Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Margus Lillemäe

Fredholmi integraalvõrrandi lahendi tükiti konstantne aproksimatsioon

Matemaatika ja statistika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja prof Arvet Pedas

Tartu 2018

Fredholmi integraalvõrrandi lahendi tükiti konstantne aproksimatsioon

Magistritöö
Margus Lillemäe

Lühikokkuvõte. Käesolevas magistritöös vaadeldakse teist liiki Fredholmi integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist meetodil, mis tugineb võrrandi lahendi tükiti konstantsele aproksimatsioonile. Töö eesmärk on uurida esitatud meetodi koonduvust ning koonduvuskiirust.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, differentsiaalvõrrandid.
Märksõnad:arvutusmatemaatika, integraaloperaatorid, integraalvõrrandid.

Piecewise constant approximation of the Fredholm integral equation

Master's thesis
Margus Lillemäe

Abstract: In this master's thesis we present a numerical method to solve the second kind Fredholm integral equation by using a piecewise constant approximation. The purpose of this thesis is to study the method's convergence and convergence rate.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.
Key words. computational mathematics, integral operators, integral equations.

Sisukord

Sissejuhatus **4**

1 Kasutatavad mõisted ja tulemused **5**
- 1.1 Elementide diskreetne koondumine 5
- 1.2 Diskreetselt kompaktsed jadad 6
- 1.3 Operaatorite diskreetne ja kompaktne koondumine 7
- 1.4 Koonduvusteoreem 8

2 Fredholmi integraalvõrrandi tükiti konstantne lähislahend **9**
- 2.1 Fredholmi integraalvõrrand 9
- 2.2 Meetodi kirjeldus 11
- 2.3 Ruumide valik ja siduvad operaatorid 13
- 2.4 Lähisoperaatorite diskreetne koondumine 15
- 2.5 Lähislahendite koondumine 20

3 Numbrilised näited **27**
- 3.1 Näide 1 27
- 3.2 Näide 2 28

Kirjandus **31**

Lisa **32**

Sissejuhatus

Käesolevas magistritöös vaadeldakse teist liiki Fredholmi integraalvõrrandi

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s + f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant b)$$

ligikaudset lahendamist meetodil, mis tugineb võrrandi lahendi tükiti konstantsel aproksimatsioonil. Tuuma K ja vabaliikme f kohta eeldatakse, et nad on pidevad funktsioonid vastavalt ruudul $[0,b]\times[0,b]$ ja lõigul $[0,b]$. Veel eeldatakse, et vastaval homogeensel võrrandil

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)dxs \quad (0 \leqslant t \leqslant b)$$

on ainult triviaalne lahend $u = 0$. Nendel eeldustel tõestatakse vaadeldud meetodi koonduvus ja lisaeeldustel leitakse ka lähislahendite veahinnangud. Teoreetiliste tulemuste illustreerimiseks on töö lõpus esitatud testülesannete lahendamisel saadud numbrilised tulemused.

Teoreetiliste tulemuste saamisel on tuginetud Gennadi Vainikko poolt sisse toodud jadade ja operaatorite diskreetse koondumise mõistetele ning selle alusel välja töötatud operaatorvõrrandite ligikaudse lahendamise üldisele teooriale.Lisaks on kasutatud matemaatilise analüüsi ja funktsionaalanalüüsi kursustest tuntuid tulemusi.

Esimeses peatükis esitatakse operaatorvõrrandite ligikaudse lahendamisega seotud tulemused.

Teises peatükis käsitletakse Fredholmi teist liiki integraalvõrrandi lahendi olemasolu, ühesust ja siledust. Seejärel esitatakse integraalvõrrandi lahendusmeetodi kirjeldus ning uuritakse esitatud meetodi koonduvust ja koonduvuskiirust.

Viimases osas testitakse esitatud meetodi koonduvust konkreetsete näiteülesannete lahendamisel.

Töö lisas on toodud autori poolt Scilabi keskkonnas kirjutatud programm numbriliste tulemuste saamiseks.

1 Kasutatavad mõisted ja tulemused

Selles peatükis esitame mõned mõisted ja tulemused Gennadi Vainikko poolt välja-töötatud üldisest teooriast operaatorvõrrandite ligikaudseks lahendamiseks. Toodud definitsioonid ja tulemused pärinevad töödest [4] ja [5].

1.1 Elementide diskreetne koondumine

Edaspidi tähistagu $\mathbb{N}$ kõigi naturaalarvude hulka ja $\mathbb{R}$ kõigi reaalarvude hulka. Tähistagu $\mathscr{L}(E,F)$ kõigi lineaarsete ja pidevate operaatorite $T : E \to F$ Banachi ruumi normiga

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} = \sup_{\|u\|_E \leqslant 1} \|Tu\|_F \,,$$

kus E ja F on Banachi ruumid.

Definitsioon 1.1. Olgu E ja E_n $(n \in \mathbb{N})$ reaalsed Banachi ruumid ja olgu $\mathscr{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineaarsete ja tõkestatud operaatorite $p_n : E \to E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ süsteem selline, et iga $u \in E$ korral

$$\|p_n u\|_{E_n} \to \|u\|_E \,, \text{ kui } n \to \infty. \tag{1.1}$$

Operaatoreid $p_n : E_n \to E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ nimetatakse siduvateks operaatoriteks ning süsteemi $\mathscr{P}$ nimetatakse siduvate operaatorite süsteemiks Banachi ruumide E ja E_n $(n \in \mathbb{N})$ vahel.

Definitsioon 1.2. Õeldakse, et jada (u_n), kus $u_n \in E_n$ $(n \in \mathbb{N})$, $\mathscr{P}$-koondub (koondub diskreetselt) elemendiks $u \in E$, kui $n \to \infty$ korral

$$\|u_n - P_n u\|_{E_n} \to 0.$$

Edaspidi tähistame jada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diskreetset koondumist elemendiks u järgmiselt:

$$u_n \overset{\mathscr{P}}{\to} u.$$

Diskreetsel koondumisel on järgmised omadused:

1) piirväärtus on ühene, s.t

$$u_n \overset{\mathscr{P}}{\to} u \text{ ja } u_n \overset{\mathscr{P}}{\to} u' \Rightarrow u = u';$$

2) piirväärtus on lineaarne, s.t

$$u_n \overset{\mathscr{P}}{\to} u,\ v_n \overset{\mathscr{P}}{\to} v,\ a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow au_n + bv_n \overset{\mathscr{P}}{\to} au + bv;$$

3) piirväärtuste normid on kooskõlalised, s.t

$$u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} 0 \Leftrightarrow \|u_n\|_{E_n} \to 0,$$
$$u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u \Rightarrow \|u_n\|_{E_n} \to \|u\|_E;$$

4) diskreetselt koonduva jada iga osajada piirväärtus ühtib kogu jada piirväärtusega, s.t

$$u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u \ (n \in \mathbb{N}),\ N' \subset \mathbb{N} \Rightarrow u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u \ (n \in N').$$

Kuna operaatorid p_n $(n \in \mathbb{N})$ on lineaarsed ja tõkestatud, siis ühtlase tõkestatuse printsiibist ja omadusest (1.1) järeldub, et

$$\|p_n\|_{\mathscr{L}(E,E_n)} \leqslant \text{const} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ja seega kehtib järgmine omadus:

$$u^{(n)}, u \in E,\ \left\|u^{(n)} - u\right\|_E \to 0 \Rightarrow p_n u^{(n)} \xrightarrow{\mathscr{P}} u. \tag{1.2}$$

Tõepoolest, kui $u^{(n)}, u \in E$ $(n \in \mathbb{N})$ nii, et

$$\left\|u^{(n)} - u\right\|_E \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

siis

$$\begin{aligned}\left\|p_n u^{(n)} - p_n u\right\|_{E_n} &= \left\|p_n(u^{(n)} - u)\right\|_{E_n} \\ &\leqslant \|p_n\|_{\mathscr{L}(E,E_n)} \cdot \left\|u^{(n)} - u\right\|_E \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

millest järeldub omadus (1.2).

