T A R T U Ü L I K O O L
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Ülo Reimaa

Morfismidest kokorrutiste vahel järjestatud ja additiivsel juhul

Magistritöö

Juhendaja: Valdis Laan

Autor: ....

Juhendaja: ....

Lubatud kaitsmisele

Matemaatika instituudi juhataja: ....

Tartu 2013

Sisukord

1 Sissejuhatus

Matemaatikas uuritakse tihti struktuuridevahelisi morfisme, muuhulgas ka struktuuride endomorfisme. Endomorfismid moodustavad monoidi. Endomorfismimonoidi uurimine võib olla lihtsam, kui endomorfismimonoid on esitatud lihtsamate monoidide kaudu mingi konstruktsiooni abil. Näiteks aastal aastal 1988 ilmunud artiklis [5] tõestasid Vladimir Fljaišer ja Ulrich Knauer teoreemi, mis esitas polügooni endomorfismonoidi teatud monoidi ja väikese kategooria põimikkorrutisena.

Käesolev töö proovib erinevatel viisidel seda teoreemi üldistada. Mainitud tulemuse olemust võib interpreteerida sellena, et objektide vaheliste morfismide ja nende kompositsioonide teadmiseks piisab nende sobivate alamobjektide vaheliste morfismide ja nende kompositsioonide teadmisest.

Ühes suunas üldistame mainitud tulemust selles suhtes, et me ei piirdu polügoonide kategooriaga, vaid vaatame üldiseid kategooriaid ja lahutusi kokorrutiste läbi. Teises suunas üldistame tulemust selles suhtes, et me ei piirdu objekti endomorfismimonoidi esitustega, vaid vaatame hoopiski kategooria täielike alamkategooriate esitusi. Kolmandas suunas üldistame tulemust selles suhtes, et vaatame kategooriate asemel rikastatud kategooriaid.

Täpsemalt vaadatud kahte rikastamise erijuhtu, mis loodetavasti võivad olla abiks mainitud tulemuse suuremale rikastatud kategooriate klassile üldistamiseks. Nendeks erijuhtudeks on rikastaminine üle järjestatud hulkade kategooria ning rikastamine üle Abeli rühmade kategooria.

Järjestatud hulkade üle rikastatud juht on mõningati lähedane, rikastamata juhule. Tõepoolest, kui vaatame diskreetselt järjestatud kategooriaid, saame täpselt rikastamata juhu. Tõestame üldistuse polügoonide juhule ja vaatame kuidas see polügoonide tulemusega seondub. Järjestatud hulkade juhul uurime natukene lähemalt teatud olukorda, mis on sarnane polügoonide juhule ning üldistab polügoonide juhtu.

Üle Abeli rühmade rikastatud kategooriate juhul tõestame analoogi tulemusele polügoonide kohta, mis küll ei üldista polügoonide juhtu. Siiski võib see tulemus olla eeskujuks edasisel üldistamisel. Aditiivsel juhul esitame mõningad lihtsad tulemused, mis on abiks olukorra mõistmisel ning tulemuse rakendamisel. Selles rakenduslikus osas pole autor omalt poolt midagi lisanud, vaid lihtsalt pannud leitud tulemused kirja kohati üldisemas kontekstis üle Abeli rühmade rikastatud juhu jaoks. Samuti on lühidalt kirjas paar tulemust moodulite juhu jaoks.

Eeldame, et lugeja on tuttav elementaarse kategooriateooriaga. Muuhulgas selliste põhimõistetega nagu kokorrutised ja kaasfunktorid ning samuti nende põhiomadustega. Kohati siiski sõnastame või tõestame elementaarseid omadusi, mis autori arvates rõhutamist vajavad. Samuti võiks lugeja olla tuttav selliste algebraliste mõistetega nagu monoid, Abeli rühm, ring, moodul ja vaba moodul.

2 Üldistatav tulemus

Siin esitame konstruktsioonid ja polügooni endomorfismimonoidi kohta käiva tulemuse, millest lähtuvad teised teksti põhitulemused. Esitame selle tõestuseta. Need on [8] **konstruktsioon II.7.1** (lk.175-176), [8] **konstruktsioon II.7.6** (lk.177) ja **teoreem II.7.7** (lk. 178). Esitame lisaks mõned definitsioonid ja laused, mis annavad neile tulemustele konteksti. Erinevalt raamatule, lubame me tühjade polügoonide olemasolu, sest ilma selleta pole polügoonide kategoorias algobjekti. Ekstensiivsete kategooriate kohta käivas osas on näha algobjekti olulisus.

Märkus 1 (Tähistustest). Siin töös tähistab **Set** hulkade kategooriat, **Pos** järjestatud hulkade kategooriat ja **Ab** Abeli rühmade kategooriat. Iga kategooria $\mathscr{C}$ korral tähistab $\mathscr{C}_0$ selle objektide kogumit ning $\mathscr{C}_1$ selle morfismide kogumit. Antud objektide, $A, B \in \mathscr{C}_0$ korral, tähistab $\mathscr{C}(A, B)$ kõigi morfismide $f \in \mathscr{C}_1$, $f: A \to B$ kogumit ning kui $f, g \in \mathscr{C}(A, B)$, nimetame morfime f ja g paralleelseteks. Nõuame, et $\mathscr{C}(A, B)$ oleks alati hulk. Kutsume kategooriat väikeseks, kui selle objektide kogum on hulk. Kasutame termini morfism sünonüümina terminit nool.

Definitsioon 1 (Vasakpoolsed polügoonid ja nende homomorfismid). *Vasakpoolseks polügooniks üle monoidi S* nimetame paari (A, λ), kus A on hulk ning $\lambda: S \to \mathrm{End}(A)$ on monoidide homomorfism. Siin $\mathrm{End}(A)$ tähistab hulga A endomorfismimonoidi. Kui $s \in S$ ja $a \in A$ kirjutame tavaliselt $\lambda(s)(a)$ asemel lihtsalt sa.

Kui (A, λ), (B, μ) on vasakpoolsed polügoonid üle monoidi S, siis *homomorfismiks* $f: (A, \lambda) \to (B, \mu)$ nimetame kujutust $f: A \to B$, mille jaoks iga $s \in S$ ja iga $a \in A$ korral $f(sa) = sf(a)$.

Tavaliselt kirjutame (A, λ) asemel lihtsalt A.

Definitsioon 2 (Parempoolsed polügoonid ja nende homomorfismid). *Parempoolseks polügooniks üle monoidi S* nimetame paari (A, λ), kus A on hulk ning $\lambda: S^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}(A)$ on monoidide homomorfism. Siin S^{op} tähistab monoidi S vastasmonoidi. See tähendab, et sellel on samad elemendid kui monoidil S ning korrutis xy monoidis S^{op} on defineeritud kui korrutis yx monoidis S. Kui $s \in S$ ja $a \in A$ kirjutame tavaliselt $\lambda(s)(a)$ asemel lihtsalt as.

Kui (A, λ), (B, μ) on parempoolsed polügoonid üle monoidi S, siis *homomorfismiks* $f: (A, \lambda) \to (B, \mu)$ nimetame kujutust $f: A \to B$, mille jaoks iga $s \in S$ ja iga $a \in A$ korral $f(as) = f(a)s$.

Tavaliselt kirjutame (A, λ) asemel lihtsalt A.

Kõik vasakpoolsed polügoonid üle mingi fikseeritud monoidi S ja homomorfismid nende vahel moodustavad kategooria S-**Act**. Samuti moodustavad kõik parempoolsed polügoonid üle mingi fikseeritud monoidi S ja homomorfismid nende vahel kategooria, mida tähistame $\mathbf{Act}\text{-}S$.

Kui pole tähtis, kas peame silmas vasakpoolset või parempoolset polügooni, või kui on kontekstist selge, kumba me mõtleme, võime kasutada ka lihtsalt terminit *polügoon*,

Väikese kategooria $\mathscr{K}$ korral on $\mathscr{K}_0$ ja $\mathscr{K}_1$ hulgad, nii et saame vaadata kõigi kujutuste hulka $\mathscr{K}_1^{\mathscr{K}_0}$ hulgast $\mathscr{K}_0$ hulka $\mathscr{K}_1$.

Konstruktsioon 1 ([8] konstruktsioon II.7.1). Olgu R monoid ning olgu $\mathscr{K}$ selline väike kategooria, et $\mathscr{K}_0$ on vasakpoolne R-polügoon. Olgu

$$W = \{(r, f) \mid r \in R, f \in \mathscr{K}_1^{\mathscr{K}_0}, f(x) \in \mathscr{K}(x, rx), x \in \mathscr{K}_0\}.$$

Siis defineerime elementide $(r, f) \in W$ ja $(p, q) \in W$ korrutise võrdusega

$$(r, f)(p, g) = (rp, f_p g),$$

kus $f_p g(x) = f(px)g(x)$ iga $x \in \mathscr{K}_0$ korral ning $f(px)\colon px \to rpx$ ja $g(x)\colon x \to px$ on komponeeritud morfismidena kategoorias $\mathscr{K}$.

Hulk W koos nõnda defineeritud korrutamisega on monoid, mida nimetatakse *monoidi R ja väikese kategooria $\mathscr{K}$ põimikkorrutiseks*. Seda tähistame $R \operatorname{wr} \mathscr{K}$.

Definitsioon 3 (Alampolügoonid). Olgu A vasakpoolne polügoon üle monoidi S. Selle *alampolügooniks* nimetame sellist hulga A alamhulka B, mille korral on iga $s \in S$ ja $b \in B$ puhul $sb \in B$. Alampolügoon on polügoon, kui me tehte sellele ahendame.

Analoogiliselt saab defineerida alampolügoonid parempoolsete polügoonide jaoks.

Definitsioon 4 (Lahutumatud polügoonid). Mittetühja polügooni A üle monoidi R nimetame *lahutumatuks*, kui sellel ei leidu alampolügoone A_1 ja A_2, mille korral $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$ ning A on alampolügoonide A_1 ja A_2 lõikumatu ühend.

Lause 1 (Alternatiivne tingimus lahutumatuseks). *Olgu A polügoon üle monoidi R. Siis A on lahutumatu parajasti siis, kui iga polügooni A alampolügoonide A_i, $i \in I$ lõikumatu ühendina esituse korral leidub parajsti üks indeks $i \in I$, mille puhul A_i on mittetühi.*

Tõestus. Oletame, et A on lahutumatu. Siis pole A tühi. Olgu A esitatud alampolügoonide A_i lõikumatu ühendina. Peab leiduma vähemalt üks indeks $i_0 \in I$, mille korral $A_{i_0} \neq \emptyset$. Siis on polügoon A alampolügoonide A_{i_0} ja $\cup_{i \in I \setminus i_0} A_i$ lõikumatu ühend. Kuna A on lahutumatu ja $A_{i_0} \neq \emptyset$, peab olema $\cup_{i \in I \setminus i_0} A_i = \emptyset$. Seega iga $i \in I, i \neq i_0$ korral $A_i = \emptyset$.

Teistpidine implikatsioon on ilmne. $\square$

Lause 2. *Olgu A polügoon üle monoidi R ning olgu A_i, $i \in I$ selle lahutumatud alampolügoonid, mille lõige on mittetühi. Siis on alampolügoonide A_i, $i \in I$ ühend lahutumatu alampolügoon.*

Tõestus. See, et alampolügoonide A_i, $i \in I$ ühend on alampolügoon, on triviaalne. Näitame, et ühend on lahutumatu alampolügoon. Olgu B_k, $k \in K$ polügoonide A_i, $i \in I$ ühendi esitus alampolügoonide lõikumatu ühendina. Olgu a element, mis kuulub igasse alampolügooni A_i, $i \in I$. Siis mingi $k_0 \in K$ korral $a \in B_{k_0}$ ning iga $i \in I$ korral $A_i \cap B_{k_0} \neq \emptyset$. Alampolügoonide A_i, $i \in I$ lahutumatuse tõttu leidub aga parajasti üks indeks $k \in K$, mille korral $A_i \cap B_k \neq \emptyset$. Seega iga $i \in I$ ja iga $k \in K$, $k \neq k_0$ korral $A_i \cap B_k = \emptyset$. Seega on k_0 ainus indeks, mille korral $\left(\cup_{i \in I} A_i\right) \cap B_{k_0} \neq \emptyset$. □

Lause 3. *Olgu S monoid ja olgu A mingi S-polügoon, mis on ühe elemendi poolt moodustatud. Siis on A lahutumatu.*

Tõestus. Olgu polügoon A moodustatud elemendi $a \in A$ poolt ja olgu A_i, $i \in I$ polügooni A esitus lõikumatute alampolügoonide ühendina. Siis $a \in A_i$ mingi $i \in I$ korral. Kuna A on elemendi a poolt moodustatud, kehtib $A_i = A$. Seega leidub täpselt üks indeks $i \in I$, mille korral A_i on mittetühi ja A on lahutumatu lause 1 □

Lause 4 (Polügooni lahutus lahutumatuteks alampolügoonideks). *Olgu A polügoon üle monoidi S. Siis leidub polügooni A alampolügoonide süsteem $(A_i)_{i \in I}$, mille korral on iga $i \in I$ korral polügoon A_i lahutumatu ning A on alampolügoonide A_i lõikumatu ühend.*

Tõestus. Defineerime hulgal A seose $\sim$. Defineerime, et $a \sim b$ parajasti siis, kui leidub polügooni A lahutumatu alampolügoon, mis sisaldab elemente a ja b. Näitame, et $\sim$ on ekvivalentsiseos hulgal A.

Sümmeetrilisus on ilmne. Refleksiivsuseks paneme tähele, et iga element sisaldub oma moodustatud alampolügoonis, mis on eelneva lause järgi lahutumatu. Transitiivsuseks oletame, et $a, b, c \in A$ ning $a \sim b$ ja $b \sim c$. Siis leidub lahutumatu alampolügoon A_1 mis sisaldab elemendid a ja b ning lahutumatu alampolügoon A_2, mis sisaldab elemendid b ja c. Siis $A_1 \cap A_2 \ni b$ ning seega on $A_1 \cup A_2$ lause 2 põhjal lahutumatu, kusjuures $a, c \in A_1 \cup A_2$. Oleme näidanud, et $\sim$ on ekvivalentsiseos.

Paneme tähele, et iga elemendi a poolt määratud ekvivalentsiklass $[a]$ ekvivalentsiseose $\sim$ järgi on lahutumatu alampolügoon. Selleks märgime lihtsalt, et $[a]$ on kõigi elementi a sisaldavate lahutumatute alampolügoonide ühend.

Nüüd annavad faktorhulga $A/\sim$ elemendid meile polügooni A lahutuse lahutumatuteks alampolügoonideks. □

Märgime, et eelmises lauses võib lahutus koosneda ka nullist alampolügoonist. See olukord realiseerub parajasti siis, kui A on tühi polügoon.

Definitsioon 5 (Lahutus lahutumatuteks alampolügoonideks). Eelmises lauses kirjeldatud alampolügoonide süsteemi nimetatakse polügooni *lahutuseks lahutumatuteks alampolügoonideks.*

Lause 5 (Lahutumatu polügooni kujutis). *Olgu A ja B polügoonid üle monoidi R. Olgu A lahutumatu polügoon ning olgu $(B_i)_{i\in I}$ polügooni B lahutus lahutumatuteks alampolügoonideks. Olgu $f: A \to B$ polügoonide homomorfism. Siis leidub parajasti üks $i_0 \in I$, mille korral $f(A) \subseteq B_{i_o}$.*

Tõestus. Polügoon A on alampolügoonide $f^{-1}(B_i)$, $i \in I$ lõikumatu ühend. Kuna A on lahutumatu, leidub parajasti üks indeks $i_0 \in I$ mille korral $f^{-1}(B_{i_0}) \neq \emptyset$. Siis muidugi $f^{-1}(B_{i_0}) = A$. Seega

$$f(A) = f(f^{-1}(B_{i_0})) \subseteq B_{i_0}. \qquad \square$$

Eelmine lause tähendab, et kui meil on antud parempoolsed polügoonid A ja B üle R ning nende lahutused lahutumatuteks alampolügoonideks $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$, tekib meil iga homomorfismi $f: A \to B$ korral kujutus $\overline{f}: I \to J$, mille defineeriv seos on $f(A_i) \subseteq B_{\overline{f}(i)}$.

Konstruktsioon 2 ([8] konstruktsioon II.7.6). Olgu S monoid ning Y parempoolne S-polügoon. Olgu $(Y_i)_{i\in I}$ parempoolse polügooni Y lahutus lahutumatuteks parempoolseteks alampolügoonideks.

Defineerime väikese kategooria $\mathscr{K}$, mille objektideks on hulga I elemendid ning

$$\mathscr{K}(i,j) = \mathbf{Act}\text{-}S(Y_i, Y_j),\ i,j \in I.$$

Defineerime monoidi

$$R = \{\overline{f}: I \to I \mid f \in \mathrm{End}(Y)\}.$$

Võib näidata, et R on hulga I kõigi hulgateisenduste monoidi alammonoid.

Eelmises konstruktsioonis defineeritud väikese kategooria $\mathscr{K}$ objektide hulk on vasakpoolne R-polügoon eelmises konstruktsioonis defineeritud R korral, kui toime defineerida võrdusega $\overline{f}i = \overline{f}(i)$.

Teoreem 1 ([8] teoreem II.7.7). *Olgu S monoid ning olgu Y parempoolne polügoon üle monoidi S. Kehtigu kõik definitsioonid, mis on antud eelmises konstruktsioonis. Siis on*

$$\alpha: \mathrm{End}(Y) \to R \,\mathrm{wr}\, \mathscr{K},\quad f \mapsto (\overline{f}, (f|_{Y_i})_{i\in I})$$

monoidide isomorfism.

3 Pos-kategooriate juht

3.1 Pos-kategooriad

Definitsioon 6 (Pos-kategooriad). **Pos**-*kategooriaks* nimetatakse sellist kategooriat $\mathscr{C}$, mille iga kahe objekti A ja B korral on morfismihulgal $\mathscr{C}(A,B)$ antud osaline järjestus ning noolte komponeerimine on järjestust säilitav kujutus. See tähendab, et $A, B, C \in \mathscr{C}_0$, $a, a' \in \mathscr{C}(A,B)$, $b, b' \in \mathscr{C}(B,C)$, $a \leq a'$, $b \leq b'$ korral peab kehtima $ba \leq b'a'$.

Definitsioon 7 (Kokorrutis Pos-kategoorias). Olgu $\mathscr{C}$ mingi **Pos**-kategooria ning olgu $(A_i)_{i\in I}$ mingi hulga I poolt indekseeritud **Pos**-kategooria $\mathscr{C}$ objektide süsteem. Olgu antud objekt $A \in \mathscr{C}_0$ ning iga $i \in I$ korral morfism $\iota_i \colon A_i \to A$. Öeldakse, et paar $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ on *objektide* $(A_i)_{i\in I}$ *kokorrutis*, kui on rahuldatud järgmised tingimused:

- kui on antud objekt $Q \in \mathscr{C}_0$ koos morfismidega $q_i \colon A_i \to Q$, $i \in I$, leidub parajasti üks morfism $q \colon A \to Q$, mille korral $q_i = q\iota_i$, $i \in I$,
- kui on antud objekt Q ning morfismid $m, n \colon A \to Q$, siis

$$m \leq n \Leftrightarrow \forall i \in I \;:\; m\iota_i \leq n\iota_i\,.$$

Nimetame objektide A_i, $i \in I$ kokorrutiseks ka lihtsalt objekti A.

Märkus 2 (Kokorrutiste tuvastamine). Definitsiooni esimesest punktist näeme, et kokorrutis **Pos**-kategoorias on muuhulgas ka kokorrutis tavaliste kategooriate mõttes. Kuna kokorrutised tavalistes kategooriates on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud, on kokorrutis **Pos**-kategooriate mõttes, kui see leidub, isomorfne kokorrutisega tavaliste kategooriate mõttes. Seetõttu, kuigi üldjuhul ei saa me definitsiooni esimesest tingimusest teist järeldada, piisab meil mingite objektide kokorrutist leides, kui teame, et antud kokorrutis **Pos**-kategooriate mõttes eksisteerib, ainult esimese tingimuse kontrollimisest.

Märkus 3 (Samaväärsuse ebavajalikkus). Kokorrutiseks olemise teises tingimuses peab kontrollima ainult ühtepidi implikatsiooni, sest komponeerimise monotoonsuse tõttu kehtib **Pos**-kategoorias alati $m \leq n \Rightarrow mx \leq nx$, kui sellised kompositsioonid on defineeritud.

