TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Metoodiline materjal „Põhilised elementaarfunktsioonid" matemaatilise analüüsi praktikumiks matemaatika I kursuse üliõpilastele

1987

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatilise analüüsi kateeder

Metoodiline materjal „Põhilised elementaarfunktsioonid" matemaatilise analüüsi praktikumiks matemaatika I kursuse üliõpilastele

TARTU 1987

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 29. mail 1987.a.

Koostanud E. Jürimäe

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ.
Методический материал для студентов I курса.
Составитель Эндель Юримяэ.
На эстонском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Vastutav toimetaja H. Türnpu.
Paljundamisele antud 3.07.1987.
Formaat 60x74/16.
Rotaatoripaber.
Masinakiri. Rotaprint.
Tingtrükipoognaid 3,02.
Arvestuspoognaid 2,86. Trükipoognaid 3,25.
Trükiarv 500.
Tell. nr. 626.
Hind 10 kop.
TRÜ trükikoda. ENSV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.

SISSEJUHATUS

Käesolev metoodiline materjal on mõeldud matemaatilise analüüsi praktikumi jaoks matemaatika eriala üliõpilastele.

Matemaatilise analüüsi aluse moodustavad põhilised elementaarfunktsioonid, mille vajalikku tundmaõppimist koolimatemaatika ei taga. Et matemaatilise analüüsi meetodite omandamine eeldab oskust lahendada väga mitmesuguseid võrrandeid, võrratusi ning nende süsteeme, siis on käesolevas põhiliste elementaarfunktsioonide omaduste tundmaõppimine seostatud vastavate võrrandite ja võrratuste lahendamisega. Esitatud on põhilised tõed võrrandite (jaot. 1) ja võrratuste (jaot.2) kohta. Edasistes jaotistes on vaadeldud mitmesuguseid võrrandeid ja võrratusi alustades algebralistest, millede lahendusmeetoditel põhineb ka paljude transtsendentsete võrrandite ja võrratuste lahendamine. Niisuguste funktsioonidega seoses, nagu logaritm- ja arkusfunktsioonid, millele koolimatemaatika pühendab eriti vähe tähelepanu, on antud ka muud laadi ülesandeid, mis peaksid aitama paremini omandada nende funktsioonide omadusi. Alates jaotisest 3 on igaühes teatav arv ülesandeid lahendamiseks (kokku 271 ülesannet). Iga jaotise alguses on viidatud põhilistele võtetele vastavate ülesannete lahendamisel ning on lahendatud näiteülesandeid. Viimased peaksid abistama iseseisvat tööd käesoleva materjaliga. Lõpus on on antud vastused kõikidele esitatud ülesannetele. Lisa sisaldab põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud ning mõned graafikud erinevate funktsioonide võrdlemiseks.

Kasutatud on järgmist sümboolikat: $\{a, b, c\}$ - hulk elementidega a, b ja c , $[a; b]$ - lõik, $[a; b)$ ja $(a; b]$ - poollõigud, $(a; b)$ - vahemik. Sümbol R tähistab kõikide reaalarvude hulka ning $\emptyset$ tühja hulka.

1. SAMAVÄÄRSED VÕRRANDID

Võrrandi $f(x)=g(x)$ lahendamine tähendab kõigi nende (reaal-) arvude leidmist, mille korral antud võrdus osutub õigeks. Igat sellist arvu nimetatakse võrrandi lahendiks ning kõiki lahendeid koos võrrandi lahendihulgaks. Võrrandeid nimetatakse samaväärseteks, kui neil on ühised lahendihulgad. Võrrandite lahendamisel püütakse antud võrrand taandada temaga samaväärseks võrrandiks, mille lahendid on kas teada või on kergemini leitavad.

1. Võrrandid

$$f(x)=g(x) \quad \text{ja} \quad -f(x)=-g(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud (võrrandi määramispiirkonnas).

2. Võrrandid

$$f(x)=g(x) \quad \text{ja} \quad \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{g(x)}$$

on samaväärsed hulgal, kus nad on määratud ning $f(x)=g(x)\neq 0$.

3. Võrrandid

$$f(x)=g(x) \quad \text{ja} \quad f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$, $g(x)$ ja $\varphi(x)$ on määratud.

4. Võrrandid

$$f(x)=g(x) \quad \text{ja} \quad f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$, $g(x)$ ja $\varphi(x)$ on määratud ning $\varphi(x)\neq 0$.

5. Kui funktsioon $\mathcal{F}$ on rangelt monotoonne, siis võrrandid

$$\mathcal{F}(f(x))=\mathcal{F}(g(x)) \quad \text{ja} \quad f(x)=g(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus mõlemad võrrandid on määratud.

Näide 1. Võrrandid

$$\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2+x} \quad \text{ja} \quad x^2-3x=2+x$$

on samaväärsed hulgal, kus $x^2-3x\geq 0$ ja $2+x\geq 0$.

Näide 2. Võrrandid

$$\sin(2x-\pi)=\sin 5x \quad \text{ja} \quad 2x-\pi=5x$$

ei ole samaväärsed. Siinusfunktsioon ei ole monotoonne.

Märkus. Kui funktsioon $\mathcal{G}$ ei ole rangelt monotoonne, kuid on teada kõigi nende argumendi väärtuste hulk, kus sellel funktsioonil on ühesugused väärtused, siis saame võrrandi $\mathcal{G}(f(x))=\mathcal{G}(g(x))$ asendada teatava võrrandite hulgaga, mis on samaväärne antud võrrandiga.

Näide 3. Võrrand $(4x-1)^2=(3-x)^2$ on samaväärne kahest võrrandist koosneva hulgaga: $4x-1=3-x$ ja $4x-1=-(3-x)$, sest $(-a)^2=a^2$.

Näide 4. Võrrand $\sin(2x-\pi)=\sin x$ on samaväärne võrrandite hulgaga

$$2x-\pi=(-1)^n x+n\pi \text{ ,kus } n\in\mathbb{Z}.$$

2. SAMAVÄÄRSED VÕRRATUSED

Võrratust $f(x)<g(x)$ nimetatakse rangeks ja võrratust $f(x)\leq g(x)$ mitterangeks. Võrratuse lahendamine tähendab kõigi nende reaalarvude x leidmist, mille puhul antud võrratus osutub õigeks arvvõrratuseks. Igat niisugust reaalarvu x nimetatakse võrratuse lahendiks. Koos moodustavad need võrratuse lahendihulga. Mitme võrratuse koos vaatlemine annab meile võrratuste süsteemi, mille lahendihulgaks on süsteemis olevate kõigi võrratuste lahendihulkade ühisosa.

Kahte võrratust (võrratuste süsteemi) nimetatakse samaväärseteks, kui neil on ühesugused lahendihulgad.

Võrratuste lahendamisel kasutatakse järgmisi omadusi.

1. Võrratused

$$f(x)<g(x) \quad \text{ja} \quad -f(x)>-g(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud (võrratuse määramispiirkonnas).

2. Võrratused

$$f(x)<g(x) \quad \text{ja} \quad \frac{1}{f(x)}>\frac{1}{g(x)}$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on positiivsed.

3. Võrratused

$$f(x)<g(x) \quad \text{ja} \quad f(x)+\varphi(x)<g(x)+\varphi(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$, $g(x)$ ja $\varphi(x)$ on määratud.

4. Võrratused

$$f(x) < g(x) \quad \text{ja} \quad f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$, $g(x)$ ja $\varphi(x)$ on määratud ning $\varphi(x) > 0$.

5. Võrratused

$$f(x) < g(x) \quad \text{ja} \quad [f(x)]^{2k+1} < [g(x)]^{2k+1}$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

6. Võrratused

$$f(x) < g(x) \quad \text{ja} \quad [f(x)]^{2k} < [g(x)]^{2k}$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on positiivsed.

7. Kui $a > 1$, siis võrratused

$$f(x) < g(x) \quad \text{ja} \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

8. Kui $0 < a < 1$, siis võrratused

$$f(x) < g(x) \quad \text{ja} \quad a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

9. Kui $a > 1$, siis võrratused

$$f(x) < g(x) \quad \text{ja} \quad \log_a f(x) < \log_a g(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on positiivsed.

10. Kui $0 < a < 1$, siis võrratused

$$f(x) < g(x) \quad \text{ja} \quad \log_a f(x) > \log_a g(x)$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on positiivsed.

Analoogilisi samaväärsete võrratuste paare võime saada teisi rangelt monotoonseid funktsioone (näiteks, arkusfunktsioone) kasutades.

11. Võrratused

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad \text{ja} \quad f(x)g(x) > 0$$

on samaväärsed hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

12. Võrratus $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ on samaväärne kahe võrratuste süsteemiga

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

hulgal, kus $f(x)$ ja $g(x)$ on määratud.

3. POLÜNOOMI NULLKOHAD. HORNERI SKEEM

Ühe muutuja n-astme polünoomiks nimetatakse avaldist

$$P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 ,$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_n$ on etteantud arvud (polünoomi kordajad) ning pealiikme kordaja $c_n \neq 0$. Kui $c_n = 1$, siis polünoomi $P_n(x)$ nimetatakse taandatud polünoomiks, vastasel juhul taandamata polünoomiks. Polünoomi <u>nullkohaks</u> nimetatakse arvu a, mille korral $P_n(a)=0$. Igat reaalarvuliste kordajatega polünoomi $P_n(x)$ on võimalik esitada kujul

$$P_n(x) = c_n (x-a)^{\lambda} \ldots (x-b)^{\mu} (x^2+px+q)^{\sigma} \ldots (x^2+rx+s)^{\tau}.$$

Siinjuures tegureid $(x-a), \ldots, (x-b)$ nimetatakse lineaarteguriteks ning tegureid $(x^2+px+q), \ldots, (x^2+rx+s)$, mis ei lahutu lineaartegurite korrutiseks, ruuttegureiks. Lineaartegurí $x-a$ puhul on reaalarv a polünoomi nullkohaks ehk võrrandi $P_n(x)=0$ lahendiks (λ-kordseks lahendiks). Polünoomi nullkohtade leidmiseks kasutatakse järgmisi fakte.

Täisarvuliste kordajatega taandatud polünoomil on ratsionaalarvude hulgas vaid täisarvulised nullkohad, mis on vabaliikme c_0 tegureiks.

Arv a on polünoomi $P_n(x)$ nullkohaks parajasti siis, kui see polünoom jagub avaldisega $x-a$.

Polünoomi $P_n(x)$ jagamisel avaldisega $x-a$ saame üldjuhul, et

$$P_n(x) = Q_{n-1}(x)(x-a) + r ,$$

kus r on teatav arv (jääk) ja $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$. Siinjuures kehtivad seosed

$$b_{n-1} = c_n , \quad b_{n-2} = c_{n-1} + ab_{n-1} , \quad b_{n-3} = c_{n-2} + ab_{n-2} ,$$
$$\ldots , \quad b_1 = c_2 + ab_2 , \quad b_0 = c_1 + ab_1 , \quad r = c_0 + ab_0 .$$

Polünoomi $Q_{n-1}(x)$ kordajate leidmist on otstarbekas teha järgmise skeemi (Horneri skeemi) kohaselt.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_2 & c_1 & c_0 \\
 & & ab_{n-1} & ab_{n-2} & \ldots & ab_2 & ab_1 & ab_0 \\
\hline
a & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_1 & b_0 & r = P_n(a)
\end{array}$$

<u>Näide 1.</u> Jagame polünoomi $2x^5 - 3x^3 - 2x^2 + x - 5$

avaldisega $x+2$

	2	0	-3	-2	1	5
		-6	12	-18	40	-82
-2	3	-6	9	-20	41	-77

Seega

$$2x^5-3x^3-2x^2+x-5=(x+2)(3x^4-6x^3+9x^2-20x+41)-77.$$

Horneri skeemi on otstarbekas kasutada polünoomi tegureiks lahutamisel, sest tema abil saame proovimise teel leida täisarvuliste kordajatega taandatud polünoomi täisarvulisi nullkohti, mis peavad olema vabaliikme jagajad. Seejuures jäetakse Horneri skeemis teine rida kirjutamata (tehes vastavad arvutused peast). Olles leidnud ühe nullkoha (jääk $r=0$), otsime saadud jagatise (mille kordajad on siis meie skeemi viimases reas) nullkohti jne. Kõik need arvutused koondame ühte tabelisse.