1.2 Diskreetselt kompaktsed jadad

Olgu E_n $(n \in \mathbb{N})$ Banachi ruumid. Olgu $u_n \in E_n$.

Definitsioon 1.3. Õeldakse, et jada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on $\mathscr{P}$-kompaktne (diskreetselt kompaktne), kui igast osajadast $(u_n)_{n\in N'\subset\mathbb{N}}$ saab eraldada diskreetselt koonduva osajada $(u_n)_{n\in N''\subset N'}$. Sellisel juhul kirjutame, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on $\mathscr{P}$-kompaktne (diskreetselt kompaktne).

Kehtivad järgmised omadused:

1) $u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u \Rightarrow (u_n)$ on diskreetselt kompaktne;

2) (u_n), (v_n) diskreetselt kompaktsed, $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (au_n + bv_n)$ diskreetselt kompaktne;

3) (u_n) diskreetselt kompaktne $\Rightarrow \|u_n\|_{E_n} \leqslant \text{const} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Omadusest (1.2) järeldub järgmine tulemus.

Lause 1.1. *Olgu E Banachi ruum. Iga suhteliselt kompaktse jada $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ korral on jada $(p_n u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathscr{P}$-kompaktne.*

1.3 Operaatorite diskreetne ja kompaktne koondumine

Olgu E, F, E_n, F_n $(n \in \mathbb{N})$ Banachi ruumid, $\mathscr{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olgu siduvate operaatorite süsteem E ja E_n vahel ja $\mathscr{Q} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siduvate operaatorite süsteem F ja F_n vahel. Skemaatiliselt võime antud situatsiooni kirjeldada järgmiselt:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ \downarrow^{p_n} & & \downarrow^{q_n} \\ E_n & \xrightarrow{A_n} & F_n \end{array}$$

Definitsioon 1.4. Õeldakse, et operaatorite $A_n : E_n \to F_n$ jada (A_n) $\mathscr{P}\mathscr{Q}$-koondub (koondub diskreetselt) operaatoriks $A : E \to F$, kui

$$u_n \xrightarrow{\mathscr{P}} u \Rightarrow A_n u_n \xrightarrow{\mathscr{Q}} Au.$$

Edaspidi kasutame sel korral tähistust $A_n \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}} A$.

Lause 1.2. *Kui $A \in \mathscr{L}(E, F)$, $A_n \in \mathscr{L}(E_n, F_n)$ $(n \in \mathbb{N})$, siis järgmised väited on samaväärsed:*

(a) $A_n \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{L}} A \quad (n \in \mathbb{N})$*;*

(b) $\|A_n\|_{\mathscr{L}(E_n,F_n)} \leqslant const \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \|A_n p_n u - q_n Au\|_{F_n} \to 0 \quad \forall u \in E$*;*

(c) $\|A_n\|_{\mathscr{L}(E_n,F_n)} \leqslant const \quad (n \in \mathbb{N})$*, ja leidub kõikjal tihe hulk $E' \subset E$ selline, et*

$$\|A_n p_n u' - q_n Au'\|_{F_n} \to 0 \quad \forall u' \in E'.$$

Definitsioon 1.5. Õeldakse, et operaatorite $C_n : E_n \to F_n$ jada $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koondub kompaktselt operaatoriks $C : E \to F$, kui $C_n \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{Q}} C$ ja on täidetud järgmine kompaktsuse nõue:

$$u_n \in E_n, \quad \|u_n\|_{E_n} \leqslant \text{const} \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (C_n u_n) \text{ on } \mathscr{Q} - \text{kompaktne}.$$

1.4 Koonduvusteoreem

Olgu $\mathscr{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siduvate operaatorite süsteem Banachi ruumide E ja E_n vahel. Olgu $T : E \to E$ ja $T_n : E_n \to E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ lineaarsed operaatorid. Vaatleme võrrandeid

$$u = Tu + f \tag{1.3}$$

ja

$$u_n = T_n u_n + f_n \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.4}$$

kus $f \in E$ ja $f_n \in E_n$ on antud elemendid ning $u \in E$ ja $u_n \in E_n$ on otsitavad.

Tähistame

$$\ker(I - T) = \{u \in E : \ u = Tu\},$$

kus $I : E \to E$ on ühikoperaator.

Teoreem 1.3. *Kehtigu järgmised tingimused:*

1. $T \in \mathscr{L}(E, E)$ *ja* $\ker(I - T) = \{0\}$*;*
2. $T_n \in \mathscr{L}(E_n, E_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ *on täielikult pidevad;*
3. $f_n \xrightarrow{\mathscr{P}} f$*;*
4. $T_n \to T$ *kompaktselt, s.t* $T_n \xrightarrow{\mathscr{P}\mathscr{P}} T$ *ja*

$$u_n \in E_n, \quad \|u_n\|_{E_n} \leqslant const \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (T_n u_n) \text{ on } \mathscr{P} - \text{kompaktne}. \tag{1.5}$$

Siis võrrandil (1.3) on ühene lahend $u^* \in E$ *ning leidub selline* $n_0 \in \mathbb{N}$*, et* $n \geqslant n_0$ *korral on ka võrrandil (1.4) ühene lahend* $u_n^* \in E_n$*, kusjuures* $u_n^* \xrightarrow{\mathscr{P}} u^*$ *hinnanguga*

$$c_1\eta_n \leqslant \|u_n^* - p_n u^*\|_{E_n} \leqslant c_2\eta_n,$$

kus c_1 *ja* c_2 *on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest* n *ning*

$$\eta_n = \|T_n p_n u^* - p_n T u^*\|_{E_n}.$$

2 Fredholmi integraalvõrrandi tükiti konstantne lähislahend

2.1 Fredholmi integraalvõrrand

Edaspidi tähistagu $C[0,b]$ lõigul $[0,b]$ pidevate funktsioonide $x = x(t)$ Banachi ruumi normiga

$$\|x\|_{C[0,b]} = \max_{0 \leqslant t \leqslant b} |x(t)|.$$

Vaatleme lineaarset integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant b,\ b > 0, \tag{2.1}$$

kus

$$K : [0,b] \times [0,b] \to \mathbb{R}$$

ja

$$f : [0,b] \to \mathbb{R}$$

on antud funktsioonid ning

$$u : [0,b] \to \mathbb{R}$$

on otsitav. Võrrandit (2.1) nimetatakse Fredholmi teist liiki integraalvõrrandiks, funktsiooni K nimetatakse integraalvõrrandi tuumaks ning funktsiooni f integraalvõrrandi vabaliikmeks. Võrrandi (2.1) võib kirjutada operaatorkujul

$$u = Tu + f,$$

kus operaator $T : [0,b] \times [0,b] \to \mathbb{R}$ on defineeritud valemiga

$$(Tu)(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant b. \tag{2.2}$$

Ilmselt $T : C[0,b] \to C[0,b]$ on lineaarne operaator.

Tõepoolest, suvaliste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $u, v \in C[0,b]$ korral

$$\begin{aligned}
(T(\alpha u + \beta v))(t) &= \int_0^b K(t,s)(\alpha u(s) + \beta v(s))\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^b K(t,s)(\alpha u(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^b K(t,s)(\beta v(s))\,\mathrm{d}s \\
&= \alpha \int_0^b K(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s + \beta \int_0^b K(t,s)v(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \alpha(Tu)(t) + \beta(Tv)(t).
\end{aligned}$$

Ilmselt on operaator $T : C[0,b] \to C[0,b]$ ka pidev.

Tõepoolest, iga $u \in C[0,b]$ korral

$$\begin{aligned}\|Tu\|_E &= \max_{0\leqslant t\leqslant b}\left|\int_0^b K(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \left(\max_{(t,s)\in[0,b]\times[0,b]}|K(t,s)|\right) b\,\|u\|_E\,.\end{aligned}$$

Seega operaatori $T : E \to E$ on tõkestatud ehk pidev.