Lause 6 (Kokorrutiste ühesus). *Olgu $\mathscr{A}$ mingi* **Pos**-*kategooria ning $(A, (\iota_i^A)_{i\in I})$ ja $(B, (\iota_i^B)_{i\in I})$ mingid objektide $A_i \in \mathscr{A}_0$, $i \in I$ kokorrutised. Siis leidub isomorfism $f \colon A \to B$, mis rahuldab seoseid $f\iota_i^A = \iota_i^B$, $i \in I$.*

Tõestus. Tuleneb otse samasugusest omadusest tavaliste kategooriate korral. □

Näide 1 (Kokorrutised Pos-kategoorias Pos). Kategoorias **Pos** on objektide A_i kanooniliseks kokorrutiseks nende lõikumatu ühend koos hulkade sisestustega, kusjuures uusi järjestusseoseid ei lisata, mis tähendab, et eri komponentide vahel pole järjestusseoseid. Näitame, et järjestatud hulkade lõikumatu ühend rahuldab ka eelmise definitsiooni teist tingimust, mis tähendab, et tegu on muuhulgas ka kokorrutisega **Pos**-kategoorias **Pos**.

Olgu A_i, $i \in I$ järjestatud hulgad ning olgu A nende lõikumatu ühend koos sisestustega $\iota_i \colon A_i \to A, i \in I$. Näitame, et definitsiooni 7 teine tingimus on täidetud. Olgu antud järjestatud hulk Q ning järjestust säilitavad kujutused $m, n \colon A \to Q$, kusjuures iga $i \in I$ korral kehtigu $m\iota_i \leq n\iota_i$. Olgu antud suvaline $a \in A$. Siis $a = \iota_i(a')$ mingi $i \in I$ ja $a' \in A_i$ korral. Seega

$$m(a) = m(\iota_i(a')) \leq n(\iota_i(a')) = n(a),$$

mis tähendab, et $m \leq n$, kuna a oli suvaline. See tähendab, et eelmise definitsiooni teine tingimus on täidetud ja $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ on objektide A_i, $i \in I$ kokorrutis **Pos**-kategoorias **Pos**.

Lemma 1 (Kokorrutis Pos-kategoorias Pos). *Olgu I mingi hulk, olgu A_i, $i \in I$ mingi järjestatud hulkade süsteem ning olgu $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ paar, kus $A \in \mathbf{Pos}_0$ ja $\iota_i \colon A_i \to A$. Siis on $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ järjestatud hulkade A_i, $i \in I$ kokorrutis parajasti siis, kui on täidetud järgmised kaks tingimust:*

1. *iga $a \in A$ korral leiduvad üheselt määratud $i \in I$ ja $a' \in A_i$, mille korral*

$$\iota_i(a') = a\,,$$

2. *iga $a, b \in A$ korral*

$$a \leq b \Rightarrow \exists i \in I \exists\, a', b' \in A_i \,:\, \iota_i(a') = a \wedge \iota_i(b') = b \wedge a' \leq b'\,.$$

Tõestus. Esmalt oletame, et $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ rahuldab tingimusi 1) ja 2). Näitame, et $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ on objektide A_i, $i \in I$ kokorrutis. Olgu antud mingi objekt Q koos morfismidega $q_i \colon A_i \to Q$. Defineerime kujutuse $q \colon A \to Q$ Iga $a \in A$ korral leidub üheselt määratud $i \in I$ ja $a' \in A_i$, mille korral $\iota_i(a') = a$. Seega saame defineerida iga a korral üheselt

$$q(a) = q(\iota_i(a')) \stackrel{\text{def}}{=} q_i(a'), \text{ kus } \quad a = \iota_i(a').$$

Konstruktsiooni järgi rahuldab q iga $i \in I$ korral seost $q\iota_i = q_i$. Samuti tuleb sellest välja, et q on ainus kujutus, mis rahuldab iga $i \in I$ korral $q\iota_i = q_i$. Peame veel näitama, et q on järjestust säilitav. Olgu $a, b \in A$ ning $a \leq b$. Siis leidub $i \in I$ ja $a', b' \in A_i$, nii et $a = \iota_i(a')$, $b = \iota_i(b')$ ja $a' \leq b'$. Siis

$$q(a) = q(\iota_i(a')) = q_i(a') \leq q_i(b') = q(\iota_i(b')) = q(b),$$

sest q_i on järjestust säilitav.

Oletame nüüd, et $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ on järjestatud hulkade A_i kokorrutis. Nagu varem mainitud on järjestatud hulkade A_i kanooniliseks kokorrutiseks nende lõikumatu ühend B koos sisestustega $(\iota'_i)_{i\in I}$. See tähendab, et leidub järjestatud hulkade isomorfism

$$\theta\colon B \to A, \quad \forall i \in I : \theta\iota'_i = \iota_i.$$

Olgu $a \in A$, siis lõikumatu ühendi omaduste järgi leidub üheselt määratud $i \in I$ ja $a' \in A_i$, mille korral $\theta^{-1}(a) = \iota'_i(a')$. Siis ka

$$a = \theta(\theta^{-1}(a)) = \theta(\iota'_i(a')) = \iota_i(a').$$

Kui lisaks $a = \iota_j(b')$ mingi $j \in I$ ja $b' \in A_j$ korral, siis

$$\iota'_j(b') = \theta^{-1}(\iota_j(b')) = \theta^{-1}(\iota_i(a')) = \iota'_i(a'),$$

mis tähendab, et $i = j$ ja $a' = b'$ lõikumatu ühendi omaduste järgi.

Järjestuse kohta käiva tingimuse kontrollimiseks oletame, et $a, b \in A$ korral $a \leq b$. Siis $\theta^{-1}(a) \leq \theta^{-1}(b)$. Lõikumatu ühendi omaduste järgi tähendab see, et leidub $i \in I$ ning $a', b' \in A_i$, mille korral $a' \leq b'$, $\theta^{-1}(a) = \iota'_i(a')$ ja $\theta^{-1}(b) = \iota'_i(b')$. Rakendades aga viimasele kahele võrdusele isomorfismi θ, saame $a = \iota_i(a')$ ja $b = \iota_i(b')$, mis lõpetab lause teise tingimuse kontrolli. □

Definitsioon 8 (Pos-funktorid). **Pos**-*funktoriks* $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ **Pos**-kategooriast $\mathscr{A}$ **Pos**-kategooriasse $\mathscr{B}$ nimetame funktorit $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, mis säilitab morfismide järjestuse. See tähendab, et iga **Pos**-kategooria $\mathscr{A}$ paralleelsete noolte paari f, g korral kehtib $f \leq g \Rightarrow F(f) \leq F(g)$.

Kõigi väikeste **Pos**-kategooriate ning nendevaheliste **Pos**-funktorite kategooriat tähistame **Pos-Cat**.

Definitsioon 9 (Loomulikud teisendused Pos-funktorite vahel). **Pos**-*funktorite vaheline loomulik teisendus* on lihtsalt nendele **Pos**-funktoritele vastavate tavaliste funktorite vaheline loomulik teisendus.

Definitsioon 10 (Kokorrutise säilitamine). Olgu $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ mingi **Pos**-funktor ning olgu $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ objektide $A_i \in \mathscr{A}_0$, $i \in I$ kokorrutis. Öeldakse, et F *säilitab kokorrutise* $(A, (\iota_i)_{i\in I})$, kui $(F(A), (F(\iota_i))_{i\in I})$ on objektide $F(A_i)$, $i \in I$ kokorrutis. Kui sisestusi pole kokorrutise juures mainitud, nimetatakse funktorit vastavat *kokorrutist säilitavaks*, kui see mingite sellele kokorrutisele vastava sisestuste süsteemi korral kokorrutise säilitab. Sellist sõnakasutust õigustab järgmine lause.

Lause 7 (Kokorrutiste säilitamise sisestustest sõltumatus). *Olgu* $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *mingi* **Pos**-*funktor ning olgu* $(A, (\iota_i^A)_{i\in I})$ *ja* $(B, (\iota_i^B)_{i\in I})$ *mingid objektide* $A_i \in \mathscr{A}_0$, $i \in I$ *kokorrutised. Siis säilitab* F *kokorrutise* $(A, (\iota_i^A)_{i\in I})$ *parajasti siis, kui see säilitab kokorrutise* $(B, (\iota_i^B)_{i\in I})$.

Tõestus. Olgu eeldused nagu sõnastuses. Teame, et leidub isomorfism $f\colon A \to B$, mis rahuldab seoseid $f\iota_i^A = \iota_i^B$, $i \in I$. Siis on ka $F(f)$ isomorfism ja kehtivad võrdused

$$F(f)F(\iota_i^A) = F(\iota_i^B),\ \ i \in I.$$

Eeldame, et $(F(A), (F(\iota_i^A))_{i\in I})$ on objektide $F(A_i)$, $i \in I$ kokorrutis ja näitame, et siis on seda ka $(F(B), (F(\iota_i^B))_{i\in I})$. Piisab, kui kontrollime kokorrutiseks olemise esimest tingimust, kuna teame, et kokorrutis eksisteerib.

Olgu $Q \in \mathscr{B}_0$ suvaline ning olgu antud morfismid $q_i\colon F(A_i) \to Q$, $i \in I$. Siis leidub üheselt määratud morfism $q\colon F(A) \to Q$, mille korral $qF(\iota_i^A) = q_i$, $i \in I$. Tähistame $q' = qF(f)^{-1}\colon F(B) \to Q$. Siis

$$q'F(\iota_i^B) = (qF(f)^{-1})(F(f)F(\iota_i^A)) = qF(\iota_i^A) = q_i,\ i \in I.$$

Näitame veel, et q' on üheselt määratud morfism, mis rahuldab iga $i \in I$ korral võrdust $q'F(\iota_i^B) = q_i$. Kehtigu iga $i \in I$ jaoks $q''F(\iota_i^B) = q_i$ mingi morfismiga q' paralleelse morfismi q'' korral. Siis iga $i \in I$ korral $q'F(f)F(\iota_i^A) = q''fF(\iota_i^A)$. Kuna $F(\iota_i^A)$, $i \in I$ on kokorrutise sisestused, saame need koos paremalt taandada. See annab võrduse $q'F(f) = q''F(f)$, millest tuleneb $q' = q''$, kuna $F(f)$ on isomorfism. □

3.2 Konstruktsioonid

Konstruktsioon 3 (Pos-kategooria Cat/$\mathscr{C}$). Olgu antud **Pos**-kategooria $\mathscr{C}$. Siis võime vaadata **Pos**-kategooriat **Cat**/$\mathscr{C}$, mille objektideks on funktorid

$$\mathscr{X} \to \mathscr{C},\ \mathscr{X} \in \mathbf{Cat_0}$$

ning morfismideks $(F\colon \mathscr{X} \to \mathscr{C}) \to (G\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{C})$ on diagrammid

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{Y} \arrow[d, "G"] \\ \mathscr{X} \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, bend left, "\alpha"] & \mathscr{C}, \end{tikzcd}$$

kus S on funktor $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ ning α on loomulik teisendus $F \to GS$. Seega võime öelda, et morfismideks on paarid (S, α), kus $S\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ja $\alpha\colon F \to GS$. Järjestus on defineeritud seose

$$(S, \alpha) \leq (T, \beta) \Leftrightarrow (S = T) \wedge (\alpha \leq \beta)$$

kaudu, kus $\alpha \leq \beta$ tähendab seda, et $\alpha_x \leq \beta_x$ iga $x \in \mathcal{X}_0$ korral. Kompositsioon on defineerutud diagrammide kleepimise kaudu:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{Y} \arrow[d, "G"] \arrow[dr, "T"] & \\
\mathcal{X} \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, bend left, "\alpha"] & \mathcal{C} & \mathcal{Z} \arrow[l, "H"] \arrow[l, phantom, bend right, "\beta"'] .
\end{tikzcd}$$

See tähendab, et kui (S, α) ja (T, β) on nagu joonisel, siis on nende kompositsiooniks paar $(TS, (\beta * S)\alpha)$, kus $\beta * S$ tähistab loomulike teisenduste β ja 1_S horisontaalset kompositsiooni, mille $x \in \mathcal{X}_0$ kohaliseks komponendiks on $\beta_{S(x)}$.

Märkus 4 (Konstruktsiooni olemusest). Kui suuruse küsimusi ignoreerida, on eelmine definitsioon tavaliste kategooriate tasemel erijuht kategooriast, mille saame teatud 2-komakategooria [6] I,2.5 (lk. 29) 2-noolte unustamisel. Seda tähelepanekut me ei kasuta, seega siin ei täpsusta selle tähendust, ega põhjenda seda.

On lihtne veenduda, et eelmine konstruktsioon annab tõepoolest tulemuseks **Pos**-kategooria.

Meenutame, et kategooriat nimetatakse *diskreetseks*, kui selle ainsad morfismid on ühikmorfismid.

Märkus 5 (Pos-kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$). Olgu $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ **Pos**-kategooria **Cat**$/\mathscr{C}$ täielik alam-**Pos**-kategooria, mis on määratud selliste objektide $F\colon \mathcal{X} \to \mathscr{C}$ poolt, mille korral $\mathcal{X}$ on diskreetne kategooria ning eksisteerib objektide $F(x)$, $x \in \mathcal{X}_0$ kokorrutis.

Konstruktsioon 4 (Pos-funktor coprod). Olgu $\mathscr{C}$ **Pos**-kategooria. Defineerime **Pos**-funktori

$$\mathbf{coprod}\colon \mathscr{D}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C},$$

mis seab funktoritele $F\colon \mathcal{X} \to \mathscr{C}$ vastavusse objektide $F(x)$, $x \in \mathcal{X}_0$ kokorrutise.

Morfismidel defineerime **Pos**-funktori **coprod** kasutades kokorrutise universaalomadust. Fikseerime iga **Pos**-kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ objekti $F\colon \mathcal{X} \to \mathscr{C}$ korral kokorrutisele $\mathbf{coprod}(F)$ vastava sisestuste süsteemi $(\iota_x^F)_{x \in \mathcal{X}_0}$, kus

$$\iota_x^F\colon F(x) \to \mathbf{coprod}(F).$$

Olgu antud morfism $(S, \alpha)\colon (F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{C}) \to (G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{C})$ **Pos**-kategoorias $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$. Siis kokorrutise $\mathbf{coprod}(F)$ universaalomaduse järgi leidub üheselt määratud morfism $\mathbf{coprod}((S, \alpha))\mathbf{coprod}(F) \to \mathbf{coprod}(G)$, mis muudab järgmise diagrammi iga $x \in \mathcal{X}_0$ korral kommutatiivseks:

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\iota^F_x"'] & G(S(x)) \arrow[d, "\iota^G_{S(x)}"] \\
\mathbf{coprod}(F) \arrow[r, dashed, "\mathbf{coprod}((S,\alpha))"'] & \mathbf{coprod}(G)\,.
\end{tikzcd}$$

Sellega defineerime **Pos**-funktori **coprod** morfismidel.

Lause 8 (Konstruktsiooni korrektsus). *Eelnev konstruktsioon annab tõepoolest* **Pos**-*funktori.*

Tõestus. Esmalt näitame, et **coprod** on järjestust säilitav. Selleks olgu antud $(S, \alpha), (T, \beta)\colon (F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{C}) \to (G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{C})$, mille korral $(S, \alpha) \le (T, \beta)$. Antud järjestuse definitsiooni kohaselt saame, et $S = T$ ja $\alpha \le \beta$. Sellest saame, et iga $x \in \mathcal{X}_0$ korral $\alpha_x \le \beta_x$ ning et iga $x \in \mathcal{X}_0$ korral $\iota^G_{S(x)}\alpha_x \le \iota^G_{S(x)}\beta_x$. Sellest saame, arvestades **Pos**-funktori **coprod** definitsiooni ning seda, et $S = T$ tõttu $\iota^G_{S(x)} = \iota^G_{T(x)}$, et iga $x \in \mathcal{X}_0$ korral $\mathbf{coprod}((S, \alpha))\iota^F_x \le \mathbf{coprod}((T, \beta))\iota^F_x$. Sellest saame, arvestades kokorrutise definitsiooni teist tingimust, et $\mathbf{coprod}((S, \alpha)) \le \mathbf{coprod}((T, \beta))$.

Teiseks on tarvis näidata, et **coprod** on komponeerimisega kooskõlas. Olgu meil antud $(S, \alpha)\colon (F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{C}) \to (G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{C})$ ja $(T, \beta)\colon (G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{C}) \to (H\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{C})$. Tõestuseks piisab sellest, kui paneme tähele, et $\mathbf{coprod}((TS, \beta\alpha))$ on üheselt määratud morfism, mis muudab iga $x \in \mathcal{X}_0$ korral järgmise diagrammi välise ristküliku kommuteeruvaks, ning et väiksemad ruudud kommuteeruvad **Pos**-funktori **coprod** definitsiooni tõttu.

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\iota^F_x"] & GS(x) \arrow[r, "\beta_{S(x)}"] \arrow[d, "\iota^G_{S(x)}"] & HTS(x) \arrow[d, "\iota^H_{TS(x)}"] \\
\mathbf{coprod}(F) \arrow[r, "\mathbf{coprod}((S,\alpha))"'] & \mathbf{coprod}(G) \arrow[r, "\mathbf{coprod}((T,\beta))"'] & \mathbf{coprod}(H)\,.
\end{tikzcd}$$

Viimaseks näitame, et **coprod** kujutab ühikud tõepoolest ühikuteks. Selleks piisab tähelepanekust, et iga $x \in \mathcal{X}_0$ korral diagramm

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "1_x"] \arrow[d, "\iota_x^F"'] & F(x) \arrow[d, "\iota_x^F"] \\
\mathbf{coprod}(F) \arrow[r, dashed, "1_{\mathbf{coprod}((1_{\mathcal{X}}, 1_F))}"'] & \mathbf{coprod}(F)
\end{tikzcd}$$

kommuteerub.

3.3 Põhitulemus ja järeldused

Definitsioon 11 (Täpne ja täielik Pos-funktor). Nimetame **Pos**-funktorit

$$F \colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$$

täpseks ja täielikuks, kui morfismid

$$F_{A,B} \colon \mathscr{A}(A, B) \to \mathscr{B}(F(A), F(B))$$

kategoorias **Pos** on iga $A, B \in \mathscr{A}_0$ korral pööratavad. Teisisõnu, parajasti siis, kui $F_{A,B}$, $A, B \in \mathscr{A}_0$ on bijektiivsed järjestust säilitavad ja peegeldavad kujutused.

Soovime leida **Pos**-kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ selliseid täielikke alam-**Pos**-kategooriaid, millele **Pos**-funktorit **coprod** ahendades saaksime täieliku ja täpse **Pos**-funktori.

Definitsioon 12 (Esitatav Pos-funktor). *Esitatava* **Pos**-*funktori* mõiste on sama, mis tavalise esitatava funktori mõiste, ainult et lähtekategooria peab olema **Pos**-kategooria ning sihtkategooria **Pos**. Sellest piisab, et tegu oleks **Pos**-funktoriga. Tähistame objektile A vastavat esitatavat **Pos**-funktorit

$$\mathscr{C}(A, -) \colon \mathscr{C} \to \mathbf{Pos}.$$

Lause 9 (Esitatava Pos-funktori poolt kokorrutiste säilitamine). *Olgu $\mathscr{C}$* **Pos**-*kategooria ning olgu A, B, B_i, $i \in I$ selle objektid, kusjuures olgu $(B, (\iota_i)_{i \in I})$ objektide B_i, $i \in I$ kokorrutis. Siis säilitab esitatav* **Pos** *funktor $\mathscr{C}(A, -)$ kokorrutise $(B, (\iota_i)_{i \in I})$ parajasti siis, kui iga $f, g \colon A \to B$ korral on täidetud järgmised kaks tingimust*

- *leiduvad parajasti üks $i \in I$ ja $f' \colon A \to B_i$, mille korral $f = \iota_i f'$ ning*
- *$f \leq g$ parajasti siis, kui leiduvad $i \in I$ ning $f', g' \colon A \to B_i$, mille korral $f' \leq g'$ ning $f = \iota_i f$ ja $g = \iota_i g'$.*

Tõestus. Esitatav **Pos**-funktor $\mathscr{C}(A,-)$ säilitab kokorrutise $(B,(\iota_i)_{i\in I})$ parajasti siis, kui $(\mathscr{C}(A,B),(\mathscr{C}(A,\iota_i))_{i\in I}), \mathscr{C}(A,\iota_i)\colon \mathscr{C}(A,B_i)\to\mathscr{C}(A,B)$ on kokorrutis **Pos**-kategoorias **Pos** Arvestades, et $f\colon A\to B_i$ korral kehtib esitatava **Pos**-funktori definitsiooni järgi võrdus

$$\mathscr{C}(A,\iota_i)(f)=\iota_i f\ ,$$

näeme, et selle lause tingimused on parajasti lemma 1 tingimused kokorrutise $(\mathscr{C}(A,B),(\mathscr{C}(A,\iota_i))_{i\in I})$ jaoks. □

Teoreem 2 (Tingimus $\mathbf{coprod}_{F,G}$ pööratavuseks). *Olgu $\mathscr{C}$ **Pos**-kategooria ning olgu antud mingid*

$$(F\colon\mathscr{X}\to\mathscr{C}),(G\colon\mathscr{Y}\to\mathscr{C})\in(\mathscr{D}_{\mathscr{C}})_0\,.$$

Siis on

$$\mathbf{coprod}_{F,G}\colon\mathscr{D}_{\mathscr{C}}(F,G)\to\mathscr{C}(\mathbf{coprod}(F),\mathbf{coprod}(G))$$

*järjestatud hulkade isomorfism, kui iga $x\in\mathscr{X}_0$ korral säilitab esitatav **Pos**-funktor $\mathscr{C}(F(x),-)\colon\mathscr{C}\to\mathbf{Pos}$ kokorrutise $\mathbf{coprod}(G)$. Kui on teada, et järjestatud morfismihulk $\mathscr{C}(\mathbf{coprod}(F),\mathbf{coprod}(G))$ pole tühi, kehtib ka vastupidine implikatsioon.*

Tõestus. Olgu meil antud mingid $(F\colon\mathscr{X}\to\mathscr{C})$, $(G\colon\mathscr{Y}\to\mathscr{C})\in(\mathscr{D}_{\mathscr{C}})_0$ koos vastavate kokorrutistega $(\mathbf{coprod}(F),(\iota^F_x)_{x\in\mathscr{X}_0})$, $(\mathbf{coprod}(G),(\iota^G_y)_{y\in\mathscr{Y}_0})$, kus $(\iota^F_x)_{x\in\mathscr{X}}$, $(\iota^G_y)_{y\in\mathscr{Y}}$ on vastavate kokorrutiste sisestused, mille fikseerisime **Pos**-funktori **coprod** defineerimisel.

