Loodus- ja tehnoloogiateaduskond

Friedmanni kosmoloogia üldistes skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriates

Magistritöö

üliõpilane: Ott Vilson

juhendaja: vanemteadur Piret Kuusk

Tartu, 2013

Sisukord

1 Sissejuhatus **2**

2 Alusteooriad **3**

2.1 Üldrelatiivsusteooria (ÜRT) 3

2.2 Konformne teisendus 4

2.3 Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad (STG) 4

3 Üldised skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad **5**

3.1 Flanagani mõjufunktsionaal ja selle teisendused 5

3.2 Väljavõrrandid ja nende teisenemine 7

3.3 Üldiste skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriate klassifikatsioon 10

4 Friedmanni kosmoloogia üldises formalismis **12**

4.1 Väljavõrrandid 12

4.2 Dünaamiline süsteem 14

5 Bergmanni-Wagoneri teooria **17**

5.1 Jordani raam 17

5.2 Einsteini raam 18

5.3 Näide konkreetse seosefunktsiooniga ja potentsiaaliga 20

6 Tulemuste arutelu ja analüüs **23**

7 Kokkuvõte **25**

8 Kasutatud kirjandus **26**

1 Sissejuhatus

Vaatluste põhjal paisub universum käesoleval ajal kiirenevalt, mida üldrelatiivsusteooria (ÜRT) raames saab seletada ainult positiivse kosmoloogilise konstandiga. Mõõtmistest saadud arvulist väärtust on aga raske teoreetiliselt põhjendada. Seetõttu on üritatud leida alternatiivseid lahendusi või üldisemaid teooriaid, milles praegu mõõdetav kosmoloogilise konstandi arvuline väärtus oleks dünaamilise arengu tulemus.[1]

Ühe võimaliku üldistusena uuritakse skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad, mida algselt käsitleti puhtteoreetilistel kaalutlustel. Selles valdkonnas on publitseeritud sadu artikleid, kuid üldtunnustatud käsitlus puudub. Üks arusaamatusi põhjustav küsimus on seotud konformse teisendusega, selle füüsikalise tähendusega ning mõjuga skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriates[2]. Teise probleemi aluseks on päikesesüsteemisisesed vaatlused, mis on heas kooskõlas üldrelatiivsusteooriaga. Seega võiks viimane olla üldisema teooria piirjuht selliselt, et väljavõrrandite lahendid universumi hilises staadiumis läheneksid vastavatele üldrelatiivsusteooria lahenditele.

Käesoleva töö eesmärk on esiteks uurida üldiseid skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriaid (STG) kirjeldavate suuruste muutumist aegruumi meetrilise tensori konformsel teisendusel ja vahetult mittemõõdetava skalaarvälja ümberdefineerimisel. Sealjuures käesolevas töös lähtume peaaegu ainult matemaatilistest kaalutlustest. Teine eesmärk on uurida STG Friedmanni tüüpi kosmoloogia kõige üldisemaid võrrandeid ning viia need dünaamiliste süsteemide uurimiseks sobivasse kujju. Kolmas eesmärk on leida konkreetsete kosmoloogiliste mudelite kui dünaamiliste süsteemide püsipunktid ning nende tüübid.

Käesolev töö koosneb kuuest peatükist. Sissejuhatusele järgnevas teises peatükis antakse lühiülevaade üldrelatiivsusteooriast, konformsest teisendusest ja algsetest skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriatest. See peatükk põhineb üldrelatiivsusteooria ja skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria õpikutel[3, 4, 5, 6, 7]. Kolmandas peatükis on aluseks võetud Flanagani artiklis postuleeritud üldine mõjufunktsionaal[8], mille varieerimisel saadud väljavõrrandite teisenemise põhjal esitatakse teooriate klassifikatsioon. Neljandas peatükis esitame eelneva põhjal Friedmanni tüüpi kosmoloogia võrrandid ning Damouri ja Nordtvedti poolt pakutud ajakoordinaadi teisenduse[9] üldistamisega viime eelmainitud võrrandid dünaamiliste süsteemide uurimiseks sobivasse kujju. Viiendas peatükis uurime dünaamiliste süsteemide abil kaht konkreetset juhtu, mis on omavahel seotud konformse teisendusega ja skalaarvälja ümberdefineerimisega. See osa põhineb suuresti Järve et. al. töödel[10, 11, 12]. Kuuendas peatükis on saadud tulemuste arutelu ning pärast seda on töö kokkuvõte, millele järgneb kasutatud kirjanduse loetelu.

2 Alusteooriad

2.1 Üldrelatiivsusteooria (ÜRT)

Einsteini üldrelatiivsusteooria järgi on gravitatsiooniväljana tunnetetav nähtus matemaatiliselt kirjeldatav kui aegruumi kõverus. Vabalangemises olevad proovikehad liiguvad piki geodeetilisi jooni, mis on määratud kui ekstremaalse pikkusega jooned. Teooria esitamiseks kasutatakse Riemanni geomeetriat, mis on määratud kahe fundamentaalse väljaga: meetrilise tensori väli $g_{\mu\nu}$ ja afiinse seostuse väli ∇. Viimane indutseerib ka kovariantse tuletise ∇_μ. Ruumi kõveruse kui gravitatsioonivälja määrab energia-impulsitensor, mis erirelatiivsusteooria põhjal hõlmab ka massi[3, 4, 5].

Järgnevas töös kasutame väljavõrrandite tuletamisel variatsioonprintsiipi, mida esimesena kasutas Hilbert ning sai samad võrrandid, milleni jõudis ka Einstein mõnevõrra teistel kaalutlustel. Hilberti variatsioonprintsiibi kasutamisel eeldatakse, et gravitatsioon on määratud meetrilise tensori väljaga ning afiinne seostus ei ole iseseisev väli, vaid peab rahuldama Levi-Civita seostuse tingimusi ning on seega arvutatav meetrilise tensori põhjal. Koordinaatbaasis on selle afiinse seostuse kordajad tuntud ka Christoffeli sümbolitena[4]

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = g^{\sigma\lambda}\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right). \tag{1}$$

Kasutame tavapärast tähistust $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

Mõjufunktsionaali, mille postuleeris Hilbert, nimetatakse ka Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaaliks[4, 5]. Ette rutates lisame siia kohe ka kosmoloogilist konstanti Λ kirjeldava liikme

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N}\int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}(R - 2\kappa^2\Lambda) + S_m. \tag{2}$$

Sealjuures siin ja edaspidi kasutame ühikute süsteemi, milles $c \equiv 1$ ja $\hbar \equiv 1$. G_N on Newtoni gravitatsioonikonstant. S_m on mateeriavälju kirjeldav mõjufunktsionaal.

Varieerimisel saame väljavõrrandid

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + 8\pi G_N g_{\mu\nu}\Lambda = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \tag{3}$$

milles $R_{\mu\nu}$ on Riemanni-Christoffeli kõverustensori ahendamisel saadud Ricci tensor ning R on omakorda viimase ahend $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Energia-impulsi tensori $T_{\mu\nu}$ defineerime valemiga (17).

Järgneva tarvis esitame siinkohal ka Friedmanni kosmoloogia võrrandid üldrelatiivsusteoorias[5]

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{\kappa^2}{3}\rho + \frac{\kappa^2}{3}\Lambda - K, && (4)\\ 2\dot{H} + 3H^2 &= -\kappa^2 p + \kappa^2\Lambda - K, && (5)\\ \dot{\rho} &= -3H(\rho + p). && (6) \end{aligned}$$

Kõik neis valemites esinevad suurused defineeritakse hilisemates peatükkides.

2.2 Konformne teisendus

Konformsel teisendusel ehk Weyli teisendusel korrutatakse meetrilist tensorit mingi rangelt positiivse skalaarse funktsiooniga[4]

$$\hat{g}_{\mu\nu}(x^\sigma) \equiv (\Omega(x^\sigma))^2 g_{\mu\nu}(x^\sigma)\,. \tag{7}$$

Saadud tulemus võetakse uueks meetriliseks tensoriks ning öeldakse, et minnakse ühest konformsest raamist teise. Vektorite pikkuste arvutamise eeskiri muutub, kuid isotroopsuse tõttu jäävad nurgad vektorite vahel samaks. Samuti säilib muutkonna põhjuslik struktuur, sest ajasarnased vektorid kujutatakse ajasarnasteks, ruumisarnased ruumisarnasteks ja isotroopsed isotroopseteks. Saab näidata, et Levi-Civita seostuse tingimus pole invariantne konformsel teisendusel. Seetõttu tuleb Hilberti meetodi kasutamiseks pärast konformset teisendust muuta ka seostust, mis omakorda toob kaasa aditiivsete liikmete lisandumise nii Ricci tensorisse $R_{\mu\nu}$ kui ka skalaari R[4]. Seega konformne teisendus toob kaasa geomeetria muutumise ning ÜRT-s tähendab see ka füüsika muutumist. Üldisemate teooriate kontekstis ei ole ühest arusaama konformse teisenduse füüsikalisest sisust.

2.3 Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad (STG)

Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriatele pani aluse Jordan, kes näitas, et Einsteini-Maxwelli teooriat on loomulik esitada 5-mõõtmelises projektiivses ruumis ja üleminek 4-mõõtmelisele kõverale muutkonnale toob sisse viimasel defineeritud skalaarvälja. Saadud tulemuste põhjal postuleeris Jordan kõveral 4-mõõtmelisel muutkonnal mõjufunktsionaali, milles mateeriaväljad on otseselt seotud skalaarväljaga. See aga toob kaasa lokaalse energia-impulsi jäävuse rikkumise (valemitel tuginev seletus on leitav järgnevates peatükkides). Pauli juhtis tähelepanu faktile, et konformse teisendusega saab eeltoodud probleemi matemaatiliselt lahendada[7]. Seetõttu pidasid konformset teisendust, mida ÜRT-s harilikult ei kasutata, oluliseks ka Brans ja Dicke ning tõid selle sisse juba esimeses artiklis, mis tutvustas nende skalaar-tensortüüpi teooriat. Viimase formuleerimisel lähtuti formaalselt Jordani tööst[13].

Brans ja Dicke postuleerisid mõjufunktsionaali $S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\phi R - \frac{\omega}{\phi}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi\right\} + S_m[g_{\mu\nu},\chi]$, milles ϕ on skalaarväli ning ω on dimensioonitu konstantne parameeter, mille väärtus tuleb määrata eksperimendist. Ülejäänud suuruste definitsioonid on leitavad käesoleva töö järgnevatest osadest. Viimati mainitud autorite kaalutlused olid puhtteoreetilised ning seesuguse üldistusega taotleti Machi printsiibi selgemat ja täpsemat rakendamist. Järgnevalt esitame vabas tõlkes Bransi ja Dicke artiklis esitatud Machi printsiibi sõnastuse: ruumi füüsikalised omadused on määratud selles sisalduva mateeriaga ehk tühja ruumi geomeetrilised ja inertsiaalsed omadused on sisutud. Seega igasugune liikumine saab mõttekas olla vaid millegi suhtes[13, 14].

Bransi-Dicke teoorias skalaarvälja ϕ võrrand $\Box\phi = \frac{8\pi}{(2\omega+3)}T$ sõltub energia-impulsitensori ahendist ning selle põhjal väitsid autorid, et skalaarväli ϕ punktis x_0 on määratud integraaliga üle kogu massijaotuse. Saadud tulemust interpreteerisid nad Machi printsiibi arvestamisena.