Olgu tuum K pidev ruudul $[0,b] \times [0,b]$. Siis valemiga (2.2) defineeritud operaator on kompaktne lineaarne pidev operaator (vt [3], lk 214-215). Seega võrrandi (2.1) lahendi olemasolu ja ühesuse näitamisel saame tugineda järgmisele teoreemile (vt [3], lk 223).

Teoreem 2.1. *Olgu E Banachi ruum. Olgu $T : E \to E$ kompaktne lineaarne operaator. Võrrand $u = Tu + f$ on iga $f \in E$ korral lahenduv parajasti siis, kui homogeensel võrrandil $u = Tu$ on ainult triviaalne lahend. Sel juhul on võrrand $u = Tu + f$ iga $f \in E$ korral üheselt lahenduv.*

Integraalvõrrandi (2.1) lahendi olemasolu ja ühesuse kohta kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 2.2. *Olgu tuum K ja vabaliige f pidevad vastavalt ruudul $[0,b] \times [0,b]$ ja lõigul $[0,b]$. Olgu võrrandile (2.1) vastaval homogeensel võrrandil*

$$u(t) = \int_0^b K(t,s)u(s)\,ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant b, \tag{2.3}$$

olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$. Siis võrrand (2.1) on üheselt lahenduv ja tema lahend u on pidev lõigul $[0,b]$.

Tõestus. Olgu $E = C[0,b]$. Eelduse alusel vabaliige $f \in C[0,b]$. Kuna tuum K on pidev ruudul $[0,b] \times [0,b]$, siis valemiga (2.2) defineeritud operaator $T \in \mathscr{L}(E,E)$ on kompaktne. Seega väide järeldub teoreemist 2.1. ■

Olgu $C^m[0,b]$ ($m \in \mathbb{N}$) lõigul $[0,b]$ m-korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide Banachi ruum. Integraalvõrrandi (2.1) lahendi sileduse kohta kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 2.3. *Olgu $K \in C^m([0,b] \times [0,b])$ ja $f \in C^m[0,b]$, kus $m \in \mathbb{N}$. Olgu võrrandi (2.1) vastaval homogeensel võrrandil (2.3) olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$. Siis võrrandi (2.1) lahend $u \in C^m[0,b]$.*

TÕESTUS. Teoreemi 2.2 alusel on võrrand (2.1) üheselt lahenduv ja tema lahend u on pidev lõigul $[0,b]$. Olgu $m=1$. Siis funktsioon f on pidevalt diferentseeruv lõigul $[0,b]$, s.t leidub $f' \in C[0,b]$. Kuna K on pidevalt diferentseeruv ruudul $[0,b]\times[0,b]$, siis leidub pidev osatuletis $\dfrac{\partial K(t,s)}{\partial t}$ ruudul $[0,b]\times[0,b]$ ning kehtib võrdus (vt. [2], lk 233)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^b K(t,s)u(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u(s)\,\mathrm{d}s, \quad t\in[0,b].$$

Seejuures integraal

$$\int_0^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u(s)\,\mathrm{d}s \quad (t\in[0,b])$$

kui muutuja t funktsioon on pidev lõigul $[0,b]$. Seega võrrandi (2.1) parem pool on pidevalt diferentseeruv lõigul $[0,b]$. Järelikult on pidevalt diferentseeruv ka võrrandi (2.1) vasak pool, kusjuures kehtib võrdus

$$u'(t) = \int_0^b \frac{\partial K(t,s)}{\partial t}u(s)\,\mathrm{d}s + f'(t), \quad t\in[0,b]. \tag{2.4}$$

Järelikult $u\in C^1[0,b]$. Kui $m=2$, siis samasuse (2.4) mõlema poole diferentseerimisel saame analoogiliselt juhuga $m=1$, et

$$u''(t) = \int_0^b \frac{\partial^2 K(t,s)}{\partial t^2}u(s)\,\mathrm{d}s + f''(t), \quad t\in[0,b],$$

millest järeldub, et $u\in C^2[0,b]$. Analoogiliselt jätkates saame teoreemi väite kehtivuse mistahes $m\in\mathbb{N}$ korral. ■

2.2 Meetodi kirjeldus

Vaatleme Fredholmi integraalvõrrandit (2.1), kus $K=K(t,s)$ ja $f=f(t)$ on pidevad funktsioonid vastavalt ruudul $[0,b]\times[0,b]$ ja lõigul $[0,b]$.

Järgnevas konstrueerime võrrandi (2.1) lahendamiseks meetodi, mis tugineb võrrandi (2.1) lahendi tükiti konstantsel aproksimatsioonil.

Olgu $n\in\mathbb{N}$. Lõigu $[0,b]$ jaotame n osalõiguks punktidega $t_0,t_1,\dots,t_n$:

$$\Delta_n = \{t_0,\dots,t_n\in[0,b] : 0=t_0<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=b\}.$$

Sellist jaotust nimetatakse lõigul $[0,b]$ antud võrguks. Tähistagu

$$h_j = t_j - t_{j-1} \quad (j=1,\dots,n)$$

osalõigu $[t_{j-1}, t_j]$ pikkust ja

$$h = \max_{j=1,\ldots,n} h_j$$

suurima osalõigu pikkust. Kui võrk on ühtlane, siis $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$, kus $h = b/n$. Sel korral $h \to 0$, kui $n \to \infty$. Kui võrk ei ole ühtlane, siis eeldame, et suurima osalõigu pikkus läheneb nullile, kui $n \to \infty$. Niisiis, edaspidi vaatleme vaid selliseid võrkusid, mille korral

$$h \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.5}$$

Integraalvõrrandi (2.1) lähislahendit otsime kujul

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{jn}\varphi_{jn}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant b, \tag{2.6}$$

kus $n \geqslant 2$, $c_{j1}, \ldots, c_{jn}$ on otsitavad kordajad ja

$$\varphi_{1n}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in [t_0, t_1], \\ 0, & \text{kui } t \notin [t_0, t_1] \end{cases}$$

ning

$$\varphi_{jn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in (t_{j-1}, t_j], \\ 0, & \text{kui } t \notin (t_{j-1}, t_j], \end{cases} \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Kordajad $c_{1n}, \ldots, c_{nn}$ leiame tingimustest

$$\int_0^b r_n(t)\varphi_{kn}(t)dt = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.7}$$

kus

$$r_n(t) = u_n(t) - \int_0^b K(t,s)u_n(s)\,\mathrm{d}s - f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant b.$$

Asetades suuruse $r_n(t)$ võrdustesse (2.7), saame

$$\int_0^b \left[u_n(t) - \int_0^b K(t,s)u_n(s)\,\mathrm{d}s - f(t)\right]\varphi_{kn}(t)dt = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots, n)$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{n} c_{jn}\left[\int_0^b \varphi_{jn}(t)\varphi_{kn}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^b \left(\int_0^b K(t,s)\varphi_{jn}(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi_{kn}(t)\,\mathrm{d}t\right]$$
$$= \int_0^b f(t)\varphi_{kn}(t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Paneme tähele, et

$$\varphi_{jn}(t)\varphi_{kn}(t) = \begin{cases} 0, & \text{kui } j \neq k, \\ 1, & \text{kui } j = k, \end{cases} \qquad t \in [0, b].$$

Ilmselt $k \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\int_0^b \varphi_{jn}(t)\varphi_{kn}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{d}t = t_k - t_{k-1} = h_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\int_0^b \left(\int_0^b K(t,s)\varphi_{jn}(s)\,\mathrm{d}s\right)\varphi_{kn}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{tj-1}^{t_j} K(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t, \quad j = 1, \dots, n.$$

Seega võrrandid (2.8) võtavad kuju

$$\sum_{j=1}^{n} c_{jn}\left[h_k - \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int_{tj-1}^{t_j} K(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right] = \int_0^b f(t)\varphi_{kn}(t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

