MÉLANGES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES
TIRÉS DU
BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES
DE ST.-PÉTERSBOURG.
TOME IV.

$\frac{23 \text{ Februar}}{7 \text{ März}}$ 1871.

Zur Methode der kleinsten Quadrate. Von F. Minding.

Die Methode der kleinsten Quadrate fordert, dass aus einer Reihe von Gleichungen, wie

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz + n &= u \\ a_1x + b_1y + c_1z + n_1 &= u_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + n_2 &= u_2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

u. s. w.

diejenigen Werthe der unbekannten x y z gefunden werden, welche die Summe der Quadrate aller u, d. i. $[uu]$ so klein als möglich machen. Zu diesem Zwecke wird $[uu]$ in folgende Form gebracht:

$$[uu] = \frac{[au]^2}{[aa]} + \frac{[bu.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cu.2]^3}{[cc.2]} + [nn.3], \ldots (2)$$

wo

$$[au] = [aa]x + [ab]y + [ac]z + [an]$$

$$[bu.1] = [bu] + A'[au] = [bb.1]y + [bc.1]z + [bn.1]$$

$$[cu.2] = [cu] + B''[bu] + A''[au] = [cc.2]z + [cn.2].$$

Die hier gebrauchten Bezeichnungen sind aus den Schriften von Gauss und Encke so bekannt, dass sie an dieser Stelle keiner Erklärung bedürfen. Aus der identischen Gleichung (2) ergeben sich nicht allein sofort die gesuchten Werthe der $x\,y\,z$, welche, in so fern die Gleichungen (1) eine Reihe gleich guter Beobachtungen darstellen, zugleich die wahrscheinlichsten Werthe jener unbekannten Grössen sind, sondern es wird daraus auch der Beweis hergeleitet, dass diese Bestimmung der letzten Unbekannten z das Gewicht $[cc.2]$ hat, wenn das Gewicht der einfachen Beobachtung als Einheit gesetzt wird.

Durch irgend eine lineare Substitution kann die identische Gleichung (2) in eine andere, jedoch ganz auf dieselbe Regel gegründete, verwandelt werden. Nur muss die Determinante der Substitution von Null verschieden sein. Es sei

$$\left.\begin{array}{ll} x = \lambda\xi + \lambda_1\eta + \lambda_2\zeta & \xi = lx + l_1y + l_2z \\ y = \gamma\xi + \gamma_1\eta + \gamma_2\zeta & \eta = gx + g_1y + g_2z \\ z = \varkappa\xi + \varkappa_1\eta + \varkappa_2\zeta & \zeta = qx + q_1y + q_2z, \end{array}\right\} \quad (3)$$

ferner sei

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A} = \lambda a + \gamma b + \varkappa c & \mathfrak{A}_1 = \lambda a_1 + \gamma b_1 + \varkappa c_1 \\ \mathfrak{B} = \lambda_1 a + \gamma_1 b + \varkappa_1 c & \text{u. s. w.,} \\ \mathfrak{C} = \lambda_2 a + \gamma_2 b + \varkappa_2 c & \end{array}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (1) in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}\eta + \mathfrak{C}\zeta + n = u \\ \mathfrak{A}_1\xi + \mathfrak{B}_1\eta + \mathfrak{C}_1\zeta + n_1 = u_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

u. s. w.

woraus folgt:

$$[\mathfrak{A}u] = [\mathfrak{A}\mathfrak{A}]\xi + [\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\eta + [\mathfrak{A}\mathfrak{C}]\zeta + [\mathfrak{A}n]$$

u. s. w.

und schliesslich:

$$[uu] = \frac{[\mathfrak{A}u]^2}{[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]} + \frac{[\mathfrak{B}u.1]^2}{[\mathfrak{B}\mathfrak{B}.1]} + \frac{[\mathfrak{C}u.2]^2}{[\mathfrak{C}\mathfrak{C}.2]} + [nn.3] \quad \ldots \quad (5)$$

Auch ist $\quad \mathfrak{A}u = (\lambda a + \gamma b + \varkappa c)\,u,\quad$ daher:

$$\left.\begin{array}{l} [\mathfrak{A}u] = \lambda\,[au] + \gamma\,[bu] + \varkappa\,[cu] \\ [\mathfrak{B}u] = \lambda_1[au] + \gamma_1[bu] + \varkappa_1[cu] \\ [\mathfrak{C}u] = \lambda_2[au] + \gamma_2[bu] + \varkappa_2[cu]. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Für die kleinste Quadratsumme ergiebt sich aus (5) derselbe Werth wie aus (2), weil nach (6) mit $[au]$, $[bu]$, $[cu]$ zugleich $[\mathfrak{A}u]$, $[\mathfrak{B}u]$, $[\mathfrak{C}u]$ verschwinden. Daher folgt aus (2) und (5) die identische Gleichung:

$$\frac{[au]^2}{[aa]} + \frac{[bu.1]^2}{[bb.1]} + \frac{[cu.2]^2}{[cc.2]} = \frac{[\mathfrak{A}u]^2}{[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]} + \frac{[\mathfrak{B}u.1]^2}{[\mathfrak{B}\mathfrak{B}.1]} + \frac{[\mathfrak{C}u.2]^2}{[\mathfrak{C}\mathfrak{C}.2]}. \quad (7)$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, also auch $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, so wird $u = n$, $u_1 = n_1$, u. s. f.; also ist auch