3 Üldised skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad

3.1 Flanagani mõjufunktsionaal ja selle teisendused

Teooriate, milles gravitatsiooni kirjeldab nii aegruumi meetriline tensor $g_{\mu\nu}$ kui ka aegruumi punktist P sõltuv skalaarväli $\Psi \equiv \Psi(P)$, üldiseid mõjufunktsionaale on uurinud mitmed autorid[1, 2, 15], kes mõjufunktsionaali postuleerimisel on valinud kindla konformse raami. Üldises D-dimensionaalses aegruumis ja suvalises raamis kirjeldatud gravitatsiooniteooriaid on uurinud Fiziev[16], kuid tema tulemused on käesoleval juhul ebavajalikult üldised. Seetõttu võtame aluseks Flanagani poolt postuleeritud üldise mõjufunktsionaali 4-dimensionaalses aegruumis[8]

$$S = \int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2\kappa^2}A(\Psi)R(g) - \frac{1}{2}B(\Psi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi - V(\Psi)\right\} + S_m\left(e^{2\alpha(\Psi)}g, \chi\right), \tag{8}$$

milles S_m kirjeldab mateeriavälju χ. Esialgu jätame selle liikme täpse kuju määratlemata ja piirdume eeldusega, et S_m ei sõltu meetrilise tensori $g_{\mu\nu}$ tuletistest. Siin ja edaspidi eeldame vaikimisi, et skalaarväli Ψ sõltub aegruumi punktist P, kuid valemite kompaktsuse huvides jätame selle ilmutatud kujul kirjutamata. Samuti sõltub meetriline tensor $g_{\mu\nu}$ üldiselt aegruumi punktist ning seetõttu oleks korrektne kasutada mõistet tensorväli, kuid tavaliselt seda ei rõhutata ning seetõttu ka käesolevas töös kasutame mõiste tensorväli asemel mõistet tensor.

Nimetame mõjufunktsionaali (8) Flanagani mõjufunktsionaaliks. Eelmainitu sisaldab nelja skalaarväljast Ψ sõltuvat vaba funktsiooni

$$A(\Psi)\,, B(\Psi)\,, V(\Psi)\,, \alpha(\Psi)\,; \tag{9}$$

meetrilist tensorit $g_{\mu\nu}$, invariantset 4-ruumi elementi $d^4x\sqrt{-g}$, milles $g = \det|g_{\mu\nu}|$ on meetrilise tensori kovariantsete komponentidega assotsieeritud maatriksi determinant, meetrilise tensori põhjal arvutatud Ricci skalaari $R(g)$, mis sõltub ka meetrilise tensori esimest ja teist järku osatuletistest; mateeriavälju, mis on kokku võetud tähises χ ning konstanti κ^2, mis analoogselt üldrelatiivsusteooriaga määratakse uuritava teooria Newtoni piirist[5].

Funktsioonide (9) nimetused ja nende kujust tulenev terminoloogia on järgmised[7]:

kui $A(\Psi)$	$\neq$	*const*, siis liiget $A(\Psi)R(g)$ nimetatakse mitteminimaalse seostuse liikmeks, vastasel korral on tegemist minimaalse seostusega,	(10)
kui $\alpha(\Psi)$	$\equiv$	*const*, siis öeldakse, et mateeria on geomeetriaga minimaalselt seotud[15]	
kui $B(\Psi)$	$\equiv$	*const*, siis öeldakse, et mõjus (8) on skalaarvälja kineetiline liige, mille kordaja on funktsioon B, kanoonilisel kujul (konstantse kordaja täpsusega), üldiselt nimetatakse funktsiooni $B(\Psi)$ seosefunktsiooniks[1],	
$V(\Psi)$		on skalaarvälja potentsiaal ehk omamõju.	

Flanagan tõi välja, et meetrika konformsel teisendamisel ja skalaarvälja parametriseeringu vahetamisel säilib mõjufunktsionaali (8) kuju ääreliikme täpsusega. Variatsioonarvutuse standardeeskirju järgides

[1] Mõnedes töörühmades kasutatakse ka mõistet sidur, et selgemini eristada mainitud funktsiooni ja afiinse seostuse kordajaid $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$.

ääreliige väljavõrranditesse panust ei anna[5]. Flanagan vaatles kahte teisendust:

$$
\begin{gathered}
S=\int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2\kappa^2}A(\Psi)R(g)-\frac{1}{2}B(\Psi)g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi-V(\Psi)\right\}+S_m\left(e^{2\alpha(\Psi)}g_{\mu\nu},\chi\right)\\
\Big\Downarrow\left\{\begin{array}{rcll} g_{\mu\nu} & = & e^{2\bar{\gamma}(\Phi)}\bar{g}_{\mu\nu} & \text{-konformne teisendus ehk raami vahetus}\\ \Psi & = & \bar{f}(\Phi) & \text{-skalaarvälja ümberdefineerimine}\\ & & & \text{ehk parametriseeringu vahetus}\end{array}\right.\\
S=\int_{V_4} d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left\{\frac{1}{2\kappa^2}\bar{A}(\Phi)\bar{R}(\bar{g})-\frac{1}{2}\bar{B}(\Phi)\bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\Phi\bar{\nabla}_\nu\Phi-\bar{V}(\Phi)\right\}+S_m\left(e^{2\bar{\alpha}(\Phi)}\bar{g}_{\mu\nu},\chi\right).
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Sealjuures funktsioonid (9) teisenevad järgmiselt[8]:

$$
Fl.\left\{\begin{array}{rcl}
\bar{A}(\Phi) & = & \exp[2\bar{\gamma}(\Phi)]A\left(\bar{f}(\Phi)\right)\\
\bar{B}(\Phi) & = & \exp[2\bar{\gamma}(\Phi)]\left\{B\left(\bar{f}(\Phi)\right)\left(\bar{f}'\right)^2-\frac{6}{\kappa^2}\left(\bar{\gamma}'\right)^2A\left(\bar{f}(\Phi)\right)-\frac{6}{\kappa^2}\bar{\gamma}'\bar{f}'\frac{dA}{d\Psi}\right\}\\
\bar{V}(\Phi) & = & \exp[4\bar{\gamma}(\Phi)]V\left(\bar{f}(\Phi)\right)\\
\bar{\alpha}(\Phi) & = & \alpha\left(\bar{f}(\Phi)\right)+\bar{\gamma}(\Phi)
\end{array}\right. .
\tag{12}
$$

Paneme tähele, et teisendused sisaldavad kaht vaba funktsiooni $\bar{\gamma}$ ja $\bar{f}$, mille sobiva valikuga saame neljast funktsioonist (9) kaks fikseerida.

Nimetame eeskirjade komplekti (12) Flanagani teisendusteks ning tähistust $Fl.$ kasutame neile viitamiseks. Indekseid tõstame ja langetame vastavas raamis oleva meetrilise tensoriga ning ∇ on sama meetrilise tensori Levi-Civita seostus[4]. Eeltoodud teisenduste kasutamise põhjendamiseks on kaks varianti.

- Teeme lisaeelduse, et need teisendused ei muuda füüsikat.
- Kasutame neid matemaatilise abivahendina väljavõrrandite viimiseks lihtsamasse kujju. Viimases leitud lahendid teisendame tagasi algsesse raami ja parametrisatsiooni, kus kõigil matemaatilistel suurustel on selge füüsikaline tähendus.

Antud töö raames jätame selle küsimuse lahtiseks ning uurime teisenduste matemaatikat.

Võrrandite kompaktsuse tarvis toome sisse tähistused, mida osalt on kasutatud ka valemite komplekti (12) kirja panemisel ning kasutatakse ka edaspidi.

$$
\begin{array}{c||c}
\mathfrak{F}\equiv\mathfrak{F}(\Psi)\,,\mathfrak{F}'\equiv\frac{d\mathfrak{F}(\Psi)}{d\Psi} & \bar{\mathfrak{F}}\equiv\bar{\mathfrak{F}}(\Phi)\,,\bar{\mathfrak{F}}'\equiv\frac{d\bar{\mathfrak{F}}(\Phi)}{d\Phi}\\
\mathfrak{F}\in\{A,B,V,\alpha\} & \bar{\mathfrak{F}}\in\{\bar{A},\bar{B},\bar{V},\bar{\alpha}\}
\end{array}
\tag{13}
$$

ning

$$
\begin{gathered}
\bar{f}\equiv\bar{f}(\Phi)=\Psi(\Phi)\quad,\quad\bar{f}'\equiv\frac{d\bar{f}(\Phi)}{d\Phi}=\frac{d\Psi}{d\Phi}\\
\bar{\gamma}\equiv\bar{\gamma}(\Phi)\quad,\quad\bar{\gamma}'\equiv\frac{d\bar{\gamma}(\Phi)}{d\Phi}
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Flanagani probleemipüstitus arvestab mõjufunktsionaalis (8) sisalduvate funktsioonide (9) teisenemisel ka parametriseeringu vahetust $\Psi\mapsto\Phi$ ning selles mõttes on käsitlus üldisem kui Fizievi oma, kuigi viimane on oma arvutused teostanud D-dimensionaalses aegruumis[16].

3.2 Väljavõrrandid ja nende teisenemine

Flanagani mõjufunktsionaali (8) varieerimisel saame järgmised väljavõrrandid:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \rightarrow \qquad & AG_{\mu\nu} + \left[\frac{\kappa^2}{2}B + A''\right] g_{\mu\nu}\nabla_\rho\Psi\nabla^\rho\Psi - \left[\kappa^2 B + A''\right]\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi + \\
+ \quad & A'\left[g_{\mu\nu}\Box\Psi - \nabla_\mu\nabla_\nu\Psi\right] + \kappa^2 g_{\mu\nu}V = \kappa^2 T_{\mu\nu}\,, && (15)\\
\frac{\delta}{\delta\Psi} \rightarrow \qquad & \frac{1}{2\kappa^2}RA' + \frac{1}{2}B' g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi + B\Box\Psi - V' = -\alpha' T\,, && (16)
\end{aligned}$$

milles $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ on Einsteini tensor[5], $\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ on d'Alembert'i operaator[5] ja $T_{\mu\nu}$ on energia-impulsitensor[2], mis on defineeritud Hilberti eeskirja järgi

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}S_m \qquad (17)$$

ning T on eelmise ahend $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. Standardprotseduuridest on teada[7], et võrrandi (15) ahendamisel saame avaldada Ricci skalaari R ülejäänud suuruste kaudu, mis võimaldab saadud tulemuse asendada võrrandisse (16), kuid esmalt teeme mõned füüsikalistest kaalutlustest lähtuvad eeldused.

Võrrandi (15) ahendist

$$AR = (\kappa^2 B + 3A'')g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi + 3A'\Box\Psi + 4\kappa^2 V - \kappa^2 T \qquad (18)$$

näeme, et olukorraga $A = 0$ kaasneb singulaarsus $R \rightarrow \infty$, mis on välditav ainult siis, kui võrrandi parem pool on samuti võrdne nulliga. Selline olukord on aga füüsikaliselt vähehuvitav või nõuab funktsioonide täppishäälestust, mida tahame samuti vältida. Lisaks näeme Flanagani mõjufunktsionaali (8) ja Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali (2) võrdlusest, et funktsioon A^{-1} on mõneti analoogne gravitatsioonikonstandiga ÜRT-s ja seetõttu defineeritakse suurus

$$G_{ef} \propto \frac{1}{A}\,, \qquad (19)$$

mida nimetatakse efektiivseks gravitatsioonikonstandiks[2, 7]2. Eelneva definitsiooni põhjal saame füüsikalistel kaalutlustel funktsiooni A kuju täpsustada veel kahe nõudega

- nõuame, et gravitatsioon oleks tõmbav jõud[2, 8, 16, 1] $G_{ef} > 0$
- nõuame, et efektiivne gravitatsioonikonstant G_{ef} ei läheneks piirväärtusena nullile[12]

Kokkuvõtlikult oleme füüsikalistest kaalutlustest lähtuvalt piiritlenud funktsiooni A järgnevalt

$$0 < A < \infty\,. \qquad (20)$$

2Cavendishi eksperimendist mõõdetav "gravitatsioonikonstant" avaldub keerulisema valemiga, kuid selle tulemuse saamiseks on vaja teostada häiritusarvutus, mis väljub käesoleva töö raamest ning seetõttu piirdume siinkohal lihtsustatud tulemusega. Konkreetses raamis ($\alpha = 0$) on arvutatud eelmainitud eksperimendist mõõdetav tulemus ka üldise mõjufunktsionaali jaoks[2], aga Flanagani mõjufunktsionaaliga (8) kirjeldatava teooria jaoks pole sellist arvutust käesoleva töö autorile teadaolevalt läbi tehtud.