Võrdused (2.9) kujutavad endast lineaarset algebralist võrrandisüsteemi suuruste $c_{1n}, \dots, c_{nn}$ suhtes:

$$c_{kn} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_{jn} = f_n, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.10}$$

kus

$$a_{kj} = \frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \quad (k, j = 1, \dots, n)$$

ja

$$f_k = \frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, \dots, n.$$

2.3 Ruumide valik ja siduvad operaatorid

Olgu $E_n = m_n$, kus m_n on kõigi n-komponendiliste vektorite Banachi ruum normiga

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\psi_k|, \quad x = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in m_n,\ \psi_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n.$$

Olgu $E = C[0,b]$ ja $p_n : E \to E_n$ operaator, mis igale funktsioonile $f \in E$ seab vastavusse vektori

$$p_n f = \Big((p_n f)_1, \ldots, (p_n f)_n\Big)^\top = \begin{pmatrix} (p_n f)_1 \\ \vdots \\ (p_n f)_n \end{pmatrix} \in E_n \tag{2.11}$$

nii, et

$$\Big(p_n f\Big)_k = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Ilmselt on operaator p_n lineaarne, sest suvaliste $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in E$ korral saame iga $k = 1, \ldots, n$ puhul, et

$$\begin{aligned} \Big(p_n(\alpha f + \beta g)\Big)_k &= \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \Big(p_n f\Big)_k + \beta \Big(p_n g\Big)_k \end{aligned}$$

ning seega

$$p_n(\alpha f + \beta g) = \alpha p_n(f) + \beta p_n(g).$$

Operaator $p_n : E \to E_n$ on pidev, sest iga $f \in E$ korral

$$\begin{aligned} \|p_n f\|_{E_n} &= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{d}t \right) \cdot \max_{0 \leqslant t \leqslant b} |f(t)| \\ &= \max_{0 \leqslant t \leqslant b} |f(t)| = \|f\|_E . \end{aligned}$$

Seega $p_n \in \mathscr{L}(E, E_n)$. Lisaks saame, et

$$\|p_n\|_{\mathscr{L}(E,E_n)} \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Tegelikult on lihtne näha, et mistahes $n \in \mathbb{N}$ puhul

$$\|p_n\|_{\mathscr{L}(E,E_n)} = 1.$$

Veel saame, et iga $f \in E$ korral

$$\|p_n f\|_{E_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_E .$$

Tõepoolest, kui $f \in E = C[0,b]$, siis f on ka pidev igal osalõigul $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Matemaatilisest analüüsist teame (vt [1], lk 366), et siis leidub $c_k \in [t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ selline, et

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,\mathrm{d}t = h_k f(c_k).$$

Seega

$$\begin{aligned}
\|p_n f\|_{E_n} &= \max_{k=1,\ldots,n} \left| \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(s)\,\mathrm{d}s \right| \\
&= \max_{k=1,\ldots,n} \left| \frac{h_k f(c_k)}{h_k} \right| \\
&= \max_{k=1,\ldots,n} |f(c_k)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \max_{t\in[0,b]} |f(t)| \\
&= \|f\|_E .
\end{aligned}$$

Niisiis oleme näidanud, et seostega (2.11) ja (2.12) määratud operaatorite hulk $\mathscr{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on siduvate operaatorite süsteem Banachi ruumide $E = C[0,b]$ ja $E_n = m_n$ vahel.

2.4 Lähisoperaatorite diskreetne koondumine

Olgu $E_n = m_n$ ja defineerime operaatori $T_n : E_n \to E_n$, mis igale vektorile

$$v_n = (v_{1n}, \ldots, v_{nn})^\top \in E_n$$

seab vastavusse vektori

$$T_n v_n = ((T_n v_n)_1, \ldots, (T_n v_n)_n)^\top \in E_n, \tag{2.13}$$

kus

$$(T_n v_n)_k = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \right] v_{jn}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Muutes integreerimise järjekorda (mis on lubatud $K(t,s)$ pidevuse tõttu ruudul $[0,b] \times [0,b]$), saame

$$(T_n v_n)_k = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K(t,s)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \right] v_{jn}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ilmselt on operaator $T_n : E_n \to E_n$ lineaarne.

Näitame, et operaator $T_n : E_n \to E_n$ on tõkestatud.

Tõepoolest, iga $v_n = (v_{1n}, \ldots, v_{nn})^\top \in E_n$ korral saame

$$\begin{aligned} \|T_n v_n\|_{E_n} &= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} K(t,s)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \right] v_{jn} \right| \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \right] \cdot \max_{(t,s) \in [0,b] \times [0,b]} |K(t,s)| \, \|v_n\|_{E_n} . \end{aligned}$$

Kuna

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left[\int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \right] = b,$$

siis

$$\|T_n v_n\|_{E_n} \leqslant b \max_{(t,s) \in [0,b] \times [0,b]} |K(t,s)| \, \|v_n\|_{E_n} ,$$

millest järeldub, et operaator $T_n : E_n \to E_n$ on tõkestatud (ehk pidev). Viimasest võrdusest järeldub ka, et operaatorite T_n normid on ühtlaselt tõkestatud suuruse n suhtes, s.t et leidub positiivne konstant M nii, et

$$\|T_n\|_{\mathscr{L}(E_n,E_n)} \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Kuna lõplikumõõtmelistes normeeritud ruumides tegutsev lineaarne pidev operaator on kompaktne (vt [3], lk 213), siis kokkuvõttes oleme näidanud, et operaator $T_n : E_n \to E_n$ on lineaarne täielikult pidev operaator.

Järgnevas näitame, et

$$\|p_n T u - T_n p_n u\|_{E_n} \to 0 \quad \forall u \in E, \; n \to \infty, \tag{2.16}$$

kus $E = C[0,b]$, $E_n = m_n$, T on defineeritud valemiga (2.2) ja T_n valemitega (2.13), (2.14).

Kuna $C^1[0,b]$ on Banachi ruumi $C[0,b]$ kõikjal tihe alamruum ja operaatorite T_n normid on ühtlaselt tõkestatud suuruse n suhtes (vt (2.15)), siis lause 1.2 tõttu piisab näidata koonduvuse (2.16) kehtivust, kui $u \in E' = C^1[0,b]$.

Niisiis, olgu $u \in C^1[0,b]$. Siis operaatorite p_n, T ja T_n ($n \in \mathbb{N}$) definitsioonidest järeldub, et iga $k = 1, \ldots, n$ korral

$$\begin{aligned} (p_n T u - T_n p_n u)_k &= \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s) u(s)\,\mathrm{d}s \right] \mathrm{d}t \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \right] \left(\frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \end{aligned}$$

ehk

$$(p_nTu - T_np_nu)_k = \frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\left[u(s) - \frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t.$$

Kasutades osalõigu $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ keskpunkti

$$t_{j/2} = \frac{t_{j-1} + t_j}{2},$$

saame viimase võrduse paremal poolel nurksulgudes oleva avaldise kirjutada kujul

$$\begin{aligned} u(s) - \frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= u(s) - u(t_{j/2}) + u(t_{j/2}) - \frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{t_{j/2}}^{s} u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[u(t_{j/2}) - u(\tau)\right]\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

ehk

$$u(s) - \frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_{j/2}}^{s} u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\int_{\tau}^{t_{j/2}} u'(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (2.17)$$

Tähistame

$$\begin{aligned} \hat{K} &:= \max_{(t,s)\in[0,b]\times[0,b]} |K(t,s)|, \\ \hat{u'} &:= \max_{s\in[0,b]} |u'(s)|. \end{aligned}$$