Oletame, et iga $x\in\mathscr{X}_0$ korral on $\mathscr{C}(F(x),\mathbf{coprod}(G)),(\mathscr{C}(1_{F(x)},\iota^G_y)_{y\in\mathscr{Y}})$ objektide $\mathscr{C}(F(x),G(y))$, $y\in\mathscr{Y}_0$ kokorrutis **Pos**-kategoorias **Pos**. Näitame, et sel juhul on $\mathbf{coprod}_{F,G}$ järjestatud hulkade isomorfism. Järjestust säilitav kujutus on järjestatud hulkade isomorfism parajasti siis, kui see on sürjektiivne ning järjestust peegeldav.

Veendume, et $\mathbf{coprod}_{F,G}$ on sürjektiivne. Olgu $f\colon\mathbf{coprod}(F)\to\mathbf{coprod}(G)$. Siis iga $x\in\mathscr{X}_0$ korral $f\iota^F_x\colon F(x)\to\mathbf{coprod}(G)$. Arvestades lauset 9, saame, et iga $x\in\mathscr{X}_0$ korral leidub üheselt määratud element $S(x)\in\mathscr{Y}_0$ ja üheselt määratud element $\alpha_x\in\mathscr{C}(F(x),G(y))$, mille korral

$$f\iota^F_x=\iota^G_{S(x)}\alpha_x\,.$$

Nüüd muutub S triviaalsel viisil diskreetsete kategooriate vaheliseks funktoriks $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ ning $\alpha=(\alpha_x)_{x\in\mathscr{X}_0}$ loomulikuks teisenduseks $F\to SG$, kuna kategooria $\mathscr{X}_0$ diskreetsuse tõttu ei pea $(\alpha_x)_{x\in\mathscr{X}_0}$ mingeid muid tingimusi täitma loomulikuks olemiseks. Nüüd muudab f diagrammi

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "\iota_x^F"'] \arrow[dr, "f\iota_x^F"] & GS(x) \arrow[d, "\iota_{S(x)}^G"] \\
\mathbf{coprod}(F) \arrow[r, "f"'] & \mathbf{coprod}(G)\,.
\end{tikzcd}$$

välimise ristküliku iga $x \in \mathscr{X}_0$ korral kommuteeruvaks. Kuna $\mathbf{coprod}((S,\alpha))$ on ainus selle omadusega morfism, saame, et $f = \mathbf{coprod}((S,\alpha))$ ning näeme, et $\mathbf{coprod}_{F,G}$ on tõepoolest sürjektiivne.

Veendume, et $\mathbf{coprod}_{F,G}$ on järjestust peegeldav. Selleks oletame, et $\mathbf{coprod}((S,\alpha)) \leq \mathbf{coprod}(T,\beta)$. Siis ka

$$\mathbf{coprod}((S,\alpha))\iota_x^F \leq \mathbf{coprod}(T,\beta)\iota_x^F$$

iga $x \in \mathscr{X}_0$ korral. Lause $9jrgi$ leidub iga $x \in \mathscr{X}_0$ korral üheselt määratud $R(x) \in \mathscr{Y}_0$ ja üheselt määratud $\alpha'_x, \beta'_x \in \mathscr{C}(F(x), G(R(x)))$, mille korral

$$\mathbf{coprod}(S,\alpha)\iota_x^F = \iota_{R(x)}^G \alpha'_x \tag{1}$$
$$\mathbf{coprod}(T,\beta)\iota_x^F = \iota_{R(x)}^G \beta'_x \tag{2}$$
$$\alpha'_x \leq \beta'_x \tag{3}$$

Iga $x \in \mathscr{X}_0$ korral rahuldavad tingimusi (1) ja (2) ka morfismid $\alpha_x \colon F(x) \to G(S(x))$ ja $\beta_x \colon F(x) \to G(T(x))$. Kuna lause 9 järgi on aga sellise omadusega $R(x)$,α'_x ja β'_x üheselt määratud, saame, et $T(x) = S(x) = R(x)$, $\alpha_x = \alpha'_x$ ning $\beta_x = \beta'_x$. Nüüd, kuna $S = T$, annab (3), et $\alpha \leq \beta$ ja $(S,\alpha) \leq (T,\beta)$. Seega on $\mathbf{coprod}_{F,G}$ järjestust peegeldav ja ka bijektiivne.

Nüüd eeldame vastupidise implikatsiooni tõestamiseks, et $\mathbf{coprod}_{F,G}$ on järjestatud hulkade isomorfism ning $\mathscr{C}(\mathbf{coprod}(F), \mathbf{coprod}(G))$ pole tühi. Fikseerime $x \in \mathscr{X}_0$ ning näitame, et $\mathscr{C}(F(x), -)$ säilitab kokorrutise $(\mathbf{coprod}(G), (\iota_y^G)_{y\in\mathscr{Y}})$. Selleks kontrollime lause 9 tingimuste kehtivust.

Kontrollime lause esimest tingimust. Olgu $f \in \mathscr{C}(F(x), \mathbf{coprod}(G))$. Kuna $\mathbf{coprod}_{F,G}$ on bijektsioon, pole $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}(F,G)$ tühi. Valime suvalise $(\alpha, S) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}(F,G)$. Defineerime iga $\xi \in \mathscr{X}_0$ korral morfismi $g_\xi \colon F(\xi) \to \mathbf{coprod}(G)$ järgmiselt:

$$g_\xi = \begin{cases} \iota_{S(\xi)}^G \alpha_\xi\,, & \text{kui } \xi \neq x \\ f\,, & \text{kui } \xi = x\,. \end{cases} \tag{4}$$

Kasutades morfismide $g_\xi \colon F(\xi) \to \mathbf{coprod}(G), \xi \in \mathscr{X}_0$ jaoks kokorrutise universaalomadust, saame morfismi $g \in \mathscr{C}(\mathbf{coprod}(F), \mathbf{coprod}(G))$, mis muuhulgas rahuldab tingimust $g\iota_x^F = f$. Olgu $(T,\beta) = \mathbf{coprod}_{F,G}^{-1}(g)$. Teame **Pos**-funktori **coprod** definitsiooni järgi, et järgmise diagrammi väline nelinurk kommuteerub.

$$\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[rr, "\beta_x"] \arrow[d, "\iota^F_x"'] \arrow[drr, "f"] & & GT(x) \arrow[d, "\iota^G_{T(x)}"] \\
\mathbf{coprod}(F) \arrow[rr, "g"'] & & \mathbf{coprod}(G) .
\end{tikzcd}$$

Samuti kommuteerub alumine kolmnurk. Seetõttu kommuteerub ka ülemine kolmnurk. Meil on tarvis näidata, et pole ühtegi teist valikut $T(x)$ ja β_x jaoks, mis ülemise kolmnurga kommuteeruma paneks. Oletame, et mingi $\beta'_x \colon F(x) \to GT'(x)$ paneb ülemise kolmnurga kommuteeruma. Siis paneb see ka välise nelinurga kommuteeruma. Seega, kui defineerime funktori T' ja loomuliku teisenduse $\beta' \colon F \to GT'$, mis on samad, kui T ja β, välja arvatud x kohalised komponendid, mis on vastavalt $S'(x)$ ja β'_x, on meil

$$\mathbf{coprod}_{F,G}(T', \beta') = g = \mathbf{coprod}_{F,G}(T, \beta) .$$

mis $\mathbf{coprod}_{F,G}(T', \beta')$ bijektiivsuse tõttu tähendab muuhulgas, et $\beta_x = \beta'_x$. Sellega on lause esimene tingimus kontrollitud.

Kontrollime lause 9 teise tingimuse kehtivust. Olgu selleks antud $f, f' \in \mathscr{C}(F(x), \mathbf{coprod}(G))$ sellised, et $f \leq f'$. Nüüd käitume samamoodi nagu esimese tingimuse kontrollimisel: fikseerime mingi $(\alpha, S) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}(F, G)$ defineerime seosega (4) analoogiliselt morfismipered $(g_\xi)_{\xi \in \mathscr{X}_0}$ ja $(g'_\xi)_{\xi \in \mathscr{X}_0}$, kusjuures paneme tähele, et $g_\xi \leq g'_\xi$ iga $\xi \in \mathscr{X}_0$ korral. Nüüd saame vastavalt kokorrutise universaalomadusele kaks morfismi $g, g' \in \mathscr{C}(\mathbf{coprod}(F), \mathbf{coprod}(G))$, kusjuures $g \leq g'$. Kasutades eeldust, et $\mathbf{coprod}_{F,G}$ on järjestatud hulkade isomorfism, saame g ja g' originaalid $(S, \beta), (S', \beta') \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}(F, G)$, kusjuures $(S, \beta) \leq (S', \beta')$, millest, arvestades, kuidas on $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}(F, G)$ peal järjestus defineeritud, saame, et $S = S'$ ning $\beta_x \leq \beta'_x$, kus $\beta_x, \beta'_x \in \mathscr{C}(F(x), G(S(x))$. Saame samamoodi nagu esimese tingimuse kontrollimisel, et β_x ja β'_x on vastavalt f ja f' originaalid kujutuse $\mathscr{C}(1_{F(x)}, \iota^G_{S(x)})$ suhtes. Sellega on tulemus tõestatud. $\square$

Järeldus 1 (Endomorfismimonoidi esitus). *Olgu $(F \colon \mathscr{X} \to \mathscr{C}) \in (\mathscr{D}_{\mathscr{C}})_0$. Siis säilitab esitatav* **Pos***-funktor $\mathscr{C}(F(x), -)$ iga $x \in \mathscr{X}_0$ korral objektide $F(x)$ kokorrutise parajasti siis, kui objekti* $\mathbf{coprod}(F)$ *järjestatud endomorfismimonoid ja $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}(F, F)$ on isomorfsed.*

Tõestus. Põhjenduseks tuleks lihtsalt tähele panna, et objekti $\mathbf{coprod}(F)$ endomorfismimonoid pole kunagi tühi, kuna sisaldab ühikmorfismi ja et $\mathbf{coprod}_{F,F}$ on monoidide homomorfism. $\square$

Definitsioon 13. Nimetame **Pos**-funktorit $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ **Pos**-kategooriate *ekvivalentsiks*, kui iga $A, B \in \mathscr{C}_0$ korral on kujutus $F_{A,B}$ järjestatud hulkade isomorfism ning iga $D \in \mathscr{D}_0$ korral leidub $C \in \mathscr{C}_0$, nii et D ja $F(C)$ on isomorfsed.

Järeldus 2 (Alamkategooria esitus). *Olgu $\mathscr{D}$ selline* **Pos**-*kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ täielik alam-***Pos**-*kategooria, mille korral iga $(F\colon \mathscr{X} \to \mathscr{C}), (G\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{C}) \in \mathscr{D}_0$ ja iga $x \in \mathscr{X}_0$ korral säilitab esitatav* **Pos**-*funktor $\mathscr{C}(F(x), -)$ kokorrutise $\mathbf{coprod}(G)$. Siis on $\mathscr{D}$ ekvivalentne objektide $\mathbf{coprod}(F)$, $F \in \mathscr{D}_0$ poolt määratud* **Pos**-*kategooria $\mathscr{C}$ täieliku alam-***Pos**-*kategooriaga.*

Tõestus. Teoreemi 2 tõttu on tingimused $F_{A,B}$ järjestatud hulkade isomorfismiks olemise kohta täidetud. Ekvivalentsi tingimus objektide jaoks on aga triviaalselt täidetud. □

3.4 Seos esialgse tulemusega

On võimalik, et pole kohe näha, kuidas äsja tõestatu seostub teoreemiga 1. Selleks anname **Pos**-kategooriale $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ natukene teise kuju.

Definitsioon 14 (Kategooria toime hulgal). *Kategooria $\mathscr{R}$ toimeks hulgal S* nimetatakse [10] funktorit $\rho\colon \mathscr{R} \to \mathbf{Set}$, mille korral on S hulkade $\rho(i)$, $i \in \mathscr{R}_0$ lõikumatu ühend.

Märkus 6. Olgu tähistused nagu eelmises definitsioonis. Kategooria toimet hulgal võib vaadata polügooni üldistusena. Tõepoolest, kui $\mathscr{C}$ ainus objekt on A, siis on kogu funktoris ρ sisalduv info kodeeritud monoidide homomorfismis

$$\rho_{A,A}\colon \mathscr{C}(A, A) \to \mathbf{Set}(\rho(A), \rho(A)),$$

kusjuures sel juhul $\rho(A) = S$.

Konstruktsioon 5 (Kategooria ja Pos-kategooria põimikkorrutis). Olgu antud väike kategooria $\mathscr{R}$ ja väike **Pos**-kategooria $\mathscr{K}$ koos kategooria $\mathscr{R}$ toimega ρ hulgal $\mathscr{K}_0$. Defineerime **Pos**-kategooria $\mathscr{W}$ järgmiselt:

- objektideks on kategooria $\mathscr{R}$ objektid,
- morfismihulgaks $\mathscr{W}(A, B)$ on

  $$\{(r, f) \in \mathscr{R}(A, B) \times \mathscr{K}_1^{\rho(A)} \mid r \in \mathscr{R}(A, B),\ f(a) \in \mathscr{K}(a, \rho(r)(a)),\ a \in \rho(A)\},$$

- $(r, f) \leq (s, g)$ parajasti siis, kui $r = s$ ja punktiviisiliselt $f \leq g$,
- kui $(r, f) \in \mathscr{W}(A, B)$ ja $(s, g) \in \mathscr{W}(B, C)$, siis $(s, g)(r, f) = (sr, g_r f)$, kus $g_r(a) = g(\rho(r)(a))$, $g_r f(a) = g(\rho(r)(a)) f(a)$ ja
- ühikuks $1_A \in \mathscr{W}(A, A)$ on $(1_A, a \mapsto 1_a)$.

Pos-kategooriat $\mathscr{W}$ nimetame *$\mathscr{R}$ ja $\mathscr{K}$ põimikkorrutiseks toime ρ suhtes* ning tähistame seda $\mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{K}$.

Lause 10 (Konstruktsiooni korrektsus). *Eelnev konstruktsioon annab tõepoolest tulemuseks* **Pos**-*kategooria.*

Tõestus. Olgu antud kõik nagu esineb eelmises konstruktsioonis. On selge, et hulkadel $\mathscr{W}(A, B)$ defineeritud seos $\leq$ on osaline järjestus.

Komponeerimine on defineeritud korrektselt, sest kui on antud mingid morfismid $(r, f) \in \mathscr{W}(A, B)$ ja $(s, g) \in \mathscr{W}(B, C)$, siis nende kompositsiooni $(sr, g_r f)$ esimese komponendi, sr, korral pole korrektsuses küsimust ning teise komponendi, $g_r f$, korral on $(g_r f)(a) = g(\rho(r)(a))f(a)$ alati defineeritud, sest

$$a \xrightarrow{f(a)} \rho(r)(a) \xrightarrow{g(\rho(r)(a))} \rho(s)(\rho(r)(a)) = \rho(sr)(a),$$

millest muuhulgas näeme, et $(s, g)(r, f) \in \mathscr{W}(A, C)$.

Näitame, et komponeerimine on järjestust säilitav. Selleks oletame, et on antud $(r, f), (r', f') \in \mathscr{W}(A, B)$ ja $(s, g), (s', g') \in \mathscr{W}(B, C)$, nii et $(r, f) \leq (r', f')$ ja $(s, g) \leq (s'g')$. Siis $r = r$ ja $s = s'$ ning $f \leq f'$ ja $g \leq g'$ punktiviisiliselt. Siis ka muidugi $sr = s'r'$. Peame näitama, et $g_r f \leq g'_{r'} f'$ punktiviisiliselt. Selleks fikseerime $a \in \rho(A)$. Siis

$$\begin{aligned}
(g_r f)(a) &= g(\rho(r)(a))f(a) \\
&\leq g(\rho(r)(a))f'(a) \quad (\text{sest } f \leq f' \text{ punktiviisiliselt}) \\
&= g'(\rho(r)(a))f'(a) \quad (\text{sest } g \leq g' \text{ punktiviisiliselt}) \\
&= g'(\rho(r')(a))f'(a) \quad (\text{sest } r = r') \\
&= (g'_{r'} f')(a),
\end{aligned}$$

mistõttu on komponeerimine järjestust säilitav.

Näitame, et komponeerimine on assotsiatiivne. Selleks olgu antud morfismid $(r, f) \in \mathscr{W}(A, B)$, $(s, g) \in \mathscr{W}(B, C)$ ja $(t, h) \in \mathscr{W}(C, D)$. Siis arvutame

$$\begin{aligned}
((t, h)(s, g))(r, f) &= (ts, h_s g)(r, f) = (tsr, (h_s g)_r f) \\
(t, h)((s, g), (r, f)) &= (t, h)(sr, g_r f) = (tsr, h_{sr} g_r f),
\end{aligned}$$

mis on võrdsed, kuna iga $a \in \rho(a)$ korral

$$\begin{aligned}
(h_{sr}(g_r f))(a) &= h(\rho(sr)(a))g(\rho(r)(a))f(a) \\
&= h((\rho(s) \circ \rho(r))(a))g(\rho(r)(a))f(a) \\
&= h(\rho(s)(\rho(r)(a)))g(\rho(r)(a))f(a) \\
&= (h_s g)(\rho(r)(a))f(a) \\
&= ((h_s g)_r f)(a),
\end{aligned}$$

mistõttu $(h_s g)_r f = h_{sr}(g_r f)$.

Viimaks näitame, et $B \in \mathscr{W}_0$ korral on $(1_B, b \mapsto 1_b)$ tõepoolest komponeerimise ühik. Saame $(r, f) \in \mathscr{W}(A, B)$ puhul

$$(1_B, a \mapsto 1_a)(r, f) = (1_B r, (a \mapsto 1_a)_r f) = (r, f),$$

kuna iga $a \in \rho(A)$ korral

$$((b \mapsto 1_b)_r f)(a) = (b \mapsto 1_b)(\rho(r)(a)) f(a) = 1_{\rho(r)(a)} f(a) = f(a)$$

ning saame $(s, g) \in \mathscr{W}(B, C)$ puhul

$$(s, g)(1_B, x \mapsto 1_x) = (s 1_B, g_{1_B}(x \mapsto 1_x)) = (s, g),$$

kuna iga $b \in \rho(B)$ korral

$$(g_{1_B}(x \mapsto 1_x))(b) = g(\rho(1_B)(b)(x \mapsto 1_x)(b) = g(1_{\rho(B)}(b))1_b = g(b). \qquad \square$$

Konstruktsioon 6 (Kategooria $\mathscr{R}$ ja Pos-kategooria $\mathscr{K}$). Olgu $\mathscr{C}$ **Pos**-kategooria. Olgu antud objektid $\mathscr{C}_i \in \mathscr{K}_0$, $i \in I$ ning olgu iga $i \in I$ korral objekt A_i objektide A_i^k, $k \in I_i$ kokorrutis. Defineerime **Pos**-kategooria $\mathscr{K}$. Selle objektihulgaks on

$$\mathscr{K}_0 = \{(i, k) \mid i \in I, k \in I_i\}$$

ning järjestatud morfismihulkadeks on

$$\mathscr{K}((i, k), (j, l)) = \mathscr{C}(A_i^k, A_j^l),$$

kusjuures morfismide komponeerimine käib nagu **Pos**-kategoorias $\mathscr{C}$. On selge, et tegu on **Pos**-kategooriaga.