Selline eeldus võimaldab võrrandi (15) ahendamisel saadud tulemust kasutades skalaarvälja järgi varieerimisel saadud võrrandi (16) viia järgmisesse kujju

$$\left[\frac{3}{2\kappa^2}\frac{(A')^2}{A}+B\right]\Box\Psi \quad + \quad \frac{1}{2}\left[\frac{B}{A}A'+\frac{3}{\kappa^2}\frac{A'A''}{A}+B'\right]g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi+$$
$$+ \quad \left[\frac{2A'}{A}V-V'\right]=\left[\frac{1}{2}\frac{A'}{A}-\alpha'\right]T\,. \tag{21}$$

Toome sisse tähistuse

$$C_\Box \equiv \frac{\kappa^2}{A}\left[\frac{3}{2\kappa^2}\frac{(A')^2}{A}+B\right], \tag{22}$$

mida nimetame d'Alembert'i operaatori kordajaks. Sealjuures Flanagani teisendustel (12) eelmainitud kordaja (22) teiseneb järgmiselt

$$\bar{C}_\Box = \left(\bar{f}'\right)^2 C_\Box\,, \tag{23}$$

seega puhtal konformsel teisendusel on tegemist invariantse suurusega.

Tihti on raamide ja parametriseeringute vahel liikumise eesmärgiks teadaolevad funktsioonid A ja B teisendada mõnesuguse kindla kujuga funktsioonideks $\bar{A}$ ja $\bar{B}$. Sel juhul on skalaarvälja võimalik ümberdefineerimine määratud seosega (23). Tähistust (22) kasutades saab võrrandi (21) kirjutada järgmisel kujul.

$$\frac{A}{\kappa^2}C_\Box\Box\Psi+\frac{1}{2\kappa^2 A}\left(A^2C_\Box\right)'g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi+\left[\frac{2A'}{A}V-V'\right]=\left[\frac{1}{2}\frac{A'}{A}-\alpha'\right]T\,. \tag{24}$$

Nimetame saadud võrrandit skalaarvälja võrrandiks (SV). Sealjuures järeldub võrrandist (24), et on võimalik olukord, milles d'Alemberti operaatori $\Box\Psi$ ees olev kordaja on nullist erinev ja esimest järku tuletiste skalaarkorrutise $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi$ ees olev kordaja on identselt null, kuid vastupidine olukord pole võimalik. Samuti paneme tähele, et mitteminimaalse seostuse olemasolul ($A' \neq 0$) on skalaarvälja võrrand sisukas ka sel juhul, kui mõjufunktsionaalis skalaarvälja kineetilist liiget pole, s.t. $B=0$. Selline on olukord näiteks O'Hanloni mõju korral[17].

Parema ülevaatlikkuse huvides esitame siinkohal uuesti ka võrrandi (15)

$$AG_{\mu\nu}+\left[\frac{\kappa^2}{2}B+A''\right]g_{\mu\nu}\nabla_\rho\Psi\nabla^\rho\Psi-\left[\kappa^2B+A''\right]\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi+$$
$$+\quad A'\left[g_{\mu\nu}\Box\Psi-\nabla_\mu\nabla_\nu\Psi\right]+\kappa^2g_{\mu\nu}V=\kappa^2T_{\mu\nu}\,, \tag{25}$$

mida nimetame Einsteini võrrandiks (EV). Loomulikult on tegemist võrrandite komplektiga, kuid siiski kasutame viitamisel ainsust.

Võrrandist (25) kovariantse divergentsi arvutamisel saame Bianchi identsust[5] kasutades tulemuseks

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=\alpha' T\nabla^\nu\Psi\,. \tag{26}$$

Selle tulemuse põhjal on raamis, milles skalaarväli Ψ sisaldub mateeria mõjufunktsionaalis S_m (s.t. $\alpha \neq$ *const*), rikutud lokaalne energia-impulsi jäävus. Teisalt aga on võimalik jäävus konformse teisendusega taastada, valides $\bar{\gamma} = -\alpha$. Viimasele asjaolule juhtis esimesena tähelepanu W. Pauli[7] ning see on ka põhjuseks, miks konformset teisendust skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriates kasutama hakati. Saab näidata, et kui lokaalne energia-impulsi jäävus pole rikutud, siis vabalangemises olevad kehad liiguvad mööda geodeetilisi jooni[7]. Konformsel teisendusel ja skalaarvälja ümberdefineerimisel korrutuvad võrrandi (26) mõlemad pooled üldjuhul teguriga $e^{6\bar{\gamma}}$. Seoseid (12) kasutades saab näidata, et konformsel teisendusel ja parametriseeringu vahetamisel laguneb skalaarvälja võrrandi (24) teisenemise eeskiri kolme eeskirja (otse)summaks

$$\left\{\begin{array}{r} \dfrac{\bar{A}}{\kappa^2}\bar{C}_\square \bar{\square}\Phi \\ \\ \dfrac{1}{2\kappa^2\bar{A}}\left(\bar{A}^2\bar{C}_\square\right)' \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\Phi\bar{\nabla}_\nu\Phi \end{array}\right. \begin{array}{c} \rightarrow \\ \searrow \\ \rightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{l} e^{4\bar{\gamma}}\bar{f}'\cdot\dfrac{A}{\kappa^2}C_\square\square\Psi \\ \\ e^{4\bar{\gamma}}\bar{f}'\cdot\dfrac{1}{2\kappa^2 A}\left(A^2C_\square\right)' g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi \end{array}\right. \tag{27}$$

$$\frac{2\bar{A}'}{\bar{A}}\bar{V} - \bar{V}' \quad \rightarrow \quad e^{4\bar{\gamma}}\bar{f}'\cdot\left[\frac{2A'}{A}V - V'\right] \tag{28}$$

$$\left[\frac{1}{2}\frac{\bar{A}'}{\bar{A}} - \bar{\alpha}'\right]\bar{T} \quad \rightarrow \quad e^{4\bar{\gamma}}\bar{f}'\cdot\left[\frac{1}{2}\frac{A'}{A} - \alpha'\right]T \tag{29}$$

Analoogselt teiseneb ka Einsteini võrrand (25) ning eelnevat kirjeldab järgnev diagramm

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] S[g_{\mu\nu},\Psi,\chi] \arrow[r, "\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}},\,\frac{\delta}{\delta\Psi}"] \arrow[d, "Fl.(12)"] & \left\{\begin{array}{ll} EV & \mid\cdot e^{2\bar{\gamma}(\Phi)} \\ SV & \underbrace{\mid\cdot e^{4\bar{\gamma}(\Phi)}\cdot\bar{f}'} \end{array}\right. \\ \bar{S}[\bar{g}_{\mu\nu},\Phi,\chi] \arrow[r, "\frac{\delta}{\delta\bar{g}^{\mu\nu}},\,\frac{\delta}{\delta\Phi}"'] & \left\{\begin{array}{l} E\bar{V} \\ S\bar{V} \end{array}\right. \Bigg| \nearrow \arrow[u, "Fl.(12)"'] \end{tikzcd} \tag{30}$$

Kui funktsioon $\bar{f}' = \frac{d\Psi}{d\Phi}$ ja konformne tegur $e^{2\bar{\gamma}}$ on lõplikud ja nullist erinevad, siis diagramm (30) on kommutatiivne ning raamide ja parametriseeringute vahetamisel võrrandid (24), (25) teisenevad ilma probleemideta. Konformse teguri regulaarsust eeldame, et aegruumi dimensioon ja topoloogia säiliksid, kuid $\bar{f}' \neq 0$ on täiendav kitsendus, mis ei pruugi kehtida.

Võrrandite (24) ja (25) teisendamine kaetud suurustega raamist katamata suurustega raami toimub Flanagani teisendusi (12) kasutades ning seejuures ilmuva funktsionaalne kordaja seletamiseks vaatame varieerimist üldisemalt.

$$\begin{aligned}
\int_{V_4} d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left\{\bar{SV}\right\}\delta\Phi &= \int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}e^{-4\bar{\gamma}(\Phi)}\left\{e^{4\bar{\gamma}(\Phi)}\bar{f}'\cdot SV\right\}\frac{d\Phi}{d\Psi}\delta\Psi = \\
&= \int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\left\{SV\right\}\delta\Psi\,, \\
\int_{V_4} d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left\{\bar{EV}_{\mu\nu}\right\}\delta\bar{g}^{\mu\nu} &= \int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}e^{-4\bar{\gamma}(\Phi)}\left\{e^{2\bar{\gamma}(\Phi)}EV_{\mu\nu}\right\}\frac{\delta\bar{g}^{\mu\nu}}{\delta g^{\rho\sigma}}\delta g^{\rho\sigma} \\
&= \int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\left\{EV_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu}\,.
\end{aligned}$$

Flanagani mõjufunktsionaalis (8) olevate funktsioonide (9) sobiva valikuga saab kirjeldada mitmeid teooriaid: ÜRT, kvintessentsi- ja skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriaid[7, 18]. Samas aga uuritakse neid teooriaid enamasti[1, 2, 7, 18] mingis konkreetses raamis ning seetõttu klassifikatsioon põhineb mingite liikmete olemasolul või puudumisel, mis aga konformsel teisendusel ja parametriseeringu vahetamisel võib tekitada segadust, milles veendume lihtsa näite põhjal.

Olgu meil ÜRT kosmoloogilise konstandiga Λ, mille kirjeldamiseks kasutame Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaali (2). Võrdlusest Flanagani mõjufunktsionaaliga näeme, et

$$A = 1\,, B = 0\,, V = \Lambda\,, \alpha = 0\,.$$

Flanagani teisenduste (12) põhjal on selge, et konformse teisenduse ja parametriseeringu vahetamisega on võimalik Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaal viia kujju, milles on mitteminimaalne seostus, mittetriviaalne seosefunktsioon, mateeria on geomeetriaga mitteminimaalselt seotud. Samuti paneme tähele, et kosmoloogiline konstant teiseneb nagu skalaarvälja potentsiaal V (vt. ka terminoloogiat (10)).

$$(12) \rightarrow \bar{A} = e^{2\bar{\gamma}}\,, \bar{B} = -\frac{6}{\kappa^2}\left(\bar{\gamma}'\right)^2 e^{2\bar{\gamma}}\,, \bar{V} = e^{4\bar{\gamma}}\Lambda\,, \bar{\alpha} = \bar{\gamma}\,,$$

Sealjuures $\bar{\gamma}$ on suvaline mittesingulaarne funktsioon. Ometi on selge, et tegemist pole STG-ga selle üldkasutatavas mõttes.

3.3 Üldiste skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriate klassifikatsioon

Asjaolu, et skalaarvälja võrrandi (24) teisenemine konformsel teisendusel ja parametriseeringu vahetamisel (11) on esitatav kolme eeskirja (27), (28) ja (29) (otse)summana võimaldab anda matemaatiliselt hästi defineeritud klassifikatsiooni.