Siis iga $k = 1, \ldots, n$ korral

$$\begin{aligned} |(p_nTu - T_np_nu)_k| &= \Bigg|\frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Bigg\{\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\Bigg[\int_{t_{j/2}}^{s} u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad + \frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\int_{\tau}^{t_{j/2}} u'(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\,\mathrm{d}\tau\Bigg]\,\mathrm{d}s\Bigg\}\,\mathrm{d}t\Bigg| \\ &\leqslant \hat{K}\hat{u'}\Bigg[\frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} |s - t_{j/2}|\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left[\int_{\tau}^{t_{j/2}}\mathrm{d}\theta\right]\,\mathrm{d}\tau\right)\,\mathrm{d}s\right\}\,\mathrm{d}t\Bigg]. \end{aligned}$$

Kuna iga $j = 1, \dots, n$ puhul $|s - t_{j/2}| \leqslant t_j - t_{j-1}$, siis $|s - t_{j/2}| \leqslant h$ ja $|\tau - t_{j/2}| \leqslant h$, kus

$$h = \max_{j=1,\dots,n} (t_j - t_{j-1}).$$

Seega

$$|(p_n Tu - T_n p_n u)_k| \leqslant \hat{K}\hat{u'}(bh + bh) = ch, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2.18}$$

kus

$$c = 2\hat{K}\hat{u'}b$$

on suurusest n (suurusest h) sõltumatu konstant. Kui $n \to \infty$, siis eelduse (2.5) tõttu $h \to 0$ ja seega iga $k = 1, \dots, n$ korral

$$|(p_n Tu - T_n p_n u)_k| \to 0, \quad \text{kui } n \to \infty.$$

Seepärast iga $u \in C^1[0,1]$ puhul

$$\|p_n Tu - T_n p_n u\|_{E_n} = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |(p_n Tu - T_n p_n u)_k| \to 0,$$

kui $n \to \infty$. Lausest 1.2 ja võrratusest (2.15) järeldub nüüd, et iga $u \in E = C[0,b]$ korral

$$\|p_n Tu - T_n p_n u\|_{E_n} \to 0, \quad \text{kui } n \to \infty, \tag{2.19}$$

s.t operaatorite $T_n : E_n \to E_n$ jada $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ koondub diskreetselt operaatoriks $T : E \to E$, s.t $T_n \overset{\mathscr{P}\mathscr{P}}{\to} T$.

Osutub, et $T_n \to T$ kompaktselt. Kuna $T_n \overset{\mathscr{P}\mathscr{P}}{\to} T$, siis on vaja kontrollida vaid tingimust (1.5).

Tõepoolest, olgu vektorid $v_n = (v_{1n}, \dots, v_{nn})^\top \in E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sellised, et

$$0 < \|v_n\|_{E_n} \leqslant d \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.20}$$

kus d on mingi positiivne konstant. Vaatleme jada $(x^{(n)})_{n=1}^\infty \subset E = C[0,b]$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\,\mathrm{d}s \cdot v_{jn}, \quad n = 1, 2, \dots, \; t \in [0,b]. \tag{2.21}$$

Näitame, et valemi (2.21) abil defineeritud jada $(x^{(n)})$ on suhteliselt kompaktne ruumis $E = C[0,b]$. Selleks kasutame järgmist Arzela-Ascoli teoreemi (vt [3], lk 45).

Teoreem 2.4. *Hulk ruumis $C[a,b]$ on suhteliselt kompaktne parajasti siis, kui ta on ühtlaselt tõkestatud ja võrdpidev.*

Kõigepealt näitame, et jada $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E = C[0,b]$ on ühtlaseltt tõkestatud, s.t et leidub positiivne reaalarv M nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$|x^{(n)}(t)| \leqslant M \quad \forall t \in [0,b].$$

Tõepoolest, kuna K on pidev ruudul $[0,b]\times[0,b]$, siis iga $t \in [0,b]$ korral saame võrratuse (2.20) abil, et

$$\begin{aligned}
|x^{(n)}(t)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s)\,\mathrm{d}s \cdot v_{jn} \right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |K(t,s)|\;\mathrm{d}s \cdot |v_{jn}| \\
&\leqslant \max_{(t,s)\in[0,b]\times[0,b]} |K(t,s)| d \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}s = M, \quad n = 1,2,\ldots,
\end{aligned}$$

kus $M = \max\limits_{(t,s)\in[0,b]\times[0,b]} |K(t,s)| db.$

Näitame nüüd, et jada $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset E$ on võrdpidev, s.t et iga $\epsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$|x^{(n)}(r_1) - x^{(n)}(r_2)| < \epsilon,$$

kui $r_1, r_2 \in [0,b]$, $|r_1 - r_2| < \delta$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Tõepoolest, olgu $r_1, r_2 \in [0,b]$. Siis

$$\begin{aligned}
|x^{(n)}(r_1) - x^{(n)}(r_2)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(r_1,s)\,\mathrm{d}s \cdot v_{jn} - \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(r_2,s)\,\mathrm{d}s \cdot v_{jn} \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(K(r_1,s) - K(r_2,s)\right)\,\mathrm{d}s \cdot v_{jn} \right| \\
&\leqslant \int_0^b |K(r_1,s) - K(r_2,s)|\;\mathrm{d}s \cdot d.
\end{aligned}$$

Kuna funktsioon $K(t,s)$ on pidev ruudul $[0,b]\times[0,b]$, siis ta on seal ka ühtlaselt pidev, millest järeldub, et iga $s \in [0,b]$ korral kui $r_1, r_2 \in [0,b]$ ja $|r_1 - r_2| < \delta$, siis

$$|K(r_1,s) - K(r_2,s)| < \frac{\epsilon}{bd}.$$

Seega

$$
\begin{aligned}
|x^{(n)}(r_1) - x^{(n)}(r_2)| &\leqslant \int_0^b |K(r_1, s) - K(r_2, s)| \, \mathrm{d}s \cdot d \\
&< \frac{b\epsilon d}{bd} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

kui $r_1, r_2 \in [0, b]$, $|r_1 - r_2| < \delta$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Järgnevalt paneme tähele, et kehtib võrdus

$$
T_n v_n = p_n x^{(n)},
$$

kus $v_n = (v_{1n}, \ldots, v_{nn})^\top \in E_n$ $(n \in \mathbb{N})$ on vektorid, mis rahuldavad tingimust (2.20).

Tõepoolest, iga $k = 1, \ldots, n$ korral järeldub operaatorite p_n ja T_n definitsioonidest, et

$$
\begin{aligned}
(p_n x^{(n)})_k &= \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, s) \, \mathrm{d}s \cdot v_{jn} \right] \mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, s) \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \right] v_{jn} = (T_n v_n)_k
\end{aligned}
$$

ehk

$$
T_n v_n = p_n x^{(n)}.
$$

Kuna jada $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ on suhteliselt kompaktne ruumis $E = C[0, b]$, siis lause 1.1 põhjal on jada $(p_n x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ja järelikult ka jada $(T_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diskreetselt kompaktne. Seega on täidetud kompaktsuse nõue (1.5). Kokkuvõttes oleme saanud, et operaatorite $T_n : E_n \to E_n$ jada $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ koondub kompaktselt operaatoriks $T : E \to E$.

2.5 Lähislahendite koondumine

Võrrandisüsteemi (2.10) lahenduvust ja meetodi koonduvust iseloomustab järgmine teoreem.

