прикосновенія плоскости съ шарами.



- 5) Доказать, что чрезъ четыре точки A, B, C, D , не лежащія въ одной плоскости, можно провести только одну сферическую поверхность.
- 6) Описать шаровую поверхность, если дана какая нибудь часть этой поверхности.
- 7) Около данной трехсторонней пирамиды описать сферическую поверхность.
- 8) Описать шаровую поверхность, которая прошла бы чрезъ всѣ точки двухъ пересѣкающихся въ пространствѣ круговъ.
- 9) Около правильного многогранника описать шаръ, и въ правильномъ многогранникѣ вписать шаръ.
- 10) Половина правильного многоугольника, вписаннаго въ кругъ, вращается около діаметра круга (фиг. § 243). Построить прямой цилиндръ, котораго высота равнялась бы оси AF , а боковая поверхность — поверхности тѣла вращенія.



- 11) Построить въ прямомъ конусѣ (ABC) шаръ, который соприкасался бы съ боковою поверхностью конуса по кругу, и касался основанія конуса въ центрѣ (D) .
- 12) Около конуса описать шаръ, котораго поверхность прошла бы чрезъ вершину конуса и совмѣстилась съ окружностью основанія.
- 13) Въ трехстороннюю пирамиду вписать шаръ, который бы коснулся каждой стороны пирамиды.
- 14) Построить шаровой секторъ, котораго объемъ равнялся бы объему, а ограничивающій его шаровой сегментъ — основанію даннаго конуса.

15) На основаніи шароваго сегмента построить равновеликій ему конусъ.

16) Построить шаровой сегментъ, котораго поверхность равняется поверхности конуса, имѣющаго съ первымъ общее основаніе, а вершину въ центрѣ шара.

17) Построить цилиндръ, котораго основаніе равнялось бы большему кругу шара, а боковая поверхность была равновелика данному поясу того же шара.

18) Построить кругъ, котораго площадь равновелика данному шаровому поясу.

19) Построить шаровой поясъ, который относился бы къ площади основанія его какъ $m:n$.

§ 270. (Сферическія построенія § 251 — § 264).

1) На шарѣ провести кругъ, котораго полюсъ A и сферическій радіусъ b даны.

2) Провести дугу большого круга чрезъ данныя двѣ точки A, B на шарѣ.

3) Продолжить данную дугу большого круга.

4) Найти полюсъ большого или малаго круга, проведеннаго на шарѣ.

5) Построить сфер. мно—къ, симметричный данному сфер. мно—ку.

6) Чрезъ данную точку на дугѣ большого круга провести дугу, перпендикулярную къ первой.

7) Изъ данной точки, лежащей внѣ большого круга, провести къ этому кругу перпендикулярную дугу.

8) Раздѣлить пополамъ а) данную на шарѣ дугу, б) данный сфер. уголь.

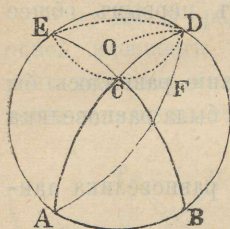
9) При данной точкѣ большого круга построить сфер. уголь, равный данному.

10) Около даннаго сфер. тре—ка описать кругъ.

11) Въ данный сфер. тре—къ вписать кругъ.

12) Построить сфер. тре—къ по даннымъ а) тремъ сторонамъ, б) тремъ угламъ, в) двумъ сторонамъ и заключающемуся между ними углу, г) двумъ угламъ и лежащей между ними сторонѣ.

13) Провести большой кругъ, который касался бы даннаго малаго круга K , и имѣлъ бы полюсомъ точку P .



14) Найти геометрическое мѣсто верширь (C) сфер. тре—ковъ, которые имѣють одно и тоже основаніе AB и равновеликую поверхность.

15) Превратить сфер. тре—къ ABC въ равновеликій двусторонникъ.

16) Доказать, что меньшая дуга окружности большаго круга, заключающаяся между двумя лежащими на шарѣ точками, менѣе дуги всякаго малаго круга, заключающейся между тѣми же точками.

Изданія книжнаго магазина Ф. Клуге въ Ревелѣ.

Голотузовъ, Нѣмецкая азбука приспособленная къ методѣ
одновременнаго обученія письму и чтенію. Цѣна 30 коп.

— — **Русская хрестоматія**. Книга для переводовъ съ рус-
скаго языка на нѣмецкій. Часть II, 2. изд. 1 р. 20 к.

Мериновъ, Хрестоматія для употребленія въ младшихъ и
среднихъ классахъ училищъ прибалтійскихъ губерній.
1873. 1 р.

Пилеманъ, книга для переводовъ съ нѣмецкаго языка на
русскій. 1887. 7. изд. 1 р.

Шафрановъ и Николичъ, Русская хрестоматія для употре-
бленія въ училищахъ прибалтійскихъ губерній. Часть I.
Проза. 3. изд. 1872. 1 р. 20 к.

Святой, Русская хрестоматія, или избранныя мѣста изъ
русскихъ прозаиковъ и стихотворцевъ, съ нѣмецкими
объясненіями словъ и предметовъ. Курсъ I 80 к.;
курсъ II 1 р. 35 к.

Черешевичъ, Хрестоматія для перевода съ нѣмецкаго языка
на русскій. 4. изд. 1 р.