Paneme tähele, et kui

$$\bar{C}_\Box \equiv 0\,, \qquad \text{siis ka } C_\Box \equiv 0 \qquad \text{ning eeskirjaga (27) kirjeldatud liige on igas raamis ja igas parametrisatioonis identselt null} \tag{31}$$

$$\frac{2\bar{A}'}{\bar{A}}\bar{V} - \bar{V}' \equiv 0\,, \quad \text{siis ka } \frac{2A'}{A}V - V' \equiv 0 \quad \text{ning eeskirjaga (28) kirjeldatud liige on igas raamis ja igas parametrisatioonis identselt null} \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\bar{A}'}{\bar{A}} - \bar{\alpha}' \equiv 0\,, \quad \text{siis ka } \frac{1}{2}\frac{A'}{A} - \alpha' \equiv 0 \quad \text{ning eeskirjaga (29) kirjeldatud liige on igas raamis ja igas parametrisatioonis identselt null} \tag{33}$$

Eeltoodud tulemusi kasutamegi klassifikatsiooniks, sealjuures tingimused (31), (32) ja (33) loetakse täidetuks, kui nad kehtivad skalaarvälja suvalisel väärtusel:

- kui kõik kolm tingimust (31), (32) ja (33) on täidetud, siis skalaarvälja võrrand (24) on triviaalne $0 = 0$, seega igasugune skalaarväli rahuldab seda võrrandit.

  Sel juhul on tegemist üldrelatiivsusteooriaga ning võimalik skalaarväli selle teooria geomeetria osas on konformse teisenduse (11) relikt (vt. ka eelmise alapunkti lõpus toodud näidet). Siinkohal jätame täpsustamata, milline võiks olla skalaarvälja füüsikaline tähendus konformselt teisendatud üldrelatiivsusteooria Einsteini võrrandis (25).

- kui tingimus (31) pole täidetud ja tingimus (33) on täidetud, siis on tegemist minimaalselt seotud skalaarväljaga ning sellist teooriat nimetame kvintessentsiks[7, 18] (potentsiaaliga või ilma).

- kui tingimused (31) ja (33) pole täidetud, siis nimetame teooriat skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriaks[7] (potentsiaaliga või ilma).

Eelnev klassifikatsioon on ajendatud Fujii ja Maeda tööst, kes kasutasid mõistet skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria ainult selliste teooriate jaoks, milles on mitteminimaalse seostuse liige või selle mõni laiendus, mille all nad pidasid silmas, et skalaarvälja võrrand (24) sõltub mateeriast[7] ning tingimus (33) ongi sellise väite matemaatiliselt range esitus, sealjuures paneme tähele, et puhtal konformsel teisendusel on tegemist invariantse suurusega. Parametriseeringu vahetamisel võib küll ette tulla, et funktsioon $\bar{f}'$ (14) läheb mõnes punktis singulaarseks, aga eeltoodud klassifikatsioonile see mõju ei avalda, sest nõuded peavad olema täidetud skalaarvälja suvalisel väärtusel.

Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooria ja kvintessentsi kui minimaalselt seotud skalaarväljaga gravitatsiooniteooria eristamine eeltoodud klassifikatsiooni alusel on seotud eeldusega, et mateeriaväljade χ mõjufunktsionaal S_m ei sõltu meetrilise tensori tuletistest, mis ei pruugi kehtida üldisel juhul[5], kuigi kosmoloogias enamasti kasutatava ideaalse vedeliku korral on see nii[1, 10, 12, 15, 18]. Kuidagi aga tuleks siiski eristada neid kaht teooriat, sest minimaalselt seotud skalaarväli ehk kvintessentsi teooria on kahtlemata hea näiteks inflatsiooni fenomenoloogiliseks kirjeldamiseks[18], kuid STG käsitlus lähtus vähemalt Bransi ja Dicke artiklites[13, 14] eelkõige teoreetilistest kaalutlustest ning eesmärk oli, et teooria arvestaks ka Machi printsiipi, mis väljendub asjaolus, et skalaarvälja võrrand (24) sõltub mateeriast, kui tingimus (33) pole täidetud.

Praktilisel arvutamisel on enamasti kasulik valida mõni konkreetne raam ning viimaste lõpmatust hulgast eristuvad selgelt välja mõned, millest kahe definitsiooni me järgnevalt esitame[8]:

- kui $\alpha = const$, siis nimetame raami Jordani raamiks (JR) (vaata ka terminoloogiat (10)), selles raamis liiguvad mateeriaväljadest χ tehtud objektid vabalangemisel mööda meetrilise tensoriga kooskõlas oleva seostuse geodeetilisi jooni (vt. ka valemit (26) ja sellele järgnevat). Seega kehtib nõrk ekvivalentsusprintsiip.

- kui $A = const \neq 0$, siis nimetame raami Einsteini raamiks (ER). Viimases viiakse enamasti skalaarvälja kineetiline liige kanoonilisse kujju ($B = const \geq 0$), sest sel juhul on osakestefüüsika loogika põhjal selgelt eristatud spinniga 2 ja spinniga 0 osakesed[1].

Paneme tähele, et kaks eelnevalt defineeritud raami ei ole teineteist välistavad, kvintessentsi korral järeldub tingimusest (33), et need kaks raami kattuvad ning sama kehtib ka ÜRT-s. Küll aga on selge, et STG puhul on need kaks raami erinevad.

Füüsikalistel kaalutlustel seatud piirang funktsiooni A kujule (20) tähendab matemaatiliselt, et eeldatakse Einsteini raami olemasolu. Nõudest, et viimases oleks skalaarvälja kineetiline liige kanoonilises kujus, järeldub $C_\Box^{(E)} = const > 0$. Seega valemi (23) põhjal peab igas parametriseeringus kehtima võrratus $C_\Box \geq 0$, sest vastasel korral tuleb skalaarvälja ümberdefineerimiseks võtta ruutjuur negatiivsest suurusest. Kui eelmainitud võrratus on rahuldatud, siis öeldakse, et skalaarvälja energia on positiivne[1]. Käesolevas töös kasutame vaikimisi seda eeldust.

4 Friedmanni kosmoloogia üldises formalismis

4.1 Väljavõrrandid

Selleks, et otsustada, kas mingi teooria on sobiv füüsikaliste nähtuste kirjeldamiseks, tuleb teostada eksperimente ja vaatlusi ning võrrelda saadud tulemusi teooria ennustustega. Gravitatsiooniteooriate kontrollimisel on suur osa kosmoloogilistel vaatlustel ning seetõttu on loomulik, et mitmed autorid on üldiste mõjufunktsionaalide uurimisel saadud tulemusi rakendanud muuhulgas ka kosmoloogias[1, 15]. Järgnevalt uurime Friedmanni tüüpi kosmoloogiat üldises konformses raamis ning suvalises parametriseeringus.

Kosmoloogilise printsiibi põhjal on kolmruum maksimaalselt sümmeetriline ehk homogeenne ja isotroopne[5] ning selle printsiibi rakendamiseks kasutatakse Friedmanni-Lemaître-Robertsoni-Walkeri (FLRW) meetrilist tensorit, mille korral joonelemendi ruut $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ avaldub sfäärilistes koordinaatides järgmiselt[5]:

$$ds^2 = -dt^2 + (a(t))^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\phi^2 \right) \right) \equiv -dt^2 + (a(t))^2 dl^2 \,. \tag{34}$$

Sealjuures t on kosmoloogiline aeg; $a(t)$ on mastaabikordaja, mis sõltub ainult kosmoloogilisest ajast t ning see suurus seab kolmruumi koordinaatkaugusele dl^2 vastavusse füüsikalise kauguse $(a(t))^2 dl^2$; r on radiaalkoordinaat ning ϑ ja ϕ on polaarnurgad. Konstandi $k = -1, 0, +1$ väärtus näitab, milline maksimaalselt sümmeetrilise kolmruumi kolmest võimalikust juhust on realiseerunud (vastavalt: hüperboolne geomeetria, kõverus on negatiivne; tasane ehk eukleidiline geomeetria, kõverus puudub; sfääriline geomeetria, kõverus on positiivne). Kosmoloogilise printsiibi rakendamiseks STG-s peame veel nõudma, et skalaarväli Ψ sõltuks ainult kosmoloogilisest ajast $\Psi \equiv \Psi(t)$. Lisaks eeldame, et mateeria on kirjeldatav ideaalse vedeliku energia-impulsitensoriga

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}\,, \tag{35}$$

kus ρ on mateeria tihedus, p on rõhk ning u_μ on vedeliku 4-kiirus, mis rahuldab seost $u_\mu u^\mu = -1$. Sealjuures homogeensuse ja isotroopsuse eeldusel sõltuvad tihedus ja rõhk ainult kosmoloogilisest ajast $\rho \equiv \rho(t)$ ja $p \equiv p(t)$ ning 4-kiirusel u_μ on nullist erinev ainult ajaline komponent. Nõuame, et kehtiks barotroopne olekuvõrrand $p = \mathrm{w}\rho$, kus w on konstantne barotroopne indeks, mille väärtus kirjeldab erinevaid mateeria tüüpe:

$$\begin{cases} \mathrm{w} & = & \frac{1}{3} & - & \text{kiirgus} \\ \mathrm{w} & = & 0 & - & \text{tolm} \\ \mathrm{w} & = & -1 & - & \text{kosmoloogiline konstant} \end{cases} \,. \tag{36}$$

Järgnevates arvutustes kasutame asjaolu, et pärast konformset teisendust $g_{\mu\nu} = e^{2\bar{\gamma}}\bar{g}_{\mu\nu}$ võime ümber defineerida kosmoloogilise aja koordinaadi $dt \mapsto d\bar{t} : \sqrt{e^{2\bar{\gamma}}}d\bar{t} \equiv dt$ ning mastaabikordaja $a(t) \mapsto \bar{a}(\bar{t}) : \sqrt{e^{2\bar{\gamma}}}\bar{a}(\bar{t}) = a(t)$, mille tulemusel uues konformses raamis meetriline tensor on ikka FLRW kujus. Sealjuures nõuame, et konformse teisenduse tegur $e^{2\bar{\gamma}}$ oleks alati lõplik ja nullist erinev. Seega võetakse vaatluse alla FLRW meetriliste tensorite ekvivalentsiklass. Igaüks iseloomustatud kosmoloogilise aja ja mastaabikordajaga.