Teoreem 2.5. *Olgu K ja f pidevad funktsioonid vastavalt ruudul $[0, b] \times [0, b]$ ja lõigul $[0, b]$. Leidugu integraalvõrrandile (2.1) vastaval homogeensel võrrandil (2.3) vaid triviaalne lahend $u = 0$. Olgu lõigul $[0, b]$ antud võrk Δ_n, mille korral on täidetud tingimus (2.5). Siis võrrandil (2.1) on ühene lahend $u \in C[0, b]$ ning* *leidub selline $n_0 \in \mathbb{N}$, et $n \geqslant n_0$ korral on ka võrrandisüsteemil (2.10) ühene lahend $c_{1n}, \dots, c_{nn}$, kusjuures leiab aset koondumine*

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| c_{kn} - \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(s)\, ds \right| \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.22}$$

hinnangutega

$$c_1 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\delta_k| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| c_{kn} - \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(s)\, ds \right| \leqslant c_2 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\delta_k|, \tag{2.23}$$

kus c_1 ja c_2 on mingid suurusest n ja suurima osalõigu pikkusest h sõltumatud positiivsed konstandid ning

$$\delta_k = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,s) \left[u(s) - \frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\, d\tau \right] ds \right) dt. \tag{2.24}$$

Tõestus. Integraalvõrrandit (2.1) vaatleme operaatorvõrrandina

$$u = Tu + f, \tag{2.25}$$

Banachi ruumis $E = C[0,b]$, kus $T : E \to E$ on defineeritud valemiga (2.2). Olgu $n \geqslant 2$. Olgu Δ_n lõigul $[0,b]$ antud võrk, mille korral kehtib tingimus (2.5). Võrranditesüsteemi (2.10) vaatleme operaatorvõrrandina

$$u_n = T_n u_n + p_n f, \tag{2.26}$$

Banachi ruumis $E_n = m_n$, kus $u_n = (c_{n1}, \dots, c_{nn})^\top$ on otsitav, operaator $T_n : E_n \to E_n$ on defineeritud võrdustega (2.14), (2.13) ning $p_n : E \to E_n$ on siduvad operaatorid, mis on defineeritud valemitega (2.11), (2.12).

Ilmselt $p_n f \stackrel{\mathscr{P}}{\to} f$.

Eeldus, et integraalvõrrandi (2.2) vastaval homogeensel võrrandil (2.3) on olemas vaid triviaalne lahend $u = 0$ on samaväärne võrdusega $\ker(I - T) = \{0\}$.

Punktides 2.1-2.4 saadud tulemuste põhjal leiame, et on täidetud järgmised tingimused:

1. $T \in \mathscr{L}(E, E)$ ja $\ker(I - T) = \{0\}$;

2. $T_n \in \mathscr{L}(E_n, E_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ on täielikult pidevad;

3. $p_n f \stackrel{\mathscr{P}}{\to} f$;

4. $T_n \to T$ kompaktselt.

Koonduvus (2.22) ja hinnang (2.23) järelduvad nüüd teoreemist 1.3. ∎

Teoreem 2.6. *Olgu K ja f pidevalt diferentseeruvad funktsioonid vastavalt ruudul $[0,b]\times[0,b]$ ja lõigul $[0,b]$. Leidugu integraalvõrrandile (2.1) vastaval homogeensel võrrandil (2.3) vaid triviaalne lahend $u=0$. Olgu lõigul $[0,b]$ antud võrk Δ_n, mille korral on täidetud tingimus (2.5). Siis leidub selline $n_0\in\mathbb{N}$, et $n\geqslant n_0$ korral on ka võrrandisüsteemil (2.10) ühene lahend $c_{1n},\ldots,c_{nn}$ ning kehtib hinnang*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|c_{kn}-\frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(s)\,ds\right|\leqslant ch, \tag{2.27}$$

kus $h=\max\limits_{j=1,\ldots,n}(t_j-t_{j-1})$ ja c on mingi suurustest n ning h sõltumatu positiivne konstant.

TÕESTUS. Antud eelduste korral järeldub hinnang (2.27) teoreemidest 2.3 ja 2.5 ning võrratusest (2.18), sest $\delta_k=(p_nTu-T_np_nu)_k$, $k=1,\ldots,n$. ∎

Teoreem 2.7. *Olgu K ja f kaks korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid vastavalt ruudul $[0,b]\times[0,b]$ ja lõigul $[0,b]$. Leidugu integraalvõrrandile (2.1) vastaval homogeensel võrrandil (2.3) vaid triviaalne lahend $u=0$. Olgu lõigul $[0,b]$ antud võrk Δ_n, mille korral on täidetud tingimus (2.5). Siis leidub selline $n_0\in\mathbb{N}$, et $n\geqslant n_0$ korral on ka võrrandisüsteemil (2.10) ühene lahend $c_{1n},\ldots,c_{nn}$ ning kehtib hinnang*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|c_{kn}-\frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(s)\,ds\right|\leqslant ch^2, \tag{2.28}$$

kus $h=\max\limits_{j=1,\ldots,n}(t_j-t_{j-1})$ ja c on mingi suurustest n ning h sõltumatu positiivne konstant.

TÕESTUS. Teoreemist 2.5 tõttu on vaja näidata vaid hinnangu (2.28) kehtivust. Teoreemist 2.3 järeldub, et võrrandi (2.1) lahend u on kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[0,b]$: $u\in C^2[0,b]$.

Teoreemist 2.5 järeldub, et hinnangu (2.28) saamiseks tuleb hinnata valemiga (2.24) antud suurust δ_k suvalise $k=1,\ldots,n$ korral. Nüüd samasusest

$$K(t,s)=K(t,s)-K(t,t_{j/2})+K(t,t_{j/2})$$

järeldub $k = 1, \ldots, n$ korral, et

$$\delta_k = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Bigg(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} [K(t,s) - K(t,t_{j/2})] \Bigg[u(s) \\ - \frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg) \mathrm{d}t \\ + \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Bigg(\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,t_{j/2}) \Bigg[u(s) - \frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg) \mathrm{d}t. \qquad (2.29)$$

Võttes igal osalõigul $[t_{j-1}, t_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$ keskpunkti

$$t_{j/2} = \frac{t_{j-1} + t_j}{2},$$

saame võrdusest (2.17) ja (2.29), et

$$\delta_k = L_{k1} + L_{k2} + L_{k3}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

kus

$$L_{k1} = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big[K(t,s) - K(t,t_{j/2})\big] \Bigg[\int_{t_{j/2}}^{s} u'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg\} \mathrm{d}t,$$

$$L_{k2} = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Bigg[K(t,s) \\ - K(t,t_{j/2}) \Bigg] \Bigg[\frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \Bigg(\int_{\tau}^{t_{j/2}} u'(\theta)\,\mathrm{d}\theta \Bigg) \mathrm{d}\tau \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg\} \mathrm{d}t,$$

$$L_{k3} = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t,t_{j/2}) \Bigg[u(s) - u(t_{j/2}) \\ - \frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big[u(\tau) - u(t_{j/2}) \big]\,\mathrm{d}\tau \Bigg] \mathrm{d}s \Bigg\} \mathrm{d}t.$$

Kuna

$$|\delta_k| = |L_{k1} + L_{k2} + L_{k3}| \\ \leqslant |L_{k1}| + |L_{k2}| + |L_{k3}|,$$

siis iga $k = 1, \ldots, n$ korral on vaja hinnata avaldisi L_{k1}, L_{k2} ja L_{k3}.

Olgu

$$\begin{aligned}
\hat{K} &:= \max_{(t,s)\in[0,b]\times[0,b]} |K(t,s)|,\\
\hat{K'} &:= \max_{(t,s)\in[0,b]\times[0,b]} \left|\frac{\partial K(t,s)}{\partial s}\right|,\\
\hat{u'} &:= \max_{s\in[0,b]} |u'(s)|,\\
\hat{u''} &:= \max_{s\in[0,b]} |u''(s)|.
\end{aligned}$$

Hindame kõigepealt suurust L_{k1} $(k = 1,\dots,n)$. Lagrange'i keskväärtusteoreemist järeldub, et iga $t \in [0,b]$ ja $j = 1,\dots,n$ korral

$$|K(t,s) - K(t,t_{j/2})| \leqslant \hat{K'}|s - t_{j/2}|, \quad t_{j-1} \leqslant s \leqslant t_j.$$

Kuna iga $j = 1,\dots,n$ puhul $s \in [t_{j-1}, t_j]$, siis

$$|s - t_{j/2}| \leqslant h \tag{2.30}$$

ja seepärast

$$|K(t,s) - K(t,t_{j/2})| \leqslant \hat{K'}h, \quad t \in [0,b],\ j = 1,\dots,n. \tag{2.31}$$

Seega

$$|L_{k1}| \leqslant \frac{\hat{K'}\hat{u'}h^2}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t, \quad k = 1,\dots,n.$$