Näide 2. Lahutame polünoomi $x^5-2x^3-2x^2-3x-2$ tegureiks.

Täisarvulisteks nullkohtadeks võivad olla vabaliikme -2 jagajad: 1,-1,2 ja -2.

	1	0	-2	-2	-3	-2
1	1	1	-1	-3	-6	-8
-1	1	-1	-1	-1	-2	0
-1	1	-2	1	-2	0	
-1	1	-3	4	-6		
2	1	0	1	0		

Et viimases reas on polünoomi x^2+1 kordajad, siis pole mõtet enam edasi proovida, kuna see polünoom tegureiks ei lahutu. Seega saime, et $x+1$ on antud polünoomi kahekordseks ning $x-2$ ühekordseks lineaarteguriks, mistõttu

$$x^5-2x^3-2x^2-3x-2=(x+1)^2(x-2)(x^2+1).$$

Lahutada tegureiks järgmised polünoomid.

3.1. $x^5+2x^4-10x^3-20x^2+9x+18$

3.2. $x^4+3x^3-15x^2+17x-6$

3.3. $x^5+2x^4-7x^3-20x^2-12x$

3.4. $x^4+x^3-2x^2-4x-8$

3.5. $x^7+2x^6-13x^5+10x^4$

4. KÕRGEMA ASTME VÕRRATUSED

Võrratusi

$$P_n(x) > 0 \quad (\text{või} < 0, \leq 0, \geq 0)$$

nimetatakse kõrgema astme võrratusteks. Nende lahendamisel on otstarbekas (võrratust vajaduse korral arvuga -1 korrutades) saavutada olukord, kus polünoomi $P_n(x)$ pealiikme kordaja on positiivne. Olgu meil niisugune võrratus

$$P_n(x) > 0.$$

Selle lahendihulga leidmiseks leiame võrrandi

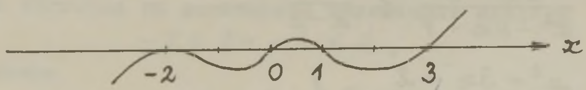
$$P_n(x) = 0.$$

kõik lahendid ja määrame nende kordsuse. Kanname kõik lahendid arvsirgele (x-teljele), tõmbame läbi nende punktide joone, alustades paremalt ülalt (pealiikme kordaja positiivne!). Seejuures läbime lahendit x-telge lõigates, kui selle lahendi kordsus on paaritu arv, ning puutudes, kui lahendi kordsus on paarisarv.

Näide 3. Lahendada võrratus

$$x(x+2)^2(x^2+x+5)(x-1)(x-3)^3 \geq 0.$$

Kanname nullkohad 0,-2,1 ja 3 arvteljele (joon. 4.1) ja tõmbame vastava joone.



Joon. 4.1

Võrratuse lahendihulgaks X on nende punktide x hulk, kus saadud joon ei ole allpool x-telge, s.t.

$$X = \{-2\} \cup [0;1] \cup [3;\infty).$$

Lahendada järgmised võrratused.

4.1. $x^2(x^2-x-20)^3(x^2-7x+12) < 0$

4.2. $(x-1)^2(x^2-x-42)(x^2+8x+7)^4 > 0$

4.3. $(x+1)^2(x^2-5x+4) \leq 0$

4.4. $(x+2)^2(x^2+8x-9) \geq 0$

4.5. $x^7 - x^6 + 9x^5 - 9x^4 < 0$

4.6. $-x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x + 8 > 0$

3

5. MURDVÕRRATUSED

Võrratust

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0,$$

kus $P_n(x)$ ja $Q_m(x)$ on polünoomid, nimetatakse murdvõrratuseks. Et selline võrratus on samaväärne võrratusega

$$P_n(x)\,Q_m(x) < 0,$$

siis lahendub murdvõrratus samade meetoditega, mida vaatlesime eelmises jaotises. Kui on tegemist mitterange murdvõrratusega, siis tuleb silmas pidada, et nimetaja $Q_m(x)$ nullkohad ei kuulu selle võrratuse lahendihulka, lugeja $P_n(x)$ nullkohad aga kuuluvad.

Lahendada järgmised võrratused.

5.1. $\dfrac{(x+1)(x+2)^2}{(x-3)^3(x-4)^4} \leq 0$

5.2. $\dfrac{x+1}{2(x-1)} < \dfrac{9}{2(x+4)} + \dfrac{1}{x-1}$

5.3. $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \dfrac{1}{x-3}$

5.4. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-5x+6} > 1$

5.5. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geq 1$

5.6. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$

5.7. $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \dfrac{1}{x-3}$

5.8. $\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(4-x)x^2} \geq 0$

6. ABSOLUUTVÄÄRTUSTEGA VÕRRANDID JA VÕRRATUSED

Reaalarvu absoluutväärtuseks nimetatakse mittenegatiivset arvu

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{kui } x \geq 0, \\ -x, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

Sellest definitsioonist järelduvad järgmised samaväärsused:

1) $|x| = a \iff x = a$ või $x = -a$;

2) $|x| < a \iff -a < x < a$;

3) $|x| > a \iff x > a$ või $x < -a$.

mida saab kasutada mitmete võrrandite ja võrratuste lahendamisel.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$|x^2 - 5x| = 6.$$

See võrrand on samaväärne kahe võrrandiga:

$$x^2 - 5x = 6 \quad \text{või} \quad x^2 - 5x = -6.$$

Esimese võrrandi lahendeiks on -1 ja 6 ning teisel 2 ja 3. Seega on antud võrrandil neli lahendit: -1,2,3, ja 6.

Näide 2. Lahendada võrratus

$$|3x + 4| \leq 2.$$

Antud võrratus on samaväärne võrratuste ahelaga

$$-2 \leq 3x + 4 \leq 2,$$

millest saame

$$-6 \leq 3x \leq -2$$

ning

$$-2 \leq x \leq -\frac{2}{3}.$$

Seega on antud võrratuse lahendihulgaks lõik $X = [-2; -\frac{2}{3}]$.

Näide 3. Lahendada võrratus

$$|x^2 - 3| > 1.$$

Selline võrratus on samaväärne kahe võrratusega:

$$x^2 - 3 < -1 \quad \text{või} \quad x^2 - 3 > 1$$

ehk

$$x^2 < 2 \quad \text{või} \quad x^2 > 4.$$

Esimesest võrratusest saame, et $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, ning teisest - $x < -2$ või $x > 2$. Seega on antud võrrandi lahendihulgaks

$$X = (-\infty; -2) \cup (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup (2; \infty).$$

2*

Lahendada võrrandid.

6.1. $|3x-1|=2$

6.2. $|x-x^2|=2$

6.3. $|4-x^2|=5$

6.4. $||x|-2|=4$

6.5. $|1-|1-x||=\frac{1}{2}$

6.6. $||x-1|+1|=2$

Lahendada võrratused.

6.7. $|-2x|<4$

6.8. $|4x+1|\leq -5$

6.9. $|x-5|\leq 2$

6.10. $|3-2x|>1$

6.11. $|4+3x|\geqslant 5$

6.12. $|2-x|>-3$

6.13. $|x^2-1|<1$

6.14. $|x^2-3x|>2$

Üldjuhul tuleb absoluutväärtust sisaldavate võrrandite ja võrratuste lahendamisel kogu arvsirge jagada osadeks, milles igaühes on absoluutväärtuste märkide all seisvatel avaldistel kindel märk (avaldis kas positiivne või negatiivne) ning lahendada vastav võrrand või võrratus iga piirkonna jaoks eraldi.

__Näide 4.__ Lahendada võrrand

$$|x|+|x-1|=3.$$

Siin absoluutväärtuste märkide all on kaks avaldist, milledest üks muudab märki punktis 0 ja teine punktis 1. Seega jaotame arvsirge kolmeks osaks: $(-\infty;0)$, $[0;1]$ ja $(1;\infty)$. Esimeses osas $|x|=-x$ ja $|x-1|=-(x-1)$, teises osas $|x|=x$ ja $|x-1|=-(x-1)$ ning kolmandas osas $|x|=x$ ja $|x-1|=x-1$. Seega taandub meie võrrandi lahendamine kolme järgmise süsteemi lahendamisele:

$$\begin{cases} x<0 \\ -x-(x-1)=3 \end{cases};\quad \begin{cases} 0\leq x\leq 1 \\ x-(x-1)=3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x>1 \\ x+(x-1)=3 \end{cases}$$

ehk vastavalt:

$$\begin{cases} x<0 \\ -2x+1=3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 1=3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x>1 \\ 2x=4 \end{cases}.$$

Teisel süsteemil ei ole lahendit. Esimesest süsteemist saame lahendina -1 ja kolmandast 2. Võrrandi lahendihulk on $\{-1;2\}$.

Näide 5. Lahendada võrratus

$$2x+|x+1|<7.$$

Et siin absoluutväärtuse märgi alune avaldis muudab märki punktis -1, siis saame selle võrratuse asendada kahe süsteemiga:

$$\begin{cases} x<-1 \\ 2x-(x+1)<7 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x\ge -1 \\ 2x+(x+1)<7. \end{cases}$$

Need süsteemid on samaväärsed vastavalt süsteemidega

$$\begin{cases} x<-1 \\ x<-8 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x\ge -1 \\ 3x<6 \end{cases}.$$

Esimese süsteemi lahendihulga moodustavad arvud $x<-1$ ning teise oma on määratud seosega $-1\le x<2$. Seega saame antud võrratuse lahendihulgana $X=(-\infty;2)$.

Lahendada järgmised võrrandid.

6.15. $|x^2-1|=-|x|+1$

6.16. $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$

6.17. $|x^2-3|x|+2|=x^2-2x$

6.18. $\left|\dfrac{2x-3}{2-x}\right|=2$

6.19. $|x^2+3x+2|+4x+10=0$

Lahendada järgmised võrratused.

6.20. $|-x+2|\le|2x+1|$

6.21. $|x^3-x|\le x$

6.22. $x^2-|3x+2|+x\ge 0$

6.23. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}+\dfrac{|x-2|}{|x-3|}-12<0$

6.24. $\dfrac{4}{|x+1|-2}\ge|x-1|$

7. JUURVÕRRANDID JA -VÕRRATUSED

Käesolevas vaatleme võrrandeid ja võrratusi, milles tundmatu esineb juure märgi all. Nende puhul tuleb kõigepealt arvestada, et paarisarvulise juurijaga juur on määratud vaid mittenegatiivse juuritava korral. Seega tuleb alati (eriti võrratuse puhul) määrata vaadeldava võrratuse (võrrandi) määramispiirkond. Üheks võtteks juurvõrrandite ja -võrratuste lahendamisel on võrrandi (võrratuse) mõlema poole astendamine (astendajaks tuleb võtta kõikide juurijate vähim ühiskordne). Kui aga sel juhul astendajaks on paarisarv, siis astendades võime saada mittesamaväärse võrrandi (võrratuse). Seda seetõttu, et

$$a^{2k} = (-a)^{2k} \text{ ning } \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|.$$

Kui võrrandi puhul saame võõrlahendid kergesti eraldada kontrollimise teel, siis võrratusega on lugu keerulisem. Võrratuse mõlema poole astendamisel tuleb silmas pidada, et paarisarvulise astendaja korral ei ole vastav astmefunktsioon monotoonne. Range monotoonsus on vaid siis, kui astendatavad on positiivsed. Seosed $a < b$ ja $a^{2k} < b^{2k}$ on samaväärsed vaid siis, kui $0 \le a < b$.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$\sqrt{x+7} - x - 3 = 0.$$

Võrrandi määramispiirkonna saame seosest $x+7 \ge 0$ ehk $x \geqslant -7$. Antud võrrandist saame, et

$$\sqrt{x+7} = x+3,$$

millest vahetult nähtub, et $x+3 \ge 0$, s.t. $x \ge -3$. Ruutu tõstes saame võrrandi

$$x + 7 = x^2 + 6x + 9$$

ehk

$$x^2 + 5x + 2 = 0,$$

mille lahendeiks on $x_1 = -\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ ja $x_2 = \dfrac{\sqrt{17}-5}{2}$. Kuna $x_1 < -3$, siis saame, et meie võrrandi ainsaks lahendiks on

$$x_2 = \frac{\sqrt{17}-5}{2}.$$

Näide 2. Lahendada võrratus

$$\sqrt{x^3 - 5x} < 2x.$$

Kuna võrratuse vasak pool (ruutjuur) on alati mittenegatiivne, siis võrratuse lahendeiks saavad olla vaid positiivsed arvud. Määramispiirkonna leiame seosest $x^3 - 5x \geq 0$. Selleks on hulk $[-\sqrt{5}; 0] \cup [\sqrt{5}; \infty)$. Eelnevat märkust arvestades saavad lahendid olla vaid poolsirgel $[\sqrt{5}; \infty)$.