Defineerime kategooria $\mathscr{R}$, mille objektideks hulga I elemendid, morfismihulkadeks on

$$\mathscr{R}(i, j) = \{f \in \mathbf{Set}(I_i, I_j) \mid \forall k \in I_i : \mathscr{C}(A_i^k, A_j^{f(k)}) \neq \varnothing\}$$

ning morfisme komponeeritakse nagu kujutusi. Tõepoolest on tegu kategooriaga, kuna iga $f \in \mathscr{R}(i, j)$ ja iga $g \in \mathscr{R}(j, k)$ puhul sisaldab iga $x \in I_i$ korral järjestatud hulk $\mathscr{C}(A_x, A_{g(f(x))})$, vähemalt ühe elemendi. Seda seetõttu, et sinna kuuluvad kõik järjestatud hulga $\mathscr{C}(A_x, A_{f(x)}) \neq \varnothing$ ja järjestatud hulga $\mathscr{C}(A_{f(x)}, A_{g(f(x))}) \neq \varnothing$ elementide kompositsioonid.

Siis võime defineerida kategooria $\mathscr{R}$ toime ρ hulgal $\mathscr{K}_0$ funktorina, mis objektidel $i \in \mathscr{R}_0$ tegutseb seose

$$\rho(i) = \{(i, k) \mid k \in I_i\}$$

kohaselt ja tegutseb morfismidel $f \in \mathscr{R}(i,j)$, seose

$$\rho(f)\colon (i,k) \mapsto (j, f(k))$$

kohaselt. Ilmselt on tõepoolest tegu funktoriga ning kategooria $\mathscr{R}$ toimega hulgal $\mathscr{K}_0$. Samuti on selge, et $\mathscr{R}$ ja $\mathscr{K}$ on väikesed.

Lause 11 (Järelduse 2 alternatiivne sõnastus). *Olgu antud* **Pos**-*kategooria* $\mathscr{C}$. *Olgu antud objektid* $A_i \in \mathscr{C}_0$, $i \in I$ *ning olgu iga* $i \in I$ *korral objekt* A_i *objektide* A_i^k, $k \in I_i$ *kokorrutis, kusjuures iga* $i \in I$ *ja iga* $j \in I$ *korral säilitagu esitatav funktor* $\mathscr{C}(A_i, -)$ *objektide* A_j^k, $k \in I_j$ *kokorrutise. Olgu kategooria* $\mathscr{R}$ *ja* **Pos**-*kategooria* $\mathscr{K}$, *koos toimega* ρ, *antud nagu eelmises konstruktsioonis. Siis on objektide* A_i, $i \in I$ *määratud* **Pos**-*kategooria* $\mathscr{C}$ *täielik alam*-**Pos**-*kategooria ekvivalentne* **Pos**-*kategooriaga* $\mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$.

Tõestus. Tõestus põhineb järeldusele 2. Näitame, et järeldus 2 on rakendatav ning seejärel näitame, et selles järelduses mainitav **Pos**-kategooria $\mathscr{D}_\mathscr{C}$ alam-**Pos**-kategooria on ekvivalentne **Pos**-kategooriaga $\mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$.

Olgu $\mathscr{D}_\mathscr{C}$ **Pos**-kategooria, mis on konstrueeritud $\mathscr{C}$ kaudu nagu märkuses 5. Konstrueerime iga $i \in I$ korral objekti $F \in (\mathscr{D}_\mathscr{C})_0$. Olgu iga $i \in I$ korral diskreetse väikese kategooria $\mathscr{X}_i$ objektide hulgaks

$$(\mathscr{X}_i)_0 = \{(i,k) \mid k \in I_i\}$$

ning olgu funktor $F_i\colon \mathscr{X}_i \to \mathscr{C}$ defineeritud objektidel seosega

$$F_i((i,k)) = A_i^k.$$

Kuna $\mathscr{X}$ on diskreetne, on funktori F_i morfismidel defineerimiseks ainult triviaalne võimalus. Ilmselt iga $i \in I$ korral $F_i \in (\mathscr{D}_\mathscr{C})_0$, kuna objektide $F_i(k) = A_i^k$, $k \in I_i$ kokorrutis eksisteerib. Samuti on täidetud järelduse 2 eeldused ning seega objektide $A_i \in \mathscr{C}_0$ määratud täielik alam-**Pos**-kategooria on ekvivalentne objektide $F_i \in \mathscr{D}_\mathscr{C}$ määratud alam-**Pos**-kategooriaga $\mathscr{D}$. Seda seetõttu, et kokorrutised on isomorfismini üheselt määratud, nii et iga $i \in I$ korral on objektide A_i^k, $k \in I_i$ kokorrutis A_i isomorfne samade objektide kokorrutisega $\mathbf{coprod}(F_i)$. Näitame, et $\mathscr{D}$ on omakorda ekvivalentne **Pos**-kategooriaga $\mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$.

Defineerime **Pos**-funktori $Q\colon \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ja näitame, et tegu on **Pos**-kategooriate ekvivalentsiga. Defineerime objektidel $i \in Q\colon \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$ korral

$$Q(i) = F_i$$

ning morfismidel $(r, f)\colon i \to j$ korral

$$Q((r,f)) = (S_r, \alpha_f),$$

kus $S_r\colon \mathscr{X}_i \to \mathscr{X}_j$ on diskreetsete kategooriate vaheline funktor, mis on defineeritud objektidel seosega

$$S_r((i,k)) = (j, r(k))$$

ning $\alpha_f\colon F_i \to F_j S$ on loomulik teisendus, mille $(i,k) \in \mathscr{X}_i$ kohaline komponent on

$$(\alpha_f)_{(i,k)} = f(k),$$

mis on korrektselt defineeritud, kuna

$$\begin{aligned} f(k) &\in \mathscr{K}(k, \rho(r)(k)) \\ &= \mathscr{K}(k, r(k)) \\ &= \mathscr{C}(A_i^k, A_j^{r(k)}) \\ &= \mathscr{C}(F_i((i,k)), F_j((j, r(k)))) \\ &= \mathscr{C}(F_i((i,k)), (F_j S_r)((i,k))) \end{aligned}$$

ja kuna $\mathscr{X}_i$ diskreetsuse tõttu pole loomulikul teisendusel α_r vaja rahuldada ühtegi mittetriviaalset diagrammi.

Näitame, et Q on **Pos**-funktor. Selleks näitame esmalt ühikute säilitamist. Olgu antud $i \in \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$. Selle ühikuks on $(1_i, (k \mapsto 1_k))$, ehk $(1_{A_i}, (k \mapsto 1_k))$. Siis

$$Q((1_{A_i}, (k \mapsto 1_k))) = (S_{1_{A_i}}, \alpha_{(k \mapsto 1_k)}) = ((i,k) \mapsto (i, 1_{A_i}(k)), \alpha_f) = (1_{\mathscr{X}_i}, 1_{1_{\mathscr{X}_i}}),$$

kuna ilmselt

$$(\alpha_{(k \mapsto 1_k)})_{(i,k)} = (k \mapsto 1_k)(k) = 1_k = (1_{1_{\mathscr{X}_i}})_{(i,k)}.$$

Näitame komponeerimisega kooskõlas olemist. Selleks olgu antud $i, j, l \in \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$ ning $(r, f)\colon i \to j$ ja $(s, g)\colon j \to l$. Siis saame arvutada iga $(i,k) \in (\mathscr{X}_i)_0$ korral

$$(S_s S_r)((i,k)) = S_s(S_r((i,k))) = S_s((j, r(k))) = (l, s(r())) = (l, (sr)(k)) = S_{sr}((i,k))$$

ning

$$\begin{aligned} ((\alpha_g * S_r)\alpha_f)_{(i,k)} &= (\alpha_g)_{S_r((i,k))}(\alpha_f)_{(i,k)} \\ &= (\alpha_g)_{(j,r(k))} f(k) \\ &= g(r(k)) f(k) \\ &= (g_r f)(k) \\ &= (\alpha_{g_r f})_{(i,k)}, \end{aligned}$$

mistõttu

$$\begin{aligned} G((s,g)(r,f)) &= G((sr, g_r f)) \\ &= (S_{sr}, \alpha_{g_r f}) \\ &= (S_s S_r, (\alpha_g * S_r)\alpha_f) \\ &= (S_s, \alpha_g)(S_r \alpha_f) \\ &= G((s,g))G((r,f)). \end{aligned}$$

Näitame järjestuse säilitamist. Selleks olgu antud objektid $i, j \in \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$ ning morfismid $(r, f), (s, g) \colon i \to j$, mille korral $(r, f) \leq (s, g)$. See tähendab, et $r = s$ ja $f(k) \leq g(k)$ iga $k \in I_i$ korral. Seega $S_r = S_s$ ning

$$(\alpha_f)_{(i,k)} = f(k) \leq g(k) = (\alpha_f)_{(i,k)}$$

iga $(i, k) \in (\mathscr{X}_i)_0$ korral. See tähendab, et

$$Q((r, f)) = (S_r, \alpha_f) \leq (S_s, \alpha_g) = Q((s, g)).$$

Näitame, et Q on **Pos**-kategooriate ekvivalents. Olgu $F \in \mathscr{D}_0$. Siis $F = F_i$ mingi $F_i \in \mathscr{D}_0$ korral. See tähendab, leidub $i \in \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$, mille korral $Q(i) = F_i = F$. Seega kehtib objektide kohta käiv ekvivalentsi tingimus. Näitame nüüd, et iga $i, j \in \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$ korral on $Q_{i,j}$ järjestatud hulkade isomorfism.

Olgu $i, j \in \mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C}$. Näitame $Q_{i,j}$ sürjektiivsust. Olgu $S \colon \mathscr{X}_i \to \mathscr{X}_j$ diskreetsete kategooriate vaheline funktor ning olgu $\alpha \colon F_i \to F_j S$ loomulik teisendus. Siis S defineerib funktsiooni $r \colon I_i \to I_j$ seosega

$$r(k) = S((i, k))$$

ning α defineerib funktsiooni $f \colon I_i \to \mathscr{K}_1$ seosega

$$f(k) = \alpha_{(i,k)},$$

kusjuures $f(k) \colon F_i((i, k)) \to (F_j S)((i, k))$, ehk teisisõnu

$$f(k) \colon A_i^k \to A_j^{r(k)}.$$

See tähendab muuhulgas, et iga $k \in \rho(i) = I_i$ korral

$$\mathscr{K}(k, \rho(r)(k)) = \mathscr{K}(k, r(k)) = \mathscr{C}(A_i^k, A_j^{r(k)}) \neq \varnothing,$$

kuna selles sisaldub $f(k)$, mistõttu $r \in \mathscr{R}(i, k)$ ning $(r, f) \in (\mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C})(i, j)$. Lisaks konstruktsiooni tõttu $Q((r, f)) = (S, \alpha)$, mis tõestab $Q_{i,j}$ sürjektiivsuse.

Järjestuse säilitamise näitamiseks oletame, et $(r, f), (s, g) \in (\mathscr{R} \operatorname{wr}_\rho \mathscr{C})(i, j)$, kusjuures $Q((r, f)) \leq Q((s, g))$. Siis $(S_r, \alpha_f) \leq (Q_s, \alpha_g)$ ja seega $S_r = Q_s$ ning $\alpha_f \leq \alpha_g$. Siis aga iga $k \in I_i$ korral

$$(j, r(k)) = S_r((i, k)) = S_s((i, k)) = (j, s(k)),$$

mistõttu $r = s$. Samuti iga $k \in I_i$ korral

$$f(k) = (\alpha_f)_{(i,k)} \leq (\alpha_g)_{(i,k)} = g(k),$$

mistõttu $f \leq g$. Sellega on järjestuse peegeldamine näidatud. See põhjendab ka injektiivsuse. Kokkuvõtteks oleme näidanud, et Q on **Pos**-kategooriate ekvivalents. Kuna **Pos**-kategooriate ekvivalentsus on transitiivne seos, saamegi selle, mida soovisime tõestada. □

Märkus 7 (Suuruse küsimused). Paneme tähele, et tegelikult pole eelmine lause ning järeldus 2 täiesti samaväärsed. Seda seetõttu, et eelmises järelduses on objektid A_i indekseeritud hulga poolt, seega on ka kategooria $\mathscr{K}$ väike kategooria, mistõttu on **Pos**-kategooria $\mathscr{R}$ wr $\mathscr{C}$ väike. Järelduses 2 mainitud alamkategooria ei pea aga olema ilmtingimata väike.

Saaksime samaväärse tulemuse, kui objektid A_i võiksid olla indekseeritud hulgast suurema ja **Pos**-kategooria **C** objektide kogumiga sama suurusjärku kollektsiooni I poolt. Et vältida aga arutelu selliste kollektsioonide olemuse kohta, piirdume juhtumiga, kus I on hulk.

3.5 Millal on võimalik tulemust rakendada?

Teoreemi 2 rakendamiseks on eriti mugavad sellised objektid A **Pos**-kategoorias $\mathscr{C}$, mille korral säilitab esitatav **Pos**-funktor $\mathscr{C}(A,-)$ kõik kopiirid. Siis piisab meil tulemuse rakendamiseks sellest, et funktori $F \in (\mathscr{C}_{\mathscr{D}})_0$, $F\colon \mathscr{X} \to \mathscr{C}$ korral oleks iga $x \in \mathscr{X}_0$ korral $F(x)$ selle omadusega. Mugavad on need ka seetõttu, et mitmetes kategooriates on võimalik selle omadusega objektid täpselt klassifitseerida. Selles punktis uurime teatud konkreetset olukorda, mille korral on võimalik objekte mingis mõttes parimal viisil selle omadusega objektide kokorrutisena esitada.

Definitsioon 15 (Tagasitõmbamisest). Olgu $\mathscr{C}$ kategooria ning olgu antud selles konservatiivne ruut (ehk tagasitõmbaja diagramm)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f_X"] \\ Y \arrow[r, "f_Y"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Siis öeldakse, et morfism p_Y on saadud morfismi f_X *mööda noolt* f_Y *tagasi tõmmates* ning öeldakse, et morfism p_Y on *saadud morfismist* f_X *tagasitõmbamise teel*. Vastavat tagasitõmbajat kutsutakse tagasitõmbajaks mööda morfismi f_X.

Kui $\mathscr{C}$ on lisaks **Pos**-kategooria, siis kutsutakse eelmist diagrammi tagasitõmbajaks **Pos**-kategooriate mõttes, kui iga objekti A ja morfismide $m, n\colon A \to P$ korral $m \leq n$ parajasti siis, kui $p_X m \leq p_X n$ ning $p_Y m \leq p_Y n$.

Definitsioon 16 (Ekstensiivsed kategooriad). Öeldakse, et kokorrutistega kategooria $\mathscr{C}$ on *infinitaarselt ekstensiivne*, kui leiduvad tagasitõmbajad mööda kokorrutiste sisestusi ning objektide Y_i, $i \in I$ iga kokorrutise $(Y, (\iota_i^Y)_{i \in I})$ ja kommutatiivsete diagrammide

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\iota_i^X"] \arrow[d, "f_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y_i \arrow[r, "\iota_i^Y"'] & Y,
\end{tikzcd}$$

$i \in I$ korral on $(X, (\iota_i^X)_{i \in I})$ objektide X_i, $i \in I$ kokorrutis parajasti siis, kui eelnenud diagrammid on iga $i \in I$ korral konservatiivsed ruudud.

Kui lõplike kokorrutistega kategooria $\mathscr{C}$ rahuldab eelmist tingimust juhul, kui $\operatorname{card}(I) = 2$ ja leiduvad tagasitõmbajad mööda lõplike kokorrutiste sisestusi, nimetatakse seda *ekstensiivseks kategooriaks*. Ilmselt on inifinitaarselt ekstensiivne kategooria ekstensiivne.

Infinitaarselt ekstensiivsed on näiteks sellised kategooriad nagu hulkade kategooria, topoloogiliste ruumide kategooria ja väikeste kategooriate kategooria.

Definitsioon 17 (Range algobjekt). Öeldakse, et kategooria $\mathscr{C}$ algobjekt $\mathbf{0}$, on *range algobjekt*, kui iga sellesse minev nool on isomorfism.

Paneme tähele, et kui kategoorias leidub range algobjekt, on kõik selle algobjektid ranged.

Esitame järgmises lauses mõned meil vaja minevad infinitaarselt ekstensiivsete kategooriate omadused. Artiklis [4] on need tõestatud ekstensiivsete kategooriate jaoks, aga probleemideta saab need tõestada ka infinitaarsel juhul.

Lause 12 (Ekstensiivsete kategooriate omadusi). *Olgu $\mathscr{C}$ ekstensiivne kategooria. Siis on*

- *kategoorial $\mathscr{C}$ range algobjekt,*
- *kokorrutiste sisestused on monomorfismid ning*
- *kui $(A, (\iota_i)_{i \in I})$ on objektide A_i, $i \in I$ kokorrutis ja $i, j \in I$ on sellised, et $i \neq j$, siis on iga konservatiivse ruudu*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & X_j \arrow[d, "\iota_j"] \\
X_i \arrow[r, "\iota_i"'] & X
\end{tikzcd}$$

korral objekt P algobjekt.

Järgmine definitsioon on infinitaarne versioon lehel [12] esitatud ekstensiivsete 2-kategooriate definitsiooni erijuhust **Pos**-kategooriate korral.

Definitsioon 18 (Ekstensiivne Pos-kategooria). Ütleme, et kõigi kokorrutistega **Pos**-kategooria $\mathscr{C}$ on *(infinitaarselt) ekstensiivne*, kui see on tavalise kategooriana infinitaarselt ekstensiivne ning rahuldab lisaks järgmist kolme tingimust:

- mööda kokorrutiste sisestusi leiduvad tagasitõmbajad **Pos**-kategooriate mõttes,
- kokorrutiste sisestustega järelkomponeerimine on järjestust peegeldav kujutus, teisisõnu, kui $\iota \colon B \to C$ on kokorrutise sisestus ning $f, g \colon A \to B$ on morfismid, mille korral $\iota f \leq \iota g$, siis $f \leq g$,
- kui $(B, (\iota_i)_{i \in I})$ on objektide B_i, $i \in I$ kokorrutis ja A pole algobjekt ning indeksite i, j korral on antud morfismid $f \colon A \to B_i$, $g \colon A \to B_j$, mille jaoks $\iota_i f \leq \iota_j g$, siis $i = j$.

Järgmise mõiste võib leida näiteks lehelt [14].

Definitsioon 19 (Lahutumatud objektid). Algobjektiga kategooria $\mathscr{C}$ objekti C nimetatakse *lahutumatuks*, kui iga kord, mil $(C, (\iota_i)_{i \in I})$ on objektide C_i, $i \in I$ kokorrutis, leidub parajasti üks $i \in I$, mille korral C_i ei ole algobjekt.

Märkus 8 (Lahutumatud objektid). Paneme tähele, et kui C on lahutumatu, $(C, (\iota_i)_{i \in I})$ on objektide C_i, $i \in I$ kokorrutis ja i_0 on see üheselt määratud indeks, mille korral on C_{i_0} algobjektist erinev, siis selle indeksi korral on ι_{i_0} isomorfism. See tuleb sellest, et C on objektide C_i, $i \in I$ kokorrutis, aga algobjekt on kokorrutamisele mingis mõttes ühikuks. See tähendab, et võime kokorrutisest algobjektid oma sisestusega ära jätta, ilma et kokorrutise objekt muutuks. Seega on (C, ι_{i_0}) objekti C_{i_0} kokorrutis. Kuna ka $(C_{i_0}, 1_{C_{i_0}})$ on objekti C_{i_0} kokorrutis, saame, et leidub isomorfism $f : C_0 \to C$, mille korral $\iota_{i_0} = f 1_{C_{i_0}}$. Seega on ι_{i_0} isomorfism.

Lemma 2 (lause [2] 2.5.3). *Isomorfismi tagasi tõmmates saame isomorfismi.*

Järgmise lause tõestuse tavaliste kategooriate kohta käiv osa põhineb lehel [14] asuva analoogilise tulemuse tõestusel.

Lause 13. *Olgu A infinitaarselt ekstensiivse* **Pos**-*kategooria objekt. Siis säilitab esitatav* **Pos**-*funktor $\mathscr{C}(A, -)$ kõik kokorrutised parajasti siis, kui objekt A on lahutumatu.*

Tõestus. Olgu $\mathscr{C}$ **Pos**-kategooria ning olgu A selle objekt. Oletame, et esitatav **Pos**-funktor $\mathscr{C}(A,-)$ säilitab kõik kokorrutised ja näitame, et A on lahutumatu. Selleks oletame, et $(A,(\iota_i)_{i\in I})$ on objektide A_i, $i \in I$ kokorrutis. Lause 9 järgi leidub parajasti üks indeks $i_0 \in I$ ja morfism $f\colon A \to A_{i_0}$, mille korral saame morfismi $1_A\colon A \to A$ esitada kujul

$$1_A = \iota_{i_0} f,$$

millest saame, et ι_{i_0} on paremalt pööratav. Kui korrutame eelmist võrdust paremalt morfisimiga ι_{i_0}, saame

$$\iota_{i_0} = \iota_{i_0} f \iota_{i_0}.$$

Kuna ι_{i_0} on monomorfism, saame selle vasakult taandada, millest järeldub võrdus $1_A = f\iota_{i_0}$. Seega on ι_{i_0} pööratav vasakult ja paremalt, mistõttu on see isomorfism. Olgu $i \in I$ selline, et $i \neq i_0$. Tähistagu $\mathbf{0}$ nullobjekti. Siis leidub meil lause 12 järgi konservatiivne ruut

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & A_{i_0} \arrow[d, "\iota_{i_0}"] \\ A_i \arrow[r, "\iota_i"'] & A, \end{tikzcd}$$

kusjuures lemma 2 järgi on p isomorfism, kuna ι_{i_0} on isomorfism. Seega on iga $i \neq i_0$ korral A_i isomorfne algobjektiga ning seetõttu ka ise algobjekt. See tähendab, et A on lahutumatu.