Kuna

$$\frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t = b, \tag{2.32}$$

siis kehtib hinnang

$$|L_{k1}| \leqslant \hat{K'}\hat{u'}bh^2, \quad k = 1,\dots,n. \tag{2.33}$$

Hindame avaldist L_{k2} $(k = 1,\dots,n)$. Arvestades hinnanguid (2.30) ja (2.31) ning võrduseid (2.32) ja

$$\frac{1}{h_j}\int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathrm{d}s = 1, \quad j = 1,\dots,n, \tag{2.34}$$

saame hinnangu

$$|L_{k2}| \leqslant \hat{K}'\hat{u}'bh^2 \quad (k = 1, \dots, n). \tag{2.35}$$

Hindame avaldist L_{k3} $(k = 1, \dots, n)$. Me näeme, et

$$|L_{k3}| \leqslant |M_{k3}| + |N_{k3}|,$$

kus

$$M_{k3} = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, t_{j/2}) \Big[u(s) - u(t_{j/2}) \Big] \, \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t,$$

$$N_{k3} = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, t_{j/2}) \left[\frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big[u(\tau) - u(t_{j/2}) \big] \, \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t.$$

Kuna $u = u(t)$ on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis

$$u(s) - u(t_{j/2}) = u'(t_{j/2})(s - t_{j/2}) + \frac{u''(\xi_j)}{2}(s - t_{j/2})^2,$$

kus ξ_j on mingi punkt s ja $t_{j/2}$ vahel. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j/2}) \, \mathrm{d}s &= \frac{(s - t_{j/2})^2}{2} \bigg|_{t_{j-1}}^{t_j} \\
&= \frac{(t_j - t_{j/2})^2}{2} - \frac{(t_{j-1} - t_{j/2})^2}{2} \\
&= \frac{\left(t_j - \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right)^2 - \left(t_{j-1} - \frac{t_j + t_{j-1}}{2}\right)^2}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{t_j}{2} - \frac{t_{j-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{t_{j-1}}{2} - \frac{t_j}{2}\right)^2}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{t_j}{2} - \frac{t_{j-1}}{2}\right)^2 - \left(\frac{t_j}{2} - \frac{t_{j-1}}{2}\right)^2}{2} = 0, \quad j = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Seega

$$M_{k3} = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, t_{j/2}) \left[\frac{u''(\xi_j)}{2}(s - t_{j/2})^2 \right] \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t,$$

$$N_{k3} = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t, t_{j/2}) \left[\frac{1}{h_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{u''(\xi_j)}{2}(s - t_{j/2})^2 \right] \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}s \right\} \mathrm{d}t.$$

Kui arvestada hinnanguid (2.30) ja (2.31) ning võrduseid (2.32) ja (2.34), siis iga $k = 1, \ldots, n$ korral

$$|M_{k3}| \leqslant \frac{\hat{K}\hat{u''}b}{2}h^2,$$
$$|N_{k3}| \leqslant \frac{\hat{K}\hat{u''}b}{2}h^2.$$

Seega kehtib hinnang

$$|L_{k3}| \leqslant \hat{K}\hat{u''}bh^2 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.36}$$

Hinnangutest (2.33), (2.35) ja (2.36) järeldub, et iga $k = 1, \ldots, n$ korral

$$|\delta_k| \leqslant ch^2,$$

kus konstant

$$c = (2\hat{K'}\hat{u'} + \hat{K}\hat{u''})b$$

ei sõltu suurusest n ega suurusest h. Seega hinnang (2.28) kehtib. ■

3 Numbrilised näited

Numbriliste tulemuste saamiseks ja graafikute koostamiseks on kasutatud autori poolt kirjutatud Scilabi programmi, mis on antud lisas.

3.1 Näide 1

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(t) - \int_0^1 t^{2.4} s^{2.5} u(s)\,\mathrm{d}s = t^{2.5} - \frac{1}{6} t^{2.4}, \quad t \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Antud võrrand on kujul (2.1), kus $b = 1$ ning

$$K(t,s) = t^{2.4} s^{2.5}, \quad t \in [0,1]$$

ja

$$f(t) = t^{2.5} - \frac{1}{6} t^{2.4}, \quad t \in [0,1].$$

Integraalvõrrandi (3.1) lahendiks on

$$u(t) = t^{2.5}, \quad t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Lahendi (3.2) lähendi $u_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$) leidmiseks kasutame punktis 2.2 kirjeldatud meetodit võttes aluseks ühtlase võrgu

$$t_i = ih,$$

kus $i = 0, 1, \ldots, n$ ja $h = 1/n$.

Meetodi vea ϵ_n arvutame järgmiselt:

$$\epsilon_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| c_{kn} - \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u(s)\,\mathrm{d}s \right|, \tag{3.3}$$

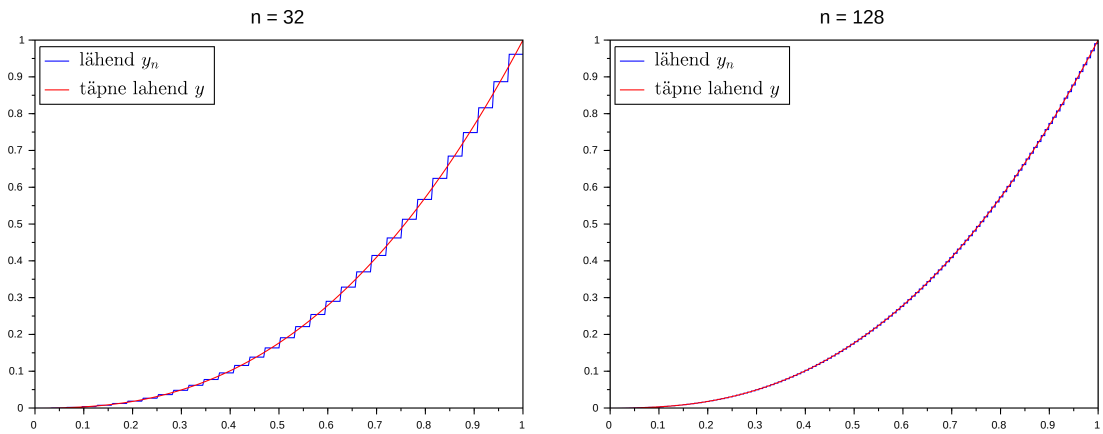
kus h_k on lõigu $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, \ldots, n$) pikkus ja $c_{1n}, \ldots, c_{nn}$ on leitud meetodi võrrandisüsteemist (2.10). Saadud numbrilised tulemused on esitatud tabelis 1.

n	ϵ_n	ϵ_n/ϵ_{2n}
2	0.0183998	2.6397808
4	0.0069702	3.339978
8	0.0020869	3.6825481
16	0.0005667	3.8446404
32	0.0001474	3.9202128
64	0.0000376	3.9578947
128	0.0000095	3.9583333
256	0.0000024	4.0000000
512	0.0000006	

Tabel 1: Võrrandi (3.1) lähislahendite koondumine.

Tabelist näeme, et numbrilised tulemused vastavad teoreemi 2.7 hinnangule (2.28).

Joonisel 1 toodud graafikud illustreerivad lähislahendi koonduvust täpseks lahendiks.



Joonis 1: Näite 1 graafikud lõigul $[0, 1]$, kui $n = 32, 128$.

3.2 Näide 2

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(t) - \int_0^1 s^{0.4} u(s)\, \mathrm{d}s = t^{0.1} - \frac{2}{3}, \quad t \in [0, 1]. \tag{3.4}$$

Antud võrrand on kujul (2.1), kus $b = 1$ ning

$$K(t, s) = s^{0.4}, \quad t \in [0, 1]$$

ja

$$f(t) = t^{0.1} - \frac{2}{3}, \quad t \in [0, 1].$$

Integraalvõrrandi (3.4) lahendiks on

$$u(t) = u(t) = t^{0.1}, \quad t \in [0, 1]. \tag{3.5}$$

Lahendi (3.5) lähendi $u_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$) leidmiseks kasutame punktis 2.2 kirjeldatud meetodit võttes aluseks ühtlase võrgu

$$t_i = ih,$$

kus $i = 0, 1, \ldots, n$ ja $h = 1/n$.