Kuna võrratuse mõlemad pooled on positiivsed, siis ruutu tõstes saame samaväärse võrratuse

$$x^3 - 5x < 4x^2$$

ehk

$$x(x-5)(x+1) < 0.$$

Selle võrratuse lahendeist asuvad poolsirgel $[\sqrt{5}; \infty)$ poollõigu $[\sqrt{5}; 5)$ punktid. Seega on meie võrratuse lahendihulgaks poollõik $X = [\sqrt{5}; 5)$.

Lahendada järgmised võrrandid.

7.1. $\sqrt{2x^2 - 7x + 3} = \sqrt{5x - 2 - 2x^2}$

7.2. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{5x - 6 - x^2}$

7.3. $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[6]{x} + \sqrt{x} = 2$

7.4. $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0$

7.5. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1$

7.6. $\dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 - x}} - \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - x}} = \sqrt{3}$

Lahendada järgmised võrratused.

7.7. $\sqrt{4 - 3x} > x$

7.8. $\sqrt{x^2 - 4} > x$

7.9. $\sqrt{49 - x^2} < \sqrt{6}\, x$

7.10. $\sqrt{x^2 - x - 12} < 7 - x$

7.11. $\sqrt{x^2 + 5x - 6} > x + 2$

7.12. $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{2 - x}$

7.13. $\dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{3 - x} < 1$

7.14. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}+1>0$

7.15. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$

7.16. $\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+3}}\leqslant 3$

Leida järgmiste avaldiste määramispiirkonnad.

7.17. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}+\sqrt[6]{\dfrac{x+3}{(x+5)^2}}$

7.18. $\sqrt[4]{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

7.19. $\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{x-2}}$

7.20. $\dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}}$

7.21. $\dfrac{1}{x-1}+\sqrt[6]{\dfrac{3x+1}{x+2}}$

7.22. $\sqrt[4]{1-\dfrac{3}{x^2-x+1}}$

7.23. $\sqrt{\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{1}{x+2}}$

7.24. $\dfrac{\sqrt{\log_a(x^2+2-2x)}}{x+5}$, $a>1$

7.25. $\sqrt{1-2^{|3x+2|-1}}$

8. EKSPONENT- JA LOGARITMFUNKTSIOONE SISALDAVATE AVALDISTE TEISENDAMINE

Kui $a > 0$, siis suvaliste reaalarvude x ja z puhul kehtivad järgmised seosed:

1. $a^x a^z = a^{x+z}$
2. $\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. $(a^x)^z = a^{xz}$
5. $a^0 = 1$
6. $a^1 = a$
7. $1^x = 1$

Arvu x logaritmiks alusel a ($a > 0$, $a \neq 1$) nimetatakse niisugust arvu (tähistatakse $\log_a x$), mille korral

$$a^{\log_a x} = x . \qquad (1)$$

Siin $x > 0$, kuna $a^z > 0$ iga reaalarvu z korral. Seoste (1) ja 1. - 6. põhjal saame järgmised logaritmi omadused:

8. $\log_a a^x = x$
9. $\log_a xz = \log_a x + \log_a z$
10. $\log_a \frac{x}{z} = \log_a x - \log_a z$
11. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
12. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ iga α puhul
13. $\log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x$, kui $\alpha \neq 0$
14. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$, kui $b > 0$, $b \neq 1$
15. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, kui $b > 0$, $b \neq 1$
16. $\log_a a = 1$
17. $\log_a 1 = 0$
18. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, kui $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$

Lihtsustada järgmised avaldised.

8.1. $5^{\frac{2}{\log_3 5}}$ 8.2. $a^{\frac{1}{4}\log_a b}$

8.3. $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$ 8.4. $a^{5-2\log_a b}$

8.5. $8^{\log_5 7 \cdot \log_7 5}$ 8.6. $5^{2-3\log_5 3}$

8.7. $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{4}$ 8.8. $\log_{\frac{1}{8}} \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{4}$

8.9. $\log_8 \left(\frac{1}{4}\right)^7$ 8.10. $100^{\log\sqrt{7}}$

8.11. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$

8.12. $2^{\log_4 (2-\sqrt{3})^2} + 3^{\log_3 (2+\sqrt{3})^2}$

8.13. $$\frac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \frac{a}{b}}$$

8.14. Tõestada seosed 13, 15 ja 18.

8.15. Leida $\log 64$, kui $\log_4 125 = a$.

8.16. Leida $\log_5 6$, kui $\log 2 = a$ ja $\log 3 = b$.

8.17. Tõestada, et $\dfrac{1}{\log_2 3} + \dfrac{1}{\log_5 3} > 2$.

Leida määramispiirkonnad.

8.18. $\log_2 \left(\log_2 \frac{1}{x}\right)$

8.19. $\sqrt{\log_a (x^2-2x+2)}$, $a>1$

8.20. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{x-1}}$

9. EKSPONENTVÕRRANDID

Võrrandeid, kus tundmatu esineb astendajas, nimetatakse eksponentvõrrandeiks. Niisuguste võrrandite lahendamise põhiliseks võtteks on antud võrrandi viimine ühele järgmistest kujudest:

$$a^x = b, \qquad (1)$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}. \qquad (2)$$

Võrrandi (1) lahendiks on $x = \log_a b$. Võrrand (2) on samaväärne võrrandiga $f(x) = g(x)$, mille lahendamisel saadaksegi otsitavad lahendid.

Mitmete võrrandite lahendamisel saame kasutada eksponentfunktsiooni ranget monotoonsust.

<u>Näide</u>. Leida võrrandi $4^x + 9^x = 25^x$ lahendid.

On kerge märgata, et $x = \frac{1}{2}$ on lahend. Kas aga on veel teisi lahendeid? Antud võrrand on samaväärne võrrandiga

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x + \left(\frac{9}{25}\right)^x = 1.$$

Et viimase võrrandi vasakul poolel on mõlemad liidetavad positiivsed ning rangelt kahanevad, siis ei saa ükski $x < \frac{1}{2}$ ega ka ükski $x > \frac{1}{2}$ olla selle võrrandi lahendiks. Seega antud võrrandi ainsaks lahendiks on $x = \frac{1}{2}$.

Lahendada järgmised võrrandid.

9.1. $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-3} = 76$

9.2. $9^{3-5x} \cdot 7^{5x-3} = 1$

9.3. $2^{3x} \cdot 5^x = 1600$

9.4. $16^x - 5 \cdot 8^x + 6 \cdot 4^x = 0$

9.5. $2^{3x-3} - 5 + 6 \cdot 2^{3-3x} = 0$

9.6. $25^{|1-2x|} = 5^{4-6x}$

9.7. $(\sqrt[3]{2})^{x^2-6x-4} = (\sqrt{3+\sqrt{8}} - 1)^x$

9.8. $\sqrt{2^{x-1} \sqrt[3]{4^x (0,125)^{\frac{1}{x}}}} = 4 \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$

9.9. $64^{\frac{1}{x}} - 2^{3+\frac{3}{x}} + 12 = 0$

9.10. $4^{x} - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$

9.11. $(3+2\sqrt{2})^{x} + (3-2\sqrt{2})^{x} = 34$

9.12. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x} + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{x} = 4$

9.13. $8(4^{x} + 4^{-x}) - 54(2^{x} + 2^{-x}) + 101 = 0$

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid.

9.14. $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x} - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$

9.15. $\begin{cases} 2^{x} \cdot 3^{y} = 6 \\ 3^{x} \cdot 4^{y} = 12 \end{cases}$

9.16. $\begin{cases} 2^{x} \cdot 3^{y} = 12 \\ 2^{y} \cdot 3^{x} = 18 \end{cases}$

9.17. $\begin{cases} 2^{x-y} - 2 \cdot 6^{x-y} - 6^{-2y} = 0 \\ 2^{-x-y} - 2 \cdot 3^{x+y} + 3 \cdot 9^{x} = 0 \end{cases}$

9.18. $\begin{cases} 4^{x+y} = 27 + 9^{x-y} \\ 8^{x+y} - 21 \cdot 2^{x+y} = 27^{x-y} + 7 \cdot 3^{x-y+1} \end{cases}$

9.19. $\begin{cases} 2 \cdot 15^{x} + 15^{y} = 5^{x} \cdot 3^{-y} \\ 2 \cdot 9^{x} + 2 \cdot 3^{x-y} - 5^{y-x} = 5 \cdot 9^{x} \end{cases}$

9.20. $\begin{cases} 2^{x^2+y^2} = 16^{x+y} \\ 2^{x^2} + 8 \cdot 2^{y^2} = 8 \cdot 16^{x} + 16^{y} \end{cases}$

10. EKSPONENTVÕRRATUSED

Kui antud võrratuses tundmatu esineb astendajas, siis kõneldakse eksponentvõrratusest, näiteks,

$$a^x < b\,, \quad a^x \geq b\,, \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}\,, \quad a^x < b^x.$$

Niisuguste (ja ka mitmesuguste teiste taoliste) võrratuste lahendamiseks kasutatakse eksponentfunktsiooni (ka tema pöördfunktsiooni - logaritmfunktsiooni) ranget monotoonsust, asendades eksponentvõrratuse temaga samaväärse võrratusega (vt. jaotis 2). Kasutatakse ka järgmisi samaväärsusi.

1) Kui $a>1$ ja $b>0$, siis $a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

2) Kui $0<a<1$ ja $b>0$, siis $a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

3) Kui $a < b$, siis $a^x < b^x \Leftrightarrow x > 0$.

4) Kui $a > b$, siis $a^x < b^x \Leftrightarrow x < 0$.

5) Kui $b<0$, siis $a^x \leq b \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

6) Kui $b<0$, siis $a^x \geq b \Leftrightarrow x \in R$.

Näide 1. Lahendada võrratus $0{,}5^{x^2} \leq 0{,}0625$.

Et antud võrratus on teisiti kirjutatav kujul

$$0{,}5^{x^2} \leq 0{,}5^4,$$

siis, arvestades eksponentfunktsiooni (alusel 0,5) ranget kahanemist,

$$x^2 \geq 4 \quad \text{ehk} \quad |x| \geq 2.$$

Lahendihulgaks on seega $X = (-\infty; -2] \cup [2; \infty)$.

Näide 2. Lahendada võrratus

$$3 \cdot 16^x + 36^x \leq 2 \cdot 81^x.$$

Seda võrratust teisendades saame:

$$3 \cdot 2^{4x} + 6^{2x} \leq 2 \cdot 3^{4x};$$

$$3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{4x} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2x} \leq 2.$$

See on ruutvõrratus $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$ suhtes, mille lahendihulk on määratud seosega

$$-1 \leq t = \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2x} \leq \tfrac{2}{3}.$$

Et $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} > 0$ iga x korral, siis saame, et viimane võrratuste ahel on samaväärne võrratusega

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leq \frac{2}{3},$$

millest saame lahendihulga $X = (-\infty; 1]$.