Oletame nüüd, et A on lahutumatu ja näitame, et esitatav **Pos**-funktor $\mathscr{C}(A,-)$ säilitab kokorrutisi. Selleks kasutame lauset 9. Olgu antud objektide B_i, $i \in I$ kokorrutis $(B,(\iota_i^B)_{i\in I})$ ja morfism $f\colon A \to B$. Kuna $\mathscr{C}$ on inifinitaarselt ekstensiivne, siis leiduvad objektid A_i, $i \in I$, mille korral on $(A,(\iota_i^A)_{i\in I})$ objektide A_i kokorrutis ning iga $i \in I$ korral leidub konservatiivne ruut

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\iota_i^A"] \arrow[d, "f_i"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B_i \arrow[r, "\iota_i^B"'] & B. \end{tikzcd}$$

Kuna A on lahutumatu, siis on parajasti ühe indeksi $i_0 \in I$ korral A_{i_0} algobjektist erinev, kusjuures $\iota_{i_0}^A$ on isomorfism. Siis

$$f = \iota_{i_0}^B (f_{i_0} (\iota_{i_0}^A)^{-1}).$$

Näitame, et selline esitus on üheselt määratud. Esmalt paneme tähele, et ühegi $i \neq i_0$ korral ei leidu morfismi $m\colon A \to B_i$, nii et $f = \iota_i^B m$. Sel juhul oleks A_i algobjekt. Tagasitõmbaja universaalomaduse järgi leidub siis morfism $A \to A_i$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "1_A"] \arrow[ddr, bend right, "m"'] & & \\
& A_i \arrow[r, "\iota_i^A"] \arrow[d, "f_i"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B_i \arrow[r, "\iota_i^B"'] & B.
\end{tikzcd}$$

Kuna A_i on range algobjekt, peab ka A olema algobjekt. See on aga vastuolus A lahutumatusega.

Oletame, et morfismide $m, n\colon A \to B_i$ korral kehtib

$$\iota_{i_0}^B m = f, \qquad \iota_{i_0}^B n = f.$$

Siis $\iota_{i_0}^B m = \iota_{i_0}^B n$ ning kuna $\iota_{i_0}^B$ on monomorfism, võrduse saame võrduse $m = n$. Sellega oleme näidanud, et kehtib lause 9 esimene tingimus.

Teise tingimuse kontrollimiseks oletame, et $f, g\colon A \to B_i$ on sellised, et $f \leq g$. Siis leiduvad $i, j \in I$ ja $f'\colon A \to B_i$ ja $g'\colon A \to B_j$ nii, et $f = \iota_i^B f'$ ja $g = \iota_i^B g'$. Siis $\iota_i^B f' \leq \iota_j^B g'$ ja infinitaarselt ekstensiivse **Pos**-kategooria definitsiooni järgi kehtib $i = j$ ja $f' \leq g'$, kuna A ei ole lahutumatuse tõttu algobjekt. See ongi aga see, mida oli tarvis näidata ning lause 9 järgi säilitab esitatav **Pos**-funktor $\mathscr{C}(A, -)$ kokorrutise $(B, (\iota_i^B)_{i \in I})$. □

Märkus 9. Kuna objekti lahutumatus ei maini kuidagi kategooria järjestust, saame asjad läbi teha tavaliste infinitaarselt ekstensiivsete kategooriate korral ja eelmise tulemuse kaudu rakendada neid infinitaarselt ekstensiivsete **Pos**-kategooriate jaoks.

Järgmine konstruktsioon annab funktori, mis on erijuht raamatus [8] leheküljel 413 defineeritud koastendamise funktorist. Kuna see on olemas seal raamatus, ei hakka me tõestama, et tõepoolt on tegu funktoriga.

Konstruktsioon 7 (Koastendamise funktor). Olgu $\mathscr{C}$ kõigi kokorrutiste ja lõppobjektiga kategooria. Tähistagu $\mathbf{1}$ mingit fikseeritud lõppobjekti. Defineerime funktori

$$D\colon \mathbf{Set} \to \mathscr{C},$$

mis seab hulgale X vastavusse lõppobjekti $\mathbf{1}$ koastme hulgaga X. Täpsemalt tähendab see, et fikseerime iga hulga X korral mingi objektipere $(\mathbf{1})_{x \in X}$ kokorrutise $(D(X), (\upsilon_x^X)_{x \in X})$. See defineerib funktori D objektidel.

Olgu X ja Y hulgad ja olgu $f: X \to Y$ funktsioon. Defineerime morfismi $D(f)$ kasutades kokorrutise $(D(X), (v_x^X)_{x \in X})$ universaalomadust, kui üheselt määratud morfismi, mis paneb iga $x \in X$ korral kommuteeruma diagrammi

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, "v_x^X"] \arrow[dr, "v_{f(x)}^Y"'] & D(X) \arrow[d, "D(f)"] \\ & D(Y). \end{tikzcd}$$

Märgime, et kuna igas infinitaarselt ekstensiivses kategoorias on olemas vähemalt algobjekt, ei ole ükski infinitaarselt ekstensiivne kategooria tühi.

Järgmises märkuses paneme paika meie kasutatava kaasfunktoritega seotud terminoloogia ning esitame ilma tõestuseta mõned hästi tuntud omadused.

Märkus 10 (Kaasfunktorid). Olgu $\mathscr{C}$ ja $\mathscr{D}$ kategooriad. Olgu $F: \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ja $G: \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ funktorid. Öeldakse, et funktor F on funktori G *vasakpoolne kaasfunktor* ning et funktor G on funktori F *parempoolne kaasfunktor*, kui leidub X ja Y suhes loomulik isomorfism

$$\pi: \mathscr{D}(F(X), Y) \to \mathscr{C}(X, G(Y)).$$

Isomorfismi π nimetatakse *adjunktsiooniks*. Selle adjunktsiooniga käib kaasa loomulik teisendus $\eta: 1_{\mathscr{C}} \to GF$, mida nimetatakse *adjunktsooni ühikuks*, kusjuures adjunktsooni π väärtust kohal $f: F(X) \to Y$ saab avaldada ühiku kaudu järgmiselt:

$$\pi(f) = G(f)\eta_X.$$

Lisaks on iga kategooria $\mathscr{C}$ objekti X korral ühiku komponent η_X *universaalne nool objektist X funktorisse G*. See tähendab, et iga kategooria $\mathscr{D}$ objekti Y ja morfismi $q: X \to G(Y)$ puhul leidub üheselt määratud nool $f: F(X) \to Y$, mille korral kommuteerub kolmnurk

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "q"'] & G(F(X)) \arrow[d, "G(f)"] \\ & G(Y). \end{tikzcd}$$

Lause 14 (Funktori D omadusi). *Olgu $\mathscr{C}$ infinitaarselt ekstensiivne kategooria, millel leidub lõppobjekt ning olgu funktor D:* **Set** $\to \mathscr{C}$ *antud nagu konstruktsioonis 7. Siis on funktoril D järgmised omadused:*

1. *D säilitab kokorrutisi,*

2. *D säilitab lõppobjekte.*

Tõestus. Raamatus [8] on näidatud, et igal koastendamise funktoril leidub parempoolne kaasfunktor. Seega säilitab D kokorrutisi.

See, et D säilitab lõppobjekte, on põhjendatav sellega, lõppobjekt hulkade kategoorias on ühe elemendiga hulk. Seega viib D selle ühest lõppobjektist koosneva pere kokorrutiseks, mis on muidugi lõppobjekt. $\square$

Märkus 11 (Kitsendused funktorile D). Olgu terminoloogia nagu konstruktsioonis 7. Arvestades eelmist lauset, teeme mõned kokkulepped funktori D kohta, mis pole üldisust kitsendavad, kuid teevad arutlemise lihtsamaks.

Olgu hulkade kategoorias fikseeritud mingi lõppobjekt, mida tähistame $\mathbf{1}$. Siis võime üldisust kitsendamata eeldada, et $D(1) = 1$. Samuti, kui X on hulk ning iga $x \in X$ korral tähistab $s_x^X : 1 \to X$ konstantset kujutust elemendile x, on selge, et $(X, (s_x^X)_{x \in X})$ on objektide pere $(1)_{x \in X}$ kokorrutis. Kuna D säilitab kokorrutisi, on $(D(X), D(s_x^X)_{x \in X})$ objektide pere $(1)_{x \in X} = (D(1))_{x \in X}$ kokorrutis. Võime eeldada üldisust kitsendamata, et $(D(X), D(s_x^X)_{x \in X})$ on funktori D defineerimisel fikseeritud kokorrutis. Teisisõnu, sellise kokkuleppega on hulkade X ja Y ning kujutuse $f : X \to Y$ korral $D(f)$ üheselt määratud morfism, mis paneb iga $x \in X$ korral diagrammi

$$\begin{tikzcd}
D(1) \arrow[r, "D(s_x^X)"] \arrow[dr, "D(s^Y_{f(x)})"'] & D(X) \arrow[d, "D(f)"] \\
& D(Y).
\end{tikzcd}$$

kommuteeruma.

Lause 15. *Olgu $\mathscr{C}$ algobjektiga infinitaarselt ekstensiivne kategooria, kus*

$$D : \mathbf{Set} \to \mathscr{C}$$

on nagu konstruktsioonis 7 ja $I : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ on funktori D vasakpoolne kaasfunktor. Olgu C kategooria $\mathscr{C}$ objekt. Siis

- $\operatorname{card}(\mathbf{I}(C)) = 0$*, parajasti siis kui C on algobjekt ning*

- *kui* $\operatorname{card}(\mathbf{I}(C)) = 1$*, siis C on lahutumatu.*

Tõestus. Esimese osa esimese poole tõestuseks oletame, et $\mathbf{I}(C)$ on tühi hulk. See tähendab, et see on algobjekt. Siis, kuna D säilitab kokorrutisi, on ka $D(\mathbf{I}(C))$ algobjekt. Kuna tegu on range algobjektiga ning $\eta_C \colon C \to D(\mathbf{I}(C))$, järeldub, et ka C on algobjekt.

Esimese osa teise poole tõestuseks oletame, et C on algobjekt. Kuna I on vasakpoolne kaasfunktor, säilitab see kokorrutisi. Seega on ka $\mathbf{I}(C)$ algobjekt, mis tähendab, et see on tühi hulk.

Teise osa tõestuseks oletame, et $(C, (\iota_i)_{i \in I})$ on objektide C_i, $i \in I$ kokorrutis. Kuna $\mathbf{I}$ on vasakpoolne kaasfunktor, siis säilitab see kõik kokorrutised. Seega on $(\mathbf{I}(C), ((\iota_i))_{i \in I})$ objektide $\mathbf{I}(C_i)$, $i \in I$ kokorrutis. Kuna hulkade kategoorias arvutatakse kokorrutisi lõikumatute ühenditena, järeldub, et parajasti ühe $i \in I$ korral on hulk $\mathbf{I}(C_i)$ mittetühi. Selle i korral $\mathbf{I}(C_i) \neq \varnothing$. Lause esimest punkti rakendades saame, et parajasti ühe $i \in I$ korral on C_i algobjektist erinev. See tähendab, et C on lahutumatu. □

Definitsioon 20 (Lahutus lahutumatuteks alamobjektideks). Olgu C ekstensiivse kategooria $\mathscr{C}$ objekt. Ütleme, et objektide A_i ja sisestuste $\iota_i \colon A_i \to A$, $i \in I$ süsteem on objekti C *lahutus lahutumatuteks alamobjektideks*, kui iga C_i on lahutumatu ning $(C, (\iota_i)_{i \in I})$ on objektide C_i, $i \in I$ kokorrutis.

Märkus 12. Eelmises definitsioonis mõtleme alamobjekti all objekte A_i koos sisestustega ι_i, mitte lihtsalt objekte A_i. See on kooskõlas sellega, et mõnikord kutsutakse objekti alamobjektideks sinna objekti minevaid monomorfisme. Kuna ekstensiivses kategoorias on kokorrutise sisestused monomorfismid, on selline terminiloogia õigustatud.

Järgmine lause annab meile infinitaarselt ekstensiivsete kategooriate korral tingimuse, mis on lahutuste leidumisega samaväärne.

Teoreem 3. *Olgu $\mathscr{C}$ algobjektiga infinitaarselt ekstensiivne kategooria ja olgu $D \colon \mathbf{Set} \to \mathscr{C}$ konstruktsioonis 7 defineeritud funktor. Siis leidub funktoril D vasakpoolne kaasfunktor parajasti siis, kui kategooria $\mathscr{C}$ igal objektil leidub lahutus lahutumatuteks alamobjektideks.*

Tõestus. Oletame, et funktoril D leidub vasakpoolne kaasfunktor $I \colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$. Olgu X **Pos**-kategooria $\mathscr{C}$ objekt. Kui X on algobjekt, on selle lahutuseks tühi lahutus. See tähendab, et nulli lahutumatu objekti kokorrutis. Edaspidi eeldame, et X ei ole algobjekt. Kehtigu märkuses 11 tehtud kokkulepe. Tähistagu $\mathbf{1}$ seal fikseeritud lõppobjekti. Iga $i \in \mathbf{I}(X)$ korral tähistagu

$$s_i^{\mathbf{I(X)}} \colon \mathbf{1} \to \mathbf{I}(X), \qquad x \mapsto i$$

konstantset kujutust elemendile i. Ilmselt on $(\mathbf{I}(X), (s_i^{\mathbf{I(X)}})_{i\in\mathbf{I}(X)})$ hulkade süsteemi $(\mathbf{1})_{i\in I}$ kokorrutis. Kuna funktor D säilitab kokorrutisi, on $(D(\mathbf{I}(X)), (D(s_i^{\mathbf{I(X)}}))_{i\in\mathbf{I}(X)})$ objektide süsteemi $(D(\mathbf{1})_{i\in I}$ kokorrutis.

Ekstensiivsuse tõttu saame tagasitõmbajat võttes leida objektid $X_i \in \mathscr{C}_0$ ja morfismid $\iota_i\colon X_i \to X$, $q_i\colon X_i \to D(\mathbf{1})$, mille jaoks kommuteerib iga $i \in \mathbf{I}(X)$ korral diagramm

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "q_i"'] & X \arrow[d, "\eta_X"] \\ D(\mathbf{1}) \arrow[r, "D(s_i^{\mathbf{I}(X)})"'] & D(\mathbf{I}(X)), \end{tikzcd}$$

mis on konservatiivne ruut ning $(X, (\iota_i)_{i\in\mathbf{I}(X)})$ on objektide X_i, $i \in I$ kokorrutis. Olgu $i_0 \in D(\mathbf{I}(X))$. Näitame, et X_{i_0} pole algobjekt. Selleks oletame, et X_{i_0} on algobjekt ning jõuame vastuoluni. Ei saa olla, et $D(\mathbf{I}(X))$ on ühe elemendiga hulk, kuna siis oleks $X \cong X_{i_0}$, mis oleks vastuolus sellega, et X pole algobjekt. Seega $\mathbf{card}(D(\mathbf{I}(X))) \geq 2$. Vastuolu tahame saada sellega, et η_X on universaalne nool objektist X funktorisse D.

Olgu $A = \{a, b\}$ mingi fikseeritud kahe elemendiga hulk. Paneme tähele, et kuna X_{i_0} on tühi hulk, on $(X, (\iota_i)_{i\in\mathbf{I}(X)\setminus\{i_0\}})$ objektide X_i, $i \in \mathbf{I}(X) \setminus \{i_0\}$ kokorrutis. Kasutades selle kokorrutise universaalomadust, defineerime morfismi $g\colon X \to D(A)$, kui üheselt määratud morfismi, mis iga $i \in \mathbf{I}(X) \setminus \{i_0\}$ korral paneb kommuteeruma ruudu

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "q_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ D(\mathbf{1}) \arrow[r, "D(s_a^A)"'] & D(A), \end{tikzcd}$$

ehk teisisõnu, rahuldab võrdust

$$g\iota_i = D(s_a^A)q_i.$$

Defineerime kujutused $m, n\colon \mathbf{I}(X) \to A$ seostega

$$m(i) = \begin{cases} a\,, & \text{kui } i \neq i_0 \\ b\,, & \text{kui } i = i_0 \end{cases}, \qquad n\colon i \mapsto a, \qquad i \in \mathbf{I}(X)$$

Ilmselt $m \neq n$. Saame vastuolu, kui näitame, et nii m kui ka n panevad kommuteeruma kolmnurgad

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "g"'] & D(\mathbf{I}(X)) \arrow[d, "D(m)"] \\
& D(A),
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "g"'] & D(\mathbf{I}(X)) \arrow[d, "D(n)"] \\
& D(A).
\end{tikzcd}
$$

Esmalt paneme tähele, et hulgal $\mathbf{I}(X) \setminus \{i_0\}$ on nii m kui n konstantsed. Seega iga $i \in \mathbf{I}(X) \setminus \{i_0\}$ korral

$$ms_i^{\mathbf{I}(X)} = s_a^A, \qquad ns_i^{\mathbf{I}(X)} = s_a^A.$$

Arvutame iga $i \in \mathbf{I}(X) \setminus \{i_0\}$ korral

$$D(m)\eta_X \iota_i = D(m)D(s_i^{\mathbf{I}(X)})q_i = D(ms_i^{\mathbf{I}(X)})q_i = D(s_a^A)q_i = g\iota_i.$$

Taandades kokorrutise $(X, (\iota_i)_{i \in \mathbf{I}(X)\setminus\{i_0\}})$ sisestused ι_i, $i \in \mathbf{I}(X) \setminus \{i_0\}$, saamegi, et mõlemad kolmnurgad kommuteeruvad ning $m \neq n$ tõttu pole η_X universaalne morfism objektist X funktorisse D. See on vastuolu. Seega ei ole ühegi $i \in \mathbf{I}$ korral X_i algobjekt.

Järgmiseks näitame, et iga $i \in \mathbf{I}(X)$ korral sisaldab hulk $\mathbf{I}(X_i)$ kõige rohkem ühe elemendi. Kuna iga $i \in I$ korral on adjunktsiooni ühiku X_i kohaline komponent universaalne nool objektist X_i funktorisse D, leidub üheselt määratud nool $r_i \colon \mathbf{I}(X_i) \to \mathbf{1}$ hulkade kategoorias, mille korral kommuteerub kolmnurk

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\eta_{X_i}"] \arrow[dr, "q_i"'] & D(\mathbf{I}(X_i)) \arrow[d, "D(r_i)"] \\
& D(\mathbf{1}).
\end{tikzcd}
$$

Vaatame iga $i \in \mathbf{I}(X)$ korral järgmist diagrammi.

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\iota_i"] \arrow[dr, "q_i"] \arrow[dd, "\eta_{X_i}"'] & & X \arrow[dd, "\eta_X"] \\
& D(\mathbf{1}) \arrow[dr, "D(s_i)"] & \\
D(\mathbf{I}(X_i)) \arrow[ur, "D(r_i)"] \arrow[rr, "D(\mathbf{I}(\iota_i))"'] & & D(\mathbf{I}(X))
\end{tikzcd}
$$

Selles diagrammis kommuteerub väline ruut adjunktsiooni ühiku η loomulikkuse järgi. Vasakpoolne kolmnurk ja diagrammi parempoolne, ülemine osa kommuteeruvad eelnenud kahe diagrammi kommuteeruvuse tõttu. Tähistagu π adjunktsiooni. Siis arvutame

$$\pi(\mathbf{I}(\iota_i)) = D(\mathbf{I}(\iota_i))\eta_{X_i} = \eta_X \iota_i = D(s_i)q_i = D(s_i)D(r_i)\eta_{X_i} = D(s_i r_i)\eta_{X_i} = \pi(s_i r_i).$$

Kuna π on bijektsioon, siis hulkade kategoorias kehtib

$$\mathbf{I}(\iota_i) = s_i r_i.$$

Kuna I säilitab vasakpoolse kaasfunktorina kokorrutisi, siis on $(\mathbf{I}(X), (\mathbf{I}(\iota_i))_{i\in\mathbf{I}(X)})$ objektide $\mathbf{I}(X_i)$ kokorrutis. Hulkade kategoorias on kokorrutise sisestused injektsioonid. Kuna $\mathbf{I}(\iota_i) = s_i r_i$ on kujutuse $\mathbf{I}(\iota_i)$ tegurdus läbi ühe elemendiga hulga, siis on $\mathbf{I}(\iota_i)$ kujutis ühest elemendist koosnev hulk. Injektiivsuse tõttu järeldub sellest, et $\mathbf{I}(X_i)$ ei saa sisaldada rohkem kui ühe elemendi. Kuna X_i pole algobjekt, siis lause 15 järgi pole $\mathbf{I}(X_i)$ tühi hulk. Seega on hulgas $\mathbf{I}(X_i)$ parajasti üks element ning lause 15 järgi on X_i lahutumatu.