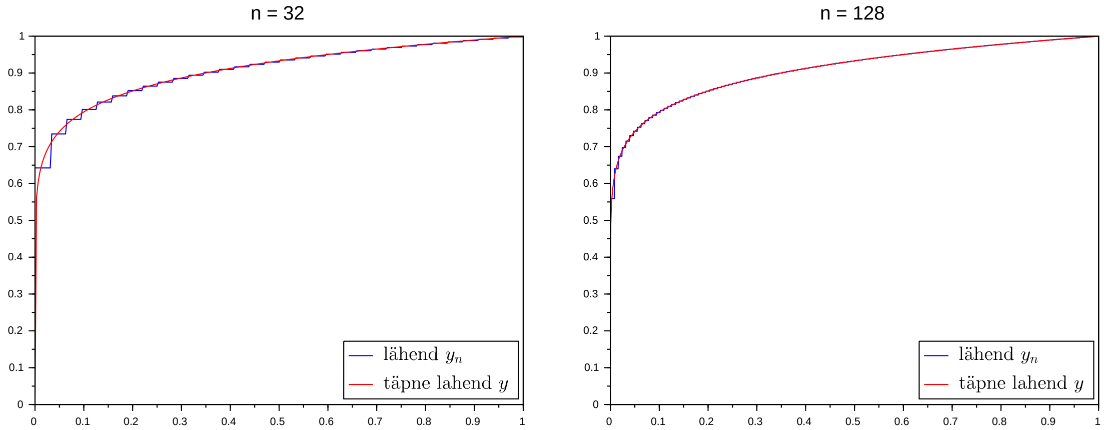
Meetodi vea ϵ_n arvutame valemiga (3.3), kus h_k on lõigu $[t_{k-1}, t_k]$ ($k = 1, \ldots, n$) pikkus ja $c_{1n}, \ldots, c_{nn}$ on leitud meetodi võrrandisüsteemist (2.10). Saadud arvulised tulemused on esitatud tabelis 2.

n	ϵ_n	S_n
2	0.0237526	2.6405274
4	0.0089954	2.7005104
8	0.0033310	2.7406615
16	0.0012154	2.7679344
32	0.0004391	2.7861675
64	0.0001576	2.7992895
128	0.0000563	2.8009950
256	0.0000201	2.8309859
512	0.0000071	

Tabel 2: Võrrandi (3.4) lähislahendite koondumine.

Kuna integraalvõrrandi (3.4) korral ei ole teoreemide 2.6 ja 2.7 eeldused täidetud, siis teoreetilised hinnangud (2.27) ja (2.28) ei pruugi kehtida. Tabelis 2 saadud numbrilised tulemused näitavad, et hinnang (2.28) tõepoolest ei kehti, kuid meetodi koondumine on isegi natuke kiirem kui seda näitab hinnang (2.27).

Joonisel 2 toodud graafikud illustreerivad lähislahendi koonduvust täpseks lahendiks.



Joonis 2: Näite 2 graafikud lõigul $[0, 1]$, kui $n = 32, 128$.

Kirjandus

[1] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I. Teine, parandatud ja täiendatud trükk*, Valgus, Tallinn, 1982.

[2] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs II osa*, Valgus, Tallinn, 1968.

[3] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[4] G. Vainikko, *Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem)*, Pegamon Press Ltd, Great Britain, 1978.

[5] G. Vainikko, *Diskretisatsioonimeetodite analüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1976 (vene keeles).

Lisa

Peatükis 3 näidete lahendamisel kasutatud Scilabi programm:

```
clear;
format(10);
//----------------------------------------------------------------------
//Osalõikude arv
//----------------------------------------------------------------------
n=8;
//----------------------------------------------------------------------
//Näited
//----------------------------------------------------------------------
//////Näide 1
//
//b=1; //lõik [0,b]
//
//function g=vabauld(t)
//      g=t^2.5-(1/6)*(t^2.4);
//endfunction
//
//function K=tuum(t,s)
//      K=(t^2.4)*(s^2.5);
//endfunction
//
////Teoreetiline lahend
//function y=lahend(t)
//      y=t^(2.5);
//endfunction

////Näide 2

b=1; //lõik [0,b]

function g=vabauld(t)
    g=t^0.1-2/3
endfunction

function K=tuum(t,s)
    K=s^0.4
endfunction
```

```
//Teoreetiline lahend
function y=lahend(t)
    y=t^0.1
endfunction

//------------------------------------------------------------------------
//Meetod
//------------------------------------------------------------------------
//Koostan võrgu
vX=zeros(1,n+1);
r=1 //r>=1, r=1 annab ühtlase võrgu
for i=0:n
    vX(i+1)=b*((i/n)^r);
end

//lõikude pikkused:
pikkused=zeros(1,n);
for i=0:1:(n-1)
    pikkused(i+1)=vX(i+2)-vX(i+1);
end

//vaja kahekordse integraali arvutamiseks
function K=integrate_tuum(t,a,b) //a,b on rajapuntid
    K=integrate('tuum(t,s)','s',a,b);
endfunction

A=zeros(n,n);
B=zeros(n,1);

for k=1:n
    B(k)=integrate('vabauld(t)','t',vX(k),vX(k+1));
    for j=1:n
        if k==j then
            A(k,j)=( vX(k+1)-vX(k) ) -...
            integrate...
            ('integrate_tuum(t,vX(k),vX(k+1))',...
            't',vX(k),vX(k+1));
        else
            A(k,j)=(-1)...
```

```
                *integrate...
                ('integrate_tuum(t,vX(j),vX(j+1))',...
                't',vX(k),vX(k+1));
            end
        end
end

C=linsolve(A,-B);

function y=lahendyn(t)
    y=0;
    if ( vX(1) <= t & t <= vX(2) ) then
        y=C(1);
    end
    for i=2:n
        if ( vX(i) < t & t <= vX(i+1) ) then
            y=C(i);
        end
    end
    //kui on väljaspool me lõiku, siis y=0
    if t < vX(1) | t > vX(n+1) then
        y=0;
    end
endfunction

//-------------------------------------------------------------
//Viga ja joonestamine
//-------------------------------------------------------------
Xid=zeros(11,n);
for i=1:n
    for j=0:10
        Xid(j+1,i)=vX(i)+(j/10)*(vX(i+1)-vX(i));
    end
end

//ilusti ühes veerus
for j=1:11
    JoonistavadXid(j)=Xid(j,1);
end
for i=2:n
```

```
    for j=2:11
        JoonistavadXid(11+(i-2)*10+(j-1))=Xid(j,i);
    end
end

for i=1:length(JoonistavadXid)
    gr(i)=lahendyn( JoonistavadXid(i) );
end

clf;
plot(JoonistavadXid, gr, 'blue');
plot(JoonistavadXid, lahend(JoonistavadXid), 'red');
F=4;
//legends(['$\text{lähend} \ y_n$';...
//'$\text{täpne lahend } y$'],...
//[2,5],opt=2,font_size=F); // Graafiku legend
legends(['$\text{lähend} \ y_n$';...
'$\text{täpne lahend } y$'],...
[2,5],opt="lr",font_size=F);
title('n = ' + string(n),'fontsize',F);  //Graafiku legend

for i=1:n
    uusnormiga(i)=C(i)- ...
    integrate('lahend(s)','s',vX(i),vX(i+1))...
    /( vX(i+1)-vX(i) );
end

uusnorm=max( abs(uusnormiga) )
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Margus Lillemäe,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Fredholmi integraalvõrrandi lahendi tükiti konstantne aproksimatsioon “, mille juhendaja on Arvet Pedas,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **15.05.2018**