Lahendada järgmised võrratused.

10.1. $4 \cdot 4^{x-1} - 7 \cdot 2^{x+1} - 32 \leq 0$

10.2. $25^{-x} + 5^{-x+1} \geq 50$

10.3. $4^x + 2^{x+1} - 6 \leq 0$

10.4. $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$

10.5. $5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x \leq 7 \cdot 10^x$

10.6. $3^{2x+2} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 < 0$

10.7. $2^{2x+1} - \frac{3}{2} \cdot 2^{x+2} + 4 > 0$

10.8. $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} < 0{,}25^{2x}$

10.9. $4^{x^2} - 3 \cdot 2^{x^2} + 11 \geq 0$

10.10. $9^{\sqrt{x}} + 3 < 3^{\sqrt{x}-1} \cdot 28$

10.11. $\sqrt{4^{x+1} + 17} - 5 > 2^x$

10.12. $4^x + 2^{x+1} \leq 80$

10.13. $3^{\frac{6x-3}{x}} < \sqrt[4]{27^{2x-1}}$

10.14. $\dfrac{7}{9^x - 2} \geq \dfrac{2}{3^x - 1}$

10.15. $\dfrac{4^x}{4^x - 3^x} < 4$

10.16. $2^x < 3^{\frac{1}{x}}$

10.17. $0{,}8^x - 1{,}25^{x+1} > 0{,}25$

11. LOGARITMVÕRRANDID

Logaritmvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmitavas. Niisuguse võrrandi puhul on alati vaja selgitada võrrandi määramispiirkond, sest logaritm on määratud vaid positiivse logaritmitava korral.

Logaritmvõrrandite lahendamise põhiliseks võtteks on nende võrrandite taandamine ühele järgmistest võrranditest:

$$\log_a x = b, \qquad (1)$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x). \qquad (2)$$

Võrrandi (1) lahendiks on $x = a^b$. Võrrandi (2) lahendi saame võrrandi $f(x) = g(x)$ lahendamisel, arvestades seoseid $f(x) > 0$ ja $g(x) > 0$.

Näide 1. Lahendada võrrand

$$\log_2 x - 1 = \log_x 4.$$

Et $\log_x 4 = 2\log_x 2 = \dfrac{2}{\log_2 x}$, siis antud võrrand teisendub võrrandiks

$$\log_2 x - 1 = \frac{2}{\log_2 x}.$$

See on ruutvõrrand $t = \log_2 x$ suhtes. Tema lahendeiks on $t_1 = -1$ ja $t_2 = 2$. Antud võrrandi lahendeiks on seega $x_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ ja $x_2 = 2^2 = 4$.

Näide 2. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \log_2 y = \log_4 (xy - 2) \\ \log_9 x^2 + \log_3 (x - y) = 1 \end{cases}.$$

Läheme esimeses võrrandis üle logaritmile alusel 2 ja teises – alusel 3. Me saame süsteemi

$$\begin{cases} \log_2 y = \frac{1}{2} \log_2 (xy - 2) \\ \frac{1}{2} \log_3 x^2 + \log_3 (x - y) = 1, \end{cases}$$

mis aga on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} y^2 = xy - 2 \\ x(x - y) = 3 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} y^2 = xy - 2 \\ x^2 = xy + 3 \end{cases}.$$

Lahutades teisest võrrandist esimese, saame viimasest süsteemist, et

$$x^2 - y^2 = 5 \quad \text{ehk} \quad (x+y)(x-y) = 5.$$

Viimane koos võrrandiga $x(x-y)=3$ annab meile, et

$$\frac{x+y}{x} = \frac{5}{3} \quad \text{ehk} \quad 1 + \frac{y}{x} = \frac{5}{3},$$

millest $y = \frac{2}{3}x$. Tehes asenduse näiteks võrrandisse $x^2 = xy + 3$, saame viimase süsteemi kaks lahendit

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -2 \end{cases}.$$

Teine neist aga pole esialgse süsteemi lahend, kuna y peab olema positiivne. Esimene - $x_1 = 3$ ja $y_1 = 2$ on meie süsteemi lahendiks, mida võib kergesti kontrollida.

Näide 3. Lahendada võrrand

$$(\sqrt{x})^{x-1} = x^{\sqrt{x}}.$$

Võrrandi mõlemaid pooli logaritmides saame, et

$$\frac{1}{2}(x-1)\log x = \sqrt{x}\log x.$$

Siit leiame, et

$$\log x = 0 \quad \text{või} \quad \frac{1}{2}(x-1) = \sqrt{x}.$$

Esimesest saame lahendi $x_1 = 1$. Teise võrrandi lahendiks on $x_2 = 3 + \sqrt{8}$. Seega on meie võrrandil kaks lahendit - $x_1 = 1$ ja $x_2 = 3 + \sqrt{8}$.

Lahendada järgmised võrrandid.

11.1. $\log(3x^2 + 12x + 19) - \log(3x+4) = 1$

11.2. $3(\log x)^{\frac{1}{2}} + 2\log\sqrt{\frac{1}{x}} = 2$

11.3. $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$

11.4. $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

11.5. $\log(35 - x^3) = 3\log(5-x)$

11.6. $\log^2 x^3 - 20\log\sqrt{x} + 1 = 0$

11.7. $\frac{1}{10}\log\sqrt[3]{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{2}\log x - \log\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

11.8. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$

11.9. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$

11.10. $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$

11.11. $x^{-\lg x}=x^2$

11.12. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x+1=0$

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid.

11.13. $\begin{cases}\log_y x-\log_2 y^2=1\\ \log_4 x-\log_4 y=1\end{cases}$

11.14. $\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2{,}5\\ xy=27\end{cases}$

11.15. $\begin{cases}\log_2 y=\log_4(xy-2)\\ \log_9 x^2+\log_3(x-y)=1\end{cases}$

11.16. $\begin{cases}2x^y-x^{-y}=1\\ \log_2 y=\sqrt{x}\end{cases}$

11.17. $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=1\\ \log_{xy}(x+y)=0\end{cases}$

11.18. $\begin{cases}x^{2y-1}=5\\ x^{y+2}=3\end{cases}$

11.19. $\begin{cases}3^x2^y=18\\ \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=-1\end{cases}$

11.20. $\begin{cases}x^{x-y}=y^{x+y}\\ y\sqrt{x}=1\end{cases}$

12. LOGARITMVÕRRATUSED

Analoogiliselt võrranditega on logaritmvõrratuste lahendamise põhiliseks võtteks nende võrratuste taandamine järgmist tüüpi võrratustele:

$$\log_a x < b\,, \qquad (1)$$

$$\log_a f(x) \leq \log_a g(x). \qquad (2)$$

Võrratuse (1) võime kirjutada võrratusena (2), arvestades seost $b = \log_a a^b$. Võrratuse (2) lahendihulga saame logaritmfunktsiooni ranget monotoonsust ja määramispiirkonda arvestades. Sellest lähtudes on võrratus (2) samaväärne ühega kahest võrratuste ahelast:

$$0 < f(x) \leq g(x) \quad \text{, kui} \quad a > 1, \qquad (3)$$

$$0 < g(x) \leq f(x) \quad \text{, kui} \quad 0 < a < 1. \qquad (4)$$

Näide 1. Lahendada võrratus

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) > 3.$$

Antud võrratus on määratud, kui

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad x > 1.$$

Seega on antud võrratus samaväärne võrratuste süsteemiga

$$\begin{cases} x > 1 \\ \log_2(x^2-1) > \log_2 8 \end{cases}$$

millest (3) põhjal saame, et

$$\begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 1 > 8 \end{cases}$$

Viimase süsteemi lahendihulgaks on $X = (3;\infty)$, mis on ka antud võrratuse lahendihulgaks.

Märkus. Kasutades logaritmi omadusi, tuleb arvestada, et teisendamisel võib muutuda võrratuse määramispiirkond. Nii on vaadeldud näites esialgse võrratuse määramispiirkond $(x>1)$ hoopiski kitsam võrratuse $\log_2(x^2-1) > \log_2 8$ määramispiirkonnast ($x < -1$ või $x > 1$).

Võrratuste

$$\log_{f(x)} g(x) < a \quad \text{või} \quad \log_{f(x)} g(x) \geq a$$

lahendamisel tuleb vaadelda kahte juhtu:

$$f(x) > 1 \quad \text{ja} \quad 0 < f(x) < 1.$$

Näide 2. Lahendada võrratus

$$\log_{x^2}(x^2 - x - 6) > 1.$$

Sellise võrratuse lahendihulga saame kahe järgmise süsteemi lahendamisel:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x^2 > 1 \\ x^2 - x - 6 > x^2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ 0 < x^2 < 1 \\ x^2 - x - 6 < x^2 \end{cases}.$$

Neist esimese lahendamisel saame:

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ |x| > 1 \\ -x - 6 > 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x < -2 \quad \text{või} \quad x > 3 \\ |x| > 1 \\ x < -6 \end{cases}.$$

Seega saame, et antud võrratuse lahendihulka kuuluvad punktid $x < -6$.

Teise süsteemi lahendamisel saame:

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) > 0 \\ 0 < |x| < 1 \\ -x - 6 < 0 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x < -2 \quad \text{või} \quad x > 3 \\ 0 < |x| < 1 \\ x > -6 \end{cases}.$$

Viimane süsteem on vastuoluline, mistõttu tema lahendihulgaks on tühi hulk.

Seega on antud võrratuse lahendihulgaks poolsirge $X = (-\infty; -6)$.

Näide 3. Lahendada võrratus $5^{x^2} < 2^{\frac{1}{x}}$.

Kuna võrratuse mõlemad pooled on positiivsed iga $x \neq 0$ korral, siis võime neid logaritmida. Kasutame logaritmi alusel 5. Me saame võrratuse

$$x^2 < \frac{1}{x} \log_5 2.$$

Et $\log_5 2 > 0$, siis saadud võrratust ei rahulda ükski negatiivne arv. Kui $x > 0$, siis saame võrratuse

$$x^3 < \log_5 2,$$

millest saame lahendihulgana $X = (0; \sqrt[3]{\log_5 2})$.

Lahendada järgmised võrratused.

12.1. $\log_2 \dfrac{x-3}{x+2} < 0$

12.2. $\log(x-4) + \log x < \log 21$

12.3. $4 - \log x > 3\sqrt{\log x}$

12.4. $2\log_9(2x^2+3) < \log_3(x^2+6)$

12.5. $2\log_4 x - \frac{1}{2}\log_2(x^2-3x+2) \leq \log_2 \frac{1}{\sqrt{3}}$

12.6. $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} < 0$

12.7. $\log_2 \sqrt{x} - 2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 + 1 > 0$

12.8. $\log_{100} x^2 + (\log x)^2 < 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

12.9. $\log_2(3-x) - \log_2 \dfrac{\sin\frac{3\pi}{4}}{5-x} > \frac{1}{2} + \log_2(x+7)$

12.10. $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{2x-1}{x+1} < \cos\dfrac{2\pi}{3}$

12.11. $\log_{x^2}|x+1| > 1$

12.12. $\dfrac{1}{\log_3 x} \leq \dfrac{1}{\log_3\sqrt{x+2}}$

12.13. $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-5}{|x-2|}\right) \geq \dfrac{1}{2}$

12.14. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > (\log_{4x} 2)^2$

12.15. $(x-3)^{2x^2-7x} > 1$

12.16. $|\log_\pi x|^{\sqrt{9-x^2}} \leq |\log_\pi x|^{\sqrt{x-0{,}5}}$

13. TRIGONOMEETRILISED VÕRRANDID

Lihtsaimad trigonomeetrilised võrrandid ja nende lahendid:

$$\sin x = a \iff x = (-1)^n \arcsin a + n\pi, \text{ kui } |a| \le 1;$$
$$\cos x = a \iff x = \pm \arccos a + 2n\pi, \text{ kui } |a| \le 1;$$
$$\tan x = a \iff x = \arctan a + n\pi;$$
$$\cot x = a \iff x = \operatorname{arccot} a + n\pi,$$

kus $n \in \mathbb{Z}$.