Oleme saanud, et objektid X_i, koos sisestustega ι_i, $i \in \mathbf{I}(X)$, moodustavad objekti X lahutuse lahutumatuteks alamobjektideks.

Teistpidise implikatsiooni tõestamiseks oletame, et kategooria $\mathscr{C}$ igal objektil leidub lahutus lahutumatuteks alamobjektideks. Selleks, et funktoril D leiduks vasakpoolne kaasfunktor, piisab näitamast, et iga objekti $X \in \mathscr{C}_0$ korral leidub universaalne nool objektist X funktorisse D. Fikseerime suvalise objekti $X \in \mathscr{C}_0$.

Olgu $(X, (\iota_i)_{i\in\mathbf{I}(X)})$ kokorrutis, kus $\iota_i\colon X_i \to X$, $i \in \mathbf{I}(X)$ on objekti X lahutus lahutumatuteks alamobjektideks. Defineerime morfismi $\eta_X\colon X \to D(\mathbf{I}(X))$, kui kokorrutise $(X, (\iota_i)_{i\in\mathbf{I}})$ universaalomaduse järgi leiduva üheselt määratud morfismi, mis paneb kommuteeruma ruudu

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & D(1) \arrow[d, "D(s_i^{\mathbf{I}(X)})"] \\ X \arrow[r, "\eta_X"'] & D(\mathbf{I}(X)), \end{tikzcd}$$

kus m_i on üheselt määratud morfism lõppobjekti. Näitame, et η_X on universaalne nool objektist X funktorisse D. Selleks olgu Y mingi hulk ning olgu $q\colon X \to D(Y)$ mingi morfism. Kuna iga $i \in \mathbf{I}(X)$ korral säilitab objekti X_i lahutumatuse tõttu esitatav funktor $\mathscr{C}(X_i, -)$ kõik kokorrutised, saame, et iga $i \in \mathbf{I}(X)$ korral leidub üheselt määratud indeks $f(i) \in D(Y)$ ja üheselt määratud morfism $m_i\colon X_i \to D(\mathbf{1})$, mille korral kommuteerub järgmise diagrammi välimine ruut.

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "m_i"] \arrow[dd, "\iota_i"'] & & D(\mathbf{1}) \arrow[dl, "D(s_i^{\mathbf{I}(X)})"'] \arrow[dd, "D(s_{f(i)}^Y)"] \\
& D(\mathbf{I}(X)) \arrow[dr, "D(f)"] & \\
X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[rr, "q"'] & & D(Y).
\end{tikzcd}$$

Selle diagrammi ülemine kolmnurga sarnane nelinurk kommuteerub morfismi η_X definitsiooni järgi ning parempoolne kolmnurk kommuteerub funktori D definitsiooni järgi. Peame näitama, et alumine kolmnurk kommuteerub. Selleks arvutame iga $i \in I$ korral

$$D(f)\eta_X \iota_i = D(f)D(s_i^{\mathbf{I}(X)})m_i = D(s_{f(i)}^Y)m_i = q\iota_i.$$

Taandades paremalt kokorrutise sisestused, saamegi alumise kolmnurga kommuteerumise. Peame veel näitama, et f on üheselt määratud kujutus, mille korral too alumine kolmnurk kommuteerub. Kui g on mingi teine kujutus $\mathbf{I}(X) \to Y$, mille korral alumine kolmnurk kommuteerub, saame iga $i \in \mathbf{I}(X)$ korral diagrammi

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "m_i"] \arrow[dd, "\iota_i"'] & & D(1) \arrow[dl, "D(s_i^{\mathbf{I}(X)})"'] \arrow[dd, "D(s_{g(i)}^Y)"] \\
& D(\mathbf{I}(X)) \arrow[dr, "D(g)"] & \\
X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[rr, "q"'] & & D(Y),
\end{tikzcd}$$

milles teame kommuteeruvust kõige, välja arvatud välimise ruudu jaoks. Et näidata välimise ruudu kommuteruvust, arvutame

$$q\iota_i = D(g)\eta_X \iota_i = D(g)D(s_i^{\mathbf{I}(X)})m_i = D(s_{g(i)}^Y)m_i.$$

Kuna $f(i)$ pidi olema üheselt määratud indeks, mille korral välimine ruut kommuteerub, saame, et $g(i) = f(i)$, millest i suvalisuse tõttu järeldub $f = g$. Sellega on näidatud, et η_X on universaalne nool objektist X funktorisse D ning seega leidub funktoril D vasakpoolne kaasfunktor. $\square$

Järeldus 3. *Olgu $\mathscr{C}$ algobjektiga kategooria, mille korral leidub funktoril D vasakpoolne kaasfunktor* $\mathbf{I}$. *Olgu X selle objekt. Siis* $\mathrm{card}(\mathbf{I}(X)) = 1$ *parajasti siis, kui X on lahutumatu.*

Tõestus. Lause 15 annab ühte pidi implikatsiooni. Teistpidise implikatsiooni näitamiseks oletame, et X on lahutumatu. Olgu X_i, ι_i eelmise lause tõestuses leitud objekti X lahutus lahutumatuteks alamobjektideks. Teame, et $\mathrm{card}(\mathbf{I}(X))$ pole tühi hulk, siis oleks lause 15 järgi X algobjekt ning poleks seega lahutumatu. Kui oleks $\mathrm{card}(\mathbf{I}(X)) \geq 2$, siis oleks C esitatud kokorrutisena objektidest, millest rohkem kui üks oleks erinev algobjektist. See oleks vastuolus lahutumatusega. Seega $\mathrm{card}(\mathbf{I}(X)) = 1$. □

Märkus 13. Teoreem 3 tähendab, et funktori D omadused mängivad olulist rolli selles, kas meil leiduvad lahutused lahutumatuteks alamobjektideks. Näiteks, kui D ei säilita korrutisi, ei saa sellel vasakpoolset kaasfunktorit leiduda, sest parempoolsed kaasfunktorid peavad säilitama kõik piirid.

See tähelepanek rakendub näiteks topoloogiliste ruumide kategooria korral. On lihtne veenduda, et topoloogiliste ruumide kategooria on infinitaarselt ekstensiivne ning et D seab hulgale vastavusse diskreetse topoloogilise ruumi sellel hulgal. Pole aga keeruline veenduda, et sellel juhul ei säilita D kokorrutisi. Selleks paneme näiteks tähele, et kahe elemendiga diskreetse ruumi lõpmatukordne korrutis iseendaga on Tihhonovi teoreemi tõttu kompaktsete ruumide korrutisena kompaktne. See tähendab aga, et sellel korrutisel ei saa olla topoloogia diskreetne, sest lõpmatu diskreetne ruum pole kompaktne.

Topoloogilist ruumi nimetatakse lokaalselt sidusaks, kui igal punktil leidub lokaalne ümbruste baas, mis koosneb sidusatest hulkadest. Näiteks topoloogilised muutkonnad on lokaalselt sidusad. On võimalik näidata, et lokaalselt sidusate topoloogiliste ruumide kategooria korral leidub funktoril D vasakpoolne kaasfunktor. Meie selles aga ei veendu.

Konkreetsete kategooriate korral võib mõnikord kasutada kaasfunktoriteoreemi, et kontrollida funktori D vasaku kaasfunktori olemasolu.

Toome näite infinitaarselt ekstensiivsest **Pos**-kategooriast, milles leiduvad lahutused lahutumatuteks alamobjektideks. Selleks toome mõned definitsioonid.

Definitsioon 21 (Järjestatud monoidid). *Järjestatud monoidiks* nimetame monoidi koos järjestusega, mille suhtes on monoidi tehe mõlemas muutujas järjestust säilitav. Järjestatud monoidide homomorfismid on järjestust säilitavad monoidide homomorfismid.

Definitsioon 22 (Järjestatud vasakpoolsed polügoonid). *Järjestatud vasakpoolseks polügooniks üle järjestatud monoidi S* nimetame paari (A, λ), kus A on järjestatud hulk ning $\lambda\colon S \to \mathrm{End}(A)$ on järjestatud monoidide monoidide homomorfism. Siin $\mathrm{End}(A)$ tähistab järjestatud hulga A punktiviisiliselt järjestatud endomorfismimonoidi. Kui $s \in S$ ja $a \in A$ kirjutame tavaliselt $\lambda(s)(a)$ asemel lihtsalt sa.

Kui (A, λ), (B, μ) on vasakpoolsed järjestatud polügoonid üle monoidi S, siis *homomorfismiks* $f : (A, \lambda) \to (B, \mu)$ nimetame elementide järjestust säilitavat kujutust $f : A \to B$, mille jaoks iga $s \in S$ ja iga $a \in A$ korral $f(sa) = sf(a)$.

Tavaliselt kirjutame (A, λ) asemel lihtsalt A.

Järjestatud vasakpoolsete polügoonide üle järjestatud monoidi S ja nende homomorfismide kategooriat tähistame ${}_S\mathbf{Pos}$. See on morfismide punktiviisilise järjestuse suhtes ka **Pos**-kategooria. Võib näidata, et tegu on infinitaarselt ekstensiivse **Pos**-kategooriaga mis on täielik ja kotäielik. Kokorrutised selles **Pos**-kategoorias on lihtsalt polügoonide lõikumatud ühendid.

Näide 2 (Järjestatud polügoonid). Artikli [3] teoreem 3.2 ütleb, et järjestatud polügoonide korral leidub lahutus lahutumatuteks alamobjektideks. Selle tõestus on võrdlemisi sarnane tõestusega järjestamata polügoonide korral. Kasutades lauset 11 järjestatud polügooni endomorfismimonoidi jaoks selle lahutuse korral, saamegi teoreemi 1 lihtsa ja otsese üldistuse järjestatud polügoonide jaoks. Seda selles mõttes, et sellel juhul diskreetselt järjestatud polügoone vaadates on tulemus samaväärne tulemusega 1.

4 Ab-kategooriate juht

Siin leiame analoogi teoreemile 2 **Ab**-kategooriate korral. Käsitlus on analoogiline käsitlusele **Pos**-kategooriate puhul.

4.1 Ab-kategooriad

Definitsioon 23 (Ab-kategooriad). **Ab**-*kategooriaks* nimetame kategooriat $\mathscr{C}$, millel on antud iga $A, B \in \mathscr{C}_0$ korral hulga $\mathscr{C}(A, B)$ peal Abeli rühma struktuur, mille korral on morfismide komponeerimine mõlemas muutujas aditiivne. See tähendab, et $a, b, c \in \mathscr{C}_1$ korral kehtib

$$
\begin{aligned}
(a + b)c &= ac + bc \\
a(b + c) &= ab + bc \,,
\end{aligned}
$$

millal iganes vastavad tehted defineeritud on.

Raamat [9] nimetab Ab-kategooriaid aditiivseteks kategooriateks ning mõnikord nimetatakse neid ka eeladitiivseteks kategooriateks.

Lause 16 (Nullmorfismid). *Olgu antud* **Ab**-*kategooria* $\mathscr{A}$ *ning selle objektid* A, B, C *ja* D. *Kuna* $\mathscr{A}(B, C)$ *on Abeli rühm, siis leidub selles liitmise suhtes ühikelement, mida nimetame nullmorfismiks ning tähistame* $0 \in \mathscr{A}(B, C)$. *Iga* $f \in \mathscr{A}(A, B)$ *ja* $g \in \mathscr{A}(C, D)$ *korral kehtib* $0f = 0$ *ja* $g0 = 0$ *(kus komponeerimise tulemused on vastavate objektide vahelised nullmorfismid).*

Tõestus. Tõestuseks märgime lihtsalt, et komponeerimine on kummaski muutujas eraldi Abeli rühmade homomorfism. Abeli rühmade homomorfismid viivad aga aditiivse ühiku aditiivseks ühikuks. □

Näide 3 (Ringid). Definitsioonist on selge, et igale ringile R võime seada vastavusse ühe objektiga **Ab**-kategooria, mille ainsa morfismihulga elementideks on ringi R elemendid ning nende korrutamine ja liitmine on defineeritud nagu ringis R. Samuti on iga **Ab**-kategooria $\mathscr{C}$ objekti A korral $\mathscr{C}(A, A)$ loomulikul viisil ring. Selle samaväärsuse tõttu kutsutakse **Ab**-kategooriad mõnikord ka ringoidideks.

Näide 4 (Ab-kategooria Ab). Abeli rühmade kategooria on loomulikul viisil vaadeldav **Ab**-kategooriana. Morfismide liitmine on defineeritud punktiviisiliselt.

Näide 5 (Ab-kategooria R-Mod). Iga ringi R korral on kategooria R-**Mod**, vasakpoolsetest moodulitest üle selle ringi, loomulikul viisil vaadeldav Ab-kategooriana. Morfismide liitmine on defineeritud punktiviisiliselt.

Definitsioon 24 (Ab-funktorid). Olgu $\mathscr{C}$ ja $\mathscr{D}$ mingid **Ab**-kategooriad. Siis nimetame **Ab**-*funktoriks* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ tavalist funktorit $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, mille korral on

$$F_{A,B}\colon \mathscr{C}(A,B) \to \mathscr{D}(F(A),F(B))$$

Abeli rühmade homomorfism. See tähendab, et F on selline funktor, mille korral iga $a, b \in \mathscr{C}(A,B)$ korral kehtib $F(a+b) = F(a) + F(b)$. Mõnikord nimetatakse **Ab**-funktoreid ka additiivseteks funktoriteks [9] (lk. 197).

Definitsioon 25 (Kokorrutised Ab-kategooriates). *Kokorrutiseks* **Ab**-kategoorias nimetame kokorrutist tavaliste kategooriate mõttes.

Näide 6 (Kokorrutis Ab-kategoorias Ab). Objektide $A_i \in \mathbf{Ab}_0$, $i \in I$ kanooniline kokorrutis on

$$\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, (\iota_i)_{i\in I}\right),$$

kus

$$\bigoplus_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in A_i, \operatorname{card}\{i \in I \mid a_i \neq 0\} < \infty\}$$

tähistab Abeli rühmade A_i, $i \in I$ otsesummat ja

$$\iota_{i_0}\colon A_{i_0} \to \bigoplus_{i\in I} A_i, \quad a \mapsto (a_i)_{i\in I}, \quad a_i = \begin{cases} a\,, & \text{kui } i = i_0 \\ 0\,, & \text{kui } i \neq i_0 \end{cases}$$

on sisestused. Tavaliselt samastame sellel juhul elemendid $a \in A_i$ ning $\iota_i(a) \in \bigoplus_{i\in I} A_i$ ja tähistame $\bigoplus_{i\in I} A_i$ elementi $(a_i)_{i\in I}$ summana

$$\sum_{i\in I} a_i,$$

kusjuures tühi summa on null. Tehted on otsesummal defineeritud punktiviisiliselt.

Märkus 14 (Summamärgist ja lõplikkusest). Märgime, et iga kord, kui kirjutame avaldise kujul

$$\sum_{i\in I} a_i,$$

käib vaikimisi kaasas eeldus, et $a_i \neq 0$ kõige rohkem lõpliku hulga indeksite $i \in I$ jaoks. Seda me eraldi ei maini. Järgnevas on tihti olukorrad, kus peab olema kõige rohkem lõplik hulk elemente mingist elementide perest $a_i \in I$ nullist erinev. Tavaliselt on selle kindlaks tegemine lihtne ning käsitluse segasemaks tegemise vältimise eesmärgil me enamasti tekstis antud teemat ei puutu.

4.2 Konstruktsioonid

Konstruktsioon 8 (Ab-kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$). Olgu antud mingi **Ab**-kategooria $\mathscr{C}$. Defineerime **Ab**-kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$. Objektideks **Ab**-kategoorial $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ on paarid (F, X), kus X on hulk ja $F \colon X \to \mathscr{C}_0$ on funktsioon, mille korral eksisteerib objektide $F(x), x \in X$ kokorrutis. Defineerime morfismide Abeli rühmad võrdusega

$$\mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y)) = \prod_{x \in X} \bigoplus_{y \in Y} \mathscr{C}((F(x), G(y)).$$

See hulk on ilmsel viisil üksüheses vastavuses hulgaga

$$\left\{ (a_x^y)_{x \in X, y \in Y} \in (\mathscr{C}^1)^{X \times Y} \mid \alpha_x^y \in \mathscr{C}(F(x), G(y)), \mathrm{card} \left\{ y \in Y \,:\, \alpha_x^y \neq 0 \right\} < \infty \right\},$$

seega võime Abeli rühma $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y))$ elemente vaadata kui morfismide peresid $(a_x^y)_{x \in X, y \in Y}$, ehk lühidalt kirjutades (a_x^y). Kuna soovime rõhutada fakti, et iga $x \in X$ korral leidub kõige rohkem lõplik hulk indekseid $y \in Y$, mille korral $a_x^y \neq 0$, kirjutame, arvestades näites 6 kirjutatut, morfismide kogumi $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y))$ elemendid kujul

$$\left(\sum_{y \in Y} a_x^y \right)_{x \in X},$$

ehk lühidalt

$$\left(\sum a_x^y \right),$$

kus summeerimine käib ülemise indeksi järgi. Abeli rühma $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y))$ aditiivne ühik on sellel kujul $\left(\sum 0 \right)$ ning

$$\left(\sum a_x^y \right) + \left(\sum b_x^y \right) = \left(\sum \left(a_x^y + b_x^y \right) \right).$$

Olgu $\left(\sum b_y^z \right) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((G, Y), (H, Z))$ ja $\left(\sum \alpha_x^y \right) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y))$. Nende morfismide komponeerimine **Ab**-kategoorias $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ on defineeritud seosega

$$\left(\sum b_y^z \right) \left(\sum \alpha_x^y \right) = \left(\sum_{z \in Z} \sum_{y \in Y} b_y^z a_x^y \right)_{x \in X}.$$

Olgu (F, X) **Ab**-kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ objekt. Selle objekti ühikmorfismiks on

$$\left(\sum_{y \in X} \delta_x^y \right)_{x \in X}, \quad \delta_x^y = \begin{cases} 1_{F(x)}, & \text{kui } x = y \\ 0, & \text{kui } x \neq y \end{cases}.$$

Lause 17 (Konstruktsiooni korrektsus). *Eelnev konstruktsioon annab tõepoolest tulemuseks* **Ab***-kategooria.*

Tõestus. Olgu antud mingi **Ab**-kategooria $\mathscr{C}$ ning olgu $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ nagu eelnevas konstruktsioonis. Selles tõestuses olgu (F, X), (G, Y) ja (H, Z) fikseeritud objektid **Ab**-kategoorias $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$.

Esmalt veendume, et komponeerimine on korrektselt defineeritud. Olgu antud $\left(\sum \alpha_x^y\right) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y))$ ning $\left(\sum \beta_y^z\right) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((G, Y), (H, Z))$. Selleks, et nende kompositsioon

$$\left(\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\beta_y^z\alpha_x^y\right)_{x\in X}$$

oleks korrektselt defineeritud, peaks iga $x \in X$ ja $z \in Z$ korral olema summa

$$\sum_{y\in Y}\beta_y^z\alpha_x^y$$

defineeritud ning selle tulemus peaks olema Abeli rühma $\mathscr{C}(F(x), H(z))$ element. Kuna $y \in Y$ korral $\alpha_x^y \in \mathscr{C}(F(x), G(y))$ ja $\beta_y^z \in \mathscr{C}(G(y), H(z))$, siis ilmselt $\beta_y^z\alpha_x^y \in \mathscr{C}(F(x), H(z))$, mis lahendab mõlemad mainitud küsimused.