Eeltoodud kaalutlustel võime võrrandite (24), (25) ja (26) põhjal välja kirjutada STG Friedmanni kosmoloogia võrrandid üldises raamis ja suvalises parametriseeringus. Sealjuures analoogselt Friedmanni kosmoloogiaga üldrelatiivsusteoorias (4) - (6) jääb valemiga (25) esitatud üldjuhul kuuest sõltumatust võrrandist meetrilise tensori sümmeetriate tõttu järele ainult kaks. Seega kirjeldab teooriat kolm sõltumatut võrrandit ning eelmiste kaudu avaldatav pidevuse võrrand

$$H^2 = -\frac{A'}{A}H\dot{\Psi} + \frac{\kappa^2 B}{6A}\left(\dot{\Psi}\right)^2 + \frac{\kappa^2}{3A}V + \frac{\kappa^2}{3A}\rho - K\,, \tag{37}$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -2\frac{A'}{A}H\dot{\Psi} - \left[\frac{\kappa^2 B}{2A} + \frac{A''}{A}\right]\left(\dot{\Psi}\right)^2 + \frac{\kappa^2}{A}V - \frac{A'}{A}\ddot{\Psi} - \frac{\kappa^2}{A}\mathrm{w}\rho - K\,, \tag{38}$$

$$\begin{aligned} C_\square\ddot{\Psi} = {} & -3C_\square H\dot{\Psi} - \frac{1}{2A^2}\left(A^2 C_\square\right)'\left(\dot{\Psi}\right)^2 + \frac{\kappa^2}{A}\left[\frac{2A'}{A}V - V'\right] + \\ & + \frac{\kappa^2}{A}\left[\frac{1}{2}\frac{A'}{A} - \alpha'\right](1-3\mathrm{w})\rho\,, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\dot{\rho} = -3H(1+\mathrm{w})\rho + \alpha'(1-3\mathrm{w})\rho\dot{\Psi}\,. \tag{40}$$

Sealjuures oleme kasutanud tähistusi

$$\dot{()} = \frac{d}{dt}()\,, H \equiv \frac{\dot{a}}{a}\,, K \equiv \frac{k}{a^2}\,, \tag{41}$$

kus ajaline tuletis $\frac{d}{dt}$ ja mastaabikordaja $a(t)$ on erinevates konformsetes raamides erinevad (vt. ka eelnenud kommentaare meetrilise tensori ekvivalentsiklassi kasutamisest). H on tuntud ka Hubble'i parameetrina.

4.2 Dünaamiline süsteem

Päikesesüsteemisisesed vaatlused on heas kooskõlas ÜRT-ga ning seetõttu peavad igasuguse üldisema teooria ennustused teatud tingimustel ühtima ÜRT omadega[11]. Võrrandite (24) ja (25) põhjal võiks arvata, et kui skalaarväli jääb mingil põhjusel konstantsele väärtusele püsima, siis eelmainitud võrranditega kirjeldatava teooria ja ÜRT ennustused ühtivad. Skalaarvälja potentsiaal jääb sel juhul mõjuma kosmoloogilise konstandina. Järgnevalt uurime skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriaga kirjeldatud kosmoloogiat kui dünaamilist süsteemi ning viimase püsipunkte[19]. Eesmärk on leida võimalik atraktormehhanism, mille tulemusel STG ennustused hilises ajas oleksid lähedased ÜRT omadega.

Faasiruum on üldjuhul viiemõõtmeline ning koordinaatideks on $(H, a, \rho, \Psi, \dot{\Psi})$. Valem (37) seob omavahel kõiki faasiruumi koordinaate ning määrab hüperpinna faasiruumis, millel peavad asuma füüsikalised trajektoorid. Seetõttu nimetatakse võrrandit (37) ka Friedmanni või Hamiltoni seoseks[18]. Damour ja Nordtvedt, kes esimestena matemaatiliselt käsitlesid STG-d kui dünaamilist süsteemi, tõid välja, et teatud koordinaatteisenduste ja eelduste kasutamisel on võimalik trajektoorid projitseerida tasandile[9, 20]. Järgnevalt esitame nende poolt pakutud koordinaatteisenduse üldisemal kujul.

Damouri ja Nordtvedti p-aeg suvalises raamis esitub järgmise valemiga

$$dp \equiv \left(H + \frac{1}{2}\frac{A'}{A}\dot{\Psi}\right) dt = h_c dt \tag{42}$$

ning see on invariantne nii konformsel teisendusel kui ka parametriseeringu vahetamisel. Selle näitamiseks vaatame kaht raami, mis on seotud konformse teisendusega ja skalaarvälja ümberdefineerimisega

$$\begin{aligned}
dp &= \left(H + \frac{1}{2}\frac{A'}{A}\dot{\Psi}\right) dt = \left(\frac{1}{a(t)}\frac{da(t)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{A'}{A}\frac{d\Psi}{dt}\right) dt = \\
&= \left(\frac{1}{e^{\bar{\gamma}}\bar{a}(\bar{t})}\frac{d}{e^{\bar{\gamma}}d\bar{t}}\left(e^{\bar{\gamma}}\bar{a}(\bar{t})\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{f}'\right)^{-1}\frac{\bar{A}'e^{-2\bar{\gamma}} - 2\bar{\gamma}'e^{-2\bar{\gamma}}\bar{A}}{e^{-2\bar{\gamma}}\bar{A}}\bar{f}'\frac{d\Phi}{e^{\bar{\gamma}}d\bar{t}}\right) e^{\bar{\gamma}}d\bar{t} = \\
&= \left(\frac{1}{\bar{a}(\bar{t})}\frac{d}{d\bar{t}}\left(\bar{a}(\bar{t})\right) + \bar{\gamma}'\frac{d\Phi}{d\bar{t}} + \frac{1}{2}\frac{\bar{A}'}{\bar{A}}\frac{d\Phi}{d\bar{t}} - \bar{\gamma}'\frac{d\Phi}{d\bar{t}}\right) d\bar{t} = \left(\bar{H} + \frac{1}{2}\frac{\bar{A}'}{\bar{A}}\dot{\Phi}\right) d\bar{t} = d\bar{p}.
\end{aligned}$$

Segaduse vältimiseks olgu öeldud, et eelnev pole seotud rõhuga, kuid originaaltähistuse säilitamiseks kasutame sama tähte. Barotroopse olekuvõrrandi eelduse tõttu oleme rõhu asendanud barotroopse indeksi ja tiheduse korrutisega ning seetõttu edaspidi p all mõeldakse valemiga (42) defineeritud suurust. Tuletised skalaarväljast Ψ p- ja t-aja järgi on seotud valemiga (42)

$$\frac{d\Psi}{dp} = \left(H + \frac{1}{2}\frac{A'}{A}\dot{\Psi}\right)^{-1}\dot{\Psi}. \tag{43}$$

Seega tingimusest $\frac{d\Psi}{dp} = 0$ järeldub $\dot{\Psi} = 0$ või $H \to \infty$. Viimasega kaasneb kõveruse invariandi singulaarsus[6] $R = 6(\dot{H} + 2H + K) \to \infty$, mistõttu selle variandi jätame praegu kõrvale.

Võrrandist (37) arvutame niinimetatud Friedmanni seose p-ajas

$$h_c^2 \equiv \left(H + \frac{1}{2}\frac{A'}{A}\dot{\Psi}\right)^2 = \frac{\kappa^2 V + \kappa^2 \rho - 3AK}{3A\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^2 C_\square\right)}. \tag{44}$$

Konformsel teisendusel ja parametriseeringu vahetamisel on invariantne suurus $\frac{h_c^2}{A}$. Saadud tulemus on kooskõlas ning järgmised tulemused üldistavad mõnevõrra Järve *et. al.* varasemat tööd, milles arvutamisel on kasutatud Jordani raami[10].

Võrduse (44) vasak pool on mittenegatiivne kui reaalarvuliste suuruste ruut. Seega, kui parema poole lugeja pole null, siis nimetaja peab olema sama märgiga. Jätame kõrvale võimaluse, et lugeja ja nimetaja vahetavad samaaegselt märki, sest see nõuab funktsioonide täppishäälestust, mida tahame käesolevas käsitluses vältida. Hiljem näeme, et püsipunkti üheks tingimuseks p-ajas on $\frac{d\Psi}{dp} = 0$. Seega $\lim_{\frac{d\Psi}{dp}\to 0} \frac{1}{6}\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^2 C_\square \to 0$ ning püsipunkti lähedal võrrandi (44) nimetaja on positiivne[3] (vt. ka (20)) ning järelikult nii nimetaja kui ka lugeja on alati mittenegatiivsed. Siit saame eeldusel $C_\square > 0$ piirangu tuletisele skalaarväljast p-aja järgi

$$\left|\frac{d\Psi}{dp}\right| < \sqrt{6C_\square^{-1}}. \tag{45}$$

Arvutades ajalised tuletised võrrandites (37), (38), (39) p-aja järgi, saame kombineerida üldvõrrandi

$$\begin{aligned} C_\square \frac{d^2\Psi}{dp^2} &= -\frac{1}{2}C_\square'\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^2 - h_c^{-2}\frac{\kappa^2\rho}{A}\left\{(1-\mathrm{w})\frac{1}{2}C_\square\frac{d\Psi}{dp} - (1-3\mathrm{w})\left(\frac{1}{2}\frac{A'}{A} - \alpha'\right)\right\} + \\ &+ 2h_c^{-2}KC_\square\frac{d\Psi}{dp} + h_c^{-2}\frac{\kappa^2 V}{A}\left\{\frac{2A'}{A} - \frac{V'}{V} - C_\square\frac{d\Psi}{dp}\right\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Saab näidata, et võrrandi (46) teisenemine valemite (12) põhjal toob kaasa kordaja $\bar{f}'$ selle võrrandi mõlemale poolele.

Võrrandite (44) ja (46) võrdlemisel on selgesti näha, et kui kolmikust (ρ, V, K) ainult üks on nullist erinev, siis (46) on võimalik viia kujju, mis ei sisalda muutujaid (H, ρ, K).

i) Eeldame, et $K = 0$ ja $\rho = 0$. Avaldame üldvõrrandi potentsiaaliga skalaarvälja jaoks, sealjuures on oluline, et potentsiaal jääb võrranditesse sisse, erinevalt analoogsetest võrranditest ρ või K jaoks. Põhjus on (46) viimases liikmes, mis sisaldab potentsiaali tuletist skalaarvälja järgi $V' \equiv \frac{dV}{d\Psi}$ ning h_c^2 asendamisel võrrandi (44) alusel toob kaasa liikme $\frac{dV}{d\Psi}\frac{1}{V}$. Seetõttu eeldame, et $V \neq 0$, mis koos valemile (45) eelnenud kaalutlustega tähendab, et potentsiaal peab olema rangelt positiivne $V > 0$.

Üldvõrrand potentsiaaliga skalaarvälja jaoks

$$\frac{d^2\Psi}{dp^2} = \frac{1}{2}C_\square\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^3 - \frac{1}{2}\left[C_\square^{-1}C_\square' + \left(2\frac{A'}{A} - \frac{V'}{V}\right)\right]\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^2 - 3\frac{d\Psi}{dp} + 3C_\square^{-1}\left(\frac{2A'}{A} - \frac{V'}{V}\right). \tag{47}$$

Flanagani teisenduste (12) kasutamisel korrutub eelmine võrrand teguriga $\left(\bar{f}'\right)^{-1}$. Seega puhtal konformsel teisendusel on tegemist invariantse võrrandiga. Dünaamilise süsteemi moodustab (47) koos seosevõrrandiga (44) H arvutamiseks.

[3]Piirväärtus ei pruugi kehtida, kui $C_\square \to \infty$. Põhjaliku analüüsi Jordani raamis on teostanud Järv *et. al.*[11]. Selles peatükis me seda juhtu ei vaata.

Käesoleval juhul kasutatavate eelduse tõttu jääb üldisest 5-mõõtmelisest faasiruumist järele 3-mõõtmeline ning füüsikalised trajektoorid asuvad 2-mõõtmelisel hüperpinnal. Koordinaatideks on $(\Psi\,,\frac{d\Psi}{dp})$. Praktikas valemit (47) ei kasutata, sest on olemas ka teine võimalus: asendame dünaamilise süsteemi uurimiseks H kui ruutvõrrandi (37) lahend valemisse (39). Seega on ainult vajalik, et ruutvõrrandi diskriminant poleks negatiivne[11]. Sel juhul on faasiruumi koordinaatideks $(\Psi,\dot{\Psi})$ ja H arvutatakse seosevõrrandist (37).

ii) Eeldame, et $K=0$ ja $V=0$. Faasiruum on 4-mõõtmeline, koordinaatidega $(H\,,\rho\,,\Psi\,,\frac{d\Psi}{dp})$ ja faasitrajektoorid asuvad Friedmanni seose (44) 3-mõõtmelisel pinnal. Damour ja Nordtvedt kasutasid p-aega esmalt just sellises situatsioonis[9] ning põhjus on arusaadav: 3-mõõtmeline füüsikaline faasiruum projitseeritakse 2-mõõtmelisele tasandile $(\Psi\,,\frac{d\Psi}{dp})$.