Üldjuhul toimub trigonomeetrilise võrrandi lahendamine selle võrrandi taandamisega ühele (või mitmele) ülalmärgitud võrrandile.

Näide 1. Lahendada võrrand $2\cos^2 x = 1$.

Antud juhul $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ või $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Seega saame lahenditena

$$x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2n\pi = \pm \frac{\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ja

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2n\pi = \pm \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Need kaks lahendite seeriat võime ühiselt esitada kujul

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

või siis

$$x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Et ülalmärgitud lihtsaimate trigonomeetriliste võrrandite lahendeid võime vaadelda kui nurki, mille korral on ühe- ja samasugune väärtus antud trigonomeetrilisel funktsioonil, siis saame neid kasutada ka selliste trigonomeetriliste võrrandite lahendite leidmisel, nagu

$$\sin f(x) = \sin g(x), \quad \cos f(x) = \cos g(x) \text{ ja } \tan f(x) = \tan g(x).$$

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\cos 2x + \sin 3x = 0.$$

Et $\cos 2x = -\sin 3x$, siis taandamisvalemi põhjal võime oma võrrandi esitada kujul

$$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right).$$

Võrrandi $\cos x = a$ üldlahendi valemi põhjal

$$\frac{\pi}{2} + 3x = \pm 2x + 2n\pi ,$$

millest saame kaks seeriat lahendeid:

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} = (4n-1)\frac{\pi}{2}$$

ja

$$x = \frac{1}{5}\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (4n-1)\frac{\pi}{10} , \quad n \in \mathbb{Z} .$$

<u>Märkus</u>. Trigonomeetriliste võrrandite lahendite erinevate seeriate ülesmärkimisel võime kasutada üht ja sama täisarvuliste väärtustega parameetrit. Kui aga on vaja erinevaid seeriaid omavahel võrrelda (kasvõi selgitamaks neis ühiste lahendite olemasolu), siis on otstarbekas iga seeria jaoks kasutada erinevat parameetrit.

Võrrandi

$$A \sin ax + B \cos ax = C , \quad A^2 + B^2 \neq 0 ,$$

lahendamisel teisendatakse see võrrand kujule

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \sin ax + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos ax = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} .$$

Valides φ selliselt, et

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{ja} \quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} ,$$

saame antud võrrandi esitada kujul

$$\sin(ax+\varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} ,$$

millel on lahend, kui $|C| \leq \sqrt{A^2+B^2}$. Lahendid leiame võrrandi $\sin x = a$ üldlahendi valemi abil.

<u>Näide 3</u>. Lahendada võrrand

$$\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3} .$$

Siin $A = \sqrt{3}$, $B = -1$ ja $C = \sqrt{3}$, s.t. $\sqrt{A^2+B^2} = 2$. Antud võrrandit arvuga 2 jagades saame võrrandi

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Et $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ja $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, siis võime viimase võrrandi kirjutada kujul

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Siit

$$2x - \frac{\pi}{6} = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + n\pi;$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi,$$

millest

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + (6n+1)\frac{\pi}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Homogeensed trigonomeetrilised võrrandid (võrrandi kõikides liikmetes on siinuse ja koosinuse astendajate summa võrdne) lahendatakse sel teel, et jagatakse võrrandi mõlemaid pooli kas siinuse või koosinuse astmega, kus astendajaks on võrrandi mistahes liikmes olevate siinuse ja koosinuse astendajate summa. Sel viisil saadakse võrrand kas tangensi või kootangensi suhtes.

Näide 4. Lahendada võrrand

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Jagades siin võrrandi mõlemaid pooli suurusega $\cos^2 x$ (mis ei saa olla 0), saame võrrandi

$$\tan^2 x + 2\tan x - 3 = 0,$$

millest $\tan x = 1$ või $\tan x = -3$. Lahenditeks on seega:

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi \quad \text{ja} \quad x = n\pi - \arctan 3,$$

kus $n \in \mathbb{Z}$.

Lahendada järgmised võrrandid

13.1. $2\sin^2 x + 3\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

13.2. $1 - 2\cos^2 x + \sin x = 0$

13.3. $\dfrac{3}{\cos^2 x} = 8\tan x - 2$

13.4. $\tan x + \sin 2x = \dfrac{1}{\cos x}$

13.5. $\cos 3x + \sin 5x = 0$

13.6. $2\cos 2x = \sqrt{6}(\cos x - \sin x)$

13.7. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$

13.8. $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$

13.9. $2\sin^3 x + 2\cos x\sin^2 x - \sin x\cos^2 x = \cos^3 x$

13.10. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x$

13.11. $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

13.12. $2\sin^3 x = \cos x$

13.13. $\sin 2x + 5\cos^2 x = 4$

13.14. $4\sin 3x + 3\cos 3x = 5{,}2$

13.15. $\sin 2x + \cos 2x = -1$

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid.

13.16. $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = 3\sin x\sin y \\ x + 2y = \frac{3}{2}\pi \end{cases}$

13.17. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos 2x - \cos 2y = 1 \end{cases}$

13.18. $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$

13.19. $\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3 \\ 2\cos x - \cos y = 0 \end{cases}$

13.20. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x+y) \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}$

13.21. $\begin{cases} \tan x + \tan y = 4 \\ \cot x + \cot y = 5 \end{cases}$

13.22. $\begin{cases} \tan x = \sin y \\ \sin x = 2\cot y \end{cases}$

13.23. $\begin{cases} \sin x \cot y = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \tan x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

14. TRIGONOMEETRILISED VÕRRATUSED

Trigonomeetriliste võrratuste lahendamisel püütakse antud võrratus taandada järgnevas tabelis esitatud lihtsateks võrratusteks, mille lahendihulgad saame vastava funktsiooni graafikult.

võrratus	lahendihulgad ($n \in \mathbb{Z}$)
$\sin x > a \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$\sin x < a \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n)$
$\cos x > a \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n)$
$\cos x < a \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$
$\tan x > a$	$x \in (\arctan a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$
$\tan x < a$	$x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n; \arctan a + \pi n)$
$\cot x > a$	$x \in (\pi n; \operatorname{arccot} a + \pi n)$
$\cot x < a$	$x \in (\operatorname{arccot} a + \pi n; \pi + \pi n)$

Näide 1. Lahendada võrratus $\cos 2x \leq \cos x$.

Et $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$, siis saame antud võrratusest ruutvõrratuse $\cos x$ suhtes:

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0,$$

mille lahendamisel saame, et

$$-\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1.$$

Koosinusfunktsiooni graafikult (või siis ülalesitatud tabelist) leiame lahendihulgad

$$\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Näide 2. Lahendada võrratus $\sin 2x > \cos x$.

Antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$2\sin x \cos x - \cos x > 0$$

ehk

$$\cos x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Saadud võrratus on samaväärne kahe süsteemiga:

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Kasutades siinus- ja koosinusfunktsiooni graafikuid (või siis ülalesitatud tabelit), saame, et nende süsteemide lahendihulkadeks on vastavalt vahemikud

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \quad \text{ja} \quad \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),$$

kus $n \in \mathbb{Z}$.

Lahendada järgmised võrratused.

14.1. $\sin x \cos x \le \frac{1}{4}$

14.2. $\sin x + \sqrt{3} \cos x < 0$

14.3. $\sin 2x \le 2 \sin x$

14.4. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$

14.5. $2\cos^2 x + 2\cos x - 4 > 0$

14.6. $\tan x + \cot x \ge 2$

14.7. $\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 2\sin x + 1$

14.8. $2\tan x < \sin 2x$

14.9. $\tan x > |\sin x|$

14.10. $2\cos 2x + \sin 2x > \tan x$

14.11. $\tan x \ge \sin x$

14.12. $|\cos x| \ge \sin x$

14.13. $\cos 2x + 3\sin x > -1$

14.14. $\sin x + 2\cos x < 2$

14.15. $5 + 2\cos 2x \le 3|2\sin x - 1|$

14.16. $\sin 2x - \cos 2x \le 0$

14.17. $1 + \cos 2x \ge \cos x(1 + |1 - 2\cos x|)$

14.18. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} < \sqrt{2}$

15. ARKUSFUNKTSIOONID

Et arkusfunktsioonidest $\arcsin$ ja $\arccos$ on määratud vaid lõigul $[-1; 1]$, siis igasugustes küsimustes seoses nende funktsioonidega on vaja pöörata tähelepanu määramispiirkonnale.

Leida järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

15.1. $y = \arcsin (1 - x)$

15.2. $y = \arccos (2x + x^2)$

15.3. $y = \arccos \dfrac{2x}{1 + x^2}$

15.4. $y = \arctan \sqrt{x}$

Leida järgmiste funktsioonide muutumispiirkonnad.

15.5. $y = \arcsin \sqrt{x}$

15.6. $y = \arccos \left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

15.7. $y = \arcsin \ln (x^2 - 1)$

15.8. $y = \arctan (2x - x^2)$

15.9. $y = \operatorname{arccot} \sqrt{1 - x^2}$

Nende reaalarvude x korral, mille puhul on vaadeldavad funktsioonid määratud, kehtivad järgmised seosed:

1) $\arcsin x = -\arcsin(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x = \arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

2) $\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arccot} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $\arctan x = -\arctan(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

4) $\operatorname{arccot} x = \pi - \operatorname{arccot}(-x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Neid ja teisi taolisi seoseid on suhteliselt lihtne tõestada diferentsiaalarvutuse tõdesid kasutades.

<u>Näide 1</u>. Tõestada, et $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$, kui $|x| \le 1$.

Selle seose tõestamiseks näitame kõigepealt, et antud piirkonnas on funktsioon $f(x)=\arcsin x+\arccos x$ konstantne. See on aga tõesti nii, kuna

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Et aga

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

siis sellega ongi vaadeldav seos tõestatud.

Tõestada järgmised seosed.

15.10. $2\arcsin x=\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$, kui $|x|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$

15.11. $2\arccos x=\arccos\left(2x^2-1\right)$, kui $0\leq x\leq 1$

15.12. $2\arccos x=2\pi-\arccos\left(2x^2-1\right)$, kui $-1\leq x\leq 0$

15.13. $2\arctan x=\pi+\arctan\frac{2x}{1-x^2}$, kui $x>1$

15.14. $2\arctan x=\arctan\frac{2x}{1-x^2}$, kui $|x|<1$

15.15. $\arctan x=\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$, kui $x>0$

15.16. $\operatorname{arccot} x=\arctan\frac{1}{x}$, kui $x>0$

15.17. $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$, kui $x>0$

15.18. $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$, kui $x>0$

15.19. $\arcsin x=-\arccos\sqrt{1-x^2}$, kui $-1\leq x\leq 0$

Ülalesitatud seoseid on võimalik kasutada mitmesuguste avaldiste väärtuste arvutamisel.

Näide 2. Leida $A=\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}-\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Vahe koosinuse valemit ja kahte viimast seost kasutades saame, et

$$A=\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)+\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cos\left(\arccos\sqrt{1-\frac{1}{9}}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{4}{9}}\right)=$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}.$$

Näide 3. Leida $\arccos(\sin 2)$.

Seose 2) põhjal saame: $\arccos(\sin 2) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin 2) = \frac{\pi}{2} - 2$.

Näide 4. Leida avaldise $A = \arctan 2 + \arctan 3$ väärtus.