Veendume, et konstruktsioonis defineeritud ühik on tõepoolest komponeerimise ühikuks. Olgu $\left(\sum \alpha_x^y\right) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y))$. Siis

$$\begin{aligned}
\left(\sum \delta_y^z\right)\left(\sum \alpha_x^y\right) &= \left(\sum_{z\in Y}\sum_{y\in Y}\delta_y^z\alpha_x^y\right)_{x\in X} \\
&= \left(\sum_{z\in Y}\delta_z^z\alpha_x^z\right)_{x\in X} && (\text{kuna } \ y \neq z \Rightarrow \delta_x^y = 0) \\
&= \left(\sum \alpha_x^z\right) && (\text{kuna } \delta_z^z = 1_{F(z)}).
\end{aligned}$$

Ühikuga paremalt korrutades käib kontroll sarnaselt. Näeme, et see arvutus meenutab tõestust, et ühikmaatriks on tõepoolest maatriksite korrutamise suhtes ühikuks. Komponeerimise assotsiatiivsuse kontroll ja komponeerimise aditiivsuse kontroll näevad välja sarnased maatriksite juhule ning arutluskäik käib samu radu pidi. Seega ei hakka me neid kirja panema. □

Lause 18 (Kokorrutised (Ab-)kategoorias Ab). *Kui kategoorias* **Ab** *on antud paar $(A, (\iota_i)_{i\in I})$, kus $\iota_i \colon A_i \to A$ iga $i \in I$ korral, on see paar Abeli rühmade A_i, $i \in I$ kokorrutis parajasti siis, kui iga $a \in A$ on parajasti ühel viisil esitatav kujul $\sum_{i\in I}\iota_i(a_i)$, kus $a_i \in A_i$.*

Tõestus. Oletame, et $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ on objektide $A_i, i \in I$ kokorrutis. Nagu kirjas näites (6), on objektide A_i kanooniliseks kokorrutiseks otsesumma $\left(\bigoplus_{i\in I} A_i, (\iota_i')_{i\in I}\right)$, kus sisestused on defineeritud eeskirjaga

$$\iota_{i_0}' \colon A_{i_0} \to \bigoplus_{i\in I} A_i, \quad a \mapsto (a_i)_{i\in I}, \quad a_i = \begin{cases} a\,, & \text{kui } i = i_0 \\ 0\,, & \text{kui } i \neq i_0 \end{cases}$$

See tähendab, et leidub Abeli rühmade isomorfism

$$\theta \colon \bigoplus_{i\in I} A_i \to A, \quad \forall i \in I \,:\, \theta\iota_i' = \iota_i.$$

Olgu $a \in A$, siis otsesumma konstruktsioonist teame, et leiduvad üheselt määratud $a_i \in A_i, i \in I$, mille korral $\theta^{-1}(a) = \sum_{i\in I} \iota_i'(a_i)$, kusjuures kõige rohkem lõpliku hulga indeksite $i \in I$ korral $a_i \neq 0$. Siis ka

$$a = \theta(\theta^{-1}(a)) = \theta\left(\sum_{i\in I} \iota_i'(a_i)\right) = \sum_{i\in I} \theta(\iota_i'(a_i)) = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i).$$

Üheselt määratuse näitamiseks oletame, et elementide $a_i' \in A_i, i \in I$ korral kehtib samuti $a = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i')$. Siis

$$\theta^{-1}(a) = \theta^{-1}\left(\sum_{i\in I} \iota_i(a_i')\right) = \sum_{i\in I} \theta^{-1}(\iota_i(a_i')) = \sum_{i\in I} \iota_i'(a_i').$$

Koos võrdusega $\theta^{-1}(a) = \sum_{i\in I} \iota_i'(a_i)$, saame, et

$$\sum_{i\in I} \iota_i'(a_i') = \sum_{i\in I} \iota_i'(a_i),$$

millest sellise esituse üheselt määratuse tõttu järeldub, et $a_i' = a_i$ iga $i \in I$ korral.

Nüüd tõestame vastupidise implikatsiooni. Oletame, et iga $a \in$ korral leiduvad üheselt määratud $a_i \in A_i, i \in I$, mille korral $a = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i)$. Näitame, et siis on kokorrutise universaalomadus täidetud. Olgu antud mingi Abeli rühm Q ning homomorfismid $q_i \colon A_i \to Q, i \in I$. Konstrueerime homomorfismi $q \colon A \to Q$, mille korral kehtib iga $i \in I$ jaoks $q_i = q\iota_i$. Olgu antud $a \in A$ ja olgu $a = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i)$, kus $a_i \in A_i$. Defineerime

$$q(a) = \sum_{i\in I} q_i(a_i).$$

Siis ilmselt $q_i = q\iota_i$ ning tegu on homomorfismiga, kuna $b = \sum_{i\in I} \iota_i(b_i)$, $b_i \in A_i$ korral

$$a + b = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i) + \sum_{i\in I} \iota_i(b_i) = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i + b_i)$$

ning seega

$$q(a) + q(b) = \sum_{i\in I} q_i(a_i) + \sum_{i\in I} q_i(b_i) = \sum_{i\in I} q_i(a_i + b_i) = q(a + b).$$

Paneme tähele, et q on ainus homomorfism, mis rahuldab võrdust $q_i = q\iota_i$, sest kui $r\colon A \to Q$ on homomorfism, mis rahuldab iga $i \in I$ korral $q_i = r\iota_i$, siis iga $a \in A$ korral

$$r(a) = r\left(\sum_{i\in I} \iota_i(a_i)\right) = \sum_{i\in I} r(\iota_i(a_i)) = \sum_{i\in I} q_i(a_i)) = q(a). \qquad \square$$

Märkus 15 (Kokorrutised (Ab-)kategoorias Ab). Eelmise lause kohta on teha oluline tähelepanek. Olgu definitsioonid nagu eelmise lause sõnastuses. Vaatame tingimust, et $a \in A$ on parajasti ühel viisil esitatav kujul $\sum_{i\in I} \iota_i(a_i)$, kus $a_i \in A_i$.

See tähendab, et *leidub kõige rohkem lõplik hulk indekseid $i \in I$ mille korral $a_i \neq 0$.* Tõepoolest, summa $\sum_{i\in I} \iota_i(a_i)$ eksistents tähendab, et kõige rohkem lõpliku arvu indeksite $i \in I$ korral $\iota_i(a_i) \neq 0$. Lisaks kehtib $\iota_i(a_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0$, kuna vastasel juhul võiksime defineerida

$$a'_j = \begin{cases} 0, & \text{kui } j = i \\ a_j, & \text{kui } j \neq i \end{cases},$$

mille korral kehtiks samuti

$$a = \sum_{i\in I} \iota_i(a'_i),$$

mis oleks vastuolus esituse ühesusega.

Konstruktsioon 9 (Ab-funktor coprod). Olgu $\mathscr{C}$ mingi **Ab**-kategooria ning olgu $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ nagu eelmises konstruktsioonis. Konstrueerime **Ab**-funktori

$$\mathbf{coprod}\colon \mathscr{D}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C}.$$

Iga $(F, X) \in (\mathscr{D}_{\mathscr{C}})_0$ korral fikseerime kategooria $\mathscr{C}$ objektide $F(x)$, $x \in X$ mingi kokorrutise $(\mathbf{coprod}((F, X)), (\iota^F_x)_{x\in X})$. Siit saame, kuidas **coprod** objektidel toimib.

Järgmiseks defineerime **Ab**-funktori **coprod** morfismidel. Selleks olgu antud $\left(\sum \alpha^y_x\right) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y))$, kus $(F, X), (G, Y) \in \mathscr{D}_{\mathscr{C}}$. Siis iga $x \in X$ korral

$$\sum_{y\in Y} \iota^G_y \alpha^y_x \colon F(x) \to \mathbf{coprod}((G, Y))$$

ning kasutame nende morfismide jaoks kokorrutise universaalomadust. See annab meile morfismi

$$\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha^y_x\right)\right) \colon \mathbf{coprod}((F, X)) \to \mathbf{coprod}((G, Y)),$$

mis on üheselt määratud morfism, mis rahuldab iga $x \in X$ korral tingimust

$$\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha_x^y\right)\right)\iota_x^F = \sum_{y\in Y}\iota_y^G\alpha_x^y. \tag{5}$$

Lause 19 (Konstruktsiooni korrektsus). *Eelnevas konstruktsioonis defineeritud* **coprod** *on tõepoolest* **Ab**-*funktor.*

Tõestus. Selles tõestuses olgu (F, X), (G, Y) ja (H, Z) objektid **Ab**-kategoorias $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$.

Esmalt kontrollime aditiivsust. Olgu $\left(\sum \alpha_x^y\right)$ ja $\left(\sum \beta_x^y\right)$ nooled objektist (F, X) objekti (G, Y). Iga $x \in X$ korral arvutame

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha_x^y\right)\right) + \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \beta_x^y\right)\right)\right)\iota_x^F \\
&= \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha_x^y\right)\right)\iota_x^F + \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \beta_x^y\right)\right)_x^S \\
&= \sum_{y\in Y}\iota_y^G\alpha_x^y + \sum_{y\in Y}\iota_y^G\beta_x^y \\
&= \sum_{y\in Y}\left(\iota_y^G\alpha_x^y + \iota_y^G\beta_x^y\right) \\
&= \sum_{y\in Y}\iota_y^G\left(\alpha_x^y + \beta_x^y\right) \\
&= \mathbf{coprod}\left(\left(\sum_{y\in Y}\left(\alpha_x^y + \beta_x^y\right)\right)\right)\iota_x^F \\
&= \mathbf{coprod}\left(\left(\sum_{y\in Y}\alpha_x^y\right) + \left(\sum_{y\in Y}\beta_x^y\right)\right)\iota_x^F
\end{aligned}$$

Kuna ι_x^F on kokorrutise sisestused, saame need koos paremalt taandada, mis annab meile selle, mida soovisime.

Viimaks kontrollime ühikute säilitamist ja komponeerimisega kooskõlas olemist.

Arvutame iga $x \in X$ korral

$$\begin{aligned}
\mathbf{coprod}\left(\left(\sum_{y\in X}\delta_x^y\right)_{x\in X}\right)\iota_x^F &= \sum_{y\in Y}\iota_y^F\delta_x^y \\
&= \iota_x^F 1_{F(x)} \qquad \text{(kuna iga teine liidetav on 0)} \\
&= 1_{\mathbf{coprod}(F,X)}\iota_x^F.
\end{aligned}$$

Siit sisestused taandades, saame, et **coprod** säilitab ühikud.

Olgu $\left(\sum \alpha_x^y\right) : (F, X) \to (G, Y)$ ja $\left(\sum \beta_y^z\right) : (G, Y) \to (H, Z)$. Arvutame iga $x \in X$ korral

$$\begin{aligned}
\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \beta_y^z\right)\left(\sum \alpha_x^y\right)\right)\iota_x^F &= \mathbf{coprod}\left(\left(\sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\beta_y^z\alpha_x^y\right)_{x\in X}\right)\iota_x^F \\
&= \sum_{z\in Z}\iota_z^H\sum_{y\in Y}\beta_y^z\alpha_x^y \\
&= \sum_{z\in Z}\sum_{y\in Y}\iota_z^H\beta_y^z\alpha_x^y \\
&= \sum_{y\in Y}\sum_{z\in Z}\iota_z^H\beta_y^z\alpha_x^y \\
&= \sum_{y\in Y}\left(\sum_{z\in Z}\iota_z^H\beta_y^z\right)\alpha_x^y \\
&= \sum_{y\in Y}\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \beta_y^z\right)\right)\iota_y^G\alpha_x^y \\
&= \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \beta_y^z\right)\right)\sum_{y\in Y}\iota_y^G\alpha_x^y \\
&= \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \beta_y^z\right)\right)\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha_x^y\right)\right)\iota_x^F,
\end{aligned}$$

millest sisestused taandades, saame komponeerimisega kooskõlas olemise. □

4.3 Põhitulemus ja järeldused

Definitsioon 26 (Esitatav Ab-funktor). Esitatava **Ab**-funktori mõiste on sama, mis tavalise esitatava funktori mõiste, ainult et lähtekategooria peab olema **Ab**-kategooria ning sihtkategooria peab olema **Ab**-kategooria **Ab**. Sellest piisab, et tegu oleks **Ab**-funktoriga.

Märgime, et **Ab**-kategooriate korral kehtivad samasugused tulemused kokorrutiste ühesuse ning säilitamise kohta nagu olid mainitud **Pos**-kategooriate korral.

Definitsioon 27. Olgu $\mathscr{C}$ mingi **Ab**-kategooria ja olgu A ning $A_i, i \in I$ selle objektid kusjuures $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ olgu objektide $A_i, i \in I$ kokorrutis. Defineerime iga $i \in I$ korral morfismid $p_i \colon A \to A_i$ kokorrutise universaalomadusega, kui üheselt määratud morfismid, mis rahuldavad iga $i, j \in I$ korral tingimusi

$$p_i\iota_i = 1, \qquad j \neq i \Rightarrow p_i\iota_j = 0.$$

Morfisme p_i, $i \in I$ nimetatakse kokorrutise $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ *projektsioonideks*. Illustratsiooniks on diagrammid

$$
\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "1_{A_i}"'] & A \arrow[d, dotted, "p_i"] \\
& A_i,
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "\iota_j"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[d, dotted, "p_i"] \\
& A_i.
\end{tikzcd}
$$

Lause 20 (Esitatava Ab-funktori poolt kokorrutise säilitamine). *Olgu A, B ja B_i, $i \in I$ objektid* **Ab**-*kategoorias $\mathscr{C}$, kusjuures olgu $(B, (\iota_i)_{i\in I})$ objektide B_i, $i \in I$ kokorrutis. Esitatav* **Ab**-*funktor $\mathscr{C}(A, -)$ säilitab selle kokorrutise parajasti siis, kui iga $a\colon A \to B$ korral leiduvad morfismid $a_i\colon A \to B_i$, $i \in I$, nii et $a = \sum \iota_i a_i$ ning $a_i \neq 0$ kõige rohkem lõpliku hulga indeksite $i \in I$ korral.*

Kui need samaväärsed tingimused kehtivad, on morfismid a_i, $i \in I$ üheselt määratuse tingimust $a = \sum \iota_i a_i$ rahuldavad morfismid.

Tõestus. Eeldame, et
$$\big(\mathscr{C}(A, B), \mathscr{C}(A, \iota_i)_{i\in I}\big)$$
on objektide $\mathscr{C}(A, B_i)$, $i \in I$ kokorrutis. Lause 18 järgi tähendab see parajasti seda, et iga $a \in \mathscr{C}(A, B)$ korral leiduvad üheselt määratud $a_i \in \mathscr{C}(A, B_i)$, mille korral $a = \sum_{i\in I} \mathscr{C}(A, \iota_i)(a_i)$. Illustreerime olukorda (mitte ilmtingimata kommuteeruva) diagrammiga:

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "a_i"'] \arrow[d, "a"] \\
B_i \arrow[r, "\iota_i"] & B.
\end{tikzcd}
$$

Arvutades saame
$$a = \sum_{i\in I} \mathscr{C}(A, \iota_i)(a_i) = \sum_{i\in I} \iota_i a_i,$$
mis annab, arvestades märkust 15, selle, mida tahtsime näidata.

Eeldame, et iga $a\colon A \to B$ esitub mingite morfismide $a_i\colon A \to B_i$, $i \in I$ korral kujul
$$a = \sum_{i\in I} \iota_i a_i.$$
Siis
$$a = \sum_{i\in I} \iota_i a_i = \sum_{i\in I} \mathscr{C}(A, \iota_i)(a_i).$$

Lause 18 kasutamiseks peame veel näitama a_i, $i \in I$ on ainsad seda võrdust rahuldavad elemendid. Oletame, et lisaks mingite $a'_i \in \mathscr{C}(A, B_i)$, $i \in I$ korral kehtib

$$a = \sum_{i \in I} \mathscr{C}(A, \iota_i)(a'_i) = \sum_{i \in I} \iota_i a'_i.$$

Siis

$$0 = \sum_{i \in I} \iota_i (a_i - a'_i).$$

Suvalise $j \in I$ korral seda võrdust vasakult kokorrutise projektsiooniga $p_j : A \to A_j$ korrutades, saame

$$0 = p_j 0 = p_j \sum_{i \in I} \iota_i (a_i - a'_i) = \sum_{i \in I} (p_j \iota_i)(a_i - a'_i) = (p_j \iota_j)(a_j - a'_j) = a_j - a'_j,$$

mis annab elementide a_i üheselt määratuse. □

Teoreem 4 (Tingimus $\mathbf{coprod}_{F,G}$ pööratavuseks). *Olgu $\mathscr{C}$ **Ab**-kategooria ja olgu antud mingid objektid $(F, X), (G, Y) \in (\mathscr{D}_{\mathscr{C}})_0$. Siis kujutus*

$$\mathbf{coprod}_{(F,X),(G,Y)} : \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y)) \to \mathscr{C}(\mathbf{coprod}((F, X)), \mathbf{coprod}((G, Y)))$$

abeli rühmade isomorfism parajasti siis, kui iga $x \in X$ korral säilitab esitatav **Ab**-*funktor*

$$\mathscr{C}(F(x), -) : \mathscr{C} \to \mathbf{Ab}$$

objektide $G(y)$, $y \in Y$ kokorrutise $\mathbf{coprod}((G, Y))$.

Tõestus. Olgu antud mingid $(F, X), (G, Y) \in (\mathscr{D}_{\mathscr{C}})_0$ koos vastavate kokorrutistega

$$(\mathbf{coprod}((F, X)), (\iota^F_x)_{x \in X}), \;\; (\mathbf{coprod}((G, Y)), (\iota^G_y)_{y \in Y}),$$

mille fikseerisime **Ab**-funktori **coprod** defineerimisel.

Eeldame, et $\mathbf{coprod}_{(F,X),(G,Y)}$ on Abeli rühmade isomorfism ja näitame, et suvaliselt fikseeritud $x_0 \in X$ korral säilitab esitatav **Ab**-funktor $\mathscr{C}(F(x_0), -)$ kokorrutise

$$(\mathbf{coprod}((G, Y)), (\iota^G_y)_{y \in Y}).$$

Selleks kasutame lauset 20. Olgu antud $a \in \mathscr{C}(F(x_0), \mathbf{coprod}((G, Y)))$. Peame näitama, et see esitub kujul

$$a = \sum_{y \in Y} \iota^G_y \alpha^y, \qquad \alpha^y \in \mathscr{C}(F(x_0), G(y)), \;\; y \in Y.$$

Kasutades kokorrutise universaalomadust morfismide

$$b_x = \begin{cases} a\,, & \text{kui } x = x_0 \\ 0\,, & \text{kui } x \neq x_0 \end{cases},$$

kus $x \in X$, jaoks, saame morfismi $\overline{a}\colon \mathbf{coprod}((F,X)) \to \mathbf{coprod}((G,Y))$, mis rahuldab võrdust $\overline{a}\iota^F_{x_0} = a$. Kuna eeldasime, et $\mathbf{coprod}_{(F,X),(G,Y)}$ on pööratav, saame leida morfismi $\left(\sum \alpha^y_x\right) : (F,X) \to (G,Y)$ kategoorias $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$, mis rahuldab

$$\overline{a} = \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha^y_x\right)\right).$$

Korrutame selle võrduse mõlemaid pooli paremalt morfismiga $\iota^F_{x_0}$ ja arvutame

$$\begin{aligned} a &= \overline{a}\iota^F_{x_0} \\ &= \mathbf{coprod}\left(\sum \alpha^y_x\right)\iota^F_{x_0} \\ &= \sum_{y\in Y} \iota^G_y \alpha^y_{x_0}. \end{aligned}$$

Seega

$$\alpha^y_{x_0} \in \mathscr{C}(F(x_0), G(y)), y \in Y$$

on pere mida otsisime.

Nüüd näitame teistpidist implikatsiooni. Eeldame, et iga $x \in X$ korral on

$$\left(\mathscr{C}(F(x), \mathbf{coprod}((G,Y)), \mathscr{C}\left(F(x), \iota^G_y\right)_{y\in Y}\right)$$

objektide $\mathscr{C}(F(x), G(y)),\ y \in Y$ kokorrutis. Näitame, et $\mathbf{coprod}_{(F,X),(G,Y)}$ on pööratav. Esmalt näitame injektiivsust. Aditiivuse tõttu piisab, kui näitame, et tingimusest $\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha^y_x\right)\right) = 0$ järeldub $\left(\sum \alpha^y_x\right) = 0$. Olgu $\left(\sum \alpha^y_x\right)$ selline, et

$$\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha^y_x\right)\right) = 0.$$

Fikseerime nüüd suvalise $x \in X$ ning arvutame

$$0 = \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha^y_x\right)\right)\iota^F_x = \sum_{y\in Y} \iota^G_y \alpha^y_x.$$

Lause 20 järgi on seda võrdust rahuldav pere $\alpha^y_x,\ y \in Y$ üheselt määratud. Kuna seda võrdust rahuldab ka pere $(0)_{y\in Y}$, saame iga $y \in Y$ korral võrduse $\alpha^y_x = 0$. Kuna $x \in X$ oli suvaline, siis saame ka, et $\left(\sum \alpha^y_x\right) = 0$. Sellega on injektiivsus tõestatud.

Näitame nüüd kujutuse $\mathbf{coprod}_{(F,X),(G,Y)}$ sürjektiivsust. Olgu

$$a\colon \mathbf{coprod}((F,X)) \to \mathbf{coprod}((G,Y)).$$

Peame leidma $\left(\sum \alpha^y_x\right) : (F,X) \to (G,Y)$, mille korral $\mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha^y_x\right)\right) = a$.