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Psi}{dp^2} &= \frac{1}{4}(1-\mathrm{w})C_\Box\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^3-\frac{1}{2}\left(C_\Box^{-1}C_\Box'+(1-3\mathrm{w})\left(\frac{1}{2}\frac{A'}{A}-\alpha'\right)\right)\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^2-\frac{3}{2}(1-\mathrm{w})\frac{d\Psi}{dp}+\\ &+3C_\Box^{-1}(1-3\mathrm{w})\left(\frac{1}{2}\frac{A'}{A}-\alpha'\right). \qquad (48)\end{aligned}$$

Flanagani teisenduste (12) kasutamisel lisandub ka sellele võrrandile kordaja $\left(\bar{f}'\right)^{-1}$. Seega on puhtal konformsel teisendusel tegemist invariantse võrrandiga.

Toodud eelduste kasutamine lähendusarvutustes on sisukas järgmiste kaalutluste tõttu. Kolmruumi tasasus $K=0$ on vaatlustest tulenev järeldus. Üldiselt on teada, et eri komponentide tihedus mastaabikordaja a kasvamisel kahaneb erinevalt

$$\begin{cases}\rho_{kiirgus} & - \quad a^{-4}\\ \rho_{tolm} & - \quad a^{-3}\\ \Lambda & - \quad 1\end{cases}.$$

Seega võime lähendustes uurida eraldi ainult mingil epohhil domineerivat komponenti. Sealjuures arvestame, et skalaarvälja potentsiaali V või interpreteerida kui muutuvat kosmoloogilist "konstanti" Λ.

Võrrandi (48) uurimiseks dünaamiliste süsteemide meetodil peame teist järku diferentsiaalvõrrandi esitama kahest esimest järku diferentsiaalvõrrandist koosneva süsteemina[19, 21]. Püsipunkti tingimusest järeldub seega, et $\frac{d\Psi}{dp}=0$. Seega võrrandi (48) põhjal saab välja tuua erinevuse kvintessentsi ja STG vahel, mis põhineb valemile (33) järgnevas klassifikatsioonis. Nimelt, kui tingimus (33) on täidetud $\frac{1}{2}\frac{A'}{A}-\alpha'\equiv 0$, siis ei ole tegemist STG-ga ning valemist (48) järeldub, et püsipunkt on kõdunud püsijooneks. Sama olukorra põhjustab kiirguse arvestamine ainsa mateeria komponendina, sest $\mathrm{w}=\frac{1}{3}$ ning seega kordaja $1-3\mathrm{w}=0$. See tulemus on kodeeritud juba Flanagani mõjufunktsionaali (8) varieerimisest saadavasse skalaarvälja võrrandisse (24), mis sõltub energia-impulsitensori ahendist T. Kiirguse jaoks on viimane identselt null.

5 Bergmanni-Wagoneri teooria

5.1 Jordani raam

Bransi-Dicke teooriat üldistasid Bergmann (1968) ja Wagoner (1970). Nende teoorias pole ω enam konstantne parameeter, vaid skalaarväljast sõltuv funktsioon $\omega \equiv \omega(\Psi)$. Lisaks arvestasid nad skalaarvälja potentsiaali $V = V(\Psi)$. Mõlemad eelmainitud funktsioonid on vabad funktsioonid ning nende kuju tuleb ette anda[3].

Teooriat kirjeldav mõjufunktsionaal on järgmine.

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int_{V_4} d^4x\sqrt{-g}\left\{\Psi R - \frac{\omega(\Psi)}{\Psi}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\Psi\nabla_\nu\Psi - 2\kappa^2 V(\Psi)\right\} + S_m\left[g_{\mu\nu},\chi\right]. \tag{49}$$

Paneme tähele, et materia mõjufunktsionaalis S_m ei ole skalaarvälja Ψ. Seega on mõjufunktsionaal postuleeritud Jordani raamis. Konkreetsel juhul $\alpha = 0$. Võrdlusest Flanagani mõjufunktsionaaliga (8) järeldub tingimusest (20), et füüsikalistel kaalutlustel nõuame praegu

$$0 < \Psi < \infty. \tag{50}$$

D'Alembert'i operaatori kordaja arvutame võrrandist (22).

$$\left\{\begin{array}{rcl} A &=& \Psi \\ B &=& \frac{\omega}{\kappa^2\Psi} \\ V &=& V \\ \alpha &=& 0 \end{array}\right\} \rightarrow C_\Box = \frac{2\omega+3}{2\Psi^2}, \tag{51}$$

sealjuures eeldame, et $C_\Box = \frac{2\omega+3}{2\Psi^2} > 0$.

Järgnevalt uurime seda teooriat Friedmanni kosmoloogia raames, see tähendab, et joonelement on FLRW kujus (34). Lihtsuse pärast eeldame, et skalaarvälja potentsiaal V domineerib mateeria üle ning jätame viimase arvestamata. Samuti eeldame, et 3-ruum on tasane ehk $K = 0$.

Valemite (37), (38) ja (39) põhjal saame välja kirjutada FLRW joonelemendiga (34) ning mainitud eeldustega kosmoloogia võrrandid Bergmanni-Wagoneri teoorias

$$H^2 = -H\frac{\dot\Psi}{\Psi} + \frac{1}{6}\frac{\dot\Psi^2}{\Psi^2}\omega + \frac{\kappa^2}{3}\frac{V}{\Psi}, \tag{52}$$

$$2\dot H + 3H^2 = -2H\frac{\dot\Psi}{\Psi} - \frac{1}{2}\frac{\dot\Psi^2}{\Psi^2}\omega - \frac{\ddot\Psi}{\Psi} + \frac{\kappa^2}{\Psi}V, \tag{53}$$

$$\ddot\Psi = -3H\dot\Psi - \frac{1}{2\omega+3}\omega'\dot\Psi^2 + \frac{2\kappa^2}{2\omega+3}(2V - \Psi V'). \tag{54}$$

Võrrandi (47) põhjal saame esitada kahe muutujaga dünaamilise süsteemi ($\Psi, \frac{d\Psi}{dp} = \Pi$)

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{d\Psi}{dp} &=& \Pi \\ \frac{d\Pi}{dp} &=& \frac{2\omega+3}{4\Psi^2}\Pi^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\omega'}{2\omega+3} - \frac{V'}{V}\right)\Pi^2 - 3\Pi + \frac{6\Psi}{(2\omega+3)V}(2V - \Psi V') \end{array}\right. . \tag{55}$$

Seega üks püsipunkti tingimus on $\Pi = 0$. Teiseks on vaja, et teise võrrandi viimane liige oleks null, mis annab meile püsipunkti:

$$\Pi|_{\Psi_\diamond} = 0\,,\, (2V - \Psi V')\big|_{\Psi_\diamond} = 0\,. \tag{56}$$

Nimetame seda püsipunkti potentsiaali tingimusega määratud püsipunktiks.

Eksisteerib ka teine püsipunkt

$$\dot{\Psi}\big|_{\Psi_\star} = 0\,, \lim_{\Psi \to \Psi_\star} \frac{1}{2\omega(\Psi)+3} \to 0\,, \tag{57}$$

mida nimetame singulaarseks püsipunktiks. Selle juhu jaoks tuleks eelnev teooria hoolikalt üle vaadata, sest valemi (51) põhjal $C_\square \to \infty$ selles püsipunktis ning seetõttu p-ajaga seotud valemis (44) olev suurus $\left(\frac{d\Psi}{dp}\right)^2 C_\square$ on määramatu, mis seab selle punkti ümbruses p-aja füüsikalisuse kahtluse alla. Seetõttu toetume selle püsipunkti uurimisel Järve et. al. töödele[11]. Olgu veel öeldud, et samad püsipunktid saaksime ka siis, kui asendaksime võrrandist (52) H kui ruutvõrrandi lahendi võrrandisse (54).

Osutub, et singulaarne püsipunkt on huvitavam, sest parametriseeritud post-Newtoni (PPN) lähendit ehk nõrga välja ja väikeste kiiruste lähendit kasutades näitas Nordtvedt[7], et Bergmanni-Wagoneri teooria on kooskõlas päikesesüsteemis teostatud mõõtmistega siis, kui

$$2\omega + 3 \quad \to \quad \infty \tag{58}$$

$$\frac{1}{\omega^3}\frac{d\omega}{d\Psi} \equiv \frac{1}{\omega^3}\omega' \quad \to \quad 0 \tag{59}$$

Seega esimese PPN tingimuse täitmine toob kaasa võimaliku püsipunkti ka kosmoloogilistes võrrandites. Seda olukorda on põhjalikult analüüsinud Järv et. al.[11]. Nende töö toetub eeldusele, et $\frac{1}{2\omega(\Psi)+3}$ on diferentseeruv ka $\Psi_\star$ ümbruses (tuletised ei lähe lõpmatuks) ning saab kasutada Taylori ritta arendust. Sel juhul tarvilik tingimus eelmainitud singulaarse püsipunkti olemasoluks on järgmine:

$$\frac{d}{d\Psi}\left(\frac{1}{2\omega(\Psi)+3}\right)\bigg|_{\Psi_\star} = -\frac{2\omega'}{(2\omega+3)^2}\bigg|_{\Psi_\star} \neq 0\,. \tag{60}$$

Sealjuures paneme tähele, et eelmise tingimuse kehtivusest järeldub vahetult, et PPN-i teine tingimus (59) on täidetud[11].

5.2 Einsteini raam

Konformse teisendusega ja skalaarvälja ümberdefineerimisega on võimalik Bergmanni-Wagoneri teooria viia niinimetatud Einsteini raami, milles $\bar{A} = 1$ ning $\bar{B} = 1$. Vastav mõjufunktsionaal on kujul

$$S = \frac{1}{2\kappa^2}\int_{V_4} d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left\{\bar{R} - \bar{g}^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\Phi\bar{\nabla}_\nu\Phi - 2\kappa^2\bar{V}\right\} + S_m\left[[\Psi(\Phi)]^{-1}\bar{g}_{\mu\nu}, \chi\right]\,. \tag{61}$$

Tingimusest $\bar{A} = 1$ järeldame Flanagani teisenduste (12) põhjal, et konformne tegur $e^{2\bar{\gamma}}$ on antud Jordani raami skalaarväljaga Ψ järgmiselt $e^{2\bar{\gamma}} = \frac{1}{\Psi} \equiv \frac{1}{A_{Jordan}}$. Jordani raamis skalaarväljale Ψ seatud piirangute (50) tõttu mingeid probleeme pole, nagu järeldus juba üldisest teooriast.

Valemi (22) põhjal

$$\left.\begin{cases} \bar{A} &= 1 \\ \bar{B} &= \frac{1}{\kappa^2} \\ \bar{V} &= \bar{V} \\ \bar{\alpha} &= -\frac{1}{2}\ln(\Psi(\Phi)) \neq 0 \end{cases}\right\} \rightarrow \bar{C}_{\Box} = 1 \tag{62}$$

Eelmise tulemuse ja valemite (23) ning (51) põhjal näeme, et Jordani raamist Einsteini raami minekuks tuleb skalaarväli ümber defineerida järgmiselt

$$\begin{aligned} \left(\bar{f}'\right)^2 &= \frac{\bar{C}_{\Box}}{C_{\Box}} \Rightarrow \left(\frac{d\Psi}{d\Phi}\right)^2 = \frac{2\Psi^2}{2\omega+3}, \\ \frac{d\Psi}{d\Phi} &= \pm\sqrt{\frac{2\Psi^2}{2\omega+3}}. \end{aligned} \tag{63}$$

Siit järeldub kaks asjaolu:

- Toimub skalaarvälja kahendumine, ühele skalaarväljale Ψ vastab skalaarvälja Φ kaks võimalikku kuju.
- Eelmises osas toodud püsipunkti tingimusest $(2\omega+3)|_{\Psi_\star} \rightarrow \infty$ järeldub, et püsipunktis $\Psi_\star$ pole teisendus (63) pööratav.