Summa tangensi valemi põhjal

$$\tan A = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arctan 3)}{1 - \tan(\arctan 2)\tan(\arctan 3)} =$$

$$= \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1.$$

Seega on A üks nurkadest, mille tangens on -1. Et $\arctan 2$ ja $\arctan 3$ on mõlemad vahemikust $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, siis kuulub A vahemikku $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, s.t. $A = \frac{3\pi}{4}$.

Leida järgmiste avaldiste väärtused.

15.20. $\tan\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$

15.21. $\sin(\arctan 2 + \arctan 3)$

15.22. $\tan\left(\frac{1}{2}\operatorname{arccot} 3\right)$

15.23. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$

15.24. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right)$

15.25. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

15.26. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$

15.27. $\cos(2\arctan 2) - \sin(4\arctan 3)$

Tõestada järgmised võrdused.

15.28. $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arccot}\frac{2}{11}$

15.29. $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$

15.30. $\arctan 3 - \frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}$

15.31. $\arctan 1 - \arctan 2 = \pi - \arctan 3$

16. ARKUSFUNKTSIOONE SISALDAVAD VÕRRANDID JA VÕRRATUSED

Lihtsaimad võrrandid ja nende lahendid:

$$\arcsin x = a \quad \left(|a| \le \frac{\pi}{2}\right) \iff x = \sin a$$

$$\arccos x = a \quad (0 \le a \le \pi) \iff x = \cos a$$

$$\arctan x = a \quad \left(|a| < \frac{\pi}{2}\right) \iff x = \tan a$$

$$\operatorname{arccot} x = a \quad (0 < a < \pi) \iff x = \cot a$$

Näide 1. Lahendada võrrand

$$3\arctan^2 \frac{x}{2} + \arctan \frac{x}{2} - 2 = 0.$$

Antud võrrand on ruutvõrrand $\arctan\frac{x}{2}$ suhtes. Tema lahendamisel saame, et

$$\arctan \frac{x}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad \arctan \frac{x}{2} = -1,$$

millest omakorda

$$\frac{x}{2} = \arctan \frac{2}{3} \quad \text{ja} \quad \frac{x}{2} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Seega saame antud võrrandile kaks lahendit: $-\frac{\pi}{2}$ ja $2\arctan\frac{2}{3}$.

Lahendada järgmised võrrandid.

16.1. $\arctan^2 \frac{x}{3} - 4\arctan \frac{x}{3} - 5 = 0$

16.2. $\arctan(2\tan 2x - 6\tan x) = \frac{\pi}{4} + x$

16.3. $3\arctan^2 x - 4\pi\arctan x + \pi^2 = 0$

16.4. $\arccos x = 2\arcsin x$

16.5. $\arccos \frac{x}{2} = 2\arctan(x-1)$

16.6. $\arctan^2 x + \operatorname{arccot}^2 x = \frac{5\pi^2}{8}$

16.7. $2\arcsin x = \arcsin \sqrt{2}x$

16.8. $2\arccos x + \arcsin x = \frac{11\pi}{6}$

16.9. $2\arctan(2x+1) = \arccos x$

16.10. $\arcsin x - \arccos x = \arcsin(3x-2)$

16.11. $\arctan \frac{x}{3} + \arctan \frac{x}{2} = \arctan x$

16.12. $\arcsin x + \arccos(x-1) = \pi$

Arkusfunktsioone sisaldavate võrratuste lahendamisel tuleb arvestada määramispiirkondi ning vastavate funktsioonide ranget monotoonsust. Lahendite määramiseks on otstarbekas kasutada vastavate funktsioonide graafikuid.

Näide 2. Lahendada võrratus $\arccos x > \arccos x^2$.

Antud juhul arvestame arkuskoosinuse ranget kahanemist ning tema määratust vaid lõigul $[-1; 1]$. Selle tõttu võime öelda, et vaadeldav võrratus on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x^2| \leq 1 \\ x < x^2 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} |x| \leq 1 \\ x^2 - x > 0 \end{cases}.$$

Viimase lahendamisel saame

$$\begin{cases} |x| \leq 1 \\ x < 0 \quad \text{või} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Seega on antud võrratuse lahendihulgaks poollõik $X = [-1; 0)$.

Näide 3. Lahendada võrratus $\tan^2(\arcsin x) > 1$.

Antud võrratus on samaväärne võrratusega

$$|\tan(\arcsin x)| > 1,$$

s.t.

$$\tan(\arcsin x) < -1 \quad \text{või} \quad \tan(\arcsin x) > 1.$$

Et $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ning tangens on rangelt kasvav vahemikus $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, kusjuures $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ ning $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$, siis viimased võrratused on samaväärsed võrratustega

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < -\frac{\pi}{4} \quad \text{ja} \quad \frac{\pi}{4} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$$

ehk

$$-1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1.$$

Seega on antud võrratuse lahendihulgaks $X = (-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$.

Lahendada järgmised võrratused.

16.13. $\arccos x > \arccos x^2$

16.14. $\arcsin x < \arcsin(1 - x)$

16.15. $\arcsin x < \arccos x$

16.16. $\arctan x > \arctan(2 - x)$

17. PARAMEETREID SISALDAVAD VÕRRANDID JA VÕRRATUSED

Kui võrrand või võrratus sisaldab mingeid parameetreid, näiteks $\sin(x-b)=a$, $\sqrt{x^2-kx} \le b$, $\log_a(3x^2-2)<3$, siis tema lahendamise all mõistame, ühelt poolt, parameetri (parameetrite) nende väärtuste hulga määramist, mille korral antud võrrandil (võrratusel) on lahendid, ning, teiselt poolt, vaadeldavale võrrandile (võrratusele) kõigi lahendite leidmist parameetri (parameetrite) kõigi võimalike väärtuste korral.

Näide 1. Lahendada võrrand $|x|+|x+a|=b$, kus $a>0$.

Vaatleme funktsioone

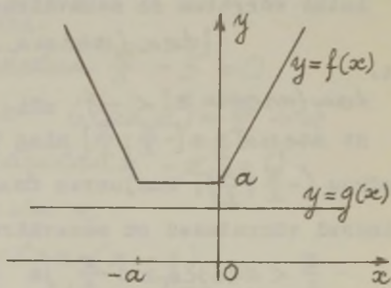
$$y=f(x)=|x|+|x+a| \quad \text{ja} \quad y=g(x)=b.$$

Antud võrrandi lahendamine tähendab nende funktsioonide graafikute lõikepunktide leidmist. Et

$$y=f(x)=|x|+|x+a|=\begin{cases} -2x-a, & \text{kui } x<-a, \\ a, & \text{kui } -a\le x\le 0, \\ 2x+a, & \text{kui } x>0, \end{cases}$$

siis saame kergesti joonestada nende funktsioonide graafikud.

Graafikult näeme, et $b<a$ korral ei ole antud võrrandil lahendeid. Kui $b=a$, siis on lahendeiks kõik reaalarvud $x \in [-a;0]$. Kui aga $b>a$, siis on antud võrrandil kaks lahendit: $x_1=\frac{b-a}{2}$ ja $x_2=-\frac{b+a}{2}$ (vt. joon. 17.1).



Joon 17.1

Näide 2. Lahendada võrratus $\sqrt{x-a}<b$.

Võrratus on määratud, kui $x-a\ge 0$, s.t. $x\ge a$. Et ruutjuure väärtused on mittenegatiivsed, siis võrratusel on lahendeid vaid juhul, kui $b>0$. Sel juhul on aga antud võrratus samaväärne võrratusega

$$x-a<b^2 \quad \text{ehk} \quad x<a+b^2.$$

Seega saame: 1) kui $b<0$, siis lahendihulgaks on tühi hulk;

2) kui $b\ge 0$, siis lahendid $x\in[a;a+b^2)$.

Näide 3. Lahendada võrrand $\log_a x^2 + 2\log_a(x+2) = 1$.

Siin $a>0$ ja $a \neq 1$ (logaritmi alus!) ning $x \neq 0$ ja $x>-2$. Sel juhul on meie võrrand samaväärne võrrandiga

$$\log_a x^2(x+2)^2 = 1$$

ehk

$$x^2(x+2)^2 = a. \qquad (1)$$

Kui $x \in (-2;0)$, siis $\sqrt{x^2} = -x$ ning $\sqrt{(x+2)^2} = x+2$, mistõttu võrrandist (1) saame samaväärse võrrandi

$$-x(x+2) = \sqrt{a} \quad \text{ehk} \quad x^2 + 2x + \sqrt{a} = 0,$$

mille lahendeiks on

$$x_1 = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}} \quad \text{ja} \quad x_2 = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}},$$

kui $1-\sqrt{a} > 0$ ehk $0 < a < 1$.

Mõlemad lahendid x_1 ja x_2 kuuluvad vahemikku $(-2;0)$, s.t. on ka antud võrrandi lahendeiks.

Kui $x>0$, siis võrrandist (1) saame samaväärse võrrandi

$$x(x+2) = \sqrt{a} \quad \text{ehk} \quad x^2 + 2x - \sqrt{a} = 0.$$

Selle võrrandi lahenditest

$$x_3 = -1 - \sqrt{1+\sqrt{a}} \quad \text{ja} \quad x_4 = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$$

vaid x_4 on positiivne ning seda iga $a>0$ korral.

Seega:

1) kui $0<a<1$, siis antud võrrandi lahendeiks on x_1, x_2 ja x_4;

2) kui $a>1$, siis antud võrrandi ainsaks lahendiks on x_4.

Lahendada järgmised võrrandid.

17.1. $\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a$

17.2. $\sqrt{\log_x(ax)} \cdot \log_a x = -\sqrt{2}$

17.3. $\log_{ab}(x-a)^2 + \log_{ab}(x-b)^2 = 2$

17.4. $\dfrac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = a(1-\sin 2x)$

17.5. $\sin^6 x + \cos^6 x = a \sin 4x$

Lahendada järgmised võrratused.

17.6. $ax > \frac{1}{x}$

17.7. $\frac{2a+1}{(a-3)x} > \frac{x+2}{x}$

17.8. $|x-a| + |x| + |x+a| \leq b$

17.9. $|x-a| + |x+a| < b, \quad a \neq 0$

17.10. $\sqrt{x+2} > \sqrt{x-a}$

17.11. $x + \sqrt{a-x} > 0, \quad a \geq 0$

17.12. $\sqrt{x+a} < a - \sqrt{x}$

17.13. $\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x$

17.14. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$

17.15. $\frac{1+a^{-x}}{1-2a^{-x}} - \frac{a^x}{a^x - 1} < 0$

17.16. $\log_a x + 1 > 2\log_x a$

17.17. $\log_a x + \log_2 x > 1$

17.18. $x^{3+\log_a x} < a^2x^2$

17.19. Milliste a väärtuste korral on võrrandil

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x} = a$$

lahendeid?

17.20. Milliste a väärtuste korral on võrrandil

$$a \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x + 9$$

lahendeid?

17.21. Leida parameetri a kõik väärtused, mille korral võrratus

$$4\cos^2 x - 4a\sin x < 10 - a$$

on õige iga arvu x korral.

17.22. Millistel a väärtustel on võrrandil

$$\arcsin^3 x + \arccos^3 x = a$$

ühene lahend?