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{[an]^2}{[aa]} + \dfrac{[bn.1]^2}{[bb.1]} + \dfrac{[cn.2]^2}{[cc.2]} = \dfrac{[\mathfrak{A}n]^2}{[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]} + \dfrac{[\mathfrak{B}n.1]^2}{[\mathfrak{B}\mathfrak{B}.1]} + \dfrac{[\mathfrak{C}n.2]^2}{[\mathfrak{C}\mathfrak{C}.2]} \\ \qquad = [nn] - [nn.3]. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Das im Vorstehenden ausgesprochene Substitutionsprincip führt auf höchst einfache Weise zu dem von Gauss gegebenen allgemeinen Ausdrucke des Gewichtes einer beliebigen Function

$$\zeta = qx + q_1y + q_2z.$$

Bezeichnet nämlich P_ζ das Gewicht von ζ, so ist nach Gauss:

$$\frac{1}{P_\zeta} = \frac{q^2}{[aa]} + \frac{(q_1 + A'q)^2}{[bb\,1]} + \frac{(q_2 + B''q_1 + A''q)^2}{[cc.2]},$$

d. h. man hat in dem aus (2) entstehenden Werthe von $[uu] - [nn.3]$ nur q für $[au]$, q_1 für $[bu]$, q_2 für $[cu]$ zu schreiben, um den Werth von $\frac{1}{P_\zeta}$ zu erhalten.

Zum Beweise dieses Satzes bedarf es nur der Substitution

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = qx + q_1 y + q_2 z$$

oder $x = \xi$, $y = \eta$, $z = -\frac{q\xi}{q_2} - \frac{q_1\eta}{q_2} + \frac{\zeta}{q_2}$,

wonach nur ζ als letzte unbekannte an die Stelle von z gesetzt wird, während x und y beibehalten werden. Diese Substitution giebt

$$u = ax + by + cz + n$$
$$= \left(a - \frac{cq}{q_2}\right)x + \left(b - \frac{cq_1}{q_2}\right)y + \frac{c}{q_2}\zeta + n,$$

also $\mathfrak{A} = a - \frac{cq}{q_2}$, $\mathfrak{B} = b - \frac{cq_1}{q_2}$, $\mathfrak{C} = \frac{c}{q_2}$,

$\mathfrak{A}_1 = a_1 - \frac{c_1 q}{q_2}$ u. s. w.;

und

$$[\mathfrak{A}u] = [au] - \frac{q}{q_2}[cu], \ [\mathfrak{B}u] = [bu] - \frac{q_1}{q_2}[cu], \ [\mathfrak{C}u] = \frac{[cu]}{q_2}.$$

In der Gleichung (7) setze man nun

$[\mathfrak{A}u] = 0$, $[\mathfrak{B}u] = 0$, folglich auch $[\mathfrak{B}u.1] = 0$

und $[\mathfrak{C}u.2] = [\mathfrak{C}u]$,

so wird zugleich

$$[au] = \frac{q}{q_2}[cu] = q[\mathfrak{C}u], \ [bu] = q_1[\mathfrak{C}u], \ [cu] = q_2[\mathfrak{C}u].$$

Mit diesen Werthen verwandelt sich die Gleichung (7) nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $(\mathfrak{C}u)^2$ in folgende:

$$\frac{q^2}{[aa]} + \frac{(q_1 + A'q)^2}{[bb.1]} + \frac{(q_2 + B''q_1 + A''q)^2}{[cc.2]} = \frac{1}{[\mathfrak{C}\mathfrak{C}.2]},$$

welche offenbar den zu beweisenden Satz ausspricht. Denn wenn bei den Unbekannten $x\ y\ z$ $[cc.2]$ das Gewicht von z war, wie ich als bewiesen hier voraussetze, so ist gegenwärtig ζ die letzte in der Reihe der unbekannten Grössen $x\ y\ \zeta$ und mithin ihr Gewicht $P_\zeta = [\mathfrak{C}\mathfrak{C}.2]$.

Vorstehender Beweis setzt voraus, dass in der Function ζ die Grösse z wirklich vorkommt oder dass q_2 nicht gleich Null ist; da aber nöthigenfalls q_2 als beliebig klein gedacht werden kann, so ist klar, dass der Satz auch für ein verschwindes q_2 noch gültig bleibt.

Es schien mir genügend, den Beweis nur für drei unbekannte Grössen durchzuführen; für jede andere Anzahl würde der Gang ganz derselbe sein.

(Aus dem Bulletin, T. XVI, p. 305 – 308.)

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
Im August 1871. K. Wesselowski, beständiger Secretair.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.
(Wass.-Ostr., 9. Lin., № 12.)