Konformsel teisendusel Jordani raamist Einsteini raami muutub meetriline tensor järgnevalt:

$$\begin{aligned} g^{(J)}_{\mu\nu} &= e^{2\bar{\gamma}} g^{(E)}_{\mu\nu} \Rightarrow \\ g^{(E)}_{\mu\nu} &= \Psi g^{(J)}_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{64}$$

Friedmanni kosmoloogia uurimiseks viime Einsteini raamis joonelemendi formaalselt FLRW kujju (34). Selleks defineerime ümber ajakoordinaadi $dt_E = \sqrt{\Psi}dt_J$ ja mastaabikordaja $a_E(t_E) = \sqrt{\Psi}a_J(t_J)$. Hubble'i parameeter Einsteini raamis on seotud Jordani raami vastava suurusega järgmiselt

$$H_E = \frac{1}{a_E}\frac{da_E}{dt_e} = \frac{1}{\sqrt{\Psi}}\left(H_J + \frac{1}{2\Psi}\frac{d\Psi}{dt_J}\right). \tag{65}$$

Valemi (42) põhjal

$$dp = H_E dt_E = \left(H_J + \frac{1}{2\Psi}\frac{d\Psi}{dt_J}\right)dt_J. \tag{66}$$

Edasi jätame raamile viitavad indeksid ära. Kaetud suurused tähistavad Einsteini raami suurusi (skalaarväli on tähistatud Φ). Sealjuures Einsteini raamis $\dot{()}$ tähendab tuletist Einsteini raami aja dt_E järgi. Eelmine võrrand kinnitab varasemat tulemust, et p-aja diferentsiaal on invariantne nii konformsel teisendusel kui ka skalaarvälja ümberdefineerimisel ning seetõttu on ainult oluline, kumma raami suurustest tuletist võetakse.

Friedmanni kosmoloogia Einsteini raamis (eeldame analoogselt eelnevaga, et mateeriat pole ja kolmruum on tasane)

$$
\begin{aligned}
\bar{H}^2 &= \frac{1}{6}\frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi^2}+\frac{\kappa^2}{3}\bar{V}\,, && (67)\\
2\dot{\bar{H}}+3\bar{H}^2 &= -\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2+\kappa^2\bar{V}\,, && (68)\\
\ddot{\Phi} &= -3\bar{H}\dot{\Phi}-\kappa^2\bar{V}'\,. && (69)
\end{aligned}
$$

Kahe muutujaga dünaamiline süsteem $(\Phi, \frac{d\Phi}{dp}=\Gamma)$ valemi (47) põhjal.

$$
\begin{cases}
\frac{d\Phi}{dp} &= \Gamma\\
\frac{d\Gamma}{dp} &= \frac{1}{2}\Gamma^3+\frac{1}{2}\frac{\bar{V}'}{\bar{V}}\Gamma^2-3\Gamma-3\frac{\bar{V}'}{\bar{V}}
\end{cases}
\qquad (70)
$$

Seega on ainult üks tingimus püsipunkti $\left(\Gamma=0\,,\frac{d\Gamma}{dp}=0\right)$ jaoks

$$
1)\;\Gamma=0\,,\bar{V}'=0\,. \qquad (71)
$$

Järelikult osutub, et kasutatud eeldustel on Jordani raamis kaks püsipunkti tingimust ning Einsteini raamis ainult üks. Selle olukorra selgitamine üldjuhul on keeruline ning seetõttu vaatame järgnevalt üht konkreetset näidet, milles oleme fikseerinud seosefunktsiooni ω ja potentsiaali V kuju.

5.3 Näide konkreetse seosefunktsiooniga ja potentsiaaliga

Valime seosefunktsiooni järgnevalt[11]

$$
\omega(\Psi)=\frac{3\Psi}{2(1-\Psi)}\,. \qquad (72)
$$

Seega tulemuse (51) põhjal

$$
C_\square=\frac{2\omega+3}{2\Psi^2}=\frac{3}{2}\frac{1}{\Psi^2(1-\Psi)} \qquad (73)
$$

ning nõudest $C_\square>0$ järeldub, et $\Psi\leq 1$, millest koos tingimusega (50) järeldub $0<\Psi\leq 1$.

Dünaamiline süsteem (55) on seega kujul

$$
\begin{cases}
\frac{d\Psi}{dp} &= \Pi\\
\frac{d\Pi}{dp} &= \frac{3}{4\Psi^2(1-\Psi)}\Pi^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\Psi}-\frac{V'}{V}\right)\Pi^2-3\Pi+2\Psi(1-\Psi)(2-\Psi\frac{V'}{V})
\end{cases}
\,. \qquad (74)
$$

Valime Jordani raamis potentsiaaliks

$$
V(\Psi)=\left(\Psi-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\,, \qquad (75)
$$

kuid jätame selle võrranditesse esialgu sisestamata.

Püsipunkti tingimus (56) Jordani raamis on määratud seosega $(2V-\Psi V')|_{\Psi_\diamond}=0$. Potentsiaali (75) kasutades saame skalaarvälja Ψ väärtuseks selles punktis

$$
\Psi_\diamond=\frac{3}{4}\,. \qquad (76)
$$

Püsipunkti tingimus (57) Jordani raamis on määratud seosega $\lim\limits_{\Psi\to\Psi_\star}\frac{1}{2\omega(\Psi)+3}\to 0$ ning seosefunktsiooni (72) kasutades saame skalaarvälja Ψ väärtuseks selles punktis

$$\Psi_\star = 1\,. \tag{77}$$

Sealjuures paneme tähele, et seosefunktsioon (72) rahuldab tingimust (60)

$$\frac{d}{d\Psi}\left(\frac{1}{2\omega+3}\right) = \frac{d}{d\Psi}\left(\frac{1-\Psi}{3}\right) = -\frac{1}{3} \neq 0\,.$$

Püsipunkti tüübi leidmise üheks võimaluseks on süsteemi lineariseerimine püsipunkti ümbruses ning saadud konstantse maatriksi omaväärtuste arvutamine[19, 21].

Potentsiaali tingimusega (56) määratud püsipunkti korral töötab see variant hästi ning lineariseerimisel $(\Psi=\Psi_\diamond\,,\Pi=0)$ ümbruses saame omaväärtusteks

$$\lambda_{\diamond 1}^{(J)} = -2,5\,,\lambda_{\diamond 2}^{(J)} = -0,5\,. \tag{78}$$

Seega on tegu stabiilse sõlmega ehk atraktoriga. Mõlemate omaväärtuste reaalosad on nullist erinevad ehk tegu on hüperboolse püsipunktiga ning vastavalt Hartmani-Grobmani teoreemile lineariseerimisel püsipunkti tüüp ei muutu[19].

Tingimusega (57) määratud püsipunkti tüübi leidmine on keerulisem eelmainitud singulaarsuste tõttu. Seetõttu kasutame mittelineaarset lähendit, mille on välja töötanud Järv et. al.[12]. Nende töö tulemusi kasutades saame, et püsipunkt, mis on määratud tingimusega (57), $\lim\limits_{\Psi\to\Psi_\star}\frac{1}{2\omega(\Psi)+3}\to 0$ on sadul.

Einsteini raami püsipunktide uurimiseks leiame kõigepealt Jordani ja Einsteini raami skalaarväljade Ψ ja Φ vahelise seose.

$$\begin{aligned}
\pm d\Phi = \sqrt{\frac{2\omega+3}{2\Psi^2}}d\Psi &= \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\Psi\sqrt{1-\Psi}}d\Psi\,,\\
\pm\Phi + \sqrt{\frac{2}{3}}\ln C &= \sqrt{\frac{3}{2}}\ln\left(\frac{1-\sqrt{1-\Psi}}{1+\sqrt{1-\Psi}}\right),\\
\exp\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi\right)C &= \frac{1-\sqrt{1-\Psi}}{1+\sqrt{1-\Psi}}\,,
\end{aligned} \tag{79}$$

kus C on integreerimiskonstant. Siit näeme, et kui $\Psi\to 0$, siis $\Phi\to-\infty$, kui ruutjuure võtmisel on valitud positiivne lahend ning $\Phi\to+\infty$, kui ruutjuure võtmisel on valitud negatiivne lahend. Kui $\Psi\to 1$, siis mõlemal juhul Φ läheneb mingile absoluutväärtuselt ühele ja samale väärtusele. Erijuhul, kui $C=1$, siis $\lim\limits_{\Psi\to 1}\Phi\to\pm 0$.

Osutub, et võrrandid jäävad läbipaistvamaks, kui mitte kasutada otseselt skalaarvälja Φ, vaid suurust

$$M \equiv \exp\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\Phi\right)C\,, \tag{80}$$

mis võtab korraga arvesse Φ mõlemat võimalikku märki. Sel juhul saame

$$\Psi = \frac{4M}{(1+M)^2}\,. \tag{81}$$

Kasutame edaspidi sõnastust M ühikutes.

Einsteini raami potentsiaali arvutame Jordani raami potentsiaalist (75) Flanagani teisenduste (12) põhjal järgmiselt

$$\bar{V}(\Phi) = \frac{V(\Psi(\Phi))}{\Psi^2(\Phi)}\,. \tag{82}$$

Sealjuures peame meeles, et konformne tegur $e^{2\bar{\gamma}} = \frac{1}{\Psi(\Phi)}$.

Potentsiaal Einsteini raamis M ühikutes on järgmine

$$\bar{V} = \frac{3M^4 - 20M^3 + 82M^2 - 20P + 3}{128M^2}\,. \tag{83}$$

Seos $\frac{dM}{d\Phi} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}M$ võimaldab kergesti arvutada vajalikke tuletisi. Einsteini raamis on püsipunkti tingimuseks $\bar{V}' = 0$.

$$\frac{d\bar{V}}{d\Phi} = \pm W\frac{3M^4 - 10M^3 + 10M - 3}{64M^2} = \pm W\frac{(M-\frac{1}{3})(M-3)(M-1)(M+1)}{64M^2} \tag{84}$$

Püsipunkti tingimus on täidetud kolmel juhul

$$\begin{aligned} M = 1 &\overset{(81)}{\Rightarrow} \Psi = 1\,, \\ M = 3 &\Rightarrow \Psi = \frac{3}{4}\,, \\ M = \frac{1}{3} &\Rightarrow \Psi = \frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Esimene vastab Jordani raami singulaarsele püsipunktile (57) ning kaks järgmist vastavad potentsiaali tingimusega (56) määratud püsipunktile, sealjuures üks vastab ruutjuure positiivsele lahendile ning teine ruutjuure negatiivsele lahendile. Seega, kuigi Jordani raamis on kaks püsipunkti tingimust ja Einsteini raamis on üks, siis püsipunkte on mõlemas kaks.