VASTUSED

3.1. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)(x+3)$ 3.2. $(x-1)^3 \times (x+6)$ 3.3. $x(x+1)(x+2)^2(x-3)$ 3.4. $(x-2)(x+2) \times (x^2+x+2)$ 3.5. $x^4(x-1)(x-2)(x+5)$

4.1. $(-4;0) \cup (0;3) \cup (4;5)$ 4.2. $(-\infty;-7) \cup (-7;-6) \cup (7;\infty)$ 4.3. $\{-1\} \cup [1;4]$ 4.4. $(-\infty;-9] \cup \{-2\} \cup [1;\infty)$ 4.5. $(-\infty;0) \cup (0;1)$ 4.6. $(-\infty;-2) \cup (2;\infty)$

5.1. $\{-2\} \cup [-1;3)$ 5.2. $(-4;1) \cup (1;5)$ 5.3. $(-\infty;-1) \cup (3;7)$ 5.4. $(\frac{1}{2};2) \cup (3;\infty)$ 5.5. $(-\infty;-2) \cup (-1;0]$ 5.6. $(-\infty;1) \cup (\frac{3}{2};2) \cup (3;\infty)$ 5.7. $(-\infty;-1) \cup (3;7)$ 5.8. $[-1;0) \cup (0;1] \cup [3;4)$

6.1. $\{-1;-\frac{1}{3}\}$ 6.2. $\{-1;2\}$ 6.3. $\{-3;3\}$ 6.4. $\{-6;6\}$ 6.5. $\{-0{,}5;0{,}5;1{,}5;2{,}5\}$ 6.6. $\{0;2\}$ 6.7. $(-2;2)$ 6.8. $\emptyset$ 6.9. $[3;7]$ 6.10. $(-\infty;1) \cup (2;\infty)$ 6.11. $(-\infty;-2] \cup [\frac{1}{2};\infty)$ 6.12. $\mathbb{R}$ 6.13. $(0;\sqrt{2})$ 6.14. $(-\infty;1{,}5-\sqrt{4{,}25}) \cup (1;2) \cup (1{,}5+\sqrt{4{,}25};\infty)$ 6.15. $\{-1;0;1\}$ 6.16. $\{-8;2\}$ 6.17. $\{-\frac{2}{5};2\}$ 6.18. $\frac{7}{4}$ 6.19. $\{-4;-3\}$ 6.20. $(-\infty;-3] \cup [\frac{1}{3};\infty)$ 6.21. $[0;\sqrt{2}]$ 6.22. $(-\infty;-2-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3};\infty)$ 6.23. $(-\infty;\frac{11}{4}) \cup (\frac{7}{2};\infty)$ 6.24. $[-1-\sqrt{8};-3) \cup (1;3]$

7.1. $0{,}5$ 7.2. 3 7.3. 4 7.4. $\pm 2\sqrt{2}$ 7.5. $x \in [1;2]$ 7.6. 4 7.7. $(-\infty;1)$ 7.8. $(-\infty;-2]$ 7.9. $(\sqrt{7};7]$ 7.10. $(-\infty;-3] \cup [4;\frac{61}{13})$ 7.11. $(-\infty;-6] \cup (10;\infty)$ 7.12. $(0;1) \cup (2;\infty)$ 7.13. $(-\infty;\frac{7}{16}) \cup (3;\infty)$ 7.14. $(\frac{1}{2};2]$

7.15. $\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2};1\right]$ 7.16. $[-1;\infty)$ 7.17. $[-3;2)\cup(2;\infty)$
7.18. $(-1;1]\cup[2;3)$ 7.19. $(-1;\frac{1}{2}(5-\sqrt{13}))$ 7.20. $[-1;3]$
7.21. $(-\infty;-2)\cup[-\frac{1}{3};1)\cup(1;\infty)$ 7.22. $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$
7.23. $[-4{,}5;-2)\cup(3;\infty)$ 7.24. $x\neq-5$ 7.25. $[-1;-\frac{1}{3}]$

8.1. 9 8.2. $\sqrt[4]{b}$ 8.3. 2 8.4. $a^5:b^2$ 8.5. 8 8.6. $\frac{25}{27}$
8.7. $-\frac{1}{6}$ 8.8. $-\frac{1}{3}$ 8.9. $-\frac{14}{3}$ 8.10. 7 8.11. 3 8.12. 4
8.13. $\log_a b$ 8.15. $\frac{18}{2a+3}$ 8.16. $\frac{a+b}{1-a}$ 8.18. $(0;1)$ 8.19. $\mathbb{R}$ 8.20. $(-\infty;0)$

9.1. 5 9.2. $\frac{3}{5}$ 9.3. 2 9.4. $\{1;\log_2 3\}$ 9.5. $\{\frac{1}{3}\log_2 24;\frac{4}{3}\}$ 9.6. $0{,}6$ 9.7. $\{-0{,}5;8\}$ 9.8. $\{-0{,}2;3\}$ 9.9. $\{\log_6 8;3\}$ 9.10. 4 9.11. $\{-2;2\}$ 9.12. $\{-2;2\}$ 9.13. $\{-2;-1;1;2\}$ 9.14. $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ 9.15. $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 9.16. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 9.17. $\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$ 9.18. $\begin{cases}x=\log_4 12\\y=\log_4 3\end{cases}$ 9.19. $\begin{cases}x=-0{,}5\\y=-0{,}5\end{cases}$ 9.20. $\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases}$; $\begin{cases}x_2=4\\y_2=4\end{cases}$; $\begin{cases}x_{3,4}=2\pm\sqrt{7}\\y_{3,4}=3\end{cases}$; $\begin{cases}x_{5,6}=2\pm\sqrt{7}\\y_{5,6}=1\end{cases}$

10.1. $(-\infty;4]$ 10.2. $(-\infty;-1]$ 10.3. $(-\infty;\log_2(\sqrt{7}-1)]$ 10.4. $[0;2]$ 10.5. $[0;1]$ 10.6. $(-\infty;1)$ 10.7. $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ 10.8. $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$ 10.9. $\mathbb{R}$ 10.10. $[0;4)$ 10.11. $(2;\infty)$ 10.12. $(-\infty;3]$ 10.13. $(0;\frac{1}{4})\cup(4;\infty)$ 10.14. $[-\log_3 2;0)\cup(\frac{1}{2}\log_3 2;1]$ 10.15. $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ 10.16. $(-\infty;-\sqrt{\log_2 3})\cup(0;\sqrt{\log_2 3})$ 10.17. $(-\infty;-1)$

11.1. $\{-1; 7\}$ 11.2. $\{10; 10\,000\}$ 11.3. $\{10; 10^{16}\}$ 11.4. $\{2^{-\frac{2}{3}}; 8\}$ 11.5. $\{2; 3\}$ 11.6. $\{10; \sqrt[9]{10}\}$ 11.7. $\{1; 3\}$ 11.8. $\{3; 3+\sqrt{2}\}$ 11.9. $\{1; 4\}$ 11.10. $\{0{,}2; 25\}$ 11.11. $\{1; 0{,}01\}$

11.12. $\frac{1}{9}$ 11.13. $\begin{cases} x_1 = 8 \\ y_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$ 11.14. $\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 9 \\ y_2 = 3 \end{cases}$

11.15. $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ 11.16. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ 11.17. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ y = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \end{cases}$

11.18. $\begin{cases} x = \sqrt[5]{\frac{9}{5}} \\ y = \log_{\frac{9}{5}} 75 \end{cases}$ 11.19. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ 11.20. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$;

$\begin{cases} x_2 = (\sqrt[3]{9})^{-1} \\ y_2 = \sqrt[3]{3} \end{cases}$

12.1. $(-2; \infty)$ 12.2. $(4; 7)$ 12.3. $[1; 10)$ 12.4. $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ 12.5. $(0; \frac{1}{2}]$ 12.6. $(2^{-\frac{2}{3}}; 1) \cup (8; \infty)$ 12.7. $(\frac{1}{2}; 4)$ 12.8. $(0{,}01; 10)$ 12.9. $(-7; 1)$ 12.10. $(-\infty; -1)$ 12.11. $(-1; 0{,}5 - \sqrt{1{,}25}) \cup (1; 0{,}5 + \sqrt{1{,}25}) \cup (0{,}5 + \sqrt{1{,}25}; \infty)$ 12.12. $(0; 1) \cup (2; \infty)$ 12.13. $[\sqrt{6} - 1; 2) \cup (2; 5)$ 12.14. $(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}; \frac{1}{2}) \cup (1; \infty)$ 12.15. $(3; 3{,}5) \cup (4; \infty)$ 12.16. $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}(\sqrt{39} - 1)]$

13.1. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ 13.2. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ 13.3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\arctan \frac{5}{3} + \pi n$ 13.4. $(-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + n\pi$; $(4n+1)\frac{\pi}{2}$ 13.5. $(4n-1)\frac{\pi}{4}$; $(4n-1)\frac{\pi}{16}$ 13.6. $(4n+1)\frac{\pi}{4}$; $(-1)^n \frac{\pi}{12} + n\frac{\pi}{2}$ 13.7. $(4n+3)\frac{\pi}{4}$; $(4n+1)\frac{\pi}{2}$; $2n\pi$ 13.8. $n\pi + \arctan 2$; $n\pi + \arctan 3$ 13.9. $\frac{2\pi k}{5}$; $(4k-1)\frac{\pi}{4}$; $(2k+1)\frac{\pi}{11}$; $\pm \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$ 13.10. $\frac{3\pi}{100} + \frac{2\pi n}{25}$; $-\frac{\pi}{20} - \frac{2\pi n}{5}$ 13.11. $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 13.12. $n\pi + \frac{\pi}{4}$ 13.13. $n\pi + \arctan \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$; $n\pi - \arctan \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

13.14. $x \in \varnothing$ 13.15. $k\pi + \frac{\pi}{2}$; $k\pi - \frac{\pi}{4}$ 13.16. $\begin{cases} x = (3-4n)\frac{\pi}{2} \\ y = \pi n \end{cases}$

$\begin{cases} x = (\frac{3}{2} \mp \frac{1}{3} - 2n)\pi \\ y = (\pm\frac{1}{6} + n)\pi \end{cases}$ 13.17. $\begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$ 13.18.

$\begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \pi(2k+n) \\ y = (-1)^n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi(2k-n) \end{cases}$

13.19. $\begin{cases} x = (-1)^n \arcsin\frac{7}{8} + \pi(n+2k) \\ y = (-1)^n \arcsin\frac{1}{4} + \pi n \end{cases}$ 13.20. $\begin{cases} x = \mp\frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$;

$\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ 13.21. $\begin{cases} x = \arctan(2 \pm 0{,}8\sqrt{5}) + \pi k \\ y = \arctan(2 \mp 0{,}8\sqrt{5}) + \pi n \end{cases}$

13.22. $\begin{cases} x = \pi k \\ y = 2\pi n \end{cases}$; $\begin{cases} x = \arccos\frac{1}{7} + 2k\pi \\ y = -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \end{cases}$; $\begin{cases} x = -\arccos\frac{1}{7} + 2k\pi \\ y = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi \end{cases}$

13.23. $\begin{cases} x = (8k+1)\frac{\pi}{4} \\ y = (12n+1)\frac{\pi}{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x = (8k-1)\frac{\pi}{4} \\ y = (12n+5)\frac{\pi}{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x = (8k+3)\frac{\pi}{4} \\ y = (12n-5)\frac{\pi}{6} \end{cases}$; $\begin{cases} x = (8k-3)\frac{\pi}{4} \\ y = (12n-1)\frac{\pi}{6} \end{cases}$

14.1. $[k\pi - \frac{7\pi}{12}; k\pi + \frac{\pi}{12}]$ 14.2. $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$ 14.3. $[2k\pi; (2k+1)\pi]$ 14.4. $(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; \frac{13\pi}{6} + 2k\pi)$ 14.5. $\varnothing$ 14.6. $[k\pi; (2k+1)\frac{\pi}{2}]$ 14.7. $(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi)$ 14.8. $((2k-1)\frac{\pi}{2}; k\pi)$ 14.9. $(k\pi; (2k+1)\frac{\pi}{2})$ 14.10. $(-\frac{\pi}{4} + n\pi; \frac{\pi}{4} + n\pi) \cup (-\frac{\pi}{2} + n\pi; -\arctan 2 + n\pi)$ 14.11. $[k\pi; (2k+1)\frac{\pi}{2})$ 14.12. $[-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi]$ 14.13. $(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{7\pi}{6} + 2n\pi)$ 14.14. $(2\operatorname{arcctg} 2 + 2n\pi; 2\pi(n+1))$ 14.15. $[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi] \cup \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$ 14.16. $[-\frac{3\pi}{8} + n\pi; \frac{\pi}{8} + n\pi]$ 14.17. $[-\frac{\pi}{3} + 2n\pi; \frac{\pi}{3} + 2n\pi] \cup [(4n+1)\frac{\pi}{2}; (4n+3)\frac{\pi}{2}]$ 14.18. $[2n\pi; \arcsin(\sqrt{5} - \sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} + 2n\pi) \cup (\frac{3\pi}{4} + 2n\pi - \arcsin(\sqrt{5} - \sqrt{2}); \frac{\pi}{2} + 2n\pi]$

15.1. $[0; 2]$ 15.2. $[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}]$ 15.3. $\mathbb{R}$ 15.4.