Olgu $x \in X$ suvaline. Siis

$$a\iota_x^F : F(x) \to \mathbf{coprod}((G, Y)).$$

Saame nüüd lause 20 järgi, et leiduvad morfismid $\alpha_x^y \in \mathscr{C}(F(x), G(y))$, $y \in Y$, mille korral

$$a\iota_x^F = \sum_{y \in Y} \mathscr{C}(1, \iota_y^G)(\alpha_x^y) = \sum_{y \in Y} \iota_y^G \alpha_x^y.$$

Nii konstrueerime morfismi $\left(\sum \alpha_x^y\right) : (F, X) \to (G, Y)$, mille korral

$$\mathbf{coprod}\left(\sum \alpha_x^y\right) \iota_x^F = \sum_{y \in Y} \iota_y^G \alpha_x^y = a\iota_x^F.$$

Taandades koos paremalt sisestused ι_x^F, saame

$$a = \mathbf{coprod}\left(\left(\sum \alpha_x^y\right)\right),$$

mis tõestab sürjektiivsuse. □

Sellest tulemusest saame teha samasugused järeldused, nagu olid **Pos**-kategoo–riate juures sarnasel tulemusel.

Järeldus 4 (Endomorfismimonoidi esitus). *Olgu $(F, X) \in (\mathscr{D}_{\mathscr{C}})_0$. Siis säilitab esitatav* **Ab***-funktor $\mathscr{C}(F(x), -)$ iga $x \in X$ korral objektide $F(x)$ kokorrutise parajasti siis, kui objekti* $\mathbf{coprod}((F, X))$ *järjestatud endomorfismimonoid ja $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (F, X))$ on isomorfsed.*

Järeldus 5 (Alamkategooria esitus). *Olgu $\mathscr{D}$ selline* **Ab***-kategooria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ täielik alam-***Ab***-kategooria, mille korral iga $(F, X), (G, Y) \in \mathscr{D}_0$ ja iga $x \in X$ korral säilitab esitatav* **Ab***-funktor $\mathscr{C}(F(x), -)$ kokorrutise* $\mathbf{coprod}((G, Y))$*. Siis on $\mathscr{D}$ ekvivalentne objektide* $\mathbf{coprod}((F, X))$*, $F \in \mathscr{D}_0$ poolt määratud* **Ab***-kategooria $\mathscr{C}$ täieliku alam-***Ab***-kategooriaga.*

4.4 Millal on võimalik tulemust rakendada?

Siin vaatame mõnda olukorda, mille korral on teoreem 4 rakendatav. Järgnevas on põhiliselt kas lehel [11] mainitud tulemused või nende üldistused.

Kui räägime allpool ringidest ja moodulitest, mõtleme ühikelemendiga assotsiatiivseid ringe ning vasakpoolseid mooduleid. Analoogilised tulemused kehtivad sümmeetria tõttu muidugi ka parempoolsete moodulite jaoks.

Järgmine lause on umbes pool raamatu [9] teoreemist 2 (lk. 194).

Lause 21 (Lõplikud kokorrutised). *Olgu $\mathscr{C}$ mingi* **Ab**-*kategooria ja olgu A ning A_i, $i \in I$ selle objektid, kusjuures* $\mathrm{card}(I) < \infty$. *Siis on objekt A objektide A_i, $i \in I$ kokorrutis parajasti siis, kui leiduvad morfismid*

$$\iota_i \colon A_i \to A, \quad p_i \colon A \to A_i,$$

mis rahuldavad iga $i, j \in I$ korral tingimusi

$$p_i \iota_i = 1, \qquad j \neq i \Rightarrow p_i \iota_j = 0. \tag{6}$$

$$\sum_{i \in I} \iota_i p_i = 1, \tag{7}$$

kusjuures sel juhul on ι_i, $i \in I$ vastava kokorrutise sisestused ning p_i, $i \in I$ selle projektsioonid.

Tõestus. Raamatus [9] on sõnastatud ja tõestatud tulemus juhu jaoks, kus $\mathrm{card}(I) = 2$. See tõestus läheb ilmsete muudatustega läbi ka juhul $1 \leq \mathrm{card}(I) < \infty$. Arvestades, et tühi summa on 0, võib veenduda, et tõestus läheb läbi ka juhul $\mathrm{card}(I) = 0$. □

Järgmine lause on seotud raamatu [9] lausega 4 (lk. 197). See ütleb, et **Ab**-funk–tor säilitab lõplikud kokorrutised.

Järeldus 6 (Lõplike kokorrutiste säilitamine). *Olgu $\mathscr{C}$ mingi* **Ab**-*kategooria, siis iga* **Ab** *funktor F säilitab kõik lõplikud kokorrutised..*

Tõestus. Paneme lihtsalt tähele, et eelmises lauses toodud tingimus kokorrutiseks olemiseks koosneb ainult samasustest, mis on antud komponeerimise ning liitmise kaudu. See tähendab, et F säilitab need samasused, mistõttu säilitab see ka kokorrutise. □

Järeldus 7. *Olgu $\mathscr{C}$ mingi* **Ab**-*kategooria ja olgu (F, X) ning (G, Y)* **Ab**-*kategoo–ria $\mathscr{D}_{\mathscr{C}}$ objektid, kusjuures* $\mathrm{card}(Y) < \infty$. *Siis on*

$$\mathbf{coprod}_{(F,X),(G,Y)} \colon \mathscr{D}_{\mathscr{C}}((F, X), (G, Y)) \to \mathscr{C}(\mathbf{coprod}((F, X)), \mathbf{coprod}((G, Y)))$$

pööratav.

Tõestus. Tuleneb otse eelmisest järeldusest ning teoreemist 4. □

Raamatus [9] on sealkandis, kus on eelmised kaks tulemust, kirjas ka teoreemi 4 variant lõplike kokorrutiste korral. Nagu eelmisest järeldusest näeme, on sel juhul olukord võrdlemisi lihtne.

Definitsioon 28 (Monomorfsed pered). Olgu $\mathscr{C}$ mingi kategooria, olgu A ja B_i, $i \in I$ selle objektid ning olgu $a_i : A \to B_i$, $i \in I$ morfismid selles kategoorias. Ütleme, et morfismid $a_i, i \in I$ moodustavad *monomorfse pere* kui iga objekti C ning morfismide $f, g : C \to A$ korral kehtib

$$f = g \Leftrightarrow \forall i \in I \,:\, a_i f = a_i g.$$

Lause 22. *Olgu A, C ja $C_i, i \in I$ objektid* **Ab**-*kategoorias $\mathscr{C}$, kusjuures $(C, (\iota_i)_{i\in I})$ olgu objektide $C_i, i \in I$ kokorrutis ning selle kokorrutise projektsioonid p_i moodustagu monomorfse pere. Siis säilitab esitatav* **Ab**-*funktor $\mathscr{C}(A, -)$ kokorrutise $(C, (\iota_i)_{i\in I})$ parajasti siis, kui iga morfismi $f : A \to C$ korral leidub kõige rohkem lõplik hulk indekseid $i \in I$, mille korral $p_i f \neq 0$.*

Tõestus. Oletame, et esitatav **Ab**-funktor $\mathscr{C}(A, -)$ säilitab kokorrutise $(C, (\iota_i)_{i\in I})$. Lause 20 järgi tähendab see, et iga $f \in \mathscr{C}(A, C)$ korral leiduvad üheselt määratud $f_i \in \mathscr{C}(A, C_i), i \in I$ mille korral lausest

$$f = \sum_{i\in I} \mathscr{C}(A, \iota_i)(f_i) = \sum_{i\in I} \iota_i f_i.$$

Korrutades $j \in I$ korral selle samasuse pooli vasakult morfismiga p_j, saame

$$p_j f = \sum_{i\in I} (p_j \iota_i) f_i = (p_j \iota_j) f_j = f_j$$

mida oligi vaja, kuna kõige rohkem lõpliku hulga indeksite $j \in I$ korral on $f_j \neq 0$.

Teistpidise implikatsiooni näitamiseks eeldame, et iga $f : A \to C$ korral leidub kõige rohkem lõplik arv indekseid $i \in I$, mille korral $p_i f \neq 0$. Defineerime

$$f_i = p_i f$$

ning arvutame iga $j \in I$ korral

$$p_j \sum_{i\in I} \iota_i f_i = \sum_{i\in I} p_j \iota_i p_i f = p_j \iota_j p_j f = p_j f.$$

Kuna morfismid $p_j, j \in I$ moodustavad monomorfse pere, saame siit järeldada, et

$$\sum_{i\in I} \iota_i f_i = f.$$

□

Lause 23. *Olgu R ring.* **Ab**-*kategoorias R*-**Mod** *moodustavad mistahes kokorrutise projektsioonid monomorfse pere.*

Tõestus. Olgu C ja $C_i, i \in I$ objektid **Ab**-kategoorias R-**Mod** ning olgu $(C, (\iota_i)_{i\in I})$ objektide C_i, $i \in I$ kokorrutis. Olgu antud mingi R-moodul A ning kaks morfismi $f, g \colon A \to C$. Oletame, et $f \neq g$ ning näitame, et leidub projektsioon p_i, mille korral $p_i f \neq p_i g$.

Kuna $f \neq g$, leidub $x \in A$, mille korral $f(x) \neq g(x)$. Moodulite korral saame tõestada analoogilise tulemuse lausele 18. Seega saame elementidele $f(x)$ ja $g(x)$ üheselt määratud $c_i^f \in C_i$ ja $c_i^g \in C_i$ jaoks esitused

$$f(x) = \sum_{i\in I} \iota_i(c_i^f), \qquad g(x) = \sum_{i\in I} \iota_i(c_i^g).$$

Kuna $f(x) \neq g(x)$, peab leiduma $j \in I$ mille korral $c_j^f \neq c_j^g$. Siis

$$p_j(f(x)) = p_j(\sum_{i\in I} \iota_i(c_i^f)) = \sum_{i\in I}(p_j\iota_i)(c_i^f) = (p_j\iota_j)(c_j^f) = c_j^f.$$

Samuti saame $p_j(g(x)) = c_j^g$ ning seega

$$p_j(f(x)) = c_j^f \neq c_j^g = p_j(g(x)).$$

Seetõttu $p_j f \neq p_j g$. □

Lause 24. *Olgu A, B, C ja $C_i, i \in I$ objektid* **Ab**-*kategoorias $\mathscr{C}$, kusjuures olgu $(C, (\iota_i)_{i\in I})$ objektide $C_i, i \in I$ kokorrutis. Olgu $f \colon A \to B$ epimorfism ning säilitagu esitatav* **Ab**-*funktor $\mathscr{C}(A, -)$ kokorrutisi. Siis säilitab ka $\mathscr{C}(B, -)$ kokorrutisi.*

Tõestus. Peame näitama, et iga $f \colon B \to C$ avaldub kujul $f = \sum_{i\in I} \iota_i f_i$, kus $f_i \colon B \to C_i$.

Teame, et morfism $fe \colon A \to C$ avaldub üheselt kujul

$$fe = \sum_{i\in I} \iota_i d_i.$$

Nagu varem oleme teinud, saame eelmise võrduse mõlemaid pooli morfismiga p_j, $j \in I$ korrutades, et $d_j = p_j f e$ iga $j \in I$ korral.

Oletame, et $j \in I$ on selline, et $p_j f e = 0$. Siis ka $p_j f e = 0e$, millest järeldub, kuna e on epimorfism, et $p_j f = 0$. Seega on samuti kõige rohkem lõplik hulk indekseid $j \in I$, mille korral $p_j f = 0$. Seega saame kirjutada

$$fe = \sum_{i\in I} \iota_i p_i f e = \left(\sum_{i\in I} \iota_i p_i f\right) e,$$

millest e paremalt taandades saame

$$f = \sum_{i\in I} \iota_i p_i f,$$

mis ongi soovitud kujul esitus. □

Lause 25. *Olgu $\mathscr{C}$ mingi* **Ab**-*kategooria, olgu K lõplik hulk ning olgu $A_k, k \in K$ ja $B_i, i \in I$ mingid selle* **Ab**-*kategooria objektid. Kui iga $k \in K$ korral säilitab esitatav* **Ab**-*funktor $\mathscr{C}(A_k, -)$ objektide $B_i, i \in I$ kokorrutise $(B, (\iota_i)_{i\in I})$, siis säilitab selle ka esitatav* **Ab**-*funktor $\mathscr{C}\left(\coprod_{k\in K} A_k, -\right)$.*

Tõestus. Olgu $(A, (\kappa_k)_{k\in K})$ objektide $A_k, k \in K$ kokorrutis ja $f : A \to B$.. Iga $k \in K$ korral leiduvad üheselt määratud morfismid $f_i^k : A_k \to B_i$, $i \in I$, mille korral

$$f\kappa_k = \sum \iota_i f_i^k.$$

Rakendades fikseeritud $i \in I$ korral kokorrutise universaalomadust morfismidele f_i^k, $k \in K$, saame üheselt määratud morfismid $f_i : A \to B_i$, mille korral

$$f_i\kappa_k = f_i^k.$$

Nüüd saame iga $k \in K$ korral arvutada

$$\left(\sum_{i\in I} \iota_i f_i\right)\kappa_k = \sum_{i\in I} \iota_i(f_i\kappa_k) = \sum_{i\in I} \iota_i f_i^k = f\kappa_k,$$

millest paremalt sisestused $\kappa_k, k \in K$ taandades, saame

$$\sum_{i\in I} \iota_i f_i = f.$$

□

Ringi R võime vaadata loomulikul viisil R-moodulina, kus elemendi r toime on lihtsalt elemendiga r vasakult korrutamine. Selle mooduliga seoses saame järgmise tulemuse.

Lause 26. *Olgu R mingi ring. Siis R-mooduli R korral säilitab esitatav* **Ab**-*funktor R-*$\mathbf{Mod}(R, -)$ *kõik kokorrutised.*

Tõestus. Olgu $A_i, i \in I$ mingid R-moodulid ning olgu $(A, (\iota_i)_{i\in I})$ nende kokorrutis. Olgu $f : R \to A$ moodulite homomorfism. Leiduvad üheselt määratud elemendid $a_i \in A_i$, $i \in I$, mille korral $f(1) = \sum_{i\in I} \iota_i(a_i)$. Kuna R on vaba moodul moodustajaga 1, saame defineerida seosega $f_i(1) = a_i$ homomorfismid $f_i : R \to A_i$. Lisaks saame iga $x \in R$ korral

$$\left(\sum \iota_i f_i\right)(x) = x\left(\sum \iota_i f_i\right)(1) = x\sum \iota_i(f_i(1)) = x\sum \iota_i(a_i) = xf(1) = f(x),$$

mistõttu $\sum \iota_i f_i = f$ □

Järeldus 8. *Olgu R ring ja olgu A lõplikult moodustatud R-moodul. Siis säilitab esitatav* **Ab**-*funktor R-*$\mathbf{Mod}(A, -)$ *kõik kokorrutised.*

Tõestus. Kasutame eelnevaid lauseid. Kuna R korral säilitab R-$\mathbf{Mod}(R, -)$ kõik kokorrutised, säilitab iga naturaalarvu $n \geq 1$ korral need ka R-$\mathbf{Mod}(\coprod_1^n R, -)$. Moodul $\coprod_1^n R$ on vaba moodul n moodustajal. Iga lõplikult moodustatud mooduli A korral leidub lõplik arv moodustajaid, millele me mingi $n \geq 1$ korral saame vaba mooduli $\coprod_1^n R$ moodustajad peale kujutada. See indutseerib epimorfismi $\coprod_1^n R \to A$. Me oleme näidanud, et siis säilitab ka R-$\mathbf{Mod}(A, -)$ kõik kokorrutised. □

Olgu R mingi ring. Esitame tulemuse, mis klassifitseerib sellised R-moodulid A, mille korral säilitab esitatav $\mathbf{Ab}$-funktor

$$R\text{-}\mathbf{Mod}(A, -)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$$

kõik kokorrutised.

Järgmine lause on raamatus [1] harjutus (b) leheküljel 54. Lehel [11] on selle tõestus.

Lause 27. *Olgu olgu R mingi ring ning olgu antud R-moodul A. Siis säilitab esitatav funktor R-$\mathbf{Mod}(A, -)$ kokorrutisi parajasti siis, kui mooduli A iga pärisalammoodulite ahela $A_k \subsetneq A$, $A_k \subseteq A_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ korral on $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mooduli A pärisalammoodul.*

Artikkel [7] näitab, et eelmises lauses antud tingimusest üldjuhul ei järeldu, et moodul A oleks lõplikult moodustatud ning annab muuhulgas allpool oleva pöördtulemuse vasakpoolsete Noetheri ringide jaoks. Tuletame meelde, et ringi R kutsutakse *vasakpoolseks Noetheri ringiks*, kui iga ringi R vasakpoolsete ideaalide ahela $I_j, I_j \subseteq I_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ korral leidub $j_0 \in \mathbb{N}$, nii et iga $j \geq j_0$ korral $I_j = I_{j_0}$.

Lause 28. *Olgu R vasakpoolne Noetheri ring ja olgu A R-moodul. Siis säilitab esitatav $\mathbf{Ab}$-funktor*

$$R\text{-}\mathbf{Mod}(A, -)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$$

kõik kokorrutised parajasti siis, kui A on lõplikult moodustatud.

Kuna iga korpus on vasakpoolne Noetheri ring, siis vektorruumide $\mathbf{Ab}$-kategooriate korral on olukord võrdlemisi lihtne, kuna lõplikult moodustatud vektorruumid on parajasti lõplikumõõtmelised vektorruumid.

Kuna iga lõplikumõõtmelise vektorruumi võime esitada mingite ühemõõtmeliste alamruumide kokorrutisena, võime vaadata teoreemi 4, kui üldistust teoreemile lineaarsete kujutuste maatriksite kaudu esitamise kohta.

On morphisms between coproducts in the ordered and in the additive case
Master's Thesis
Ülo Reimaa

Summary

In mathematics morphisms between various structures are often studied. In particular, the endomorphisms of a structure can be of interest. The collection of endomorphisms of a given structure is a monoid. Studing that monoid can be easier, if the monoid is decomposed into simpler monoids using some construction. One such construction was given by Vladimir Flaicher and Ulrich Knauer in 1988. They proved that the endomorphism monoid of an act over a monoid is isomorphic to the wreath product of some monoid and some small category.

In the present work we try to generalize that result. We interpret the essence of the theorem to be, that to know morphisms between objects and the composition of these morphisms, it suffices to know the morphisms between suitable subobjects of the given objects and the compositions of these morphisms between subobjects. The theorem we mentioned gives a result of that sort for the representation of the endomorphism monoid of an act over a monoid.

We generalize the result in different directions. For one, we do not restrict ourselves to any specific category, but try to give a result for all categories. Another direction in which we generalize the result, is that we try to represent full subcategories of given categories not only endomorphism monoids. The third direction of generalization is enrichment.

To be more precise, we look at two specific cases of enrichment. We hope that in doing so, finding a common generalization for them might become easier. We view enrichment over the category of partially ordered sets and enrichment over the category of Abelian groups.

The case of partially ordered sets is similar to the case of ordinary categories. Indeed, ordinary categories can be viewed as order enriched categories with discrete order. We prove a generalization of [8] **theorem II.7.7** and see how what we proved relates to it. We also prove a result relating to the existence of nice decompositions for a certain subclass of categories.

The case of enrichement over Abelian groups is somewhat different from the case of ordinary categories. It does not generalize it. We prove an analogue of [8] **theorem II.7.7**. And present some simple, known results, that the author found here and there, that clarify the situation and help in applying the proven theorem. We also present, without proof, a couple of known results in the case of modules over a ring.

5 Viited

[1] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, Mathematics Lecture Note Series, 1968,

[2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994,

[3] S. Bulman-Fleming, Z. Liu, X. Shi, F. Wang, Indecomposable, projective, and flat S-posets *Comm. Algebra* 33(1), 2005, 235-251,

[4] A. Carboni, S. Lack, R.F.C. Walters, Introduction to extensive and distributive categories, *Journal of Pure and Applied Algebra* 84, 1993, 149-158,

[5] V. Fljaišer, U. Knauer, Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories, *Lecture Notes in Mathematics* 1320, 1988, 84-96,

[6] J. W. Gray, *Formal Category Theory: Adjointness for 2-Categories*, Lecture Notes In Mathematics 391, 1970,

[7] T. Head, Preservation of coproducts by $\mathbf{Hom}_R(M,-)$, *Journal of Pure and Applied Algebra* 2(2), 1972, 235-238,

[8] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, *Monoids Acts and Categories*, Walter de Gruyter, 2000,

[9] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician.*, Springer-Verlag New York, Ann Harborj, 1998,

[10] nlab, *action of a category on a set*, 2011, (`http://ncatlab.org/nlab/show/action+of+a+category+on+a+set`), [9.05.2013],

[11] nlab, *coproduct-preserving representable* 2013, (`http://ncatlab.org/nlab/show/coproduct-preserving+representable`), [9.05.2013],

[12] nlab, *extensive 2-category*, 2013, (`http://ncatlab.org/nlab/show/extensive+2-category`), [9.05.2013],

[13] nlab, *extensive category*, 2013, (`http://ncatlab.org/nlab/show/extensive+category`), [9.05.2013],

[14] nLab, *indecomposable object*, 2011, (`http://ncatlab.org/nlab/show/indecomposable+object`), [9.05.2013].

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina *Ülo Reimaa*
(sünnikuupäev: 01.05.1988)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose *Morfismidest kokorrutiste vahel järjestatud ja additiivsel juhul*, mille juhendaja on *Valdis Laan*

   1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 04.06.2013