Einsteini raamis töötab lineariseerimine mõlemal juhul hästi ning Jordani raami potentsiaali tingimusega (56) määratud püsipunkti Einsteini raami mõlema vaste $M = 3\,, M = \frac{1}{3}$ omaväärtused on

$$\lambda_{\diamond 1}^{(E)} = -2\,, \lambda_{\diamond 2}^{(E)} = -1\,. \tag{85}$$

Seega on samuti tegemist stabiilsete sõlmedega ehk atraktoritega. Jordani raami singulaarse tingimusega (57) määratud püsipunkti Einsteini raami vaste ($M = 1$) omaväärtused on

$$\lambda_{\star}^{(E)} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{35}{12}}\,, \lambda_{\star}^{(E)} = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{35}{12}}\,. \tag{86}$$

Seega üks omaväärtus on positiivne ning teine on negatiivne ja püsipunkti tüüp on järelikult sadul. Konkreetse näite puhul on Jordani raami püsipunktide ja Einsteini raami vastavate püsipunktide tüübid samad.

6 Tulemuste arutelu ja analüüs

Käesoleva töö kolmandas peatükis uurisime üldise Flanagani mõjufunktsionaali (8) varieerimisel saadud väljavõrrandeid. Teadmine, et konformsel teisendusel ja skalaarvälja ümberdefineerimisel säilib mõjufunktsionaali (8) formaalne kuju, on esitatud nii Flanagani[8] kui ka Fizievi[16] töös. Neist esimene pole käesoleva töö autori teadmise järgi üldiseid väljavõrrandeid uurinud. Teine aga on uurinud võrrandeid, milles pole täpsustatud, mil moel sisaldub skalaarväli Ψ mateeriaväljade mõjufunktsionaalis S_m. Kolmandas peatükis esitatud töö ajendiks oli arusaamine, et kui mõjufunktsionaal säilitab konformsel teisendusel ja skalaarvälja ümberdefineerimisel oma formaalse kuju, siis ka väljavõrrandid säilitavad oma formaalse kuju. Seetõttu võiks oletada, et väljavõrrandite tasemel teisenduste uurimisel saadud infot kasutades saab konkreetsetele teooriatele seada füüsikalisi piiranguid. Sarnasest mõttekäigust on erinevate raamide uurimise vajalikkuse põhjendamisel lähtunud ka Fiziev[16].

Järgnevalt esitame kolmanda peatüki olulisemad suurused ning tulemused ja võrdleme neid teiste autorite töödega.

- Valemiga (22) defineeritud d'Alembert'i operaatori kordaja $C_\Box$ on olemas ka Fizievi töös[16] tähistusega $\Delta(F,Z)$, kus F ja Z on käesoleva töö tähistustes vastavalt A ja B. Fiziev on toonud välja ka selle suuruse olulisuse skalaarvälja ümberdefineerimisel, mida käesolevas töös on rõhutatud valemiga (23) ning sellele järgnevas arutluses. Flanagan on skalaarvälja ümberdefineerimisel viidanud samale suurusele tähisega kalligraafiline F, kuid tema töös pole toodud väljavõrrandeid ning seetõttu pole selge, millistest kaalutlustest ta selle suuruse defineerimisel on lähtunud.

- Selle peatüki kõige olulisem tulemus on erinevate Flanagani mõjufunktsionaaliga (8) kirjeldatavate teooriate klassifikatsioon. Selles on olulisel kohal funktsioon $\alpha(\Psi)$, mis määrab, kuidas skalaarväli Ψ on seotud mateeriaväljadega χ. Fizievi töös pole seda seost täpsustatud ning seetõttu on tema tulemused üldisemad, kuid vähem selged. Õigupoolest pole praegu üldaktsepteeritud seisukohta, milline on skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriate ja kvintessentsiks nimetatava teooria erinevus. Lisaks tuleb ette ka erimeelsusi Jordani ja Einsteini raami defineerimisel. Nimelt on Faraoni ja Nadeau viidanud oma töös[2] autoritele (viide [27]), kes on postuleerinud minimaalselt seotud skalaarväljaga teooria ($A = 1\,, \alpha = 0$) ning viinud selle konformse teisendusega raami, milles $A \neq const\,, \alpha \neq const$ ning nimetanud seda Jordani raamiks, kuid käesolevas töös Jordani ja Einsteini raami definitsioonidele järgnenud arutluse põhjal pole sel juhul õigustatud Jordani raami nime kasutamine.

Neljandas peatükis on eelmise peatüki üldisest teooriast lähtudes uuritud Friedmanni kosmoloogiat ning üldistatud mõnevõrra teiste autorite (Roshan et. al.[15], Esposito-Farèse ja Polarski[1]) käsitlust, kes on oma uurimistöös keskendunud vastavalt Jordani raamile ning Jordani ja Einsteini raamile. Sama peatüki teises pooles on dünaamilise süsteemi uurimiseks üldistatud Damouri ja Nordtvedti[9] poolt pakutud p-aja definitsiooni suvalisse raami ning sellest ja kitsendavatest eeldustest lähtuvalt esitatud kahe muutujaga $\left(\Psi, \frac{d\Psi}{dp}\right)$ võrrandid. Viimaste jaoks saab rakendada dünaamiliste süsteemide meetodit, et uurida, millistel tingimustel STG võrrandid lähenevad hilises ajas piirile, kus uuritava teooria ja ÜRT ennustused ühtiksid. Viimane on vajalik seepärast, et päikesesüsteemisisesed vaatlused on heas kooskõlas ÜRT-ga ning seetõttu iga üldisem teooria peab vähemalt hilises ajas lähenema ÜRT-le. Saadud võrrandites sisalduvad juba eelnevast üldisest teooriast tuntud suurused ja nende tulemuste abil võiks dünaamilise süsteemi kirja panna juba mõjufunktsionaali põhjal, kuid kahjuks on p-ajaga füüsikalisi probleeme just nendel tingimustel, mida STG-lt nõutakse PPN lähenduse tulemuste põhjal.

Viiendas peatükis uurime saadud tulemuste rakendamiseks Bergmanni-Wagoneri teooriat, milles sisalduva kahe vaba funktsiooni ω ja V kuju anname ette. Eeldame, et mateeria osakaal on tühine ja selle võib ära jätta. Lisaks eeldame kolmruumi tasasust. See peatükk põhineb suuresti Järve et. al. artiklitel[10, 11, 12]. Sama seosefunktsiooniga, kuid erineva potentsiaaliga näide on läbi tehtud nende 2008. aasta artiklis[11]. Näitest selgus, Jordani raamis on kaks püsipunkti tingimust ja Einsteini raamis üks, kuid see ei põhjusta vastuolu, sest mõlemale Jordani raami püsipunktile saab vastavusse seada Einsteini raami püsipunkti ning püsipunktide tüübid on samuti kooskõlas. Siiski jääb veel selgusetuks, kas see tulemus on üldine või kehtib ainult mingite konkreetsete näidete kohta.

7

Friedmanni kosmoloogia üldistes skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriates

Ott Vilson

Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärk on uurida Friedmanni kosmoloogilisi mudeleid üldise Flanagani mõjufunktsionaaliga kirjeldatud skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriate raames, kus on lubatud aegruumi meetrilise tensori konformsed teisendused ja skalaarvälja ümberdefineerimine. Kõigepealt vaatleme üldise mõjufunktsionaali teisendusi, toome välja, kuidas teisenevad konkreetsed liikmed väljavõrrandites ning saadud tulemustele toetudes esitame Flanagani mõjufunktsionaaliga kirjeldatavate teooriate klassifikatsiooni. Esitame Friedmanni tüüpi kosmoloogia võrrandid suvalises konformses raamis ning Damouri ja Nordtvedti pakutud ajakoordinaadi teisendusega viime võrrandid dünaamilise süsteemi uurimiseks sobivasse kujju. Saadud tulemusi rakendame Bergmanni-Wagoneri teooria ja selles antud kosmoloogiliste mudelite uurimiseks Jordani ja Einsteini raamis. Leiame ühes konkreetselt valitud skalaar-tensorteoorias ühe konkreetse Friedmanni kosmoloogilise mudeli püsipunktid ning nende tüübid.

8 Kasutatud kirjandus

[1] G. Esposito-Farèse, D. Polarski, "Scalar-tensor gravity in accelerating universe," Pysical Review D 63, 063504 (2001).

[2] V. Faraoni, S. Nadeau, "The (pseudo)issue of the conformal frame revisited," Phys. Rev. D 75, 023501 (2007) [arXiv:gr-qc/0612075v1].

[3] J. Plebański, A. Krasiński, *An Introduction to General Relativity and Cosmology* (Cambridge University Press, New York, 2006).

[4] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Taylor & Francis Group, LLC, New York, 2003).

[5] Ø. Grøn, S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity* (Springer Science+Business Media, LLC, 2007).

[6] S. M. Carroll, *SPACETIME and GEOMETRY, An Introduction to General Relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2004).

[7] Y. Fujii, K.-I. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).

[8] É. É. Flanagan, "The conformal frame freedom in theories of gravitation," Classical and Quantum Gravity 21, 3817- (2004) [arXiv:gr-qc/0403063v3].

[9] T. Damour, K. Nordtvedt, "General Relativity as a Cosmological Attractor of Tensor-Scalar Theories," Physical Review Letters 70, 15 (1993).

[10] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal, "Scalar-tensor cosmology at the general relativity limit: Jordan versus Einstein frame," Physical Review D76, 103506 (2007).

[11] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal, "Scalar-tensor cosmologies: Fixed points of the Jordan frame scalar field," Physical Review D78, 083530 (2008).

[12] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal, "Scalar-tensor cosmologies with a potential in the general relativity limit: Phase space view," Physical Review D 81, 104007 (2010).

[13] C. Brans, R. H. Dicke, "Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation," Physical Review 124, 3 (1961).

[14] R. H. Dicke, "Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units," Physical Review 125, 3 (1962).

[15] M. Roshan, M. Nouri, F. Shojai, "Cosmological solutions of time varying speed of light theories," Physics Letters B 672, 197 - 202 (2009).

[16] P. P Fiziev, "Basic principles of 4D Dilatonic Gravity and Some of Their Consequences for Cosmology, Astrophysics and Cosmological Constant Problem," arXiv:gr-qc/0202074v4 (2002).

[17] J. O'Hanlon, "Intermediate-Range Gravity: A Generally Covariant Model," Phys. Rev. Lett. 29, 137–138 (1972).

[18] V. Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004).

[19] Ü. Lepik, J. Engelbrecht, *Kaoseraamat* (Teaduste Akadeemia Kirjastus, Tallinn, 1999).

[20] T. Damour, K. Nordtvedt, "Tensor-scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity," Physical Review D 48, 8 (1993).

[21] T. Sõrmus, G. Vainikko, *Harilikud diferentsiaalvõrrandid* (Valgus, Tallinn, 1972).

The Friedmann Cosmology in General Theories of Scalar-Tensor Gravity

Ott Vilson

Summary

The aim of the thesis is to study models of the Friedmann cosmology in scalar-tensor gravity theories, which are described by the general Flanagan action. It allows conformal rescaling of the spacetime metric and arbitrary redefinition of the scalar field. In order to examine the transformation of field equations under these transformations we show explicitly how different parts of field equations are transforming and we use the results to give a classification of theories which are described by the Flanagan action. We present general Friedmann type cosmology equations in arbitrary conformal frame.We introduce a transformation of time coordinate, which was first used by Damour and Nordtvedt, in order to study field equations as a dynamical system. Finally we examine the Bergmann-Wagoner theory in the Jordan frame and in the Einstein frame and consider the corresponding Friedmann cosmological models. We find critical points and their type for a distinct cosmological model in a distinct scalar-tensor theory.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ott Vilson

(sünnikuupäev: 23. mai 1987. aastal),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
   Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad erinevates konformsetes raamides,
   mille juhendaja on Piret Kuusk,
   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus 24. mail 2013. aastal