$[0;\infty)$ 15.5. $[0;\frac{\pi}{2}]$ 15.6. $(\frac{\pi}{2};\pi]$ 15.7. $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ 15.8. $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}]$ 15.9. $[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$ 15.20. $4\sqrt{5}$ 15.21. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 15.22. $(\sqrt{10}+3)^{-1}$ 15.23. $\frac{1}{8}\sqrt{15}$ 15.24. $\frac{77}{85}$ 15.25. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 15.26. $\frac{1}{9}$ 15.27. $\frac{9}{25}$

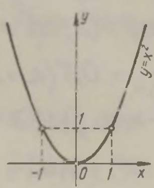
16.1. $-3\tan 1$ 16.2. $\{-\arctan\frac{1}{2};-\arctan\frac{1}{3}\}$ 16.3. $\sqrt{3}$ 16.4. $\frac{1}{2}$ 16.5. $\sqrt{2}$ 16.6. -1 16.7. $\{-\frac{\sqrt{2}}{2};0;\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ 16.8. $\emptyset$ 16.9. 0 16.10. $\{\frac{1}{2};1\}$ 16.11. $\{0;-1;1\}$ 16.12. $\{0;1\}$ 16.13. $[-1;0)$ 16.14. $[0;\frac{1}{2})$ 16.15. $[-1;\frac{\sqrt{2}}{2})$ 16.16. $(1;\infty)$

17.1. $a>0$, $x=\pm[(1-a^2)^2/4a^2]$; $a\le 0$, $x\in\emptyset$ 17.2. $a>0, a\ne 1$, $x=1/a^2$ 17.3. $ab>0, ab\ne 1$, $a^2+b^2-6ab<0$, $x_1=0$, $x_2=a+b$; $ab>0, ab\ne 1$, $a^2+b^2-6ab\ge 0$, $x_1=0$, $x_2=a+b$, $x_{3,4}=0{,}5(a+b\pm\pm\sqrt{a^2+b^2-6ab})$ 17.4. $|a|<1$, $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$; $|a|\ge 1$, $x=\frac{\pi}{4}+n\pi$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{a}+k\pi$ 17.5. $|a|<\frac{1}{2}$, $x\in\emptyset$; $|a|\ge\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}(\arctan(4a\pm 2\sqrt{4a^2-1})+n\pi)$ 17.6. $a\le 0$, $x\in(-\infty;0)$; $a>0$, $x\in(-\frac{1}{\sqrt{a}};0)\cup(\frac{1}{\sqrt{a}};\infty)$ 17.7. $a<3$, $x\in(7/(a-3);0)$; $a>3$, $x\in(0;7/(a-3))$ 17.8. $a\ge 0$: $b<2a$, $x\in\emptyset$; $2a\le b\le 3a$, $|x|\le b-2a$; $b>3a$, $|x|\le\frac{b}{3}$ 17.9. $a>0$: $b\le 2a$, $x\in\emptyset$; $b>2a$, $|x|<\frac{b}{2}$ 17.10. $a\ge -2$, $x\in\emptyset$; $a<-2$, $x\in[-2;\infty)$ 17.11. $a=0$, $x\in\in(-1;0)$; $a>0$, $x\in(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+a};a]$ 17.12. $a\le 1$, $x\in\emptyset$; $a>1$, $x\in[0;\frac{1}{4}(a-1)^2)$ 17.13. $a<0$, $x\in\in[\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})a;0]$; $a\ge 0$, $x\in[\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})a;2a]$ 17.14. $a\le 0$, $x\in\emptyset$; $0<a<2$, $x\in[-a;a]$; $2\le a<4$, $x\in(-\sqrt{a^3-\frac{1}{4}a^4};\sqrt{a^3-\frac{1}{4}a^4})$; $a\ge 4$, $x\in\emptyset$ 17.15. $0<a<1$, $x\in(\log_a 2;0)\cup(\log_a\frac{1}{2};\infty)$; $a>1$, $x\in(-\infty;\log_a\frac{1}{2})\cup$

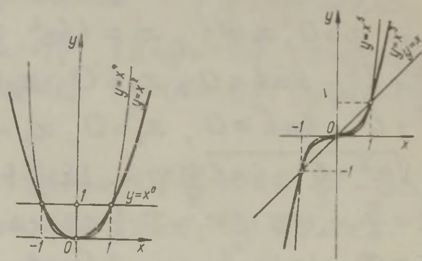
$\cup(0;\log_a 2)$ 17.16. $0<a<1$, $x\in(0;a)\cup(1;\frac{1}{a^2})$; $a>1$, $x\in(\frac{1}{a^2};1)\cup(a;\infty)$ 17.17. $0<a<0,5$ ja $a>1$, $x\in(A;\infty)$; $0,5<a<1$, $x\in(0;A)$, kus $A=a^{\frac{1}{\log_2 2a}}$ 17.18. $0<a<1$, $x\in(a^2;1)\cup(a^{-2};\infty)$; $a>1$, $x\in(a^{-2};a)$ 17.19. $|a|\le 1$ 17.20. $|a|\ge 10$ 17.21. $a\in(-\frac{10}{3};2)$ 17.22. $a=\frac{\pi^3}{32}$, $a\in(\frac{\pi^3}{8};\frac{7\pi^3}{8}]$

Lisa

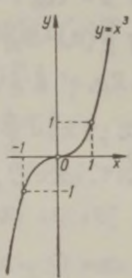
PÕHILISTE ELEMENTAARFUNKTSIOONIDE GRAAFIKUD



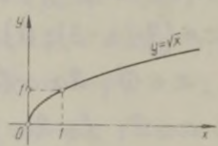
Joon. 1. $y = x^2$



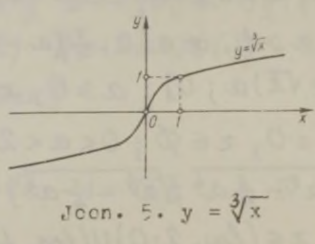
Joon. 2. Astmefunktsioonide võrdlus



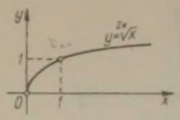
Joon. 3. $y = x^3$



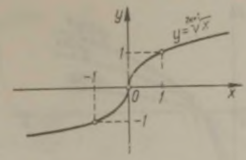
Joon. 4. $y = \sqrt{x}$



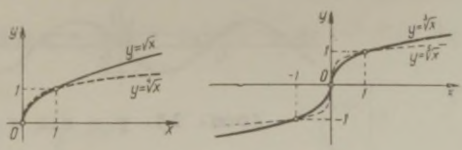
Joon. 5. $y = \sqrt[3]{x}$



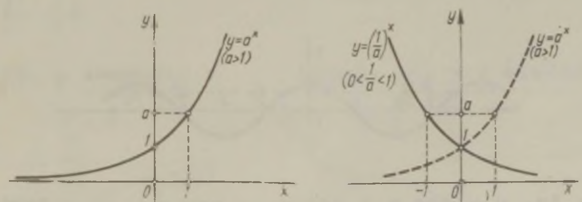
Joon. 6. $y = \sqrt[2k]{x}$



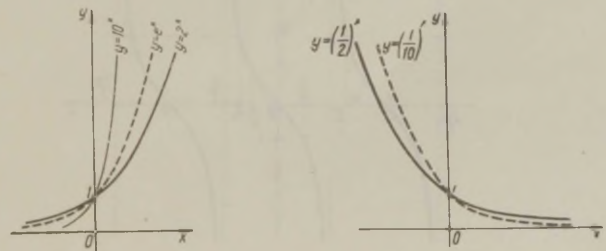
Joon. 7. $y = \sqrt[2k+1]{x}$



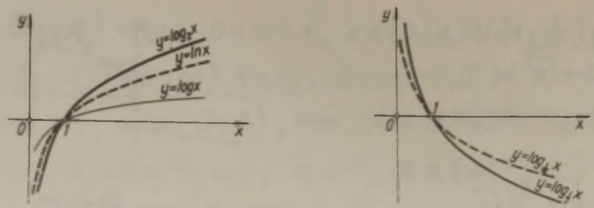
Joon. 8. Juurfunktsioonide võrdlus



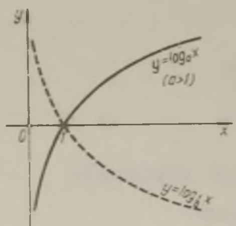
Joon. 9. Eksponentfunktsioonid



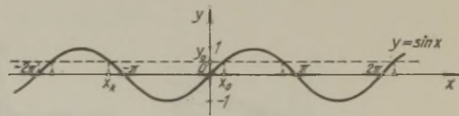
Joon. 10. Eksponentfunktsioonide võrdlus



Joon. 11. Logaritmfunktsioonide võrdlus

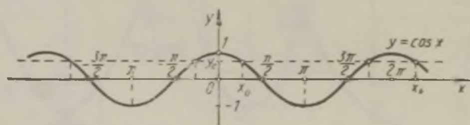


Joon. 12. Logaritm-
funktsioonid

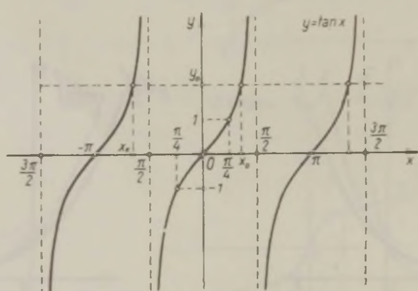


Joon. 13. $y = \sin x$;

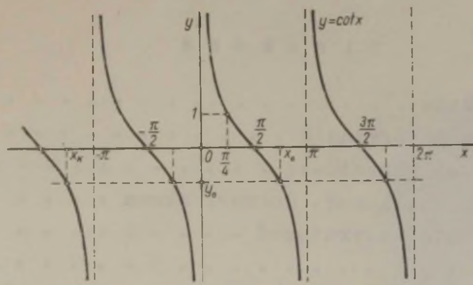
$\sin x_k = \sin x_0$, $x_k = k\pi + (-1)^k x_0$



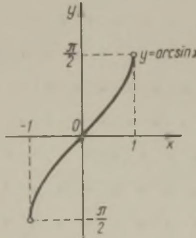
Joon. 14. $y = \cos x$; $\cos x_k = \cos x_0$, $x_k = 2k\pi \pm x_0$



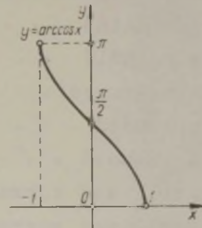
Joon. 15. $y = \tan x$; $\tan x_k = \tan x_0$, $x_k = k\pi + x_0$



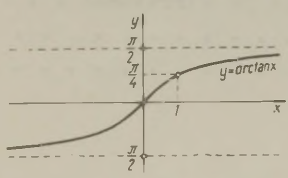
Joon. 16. $y = \cot x$; $\cot x_k = \cot x_0$, $x_k = k\pi + x_0$



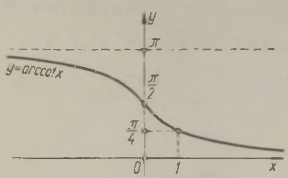
Joon. 17. $y = \arcsin x$



Joon. 18. $y = \arccos x$



Joon. 19. $y = \arctan x$



Joon. 20. $y = \operatorname{arccot} x$

S i s u k o r d